

分类号：TP273

密 级：公开

学校代码：10363

学 号：2220320184



安徽工程大学

Anhui Polytechnic University

硕士学位论文

题 目 基于参数估计的时变

系统迭代学习控制

论 文 作 者 皇甫紫薇

校 内 导 师 李炜（副教授）

校 外 导 师 沈权（高级工程师）

专业学位类别 电子信息

研究方向（领域） 控制工程及应用

论文提交日期： 2025 年 5 月 15 日

分类号：TP273

单位代码：10363

密 级：公开

学 号：2220320184

题 目 基于参数估计的时变系统迭代学习控制

题 目 Iterative Learning Control of Time Varying
Systems Based on Parameter Estimation

学生姓名： 皇甫紫薇

校内导师： 李炜（副教授）

校外导师： 沈权（高级工程师）

专业学位类别： 电子信息

研究方向（领域）： 控制工程及应用

论文答辩日期： 2025 年 05 月 12 日

安徽工程大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：我恪守学术道德，崇尚严谨学风。所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已明确注明和引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品及成果的内容。论文为本人亲自撰写，我对所写的内容负责，并完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

学位论文作者签名：皇甫紫微

日期：2025年5月15日

安徽工程大学学位论文版权使用授权书

学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅或借阅。本人授权安徽工程大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保密 ☐，在 _____ 年解密后适用本版权书。

本学位论文属于

不保密 ☒。

学位论文作者签名：皇甫紫微

指导教师签名：李峰

日期：2025年5月15日

日期：2025年5月15日

基于参数估计的时变系统迭代学习控制

摘 要

迭代学习控制是一种针对重复性任务设计的高级控制策略,通过利用历史误差信息和输入信号优化当前的控制输入,在工业机器人、数控加工和医疗设备等领域表现出显著的应用潜力。传统迭代学习控制通常假设系统动态特性在重复任务中保持不变,然而在实际工程中,系统参数常因环境扰动或任务需求变化而呈现时变特性,这使得传统算法在应对时变系统时存在一定的局限性。为此,本文聚焦于基于参数估计的时变系统迭代学习控制,旨在解决时变系统在高精度路径跟踪中的控制难题,设计了适用于时变系统的迭代学习控制算法,并通过理论分析证明了其鲁棒性和收敛性。最后,通过仿真和实验验证了所构建算法的有效性,并通过对比实验进一步分析其优越性。具体而言,本文研究内容主要包括以下三个方面:

(1)基于极限学习机估计机制的迭代学习控制方法:首先通过构建极限学习机模型求解时变参数的估计问题;随后根据系统动力学的相关特征,以及系统性能函数设计对应的迭代学习控制律,进行期望轨迹的跟踪;最后将基于极限学习机估计方法的迭代学习控制算法与传统方法进行仿真对比,结果表明该方法的跟踪误差在 10^{-1}mm 与 10^{-3}mm 之间波动,具有更高的跟踪精度,同时参数估计的准确性也显著提升。

(2)基于反向传播神经网络估计机制的迭代学习控制方法:首先

根据系统参数特性构建合适的反向传播神经网络模型；然后结合控制目标设计更新律，从而改进传统迭代学习控制算法，并与参数估计方法耦合形成综合算法；最后对算法的收敛性进行理论分析和实验验证，通过工业物联网加工平台验证了算法的性能，结果表明该方法的跟踪误差可稳定在 10^{-3} mm，充分证明其优越性。

(3)基于期望最大化估计机制的含噪声干扰迭代学习控制方法：针对实际生产中噪声干扰对参数估计的影响，首先采用期望最大化估计机制算法估计含噪时变参数；然后根据噪声特性设计相应的更新律，同时分析其收敛性能；最后通过精密加工实验平台进行实验验证，其结果表明该算法不仅能够有效处理噪声干扰，且其收敛精度高于前述方法，跟踪误差后期可稳定在接近 10^{-4} mm 量级，从而验证了该算法的鲁棒性和优越性。

关键词：迭代学习控制，参数估计，极限学习机，反向传播神经网络，期望最大化

ITERATIVE LEARNING CONTROL OF TIME VARYING SYSTEMS BASED ON PARAMETER ESTIMATION

ABSTRACT

Iterative learning control is an advanced control strategy designed for repetitive tasks, which optimizes the current control input by utilizing historical error information and input signals. It has shown significant application potential in fields such as industrial robots, numerical control machining, and medical equipment. Traditional iterative learning control typically assumes that the dynamic characteristics of the system remain unchanged in repetitive tasks. However, in practical engineering, system parameters often exhibit time-varying characteristics due to environmental disturbances or changes in task requirements, which limits traditional algorithms in dealing with time-varying systems. Therefore, this article focuses on iterative learning control of time-varying systems based on parameter estimation, aiming to solve the control problem of time-varying systems in high-precision path tracking. An iterative learning control algorithm suitable for time-varying systems is proposed, and its robustness and convergence are proved through theoretical analysis. Finally, the effectiveness of the proposed algorithm was verified through numerical simulations and experiments, and its superiority was

further validated through comparative experiments. Specifically, the research content of this article mainly includes the following three aspects:

(1) Iterative learning control method based on extreme learning machine estimation mechanism: Firstly, the estimation problem of time-varying parameters is solved by constructing an extreme learning machine model; Subsequently, an iterative learning control law is designed to track the reference trajectory based on the relevant characteristics of system dynamics and the system performance function. Finally, the iterative learning control algorithm based on extreme learning machine estimation method will be compared with traditional methods through simulation. The results show that the tracking error of this method fluctuates between 10^{-1} mm and 10^{-3} mm. At the same time, the accuracy of parameter estimation is significantly improved.

(2) Iterative learning control method based on back propagation neural network estimation mechanism: Firstly, a suitable back propagation neural network model is established according to the parameter properties of the system. Then, corresponding update laws are designed based on its control objectives to improve the traditional iterative learning control algorithm, and a coupled algorithm is formed with the parameter estimation method. Finally, theoretical analysis and experimental verification are conducted on the convergence of the

algorithm. The performance of the algorithm is validated through industrial processing experimental platform, and the results show that the tracking error of the method could be stable at 10^{-3} mm, fully demonstrating its feasibility and superiority.

(3) Iterative learning control method with noise interference based on expected maximization estimation mechanism: In the parameter estimation process, the actual noise interference in the production process is considered, and the expected maximization method is used to estimate the parameters with noise interference. Relevant update laws are designed based on the actual presence of noise, and their convergence performance is analyzed. Through testing on the experimental platform, the results show that the algorithm can not only effectively handle noise interference, but also has higher convergence accuracy than the previous methods. The tracking error can be stabilized at nearly 10^{-4} mm level in the later stage, thus verifying the robustness and practicality of the algorithm.

Huangfu Ziwei(Electronic Information)

Supervised by Li Wei

KEY WORDS: iterative learning control, parameter estimation, extreme learning machine, back propagation neural network, expectation maximization

主要符号表

符号	代表意义
	实数集合
	自然数集合
n	n 维实数列向量集合
$m \times n$	$m \times n$ 阶实数矩阵
$\ A\ $	矩阵 A 的欧几里得(Euclidean)范数
A^{-1}	矩阵 A 的逆
A^T	矩阵 A 的转置
$A^\dagger$	矩阵 A 的伪逆
$\rho(A)$	矩阵 A 的谱半径
$\langle a, b \rangle_R = a^T R b$	在希尔伯特(Hilbert)空间中权重矩阵 R 定义的 a, b 的内积
$\ x\ _R^2 = x^T R x$	在希尔伯特(Hilbert)空间中权重矩阵 R 定义的 x 的诱导范数
$L_2^n[a, b]$	定义在区间 $[a, b]$ 上的在 n 取值的勒贝格(Lebesgue)平方可和序列空间
$*$	矩阵的伴随因子
∇	梯度
I	适当维度的单位矩阵
tr	矩阵的迹
Δ, Ξ	模型不确定性
w	状态实际扰动, 在实际应用中为外部干扰
v	观测实际扰动, 在实际应用中为测量干扰
Γ	利普希兹连续常数
Λ	强凸系数

目录

第 1 章 绪论	1
1.1 研究背景与意义	1
1.2 研究现状及发展趋势	2
1.2.1 迭代学习控制研究现状	2
1.2.2 时变系统参数估计的研究现状	3
1.3 迭代学习控制在实际生产中的应用	4
1.4 本文主要工作与章节介绍	4
第 2 章 相关基础理论知识	6
2.1 迭代学习控制数学描述	6
2.2 强凸函数的相关定理	8
2.3 收敛性分析方法	9
第 3 章 基于极限学习机估计机制的迭代学习控制	10
3.1 问题描述	10
3.1.1 系统动力学	10
3.1.2 时变参数描述	11
3.1.3 极限学习机回归算法	11
3.2 迭代学习控制算法设计	12
3.2.1 算法描述	12
3.2.2 收敛性分析	13
3.2.3 鲁棒性分析	13
3.3 仿真验证	15
3.3.1 跟踪任务描述	15
3.3.2 参数估计结果分析	15
3.3.3 跟踪性能分析	16
3.4 本章小结	18
第 4 章 基于反向传播神经网络估计机制的迭代学习控制	19
4.1 问题描述	19

4.1.1 系统动力学	19
4.1.2 时变系统迭代学习控制问题	20
4.2 迭代学习控制算法设计	20
4.2.1 迭代学习控制方案	20
4.2.2 算法描述	22
4.2.3 收敛性分析	23
4.2.4 鲁棒性分析	23
4.3 反向传播神经网络参数估计方法	27
4.3.1 反向传播神经网络描述	27
4.3.2 贝叶斯正则化算法	28
4.4 实验验证与对比分析	29
4.4.1 跟踪任务描述	29
4.4.2 参数估计结果分析	30
4.4.3 跟踪性能分析	32
4.5 本章小结	35
第 5 章 基于期望最大化估计机制的含噪声干扰的迭代学习控制	36
5.1 问题描述	36
5.1.1 存在噪声干扰的时变系统动力学	36
5.1.2 考虑噪声存在的参数估计问题	37
5.2 期望最大化参数估计方法	38
5.2.1 期望值最大化算法	38
5.2.2 期望最大化算法收敛性分析	38
5.3 迭代学习控制算法设计	40
5.3.1 时变系统迭代学习控制任务描述	40
5.3.2 算法实施	41
5.3.3 算法描述	42
5.3.4 收敛性分析	43
5.4 实验验证与对比分析	49
5.4.1 跟踪任务描述	49

5.4.2 实验平台介绍	49
5.4.3 参数估计结果分析	50
5.4.4 跟踪性能分析	52
5.5 本章小结	54
第 6 章 总结与展望	55
6.1 总结	55
6.2 展望	56
参考文献	57
攻读学位期间发表的学术论文及申请的专利	63
致谢	64

第 1 章 绪论

1.1 研究背景与意义

迭代学习控制(Iterative Learning Control, ILC)作为一种针对重复性任务的高效控制方法,其核心在于通过历史跟踪误差和输入信息数据的迭代修正,不断调整当前的控制输入,实现重复运行系统在有限区间上输出轨迹能对期望轨迹的精准跟踪,优化控制系统性能^[1-3]。迭代学习控制作为智能控制领域新方向,为控制理论研究开辟新路径,对于在有限时间内执行给定重复任务的系统,其在性能和精度等方面具有显著优势。由于迭代学习控制适用于存在模型不确定性、时变非线性特征的复杂工业场景,因此在机械臂轨迹跟踪^[4,5]、高速列车^[6]、超精密晶圆级^[7]等高精度需求领域已有广泛应用。

随着现代工业技术的发展,实际工程中对于执行重复操作任务的系统面临的环境日益复杂。由于工作环境和外部载荷的影响,结构的参数如质量、刚度及阻尼往往在运行过程中表现出很强的时变性^[8]。时变系统是指系统的参数(如质量、刚度和阻尼)在运行过程中随时间变化的动态系统。例如,高速飞行器在飞行过程中,由于气动加热导致结构材料的物理特性发生变化,进而引起刚度和阻尼的时变^[9];机械臂在伸展过程中,其动力学参数也会随姿态的变化而变化^[10]。

这些时变特性使得系统的控制问题变得复杂,传统迭代学习控制的系统动态特性在迭代过程中保持时不变,然而,时变系统的控制面临诸多挑战。首先,时变系统的参数往往难以精确建模,系统的动力学方程难以准确建立。其次,时变系统的参数变化具有非重复性,即每次运行时的参数变化规律可能不同,这进一步增加了控制的难度。同时,迭代学习控制的应用面临新的挑战:一方面,系统参数的不确定性会降低误差收敛速度甚至导致发散;另一方面,时变系统在实际工程中会受到外部环境干扰和噪声的影响,导致系统的控制性能下降。因此,如何在高精度路径跟踪任务中有效控制时变系统,成为了当前控制领域的一个重要研究方向。

为解决上述问题,本文将参数估计引入到时变系统迭代学习控制框架中,通过在线识别时变参数的方法处理对于有模型不确定、难以建立系统动力学方程的

系统，并结合参数估计机制设计迭代学习控制更新律，实现对期望轨迹的高精度跟踪，从而拓宽迭代学习控制的应用场景。因此，这一研究方向促进了迭代学习控制理论的完善，并且对于实际工业过程具有应用价值。

1.2 研究现状及发展趋势

1.2.1 迭代学习控制研究现状

迭代学习控制作为控制领域中一种重要的控制方法，最早是针对工业机器人的重复动作控制提出，自提出以来受到了广泛关注。在过去几十年间，迭代学习控制在理论研究和实际应用方面都取得了显著进展。ILC 被广泛应用于各种领域，而经典的 ILC 具有六个设计假设^[11]，即固定参考信号、固定试验长度、固定初始状态、固定系统动力学、固定输入更新律和系统动态 G 可逆，限制了其潜在的应用范围。迭代学习控制的基本框图如图 1-1 所示，其中 $u_k(t)$ 为第 k 批次系统的输入信号， $u_{k+1}(t)$ 为第 $k+1$ 批次系统的输入信号， $y_k(t)$ 为第 k 批次系统的输出信号， $e_k(t) = r(t) - y_k(t)$ 是第 k 批次系统的误差， $r(t)$ 是系统的期望轨迹。

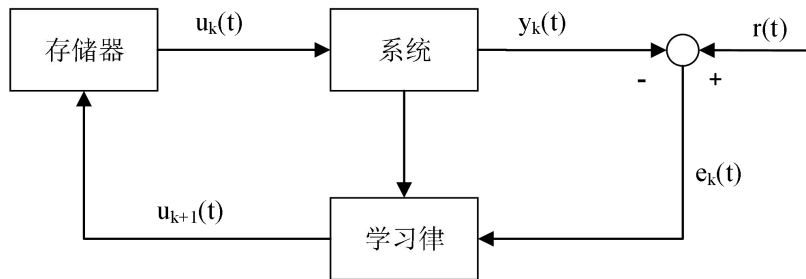


图 1-1 迭代学习控制基本框图

Arimoto 等人^[12]将 ILC 作为一个新的研究方向正式提出，其设计目标是找到一个迭代更新定律，使得输入信号收敛于一个唯一值，输出轨迹收敛于一个期望轨迹，对于 ILC 的六个假定在实际应用中存在很大程度的局限性。因此，部分学者认为 ILC 适用于任意具有重复性的应用场景，在 ILC 领域中，关于去除假设条件的研究，国内外学者取得了不错的成果。Freeman^[13]首先提出移除参考信号固定的假定，只考虑几个关键性时间点上的跟踪效果，将 ILC 的应用推广到点对点跟踪任务，并与 Tan^[14]一起提出约束条件下的点对点 ILC 算法。

受上述研究启发，Barton 等人^[15]也通过移除这项假定，建立起一套空间坐标

下的 ILC 算法并将其应用。随后, Tao 等人^[16,17]将迭代学习控制运用到期望轨迹更新的点对点跟踪任务中并将算法加以优化。此外, Chi 等人^[18-20]和 Shen 等人^[21]分别提出移除初始状态固定的假定与迭代时间固定的假定, 使设计的 ILC 算法更契合实际应用。

在近期的研究中, Swevers 团队^{[22][23]}同时移除迭代时间固定与指定输入信号更新律的假定, 在每次迭代结束后采用标称模型更新律, 基于更新后的标称模型重新规划路径, 降低每次迭代花费的时间。总而言之, 这些学者主要围绕着时不变系统建模, 消除 ILC 的几个假设条件研究其控制策略。

1.2.2 时变系统参数估计的研究现状

近年来, 许多研究探索了针对不同系统的各种参数估计方法。对于时变参数和不确定性集问题, Dahliwal 等人^[24]采用基于集的自适应方法来估计。Moreno 等人^[25]详细提出了一种能够估计时变参数的不连续算法。此外, 为提高估计的准确性, Cao 等人^[26]提出了分部辨识的思路分别辨识动态和静态参数。针对时变对象的自适应控制, Lavretsky 团队^[27]提出了一种新的参数估计算法。

尽管时变系统存在于航空航天^[28]、复杂系统过程控制^[29]等许多领域, 但在 ILC 领域仍未得到充分的探索。对于时变系统的研究, 很多学者采用自适应神经网络控制^[30]、自适应动态规划算法^[31]和由事件触发条件控制的比例-积分-微分 (PID) 控制^[32]等不同的方法。现有的 ILC 方法^[33]已经尝试解决时变系统中的任务, 但每次试验的系统动力学是相同的。具有非重复性时变参数的时变系统 (non-repeat time-varying systems, NTVSs) 特点是系统动力学在试验过程中具有时变性, 而时变参数具有非重复性, 例如, 在患者的中风康复过程中, 患者的手臂反应率随着时间的推移逐渐降低^[34]。在实际的工业过程中, 几乎不存在传统 ILC 中所假定的系统完全重复这一理想情况, 因此如何在非重复条件约束的情况下, 设计合理的 ILC 算法实现对系统的鲁棒性控制成为了 ILC 领域的一大焦点。

由于传统的 ILC 采用固定的标称模型, 时变系统动力学导致模型不确定性的积累, 可能导致 ILC 更新律的鲁棒收敛条件无法得到满足。Chen 等人^[35]构建了 NTVSs 的 ILC 更新律, 依靠线性回归思想提出非重复性时变参数估计机制。

1.3 迭代学习控制在实际生产中的应用

在许多生产和工业过程中，系统需要在有限的时间内完成指定的任务，并不断地重复此项操作，这类任务通常需要系统的输出跟踪上特定的参考轨迹。相较于以 PID 控制为代表的传统控制方法，迭代学习控制方法可以在实际生产中提高产品若干个数量级的精确度。相较于以自适应控制为代表的高级控制方法，迭代学习控制方法采用离线控制器在每次迭代结束后更新系统输入等变量，这项设计能够大幅度降低算法的在线计算量需求。因此，在现代工业控制系统中，迭代学习控制技术被广泛应用于多种对精确度有较高要求的控制任务中，例如高速列车^[36]、数控机床^[37]、化工批次处理^[38]、平板印刷机^[39]、磁阻电机^[40]、农用车辆^[41]与多连杆机械手^[42]。

1.4 本文主要工作与章节介绍

本文将 ILC 的应用范围从单一时不变系统拓宽到时变系统，并结合不同的参数估计方法(如 ELM、BP 神经网络和 EM 算法)，提出基于参数估计的 ILC 算法，从理论上证明算法的鲁棒性与收敛性，并通过实验验证了其在实际应用中的优越性能，实现了期望轨迹的高精度路径跟踪，进而突破时变特性所致的控制难题。首先，根据获取的输入与输出数据，分析时变参数的类型，确定在线参数估计方法，实时更新系统的时变参数。其次，契合迭代学习控制研究领域的发展趋势，移除系统模型唯一性假定，建立基于迭代学习控制技术的时变系统路径跟踪策略，大幅度降低原问题的难度与复杂度，进而解决该难题。

综上所述，基于参数估计的时变系统迭代学习控制大致分为三个步骤：第一步，综合考虑时变参数的类型，设计合适且准确的在线参数估计方法；第二步，根据所涉及的在线参数估计方法，得到系统的初始输入信号，建立基于在线参数估计的时变系统的迭代学习控制律，实现耦合算法，并通过理论证明该控制律的鲁棒性与收敛性；第三步，搭建实验平台验证该算法的可行性和优越性。本文的章节介绍如图 1-2 所示。

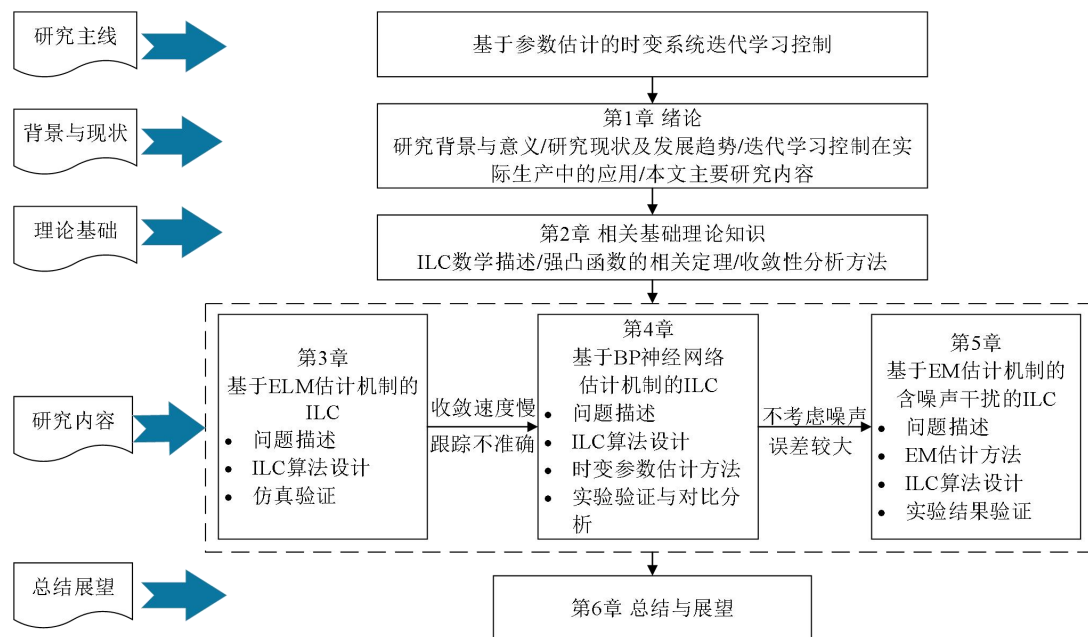


图 1-2 本文章节介绍示意图

本文共分为 6 章，主要内容如下：

第 1 章：绪论部分。主要对 ILC 和时变系统当前研究的发展情形进行概述，论述 ILC 研究背景及意义，归纳总结 ILC 及时变系统研究方法的国内外研究情况，并对本文的主要内容和各章节的内容进行简要概括。

第 2 章：基础理论部分。对 ILC 的相关理论知识及分析方法进行详细介绍，阐述 ILC 经典模型、机器学习中优化算法相关的定理以及收敛性分析方法。

第 3 章：基于极限学习机在时变系统中的迭代学习控制。首先对参数进行估计，通过构建 ELM 模型求解时变参数的估计问题，随后根据系统动力学的相关特征，以及系统性能函数设计对应的 ILC 控制律，进行期望轨迹的跟踪。

第 4 章：基于 BP 神经网络在时变参数估计的迭代学习控制。首先根据参数属性建立 BP 神经网络模型，然后根据其控制目标设计相应的 ILC 更新律，并和参数估计方法构成耦合算法，最后从理论和实验对该算法的性能分析。

第 5 章：基于期望最大化估计机制的含噪声干扰系统的迭代学习控制。首先考虑实际生产过程中噪声干扰的情况，并采用期望最大化方法对参数进行估计，然后根据实际噪声存在的情况设计相关的 ILC 更新律，最后通过理论和实验对性能进行分析。

第 6 章：总结部分。对本文在 ILC 和参数估计领域中所做的工作进行总结，并针对尚未解决的时变系统迭代学习控制问题进行展望。

第2章 相关基础理论知识

本章首先介绍了 ILC 的基本数学描述，包括系统动力学模型、希尔伯特空间等概念。然后详细介绍了优化定理的相关理论，最后介绍了迭代学习控制的收敛性分析方法，包括压缩映射定理和最优化方法。

2.1 迭代学习控制数学描述

迭代学习控制是一种针对具有重复运动性质的系统的控制方法，具有严格数学描述。其任务主要是根据系统期望轨迹与实际输出之间存在的误差，迭代地对输入信号进行修正调整，使系统输出在一定的迭代批次后在期望的时间间隔内能够准确跟踪上目标轨迹，达到期望的性能，并且对整个控制过程实现的速度有所要求。本节给出迭代学习控制基本方法的数学表述方式作为理论基础，考虑在有限时间间隔 $[0, N]$ 的系统动力学模型^[43]：

$$\begin{cases} x_k(t+1) = Ax_k(t) + Bu_k(t), & k \in \\ y_k(t) = Cx_k(t), & t \in [0, N] \end{cases}, \quad (2-1)$$

其中， t 和 k 分别表示采样时刻和迭代批次； $u_k(t) \in \ell$ ， $y_k(t) \in m$ ， $x_k(t) \in n$ 分别是所述第 k 批次 t 时刻的输入、输出和状态， A 、 B 和 C 为系统矩阵；在第 k 次迭代开始时，初始状态被重置为固定值 $x_k(0) = x_0$ 。

因为 ILC 是在迭代域进行设计制定的，因此可以利用提升技术对系统进行提升并描述为超向量的形式。针对式(2-1)形式的线性离散系统，可用提升矩阵模型表示为：

$$y_k = Gu_k + d, \quad (2-2)$$

其中 G 为系统输入信号与输出信号的映射矩阵， d 为初始状态响应，且满足：

$$G = \begin{bmatrix} CB & 0 & \cdots & 0 \\ CAB & CB & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{N-1}B & CA^{N-2}B & \cdots & CB \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^N \end{bmatrix} x_0, \quad (2-3)$$

此外，系统输入输出序列分别为：

$$u_k = [u_k^T(0), u_k^T(1), \dots, u_k^T(N-1)]^T \in {}^{IN}, \quad (2-4)$$

$$y_k = [y_k^T(1), y_k^T(2), \dots, y_k^T(N)]^T \in {}^{mN}. \quad (2-5)$$

输入 Hilbert 空间 $l_2^I \in [0, N]$ 和输出 Hilbert 空间 $l_2^m \in [0, N]$ 分别由如下内积及相关的诱导范数定义：

$$\|u\|_R^2 = u^T R u, \quad \|y\|_Q^2 = y^T Q y, \quad (2-6)$$

其中，权重矩阵 $Q \in {}^{mN \times mN}$ 和 $R \in {}^{\ell N \times \ell N}$ 分别为正定。

为了便于分析，引入如下引理。

引理 2.1^[44] G_{k+1} 的希尔伯特伴随算子 G_{k+1}^* 定义如下：

$$\begin{aligned} (G_{k+1}^* \omega_{k+1})(t) &= R^{-1} B_{k+1}^T p_{k+1}(t), \quad \dot{p}_{k+1}(t) = -A_{k+1}^T p_{k+1}(t), \\ p_{k+1}(T) &= 0, \quad p_{k+1}(t_{j-}) = p_{k+1}(t_{j+}) + C_{k+1}^T Q \omega_{k+1}. \end{aligned} \quad (2-7)$$

G_j 的伴随算子通过如下方程得到：

$$\omega_j^T Q_j F_j \int_0^{t_j} C e^{A(t_j-t)} B u(t) dt = \int_0^{t_j} (R^{-1} B^T e^{A^T(t_j-t)} C^T F_j^T Q_j \omega_j R u(t) dt, \quad (2-8)$$

进而推断出：

$$(G_j^* \omega_j)(t) = \begin{cases} R^{-1} B^T e^{A(t_j-t)} C^T F_j^T Q_j \omega_j; & 0 \leq t \leq t_j \\ 0 & t > t_j \end{cases}, \quad (2-9)$$

则可以写成如下形式：

$$G_e^* \omega_j(t) = R^{-1} B^T p_j(t), \quad (2-10)$$

其中，在区间 $(t_j, T]$ 上 $p_j(t) = 0$ ，在区间 $[0, t_j)$ 上表示为：

$$\dot{p}_j(t) = -A^T p_j(t), \quad p_j(t_{j-}) = C^T F_j^T Q_j \omega_j. \quad (2-11)$$

G 的伴随算子计算为映射 $\omega = G^* v$ ，其具体过程如下：

$$\omega(t) = R^{-1} B^T p_{M+1}(t), \quad \dot{p}_{M+1}(t) = -A^T p_{M+1}(t) - C^T Q v(t), \quad p_{M+1}(T) = 0, \quad (2-12)$$

定义 G_e 的伴随算子映射 $(\omega_1, \dots, \omega_M, v) \mapsto u$ ：

$$u(t) = \sum_{j=1}^M (G_j^* \omega_j)(t) + (G^* v)(t) = R^{-1} B^T \sum_{j=1}^{M+1} p_j(t) = R^{-1} B^T p(t), \quad (2-13)$$

其中, $p(t) = \sum_{j=1}^{M+1} p_j(t) \in R^n$, 这些等式聚集在一起, 则得到以下关系:

$$\begin{aligned} u(t) &= R^{-1}B^T p(t), \dot{p}(t) = -A^T p(t) - C^T Q v(t) \\ p(T) &= C^T F_M^T Q_M \omega_M, p(t_{j-}) = p(t_{j+}) + C^T F_j^T Q_j \omega_j, \quad 1 \leq j \leq M. \end{aligned} \quad (2-14)$$

采用范数最优迭代学习控制策略解决路径的跟踪问题, 通过建立性能指标函数并对其优化从而实现系统的精确跟踪, 性能指标函数具有如下广义形式^[45]:

$$J_{k+1} = \|u_{k+1} - u_k\|_R^2 + \|e_{k+1}\|_Q^2, \quad (2-15)$$

它是跟踪误差和相邻试验(试验 k 和试验 $k+1$)之间的输入差的组合, 其目的是在输入信号变化最小的情况下, 最小化下一次试验的误差, 从而保持鲁棒性。

误差由输出信号 y_k 和期望轨迹 r 表示:

$$e_k = r - y_k, \quad (2-16)$$

迭代学习控制的目的便可以描述为: 找到一个迭代学习更新律 $u_{k+1} = F(u_k, e_k)$, 在给定系统每个迭代批次的初始状态 $x_k(0)$ 和固定的期望轨迹 r , 随着迭代批次 k 的上升, 系统的输出轨迹 y_k 能够逐渐地实现对期望轨迹的准确跟踪, 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} e_k = 0$ ^[46]。迭代学习控制律除了在理论上不断地提升与发展, 也被设计与调整用以适用于广泛且各具特色的工业过程中。针对不同的被控系统, 设计与选取适宜的迭代学习控制律, 以提升被控系统的跟踪性能, 也是学者们工作的重心。

2.2 强凸函数的相关定理

如果函数 $f(\cdot)$ 在其定义域内可微, 并且是凸函数, 则存在如下等价条件^[47]:

(1)关于 $f(\cdot)$ 的梯度 $\nabla f(\cdot)$ 满足 Γ -利普希兹连续;

$$\begin{cases} \forall x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n, \exists \Gamma: \quad s.t. \|f(x) - f(\hat{x})\| \leq \Gamma \cdot \|x - \hat{x}\| \\ \exists \xi \in (x, \hat{x}) \Rightarrow \frac{\|f(x) - f(\hat{x})\|}{\|x - \hat{x}\|} = \|\nabla f(\xi)\| \leq \Gamma \end{cases}; \quad (2-17)$$

(2)关于函数 $\zeta(x) = \frac{\Gamma}{2} x^T x - f(x)$ 同样是凸函数;

(3)关于函数的梯度 $\nabla f(\cdot)$ 具有余强制性, 即以下不等式存在:

$$[\nabla f(x) - \nabla f(y)]^T (x - y) \geq \frac{1}{\Gamma} \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2. \quad (2-18)$$

关于 n 维的特征空间 $f(\cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ，则 $f(x) - f(y)$ 与 $x - y$ 均为向量，对应单调性的定义：

$$[f(x) - f(y)]^T (x - y) \geq 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad s.t. [f(x) - f(y)] \cdot (x - y) \geq 0, \quad (2-19)$$

而强单调性在单调性同号的基础上将不等式右侧替换为系数 $\frac{1}{\Gamma}$ 与 x 的增量 $\|x - y\|^2$ 的乘积形式：

$$[f(x) - f(y)]^T (x - y) \geq \frac{1}{\Gamma} \|x - y\|^2, \quad (2-20)$$

若该值用 $f(x)$ 的增量表示，则称之为余强制性，即：

$$[f(x) - f(y)]^T (x - y) \geq \frac{1}{\Gamma} \|f(x) - f(y)\|^2. \quad (2-21)$$

2.3 收敛性分析方法

算法的收敛性是迭代学习控制研究过程中的重要问题之一，它是判断算法有效性的直接依据。收敛性指在标称情况下，ILC 算法随着迭代次数的增加，使得被控系统的输出轨迹越来越接近理想输出轨迹，同时控制输入也逐渐逼近理想控制输入，被控系统的状态也趋向于理想状态。收敛速度也就是经过几次的学习系统收敛于期望的问题。迭代学习控制保证正常控制效果的前提是学习律的单调收敛性，它可以使系统在迭代次数不断增加的情况下输出不发散。

迭代学习控制具有严格的数学描述，其算法的收敛性也是基于数学分析的方法。针对线性时不变系统，对于与优化理论相结合的优化迭代学习控制，最常用的方法是压缩映射法，通过构建算子范数约束条件，证明了跟踪误差在迭代轴上具有逐点收敛特性，这一理论突破为后续压缩映射类 ILC 算法的设计提供了严格的数学支撑。此外，基于优化理论的收敛性研究策略同样占据重要地位。典型方法包括基于梯度下降法^[48]、高斯牛顿法^[49]和牛顿法^[50]等，这类方法利用凸优化理论保证迭代过程中控制输入的收敛性。其核心在于通过迭代优化过程使性能指标沿下降方向演进，最终实现误差的渐近收敛。此类方法不仅拓展了 ILC 的理论框架，还为复杂非线性系统的收敛性分析提供了新的研究范式。

第3章 基于极限学习机估计机制的迭代学习控制

针对第2章所提到的传统迭代学习控制方法受限于线性时不变系统的理论瓶颈，其在工业场景中的实际应用面临显著挑战：实际生产系统中普遍存在参数摄动、负载波动及环境干扰等因素，导致系统动力学呈现时变特性，从而破坏传统 ILC 算法的收敛性和鲁棒性。

鉴于此，本章节提出了基于极限学习机的时变系统迭代学习控制方法，该方法通过构建极限学习机网络与 ILC 的动态耦合机制，设计时变参数的在线辨识策略：首先利用极限学习机的自适应特性实时估计系统时变动力学参数，随后将估计结果嵌入 ILC 的迭代更新律中，形成参数估计-控制量修正的双闭环结构。最后通过理论分析表明该方法的收敛性，并在数值仿真中进一步验证了其在时变工况下相比传统 ILC 算法具有更优的跟踪精度和鲁棒性。

3.1 问题描述

3.1.1 系统动力学

考虑如下离散时变系统的状态空间分布：

$$\begin{cases} x_k(t+1) = A_k(t)x_k(t) + B_k(t)u_k(t) \\ y_k(t) = C_k(t)x_k(t) \end{cases}, \quad (3-1)$$

其中，其中矩阵 $A_k(t)$ ， $B_k(t)$ 和 $C_k(t)$ 表示相应的系统矩阵都随时间和迭代批次而变化。根据式(2-2)系统输出有如下形式：

$$y_k(t) = G_k(t)u_k(t), \quad (3-2)$$

算子 $G_k(t)$ 由下三角矩阵组成：

$$G_k(t) = \begin{bmatrix} C_k(t)B_k(t) & 0 & \cdots & 0 \\ C_k(t)A_k(t)B_k(t) & C_k(t)B_k(t) & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_k(t)A_k^{N-1}(t)B_k(t) & C_k(t)A_k^{N-2}(t)B_k(t) & \cdots & C_k(t)B_k(t) \end{bmatrix}. \quad (3-3)$$

3.1.2 时变参数描述

采用传统积分方法来处理时变参数，并将 $[a, b]$ 平均分为 $2n$ 个较小的区间。

在每个 $[x_i, x_{i+1}]$ 区间上，系统的状态时变矩阵 $A_k(t)$ 采用以下形式：

$$A_k(t) = \frac{h}{6} \left[A_k(x_a) + 4 \sum_{k=0}^{n-1} A_k \left(x_{k+\frac{1}{2}} \right) + 2 \sum_{k=0}^{n-1} A_k(x_k) + A_k(x_b) \right]. \quad (3-4)$$

3.1.3 极限学习机回归算法

极限学习机(Extreme Learning Machine, ELM)^[51]用于训练单个隐藏层前馈神经网络，可以随机选择输入层权重，隐藏层偏置和输出层权重，该解决方案是使用通用的(Moore-Penrose, MP)反矩阵理论建立的。

ELM 需要设置一个合适的数字，随机生成隐藏层所需的所有参数，并通过最小二乘法确定输出层的权重。对于包含 N 个样本 (x_k, t_k) 的数据集，其模型如下：

$$T = [t_1, t_2, \dots, t_Q]_{m \times Q}, \quad (3-5)$$

$$t_j = \begin{bmatrix} t_{1j} \\ t_{2j} \\ \vdots \\ t_{mj} \end{bmatrix}_{m \times L} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^L \beta_{i1} g(w_i x_j + b_i) \\ \sum_{i=1}^L \beta_{i2} g(w_i x_j + b_i) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^L \beta_{im} g(w_i x_j + b_i) \end{bmatrix}_{m \times L}, \quad (3-6)$$

其中 T ， β_i 和 $g(w_i, b_i, x_k)$ 是前向传播输出，连接第 i 个隐藏的输出生权重矩阵和非线性分段连续函数。假设 q 个样本， m 个输出变量和 n 个特征值，随机确定权重 w_{ij} 和阈值 b_i 。

输出矩阵为：

$$H = \begin{bmatrix} g(w_1 x_1 + b_1) & \cdots & g(w_L x_1 + b_L) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ g(w_1 x_Q + b_1) & \cdots & g(w_L x_Q + b_L) \end{bmatrix}_{Q \times L}, \quad (3-7)$$

通过最小二乘理论求解获得隐藏层的矩阵 $H\beta = T$ ，ELM 的解表示为

$$\beta = (H^T H)^\dagger H^T T.$$

3.2 迭代学习控制算法设计

为求解时变系统中的轨迹跟踪问题, 根据系统动力学式(3-1)和性能指标函数式(2-15), 设计迭代学习控制更新律为:

$$u_{k+1} = u_k + G_{k+1}^* \left(I + G_{k+1} G_{k+1}^* \right)^{-1} e_k, \quad (3-8)$$

其中 $*$ 表示 G_{k+1} 的伴随矩阵, e_k 表示第 k 次试验的误差。

3.2.1 算法描述

本章节将时变系统 ILC 总结为算法 3.1, 该算法将 ELM 与 ILC 结合, 利用 ELM 的快速学习能力实时估计系统参数, 并基于估计结果动态调整 ILC 更新律, 从而适应时变扰动, 基于 ELM 估计机制的迭代学习控制如算法 3.1 所示。

算法 3.1 基于极限学习机估计机制的时变系统迭代学习控制算法

输入: 初始输入信号 u_0 , 期望轨迹 r , 随机初始化权重矩阵 W , 输入偏置 b , 采样

时间 T_s , 最大试验长度 $k_{\max}$, 初始矩阵算子 G_{k+1} , 权重矩阵 Q 和 R 。

输出: 最优输入 u^* 。

- 1: 初始化, 令实验长度 $k=0$;
 - 2: 处理状态、输入和输出矩阵 $A_k(t)$ 、 $B_k(t)$ 和 $C_k(t)$;
 - 3: 采用给定的初始输入信号 u_0 , 并通过系统动力学方程式(3-1), 计算初始输出信号 y_0 和误差 e_0 ;
 - 4: 当实验长度 $k < k_{\max}$ 时, 执行以下步骤:
 - 5: ELM 使用输出矩阵 H 和 sigmoid 函数 $g(w_i, b_i, x_k)$ 获得输出偏差 β ;
 - 6: 由 ILC 更新律得到下一次的输入信号 u_{k+1} 和算子 $G_{k+1}(t)$;
 - 7: 采用刚获得的初始输入信号 u_{k+1} , 并通过系统动力学方程, 计算下一次试验的输出信号 y_{k+1} 和误差 e_{k+1} ;
 - 8: 试验长度 $k+1$;
 - 9: 结束循环;
 - 10: 返回输入信号序列 $\{u_k\}$ 。
-

3.2.2 收敛性分析

为了验证迭代学习控制律式(3-8)的有效性,下述定理给出了满足误差收敛时的条件,并从理论上完成了定理 3.1 的证明过程。

定理 3.1 如果算子 G_{k+1} 行满秩, 且算子 G_k 和 G_{k+1} 满足以下条件:

$$\|G_{k+1} - G_k\| \|u_k\| \leq (1 - \rho_{k+1}) \|e_k\|, \quad (3-9)$$

同时当前试验的误差 e_k 满足以下不等式:

$$\|e_k\| \geq \frac{\|\Theta\| \|u_k\|}{(1 - \rho_{k+1})}, \quad (3-10)$$

其中 ρ_{k+1} 是 $(I + G_{k+1} G_{k+1}^*)^{-1}$ 的光谱半径, Θ 为 G_{k+1} 和 G_k 的差值, 因此误差收敛。

其证明过程在以下部分详细阐述。

证明 首先第 $k+1$ 次试验的跟踪误差由跟踪误差式(2-16)得出:

$$e_{k+1} = r - y_{k+1} = r - G_{k+1} u_{k+1}, \quad (3-11)$$

随后将式(3-8)代入上述公式得到以下形式:

$$e_{k+1} = r - G_{k+1} u_k - G_{k+1} G_{k+1}^* (I + G_{k+1} G_{k+1}^*)^{-1} e_k = (I + G_{k+1} G_{k+1}^*)^{-1} e_k - \Theta u_k. \quad (3-12)$$

根据范数不等式的性质得到如下不等式:

$$\|e_{k+1}\| \leq \rho_{k+1} \|e_k\| + \|\Theta\| \|u_k\|, \quad (3-13)$$

因此, 由此得到收敛性条件, 证毕。

3.2.3 鲁棒性分析

在实际生产应用中, 系统的干扰等不确定因素会对跟踪控制性能造成一定的影响, 从而使算法的鲁棒性降低, 本节针对实际工业系统中普遍存在的模型不确定性 Δ 问题, 系统的算子形式为 $\tilde{G} = (1 + \Delta)G$, 建立如定理 3.2 的鲁棒性能分析框架, 并严格推导出跟踪误差在模型不确定性约束下所满足的相关条件。

定理 3.2 如果输入信号满足以下不等式:

$$\left\| \begin{bmatrix} F(1 + \Delta)\Theta \\ P(1 + \Delta)\Theta \end{bmatrix} \right\| \|u_k\| \leq (1 - \rho_{k+1}) \|e_k\|, \quad (3-14)$$

且模型不确定性 Δ 满足以下不等式:

$$\left\| I + \begin{bmatrix} F \\ P \end{bmatrix} \Delta G_{k+1} G_{k+1}^* \right\| \leq 1, \quad (3-15)$$

其中 G_k 用矩阵运算符的形式来描述为 $G_k = [FG_k, PG_k]^T$, 则保证收敛性能不受模型不确定性的影响。证明过程如下:

证明 针对系统不确定性的实际输出和矩阵算子分别用 $\tilde{y}$ 和 $\tilde{G}$ 表示, 在考虑系统模型不确定性存在的情况下, 第 $k+1$ 次试验的跟踪误差为:

$$e_{k+1} = r - \tilde{y}_{k+1} = e_k + \tilde{G}_k u_k - \tilde{G}_{k+1} u_{k+1} = e_k + \begin{bmatrix} F(1+\Delta)G_k \\ P(1+\Delta)G_k \end{bmatrix} u_k - \begin{bmatrix} F(1+\Delta)G_{k+1} \\ P(1+\Delta)G_{k+1} \end{bmatrix} u_{k+1}. \quad (3-16)$$

将式(3-8)和式(3-2)代入上式得到:

$$e_{k+1} = e_k - \begin{bmatrix} F(1+\Delta)(G_{k+1} - G_k) \\ P(1+\Delta)(G_{k+1} - G_k) \end{bmatrix} u_k - \begin{bmatrix} F(1+\Delta)G_{k+1} \\ P(1+\Delta)G_{k+1} \end{bmatrix} G_{k+1}^* (I + G_{k+1} G_{k+1}^*)^{-1} e_k \quad (3-17)$$

将上述公式化简得到以下形式:

$$e_{k+1} = \left\{ I - \begin{bmatrix} F(1+\Delta)G_{k+1} \\ P(1+\Delta)G_{k+1} \end{bmatrix} G_{k+1}^* (I + G_{k+1} G_{k+1}^*)^{-1} \right\} e_k - \begin{bmatrix} F(1+\Delta)\Theta \\ P(1+\Delta)\Theta \end{bmatrix} u_k. \quad (3-18)$$

将单位矩阵 I 展开:

$$e_{k+1} = \left\{ I - \begin{bmatrix} F\Delta G_{k+1} \\ P\Delta G_{k+1} \end{bmatrix} \right\} G_{k+1}^* (I + G_{k+1} G_{k+1}^*)^{-1} e_k - \begin{bmatrix} F(1+\Delta)\Theta \\ P(1+\Delta)\Theta \end{bmatrix} u_k, \quad (3-19)$$

对上式两边取范数:

$$\|e_{k+1}\| = \left\| \left\{ I - \begin{bmatrix} F\Delta G_{k+1} \\ P\Delta G_{k+1} \end{bmatrix} \right\} G_{k+1}^* (I + G_{k+1} G_{k+1}^*)^{-1} e_k - \begin{bmatrix} F(1+\Delta)\Theta \\ P(1+\Delta)\Theta \end{bmatrix} u_k \right\|, \quad (3-20)$$

基于范数的三角不等式性质, 可建立如下递推不等式:

$$\|e_{k+1}\| \leq \rho_{k+1} \left\| \left(I - \begin{bmatrix} F\Delta G_{k+1} \\ P\Delta G_{k+1} \end{bmatrix} \right) G_{k+1}^* \right\| \|e_k\| + \left\| \begin{bmatrix} F(1+\Delta)\Theta \\ P(1+\Delta)\Theta \end{bmatrix} \right\| \|u_k\|, \quad (3-21)$$

由此可严格导出定理 3.2 输入信号和模型不确定性满足的条件, 证毕。

3.3 仿真验证

3.3.1 跟踪任务描述

为了验证本算法 3.1 的可行性和鲁棒性，分别对系统的跟踪性能和参数估计性能进行仿真。为了评价系统的跟踪误差，引入平均绝对误差 MAE 为：

$$MAE(k) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T |e_k|. \quad (3-22)$$

通过采用三轴模型跟踪期望轨迹，设定期望轨迹 r 如下：

$$r = \begin{cases} 0.005 \sin(-2\pi i + \pi) + 0.005 \\ 0.005 \cos(-2\pi i - \pi) \\ 0.01i \end{cases} \quad i \in [0, 1], \quad (3-23)$$

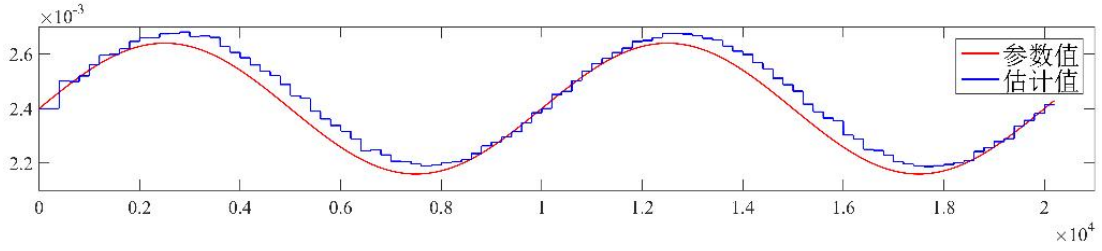
系统的传递函数分别为： $G_x(s) = G_y(s) = \frac{0.055}{s}$ ， $G_z(s) = \frac{0.0252}{s}$ 。

3.3.2 参数估计结果分析

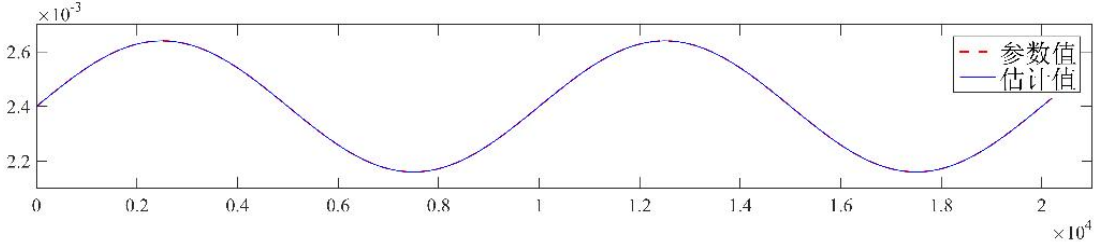
输入的样本数是 200，每个样本有 101 属性值，ELM 按 7:3 的比例随机划分训练集和测试集。图 3-1 和图 3-2 分别表示采用不同方法状态矩阵估计值和参数值的对比，其中蓝色表示估计值，红色表示参数的实际值。

采用 ML 估计机制得到的状态矩阵值与实际值之间的对比如图 3-1(a)，估计值较实际参数值相比存在明显的延迟，且在峰值左右更加明显。图 3-1(b)则采用 ELM 估计机制得到的状态矩阵值与实际参数值进行对比，估计值可以准确地估计状态矩阵值，改善了 ML 估计机制表现出的延迟现象。

采用 ML 估计机制得到的输入矩阵值与实际参数值之间的对比如图 3-2(a)，估计值在初始时刻的值存在一定的滞后，在某些区间内，估计值与参数值之间存在一定的偏差。采用 ELM 估计机制进一步优化和改进，输入矩阵值与实际参数值之间的对比如图 3-2(b)，其估计值和参数值更为接近，提高了估计的准确性。

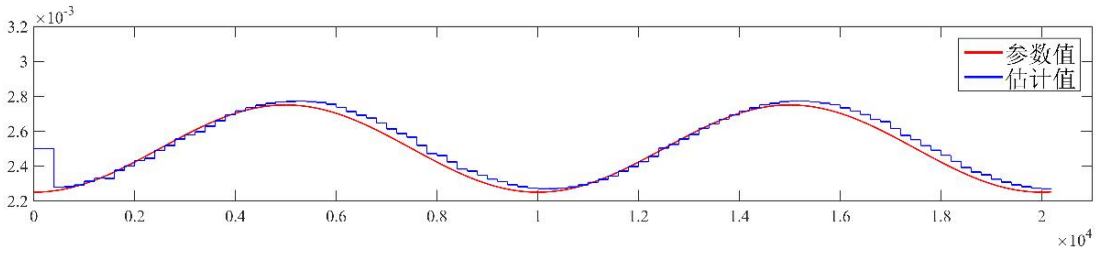


(a) ML 估计的状态矩阵值与实际值的对比

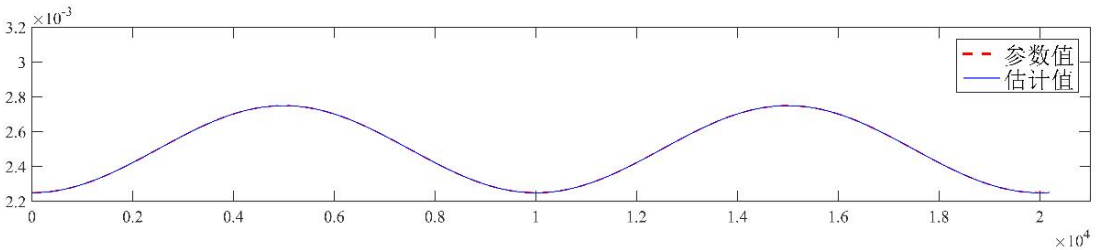


(b) ELM 估计的状态矩阵值与实际值的对比

图 3-1 采用不同方法的状态矩阵估计值和参数值的对比



(a) ML 估计的输入矩阵估计值与实际值的对比



(b) ELM 估计的输入矩阵估计值与实际值的对比

图 3-2 采用不同方法的输入矩阵估计值和参数值的对比

3.3.3 跟踪性能分析

关于算法平均绝对误差的折线图如图 3-3, 蓝色和紫色实线分别表示算法 3.1 和基于机器学习(Machine Learning, ML)估计机制的 ILC 跟踪误差曲线, 横坐标表示 ILC 试验次数, 其范围从 0 到 100, 记录了 ILC 的试验次数, 纵坐标为平均绝对误差, 采用对数刻度, 用于衡量算法运行结果与真实值之间的误差程度。

在试验次数初始阶段(k 值较小), 平均绝对误差处于较高水平, 约在 10^{-2} mm

量级。随着 ILC 试验次数的增加, 误差迅速下降, 在接近 40 次试验时, 误差降至 10^{-3} mm 量级附近。此后, 两种算法的曲线均呈现出波动震荡的态势, 在每个震荡周期内, 误差先减小至一个局部最小值, 随后又有所上升, 但算法 3.1 总体上维持在相对较低的误差水平, 大约在 10^{-1} mm 10^{-3} mm 之间波动, 这表明算法 3.1 在初期能快速收敛降低误差。受时变系统的影响, 尽管在试验次数 $k > 20$, 系统的性能会出现在一定周期内的波动变化, 但其平均绝对误差依然收敛, 且能保持相对稳定的较低误差状态。

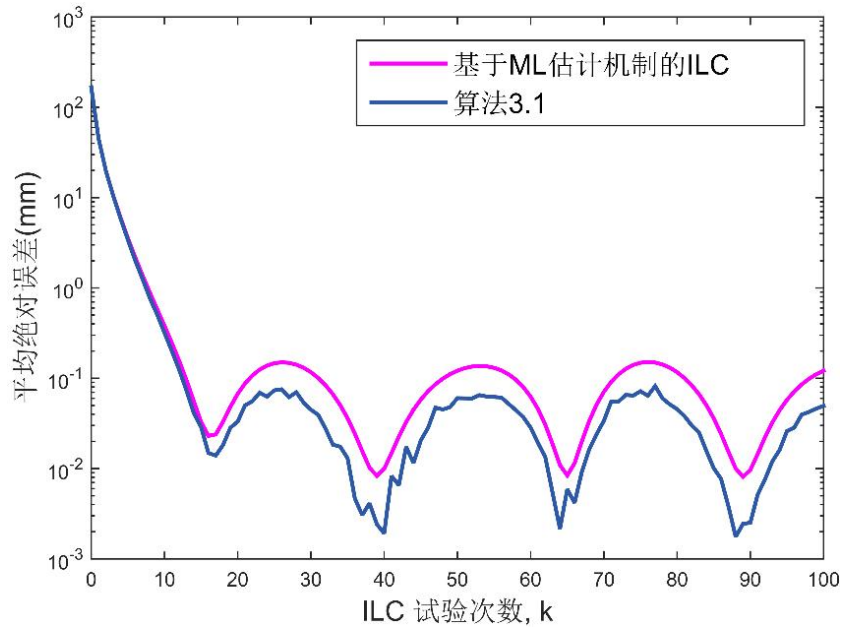


图 3-3 不同方法的平均绝对误差对比

图 3-4 展示了不同试验的输出轨迹与期望轨迹在三维空间中的对比情况, 深棕色实线代表期望轨迹, 作为对比的基准。红色虚线、紫色虚线、绿色虚线和蓝色虚线分别表示第 1 次试验、第 2 次试验、第 3 次试验以及最后一次试验的输出轨迹。

从图中可以观察到, 不同试验的输出轨迹与期望轨迹之间存在一定的偏差, 在第 1 次试验时, 系统的输出轨迹(红色虚线)存在明显的延迟现象, 不能跟踪上期望轨迹, 第 2 次试验的输出轨迹(紫色虚线)明显改善第 1 次试验的不足, 逐渐跟踪期望轨迹。第 3 次试验的输出轨迹(绿色虚线)能够明显跟踪期望轨迹, 系统的最后一次输出轨迹(蓝色虚线)能够准确跟踪期望轨迹, 从而验证算法 3.1 的可行性。

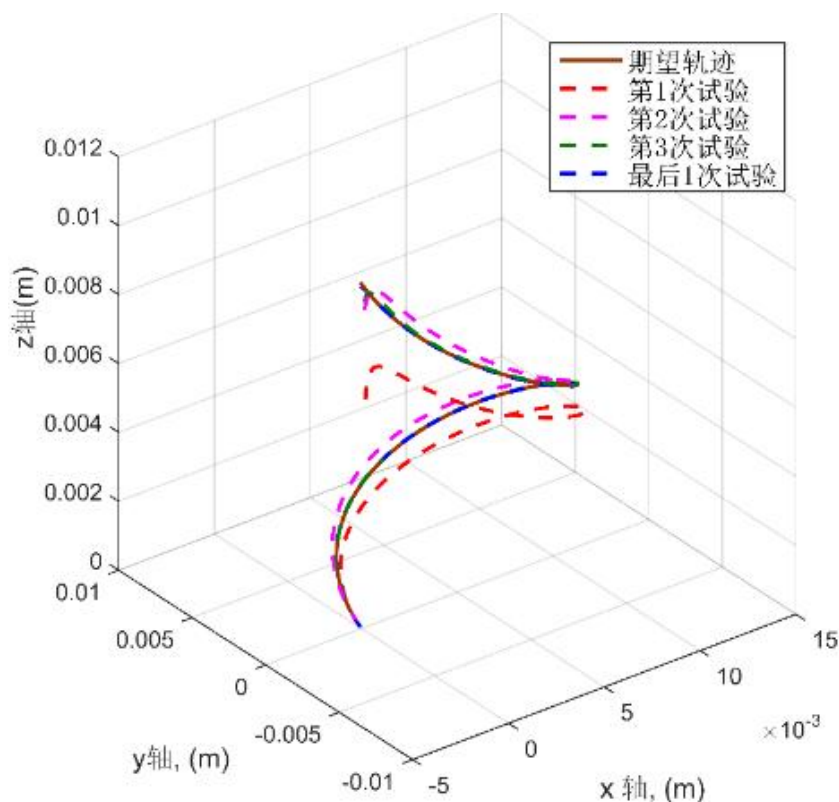


图 3-4 不同试验输出轨迹对比图

3.4 本章小结

本章节围绕时变系统控制问题展开深入探究，建立了 ILC 与 ELM 之间的联系，构建了一套适用于时变系统的控制策略来处理与参数估计和路径跟踪有关的问题。通过数学推导与理论分析，设计专门针对时变系统的 ILC 更新算法，并从收敛性与鲁棒性两个关键维度进行深入剖析，在数学理论层面论证其有效性。最后通过与 ML 估计机制的 ILC 方法进行仿真对比，算法 3.1 的跟踪误差最小达到接近 10^{-3} mm 量级，从而验证其优越性。

第 4 章 基于反向传播神经网络估计机制的迭代学习控制

虽然第 3 章设计的算法 3.1 在跟踪性能和参数估计方面表现良好，但是其在误差收敛方面仍存在一定的改善空间。一方面，误差的收敛速率慢且在一定范围内呈周期性振荡变化；另一方面，跟踪误差精度欠佳，跟踪过程中产生的误差较大，这极大地限制了其在高精度、高实时性领域的推广与应用。

针对第 3 章算法 3.1 中跟踪误差大且收敛速度慢的问题，本章节采用反向传播神经网络对参数进行在线估计来在线估计参数，同时，引入贝叶斯正则化算法，以优化参数估计过程，提升参数估计的精准程度。在此基础上，将估计机制与 ILC 算法有机融合，在有效降低跟踪误差的同时，使系统的跟踪性能得到显著提升。

4.1 问题描述

4.1.1 系统动力学

考虑离散时变系统的状态空间分布：

$$\begin{cases} x_k(t+1) = Ax_k(t) + Bu_k(t) \\ y_k(t) = Cx_k(t) \end{cases}, \quad (4-1)$$

其中系统的状态、输入和输出矩阵与第 2.1 节一致。为确保系统具有可观性，可观测性矩阵 Φ_k 必须列满秩，且该矩阵具有如下表达形式^[52]：

$$\Phi_k = [N_0(t), N_1(t), \dots, N_v(t)]^T, \quad (4-2)$$

其中， $N_0(t) = C_k(t)$ 且 $N_i(t) = N_{i-1}(t)A_k(t) + \frac{dN_{i-1}(t)}{dt} (i=1, 2, \dots, v)$ 。

式(4-2)在时间序列的输入输出矩阵和初始状态矩阵模型有如下形式：

$$y_k = G_k u_k + H_k x_0, \quad (4-3)$$

其中，系统矩阵 $G_k \in mN \times lN$ ，初始状态矩阵 $H_k \in mN \times n$ 。由于系统的非重复性时变特性， G_k 和 H_k 相对于试验轴而变化：

$$G_k = \begin{bmatrix} C_k B_k & 0 & \cdots & 0 \\ C_k A_k B_k & C_k B_k & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_k A_k^{N-1} B_k & C_k A_k^{N-2} B_k & \cdots & C_k B_k \end{bmatrix}, H_k = \begin{bmatrix} C_k A_k \\ C_k A_k^2 \\ \vdots \\ C_k A_k^N \end{bmatrix}. \quad (4-4)$$

4.1.2 时变系统迭代学习控制问题

ILC 设计目标是采用更新法 $u_{k+1} = F(u_k, e_k, G_k, H_k)$ ，通过 G_k 和 H_k 对输入信号 u_k 进行迭代更新，使系统输出跟踪期望轨迹 r ，同时跟踪误差 e_k 收敛到零。

解释 4.1 在经典 ILC 中， H_k 是恒定的，因此 $H_k x_0$ 可以被吸收为期望轨迹的偏移。但对于时变系统而言， H_k 是随试验而变化的，这导致在 ILC 更新定律设计中必须考虑 $H_k x_0$ 。

4.2 迭代学习控制算法设计

为了实现设计目标，本节首先介绍了具有收敛性分析的范数最优 ILC 方案，然后从理论上验证了该方案的可行性，最后给出满足收敛性和鲁棒性的条件以及相关的证明过程。

4.2.1 迭代学习控制方案

由于 G_k 和 H_k 在试验过程中发生动态变化，基于范数最优框架，因此该性能指标函数式(2-15)呈现出如下广义形式：

$$J(u) = \|u - u_k\|_R^2 + \|r - G_{k+1}u - H_{k+1}x_0\|_Q^2, \quad (4-5)$$

其中两个部分的物理含义为：相邻试验之间的输入变化和跟踪误差， R 和 Q 分别表示鲁棒性和误差减少的优先级。

最小化关于 u 的性能指标函数式(4-5)获得迭代解：

$$u_{k+1} = u_k + G_{k+1}^* e_{k+1}, \quad (4-6)$$

其中 G_{k+1}^* 是 G_{k+1} 的伴随矩阵， e_{k+1} 是式(2-16)定义的第 $k+1$ 次试验的误差。

命题 4.1 迭代解式(4-6)可重新表述为:

$$u_{k+1} = u_k + G_{k+1}^* \left(I + G_{k+1} G_{k+1}^* \right)^{-1} (e_k - \varepsilon G_{k+1} u_k - \varepsilon H_{k+1} x_0), \quad (4-7)$$

其中, $\varepsilon G_{k+1} = G_{k+1} - G_k$ 和 $\varepsilon H_{k+1} = H_{k+1} - H_k$ 是两次试验矩阵算子的差值。

证明 根据跟踪误差的定义式(2-16)和输出矩阵模型式(4-4), 第 $k+1$ 次试验的误差 e_{k+1} 可以表示为:

$$e_{k+1} = r - G_{k+1} u_{k+1} - H_{k+1} x_0, \quad (4-8)$$

将迭代解式(4-6)代入上述公式, 推导出误差 e_{k+1} 的等效表达式:

$$e_{k+1} = r - G_{k+1} (u_k + G_{k+1}^* e_{k+1}) - H_{k+1} x_0. \quad (4-9)$$

通过对原始误差定义式(2-16)进行代数重构, 可得期望轨迹 r 的表达式:

$$r = e_k + y_k, \quad (4-10)$$

结合系统输出方程式(2-2), 将期望轨迹 r 表征为输入信号与跟踪误差的组合形式:

$$r = e_k + G_k u_k + H_k x_0. \quad (4-11)$$

基于此 e_{k+1} 的表达式, 建立误差信号与系统输入的数学关联:

$$e_{k+1} = e_k + G_k u_k + H_k x_0 - G_{k+1} (u_k + G_{k+1}^* e_{k+1}) - H_{k+1} x_0, \quad (4-12)$$

将同类项合并:

$$(I + G_{k+1} G_{k+1}^*) e_{k+1} = e_k + G_k u_k + H_k x_0 - G_{k+1} u_k - H_{k+1} x_0, \quad (4-13)$$

因此 e_{k+1} 的表达式可由含有算子、输入信号和第 k 次试验的误差表示:

$$e_{k+1} = (I + G_{k+1} G_{k+1}^*)^{-1} (e_k - G_{k+1} u_k + G_k u_k - H_{k+1} x_0 + H_k x_0). \quad (4-14)$$

为建立迭代关系, 用相邻两次试验的输入信号差值表示 G_{k+1} 和 H_{k+1} , e_{k+1} 有如下形式:

$$e_{k+1} = (I + G_{k+1} G_{k+1}^*)^{-1} (e_k - \varepsilon G_{k+1} u_k - \varepsilon H_{k+1} x_0), \quad (4-15)$$

将上式代入迭代解式(4-6)中即可得到命题 4.1 式(4-7)中, 证毕。

假设 4.1 两组试验的算子差值用如下符号表示:

$$\varepsilon G_{k+1} = G_{k+1} - G_k, \quad \varepsilon H_{k+1} = H_{k+1} - H_k, \quad (4-16)$$

其中 εG_{k+1} 和 εH_{k+1} 满足其范数 $\|\varepsilon G_{k+1}\|$ 和 $\|\varepsilon H_{k+1}\|$ 有充分小的上界值。

假设 4.1 适用于具有缓变时变特性的动态系统，其参数摄动的时变速率通常较慢。此类系统在实际工业场景中广泛存在，如不间断电源的滤波电感参数随温度升高的缓慢时变特性。

4.2.2 算法描述

ILC 更新律提供了一种修正输入信号 u_{k+1} 的途径，其收敛性能可依据下述定理予以证明。同时，针对单调收敛条件，给出了相应的误差上界。

基于反向传播神经网络估计机制的迭代学习控制算法如算法 4.1 所示。

算法 4.1 基于反向传播神经网络估计机制的迭代学习控制算法

输入：初始输入信号 u_0 ，期望轨迹 r ，采样时间 T_s ，最大试验长度 $k_{\max}$ ，初始矩阵

算子 G_{k+1} 和 H_{k+1} ，权重矩阵 Q 和 R 。

输出：最优输入 u^* 。

1：初始化，令 $k = 0$ ；

2：采用给定的初始输入信号 u_0 ，并通过系统动力学方程式(4-1)，计算初始输出信号 y_0 和误差 e_0 ；

3：当 $k < k_{\max}$ 时，执行以下步骤：

4：采用所构建的 BP 神经网络估计 $G_{k+1}(t)$ 和 $H_{k+1}(t)$ ；

5：由迭代学习控制更新律得到下一次的输入信号 u_{k+1} ；

6：采用刚获得的初始输入信号 u_{k+1} ，并通过系统动力学方程式，计算下一次

试验的输出信号 y_{k+1} 和误差 e_{k+1} ；

7：试验长度 $k + 1$ ；

8：结束循环；

9：返回输入信号序列 $\{u_k\}$ 。

4.2.3 收敛性分析

定理 4.1 采用迭代学习控制更新律(4-7)，如果系统的跟踪误差满足不等式：

$$\|e_k\| \geq \frac{\rho(\|\varepsilon G_{k+1}\| \|u_k\| + \|\varepsilon H_{k+1}\| \|x_0\|)}{(1-\rho)}, \quad (4-17)$$

其中 ρ 为 $(I + G_{k+1} G_{k+1}^*)^{-1}$ 的谱半径，则误差单调收敛。

证明 由式(2-16)得到 e_{k+1} 的表达式，由于范数矩阵不等式的性质，以下不等式成立：

$$\|e_{k+1}\| \leq \left\| (I + G_{k+1} G_{k+1}^*)^{-1} \right\| (\|e_k\| + \|\varepsilon G_{k+1}\| \|u_k\| + \|\varepsilon H_{k+1}\| \|x_0\|), \quad (4-18)$$

其中谱半径 $0 < \rho < 1$ ，上式可以表示为：

$$\|e_{k+1}\| \leq \rho (\|e_k\| + \|\varepsilon G_{k+1}\| \|u_k\| + \|\varepsilon H_{k+1}\| \|x_0\|). \quad (4-19)$$

若误差满足 $\|e_{k+1}\| < \|e_k\|$ ，则以下不等式成立：

$$\|e_{k+1}\| \leq \rho (\|e_k\| + \|\varepsilon G_{k+1}\| \|u_k\| + \|\varepsilon H_{k+1}\| \|x_0\|) \leq \|e_k\|, \quad (4-20)$$

上式变形得到：

$$\|e_k\| \geq \frac{\rho}{1-\rho} (\|\varepsilon G_{k+1}\| \|u_k\| + \|\varepsilon H_{k+1}\| \|x_0\|), \quad (4-21)$$

因此得到收敛条件，则误差范数单调收敛，证毕。

4.2.4 鲁棒性分析

在实际工业场景中，模型不确定性因环境干扰、负载波动及传感器噪声等因素对系统性能具有显著影响，因而在系统分析与设计过程中要将其考虑在内。 Δ 和 Ξ 表征着 G_k 和 H_k 的模型不确定性，定义如下：

$$\hat{G}_k = (1 + \Delta) G_k, \hat{H}_k = (1 + \Xi) H_k, \quad (4-22)$$

其中模型不确定性 Δ 和 Ξ 满足条件 $\Delta \leq 1$ 且 $\Xi \leq 1$ 。

定理 4.2 如果模型不确定性 Δ 和矩阵 G_{k+1} 满足以下条件：

$$\|I - \Delta G_{k+1} G_{k+1}^*\| \leq \sigma < 1, \quad (4-23)$$

同时，跟踪误差满足如下不等式：

$$\|e_k\| \geq \frac{\rho}{1-\rho} (\|\varepsilon G_{k+1}\| \|u_k\| + \|\varepsilon H_{k+1}\| \|x_0\|) + \frac{1}{\rho(1-\sigma)} (\|\Delta G_{k+1}\| \|u_k\| + \|\Xi H_{k+1}\| \|x_0\|), \quad (4-24)$$

则跟踪误差收敛。证明过程如下：

证明 考虑模型不确定性 Δ 和 Ξ ，系统在第 k 次试验时的实际输出为 $\hat{y}_k$ 。根据式(2-2)和式(4-22)，第 $k+1$ 次试验的实际输出为 $\hat{y}_{k+1}$ ，其表达式如下：

$$\begin{aligned} \hat{y}_{k+1} &= \hat{G}_{k+1} u_{k+1} + \hat{H}_{k+1} x_0 \\ &= (1+\Delta)(G_k + \varepsilon G_{k+1}) u_{k+1} + (1+\Xi)(H_k + \varepsilon H_{k+1}) x_0 \\ &= [(1+\Delta)G_k + (1+\Delta)\varepsilon G_{k+1}] u_{k+1} + [(1+\Xi)H_k + (1+\Xi)\varepsilon H_{k+1}] x_0. \end{aligned} \quad (4-25)$$

将上式合并化简：

$$\hat{y}_{k+1} = (\hat{G}_k + \varepsilon \hat{G}_{k+1}) u_{k+1} + (\hat{H}_k + \varepsilon \hat{H}_{k+1}) x_0, \quad (4-26)$$

其中 $\varepsilon \hat{G}_{k+1}$ 和 $\varepsilon \hat{H}_{k+1}$ 分别表示第 k 次试验和第 $k+1$ 次试验的实际差值，且满足如下等式：

$$\varepsilon \hat{G}_{k+1} = (1+\Delta) \varepsilon G_{k+1}, \quad \varepsilon \hat{H}_{k+1} = (1+\Xi) \varepsilon H_{k+1}. \quad (4-27)$$

采用命题 4.1 中式(4-7)代替实际输出表达式中的 u_{k+1} 得到：

$$\begin{aligned} \hat{y}_{k+1} &= (\hat{G}_k + \varepsilon \hat{G}_{k+1}) \left[u_k + G_{k+1}^* (I + G_{k+1} G_{k+1}^*)^{-1} (e_k - \varepsilon G_{k+1} u_k - \varepsilon H_{k+1} x_0) \right] \\ &\quad + (\hat{H}_k + \varepsilon \hat{H}_{k+1}) x_0, \end{aligned} \quad (4-28)$$

根据第 $k+1$ 次跟踪误差的定义公式，系统的真实误差为：

$$e_{k+1} = r - \hat{y}_{k+1}, \quad (4-29)$$

将实际输出 $\hat{y}_{k+1}$ 的表达式代入上式：

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= r - (\hat{G}_k + \varepsilon \hat{G}_{k+1}) \left[u_k + G_{k+1}^* (I + G_{k+1} G_{k+1}^*)^{-1} (e_k - \varepsilon G_{k+1} u_k - \varepsilon H_{k+1} x_0) \right] \\ &\quad - (\hat{H}_k + \varepsilon \hat{H}_{k+1}) x_0, \end{aligned} \quad (4-30)$$

将上式进一步变形：

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= r - (\hat{G}_k + \varepsilon \hat{G}_{k+1}) u_k - (\hat{H}_k + \varepsilon \hat{H}_{k+1}) x_0 \\ &\quad - (\hat{G}_k + \varepsilon \hat{G}_{k+1}) G_{k+1}^* (I + G_{k+1} G_{k+1}^*)^{-1} (e_k - \varepsilon G_{k+1} u_k - \varepsilon H_{k+1} x_0). \end{aligned} \quad (4-31)$$

考虑模型不确定性 Δ 和 Ξ 代入上式:

$$e_{k+1} = r - \left[(1+\Delta)G_k + (1+\Delta)\varepsilon G_{k+1} \right] u_k - \left[(1+\Xi)H_k + (1+\Xi)\varepsilon H_{k+1} \right] x_0 - \left(\hat{G}_k + \varepsilon \hat{G}_{k+1} \right) G_{k+1}^* \left(I + G_{k+1} G_{k+1}^* \right)^{-1} (e_k - \varepsilon G_{k+1} u_k - \varepsilon H_{k+1} x_0) \quad (4-32)$$

将含有模型不确定性的项数展开:

$$e_{k+1} = r - G_k u_k - H_k x_0 - \Delta G_k u_k - \Xi H_k x_0 - \varepsilon G_{k+1} u_k - \Delta \varepsilon G_{k+1} u_k - \varepsilon H_{k+1} x_0 - \Xi \varepsilon H_{k+1} x_0 - \left(\hat{G}_k + \varepsilon \hat{G}_{k+1} \right) G_{k+1}^* \left(I + G_{k+1} G_{k+1}^* \right)^{-1} (e_k - \varepsilon G_{k+1} u_k - \varepsilon H_{k+1} x_0) \quad (4-33)$$

使期望轨迹 r 用含有误差 e_k 的表达式表述:

$$e_{k+1} = e_k - \Delta G_k u_k - \Xi H_k x_0 - \varepsilon G_{k+1} u_k - \Delta \varepsilon G_{k+1} u_k - \varepsilon H_{k+1} x_0 - \Xi \varepsilon H_{k+1} x_0 - \left(\hat{G}_k + \varepsilon \hat{G}_{k+1} \right) G_{k+1}^* \left(I + G_{k+1} G_{k+1}^* \right)^{-1} (e_k - \varepsilon G_{k+1} u_k - \varepsilon H_{k+1} x_0) \quad (4-34)$$

提出 $(e_k - \varepsilon G_{k+1} u_k - \varepsilon H_{k+1} x_0)$, 得到如下公式:

$$e_{k+1} = \left[I - \left(\hat{G}_k + \varepsilon \hat{G}_{k+1} \right) G_{k+1}^* \left(I + G_{k+1} G_{k+1}^* \right)^{-1} \right] (e_k - \varepsilon G_{k+1} u_k - \varepsilon H_{k+1} x_0) - \Delta G_k u_k - \Xi H_k x_0 - \Delta \varepsilon G_{k+1} u_k - \Xi \varepsilon H_{k+1} x_0, \quad (4-35)$$

展开 I 单位矩阵为 $(I + G_{k+1} G_{k+1}^*) (I + G_{k+1} G_{k+1}^*)^{-1}$ 乘积的形式:

$$e_{k+1} = \left[(I + G_{k+1} G_{k+1}^*) (I + G_{k+1} G_{k+1}^*)^{-1} - \left(\hat{G}_k + \varepsilon \hat{G}_{k+1} \right) G_{k+1}^* \left(I + G_{k+1} G_{k+1}^* \right)^{-1} \right] \times (e_k - \varepsilon G_{k+1} u_k - \varepsilon H_{k+1} x_0) - \Delta G_k u_k - \Xi H_k x_0 - \Delta \varepsilon G_{k+1} u_k - \Xi \varepsilon H_{k+1} x_0. \quad (4-36)$$

基于真实系统算子表达式(4-22)的结构特性, 则

$\hat{G}_k + \varepsilon \hat{G}_{k+1} = (1+\Delta)G_k + (1+\Delta)\varepsilon G_{k+1} = (1+\Delta)G_{k+1}$, 因此上式可以合并为:

$$e_{k+1} = \left[(I + G_{k+1} G_{k+1}^*) (I + G_{k+1} G_{k+1}^*)^{-1} - (1+\Delta)G_{k+1} G_{k+1}^* \left(I + G_{k+1} G_{k+1}^* \right)^{-1} \right] \times (e_k - \varepsilon G_{k+1} u_k - \varepsilon H_{k+1} x_0) - \Delta G_k u_k - \Xi H_k x_0 - \Delta \varepsilon G_{k+1} u_k - \Xi \varepsilon H_{k+1} x_0, \quad (4-37)$$

提取上式中公共因子项 $(I + G_{k+1} G_{k+1}^*)^{-1}$:

$$e_{k+1} = \left[I + G_{k+1} G_{k+1}^* - (1+\Delta)G_{k+1} G_{k+1}^* \right] (I + G_{k+1} G_{k+1}^*)^{-1} (e_k - \varepsilon G_{k+1} u_k - \varepsilon H_{k+1} x_0) - \Delta G_k u_k - \Xi H_k x_0 - \Delta \varepsilon G_{k+1} u_k - \Xi \varepsilon H_{k+1} x_0, \quad (4-38)$$

进一步化简:

$$e_{k+1} = (I - \Delta G_{k+1} G_{k+1}^*) (I + G_{k+1} G_{k+1}^*)^{-1} (e_k - \varepsilon G_{k+1} u_k - \varepsilon H_{k+1} x_0) - \Delta G_k u_k - \Xi H_k x_0 - \Delta \varepsilon G_{k+1} u_k - \Xi \varepsilon H_{k+1} x_0. \quad (4-39)$$

根据范数不等式的基本性质，建立不等式关系：

$$\begin{aligned} \|e_{k+1}\| \leq & \left\| (I - \Delta G_{k+1} G_{k+1}^*) (I + G_{k+1} G_{k+1}^*)^{-1} \right\| \|e_k - \varepsilon G_{k+1} u_k - \varepsilon H_{k+1} x_0\| \\ & + \|\Delta G_k u_k\| + \|\Xi H_k x_0\| + \|\Delta \varepsilon G_{k+1} u_k\| + \|\Xi \varepsilon H_{k+1} x_0\|, \end{aligned} \quad (4-40)$$

因为 $(I + G_{k+1} G_{k+1}^*)^{-1}$ 的谱半径 $0 < \rho < 1$ ，所以满足不等式：

$$\begin{aligned} \|e_{k+1}\| \leq & \rho \left\| I - \Delta G_{k+1} G_{k+1}^* \right\| (\|e_k - \varepsilon G_{k+1} u_k - \varepsilon H_{k+1} x_0\|) \\ & + \|\Delta G_k u_k\| + \|\Xi H_k x_0\| + \|\Delta \varepsilon G_{k+1} u_k\| + \|\Xi \varepsilon H_{k+1} x_0\|. \end{aligned} \quad (4-41)$$

引入模型不确定性 $\Delta < 1$ ，所以 $\|I - \Delta G_{k+1} G_{k+1}^*\| \leq \sigma < 1$ ，因此上式不等式变为：

$$\|e_{k+1}\| \leq \rho \sigma (\|e_k - \varepsilon G_{k+1} u_k - \varepsilon H_{k+1} x_0\|) + \|\Delta G_k u_k\| + \|\Xi H_k x_0\| + \|\Delta \varepsilon G_{k+1} u_k\| + \|\Xi \varepsilon H_{k+1} x_0\|, \quad (4-42)$$

再次应用范数三角不等式性质，展开得：

$$\begin{aligned} \|e_{k+1}\| \leq & \rho \sigma (\|e_k\| + \|\varepsilon G_{k+1}\| \|u_k\| + \|\varepsilon H_{k+1}\| \|x_0\|) + \|\Delta G_k\| \|u_k\| \\ & + \|\Xi H_k\| \|x_0\| + \|\Delta \varepsilon G_{k+1}\| \|u_k\| + \|\Xi \varepsilon H_{k+1}\| \|x_0\|, \end{aligned} \quad (4-43)$$

若误差收敛，则误差 e_k 满足：

$$\begin{aligned} \|e_{k+1}\| \leq & \rho \sigma (\|e_k\| + \|\varepsilon G_{k+1}\| \|u_k\| + \|\varepsilon H_{k+1}\| \|x_0\|) + \|\Delta G_k\| \|u_k\| \\ & + \|\Xi H_k\| \|x_0\| + \|\Delta \varepsilon G_{k+1}\| \|u_k\| + \|\Xi \varepsilon H_{k+1}\| \|x_0\| \leq \|e_k\| \end{aligned} \quad (4-44)$$

由于 $\rho < 1$ ，则误差仍然满足 $\|e_k\| < \rho \|e_k\|$ ，则式(4-44)满足：

$$\begin{aligned} & \rho \sigma (\|e_k\| + \|\varepsilon G_{k+1}\| \|u_k\| + \|\varepsilon H_{k+1}\| \|x_0\|) + \|\Delta G_k\| \|u_k\| \\ & + \|\Xi H_k\| \|x_0\| + \|\Delta \varepsilon G_{k+1}\| \|u_k\| + \|\Xi \varepsilon H_{k+1}\| \|x_0\| \leq \rho \|e_k\| \end{aligned} \quad (4-45)$$

考虑误差满足的条件，化简以上不等式：

$$\begin{aligned} (\rho - \rho \sigma) \|e_k\| \geq & \rho \sigma (\|\varepsilon G_{k+1}\| \|u_k\| + \|\varepsilon H_{k+1}\| \|x_0\|) + \|\Delta G_k\| \|u_k\| \\ & + \|\Xi H_k\| \|x_0\| + \|\Delta \varepsilon G_{k+1}\| \|u_k\| + \|\Xi \varepsilon H_{k+1}\| \|x_0\|, \end{aligned} \quad (4-46)$$

根据 $\rho(1 - \sigma) > 0$ ，建立误差的收敛条件：

$$\|e_k\| \geq \frac{\sigma}{1 - \sigma} (\|\varepsilon G_{k+1}\| \|u_k\| + \|\varepsilon H_{k+1}\| \|x_0\|) + \frac{1}{\rho(1 - \sigma)} (\|\Delta G_{k+1}\| \|u_k\| + \|\Xi H_{k+1}\| \|x_0\|), \quad (4-47)$$

因此得到收敛条件，则 $\|e_{k+1}\| < \|e_k\|$ ，证毕。

4.3 反向传播神经网络参数估计方法

本节首先对反向传播神经网络模型的原理进行描述,其次利用贝叶斯正则化训练机制更新权值,最后得到该参数估计算法。

4.3.1 反向传播神经网络描述

反向传播(Back Propagation, BP)神经网络^[53,54]是一种前馈网络,通过前馈和反向传播进行训练建立输入和输出数据之间关系的过程,如图 4-1 所示。通过评估错误并结合建模和预测可能的准确响应,完成预测并执行各种任务。

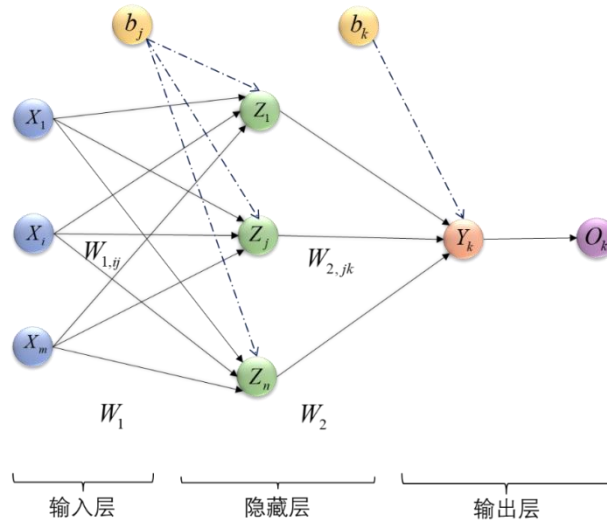


图 4-1 BP 神经网络模型结构图

正向传播过程:

隐藏层的输出 $Z_{j-output}$ 为:

$$Z_{j-input} = \sum_{i=1}^m W_{1,ij} X_i + b_j, j \in [1, n], Z_{j-output} = f^{(1)}(Z_{j-input}), \quad (4-48)$$

其中 m 和 n 分别为输入层和隐藏层神经元个数, f 为 sigmoid 函数。其结构如图 4-1 所示, 其中 $W_{1,ij}$ 和 $W_{2,jk}$ 分别表示连接输入层与隐藏层、隐藏层与输出层的权值,

b 为各层的偏置。在正向传播过程中, 输出 $O_{k-output}$ 为:

$$O_{k-input} = \sum_{j=1}^n W_{2,jk} Z_j + b_k, k \in [1, p], O_{k-output} = f^{(1)}(O_{k-input}), \quad (4-49)$$

其中 p 表示输出层的神经元数量。

误差传播过程:

假设训练样本的目标输出为 $T=[t_1, t_2, \dots, t_p]$, 真实输出为 $O=[o_1, o_2, \dots, o_p]$, 损失函数度量训练集预测值与实际值之间的误差平方和, 其中 E_d 表示损失函数, 定义如下:

$$E_d = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p (t_k - o_k)^2. \quad (4-50)$$

通过误差反向传播修正权值和偏置, 直到误差和最小, 表示为:

$$W_{1,ij} = W_{1,ij} - \iota \frac{dE_d}{dW_{1,ij}}, \quad W_{2,jk} = W_{2,jk} - \iota \frac{dE_d}{dW_{2,jk}}, \quad (4-51)$$

$$b_j = b_j - \iota \frac{dE_d}{db_j}, \quad b_k = b_k - \iota \frac{dE_d}{db_k}, \quad (4-52)$$

其中 ι 为反向传播的学习率。

4.3.2 贝叶斯正则化算法

贝叶斯正则化(Bayesian Regulation, BR)^[55,56]是一种正则化方法, 其训练机制在算法 4.1 中描述。它在最小化损失函数 E_d 的同时结合了权重的先验概率, 主要通过构造新的目标函数 E 来实现的。

$$E = \beta E_d + \alpha E_w = \frac{\beta}{2} \sum_{k=1}^p (t_k - o_k)^2 + \frac{\alpha}{2M} \sum_{m=1}^M W^2, \quad (4-53)$$

其中, β 和 α 为正则化系数, M 为权重个数。

使用新的目标成本函数调整权重:

$$W_{1,ij} = W_{1,ij} - \iota \frac{dE_d}{dW_{1,ij}} = (1 - \iota\alpha)W_{1,ij} - \iota\beta \frac{dE_d}{dW_{1,ij}}, \quad (4-54)$$

$$W_{2,jk} = W_{2,jk} - \iota \frac{dE_d}{dW_{2,jk}} = (1 - \iota\alpha)W_{2,jk} - \iota\beta \frac{dE_d}{dW_{2,jk}}, \quad (4-55)$$

正则化系数 β 和 α 的最优解为:

$$\alpha_{optimal} = \frac{\eta}{2E_w(W_{optimal})}, \quad \beta_{optimal} = \frac{V - \eta}{2E_d(W_{optimal})}, \quad \eta = M - 2\alpha_{optimal} \text{tr}(H_{optimal}^{-1}), \quad (4-56)$$

式中 η 表示测量神经网络中可用来减小误差函数的参数数量的参数效率， H 是通过梯度 ∇ ：

$$H_{optimal} = \beta \nabla^2 E_d(W_{optimal}) + \alpha \nabla^2 E_w(W_{optimal}), \quad (4-57)$$

总之，BR 提高了模型的泛化能力，并提供了参数的不确定性估计。

4.4 实验验证与对比分析

在本节中，首先描述了跟踪任务，然后分析了参数估计方法的性能。同时，通过工业物联网加工平台运动对跟踪性能进行了测试，最后经过对不同方法的比较，验证了算法 4.1 的有效性和可行性。

4.4.1 跟踪任务描述

工业物联网加工平台如图 4-2 所示，由两个滑动轴组成，分别为 x 轴和 y 轴，每个轴的运动范围为 ± 30 mm。其物理尺寸为长 125 mm、宽 125 mm、高 60 mm。

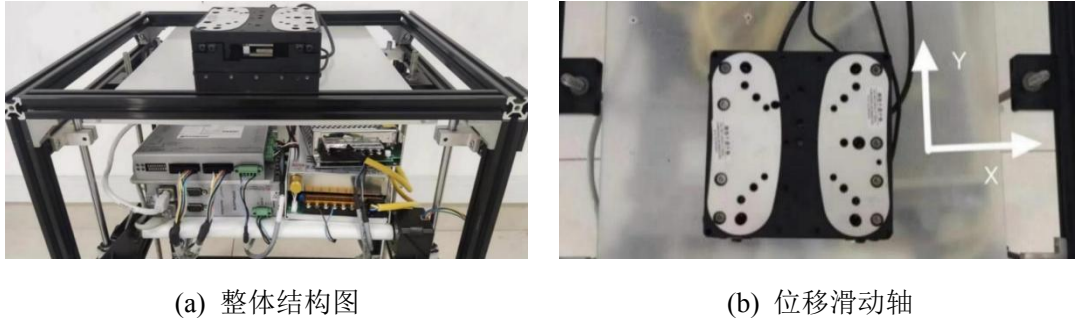


图 4-2 工业物联网加工平台

两轴系统的闭环传递函数如下：

$$G_x = \frac{0.055}{s+5.5}, G_y = \frac{0.055}{s-1.65}, \quad (4-58)$$

使用零阶保持器来建立系统的离散时间表示，采样时间 $T_s = 0.01s$ ，从而将连续时间传递函数转化为离散时间框架。

定义期望轨迹为：

$$r = \begin{cases} 0.5 \sin(-2\pi i + \pi) + 0.5 \\ 0.5 \cos(-2\pi i - \pi) + 0.5 \end{cases}, i \in [0, 1], \quad (4-59)$$

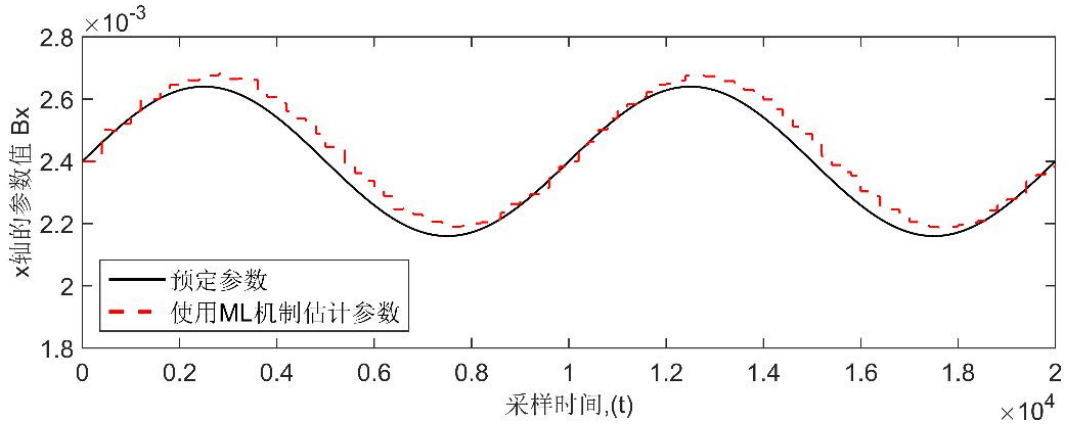
设置输入矩阵 $B_k(t)$ 的时变参数为:

$$B_k(t) = \begin{cases} 1 + 0.5 \sin(2\pi t) \\ 1 + 0.5 \cos(2\pi t - 0.5\pi) \end{cases} \quad t \in [0, 2]. \quad (4-60)$$

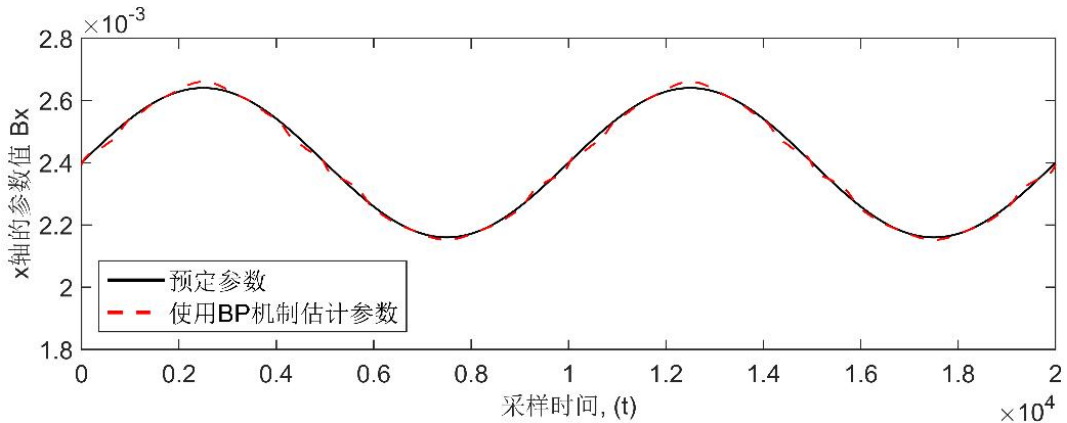
4.4.2 参数估计结果分析

构建一个三层网络，其中输入层三个神经元，隐藏层六个神经元，输出层一个神经元。选择 80% 用于训练，剩下的 20% 用于测试，以更新时变参数。

采用两种不同的估计机制得到 x 轴和 y 轴参数的对比如图 4-3 和图 4-4，两种估计机制分别是 ML 估计机制和 BP 神经网络估计机制，其中黑色实线代表预定参数，而红色虚线表示估计值。图 4-3(a) 和图 4-4(a) 中的结果表明所采用的 ML 机制更新参数时，对结果均存在一定的延迟，而通过图 4-3(b) 和图 4-4(b) 中反馈的结果，BP 神经网络能够估计时变参数，该方法解决了参数估计延迟的问题。

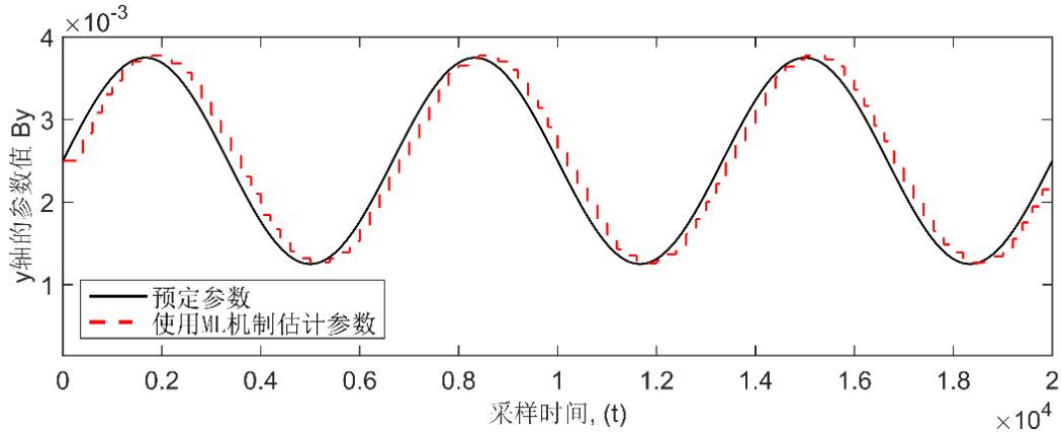


(a) ML 机制更新时变参数 B_x 与参数值的对比

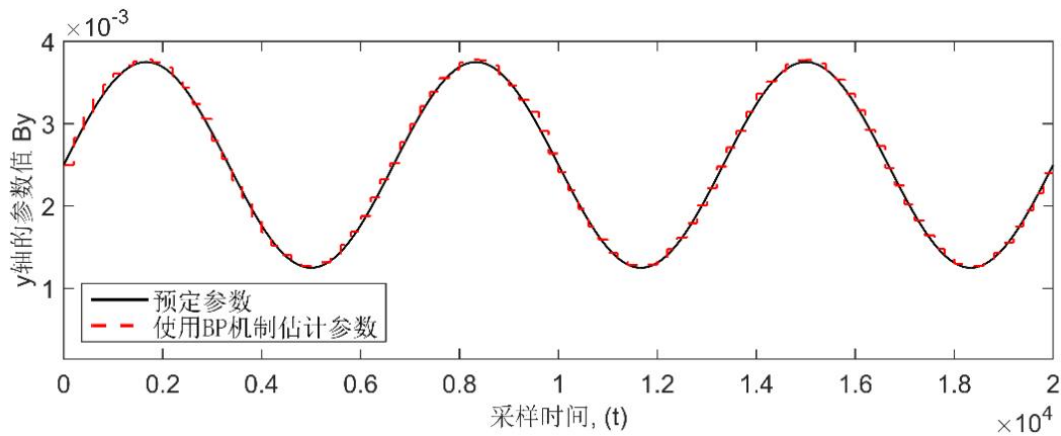


(b) BP 机制更新时变参数 B_x 与参数值的对比

图 4-3 两种不同方法更新时变参数 B_x 与参数值的对比



(a) ML 机制更新时变参数 B_y 与参数值的对比



(b) BP 机制更新时变参数 B_y 与参数值的对比

图 4-4 两种不同方法更新时变参数 B_y 与参数值的对比

在图 4-5 给出了相对于训练、测试、最佳数据集的目标输出，横坐标表示目标输出，纵坐标表示预测输出，决定系数 R 表示预测输出与目标输出的相关性，其蓝色、紫色、红色和橙色的实线表示相关的拟合函数。

如图 4-5 训练集、测试集和训练后的总体结果之间的数据相关关系(a)训练集的 $R = 0.97079$ ，其预测输出 $= 0.97 * \text{目标输出} + 7.4 * 10^{-5}$ ，在图 4-5(b)中验证集的 $R = 0.96745$ ，其预测输出 $= 0.96 * \text{目标输出} + 9.1 * 10^{-5}$ ，测试集的相关结果如图 4-5(c)，其中 $R = 0.97272$ ，其预测输出 $= 0.97 * \text{目标输出} + 6.4 * 10^{-5}$ ，最终结果的 $R = 0.97059$ 如图 4-5(d)，其预测输出 $= 0.97 * \text{目标输出} + 7.5 * 10^{-5}$ 。

回归值 R 代表预测输出和目标输出之间的相关性， R 值越接近 1 表示预测和输出数据之间的关系越密切， R 值越接近 0 表示预测和输出数据之间的关系随机性越大，图 4-5 中的 R 值均大于 0.95，表明该模型的拟合关系良好。

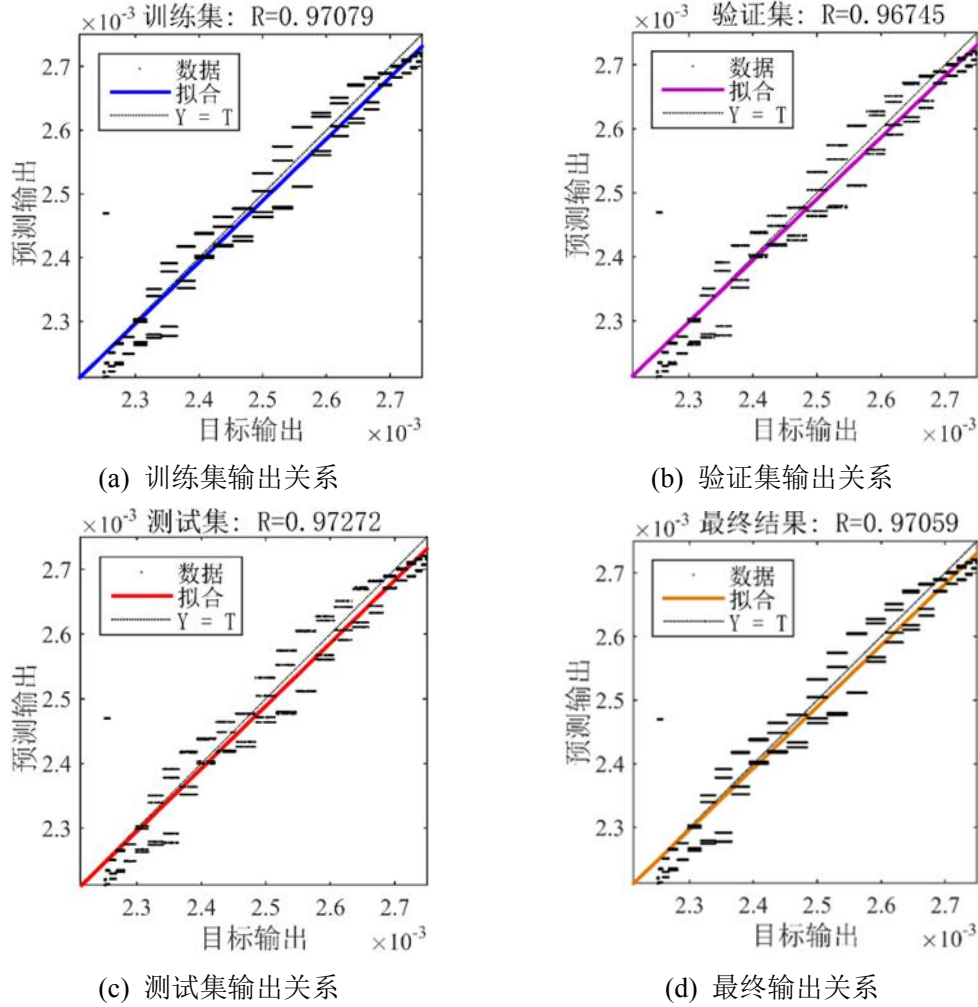


图 4-5 训练集、测试集和训练后的总体结果之间的数据相关关系

4.4.3 跟踪性能分析

将算法 4.1 沿 ILC 试验的跟踪误差与基于 ELM 估计方法和 ML 的估计方法在相同任务上比较跟踪误差，在图 4-6 中，横坐标为试验次数 k ，总共试验次数为 100，纵坐标表示平均绝对误差。在试验开始时，PID 控制(绿色曲线)、基于 ML 估计机制的 ILC(紫色曲线)、基于 ELM 估计机制的 ILC(蓝色曲线)以及算法 4.1(红色曲线)的误差均呈下降趋势，但算法 4.1 的误差收敛速度明显更快。

在试验初期，PID 控制的平均绝对误差迅速下降，但随着试验次数的增加，误差下降趋势变缓，最终稳定在 10^{-1} mm 左右，且波动较小。基于 ML 估计机制的 ILC 的平均绝对误差在试验过程中呈现周期性的波动，其波动范围在 10^0 mm 至 10^{-2} mm 之间。基于 ELM 估计机制的 ILC 在 10^{-1} mm 至 10^{-2} mm 之间出现周期

性波动，其最小误差值可小于 10^{-2} mm。

算法 4.1 在试验初期的误差下降速度极快，迅速降至较低水平。虽然在试验过程中也存在一定波动，但相比其他方法，其平均绝对误差在大部分试验次数下都是保持最小，尤其是在试验后期，误差可稳定在接近 10^{-3} mm 的水平，从而验证算法 4.1 可以实现更好的收敛性能。

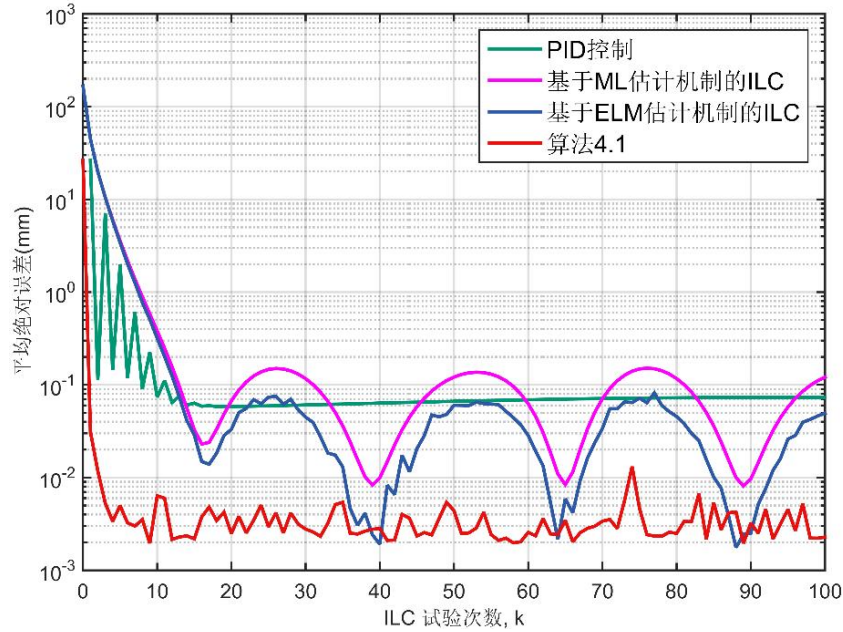


图 4-6 不同方法的平均绝对误差对比

为了进一步评估算法 4.1 的跟踪性能，图 4-7 和图 4-8 中具有不同颜色的曲线分别表示前几次试验和最终试验的混合输出轨迹和局部放大输出轨迹。图中绿色实线代表期望轨迹 r ，黑色虚线、红色虚线、蓝色虚线和紫色虚线分别表示第 2 次试验、第 3 次试验、第 4 次试验以及最终试验的输出轨迹。

整体如图 4-7，各次试验的轨迹都围绕着期望轨迹波动，在第 2 次试验时，系统的输出轨迹明显不能准确跟踪 r ，随着试验次数增加，跟踪效果增强，并且最终试验准确地跟踪该轨迹，该算法保证了高跟踪精度。在轨迹的大部分区域图 4-8 中，期望轨迹与前几次试验轨迹存在明显的位置偏差，最终试验的输出轨迹与期望轨迹最为接近，这表明随着试验次数的增加，试验轨迹逐渐向期望轨迹收敛。

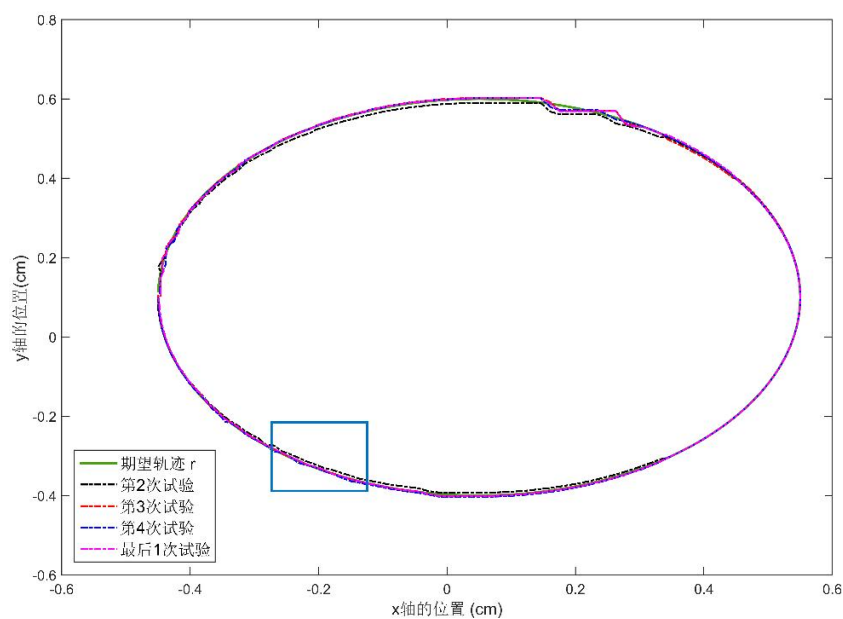


图 4-7 不同试验输出轨迹整体对比图

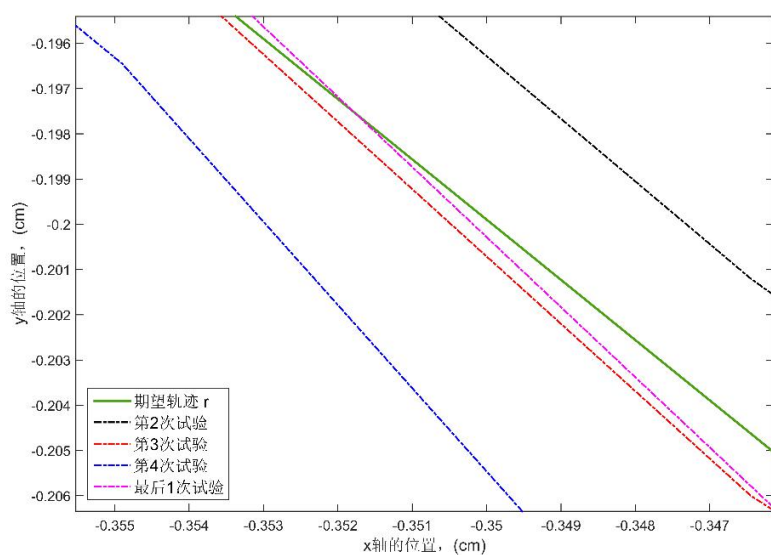


图 4-8 不同试验输出轨迹局部放大对比图

对于权重矩阵 Q 的不同选择影响误差的收敛速度,在图 4-9 中对不同权重值的误差比较,其中,保持权重矩阵 R 不变,随着权重矩阵 Q 的增加,系统的误差收敛速度明显增快,其收敛误差的最小值接近 10^{-3}mm ,收敛精度更高。

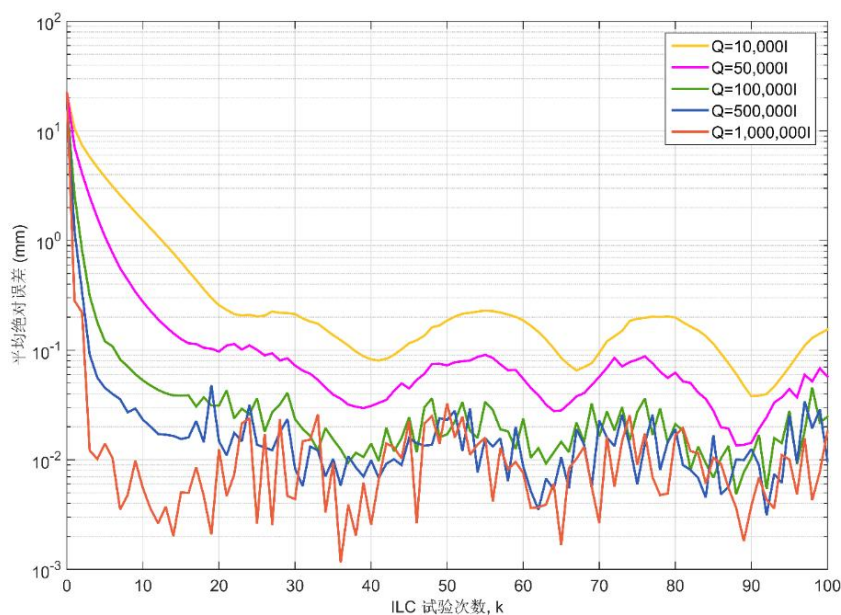


图 4-9 不同权重矩阵的平均绝对误差对比

4.5 本章小结

本章节运用 BP 神经网络进行在线参数估计，同时引入贝叶斯正则化算法，有效改善了传统方法中参数估计不准确的难题。在算法构建方面，将 BP 神经网络估计机制与 ILC 算法深度融合，设计新算法，并在理论层面论证了该算法的收敛性与鲁棒性。最后通过工业物联网加工平台，且与其他方法对比，表明算法 4.1 的跟踪误差收敛速度很快，且其可稳定在 10^{-3} mm 量级，从而验证了该方法的优越性，实现了期望轨迹的高精度跟踪任务。

第 5 章 基于期望最大化估计机制的含噪声干扰的迭代学习控制

第 4 章提出的算法 4.1 在收敛性能和估计精确度方面具备一定的优势，然而其在实际应用时存在一定的局限性。在复杂的工业场景里，测量噪声与过程扰动广泛存在且其影响不可忽视。算法 4.1 由于未充分考虑传感器测量噪声的特性及系统动态过程中的随机扰动因素，导致其难以有效抑制噪声干扰对系统状态估计的累积误差，从而降低系统在噪声干扰下的轨迹跟踪精度和参数估计准确性。

针对算法 4.1 在工业现场应用中存在的时变噪声干扰抑制能力不足问题，本章构建一种融合期望最大化估计机制的 ILC 方法。该方法针对工业环境中普遍存在的测量噪声与复合过程扰动，通过建立系统噪声的联合概率模型，将期望最大化估计算法嵌入 ILC 的优化结构中，并实现了在测量噪声和过程扰动情况下的轨迹精确跟踪。

5.1 问题描述

5.1.1 存在噪声干扰的时变系统动力学

建立含有实际扰动的非重复时变系统的离散系统动态模型，其状态空间模型表示为：

$$\begin{cases} x_k(t+1) = \varphi_t x_k(t) + \theta_t u_k(t) + w \\ y_k(t) = \phi_t x_k(t) + v \end{cases}, \quad (5-1)$$

其中， φ_t 、 θ_t 和 ϕ_t 分别为式(2-1)对应的离散系统状态矩阵、输入矩阵和输出矩阵，且满足系统可观条件， w 为状态实际扰动，且服从正态分布 $w \sim \mathbf{N}(0, W_t)$ ； v 为观测实际扰动，在实际应用中为测量干扰，服从正态分布 $v \sim \mathbf{N}(0, V_t)$ 且 $x(0) \sim \mathbf{N}(x(0), P(0))$ ，其中 $x(0)$ 和 $P(0)$ 为已知。

针对式(5-1)形式的离散系统，将其状态空间表达式转换为时间序列的输入输出矩阵和初始状态矩阵模型：

$$y_k = G_k u_k + d_k + \varepsilon_k, \quad (5-2)$$

其中, G_k 是输入输出传递矩阵, d_k 是初始状态。

由于系统是时变的, 因此矩阵算子 G_k 和 d_k 是变化的, 其表达形式^[57]如下:

$$G_k = \begin{bmatrix} \phi_1 \theta_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \phi_2 \varphi_1 \theta_0 & \phi_2 \theta_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_N \prod_{j=1}^{N-1} \varphi_j \theta_0 & \phi_N \prod_{j=1}^{N-1} \varphi_j \theta_1 & \cdots & \phi_N \theta_{N-1} \end{bmatrix}, \quad (5-3)$$

$$d_k = \begin{bmatrix} (\phi_1 \varphi_0)^T & (\phi_1 \varphi_1 \varphi_0)^T & \cdots & \left(\phi_N \prod_{j=0}^{N-1} \varphi_j \right)^T \end{bmatrix}, \quad (5-4)$$

$$\varepsilon_k = v + \begin{bmatrix} \phi_1 w \\ (\phi_2 + \phi_2 \varphi_1) w \\ \vdots \\ \left(\phi_N \sum_{i=1}^N \prod_{j=i}^{N-1} \varphi_j \right) w \end{bmatrix}, \quad (5-5)$$

为保证系统的能控性, 满足 $\phi_N \theta_{N-1} \neq 0$ 。

5.1.2 考虑噪声存在的参数估计问题

本章节中, 参数估计的目标是通过结合已知的信息, 从而获取最佳估计值。在实际应用的过程中, 实际噪声会产生扰动, 因此估计值与实际值之间的误差为:

$$\|\varphi_t - \hat{\varphi}_t\| = \varpi, \|\theta_t - \hat{\theta}_t\| = \varsigma, \|\phi_t - \hat{\phi}_t\| = \zeta. \quad (5-6)$$

假设 5.1 在非重复时变系统中, 系统动力学在试验过程中缓慢平稳变化, 其参数误差 ϖ , ς 和 ζ 是非负的且足够小, 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} \varpi = 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \varsigma = 0$ 和 $\lim_{k \rightarrow \infty} \zeta = 0$ 。

如假设 5.1 所述, 当系统真实状态与估计值之间存在渐进式演化误差, 且系统动力学参数满足准静态变化条件时, 所建立的收敛性分析框架具有理论适用性。在实际应用中, 锂电池的容量衰减在充放电过程中逐渐影响系统动力学, 这类过程均满足 Lipschitz 连续条件的前提假设。然而, 对于动态特性呈现显著时变性的系统, 该假设将因违背参数变化率上界约束而失效。

5.2 期望最大化参数估计方法

5.2.1 期望值最大化算法

本节提出一种兼容迭代学习控制框架的参数估计方法,通过构建期望最大化(Expectation Maximization, EM)^[58]估计方法与 ILC 框架的协同优化机制,实现对动态系统时变参数的在线估计。本节提出的参数估计方法建立在以下核心假设体系之上,这些假设为算法收敛性提供了严格的数学保障:

假设 5.2 观测独立性假设: 每次观测到的状态仅取决于当前时间的隐藏状态,即 $p(y_k(t)|x_k(1:N),y_k(1:t-1),y_k(t+1:N))=p(y_k(t)|x_k(t))$ 。

假设 5.3 齐次马尔可夫假设: 每次的隐藏状态仅取决于前一次的隐藏状态,即 $p(x_k(t)|x_k(1:t-1),y_k(1:t-1))=p(x_k(t)|x_k(t-1))$ 。

在 ILC 的实际应用中,每次试验的输出仅取决于前一时刻的相关信息,因此满足假设 5.2 和假设 5.3。将给定参数的后验分布分解为:

$$p(\varphi_t|y_k(1:N)) \propto p(y_k(1:N)|\varphi_t)p(\varphi_t), \quad (5-7)$$

其中 $p(\varphi_t)$ 是参数的先验值, $p(y_k(1:N)|\varphi_t)$ 是由卡尔曼滤波器递归计算得出。

5.2.2 期望最大化算法收敛性分析

在参数估计过程中,算法收敛性的严格证明依赖于对数似然函数 $L(\varphi_t, \varphi_t^{(t)})$,即完全观测数据的对数 $\log p(y_k(i), x_k(i)|\varphi_t^{(t)})$ 的性质^[59],本节提出的参数估计方法严格遵循以下定理体系。

定理 5.1 应用期望最大化算法^[60]来获得参数估计序列 $\varphi_t^{(t)} (t=1,2,\dots)$, 并找到其最优解 $\varphi_t^{(*)}$, 其计算方式如下:

$$\begin{aligned} \varphi_t^{(t+1)} &= \arg \max_{\varphi_t} \sum_{i=1}^N E_{x_k(i)|y_k(i), \varphi_t^{(t)}} [\log p(y_k(i), x_k(i)|\varphi_t^{(t)})] \\ &= \arg \max_{\varphi_t} \sum_{i=1}^N \sum_{x_k(i)} \log p(y_k(i), x_k(i)|\varphi_t) \cdot p(x_k(i)|y_k(i), \varphi_t^{(t)}). \end{aligned} \quad (5-8)$$

本节所提出的期望最大化参数估计算法理论流程如算法 5.1 所示。

算法 5.1 期望最大化参数估计算法

输入：初始状态信号 $x(0)$ ，噪声协方差矩阵 W_t 和 V_t 、初始状态的协方差 $P(0)$ 。

输出：参数 φ_t 。

1: 随机初始化模型参数值 $\varphi_t(0)$;

2: 开始期望最大化算法迭代;

3: 重复以下步骤:

4: 在后验分布 $p(x_k(i)|y_k(i), \varphi_t^{(i)})$ 存在的条件下计算 $p(\log y_k(i), x_k(i)|\varphi_t^{(i)})$;

5: 根据 $\varphi_t^{(t+1)} = \arg \max_{\varphi_t} \sum_{i=1}^N \sum_{x_k(i)} \log p(y_k(i), x_k(i)|\varphi_t) \cdot p(x_k(i)|y_k(i), \varphi_t^{(i)})$ 计算 $\varphi_t^{(t+1)}$,

使期望最大化，从而获得下一步的输入;

6: 直达 $\varphi_t^{(t+1)}$ 收敛;

7: 返回参数 $\varphi_t^{(*)}$ 。

该算法的收敛性证明详细过程如下:

证明 对数似然函数 $L(\varphi_t, \varphi_t^{(i)})$ 与给定观测数据 $y_k(i)$ 和当前参数 $\varphi_t^{(i)}$ 未观测数据 $x_k(i)$ 的条件概率分布 $p(x_k(i)|y_k(i), \varphi_t^{(i)})$ 有关，即定义 $L(\varphi_t, \varphi_t^{(i)})$ 和 $H(\varphi_t, \varphi_t^{(i)})$:

$$L(\varphi_t, \varphi_t^{(i)}) = \sum_{x_k(i)} \log p(y_k(i), x_k(i)|\varphi_t) \cdot p(x_k(i)|y_k(i), \varphi_t^{(i)}), \quad (5-9)$$

$$H(\varphi_t, \varphi_t^{(i)}) = \sum_{x_k(i)} p(x_k(i)|y_k(i), \varphi_t^{(i)}) \cdot \log p(x_k(i)|y_k(i), \varphi_t), \quad (5-10)$$

为得到相关量的对数式，将式(5-9)减去式(5-10)后的前 N 项相加，得到如下公式:

$$\sum_{i=1}^N \log p(y_k(i), \varphi_t) = L(\varphi_t, \varphi_t^{(i)}) - H(\varphi_t, \varphi_t^{(i)}). \quad (5-11)$$

在上式中，分别取 $\varphi_t^{(i)}$ 和 $\varphi_t^{(t+1)}$ ，然后相减:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \log p(y_k(i), \varphi_t^{(t+1)}) - \sum_{i=1}^N \log p(y_k(i), \varphi_t^{(i)}) \\ & = L(\varphi_t^{(t+1)}, \varphi_t^{(i)}) - L(\varphi_t^{(i)}, \varphi_t^{(i)}) - H(\varphi_t^{(t+1)}, \varphi_t^{(i)}) + H(\varphi_t^{(i)}, \varphi_t^{(i)}), \end{aligned} \quad (5-12)$$

由于定理 5.1 中式(5-8)的计算关系，则需使以下条件的 $L(\varphi_t, \varphi_t^{(i)})$ 函数最大:

$$L(\varphi_t^{(t+1)}, \varphi_t^{(t)}) - L(\varphi_t^{(t)}, \varphi_t^{(t)}) \geq 0, \quad (5-13)$$

因此，只需确定 $H(\varphi_t^{(t+1)}, \varphi_t^{(t)})$ 和 $H(\varphi_t^{(t)}, \varphi_t^{(t)})$ 的大小关系，根据 Jensen 不等式^[61]：

$$\begin{aligned} & H(\varphi_t^{(t+1)}, \varphi_t^{(t)}) - H(\varphi_t^{(t)}, \varphi_t^{(t)}) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{x_k(i)} p(x_k(i) | y_k(i), \varphi_t^{(t)}) \log \frac{p(x_k(i) | y_k(i), \varphi_t^{(t+1)})}{p(x_k(i) | y_k(i), \varphi_t^{(t)})} \\ &\leq \sum_{i=1}^N \log \sum_{x_k(i)} p(x_k(i) | y_k(i), \varphi_t^{(t+1)}) \end{aligned} \quad (5-14)$$

在某些条件下，对于 $L(\varphi_t, \varphi_t^{(t)})$ 和 $H(\varphi_t, \varphi_t^{(t)})$ ，收敛值 $\varphi_t^{(*)}$ 是稳定点，证毕。

5.3 迭代学习控制算法设计

5.3.1 时变系统迭代学习控制任务描述

本节将 ILC 目标与 5.2 节所述的估计方法予以结合，构建适配的 ILC 方案。首先阐释本章节的时变系统迭代学习控制控制任务，随后，结合系统的核心原理以及问题描述建立 ILC 算法框架，最后通过理论证明对该算法的鲁棒收敛性进行严格论证。

结合本章节给出的系统动力学方程式(5-1)，设计 ILC 性能指标函数如下：

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \arg \min_u \|u - u_k\|_R^2 + \|r - y_{k+1}\|_Q^2 \\ &= \arg \min_u \|u - u_k\|_R^2 + \|r - G_{k+1}u - d_{k+1} - \varepsilon_{k+1}\|_Q^2, \end{aligned} \quad (5-15)$$

根据上式产生输入信号序列 $\{u_k\}_{k \geq 0}$ ，并使得相应的误差 e_k 收敛。

期望轨迹 r 和跟踪误差、系统输出的关系如式(2-16)和式(5-2)，此外，期望轨迹 r 由理想算子组成：

$$r = G_d + d_d, \quad (5-16)$$

理想输出 y_d 有如下表达形式：

$$y_d = G_d u_d + d_d, \quad (5-17)$$

其中，理想算子有以下表达式：

$$G_d = \begin{bmatrix} \hat{\phi}_1 \hat{\theta}_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hat{\phi}_2 \hat{\phi}_1 \hat{\theta}_0 & \hat{\phi}_2 \hat{\theta}_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\phi}_N \prod_{j=1}^{N-1} \hat{\phi}_j \hat{\theta}_0 & \hat{\phi}_N \prod_{j=1}^{N-1} \hat{\phi}_j \hat{\theta}_1 & \cdots & \hat{\phi}_N \hat{\theta}_{N-1} \end{bmatrix}, \quad (5-18)$$

$$d_d = \begin{bmatrix} (\hat{\phi}_1 \hat{\phi}_0)^T & (\hat{\phi}_1 \hat{\phi}_1 \hat{\phi}_0)^T & \cdots & (\hat{\phi}_N \prod_{j=0}^{N-1} \hat{\phi}_j)^T \end{bmatrix}, \quad (5-19)$$

最终，采用迭代方法使输入信号 u_k 渐近收敛到唯一值 u_d ，跟踪误差 e_k 收敛到理想误差 e^* 。

5.3.2 算法实施

对性能指标函数式(5-15)中的各项参数进行运算，逐步梳理出输入信号、控制误差之间的关联变化规律，从而构建出适用于本系统的 ILC 更新律，根据历次试验获取的输入信号，深度结合每次试验产生的控制误差，运用如下定理动态生成下一次试验所需的优化输入信号。

定理 5.2 考虑具有时变参数的系统动力学式(5-1)，并通过式(5-15)获得的解中推导出更新规律：

$$u_{k+1} = L_u u_k + L_e E_{(d,\varepsilon)}, \quad (5-20)$$

其中，算子 L_u, L_e 以及系数 $E_{(d,\varepsilon)}$ 的表达式由权重矩阵 R 、 Q 以及矩阵算子 G_k 组成：

$$\begin{aligned} L_u &= (R + G_{k+1}^T Q G_{k+1})^{-1} (R + G_{k+1}^T Q G_k), \\ L_e &= (R + G_{k+1}^T Q G_{k+1})^{-1} G_{k+1}^T Q, \\ E_{(d,\varepsilon)} &= e_k - \Delta d_k - \Delta \varepsilon_k, \end{aligned} \quad (5-21)$$

$\Delta d_k = d_{k+1} - d_k$ 和 $\Delta \varepsilon_k = (\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k) \omega$ 分别代表两次迭代试验之间的差。

证明 结合 Hilbert 空间的内积和相关归纳范数知识，求解式(5-20)需要根据跟踪要求选择下一次试验的输出信号 u_{k+1} 。

由于性能指标函数是凸函数，因此一定存在最优解。首先根据性能指标函数

和更新律求解式(5-15)使得性能指标函数最小化:

$$R(u_{k+1} - u_k) = G_{k+1}^T Q(r - G_{k+1} u_{k+1} - d_{k+1} - \varepsilon_{k+1}), \quad (5-22)$$

根据误差定义式(2-16), 在 k 次试验中, 期望轨迹 r 采用跟踪误差 e_k 和输出 y_k 表达, 得到以下等式:

$$\begin{aligned} R(u_{k+1} - u_k) &= G_{k+1}^T Q(e_k + G_k u_k + d_k + \varepsilon_k - G_{k+1} u_{k+1} - d_{k+1} - \varepsilon_{k+1}) \\ &= G_{k+1}^T Q[e_k - (d_{k+1} - d_k) - (\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k) + G_k u_k - G_{k+1} u_{k+1}] \\ &= G_{k+1}^T Q(e_k - \Delta d_k - \Delta \varepsilon_k + G_k u_k - G_{k+1} u_{k+1}), \end{aligned} \quad (5-23)$$

将含有输入信号的相关项合并:

$$(R + G_{k+1}^T Q G_{k+1}) u_{k+1} - (R + G_{k+1}^T Q G_k) u_k = G_{k+1}^T Q(e_k - \Delta d_k - \Delta \varepsilon_k). \quad (5-24)$$

由于 Q 和 R 是对称正定的, $(R + G_{k+1}^T Q G_{k+1})$ 是非奇异矩阵, 因此 $(R + G_{k+1}^T Q G_{k+1})$ 存在逆矩阵:

$$u_{k+1} = (R + G_{k+1}^T Q G_{k+1})^{-1} (R + G_{k+1}^T Q G_k) u_k + (R + G_{k+1}^T Q G_{k+1})^{-1} G_{k+1}^T Q(e_k - \Delta d_k - \Delta \varepsilon_k), \quad (5-25)$$

将相关的系数 L_u, L_e 以及 $E_{(d, \varepsilon)}$ 替代其相关矩阵, 推导出如式(5-20)的 ILC 更新律的形式, 证毕。

解释 5.1 由于两次试验之间参数估计值的差异极其微小, 因此 $\|\Delta d_k\|$ 和 $\|\Delta \varepsilon_k\|$ 具有足够小的上限, 同时符合时变系统的特性。

5.3.3 算法描述

ILC 更新定律与算法 5.1 相结合, 共同构成了算法 5.2。在 5.2 节的研究过程中, 首先利用所提供的信息, 成功搭建起参数估计的算法框架, 实现了算法 5.1。随后, 将依据 ILC 更新定律获得的输入信号 u_{k+1} , 应用于系统, 以产生输出 y_{k+1} 和跟踪误差 e_{k+1} 。重复此迭代过程, 持续将更新后的输入信号输入系统, 并记录每次产生的输出及误差, 直到达到最大试验值 $k_{\max}$, 基于期望最大化估计机制的含噪声干扰的迭代学习控制算法如算法 5.2 所示。

算法 5.2 基于期望最大化估计机制的含噪声干扰的迭代学习控制算法

输入：初始输入信号 u_0 ，期望轨迹 r ，采样时间 T_s ，最大试验长度 $k_{\max}$ ，初始矩阵

算子 G_{k+1} 和 H_{k+1} ，权重矩阵 Q 和 R 。

输出：跟踪误差序列 e_k 和输出序列 y_k 。

- 1: 初始化，令实验长度 $k = 0$ ；
 - 2: 采用给定的初始输入信号 u_0 ，并通过系统动力学方程式(5-1)，计算初始输出信号 y_0 和误差 e_0 ；
 - 3: 当实验长度 $k < k_{\max}$ 时，执行以下步骤：
 - 4: 当 $i = 1, 2, \dots, N$ 时
 - 5: 执行期望最大化算法并计算算子 $d_k(i)$ 和噪声 $\varepsilon_k(i)$ ；
 - 6: 结束循环。
 - 7: 采用刚获得的初始输入信号 u_{k+1} ，并通过系统动力学方程，计算下一次试验的输出信号 y_{k+1} 和误差 e_{k+1} ；
 - 8: 试验长度 $k + 1$ ；
 - 9: 结束循环；
 - 10: 返回输出信号序列 $\{y_k\}$ 和跟踪误差序列 $\{e_k\}$ 。
-

5.3.4 收敛性分析

本小节重点分析算法 5.2 在两种典型场景下的收敛性特征，分别构建了无噪声系统与含噪声系统的收敛定理。由于迭代学习控制方法对系统动态特性具有特定要求，其收敛性分析需针对不同场景独立开展。

首先建立理想状态下的基准模型，其次考虑无噪声对模型和算法的影响进而进一步修改，使该方法在过渡状态假设下满足理论要求，并满足实际应用。

A: 无噪声系统分析

在开始无噪声系统的收敛分析之前，需要使用以下引理：

引理 5.1^[62] 对于任何矩阵 $A \in R^{m \times n}$ ，满足以下不等式：

$$\rho(A) < 1, \quad (5-26)$$

A 是一个收敛矩阵，并且存在至少一个满足以下条件的矩阵范数 $\|A\|_S$ ：

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|A\|_S^k = 0. \quad (5-27)$$

定理 5.3 如果相关系数 L_u, L_e 满足以下条件：

$$\|L_u - L_e\| < \rho < 1, \quad (5-28)$$

同时，保证不等式成立：

$$\|G_d u_d\| + \|e_{d,k+1}\| \leq \frac{(1-\rho)\|e_k\|}{1-\rho + \|G_{k+1}\|\|L_e\|}, \quad (5-29)$$

其中， $e_{d,k+1} = d_d - d_{k+1}$ ，则跟踪误差 e_k 收敛。

证明 考虑无噪声的系统动力学：

$$\begin{cases} x_k(t+1) = \varphi_t x_k(t) + \theta_t u_k(t) \\ y_k(t) = \phi_t x_k(t) \end{cases}, \quad (5-30)$$

则系统的实际输出：

$$y_k = G_k u_k + d_k, \quad (5-31)$$

同时，更新律变为：

$$u_{k+1} = L_u u_k + L_e E_d, \quad (5-32)$$

其中， $E_d = e_k - \Delta d_k$ 。

通过系统化的代数推导，可将跟踪误差式(2-16)和理想输出式(5-17)联立求解，得到等价的数学表征形式：

$$E_d = r - y_k - \Delta d_k = G_d u_d + d_d - y_k - \Delta d_k, \quad (5-33)$$

进一步将无噪声系统的实际输出式(5-32)代入上述等价表达式，可建立迭代过程的状态转移关系：

$$E_d = G_d u_d + d_d - G_k u_k - d_k - \Delta d_k. \quad (5-34)$$

为揭示误差演化规律，引入差值算子 $\Delta d_k = d_{k+1} - d_k$ 对相邻迭代的误差量进行差分处理：

$$E_d = G_d u_d + d_d - G_k u_k - d_{k+1}, \quad (5-35)$$

定义 $(d_d - d_{k+1})$ 为 $e_{d,k+1}$ ，则更新律转化为具有明确收敛特性的标准形式：

$$u_{k+1} = (L_u - L_e)u_k + L_e G_d u_d + L_e e_{d,k+1}, \quad (5-36)$$

其中系数 L_e 和 L_u 严格遵循原定义式(5-21)的关系，确保算法在迭代过程中保持增益系数的理论一致性。

通过范数分析技术对系统收敛特性进行量化研究，首先对等式两端施加向量范数运算，建立能量范数约束关系：

$$\|u_{k+1}\| = \|(L_u - L_e)u_k + L_e G_d u_d + L_e e_{d,k+1}\|, \quad (5-37)$$

由此可导出关于输入信号 $\|u_{k+1}\|$ 的增益不等式：

$$\begin{aligned} \|u_{k+1}\| &\leq \|(L_u - L_e)u_k\| + \|L_e G_d u_d\| + \|L_e e_{d,k+1}\| \\ &\leq \|(L_u - L_e)\| \|u_k\| + \|L_e G_d u_d\| + \|L_e e_{d,k+1}\|. \end{aligned} \quad (5-38)$$

基于式(5-36)的递推结构，运用数学归纳法进行多步迭代展开：

$$\begin{aligned} \|u_{k+1}\| &\leq \|(L_u - L_e)\| \|u_k\| + \|L_e G_d u_d\| + \|L_e e_{d,k+1}\| \\ &\leq \|(L_u - L_e)\| [\|(L_u - L_e)\| \|u_{k-1}\| + \|L_e G_d u_d\| + \|L_e e_{d,k+1}\|] + \|L_e G_d u_d\| + \|L_e e_{d,k+1}\|, \end{aligned} \quad (5-39)$$

将上述分散约束整合为具有几何级数特征的统一表达式：

$$\begin{aligned} \|u_{k+1}\| &\leq \|(L_u - L_e)\|^2 \|u_{k-1}\| + \|(L_u - L_e)\| \|L_e G_d u_d\| \\ &\quad + \|(L_u - L_e)\| \|L_e e_{d,k+1}\| + \|L_e G_d u_d\| + \|L_e e_{d,k+1}\| \\ \|u_{k+1}\| &\leq \|(L_u - L_e)\|^3 \|u_{k-2}\| + \|(L_u - L_e)\|^2 \|L_e G_d u_d\| \\ &\quad + \|(L_u - L_e)\|^2 \|L_e e_{d,k+1}\| + \|(L_u - L_e)\| \|L_e G_d u_d\| \\ &\quad + \|(L_u - L_e)\| \|L_e e_{d,k+1}\| + \|L_e G_d u_d\| + \|L_e e_{d,k+1}\|. \\ &\vdots \end{aligned} \quad (5-40)$$

对求和项进行简化：

$$\|u_{k+1}\| \leq \|(L_u - L_e)\|^{k+1} \|u_0\| + \frac{1 - \|(L_u - L_e)\|^k}{1 - \|(L_u - L_e)\|} (\|L_e G_d u_d\| + \|L_e e_{d,k+1}\|), \quad (5-41)$$

由范数矩阵不等式的性质，建立系统增益的上界：

$$\|u_{k+1}\| \leq \|(L_u - L_e)\|^{k+1} \|u_0\| + \frac{1 - \|(L_u - L_e)\|^k}{1 - \|(L_u - L_e)\|} (\|L_e\| \|G_d\| \|u_d\| + \|L_e\| \|e_{d,k+1}\|). \quad (5-42)$$

基于引理 5.1 的原理，当 $\|L_u - L_e\| < \rho < 1$ 成立时，可保证迭代过程存在指数

型收敛界:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|L_u - L_e\|^k = 0, \quad (5-43)$$

在跟踪误差式(2-16)定义的基础上, 第 $k+1$ 试验的跟踪误差范数满足:

$$\|e_{k+1}\| \leq \|G_d u_d\| + \|G_{k+1}\| \|u_{k+1}\| + \|e_{d,k+1}\|. \quad (5-44)$$

通过对输入信号范数 $\|u_{k+1}\|$ 进行递推放大处理, 建立与误差范数的显式关联:

$$\|u_{k+1}\| \leq \frac{1}{1-\rho} (\|L_e\| \|G_d u_d\| + \|L_e\| \|e_{d,k+1}\|), \quad (5-45)$$

将关于 u_{k+1} 的范数不等式代入第 $k+1$ 试验的跟踪误差范数, 获得收敛判据:

$$\|e_{k+1}\| \leq \left(\frac{\|G_{k+1}\| \|L_e\|}{1-\rho} + 1 \right) (\|G_d u_d\| + \|e_{d,k+1}\|), \quad (5-46)$$

从而满足收敛性条件不等式:

$$\|e_{k+1}\| < \|e_k\|, \quad (5-47)$$

则随着迭代次数增加, 跟踪误差范数速率收敛至零邻域, 证毕。

B: 噪声存在系统收敛性分析

在随机噪声干扰条件下, 采用更新定律式(5-15), 其特殊结构设计可保证迭代过程满足单调收敛特性。为确保闭环系统的误差动态在噪声影响下仍具有收敛性, 需要建立以下函数:

函数 $f(e_k)$ 是关于 e_k 的凸函数, 且该函数二阶连续可微, 为保证该问题有解, 理想误差 $e^* \approx 0$, 该优化问题是一个凸优化问题, 且满足以下假设和相关函数的性质。

假设 5.4 函数 $f(e_k)$ 在其定义域内可微, 并且是凸函数, 则关于函数 $f(e_k)$ 的梯度 ∇f 满足 Γ -Lipschitz 连续, 满足强凸函数的相关定理, 关于函数的梯度 ∇f 有余强制性:

$$[f(x) - f(y)]^T (x - y) \geq \frac{1}{\Xi} \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2, \quad (5-48)$$

其中 Λ 是强凸系数。

定理 5.4 如果系数 γ 和 c 满足以下范围条件:

$$\gamma \in \left\{ 0, \min \left(1, \frac{2}{\Lambda + \Gamma} \right) \right\}, \quad (5-49)$$

同时，系数 c 满足以下范围：

$$c = 1 - \frac{2\gamma\Gamma\Lambda}{\Gamma + \Lambda}, c \in (0, 1), \quad (5-50)$$

其中 $\gamma = \left\| \left(I + G_{k+1} R^{-1} G_{k+1}^T Q \right)^{-1} \right\|$ ，因此跟踪误差 e_k 收敛。

证明 通过最小化性能指标函数式(2-15)，可将第 $k+1$ 次的跟踪误差 e_{k+1} 重构为具有显式参数依赖性的表达式：

$$e_{k+1} = \gamma e_k - \gamma \nabla f(e_k), \quad (5-51)$$

其中 $\nabla f(e_k) = \Delta G_k u_k + \Delta d_k + \Delta \varepsilon_k$ 。

为简化后续证明，现引入定义如下函数：

$$g(e_k) = f(e_k) - \frac{\Lambda e_k^T e_k}{2}, \quad (5-52)$$

由于 $f(e_k)$ 是可微的，对其求梯度：

$$\nabla g(e_k) = \nabla f(e_k) - \Lambda e_k, \quad (5-53)$$

基于前文假设及第 2.2 节中凸函数的相关性质，可证 $g(e_k)$ 也是凸函数。

为进一步优化求解过程，定义辅助函数 $h(e_k)$ ：

$$h(e_k) = \frac{(\Gamma - \Lambda) e_k^T e_k}{2} - g(e_k), \quad (5-54)$$

根据凸函数的叠加性质，因此 $h(e_k)$ 也是凸函数。结合余强制性的定义及相关性质，可导出如下不等式：

$$\left[\nabla g(x) - \nabla g(y) \right]^T (x - y) \geq \frac{1}{\Gamma - \Lambda} \left\| \nabla g(x) - \nabla g(y) \right\|^2. \quad (5-55)$$

将含有 $f(e_k)$ 的表达式代入上式替换 $g(e_k)$ ，可得等价形式：

$$\left[\nabla f(x) - \Lambda x - \nabla f(y) + \Lambda y \right]^T (x - y) \geq \frac{1}{\Gamma - \Lambda} \left\| \nabla f(x) - \Lambda x - \nabla f(y) + \Lambda y \right\|^2, \quad (5-56)$$

进一步分解不等式左右两端：

左端变形为:

$$[\nabla f(x) - \Lambda x - \nabla f(y) + \Lambda y]^T (x - y) = [\nabla f(x) - \nabla f(y)]^T (x - y) - \Lambda \|x - y\|^2, \quad (5-57)$$

右侧展开为:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma - \Lambda} \|\nabla f(x) - \Lambda x - \nabla f(y) + \Lambda y\|^2 \\ &= \frac{1}{\Gamma - \Lambda} \left\{ \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2 + \Lambda^2 \|x - y\|^2 - 2\Lambda [\nabla f(x) - \nabla f(y)]^T (x - y) \right\}. \end{aligned} \quad (5-58)$$

由此, 式(5-56)进一步化简:

$$\begin{aligned} [\nabla f(x) - \nabla f(y)]^T (x - y) - \Lambda \|x - y\|^2 &\geq \frac{1}{\Gamma - \Lambda} \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2 \\ &+ \frac{\Lambda^2}{\Gamma - \Lambda} \|x - y\|^2 - \frac{2\Lambda}{\Gamma - \Lambda} [\nabla f(x) - \nabla f(y)]^T (x - y), \end{aligned} \quad (5-59)$$

合并同类项并提取系数项:

$$[\nabla f(x) - \nabla f(y)]^T (x - y) \geq \frac{1}{\Gamma + \Lambda} \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2 + \frac{\Gamma \Lambda}{\Gamma + \Lambda} \|x - y\|^2. \quad (5-60)$$

接下来, 需要构造关于误差的不等式来证明收敛性。由于理想误差 $e^* \approx 0$,

根据式(5-51)的误差动态模型, 令 $x = e_k$ 且 $y = e^*$:

$$\|e_{k+1}\|^2 = \|\gamma e_k - \gamma e^*\|^2 - 2\gamma \nabla f(e_k)(e_k - e^*) + \gamma^2 \|\nabla f(e_k)\|^2, \quad (5-61)$$

将 e_k 和 e^* 代入式(5-60):

$$\begin{aligned} \|e_{k+1} - \gamma e^*\|^2 &\leq \|\gamma e_k - \gamma e^*\|^2 - \frac{2\gamma \Gamma \Lambda}{\Gamma + \Lambda} \|e_k - e^*\|^2 - \frac{2\gamma}{\Gamma + \Lambda} \|\nabla f(e_k)\|^2 + \gamma^2 \|\nabla f(e_k)\|^2 \\ &\leq \|\gamma e_k - \gamma e^*\|^2 - \gamma \left(\frac{2}{\Gamma + \Lambda} - \gamma \right) \|\nabla f(e_k)\|^2 - \frac{2\gamma \Gamma \Lambda}{\Gamma + \Lambda} \|e_k - e^*\|^2 \\ &\leq c \|e_k - e^*\|^2, \end{aligned} \quad (5-62)$$

其中, 系数 $c = 1 - \frac{2\gamma \Gamma \Lambda}{\Gamma + \Lambda}$ 。结合权重矩阵 R 和 Q 是对称正定性, 因此

$(I + G_{k+1} R^{-1} G_{k+1}^T Q)$ 是可逆的, 同时满足式(5-49)条件, 根据式(5-50)的系数边界条件,

可证在噪声干扰下, 跟踪误差 $\{e_k\}$ 最终收敛至有界区域。

5.4 实验验证与对比分析

在本节中，首先描述跟踪任务，然后对期望最大化参数估计方法进行验证，最后通过仿真和实验，对迭代学习控制算法的收敛性能进行分析，并与其他控制方法进行比较验证了该算法的优越性。

5.4.1 跟踪任务描述

选取采样时间 $T_s = 0.01s$ ，因此，开环传递函数为：

$$G_x = \frac{0.055z}{z-1}, \quad (5-63)$$

x 轴和 y 轴的反馈增益分别为 100 和 -30 。

5.4.2 实验平台介绍

图 5-1 所示的精密加工实验平台由五个主要设备组成：龙门机器人、远距透镜、激光电流计、二维旋转台和二维滑台。龙门机器人在工业自动化领域得到广泛应用，远心透镜在一定范围内保持对物体的持续成像，而激光电流计是激光加工过程中控制激光束制导的关键设备，二维滑台的精密滑动阶段由 x 和 y 两个滑动轴组成，确保轴位移数据的准确捕获。

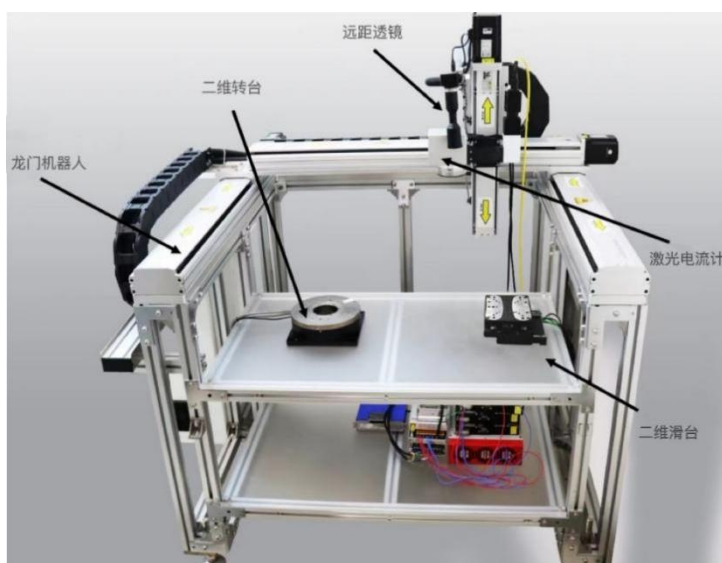
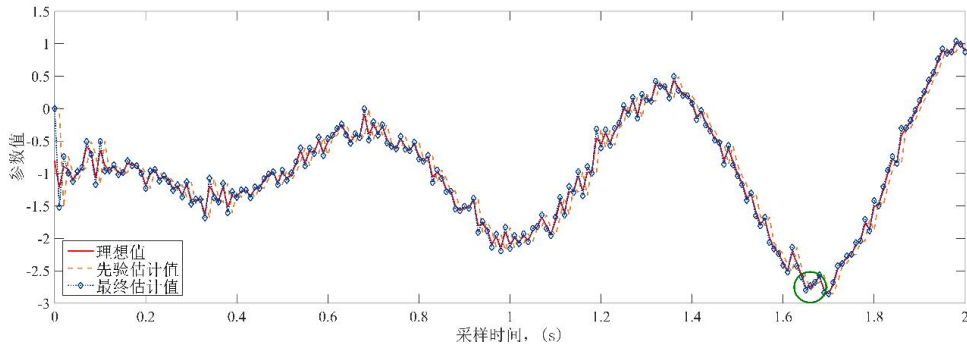


图 5-1 精密加工实验平台

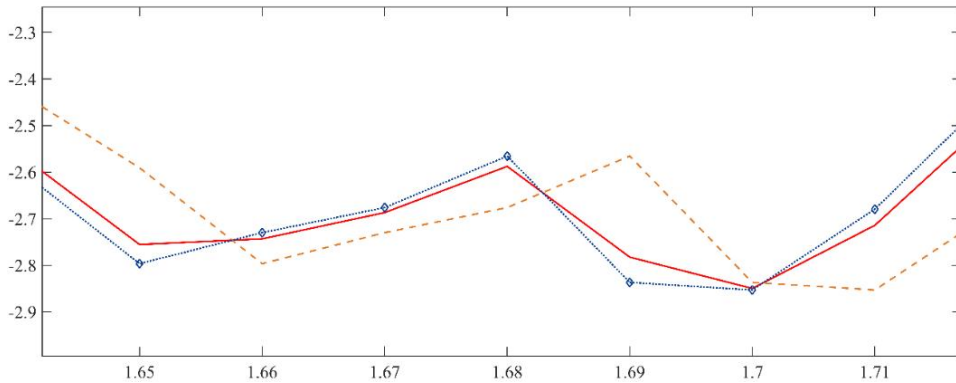
5.4.3 参数估计结果分析

为了验证期望最大化算法的估计准确性，在 $t \in [0, 2]$ 的范围内，将时变参数集分别定义为 $\varphi_t = t \cos(3\pi t) - 1$ ， $\theta_t = t \sin(2\pi t) - 1$ 和 $\phi_t = \sin(3\pi t) - 1$ 。图 5-2、图 5-3 和图 5-4 分别是时变参数 φ_t 、 θ_t 和 ϕ_t 的理想值、先验估计值以及最终估计值结果比较，图中红色实线表示理想值，橙色虚线表示先验估计结果，蓝色菱形虚线表示最终的估计结果。

从图 5-2(a)、图 5-3(a)和图 5-4(a)中看出，初始阶段的先验估计值和最终估计值与理想值之间存在较大的误差，主要有两个方面的原因：其一是系统中考虑了实际噪声干扰的存在，其二是由理想值和迭代过程产生的估计值之间的初始差异造成的，因此对估计的结果产生一定的影响。随着采样时间的增加，根据图 5-2(b)、图 5-3(b)和图 5-4(b)的局部放大对比，先验估计值存在明显的不准确性，通过校正得到的最终估计值更接近理想值，从而验证算法 5.1 的有效性。

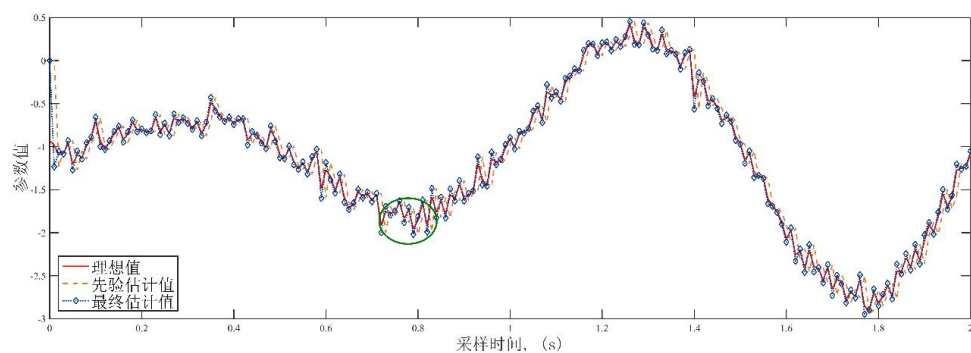


(a) 状态时变矩阵估计值与理想值的整体对比

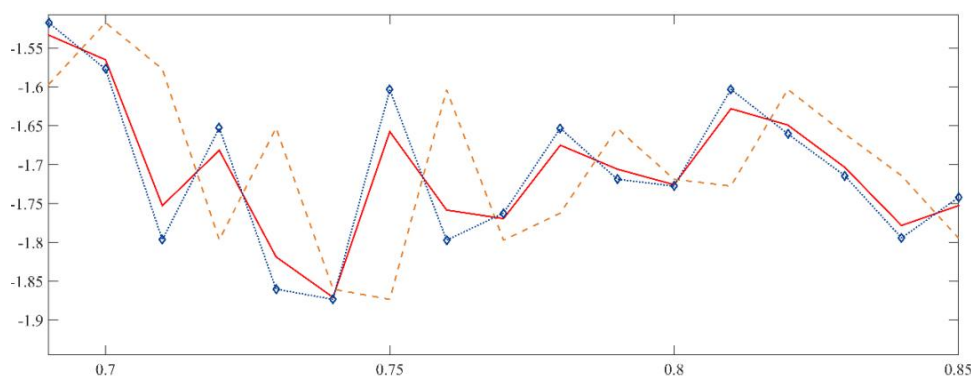


(b) 状态时变矩阵估计值与理想值的局部放大对比

图 5-2 状态时变矩阵估计值与理想值对比

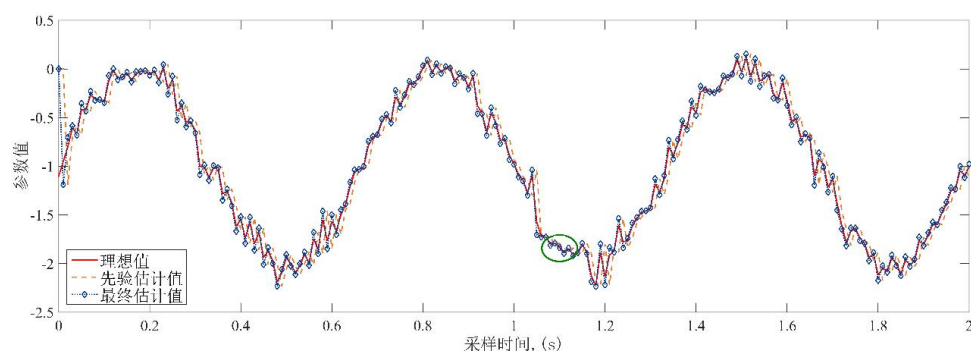


(a) 输入时变矩阵估计值与理想值的整体对比

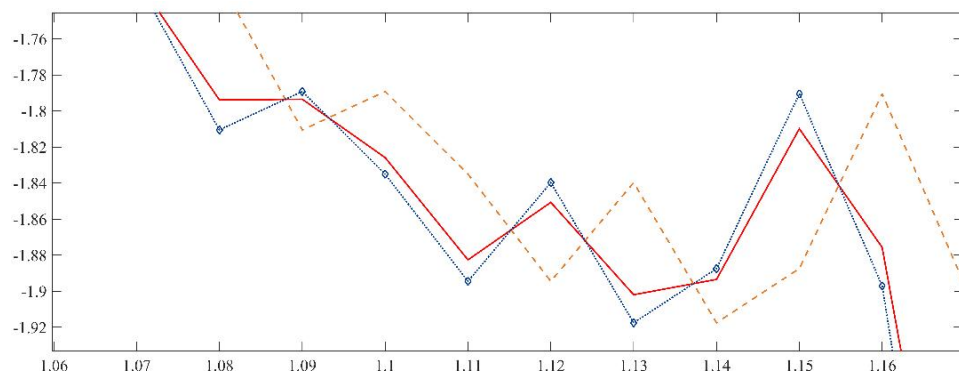


(b) 输入时变矩阵估计值与理想值的局部放大对比

图 5-3 输入时变矩阵估计值与理想值对比



(a) 输出时变矩阵估计值与理想值的整体对比



(b) 输出时变矩阵估计值与理想值的局部放大对比

图 5-4 输出时变矩阵估计值与理想值对比

5.4.4 跟踪性能分析

总共试验次数为 80，图 5-5 展示了在 ILC 试验过程中，不同控制方法与估计机制下的平均绝对误差随 ILC 试验次数的变化情况。算法 5.2 的平均绝对误差曲线为图中红色实线，在初始阶段，所有方法的平均绝对误差均呈现下降趋势。

在 $10 \leq k < 30$ 时，PID 控制(紫色曲线)和基于 ML 估计机制的 ILC(绿色曲线)和基于 ELM 估计机制的 ILC(橙色曲线)的误差下降速度变缓，且表现出一定的波动性，基于 BP 估计机制的 ILC(蓝色曲线)和算法 5.2 的误差持续降低。

当 $30 \leq k < 80$ 时，PID 控制的误差稳定在 10^{-1} mm 的水平，表明该方法在多次迭代后达到了一个相对稳定的误差状态。基于 ML 估计机制的 ILC 误差在 10^0 mm 至 10^{-2} mm 之间呈现周期性波动，说明该方法在迭代过程中存在一定的不稳定性。基于 ELM 估计机制的 ILC 也出现周期性波动，其最小误差值可小于 10^{-2} mm，基于 BP 估计机制的 ILC 误差稳定在 10^{-2} mm 以下，且在部分区间内误差控制较好。

算法 5.2 尽管在该阶段也存在一定波动，算法的误差达到了一个较小的数量级，同时考虑系统中实际噪声，其误差在试验后期可达到 10^{-4} mm 左右的水平，体现出该算法在控制平均绝对误差方面具有卓越的性能。

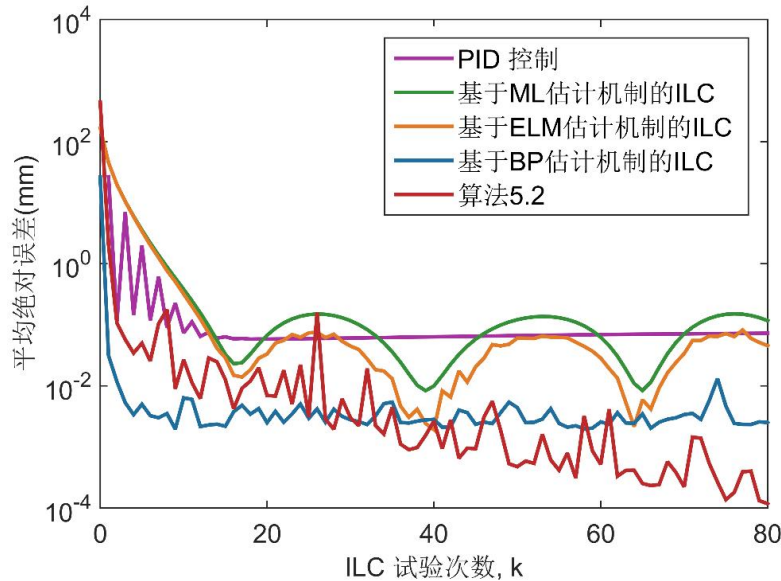
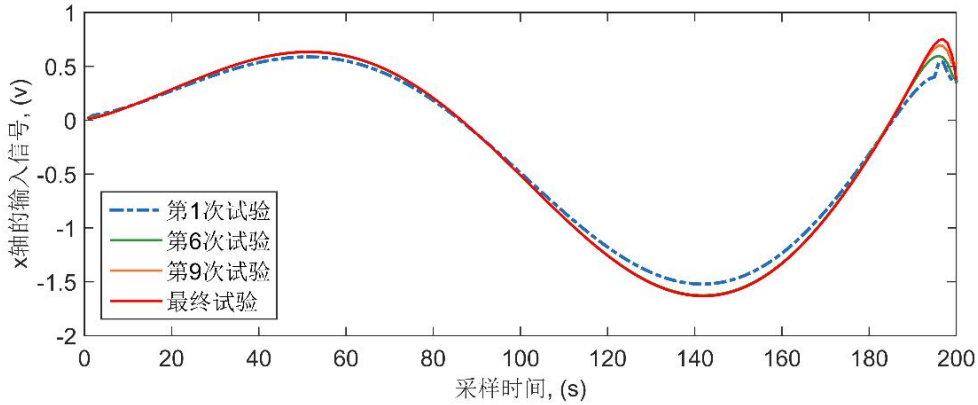
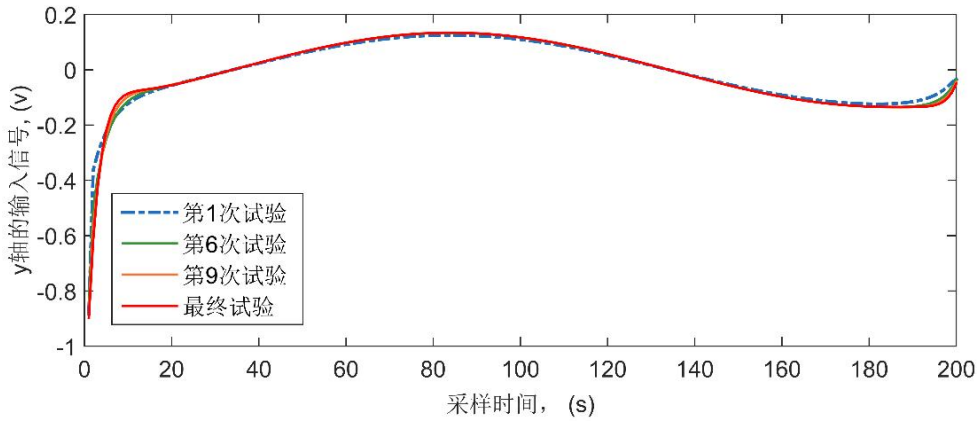


图 5-5 不同方法的平均绝对误差对比

最初几次试验和最终试验期间的输入信号如图 5-6，其中 x 轴与 y 轴输入信号分别如子图(a)、(b)所示。该输入信号通过定理 5.2 设计的迭代更新律生成，其核心机制是根据前次试验的输入信号 u_k 和跟踪误差 e_k ，不断调整下一次试验的输入信号 u_{k+1} ，从而使输入信号最终收敛至理想值 u_d 。



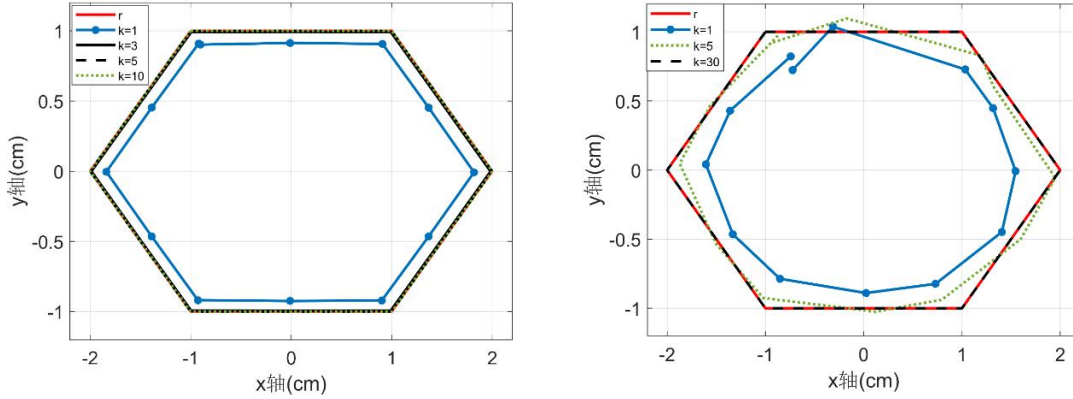
(a) 考虑噪声时系统几次试验在 x 轴方向的输入信号



(b) 考虑噪声时系统几次试验在 y 轴方向的输入信号

图 5-6 考虑噪声时系统几次试验的输入信号

有噪声和无噪声的跟踪轨迹如图 5-7，红色实线、蓝色圆形、黑色和绿色虚线分别代表期望轨迹 r 和不同试验的输出轨迹。在没有噪声的情况下如图 5-7(a)，第一次试验输出轨迹在跟踪期望轨迹时，存在显著的不准确性。随着试验次数的增加，系统的输出轨迹逐渐跟踪期望轨迹。考虑系统噪声存在时如图 5-7(b)，前五次试验输出轨迹跟踪不准确，由于系统考虑实际过程中产生的不确定性，因此输出轨迹存在较大的偏差，随着试验次数的增加，跟踪准确性逐渐提升，输出轨迹逐渐跟踪期望轨迹。



(a) 无噪声时前几次和最终试验的轨迹

(b) 考虑噪声前几次和最终试验的轨迹

图 5-7 不同试验输出轨迹对比图

图 5-8 说明了选择不同的权重矩阵 Q 和 R 对误差收敛的影响。在 R 恒定时，随着 Q 的逐渐增加，收敛速度会加快，但鲁棒性会降低。因此 Q 和 R 的选取也要保证系统鲁棒性的满足条件，经过实验发现，选择 $Q=1,000,000$ ，即满足系统的鲁棒性要求，同时收敛误差最优，达到 10^{-4}mm 量级。

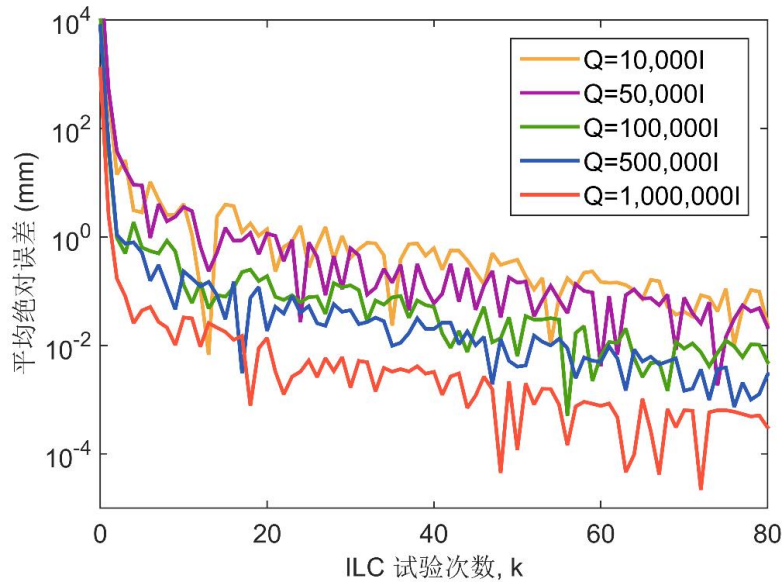


图 5-8 不同权重矩阵的平均绝对误差对比

5.5 本章小结

本章节考虑实际生产过程中的噪声干扰，针对未知参数估计问题采用 EM 估计机制，并与 ILC 相结合，实现时变系统的轨迹跟踪控制任务。该方法解决生产过程中模型误差超过鲁棒性阈值时收敛性难以保证的问题。从理论上证明了算法 5.2 的收敛性，并通过与其他方法对比实验，算法 5.2 的跟踪误差后期可稳定在接近 10^{-4}mm 量级，验证了该方法的优越性，从而实现期望轨迹的高精度跟踪。

第 6 章 总结与展望

6.1 总结

本文简要介绍了 ILC 的相关理论知识及相应算法，而传统 ILC 算法存在固定参考信号、固定试验长度、固定初始状态、固定系统动力学、固定输入更新律和系统动态 G 可逆的六个假设条件，限制了其潜在的应用范围。本文针对传统 ILC 算法在解决路径跟踪问题中存在的不足进行改进，将 ILC 算法从时不变系统拓展到时变系统中，对于时变参数采用不同的参数估计机制，并设计与参数估计方法耦合的 ILC 算法，用以解决时变系统中路径跟踪问题。同时，在理论上证明 ILC 算法的收敛性和鲁棒性，最后通过仿真和实验验证方法的可行性和有效性。

本文的主要研究工作如下：

(1)为解决传统 ILC 算法在处理路径跟踪问题时存在的诸多缺点，提出一种基于 ELM 时变参数估计机制的 ILC 方法。该方法结合系统动力学的相关性质，采用 ELM 参数估计机制估计其参数。基于传统 ILC 算法，根据控制任务构造性能指标函数，求解得到 ILC 更新律，从而完成期望轨迹的精准跟踪。从理论上得出算法满足收敛性和鲁棒性的条件，并通过仿真验证了 ELM 参数估计机制的可行性、ILC 算法的跟踪误差收敛性和期望轨迹跟踪准确性。

(2)为解决传统 ILC 算法的跟踪误差较大，且其控制对象较为单一的问题，提出了一种基于 BP 神经网络估计机制的 ILC 方法。该方法将 ILC 算法从单一的时不变系统拓展到时变系统，构建 BP 神经网络模型，并采用贝叶斯正则化算法对时变参数进行估计。同时结合时变系统的性质设计 ILC 算法，并在理论上证明了该算法的收敛性能和鲁棒性能，最后通过实验验证了该参数估计机制较其他估计方法的准确性和 ILC 算法跟踪性能的优越性。

(3)鉴于实际生产过程中存在噪声干扰，导致传统 ILC 算法和参数估计方法在解决参数估计问题和路径跟踪问题时有一定的局限性，因此提出了一种基于参数估计的含噪声干扰系统的 ILC 方法。首先根据系统动力学的形式，采用期望最大化方法估计时变参数，然后根据控制目标设计 ILC 算法，结合系统噪声干扰的存在，对算法的收敛性和鲁棒性进行理论推导，得到满足收敛性和鲁棒性的

条件。最后通过实验表明该参数估计方法在噪声存在时可以准确估计参数，同时所设计的 ILC 算法可以实现对期望轨迹的精准跟踪。

6.2 展望

尽管本文提出的方法在理论上展示了良好的性能，但在实际应用中仍面临一些限制和挑战。未来的研究将着重解决以下几个关键问题，以进一步提升方法的实用性和鲁棒性：

(1)当前方法对系统的选择有一定的限制性，未充分考虑系统的输入约束，导致部分解决方案在实际中难以实现。未来的研究将致力于在算法中引入输入约束条件，确保算法不仅满足理论要求，还能在实际系统中有效实施。

(2)为了进一步提升算法的实用性，未来的研究将利用 ILC 设计框架，优化相关性能指标。例如，通过最小化输入能量，降低系统运行成本，同时提高控制精度和效率。此外，还将探索多目标优化方法，以平衡不同性能指标之间的冲突。

(3)实际系统中不可避免地存在噪声和模型不确定性，这可能导致算法性能下降。未来的研究将重点分析算法的鲁棒收敛性，特别是在存在噪声和参数不确定性的情况下。通过引入鲁棒优化技术，增强算法对不确定性的适应能力，从而提高其在实际应用中的可靠性。

通过上述研究的深入探索，推动 ILC 和时变系统参数估计方法在更广泛的实际应用场景中的落地与推广。未来的工作将不仅关注理论上的创新，还将注重与实际工程问题的结合，以实现理论与实践的深度融合。

参考文献

- [1] Bristow D A, Tharayil M, Alleyne A G. A survey of iterative learning control[J]. IEEE Control Systems Magazine, 2006, 26(3): 96-114.
- [2] Shen D. Iterative learning control with incomplete information: A survey[J]. IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica, 2018, 5(5): 885-901.
- [3] 汪磊. 基于二维模型的迭代学习控制算法研究[D]. 江苏: 江南大学, 2021.
- [4] 陈强, 陈凯杰, 施卉辉, 等. 机械臂变长度误差跟踪迭代学习控制[J]. 自动化学报, 2023, 49(12): 2594-2604.
- [5] Cao S J, Sun L, Jiang J J, et al. Reinforcement learning-based fixed-time trajectory tracking control for uncertain robotic manipulators with input saturation[J] IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2023, 34(8): 4584–4595.
- [6] Li Z X, Yin, C K, Ji H H, et al. Constrained spatial adaptive iterative learning control for trajectory tracking of high speed train[J]. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 2022, 23(8): 11720–11728.
- [7] Li M, Chen T T, Cheng R, et al. Dual-loop iterative learning control with application to an ultraprecision wafer stage[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2022, 69(11): 11590–11599.
- [8] 赵宗爽. 基于二次调频小波分析的时变系统参数识别方法研究[D]. 江苏: 南京航空航天大学, 2021.
- [9] 冯延奇. 考虑时变参数的吸气式高超声速飞行器自适应控制[D]. 黑龙江: 哈尔滨工业大学, 2021.
- [10] Chang P H , ParK H-S. Time-varying input shaping technique applied to virbration reduction of an industrial robot[J]. Control Engineering Practice, 2005, 13(1): 121-130.
- [11] 王瑞. 基于强化学习的迭代学习控制与优化方法研究[D]. 江苏: 江南大学, 2024.
- [12] Arimoto S, Kawamura S, Miyazaki F. Bettering operation of robots by learning[J]. Journal of Robotic Systems, 1984, 1(2): 123-140.

- [13]Freeman C T. Constrained point-to-point iterative learning control with experimental verification[J]. Control Engineering Practice, 2012, 20(5): 489-498.
- [14]Freeman C T, Tan Y. Iterative learning control with mixed constraints for point-to-point tracking[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2013, 21(3): 604-616.
- [15]Barton K L, Hoelzle D J, Alleyne A G, et al. Cross-coupled iterative learning control of systems with dissimilar dynamics: design and implementation[J]. International Journal of Control, 2011, 84(7): 1223-1233.
- [16]陶洪峰, 李健, 杨慧中. 输入约束不确定系统的点对点迭代学习控制与优化[J]. 控制与决策, 2021, 36(06): 1435-1441.
- [17]Zhuang Z H, Tao H F, Chen Y Y, et al. Iterative learning control for repetitive tasks with randomly varying trial lengths using successive projection[J]. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, 2022, 36(5): 1196-1215.
- [18]Chi R H, Huang B, Wang D W, et al. Data-driven optimal terminal iterative learning control with initial value dynamic compensation[J]. IET Control Theory & Application, 2016, 10(12): 1357-1364.
- [19]惠宇, 池荣虎. 基于迭代扩张状态观测器的数据驱动最优迭代学习控制[J]. 控制理论与应用, 2018, 35(11):1672-1679.
- [20]Chi R H, Wang D W, Lewis F L, et al. Adaptive terminal ILC for iteration-varying target points[J]. Asian Journal of Control, 2015, 17(3): 952-962.
- [21]Shen D, Xu J X. Adaptive learning control for nonlinear systems with randomly varying iteration lengths[J], IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2019, 30(4): 1119-1132.
- [22]Volckaert M, Diehl M, Swevers J. Generalization of norm optimal ILC for nonlinear systems with constraints[J], Mechanical Systems and Signal Processing, 2013, 39(1-2): 280-296.
- [23]Son T D, Pipeleers G, Swevers J. Multi-objective iterative learning control using convex optimization[J], European Journal of Control, 2017, 33: 35-42.
- [24]Dahliwal S, Guay M. Set-based adaptive estimation for a class of nonlinear

- p>systems with time-varying parameters[J]. Journal of Process Control, 2014, 24(2): 479–486.
- [25] Rueda-Escobedo J G, Moreno J A. Discontinuous gradient algorithm for finite-time estimation of time-varying parameters[J]. International Journal of Control, 2016, 89(9): 1838–1848.
- [26] Cao P F, Luo X L. Modeling for soft sensor systems and parameters updating online[J]. Journal of Process Control, 2014, 24(6): 975-990.
- [27] Gaudio J E, Annaswamy A M, Lavretsky E, et al. Parameter estimation in adaptive control of time-varying systems under a range of excitation conditions[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2022, 67(10): 5440–5447.
- [28] Xue C, Li Y, Ma H, et al. Extracting time-varying dynamic characteristics of a typical TPS plate via thermal-vibration experiment[J], Experimental Techniques, 2023, 48(2): 273-284.
- [29] Lu X J, Yin F, Liu C, et al. Online spatiotemporal extreme learning machine for complex time-varying distributed parameter systems[J], IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2017, 13(4): 1753-1762.
- [30] Lu S M, Li D P, Liu Y J. Adaptive neural network control for uncertain time-varying state constrained robotics systems[J], IEEE Transactions on Systems Man Cybernetics-Systems, 2019, 49(12): 2511-2518.
- [31] Wei Q L, Zhu L, Li T, et al. A new approach to finite-horizon optimal control for discrete-time affine nonlinear systems via a pseudo linear method[J], IEEE Transactions on Automatic Control[J], 2022, 67(5): 2610–2617.
- [32] 吕畅. 基于多目标优化算法的主从 PID 控制参数优化研究[D]. 山西: 太原科技大学, 2024.
- [33] Chu B, Rauh A, Aschemann H, et al. Constrained iterative learning control for linear time-varying systems with experimental validation on a high-speed rack feeder[J], IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2022, 30(5): 1834-1846.
- [34] Hameau S, Bensmail D, Roche N, et al. Adaptations of fatigue and fatigability

- after a short intensive, combined rehabilitation program in patients with multiple sclerosis[J]. *Journal of Rehabilitation Medicine*, 2018, 50(1): 59-66.
- [35] Chen Y Y, Jiang W, Charalambous T. Machine learning based iterative learning control for non-repetitive time-varying systems[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2023, 33(7): 4098-4116.
- [36] Huang D Q, Chen, Y, Meng D Y, et al. Adaptive iterative learning control for high-speed train: A multi-agent approach[J]. *IEEE Transactions on Man and Cybernetics: Systems*, 2021, 51(7): 4067–4077.
- [37] Li J G, Wang Y M, Li Y N, et al. Reference trajectory modification based on spatial iterative learning for contour control of two-axis NC systems[J]. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2020, 25(3): 1266–1275.
- [38] Liu T, Wang Y Q. A synthetic approach for robust constrained iterative learning control of piecewise affine batch processes[J]. *Automatica*, 2012, 48(11): 2762–2775.
- [39] Blanken L, Oomen T, Multivariable iterative learning control design procedures: from decentralized to centralized, illustrated on an industrial printer[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2020, 28(4): 1534–1541.
- [40] 袁薇, 胡林威, 李向阳, 等. 基于自抗扰迭代学习控制的开关磁阻电机转矩脉动抑制[J]. *控制理论与应用*, 2020, 37(10): 2098-2106.
- [41] 卜旭辉, 侯忠生, 余发山, 等. 基于迭代学习的农业车辆路径跟踪控制[J]. *自动化学报*, 2014, 40(02): 368-372.
- [42] 何熊熊, 秦贞华, 张端. 基于边界层的不确定机器人自适应迭代学习控制[J]. *控制理论与应用*, 2012, 29(08): 1090-1093.
- [43] Owens D H, Freeman C T, Dinh T V. Norm-optimal iterative learning control with intermediate point weighting: Theory, algorithms, and experimental evaluation[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2013, 21(3): 999–1007.
- [44] Chen Y Y, Chu B, Freeman C T. Point-to-point iterative learning control with optimal tracking time allocation[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2018, 26(5): 1685–1698.

- [45] 陶洪峰, 董晓齐, 杨慧中. 参考轨迹更新的点到点迭代学习控制算法优化及应用[J]. 控制理论与应用, 2016, 33(09): 1207-1213.
- [46] 官上雷. 变批次长度下时变系统的迭代学习控制研究[D]. 江苏: 江南大学, 2023.
- [47] Schöpfer F. Linear convergence of descent methods for the unconstrained minimization of restricted strongly convex functions[J]. Siam Journal on Optimization, 2016, 26(3): 1883-1911.
- [48] Zhou X W, You Z H, Sun W G, et al. Fractional-order stochastic gradient descent method with momentum and energy for deep neural networks[J]. Neural Networks, 2025, 181: 106810.
- [49] Frey J, Baumgärtner K, Diehl M, et al. Gauss–Newton Runge–Kutta integration for efficient discretization of optimal control problems with long horizons and least-squares costs[J], European Journal of Control, 2024, 80: 101038.
- [50] Wang W J, Shi J M, Gu X F, et al. Optimal configuration of retired battery energy storage system using Two-Scenario Cascade Utilization model and Newton-Raphson Backtracking Optimization algorithm[J], Journal of Energy Storage, 2025, 113: 115600.
- [51] 王雨晨, 邱士远, 李培培, 等. 基于核极限学习机的多标签数据流半监督在线分类方法[J]. 模式识别与人工智能, 2024, 37(08): 741-754.
- [52] Khan A, Xie W. Interval state estimator design using the observability matrix for multiple input multiple output linear time-varying discrete-time systems[J], IEEE Access, 2019, 7: 167566–167576.
- [53] Chen H T, Sun Z Y, Zhong Z F, et al. Fatigue factor assessment and life prediction of concrete based on Bayesian regularized BP neural network[J], Materials, 2022, 15(13): 4491.
- [54] Gu Y Y, Shen X H, He G X. MTF estimation via BP neural networks and Markov model for space optical camera[J]. Journal of the Franklin Institute, 2013, 350(10): 3100–3115.
- [55] Makomere R, Rutto H, Koech L, et al. The use of artificial neural network (ANN) in dry flue gas desulphurization modelling: Levenberg-Marquardt (LM) and

- Bayesian regularization (BR) algorithm comparison[J]. Canadian Journal of Chemical Engineering, 2023, 101(6): 3273–3286.
- [56] Pan Z D, Lu W X, Fan Y, et al. Identification of groundwater contamination sources and hydraulic parameters based on bayesian regularization deep neural network[J]. Environmental Science and Pollution Research, 2021, 28(13): 16867–16879.
- [57] Shen D. Iterative learning control using faded measurements without system information: a gradient estimation approach[J]. International Journal of Systems Science, 2020, 51(14): 2675-2689.
- [58] Elvira V, Chouzenoux E. Graphical inference in linear-gaussian state-space models[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2022, 70: 4757–4771.
- [59] Yu J, Chaomurilige C, Yang M S. On convergence and parameter selection of the EM and DA-EM algorithms for Gaussian mixtures[J]. Pattern Recognition, 2018, 77: 188-203.
- [60] Chen J, Mao Y W, Hu M F, et al. Decomposition optimization method for switching models using em algorithm[J]. Nonlinear Dynamics, 2023, 111(10): 9361–9375.
- [61] Yokoyama N. Parameter estimation of aircraft dynamics via unscented smoother with expectation-maximization algorithm[J]. Journal of Guidance Control and Dynamics, 2011, 34(2): 426-436.
- [62] Wang R, Zhuang Z H, Tao H F, et al. Q-learning based fault estimation and fault tolerant iterative learning control for MIMO systems[J]. ISA transactions, 2023, 142: 123-135.

攻读学位期间发表的学术论文及申请的专利

已发表或已录用的主要学术论文情况

- [1] Huangfu Z W, Li W, Chen Y Y, et al. Iterative Learning Control for Time-Varying Systems Based on Extreme Learning Machine[C], 2023 42nd Chinese Control Conference, Tianjin, China, 2023: 2436-2440. (EI)
- [2] Huangfu Z W, Li W, Chen Y Y, et al. ILC Coupled with Unscented Kalman Filter Strategy for Trajectory Tracking[C], 2024 7th International Conference on Robotics, Control and Automation Engineering, Wuhu, China, 2024: 598-602. (EI)

已授权或已申请的专利情况

- [1] 李炜, 皇甫紫薇, 汪磊等. 一种便于拆装的乘客计数传感器. 实用新型专利, 专利号: ZL202323642734.3. (授权)
- [2] 李炜, 皇甫紫薇, 汪磊, 陈逸阳等. 一种基于极限学习机的时变系统迭代学习控制方法. 发明专利, 申请号: CN202310965278.1. (实质审查)
- [3] 李炜, 皇甫紫薇, 汪磊, 陈逸阳等. 一种非重复时变系统参数估计的迭代学习控制方法. 发明专利, 申请号: CN202311408442.5. (实质审查)

致谢

时光荏苒，岁月如梭，转眼间我的硕士学习生涯即将画上句号。当这篇论文即将画上句号，我的求学生涯也临近尾声。回首这段充满挑战与成长的时光，心中满是感恩与不舍。在此，我想用最真挚的文字，向所有在我学术道路和人生旅程中给予帮助与支持的人，表达最衷心的感谢。

首先，我要特别感谢我的导师李炜老师。感谢您在学习和科研过程中给予的启发与帮助。您的教诲拓宽了我的学术视野，也让我对未来的研究方向有了更清晰的认识。在论文的选题、研究方法和写作过程中，您始终以严谨的学术态度和渊博的知识给予我悉心指导。您的耐心与包容让我在学术道路上不断成长，您的鼓励与支持让我在面对困难时始终保持信心。

其次，我要感谢与我并肩作战的室友们。求学路上，我们共同探讨学术问题，分享生活点滴，相互鼓励、彼此陪伴。那些一起熬夜做实验、讨论论文的日子，那些在图书馆、实验室度过的时光，都成为我生命中最珍贵的回忆。感谢你们在我需要帮助时伸出援手，在我取得成绩时真心祝贺，是你们让这段求学时光充满温暖与欢乐。

此外，我要感谢电气工程学院的各位老师和同学。在课堂学习和学术讨论中，你们的见解和建议让我受益匪浅。感谢实验室的伙伴们和我的室友们，我们一起讨论问题、分享经验，互相鼓励与支持。这段共同奋斗的时光将成为我人生中难忘的回忆。

最后，我要特别感谢我的家人，尤其是我的父母。感谢你们一直以来毫无保留地给予我关爱、理解与支持。你们的爱如涓涓细流，浸润着我的心田，让我能够心无旁骛地专注于学业。无论遇到怎样的困难，你们的鼓励与牵挂是我不断前进的动力源泉，你们始终是我最强有力的后盾，你们的爱与关怀让我在求学路上从未感到孤单。

硕士阶段的学习不仅让我收获了知识，更让我学会了坚持与感恩。未来的路还很长，我将带着这段宝贵的经历继续前行，不忘初心，砥砺前行。谨以此论文献给所有关心和帮助过我的人。未来的路上，我将继续努力，不负众望。

尚德敏学 唯实惟新

