

分类号: U463.33

学校代码: 10363

密 级: 公开

学 号: 2220110120



安徽工程大学

Anhui Polytechnic University

硕士学位论文

题 目 混合动力悬置系统的复杂动力学
行为及其稳定性分析

论 文 作 者 张 凯

校 内 导 师 潘道远 副教授

校 外 导 师 赵夕长 高级工程师

专业学位类别 机械

研究方向(领域) 车辆动力学

论文提交日期: 2025 年 05 月 20 日

分类号: U463.33

单位代码: 10363

密 级: 公开

学号: 2220110120

混合动力悬置系统的复杂动力学行为 及其稳定性分析

Complex Dynamic Behavior and Stability Analysis of Hybrid Powertrain Mounting Systems

学 生 姓 名 : 张 凯

校 内 导 师 : 潘道远(副教授)

校 外 导 师 : 赵夕长(高级工程师)

专 业 : 机 械

研究方向(领域): 车辆动力学

论文答辩日期: 2025 年 5 月 10 日

安徽工程大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：我恪守学术道德，崇尚严谨学风。所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已明确注明和引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品及成果的内容。论文为本人亲自撰写，我对所写的内容负责，并完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

学位论文作者签名：张凯

日期：2025 年 5 月 10 日

安徽工程大学学位论文版权使用授权书

学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅或借阅。本人授权安徽工程大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

本学位论文属于

保密 ☐，在 _____ 年解密后适用本版权书。

不保密 ☒。

学位论文作者签名：张凯

日期：2025 年 5 月 10 日

指导教师签名：潘进远

日期：2025 年 5 月 10 日

混合动力悬置系统的复杂动力学行为及其稳定性分析

摘 要

动力总成悬置系统对提高汽车的乘坐舒适性和 NVH 性能具有重要影响。悬置元件是动力总成悬置系统的重要组成部分，具有非线性刚度和阻尼特性。随着汽车行业逐渐向电气化和混合动力发展，混合动力悬置系统的复杂性大幅增加，导致车辆 NVH 性能恶化。为了提高混合动力悬置系统的隔振性能，本文围绕混合动力悬置系统的动力学特性展开研究。

为了准确描述混合动力悬置系统的动态行为，建立其单自由度和两自由度动力学模型，分析了系统自由振动和强迫振动特性，探讨了系统振动微分方程求解及其物理意义。针对混合动力悬置系统非线性动力学模型求解，对比了原始摄动法、平均法和多尺度法的应用特点，分析了多尺度法在处理复杂非线性与多频率系统中的优势。研究表明，多尺度法能够有效捕捉系统的非线性特性，精确描述混合动力悬置系统复杂动力学行为。

通过悬置元件刚度测试实验，验证了悬置元件刚度具有非线性特性。应用拉格朗日法建立了含非线性刚度的混合动力悬置系统动力学模型。利用多尺度法对动力学模型进行了求解，并采用数值计算验证了解析解的正确性。混合动力悬置系统冲击行为分析表明，具有负非

线性刚度项的悬置系统可以加速冲击的衰减。为了阐明负非线性刚度项对混合动力悬置系统稳定性影响,分析了系统共振稳定性及其分岔行为。分析表明负非线性刚度项可能引起系统共振失稳,但合理设计负非线性刚度项能够有效改善系统稳定性。

考虑悬置元件的非线性刚度及阻尼,建立了含非线性刚度及阻尼的混合动力悬置系统动力学模型。利用多尺度法对动力学模型进行了求解。混合动力悬置系统冲击行为分析表明,负非线性刚度项能够缓解系统冲击响应,正非线性阻尼项能够减小系统共振幅值。混合动力悬置系统共振行为分析表明,考虑系统运行中所受激励因素,合理设计负非线性刚度项、正非线性阻尼项能够有效改善系统稳定性。

为了验证合理设计悬置元件特性能够改善混合动力悬置系统的隔振效果,设计了两套不同非线性刚度项和阻尼项的悬置系统进行对比试验。实验结果表明:在启停工况和怠速工况下,具有负非线性刚度项和正非线性阻尼项的悬置系统的隔振性能均优于具有正非线性刚度项和负非线性阻尼项的悬置系统。

关键词: 混合动力, 悬置系统, NVH, 非线性动力学, 稳定性, 分岔

Complex Dynamic Behavior and Stability Analysis of Hybrid Powertrain Mounting Systems

ABSTRACT

The Powertrain Mounting System plays a crucial role in enhancing vehicle ride comfort and NVH (Noise, Vibration, and Harshness) performance. Mounting components, as essential parts of the Powertrain Mounting System, exhibit nonlinear stiffness and damping characteristics. With the automotive industry's gradual transition toward electrification and hybridization, the complexity of Hybrid Powertrain Mounting Systems has significantly increased, leading to a deterioration in vehicle NVH performance. To improve the vibration isolation performance of Hybrid Mounting Systems, this paper focuses on studying their dynamic characteristics.

To accurately describe the dynamic behavior of Hybrid Mounting Systems, Single-degree-of-freedom and Two-degree-of-freedom Dynamic Models were established. The Free and Forced Vibration characteristics of these systems were analyzed, and solutions to the vibration differential equations were investigated alongside their physical interpretations. For

solving nonlinear dynamic models of Hybrid Mounting Systems, comparisons were conducted among the Original Perturbation Method, the Averaging Method, and the Multiple Scales Method. The advantages of the Multiple Scales Method in handling complex nonlinearities and multifrequency systems were discussed. The research demonstrates that the Multiple Scales Method effectively captures the nonlinear characteristics and accurately describes the complex dynamic behaviors of Hybrid Mounting Systems.

Nonlinear stiffness properties of mounting components were verified through experimental stiffness tests. Using the Lagrange Method, a dynamic model of the Hybrid Mounting System incorporating nonlinear stiffness was established. The dynamic model was solved with the Multiple Scales Method, and the analytical solutions were validated through numerical simulations. Analysis of impact behavior indicated that mounting systems with negative nonlinear stiffness terms could accelerate the attenuation of impact responses. To clarify the influence of negative nonlinear stiffness terms on the stability of Hybrid Mounting Systems, the system's resonance stability and bifurcation behavior were analyzed. The analysis revealed that negative nonlinear stiffness terms could lead to resonance instability, yet properly designed negative nonlinear stiffness terms could effectively improve system stability.

Considering the nonlinear stiffness and damping of mounting components, a dynamic model of the Hybrid Mounting System with nonlinear stiffness and damping was established. The model was solved using the Multiple Scales Method. Analysis of impact behavior showed that negative nonlinear stiffness terms mitigated system impact responses, while positive nonlinear damping terms reduced resonance amplitude. Resonance behavior analysis of Hybrid Mounting Systems further indicated that, by considering excitation factors encountered during system operation, appropriately designed negative nonlinear stiffness and positive nonlinear damping terms effectively improved system stability.

To verify that proper design of mounting component characteristics could improve vibration isolation in Hybrid Mounting Systems, comparative tests were conducted on two sets of mounting systems with different nonlinear stiffness and damping properties. Experimental results showed that under start-stop and idle conditions, the mounting system with negative nonlinear stiffness and positive nonlinear damping exhibited superior vibration isolation performance compared to the system with positive nonlinear stiffness and negative nonlinear damping.

KEY WORDS: Hybrid Power, Mounting System, NVH, Nonlinear Dynamics, Stability, Bifurcation

目录

摘要.....	IV
ABSTRACT.....	VI
目录.....	IX
第 1 章 绪论.....	1
1.1 研究背景和意义.....	1
1.2 混合动力悬置系统研究现状.....	2
1.2.1 悬置元件的发展历程.....	2
1.2.2 悬置系统动力学研究现状.....	7
1.3 论文研究内容.....	10
第 2 章 混合动力悬置系统建模及非线性求解.....	12
2.1 悬置系统动力学模型建模.....	12
2.1.1 单自由度动力学模型.....	12
2.1.2 两自由度动力学模型.....	14
2.2 非线性动力学方程求解.....	15
2.2.1 原始摄动法.....	16
2.2.2 平均法.....	18
2.2.3 多尺度法.....	20
2.3 本章小结.....	20
第 3 章 考虑非线性刚度的混合动力悬置系统动力学分析.....	23
3.1 含非线性刚度动力学建模.....	23
3.1.1 悬置的非线性刚度测试.....	23
3.1.2 基于拉格朗日法的悬置系统动力学建模.....	24
3.1.3 当量化模型.....	25
3.2 考虑非线性刚度的悬置系统冲击行为分析.....	26
3.2.1 冲击响应方程建立.....	26
3.2.2 基于多尺度法的冲击响应方程求解.....	28

3.2.3 悬置系统冲击响应稳定性分析.....	29
3.2.4 悬置系统动力学响应数值分析.....	30
3.3 考虑非线性刚度的悬置系统共振行为分析.....	33
3.3.1 基于多尺度法的共振响应分析.....	33
3.3.2 共振稳定性及其分岔行为分析.....	36
3.3.3 参数对共振响应的稳定性分析.....	36
3.4 本章小结.....	40
第 4 章 考虑非线性刚度及阻尼的混合动力悬置系统动力学分析.....	41
4.1 含非线性刚度及阻尼动力学建模.....	41
4.1.1 含非线性刚度及阻尼的动力学模型.....	41
4.1.2 当量化模型.....	41
4.2 考虑非线性刚度及阻尼的悬置系统冲击行为分析.....	43
4.2.1 冲击响应方程建立.....	43
4.2.2 基于多尺度法的冲击响应方程求解.....	44
4.2.3 悬置系统冲击响应稳定性分析.....	45
4.2.4 悬置系统动力学响应数值分析.....	46
4.3 考虑非线性刚度及阻尼的悬置系统共振行为分析.....	50
4.3.1 定值激励下悬置系统稳定性及分岔.....	50
4.3.2 时变激励下共振响应稳定性及分岔.....	52
4.3.3 参数对共振响应的稳定性分析.....	54
4.4 本章小结.....	56
第 5 章 实验分析与研究.....	57
5.1 NVH 数据处理.....	57
5.1.1 声压级.....	57
5.1.2 傅里叶变换.....	58
5.2 NVH 测试规范与流程.....	59
5.3 测试实验数据采集.....	61
5.3.1 样件信息.....	61

5.3.2 测试设备.....	62
5.3.3 传感器布置.....	62
5.3.4 测试工况.....	63
5.4 测试实验数据分析.....	64
5.4.1 启停工况.....	64
5.4.2 怠速工况.....	66
5.5 本章小结.....	70
第 6 章 总结与展望.....	71
6.1 总结.....	71
6.2 展望.....	71
参考文献.....	73
攻读学位期间发表的学术成果.....	78
致谢.....	79

插图清单

图 1-1 橡胶悬置的力学模型	3
图 1-2 橡胶悬置示意图	3
图 1-3 液压悬置示意图	5
图 1-4 液阻式隔振装置在低频激励区间的频响特性曲线图	5
图 1-5 主动悬置的结构示意图	7
图 2-1 单自由度动力学模型	12
图 2-2 两自由度动力学模型	14
图 3-1 MTS831.50 及悬置	23
图 3-2 悬置刚度拟合曲线	24
图 3-3 非线性刚度悬置系统动力学模型	25
图 3-4 悬置系统刚度 $k_1=173$ 、 203 kN/m 的冲击响应曲线	30
图 3-5 悬置系统刚度 $k_1=203$ 、 249 kN/m 的冲击响应曲线	31
图 3-6 非线性刚度 $k_3=0$ 、 $-0.5k_1$ 时悬置系统的冲击响应曲线	31
图 3-7 非线性刚度 $k_3=0$ 、 $0.5k_1$ 时悬置系统的冲击响应曲线	32
图 3-8 不同激励力下的冲击响应曲线	32
图 3-9 多尺度解析与数值仿真冲击响应对比分析	33
图 3-10 不同非线性刚度下的共振响应	37
图 3-11 σ - α 平面上的 fold 分岔边界	37
图 3-12 不同激励振幅下的共振响应	38
图 3-13 σ - f 平面上的 fold 分岔边界	38
图 3-14 不同线性阻尼系数下的共振响应	39
图 3-15 σ - β 平面上的 fold 分岔边界	39
图 3-16 数值仿真结果与多尺度结果对比	40
图 4-1 非线性刚度及阻尼悬置系统动力学模型	41
图 4-2 不同非线性阻尼下的冲击响应曲线	47
图 4-3 不同非线性阻尼下的 FFT 幅频特性曲线	47

图 4-4 不同非线性刚度下的冲击响应曲线	48
图 4-5 不同非线性刚度下的 FFT 幅频特性曲线	48
图 4-6 不同非线性刚度及阻尼的悬置系统冲击响应曲线	49
图 4-7 不同非线性刚度及阻尼的悬置系统 FFT 幅频特性曲线	49
图 4-8 不同非线性刚度下的共振曲线	54
图 4-9 参数 α 对 fold 分岔的影响	54
图 4-10 不同非线性阻尼下的共振曲线	55
图 4-11 参数 γ 对 Hopf 分岔的影响	55
图 5-1 线性尺度下的声压大小	57
图 5-2 分贝尺度下的声压级大小	58
图 5-3 傅里叶变换图	59
图 5-4 悬置系统传感器布点策略图	59
图 5-5 采集设备	60
图 5-6 传感器设备	61
图 5-7 传感器布置示意图	63
图 5-8 启停工况方向盘的振动量	65
图 5-9 启停工况座椅导轨的振动量	66
图 5-10 怠速工况全载的悬置隔振率	68
图 5-11 怠速工况空载的悬置隔振率	70

插表清单

表 3-1 悬置系统基本参数30

表 5-1 设备清单60

表 5-2 悬置系统的样件信息62

表 5-3 测试设备信息62

表 5-4 NVH 测试工况.....64

表 5-5 方向盘振动量和 RSS 值64

表 5-6 座椅导轨振动量和 RSS 值65

表 5-7 怠速全载方向盘和座椅导轨的振动68

表 5-8 怠速空载方向盘和座椅导轨的振动69

第 1 章 绪论

1.1 研究背景和意义

混合动力悬置系统广泛应用于现代车辆动力总成中，旨在提高振动的隔离性能、减小噪声，并改善驾驶舒适性^[1]。随着汽车行业逐渐向电气化和混合动力方向发展，悬置系统的复杂性也大幅增加。传统的橡胶悬置难以应对混合动力系统所带来的广泛的振动频率，因此液压悬置系统应运而生，例如主动悬置，这些技术能够更有效地抑制振动并实现多模式操作。然而，随着系统的复杂化，其动力学行为也变得更加多样化和难以预测，尤其是在不同驾驶工况下，非线性特性对系统的稳定性存在影响^[2]。

混合动力悬置系统的复杂动力学具体体现为悬置元件非线性刚度及阻尼的变化特性。这些非线性因素可能导致系统出现如跳跃现象、分岔和混沌等动力学行为，进而影响车辆的乘坐舒适性^[3]。因此，悬置系统的隔振性能以及稳定性提升，可以通过调整非线性参数研究为支撑依据。

液压悬置系统被广泛认为是应对混合动力系统振动问题的有效解决方案。液压悬置利用液体的粘弹特性来实现频率依赖的阻尼特性，使得其在低频和低频振动之间能够取得较好的平衡^[4]。而主动悬置系统则通过传感器和控制器对振动进行实时监测和反馈控制，从而在不同工况下都能够实现最佳的振动隔离效果^[5]。但主动控制的引入增加系统的复杂性和不确定性，这使得对其动力学行为的深入研究显得尤为重要^[6]。

为确保悬置系统在各种工作状态下的稳定性，复杂动力学行为的建模和稳定性分析显得尤为重要。非线性动力学研究能够揭示系统在振动中的非线性特性，如跳跃现象、混沌运动等，这些现象可能对车辆的行驶安全性产生负面影响^[7]。此外，稳定性分析可以帮助工程师设计出更优的控制策略，以应对不同的振动源，确保车辆的平稳性和舒适性。通过对混合动力悬置系统的深入研究，不仅可以提高车辆的舒适性和隔振性能，还可以为开发高效的振动控制方法提供理论依据^[8]。

混合动力悬置系统的建模通常涉及多种方法，包括线性和非线性建模、解析

分析和数值分析等。在实际应用中,为精确描述和分析复杂动力学行为,悬置系统的建模目前采用有限元分析与多体动力学方法^[9]。同时,非线性控制理论,如自适应控制、滑模控制和鲁棒控制,也被应用于主动悬置系统,构成悬置系统在复杂工况中的稳定性优化与可靠性提升的主要措施^[10]。这些建模和控制方法的结合使得悬置系统能够在复杂的混合动力工况环境中实现更好的隔振性能^[11]。

对于未来车辆振动控制与舒适性提升而言,混合动力悬置系统复杂动力学行为分析及其稳定性评估既构成动态特性认知的理论基础,又为形成新一代悬置系统开发提供技术参考。通过结合先进的建模方法,悬置系统的隔振性能将得到进一步提升,为未来的汽车行业提供更加安全、舒适和高效的解决方案。

1.2 混合动力悬置系统研究现状

1.2.1 悬置元件的发展历程

悬置系统在车辆中的作用至关重要,通过吸收地面不平带来的冲击,减少振动和噪音,提升车辆的乘坐舒适性。尤其是行驶在颠簸路面时,悬置系统能有效避免车身过度振动,增强操控性和稳定性,确保行驶安全,也能合理分配车身重量,改善轮胎抓地力,减少磨损,提升车辆耐用性。此外,悬置系统还能有效隔离路面噪音,增强静音效果^[12]。悬置系统的迭代演进路径从橡胶悬置延伸至主动悬置(涵盖普通液压悬置、半主动悬置等阶段),其技术选型是基于车辆定位适配策略,这种技术发展本质是消费者对乘坐舒适性与驾驶操控性双重需求驱动的驾驶体验优化进程。

(1) 橡胶悬置

橡胶悬置作为混合动力汽车动力总成悬置系统的核心元件,其技术应用自20世纪30年代起持续拓展应用范围^[13]。为了提高其隔振性能,工程师们不断优化设计,尤其是在悬置刚度方面,采用三向刚度比的弹性元件结构。随着技术的发展,橡胶悬置的设计逐渐向更加复杂的多元化方向发展。研究者们还提出 Voigt 模型等数学模型,如图 1-1 所示,通过简化力学分析,帮助优化悬置系统的设计和隔振性能。Voigt 模型有助于理解和改善悬置的隔振特性,从而推动橡胶悬置

在汽车行业的广泛应用和发展。

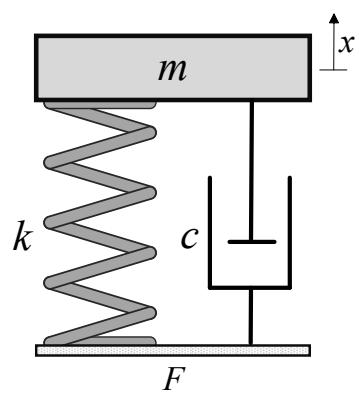


图 1-1 橡胶悬置的力学模型

作为悬置系统隔振中的关键弹性体，橡胶通过图 1-2 所示的典型元件结构实现隔振性能。作为高分子材料的典型代表，天然橡胶及其衍生品（包括合成橡胶与硅基弹性体）虽然在形变恢复性能方面表现出显著优势，但在极端工况下的稳定性仍存在明显的局限性。具体而言，该材料体系在超过临界温度的热力耦合环境，其分子链段的热运动将导致材料强度显著衰减，同时对于烃类溶剂的抗溶胀能力亦相对不足，这种热-化双重作用下的性能劣化现象。对于悬置系统的悬置元件而言，将直接加速其应力松弛进程并缩短有效寿命。



图 1-2 橡胶悬置示意图

在实际的车辆行驶路况下，理想的悬置元件应具有良好的动态特性，以适应不同的路况需求。为实现对路面激励引发振动的有效衰减并阻断向车身的能量传递，低频区段需配置高动刚度与强阻尼的特性；与之形成频谱互补，高频域则需通过低动刚度与弱阻尼特性实现振动波形的选择性过滤。橡胶悬置呈现的频率-刚度正相关特性（低频模量衰减与高频硬化现象）与理想隔振系统的非线性频响要求存在本质差异。特别是在高频激励条件下，材料硬化引发的刚度跃升效应会

显著削弱系统的振动隔振性能，这种频域特性与功能需求的失配现象，构成推动悬置结构创新的主要原因。

(2) 液压悬置

20 世纪 40 年代，美国工程师 Richer Harding 团队首次提出液压悬置的工程构想，其核心创新在于通过液力减震机构与橡胶悬置的融合提升系统隔振性能^[13]。1962 年，Richard Rasmussen 完成液压悬置的专利化设计，并实现车辆悬置系统的工程化应用。奥迪公司于 1979 年将该技术应用于五缸奥拓动力总成系统，通过多维度悬置架构的拓展验证液压悬置相较于橡胶悬置的隔振优势^[14]。技术发展至 1984 年呈现多元化创新趋势，Escan 公司研制的液阻悬置元件与日本开发的液柱共振式液压悬置共同推进该领域的技术更新^[15]。三菱公司在同年为其豪华轿车配备一种半主动式液压悬置，具有电控截流孔开度，成功地改善了悬置系统的减振性能^[16]。

通用汽车公司于 1985 年在其两款车型中实施液压悬置技术的全面工程化部署^[17]，而福特公司针对货车平台的适配性验证，则进一步推动该技术向多元化车型的渗透进程。

主动液压悬置技术领域研究由 R.W. Herrich 实验室于 1987 年实现重大的突破，其首阶段实验数据验证了控制策略的工程可行性^[18]。1988 年，Freudenberg 公司将主动液压悬置技术在其 FWD 式四缸发动机上开始应用，因此标志着该项技术在悬置领域取得重大进展^[19]。

与传统橡胶悬置相比，液压悬置在低频段的隔振效果上有显著提升，尤其在减少发动机噪音和提高车内舒适性方面表现尤为突出。现代汽车中的液压悬置系统设计原理基本相似，其核心组件包含三个功能单元：弹性储能元件（橡胶主簧）、压力解耦隔膜系统以及双侧液压腔室（上、下液室），图 1-3 所示呈现了该构型的空间排布。从动力学特性角度分析，该装置的等效动刚度呈现显著的并联刚度叠加效应，其本质源于弹性体材料的形变储能机制与密闭流腔的体积压缩耗能机制之间的多物理场耦合作用。因此其能够根据工作频率的变化调节刚度和阻尼，以适应不同的驾驶工况。液压悬置不仅提升了车辆的振动控制能力，还在隔音降噪和提高乘坐舒适性方面发挥重要的作用。随着控制技术的发展，液压悬置逐渐

发展为主动和半主动悬置，进一步增强系统的适应性和精确性。

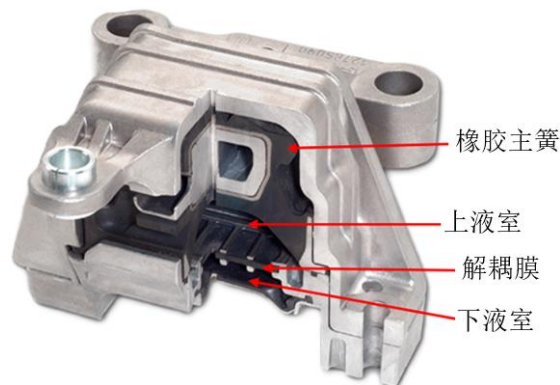


图 1-3 液压悬置示意图

悬置系统隔振性能的优化提升可归因于液压悬置的低频段特性，其通过高刚度与大阻尼的协同作用，有效补偿橡胶悬置在频响特性上的固有缺陷。图 1-4 为在低频段时液压悬置的动态特性，图中清晰地显示其在低频时较高刚度和阻尼的优势。液压悬置在高频段仍然存在硬化现象，动刚度随频率的增加而急剧上升，这使得其高频段的隔振性能下降，无法满足理想的隔振要求。虽然液压悬置在低频段有显著的优势，但仍然面临与橡胶悬置类似的缺陷。半主动与主动悬置技术作为动态响应优化的工程解决方案，其出现源于工程师对悬置系统的持续研发，通过构建工况自适应的控制策略，实现在多维动态要求下的高频隔振性能跃升，这一技术的演化本质上是对现有问题的系统性适应与优化。

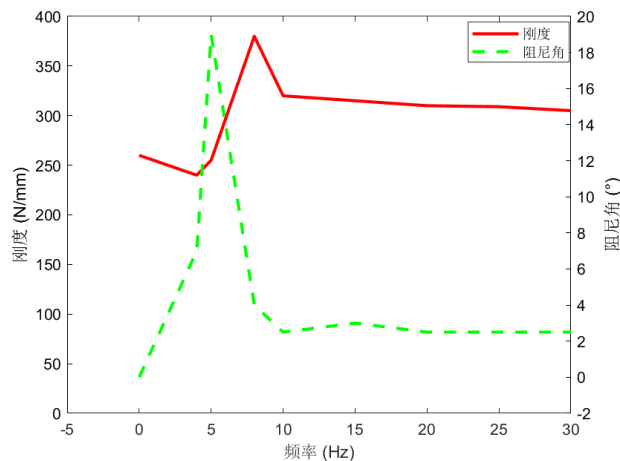


图 1-4 液阻式隔振装置在低频激励区间的频响特性曲线图

(3) 半主动和主动悬置

在 20 世纪 80 年代中后期的技术演进关键期，振动控制工程领域实现了重要突破——基于能量实时补偿原理的振动控制系统正式进入工程应用的探索阶段。1988 年，Freudenberg 公司自主研发了一种新型的半主动液压悬置，并在 1990 年

将半主动悬置技术进一步拓展为主动悬置技术,并且该技术迅速应用于商用车辆,为提升车辆隔振性能提供了新的解决方案^[20]。动态隔振性能的主动优化机制依赖于被动悬置(橡胶/液压型)、振动传感器及电子控制器构成的闭环调节系统。

在被动与主动悬置技术中,半主动悬置凭借“开-关”模式切换机制,在技术体系中占据了关键位置。在“开”模式下,系统通过调节阻尼来降低动刚度,从而改善低频段的隔振性能;而在“关”模式下,其性能类似于传统的液压悬置^[21]。半主动悬置一般针对特定频率进行设计,例如在怠速工况下,通过降低悬置动刚度来有效隔振,提升乘坐舒适性。然而,由于其设计的局限性,半主动悬置难以同时满足中高频段的隔振需求,在广频域的动态性能方面仍存在不足。

电磁作动器控制单元的工程化突破始于1994年Muller团队的主动液压悬置原型,这项技术显著提高悬置的主动调节能力和动态响应性能^[22]。技术产业化进程在1990年后加速发展,丰田与Paulstra公司^[23]通过产品级主动悬置系统的整车集成验证,进一步拓宽该技术的实用性和市场覆盖范围。1997年,研究人员对奥迪汽车某车型的液阻悬置系统进行了详细分析,探讨了其惯性通道和解耦膜在动态隔振中的作用。丰田汽车于1998年率先在量产轿车上大规模应用主动控制式发动机悬置系统,标志着主动悬置技术从实验阶段向实际应用的成功跨越,并加速了该技术的后续发展^[24]。

进入21世纪后,主动悬置技术取得创新突破。2002年, Lee YW 提出将电磁作动器与解耦盘连接的新型主动悬置结构设计方法,实现对液压悬置动刚度的动态调整^[25]。这一设计增强了系统的控制精度和响应速度,同时扩大了悬置元件的适用频率范围,为隔振技术的发展提供了新的思路。如图1-5所示,基于智能材料致动技术的悬置系统方案中,其创新性体现在对传统被动式悬置系统进行了致动模块的嵌入式集成改造。其中关键创新为采用具有实时可控输出特性的电磁智能驱动单元作为执行机构的核心,这种机电融合设计使得整个悬置系统具有从被动吸振模式向主动抗振模式转换的能力。

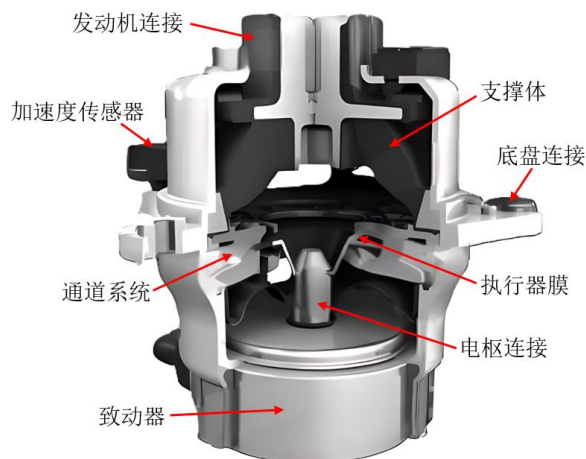


图 1-5 主动悬架的结构示意图

该技术突破的系统构型创新体现在智能致动系统与被动式隔振结构的功能耦合设计，通过建立能量流的实时反馈控制通道实现动态激励的相位补偿与幅值衰减，实现对动态特性的实时优化调节。低频段能有效抑制振动，高频段则通过主动调整刚度维持较低刚度水平，显著提升隔振效果。这使得主动悬架能够覆盖发动机全频段的工作需求，显著提高隔振效果。与传统悬架相比，主动悬架不仅能够应对复杂的驾驶工况，还能提升整车的乘坐舒适性和静音水平。但主动悬架由于需要持续供电，其能耗较高，同时制造和维护成本较为昂贵，目前主要应用于高端和豪华车型。尽管如此，随着控制技术的进步、电磁致动器的优化以及生产成本的逐步下降，主动悬架有望在未来得到更广泛的推广和应用。

此外，主动悬架技术的研究还推动了相关领域的发展。例如，主动悬架技术与车辆动态控制系统的结合，使整车的悬挂系统与动力总成隔振系统协同工作，从而提高车辆的整体操控性。同时，随着人工智能与传感技术的应用，主动悬架未来可能实现自适应学习和实时优化，为车辆提供更智能、更高效的隔振解决方案。

1.2.2 悬架系统动力学研究现状

作为车辆关键结构，悬架系统的动力学特性对乘坐舒适性、操控性及行驶稳定性具有决定性影响。近年来，国内外研究者在悬架系统的动力学行为、非线性特性以及稳定性分析等方面进行了广泛而深入的研究。

在碰撞动力学研究领域的重要理论奠基阶段，基于冲击载荷分布调控的刚体

碰撞动力学模型取得突破性进展,其核心价值体现为建立关键碰撞参数的定量化描述方法,并逐步完成从理论推导到工程验证阶段的工业化转化进程。**Harrison**^[26]提出基于该理论的悬置系统动力学模型设计,明确弹性元件位置在振动解耦中的关键作用,为悬置系统动力学研究提供了理论基础。**Wilson**^[27]进一步将碰撞中心理论应用于动力总成悬置系统,提出通过优化弹簧和阻尼布置来提高振动隔离性能。

1959 年, **Anon** 和 **Horison Horovitz**^[28]构建基于刚体假设的悬置系统振动隔离模型,结合弹簧和阻尼器的非线性特性分析了三向隔振性能,为之后对非线性悬置系统的建模提供了理论依据。

1965 年, **Timpner**^[29]揭示了弹性中心布局对动力总成六自由度解耦的影响机制,并提出通过优化悬置弹性元件布局提升解耦设计的方法。1975 年, **Toshio** 和 **Sakata**^[30]提出的机械阻抗法,为通过调节悬置刚度与阻尼特性分析系统动态传递行为提供了新途径。

1982 年, **Cook**^[31]研究了悬置系统弹簧的迟滞非线性行为对系统动力学的影响。通过实验与数值分析发现,迟滞效应在振动隔离中具有双重作用,在某些条件下可以抑制高频振动,但在大位移激励下可能引发复杂的非线性振动现象,甚至导致系统的稳定性下降。

1990 年, **Wong**^[32]提出了悬置系统多体动力学建模方法,系统地分析刚度、阻尼及弹性中心的动态布局对车辆整体振动性能的影响。研究首次引入了多刚体动力学理论,将车身、动力总成和悬置系统视为耦合系统,为悬置系统的整体建模和优化设计提供了新的研究思路。

1998 年, **Nagai**^[33]构建了包含非线性弹簧与迟滞阻尼的悬置系统动力学模型,采用分岔分析法研究非线性因素对稳定性的影响,发现特定参数范围内系统可能从稳定周期响应转变为倍周期或混沌状态。**Nagai** 进一步指出,这种非线性特性在高动态范围下尤为显著,对复杂工况下的车辆控制提出了新挑战。

2005 年, **Van der Heijden**^[34]分析了具有非线性迟滞阻尼悬置系统的动力学响应,首次通过实验验证了迟滞阻尼在大振幅振动条件下对系统稳定性的削弱作用。研究表明,通过合理调整迟滞非线性参数,在一定程度上改善系统稳定性,但过

强的迟滞效应可能导致系统的动力学不稳定。

2010 年, Smith 和 Taylor^[35]研究了随机激励条件下的非线性悬置系统动力学行为。通过数值仿真和实验测试,发现随机激励不仅对系统的稳定性产生显著影响,还可能导致系统进入非周期性振动状态。研究还提出了一种基于随机振动理论的非线性动力学稳定性分析方法,为悬置系统设计提供了新思路。

2012 年, Cheng 和 Zhou^[36]提出了基于非线性动力学理论的悬置系统优化设计框架,分析了非线性刚度和阻尼对振动响应及系统稳定性的影响。结果表明,通过优化非线性刚度和阻尼参数的组合,可以显著提升系统的振动隔离效果,并有效避免系统出现动力学不稳定现象。

2017 年, Rajan 等^[37]通过数值仿真研究了悬置系统的混沌行为,发现强非线性条件下,系统可能进入混沌状态。同时,还分析了分岔行为对系统动力学稳定性的影响。同年, Song 等^[38]基于分岔分析法研究了非线性阻尼器对系统振动行为的影响,提出通过优化非线性阻尼参数改善系统的隔振性能。

2018 年, Zhang 等^[39]采用多体动力学方法结合非线性力学模型,研究了悬置刚度、阻尼参数与车辆动态性能之间的关系,并指出系统参数在不同驾驶工况下对车辆舒适性具有显著影响。Liu 等^[40]研究了非线性弹簧材料的非线性对悬置系统动态响应的影响,提出了基于非线性材料特性的悬置系统优化设计方案。

2021 年, Wang 等^[41]基于 ADAMS 多体动力学仿真平台,建立动力总成-悬置耦合系统的六自由度参数化模型,分析模态能量、固有频率及解耦率等特性参数,最终完成三点动力总成悬置系统的优化设计。

2022 年, Sun 等^[42]基于多体耦合传递路径分析理论,构建悬架系统、车身柔性以及轮胎-非簧载质量系统等与悬置系统解耦优化模型,应用有限元-多体动力学联合仿真策略,提出了一种更符合工程实际的解耦分析方法。

2023 年, 张伟等^[43]针对混合动力汽车动力总成悬置系统的振动传递特性,构建了考虑多源激励和非线性特性的系统动力学模型,并引入响应面方法与多目标优化算法对悬置参数进行优化,显著提升了低频隔振性能与整车操稳性之间的平衡。

2024 年, 李强等^[44]采用模态灵敏度分析方法,对典型混合动力悬置系统的

六自由度刚度参数进行了辨识,并基于目标模态隔振比,优化布置了悬置点的位置及方向。研究表明,该方法能有效改善共振频带内的传递函数幅值峰值,抑制整车系统模态间的耦合。

悬置系统的动力学研究在动力学建模、非线性行为分析以及随机振动条件下的响应特性等方面取得了显著进展。国内外学者逐步从线性模型扩展到非线性建模,通过多自由度和多体动力学方法,深入研究了迟滞非线性、非线性刚度和阻尼等对系统动态性能的影响,并揭示了复杂工况下可能出现的分岔和非周期性振动等动力学现象。

现有研究尚未充分揭示非线性因素的作用机理,尤其是混合动力总成悬置系统中的非线性刚度与迟滞阻尼特性对系统动力学响应的具体影响仍缺乏深入的分析。针对该系统的非线性动力学特性,构建相应的动力学模型,深入研究悬置系统的振动响应特性,探索非线性项的引入,对系统的隔振性能与动力学稳定性的影响。为混合动力的悬置系统优化设计提供重要的理论支持与工程实践指导。

1.3 论文研究内容

主要做了以下的研究内容:

第一章为绪论。介绍混合动力悬置系统的发展背景与重要性,概述悬置系统动力学研究中存在的问题。并阐明悬置技术的演变过程及其意义,阐述悬置系统动力学的研究现状。

第二章为混合动力总成悬置系统以及非线性相关理论,讨论单自由度模型以及两自由度模型的振动特性。对比平均法、摄动法、多尺度法的三种求解方法的应用范围。由对比结果可知多尺度法对系统的非线性特性捕捉优于平均法和摄动法。

第三章以混合动力总成悬置系统为研究对象,建立含非线性刚度项的动力学模型并分析其动力学行为。实验验证悬置系统中非线性刚度的存在,基于此建立悬置系统的简化动力学模型,并使用拉格朗日法将其转化为等效模型。通过分析刚度的非线性特性变化,探讨对悬置系统冲击响应及共振稳定性的影响。

第四章建立包含非线性刚度及阻尼项的建模与动力学行为分析。通过综合考

考虑非线性刚度与阻尼的共同作用，构建悬置系统动力学模型，研究非线性刚度单独作用、非线性阻尼单独作用及其协同效应对系统非线性动力学特性的影响机制。分析非线性因素在悬置系统共振及冲击稳定性的作用。

第五章为实验分析。通过整车测试验证理论分析结果，确认非线性因素对悬置系统稳定性的重要影响，为悬置系统的设计与优化提供了依据。

第六章为总结与展望，总结所做的研究工作，提出后续关于混合动力悬置系统动力学的研究方向。

第2章 混合动力悬置系统建模及非线性求解

因整合发动机与电机的驱动特性，混合动力悬置系统呈现出复杂的动力传输与耦合机构。为了准确描述其动态行为，需要构建系统的数学模型，并处理其中的非线性特性。系统的非线性问题求解通常采用原始摄动法、平均法及多尺度法等分析方法。每种方法在求解精度、计算效率和稳定性方面都有其独特的优缺点，因此，选择适当的方法需要依据系统的具体特性来决定。通过比较不同非线性求解方法，可以为混合动力悬置系统的建模提供有效的求解策略，以确保计算结果的准确性和合理性。

2.1 悬置系统动力学模型建模

动力总成悬置系统的建模是分析和优化车辆动力悬置系统振动特性、舒适性和稳定性的关键步骤。在动力总成悬置系统中，通常涉及对系统的振动行为进行精确建模，以预测其对车身和动力总成的影响。基础的建模方法主要是基于单自由度与两自由度系统模型进行构建。

2.1.1 单自由度动力学模型

如图 2-1 所示，系统在受到外力 $F = F_0 \sin \omega t$ 的单自由度动力学模型，图 2-1 中以缓冲器符号表示阻尼，系统质量用 m 表示，黏性阻尼系数以 c 表示，刚度系数用 K 表示^[45]。

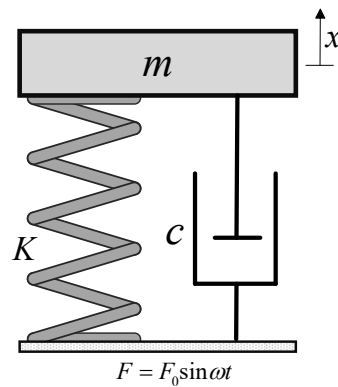


图 2-1 单自由度动力学模型

以系统的静平衡点作为原点时，可得

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = F_0 \sin \omega t \quad (2-1)$$

或

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega_n^2 x = q \sin \omega t \quad (2-2)$$

式中： $n = \frac{c}{2m}$ ； $\omega_n^2 = \frac{K}{m}$ 。

在忽略阻尼作用的条件下，系统振动方程可简化为

$$m\ddot{x} + Kx = F_0 \sin \omega t \quad (2-3)$$

式(2-3)为非齐次微分方程，其全解由齐次方程通解与原方程特解组成，表达式为 $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ ，弱阻尼状态下则为

$$x_1(t) = Ae^{-nt} \sin(\sqrt{\omega_n^2 - n^2}t + \varphi) \quad (2-4)$$

特解对应外激励引起的受迫振动响应，其振幅保持恒定且表现为周期性的稳态运动。基于非齐次项为谐波激励的数学特征，可推断特解必为同频谐波函数，但存在相位延迟现象。由于振动位移响应相对于激励信号存在相位滞后，可通过设定特解为以下形式进行求解。

$$x_2(t) = B \sin(\omega t - \psi) \quad (2-5)$$

式中： B 为稳态振动的振幅； ψ 为相角差。

将式(2-5)代入式(2-2)可得

$$-B\omega^2 \sin(\omega t - \psi) + 2nB\omega \cos(\omega t - \psi) + \omega_n^2 B \sin(\omega t - \psi) = q \sin \omega t \quad (2-6)$$

整理可得

$$[B(\omega_n^2 - \omega^2) - q \cos \psi] \sin(\omega t - \psi) + (2nB\omega - q \sin \psi) \cos(\omega t - \psi) = 0 \quad (2-7)$$

因同角的正弦、余弦的值不可能同时为零，故

$$\begin{cases} B(\omega_n^2 - \omega^2) - q \cos \psi = 0 \\ 2nB\omega - q \sin \psi = 0 \end{cases}$$

可解得

$$B = \frac{q}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2} \quad (2-8)$$

$$\psi = \tan^{-1} \frac{2n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2} \quad (2-9)$$

系统的稳态位移响应为

$$x_2(t) = \frac{q}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}} \sin(\omega t - \tan^{-1} \frac{2n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2})$$

用系统基本参数 m 、 K 、 c 、 F_0 表达系统的稳态位移响应为

$$x_2(t) = \frac{F_0}{\sqrt{(K - \omega^2 m)^2 + (\omega c)^2}} \sin(\omega t - \tan^{-1} \frac{\omega c}{K - \omega^2 m}) \quad (2-10)$$

稳态响应的幅值 B 与相位差 ψ 由系统固有参数（质量、刚度、阻尼系数）和外激励特性（频率、幅值）共同决定，而初始状态作用于瞬态响应的振幅 A 和初始相角 φ ，不改变稳态响应特性。

2.1.2 两自由度动力学模型

如图 2-2 所示，系统在受到外力 $F(t) = F_1 \sin \omega t$ 的两自由度动力学模型^[46]。

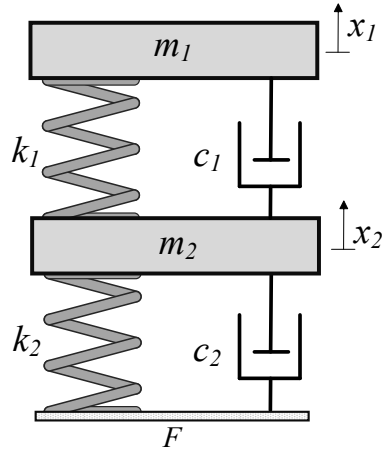


图 2-2 两自由度动力学模型

系统的运动方程为

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 &= F_1 \sin \omega t \\ m_2 \ddot{x}_2 - c_2 \dot{x}_1 + c_2 \dot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2-11)$$

矩阵形式如下

$$M \ddot{X} + C \dot{X} + KX = F$$

方程的通解包含瞬态衰减项和稳态受迫振动，现仅分析稳态部分。设定稳态位移解为

$$\begin{aligned} x_1 &= B_{1c} \cos \omega t + B_{1s} \sin \omega t \\ x_2 &= B_{2c} \cos \omega t + B_{2s} \sin \omega t \end{aligned} \quad (2-12)$$

稳态解的一阶、二阶导数分别为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -B_{1c} \omega \sin \omega t + B_{1s} \omega \cos \omega t \\ \dot{x}_2 &= -B_{2c} \omega \sin \omega t + B_{2s} \omega \cos \omega t \\ \ddot{x}_1 &= -B_{1c} \omega^2 \cos \omega t - B_{1s} \omega^2 \sin \omega t \\ \ddot{x}_2 &= -B_{2c} \omega^2 \cos \omega t + B_{2s} \omega^2 \sin \omega t \end{aligned} \quad (2-13)$$

将一阶、二阶导数以及 x_1 、 x_2 代入式(2-11)，可得

$$\begin{aligned} & \left[(k_{11} - m_{11} \omega^2) B_{1c} + k_{12} B_{2c} + c_{11} \omega B_{1s} + c_{12} \omega B_{2s} \right] \cos \omega t + \\ & \left[(k_{11} - m_{11} \omega^2) B_{1s} + k_{12} B_{2s} - c_{11} \omega B_{1c} - c_{12} \omega B_{2s} \right] \sin \omega t = F_1 \sin \omega t \\ & \left[(k_{22} - m_{22} \omega^2) B_{2c} + k_{12} B_{1c} + c_{12} \omega B_{1s} + c_{22} \omega B_{2s} \right] \cos \omega t + \\ & \left[(k_{22} - m_{22} \omega^2) B_{2s} + k_{12} B_{1s} - c_{12} \omega B_{1c} - c_{22} \omega B_{2s} \right] \sin \omega t = 0 \end{aligned} \quad (2-14)$$

式(2-14)要满足恒等成立，则系数必须为零，可得

$$\begin{aligned} (k_{11} - m_{11} \omega^2) B_{1c} + k_{12} B_{2c} + c_{11} \omega B_{1s} + c_{12} \omega B_{2s} &= 0 \\ (k_{11} - m_{11} \omega^2) B_{1s} + k_{12} B_{2s} - c_{11} \omega B_{1c} - c_{12} \omega B_{2s} &= F_1 \\ (k_{22} - m_{22} \omega^2) B_{2c} + k_{12} B_{1c} + c_{12} \omega B_{1s} + c_{22} \omega B_{2s} &= 0 \\ (k_{22} - m_{22} \omega^2) B_{2s} + k_{12} B_{1s} - c_{12} \omega B_{1c} - c_{22} \omega B_{2s} &= 0 \end{aligned} \quad (2-15)$$

根据式(2-15)，可解得系统的振动位移为

$$\begin{aligned} x_1 &= B_1 \sin(\omega t - \psi_1) \\ x_2 &= B_2 \sin(\omega t - \psi_2) \end{aligned} \quad (2-16)$$

式中： $B_1 = \sqrt{B_{1c}^2 + B_{1s}^2}$ ； $B_2 = \sqrt{B_{2c}^2 + B_{2s}^2}$ ； $\psi_1 = \arctan \frac{-B_{1c}}{B_{1s}}$ ； $\psi_2 = \arctan \frac{-B_{2c}}{B_{2s}}$ 。

2.2 非线性动力学方程求解

在分析具有弱非线性特性的振动问题时，研究者常面临系统复杂性较高且计

算难度较大的双重挑战。相较于线性系统的显式解析解，非线性振动模型的动力学方程往往存在更强的数学耦合性，这使得其分析过程更为复杂。针对这一难题，工程领域已发展出多种不同的分析手段与数值算法。系统梳理典型的弱非线性振动问题的处理策略，通过对比各类方法的适用条件与计算效率，为悬置系统这类特定非线性振动模型筛选出最优解决方案。对几种常见的弱非线性振动模型求解方法进行比较分析，以选择更适合该非线性悬置系统模型的求解方法。

2.2.1 原始摄动法

原始摄动法是一种用于求解非线性和复杂系统的近似解法，通常应用于系统中存在一个小参数的情况^[47]。通过将问题的解转化为关于摄动参数的级数展开，原始摄动法将复杂的方程转化为多个较简单的线性问题，并逐阶求解。

研究类线性自治系统的特性，则系统的方程为

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}) \quad (2-17)$$

式中： ε 是小参数； $f(x, \dot{x})$ 是非线性函数。

针对式(2-17)的周期解，将方程解展开为关于 ε 的幂级数形式，即

$$x(t, \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots, \quad (2-18)$$

式中： $x_i(t) (i = 0, 1, 2, \dots)$ 是关于时间 t 的函数，与 ε 无关。

将式(2-18)代入式(2-17)的左端，可得

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x &= (\ddot{x}_0 + \varepsilon \ddot{x}_1 + \varepsilon^2 \ddot{x}_2 + \varepsilon^3 \ddot{x}_3 + \dots) + \omega_0^2 (x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3 + \dots) \\ &= \ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 + \varepsilon (\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1) + \varepsilon^2 (\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2) + \varepsilon^3 (\ddot{x}_3 + \omega_0^2 x_3) + \dots \end{aligned} \quad (2-19)$$

将式(2-18)代入式(2-17)的右端 $f(x, \dot{x})$ ，并将它在 $x_0, \dot{x}_0$ 附近展开为 ε 的幂级数，则

$$\begin{aligned}
 f(x, \dot{x}) = & f(x_0, \dot{x}_0) + \varepsilon \left[x_1 \frac{\partial f(x_0, \dot{x}_0)}{\partial x} + \dot{x}_1 \frac{\partial f(x_0, \dot{x}_0)}{\partial \dot{x}} \right] + \\
 & \varepsilon^2 \left[x_2 \frac{\partial f(x_0, \dot{x}_0)}{\partial x} + \dot{x}_2 \frac{\partial f(x_0, \dot{x}_0)}{\partial \dot{x}} + \frac{1}{2!} (x_1^2 \frac{\partial^2 f(x_0, \dot{x}_0)}{\partial x^2} + \right. \\
 & \left. \dot{x}_1 \frac{\partial^2 f(x_0, \dot{x}_0)}{\partial x \partial \dot{x}} + 2x_1 \dot{x}_1 \frac{\partial^2 f(x_0, \dot{x}_0)}{\partial x \partial \dot{x}}) \right] + \dots,
 \end{aligned} \quad (2-20)$$

式中： $\partial f(x_0, \dot{x}_0) / \partial x$ 表示 $\partial f(x, \dot{x}) / \partial x$ 在 $x = x_0, \dot{x} = \dot{x}_0$ 处的值。同理，即

$$\begin{aligned}
 & \ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 + \varepsilon (\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1) + \varepsilon^2 (\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2) + \varepsilon^3 (\ddot{x}_3 + \omega_0^2 x_3) + \dots \\
 = & \varepsilon f(x_0, \dot{x}_0) + \varepsilon^2 \left[x_1 \frac{\partial f(x_0, \dot{x}_0)}{\partial x} + \dot{x}_1 \frac{\partial f(x_0, \dot{x}_0)}{\partial \dot{x}} \right] + \\
 & \varepsilon^3 \left[x_2 \frac{\partial f(x_0, \dot{x}_0)}{\partial x} + \dot{x}_2 \frac{\partial f(x_0, \dot{x}_0)}{\partial \dot{x}} + \frac{1}{2!} (x_1^2 \frac{\partial^2 f(x_0, \dot{x}_0)}{\partial x^2} + \right. \\
 & \left. \dot{x}_1 \frac{\partial^2 f(x_0, \dot{x}_0)}{\partial x \partial \dot{x}} + 2x_1 \dot{x}_1 \frac{\partial^2 f(x_0, \dot{x}_0)}{\partial x \partial \dot{x}}) \right] + \dots,
 \end{aligned} \quad (2-21)$$

系统平衡条件需满足方程两侧同幂次项系数相等，由此推导约束方程组为

$$\begin{aligned}
 & \ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0 \\
 & \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = f(x_0, \dot{x}_0) \\
 & \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = x_1 \frac{\partial f(x_0, \dot{x}_0)}{\partial x} + \dot{x}_1 \frac{\partial f(x_0, \dot{x}_0)}{\partial \dot{x}} \\
 & \ddot{x}_3 + \omega_0^2 x_3 = x_2 \frac{\partial f(x_0, \dot{x}_0)}{\partial x} + \dot{x}_2 \frac{\partial f(x_0, \dot{x}_0)}{\partial \dot{x}} + \frac{1}{2!} (x_1^2 \frac{\partial^2 f(x_0, \dot{x}_0)}{\partial x^2} + \\
 & \quad \dot{x}_1 \frac{\partial^2 f(x_0, \dot{x}_0)}{\partial x \partial \dot{x}} + 2x_1 \dot{x}_1 \frac{\partial^2 f(x_0, \dot{x}_0)}{\partial x \partial \dot{x}}) + \dots,
 \end{aligned} \quad (2-22)$$

式(2-22)中的方程分别是关于 x_i 的线性微分方程，可以逐个进行求解。原始摄动理论的核心思想在于将强非线性问题解耦为多级线性子问题，从而构建逐次逼近的求解流程，通过引入小参数 ε 的级数展开，可以有效近似地解决参数较小的非线性系统，且逐阶逼近的过程清晰，具有较高的计算效率和理论价值。缺点在于依赖于小参数假设，当参数幅值超出小参数假设范围时，该方法的收敛性会

急剧恶化,主要源于级数展开高阶项的影响显著增强。此外,对于高阶项的推导,计算量可能变得复杂繁琐,特别是在非线性项的形式较为复杂的情况下。因此,原始摄动法更适用于弱非线性系统的近似求解,而对于强非线性系统或需要高精度解的场景,其适用性可能受到限制。

2.2.2 平均法

平均法作为弱非线性振动问题的解析手段,其核心在于通过剔除系统非线性因素构造等效线性模型,并认为线性解的幅频特性与相位角存在时变缓变特性^[48]。该方法实施过程中需对幅值、相位的时间导数进行傅里叶级数展开,通过时域平均运算获得周期解的控制方程。

考察如下典型非线性振动方程为

$$m\ddot{x} + f_m(\dot{x}, \ddot{x}) + kx + f_k(x, \dot{x}) = 0 \quad (2-23)$$

式中: $f_m(\dot{x}, \ddot{x})$ 为非线性惯性效应与阻尼效应的耦合作用;

$f_k(x, \dot{x})$ 为非线性弹性恢复力与耗散力的复合响应。

式(2-23)的派生方程为

$$m\ddot{x}_0 + kx_0 = 0 \quad (2-24)$$

假设派生解为

$$\begin{aligned} x_0 &= \rho_0 \cos \psi \\ \dot{x}_0 &= -\rho_0 \omega \sin \psi \\ \ddot{x}_0 &= -\rho_0 \omega^2 \cos \psi \\ \psi &= \omega_0 t + \beta_0 \end{aligned} \quad (2-25)$$

在不考虑非线性的情况下, β_0 和 ρ_0 均是常数。在考虑非线性时, β_0 和 ρ_0 将不再是常数,是关于时间 t 的函数,因此方程的解为

$$x = \rho(t) \cos[\omega_0 t + \beta(t)] \quad (2-26)$$

$\rho(t)$ 和 $\omega(t)$ 可表示为

$$\begin{aligned}
 \rho(t) &= \rho_0 + \rho_1(t) \\
 \omega(t) &= \omega_0 + \omega_1(t) = \dot{\psi}(t) \\
 \dot{\rho}(t) &= \dot{\rho}_1(t) \\
 \dot{\beta}(t) &= \omega_1(t)
 \end{aligned} \tag{2-27}$$

为了求出 $\dot{\rho}(t)$ 和 $\dot{\beta}(t)$ ，将非线性函数进行展开为

$$f_m(\dot{x}, \ddot{x}) = g_{m1} \cos \psi + h_{m1} \sin \psi + \varepsilon \left\{ g_{m0} + \sum_{n=1}^{\infty} [g_{mn} \cos n\psi + h_{mn} \sin n\psi] \right\} \tag{2-28}$$

式中：

$$\begin{aligned}
 g_{m0} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_m(\rho, \psi) d\psi \\
 g_{mn} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_m(\rho, \psi) \cos n\psi d\psi \\
 h_{mn} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_m(\rho, \psi) \sin n\psi d\psi \\
 f_m(\rho, \psi) &= f_m(-\omega^2 \rho \cos \psi, -\rho \omega \sin \psi)
 \end{aligned} \tag{2-29}$$

而

$$f_k(\dot{x}, \dot{x}) = g_{k1} \cos \psi + h_{k1} \sin \psi + \varepsilon \left\{ g_{k0} + \sum_{n=1}^{\infty} [g_{kn} \cos n\psi + h_{kn} \sin n\psi] \right\} \tag{2-30}$$

式中：

$$\begin{aligned}
 g_{k0} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_k(\rho, \psi) d\psi \\
 g_{kn} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_k(\rho, \psi) \cos n\psi d\psi \\
 h_{kn} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_k(\rho, \psi) \sin n\psi d\psi \\
 f_k(\rho, \psi) &= f_k(\rho \cos \psi, -\rho \omega \sin \psi)
 \end{aligned} \tag{2-31}$$

可求得

$$\dot{\rho}(t) = -\delta_e(t) \rho = -\frac{f_e}{2m} \rho = \frac{-1}{2\pi m \omega} \int_0^{2\pi} [f_m(\rho, \psi) + f_k(\rho, \psi)] \sin \psi d\psi \tag{2-32}$$

式中：

$$f_e = \frac{1}{\pi\rho\omega} \int_0^{2\pi} [f_m(\rho, \psi) + f_k(\rho, \psi)] \sin\psi d\psi$$

$$\dot{\psi}(t) = \omega(t) \sqrt{\frac{k+k_e}{m+m_e}} = \sqrt{\frac{k}{m}} (1 - \frac{k_e - m_e}{m}) \quad (2-33)$$

平均法是一种分析弱非线性振动系统的有效工具, 通过将非线性项周期展开并取平均, 提取系统在慢时间尺度上的主要动力学特征。其局限性在于假设非线性较弱、系统行为为周期性且振幅和相位变化缓慢, 对于强非线性、复杂动态行为(如准周期性或混沌)以及短时间尺度的快速变化, 分析可能不够准确。因此, 在实际应用中需结合问题特性, 评估其适用性, 并辅以其他方法进行验证和补充, 以提高分析的可靠性和全面性。

2.2.3 多尺度法

多尺度分析法作为摄动理论体系中最具工程实用性的经典方法, 其理论框架经过长期发展已较为完善^[49]。其基本思想是将微分方程的解转化为多个不同时间尺度或空间尺度的函数, 通过引入不同的“快尺度”和“慢尺度”变量, 将原本在单一尺度下的问题转化为多个尺度下的问题进行求解。

现以拟线性自治系统为研究对象为

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}) \quad (2-34)$$

用 L-P 法求得式(2-34)的形式解为

$$x(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m x_m(\tau)$$

式中: $\tau = \omega t$; $\omega = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \omega_m$ 。

τ 包含不同尺度的时间变量: $t, \varepsilon t, \varepsilon t^2, \dots$, 令

$$T_m = \varepsilon^m t (n=0, 1, 2, \dots) \quad (2-35)$$

将式(2-35)的参数看作独立变量为

$$x(t, \varepsilon) = x(T_0, T_1, T_2, \dots, \varepsilon)$$

将关于 t 的导数转换成关于 T_m 的偏导数的展开式，则有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} &= D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \\ \frac{d^2}{dt^2} &= (D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon D_2 + \dots)^2 = D_0^2 + \varepsilon^2 D_1^2 + 2\varepsilon^2 D_0 D_2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots\end{aligned}\quad (2-36)$$

设方程(2-36)的解为

$$x(t, \varepsilon) = x_0(T_0, T_1, \dots, T_n) + \varepsilon x_1(T_0, T_1, \dots, T_n) + \dots + \varepsilon^n x_n(T_0, T_1, \dots, T_n) \quad (2-37)$$

对 x 分别求对 t 的一阶、二阶导数为

$$\frac{dx}{dt} = D_0 x_0 + \varepsilon(D_0 x_1 + D_1 x_0) + \varepsilon^2(D_0 x_2 + D_1 x_1 + D_2 x_0) + o(\varepsilon^2) \quad (2-38)$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x}{dt^2} &= D_0^2 x_0 + \varepsilon(D_0^2 x_1 + 2D_0 D_1 x_0) \\ &\quad + \varepsilon^2(D_0^2 x_2 + 2D_0 D_1 x_1 + D_1^2 x_0 + 2D_0 D_2 x_0) + o(\varepsilon^3)\end{aligned}\quad (2-39)$$

将 $f(x, \dot{x})$ 按 Taylor 级数展开，可得

$$\begin{aligned}f(x, \dot{x}) &= f(x_0, D_0 x_0) + \varepsilon[f'_x(x_0, D_0 x_0)x_1 \\ &\quad + f'_x(x_0, D_0 x_0)(D_0 x_1 + D_1 x_0)] + o(\varepsilon^2)\end{aligned}\quad (2-40)$$

将式(2-35)~式(2-40)均代入式(2-34)，基于同阶量平衡原则，对各幂次项系数进行匹配，可得方程组为

$$\begin{cases} D_0^2 x_0 + \omega_0^2 x_0 = 0 \\ D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 = -2D_0 D_1 x_0 + f(x_0, D_0 x_0) \\ D_0^2 x_2 + \omega_0^2 x_2 = -2D_0 D_1 x_1 - D_1^2 \Delta x_0 - 2D_0 D_1 x_0 \\ \quad - f'_x(x_0, D_0 x_0)x_1 + f'_x(x_0, D_0 x_0)(D_0 x_1 + D_1 x_0) \\ \dots\dots \end{cases} \quad (2-41)$$

所得式(2-41)属于线性偏微分方程体系，通过引入消除长期项约束条件的附加方程，可逐步求解各阶待定函数 x_m ，均表示为多尺度 $T_0, T_1, \dots, T_n$ 。具体求解方程的解因系统的不同，解的情况也各有不同。

混合动力悬置系统是一个复杂的多时间尺度系统，包含了较大的非线性、不同频率成分的振动以及载荷变化。在这种系统中，常常需要分析低频的整体运动和高频的局部振动。原始摄动法和平均法在处理这种系统时有局限性。原始摄动

法在强非线性和大扰动的情况下无法准确反映系统的真实行为,平均法则会忽略高频动态信息,导致对系统的分析不够全面。而多尺度法则能够同时处理系统中的低频和高频成分,保留了多种时间尺度的动态信息,能够从微观和宏观角度分析系统的动力学行为,提供更精确和全面的解。因此,多尺度法在分析混合动力悬置系统的复杂动力学行为时,更适合处理其复杂的多频率、非线性和多尺度特性。

2.3 本章小结

聚焦混合动力悬置系统建模与非线性动力学求解策略,建立了单自由度及两自由度动力总成悬置动力学模型,并基于振动微分方程数值解开展系统的振动特性分析,同时讨论系统稳态响应的幅值和相位的物理意义及其与系统参数之间的关系。

在非线性求解方法的研究中,对比原始摄动法、平均法和多尺度法三种方法的应用特点。通过不同的展开和近似处理方式,分别适用于复杂非线性系统和弱非线性问题的分析。研究表明,多尺度法在应对复杂非线性与多频率系统动力学行为时具有较高的精确性和适用性。探讨非线性模型的渐近求解特性,并总结混合动力悬置系统在复杂动态行为分析中的表现及所建立的理论模型与数值求解方法,为后续的系统分析提供了理论依据和方法支持。

第3章 考虑非线性刚度的混合动力悬置系统动力学分析

针对混合动力悬置系统的动力学特性研究,传统方法普遍基于线性化假设构建模型,采用线性刚度系数与阻尼参数表征系统特性。但橡胶材料本构关系的非线性特征及隔振元件结构设计的复杂性,实际系统与理想线性模型间存在显著偏差。随着现代车辆对 NVH 性能要求的持续提升,悬置系统在宽频激励下表现出的非线性振动现象已成为制约整车隔振性能的关键因素。虽然在两自由度非线性系统理论分析方面积累了一定成果,但针对车用悬置这类多参数耦合系统的非线性动力学研究尚存理论较少,这使得开展悬置系统非线性稳定性机理研究具有重要的理论价值。

根据 Stone-Weierstrass 原理,连续非线性函数可通过多项式函数进行高精度逼近。对于具有对称特性的悬置系统非线性恢复力,采用多项式展开式(含线性项与三次项)可有效表征其刚度特性,工程非线性振动分析中已广泛应用该方法^[50]。构建包含非线性项的悬置系统动力学模型,重点探究非线性项对系统振动稳定性的影响,为优化悬置系统动态特性提供理论支撑。

3.1 含非线性刚度动力学建模

3.1.1 悬置的非线性刚度测试



图 3-1 MTS831.50 及悬置

实验力学分析方法被用于验证悬置系统非线性刚度特性的存在。通过 MTS

831.50 试验系统能够完成整车悬置、橡胶、塑料等材料的耐久和疲劳测试等弹性体的动静刚度测试。因此，该系统能够模拟真实工况，提供准确的数据支持，测试示意图如图 3-1 所示。

在实验测试阶段，采用梯度加载模式施加载荷，同步采集载荷-位移时程数据。运用非线性最小二乘算法对实测数据集进行参数辨识，最终确立包含三次多项式项的本构方程作为最优拟合模型。其模型为： $F = k_1x + k_3x^3$ 。

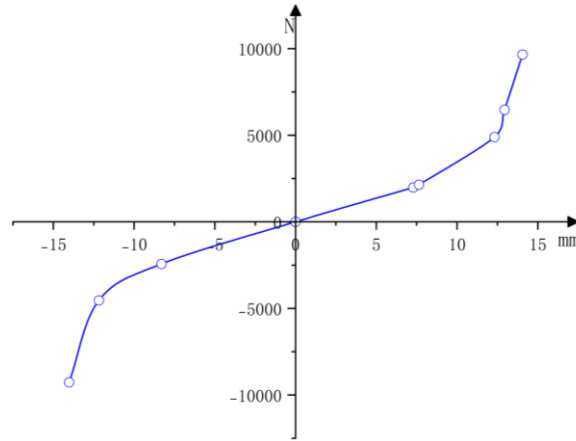


图 3-2 悬置刚度拟合曲线

数值拟合结果如图 3-2 所示，针对悬置的拟合曲线，可获得线性刚度系数以及非线性刚度系数分别为：246 N/mm，121 N/mm³。由结果可知，实际的悬置元件存在非线性项。结果表明：悬置的非线性刚度与线性刚度比值为 49.1 %。

通过以上的实验以及实验结果证明了悬置元件存在非线性刚度的特性，将非线性刚度特性引入到传统的线性悬置系统模型，探究非线性项参数对悬置系统动力学行为与稳定性的影响。

3.1.2 基于拉格朗日法的悬置系统动力学建模

为了研究混合动力悬置系统的动力学特性，通常忽略悬置和小部件的质量，重点考虑发动机、车身的质量及悬置的刚度和阻尼特性，如图 3-3 所示混合动力悬置系统非线性动力学模型，其中 M_1' 表示动力总成悬置系统质量， M_2 为车架质量， x_1' 和 x_2 分别为动力总成和车架的位移， k_1 和 k_3 分别对应悬置系统的线性刚度与非线性刚度， c 为阻尼系数。 $F_1'(t)$ 为动力总成的激励力， $F_2(t)$ 为车架所受到的力。

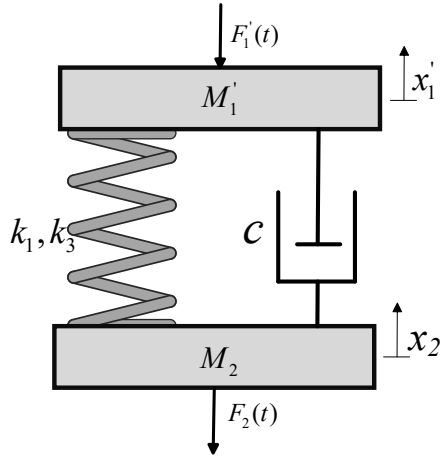


图 3-3 非线性刚度悬置系统动力学模型

从悬置系统建模的演进路径分析，非线性刚度悬置系统动力学模型的数学描述可视为经典两自由度线性模型的参数化重构。二者的本质差异体现在动力学本构方程构建层面：传统线性模型采用 Kelvin-Voigt 本构关系，即 Hooke 弹性体（刚度项）与 Newton 流变体（阻尼项）的线性并联，而拓展后的非线性模型则引入高阶非线性项，以精确表征实际工况中的刚度频变特性。弹性元件的对称非线性特性用三次项进行表征，反映悬置系统的弱非线性特性。因此，在分析悬置系统的动态特性时，仅考虑对称非线性因素，即包含三次方刚度的非线性项。

3.1.3 当量化模型

基于含耗散项的拉格朗日方程^[51]进行量化推导，假设悬置系统为连续系统（忽略安装形态等因素），并将与动力总成位移变化量不一致的部件转换为当量参数。其中， x_1 表示动力总成位移， x_2 为车架量化位移， M_1 和 M_2 分别对应动力总成悬置系统质量与车架质量， $F_1(t)$ 、 $F_2(t)$ 为动力总成的激励和当量化后车架所受到的力。

动力总成悬置系统的动能为

$$E = \frac{1}{2} M_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} M_2 \dot{x}_2^2 \quad (3-1)$$

动力总成悬置系统的势能为

$$U = \frac{1}{2} k_1 (x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{4} k_3 (x_1 - x_2)^4 \quad (3-2)$$

广义力为

$$Q_{(i)} = F_i^{(j)} \frac{\partial \phi_i}{\partial q_r} \quad (3-3)$$

$$F_i^j = F_i + F_i^{(c)} \quad (3-4)$$

式中： F_i 为广义外力； $F_i^{(c)}$ 为广义阻尼力； q_r 为广义坐标，下角标 r 为 1 或 2。

$$F_1^{(c)} = c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \quad (3-5)$$

$$F_2^{(c)} = c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \quad (3-6)$$

拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial L}{\partial q_r} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_r} = Q_r \quad (3-7)$$

混合动力总成悬置系统的振动方程为

$$M_1 \ddot{x}_1 + k_1(x_1 - x_2) + k_3(x_1 - x_2)^3 + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = F_1(t) \quad (3-8)$$

$$M_2 \ddot{x}_2 - k_1(x_1 - x_2) - k_3(x_1 - x_2)^3 - c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = -F_2(t) \quad (3-9)$$

3.2 考虑非线性刚度的悬置系统冲击行为分析

3.2.1 冲击响应方程建立

针对稳态工况（悬置无外部冲击的影响），将式(3-8)代入式(3-9)可得

$$M_1 \ddot{x}_1 - M_2 \ddot{x}_2 = -2k_1(x_1 - x_2) - 2k_3(x_1 - x_2)^3 - 2c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + F_1(t) + F_2(t) \quad (3-10)$$

由式(3-10)可知，悬置系统在稳态工况下需满足以下初始条件。

$$\begin{cases} \dot{x}_1 - \dot{x}_2 = 0 \\ M_1 \ddot{x}_1 = M_2 \ddot{x}_2 = 0 \end{cases} \quad (3-11)$$

将式(3-11)代入式(3-10)，可得悬置系统在稳态情况下满足以下方程为

$$2k_1(x_1 - x_2) + 2k_3(x_1 - x_2)^3 = F_1(t) + F_2(t) \quad (3-12)$$

由式(3-12)可知，在稳态工况下，悬置系统的主动端与被动端之间存在稳定的位移差，该位移差由悬置（橡胶）材料的弹性特性引起，并受线性和非线性刚

度的共同影响。为计算该位移差，令 $x = x_1 - x_2$ ， $2F = F_1(t) + F_2(t)$ ，将其代入式(3-12)，可得

$$x = ((108F + 12((12k_1^3 + 108k_3F^2)/k_3)^{1/2}))^{1/3} / (6k_3) - 2k_1 / ((108F + 12((12k_1^3 + 108k_3F^2)/k_3)^{1/2}))^{1/3} \quad (3-13)$$

假设悬置系统受到与运动方向相反的冲击力 F' ，并导致悬置的主动端和被端产生位移变化分别为 Δx_1 和 Δx_2 。将 Δx_1 和 Δx_2 代入式(3-8)及式(3-9)，可得

$$M_1(\ddot{x}_1 + \Delta \ddot{x}_1) = -k_1((x_1 + \Delta x_1) - (x_2 + \Delta x_2)) - k_3((x_1 + \Delta x_1) - (x_2 + \Delta x_2))^3 - c((\dot{x}_1 + \Delta \dot{x}_1) - (\dot{x}_2 + \Delta \dot{x}_2)) + F_1(t) \quad (3-14)$$

$$M_2(\ddot{x}_2 + \Delta \ddot{x}_2) = k_1((x_1 + \Delta x_1) - (x_2 + \Delta x_2)) + k_3((x_1 + \Delta x_1) - (x_2 + \Delta x_2))^3 + c((\dot{x}_1 + \Delta \dot{x}_1) - (\dot{x}_2 + \Delta \dot{x}_2)) - F_2(t) - F' \quad (3-15)$$

为简化分析，假设悬置的主动端位移变化为零，即 $\Delta x_1 = 0$ 。式(3-14)、式(3-15)可写为式(3-16)、式(3-17)，即

$$-c\Delta \dot{x}_2 - k_1\Delta x_2 - 3k_3(x_1 - x_2)^2\Delta x_2 + 3k_3(x_1 - x_2)\Delta x_2^2 - k_3\Delta x_2^3 = 0 \quad (3-16)$$

$$M_2\Delta \ddot{x}_2 + c\Delta \dot{x}_2 + k_1\Delta x_2 + 3k_3(x_1 - x_2)^2\Delta x_2 - 3k_3(x_1 - x_2)\Delta x_2^2 + k_3\Delta x_2^3 = -F' \quad (3-17)$$

将稳态位移差 $x = x_1 - x_2$ 代入式(3-16)和式(3-17)，得

$$-c\Delta \dot{x}_2 - k_1\Delta x_2 - 3k_3x^2\Delta x_2 + 3k_3x\Delta x_2^2 - k_3\Delta x_2^3 = 0 \quad (3-18)$$

$$M_2\Delta \ddot{x}_2 + c\Delta \dot{x}_2 + k_1\Delta x_2 + 3k_3x^2\Delta x_2 - 3k_3x\Delta x_2^2 + k_3\Delta x_2^3 = -F' \quad (3-19)$$

式(3-18)代入式(3-19)后得到含二次与三次非线性项的冲击响应方程为式(3-20)。

$$M_2\Delta \ddot{x}_2 + 2c\Delta \dot{x}_2 + 2k_1\Delta x_2 + 6k_3x^2\Delta x_2 - 6k_3x\Delta x_2^2 + 2k_3\Delta x_2^3 = -F' \quad (3-20)$$

鉴于实际冲击力作用时间短且重点关注冲击后的响应，假设 $F' = 0$ 并代入式(3-20)，得到悬置系统冲击响应方程为

$$\Delta \ddot{x}_2 + \omega_0^2\Delta x_2 + \alpha_0\Delta \dot{x}_2 + \gamma\Delta x_2^3 - \mu\Delta x_2^2 = 0 \quad (3-21)$$

式中： $\alpha_0 = \frac{2c}{M_2}$ ； $\gamma = \frac{2k_3}{M_2}$ ； $\mu = \frac{6k_3x}{M_2}$ ； $\omega_0^2 = \frac{2k_1 + 6k_3x^2}{M_2}$ 。

3.2.2 基于多尺度法的冲击响应方程求解

冲击响应方程的近似解通过多尺度法求解^[49]，用于分析系统参数与冲击响应的关联性。所得解析结果可与数值仿真结果对比以验证可靠性，同时仿真数据亦可反向检验多尺度分析的精度，确保二者的一致性。基于多尺度法的冲击动力学响应解析框架可通过系统化流程构建，具体求解过程如下。

通过引入小参数 ε 作为摄动因子，与式(3-21)内的非线性动力学项相乘，完成多尺度摄动分析所需的非线性项标度化处理，可得

$$\Delta \ddot{x}_2 + \omega_0^2 \Delta x_2 = \varepsilon(-\alpha_0 \Delta \dot{x}_2 - \gamma \Delta x_2^3 + \mu \Delta x_2^2) \quad (3-22)$$

令 $T_m = \varepsilon^m t (m=0, 1, 2, \dots)$ ，可得其偏导数的展开形式可以表示为

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \\ \frac{d^2}{dt^2} &= D_0^2 + \varepsilon^2 D_1^2 + 2\varepsilon^2 D_0 D_2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots \end{aligned} \quad (3-23)$$

式中： m 代表微分算子； T_m 为不同时间尺度； ε 为多尺度法参数量。

假设式(3-22)的解为

$$\Delta x_2(t, \varepsilon) = \Delta x_{20}(T_0, T_1, \dots) + \varepsilon \Delta x_{21}(T_0, T_1, \dots) + \varepsilon^2 \Delta x_{22}(T_0, T_1, \dots) + \dots \quad (3-24)$$

将式(3-23)、式(3-24)代入式(3-22)，可得

$$\begin{cases} D_0^2 \Delta x_{20} + \omega_0^2 \Delta x_{20} = 0 \\ D_0^2 \Delta x_{21} + \omega_0^2 \Delta x_{21} = -2D_0 D_1 \Delta x_{20} - \alpha_0 D_0 \Delta x_{20} - \gamma^3 \Delta x_{20}^3 + \mu \Delta x_{20}^2 \\ D_0^2 \Delta x_{22} + \omega_0^2 \Delta x_{22} = -2D_0 D_1 \Delta x_{21} - D_1^2 \Delta x_{20} - 2D_0 D_1 \Delta x_{20} + \\ \quad (2\mu \Delta x_{20} - 3\gamma^2 \Delta x_{20}) \Delta x_{21} - \alpha_0 (D_0 \Delta x_{21} + D_1 \Delta x_{20}) \end{cases} \quad (3-25)$$

假设方程组(3-25)中第一个公式的解为

$$\Delta x_{20} = r \cos(\omega_0 T_0 + \psi) \quad (3-26)$$

式中： r, ψ 是 T_i 的函数。

将式(3-26)代入式(3-25)中的第二公式，可得

$$\begin{aligned} D_0^2 \Delta x_{21} + \omega_0^2 \Delta x_{21} = & 2D_1 r \omega_0 \sin(\omega_0 T_0 + \psi) + 2D_1 r \omega_0 \psi \cos(\omega_0 T_0 + \psi) \\ & + \alpha_0 r \omega_0 \sin(\omega_0 T_0 + \psi) - \gamma r^3 \cos^3(\omega_0 T_0 + \psi) \\ & + \mu r^2 \cos^2(\omega_0 T_0 + \psi) \end{aligned} \quad (3-27)$$

消除式(3-27)中的长期项，可以得到如下方程组为

$$\begin{cases} 2D_1 r \omega_0 + \alpha_0 r \omega_0 = 0 \\ 2D_1 r \omega_0 \psi - 3/4 \gamma r^3 = 0 \end{cases} \quad (3-28)$$

式(3-27)的解可写为如下形式

$$\Delta x_{21} = \frac{1}{32\omega_0} \gamma r^3 \cos 3(\omega_0 T_0 + \psi) - \frac{1}{6} \mu r^2 (\cos 2(\omega_0 T_0 + \psi) - \frac{3}{\omega_0}) \quad (3-29)$$

将 $\Delta x_{20}, \Delta x_{21}$ 代入式(3-22)，可得式(3-21)的近似解为

$$\begin{aligned} \Delta x_2 = & r \cos(\omega_0 T_0 + \psi) + \frac{\varepsilon}{32\omega_0} \gamma r^3 \cos 3(\omega_0 T_0 + \psi) \\ & - \frac{\varepsilon}{6} \mu r^2 (\cos 2(\omega_0 T_0 + \psi) - \frac{3}{\omega_0}) \end{aligned} \quad (3-30)$$

3.2.3 悬置系统冲击响应稳定性分析

通过变量替换 $\dot{y}_1 = \Delta \dot{x}_2$ 、 $\dot{y}_2 = \Delta \dot{x}_2$ ，将冲击响应方程转换为式(3-31)所示的状态方程形式，用于分析悬置系统冲击响应的稳定性。

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -\omega_0^2 y_1 - \alpha_0 y_2 - \gamma y_1^3 + \mu y_1^2 \end{cases} \quad (3-31)$$

通过雅可比矩阵的线性化分析可知，系统动力学方程的平衡状态位于坐标原点(0, 0)。其对应的雅可比矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\alpha_0 \end{pmatrix} \quad (3-32)$$

对应式(3-32)的雅可比矩阵的特征方程为

$$\lambda^2 + \alpha_0 \lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (3-33)$$

基于 Routh-Hurwitz 稳定性判据，坐标原点(0, 0)作为系统动力学方程的平衡状态的点，其条件可表示为

$$\alpha_0 \omega_0^2 > 0 \quad (3-34)$$

3.2.4 悬置系统动力学响应数值分析

针对悬置系统关键参数变化对冲击响应性能的影响展开研究，其动力学行为的参数对系统设计与优化具有重要意义。尽管分析是基于混合动力悬置系统结构，但模型通用性使得结论可推广至结构相似的传统燃油车及纯电动汽车的悬置系统。仿真中假设冲击产生 0.9 个单位的初始位移，重点关注冲击后响应时间过程。

表 3-1 悬置系统基本参数

名称	值
悬置系统质量 M_1 (kg)	235.2
车架质量 M_2 (kg)	1438
悬置系统的线性刚度 k_1 (kN/m)	173
悬置系统的阻尼 c (N·s/m)	500
动力总成的激励力 $F_1(t)$ (N)	6036
车架所受到的力 $F_2(t)$ (N)	3401

根据表 3-1 的参数，研究悬置系统受到冲击后的时间响应历程。

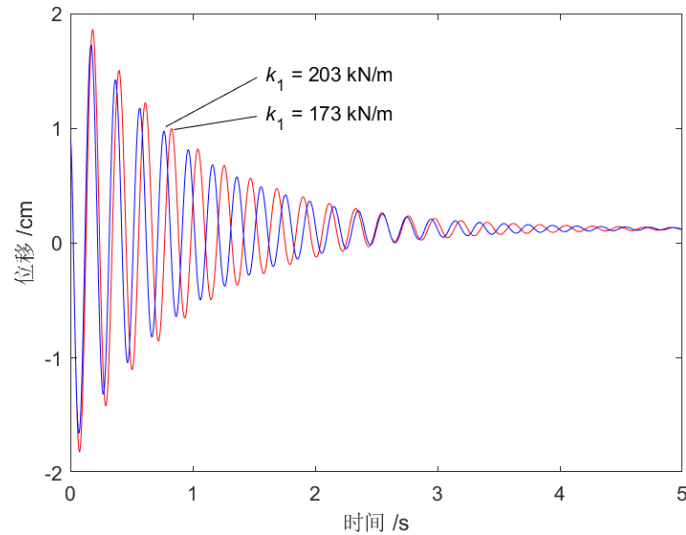


图 3-4 悬置系统刚度 $k_1=173$ 、203 kN/m 的冲击响应曲线

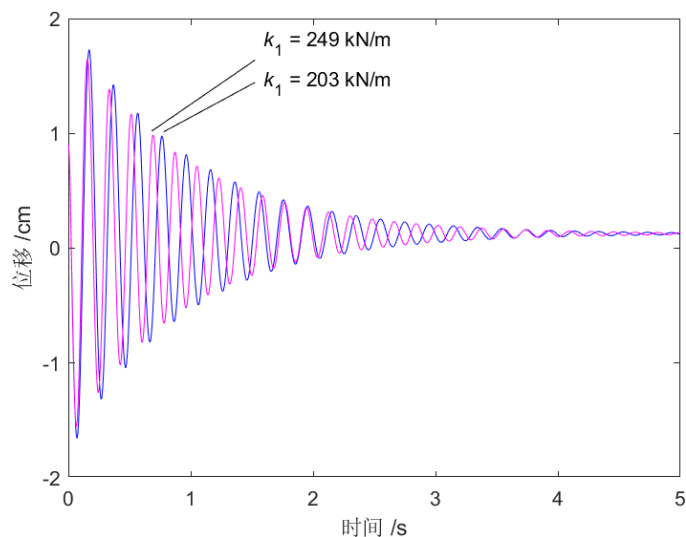


图 3-5 悬置系统刚度 $k_1=203$ 、 249 kN/m 的冲击响应曲线

图 3-4 以及图 3-5 给出不同线性刚度下悬置系统受到冲击的响应时间历程图。根据图中的曲线趋势可以观察出，在相同初始条件下，合理增加悬置元件的线性刚度有助于动力总成悬置系统对冲击的衰减。

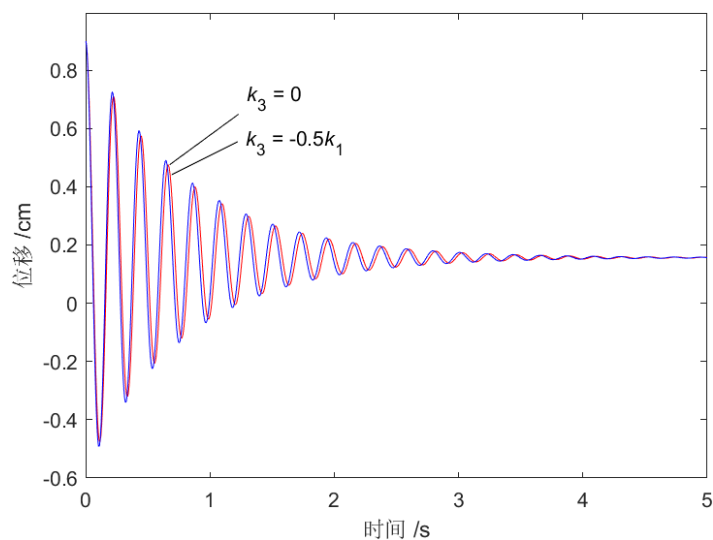


图 3-6 非线性刚度 $k_3=0$ 、 $-0.5k_1$ 时悬置系统的冲击响应曲线

图 3-6 为相同线性刚度与阻尼条件下， $k_3=0$ （无非线性刚度）与 $k_3=-0.5k_1$ （负非线性刚度）的冲击响应对比，结果表明引入负非线性刚度的悬置系统可加速冲击后衰减。

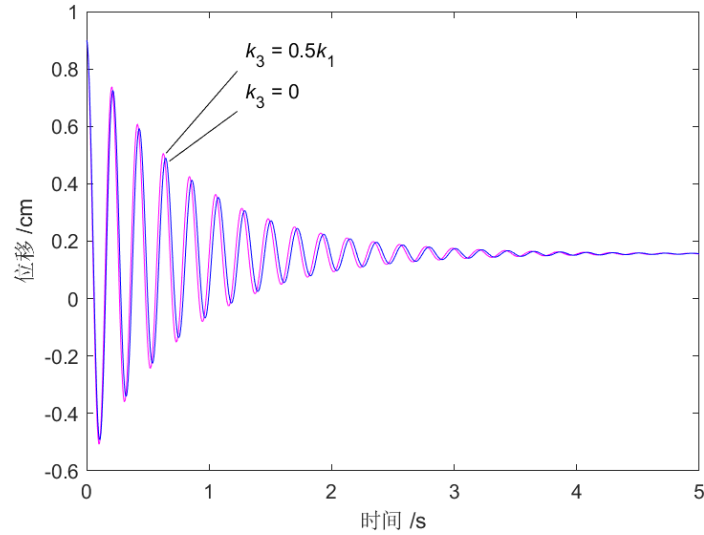


图 3-7 非线性刚度 $k_3=0$ 、 $0.5k_1$ 时悬置系统的冲击响应曲线

图 3-7 对比了 $k_3=0$ 和 $k_3=0.5k_1$ （正非线性刚度）的冲击响应，结果显示引入正非线性刚度不利于悬置系统对冲击后的衰减。综上，相同线性刚度与阻尼条件下，负三次非线性刚度的引入可提升动力总成悬置系统的冲击衰减效率。因此，在悬置设计时可通过参数优化构建负三次非线性刚度，以增强系统抗冲击性能。

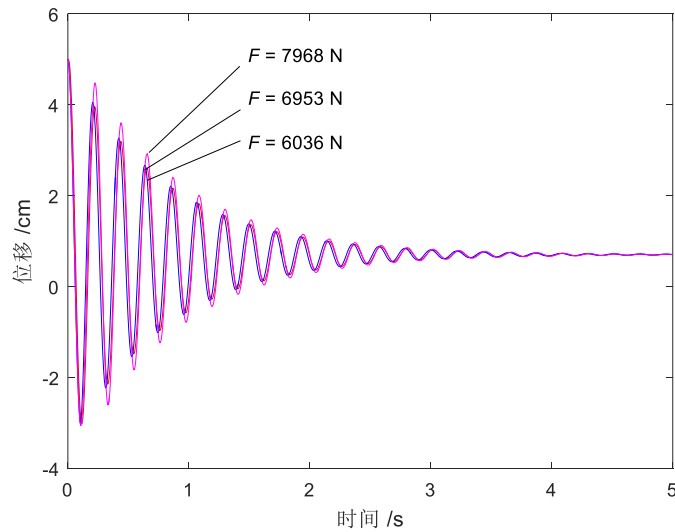


图 3-8 不同激励力下的冲击响应曲线

由图 3-8 可知，悬置系统在恒定冲击位移输入时表现出显著的非线性动态特性。通过时域响应分析可知：当激励力增加时，系统瞬态响应的幅值会同步呈现单调上升趋势。结果表明，悬置系统具有相同初始条件，即受到相同冲击位移，其最大冲击响应幅值与动力输出产生的激励力成正相关关系，激励力增大时幅值增大，反之减小。

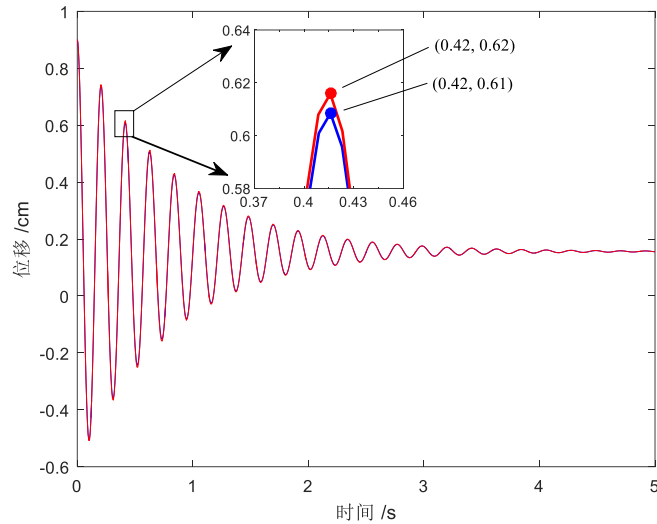


图 3-9 多尺度解析与数值仿真冲击响应对比分析

为验证悬置系统的解析解于数值解的是否存在较大的差异，采用正的非线性刚度下的悬置系统，进行结果对比。由图 3-9 可知，在时间点为 0.42 时，对应数值解的数值为 0.61，而应用多尺度法求解的解析解为 0.62，两者结果接近吻合，验证了数值仿真的精度。

3.3 考虑非线性刚度的悬置系统共振行为分析

通过 3.2 节分析可知，在相同初始冲击位移条件下，混合动力悬置系统模型同时具有线性刚度和负非线性刚度时，更有助于系统在冲击后实现更快的衰减。但仍需面对的一个关键问题是，悬置系统的两种主要动力学行为——冲击和共振，都会对系统构成潜在威胁。尽管之前的研究表明，在悬置系统引入负的三次项非线性刚度有利于系统对冲击的衰减，但需考虑非线性刚度的引入对悬置系统的共振响应是否存在影响。为确保悬置系统整体稳定性与安全性，三次非线性项的引入虽可减弱冲击响应，但可能加剧系统共振响应。采用负非线性刚度可能并非理想选择。分析非线性刚度等因素对悬置系统共振响应的影响。

3.3.1 基于多尺度法的共振响应分析

悬置系统共振响应分析中，将式(3-8)乘以 $1/M_1$ 、式(3-9)乘以 $1/M_2$ ，并将式(3-8)代入式(3-9)，推导出无量纲方程如下

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x + ax^3 + b\dot{x} = F'' \quad (3-35)$$

式中: $x = x_1 - x_2$; $a = \frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2} k_3$; $\omega_1^2 = \frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2} k_1$; $b = \frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2} c$;

$$F'' = \frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2} (F_1(t) + F_2(t))。$$

时变激励下, 式(3-35)中的 F'' 是随时间变化。假设 F'' 仅含波动部分, 令 $F'' = f_1 \cos(\omega t)$, 则式(3-35)的无量纲方程可改写为以下形式

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x + ax^3 + b\dot{x} = f_1 \cos(\omega t) \quad (3-36)$$

应用多尺度方法求解共振响应, 令 $a = \varepsilon \alpha$, $b = \varepsilon \beta$, $f_1 = \varepsilon f$, $\omega = \omega_1 + \varepsilon \sigma$, 则式(3-36)可写为

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = -\varepsilon(\alpha x^3 + \beta \dot{x} - f \cos(\omega t)) \quad (3-37)$$

同时, 外激励可以写为

$$\varepsilon f \cos(\omega t) = \varepsilon f \cos(\omega_1 T_0 + \sigma T_1) \quad (3-38)$$

假设式(3-37)的解为

$$x(t, \varepsilon) = x(T_0, T_1, \dots, T_n, \varepsilon) \quad (3-39)$$

式(3-39)等价形式为

$$x(t, \varepsilon) = x_0(T_0, T_1) + \varepsilon x_1(T_0, T_1) + \dots \quad (3-40)$$

将式(3-38)、式(3-39)代入式(3-37)可得

$$D_0^2 x_0 + \omega_1^2 x_0 = 0 \quad (3-41)$$

$$D_0^2 x_1 + \omega_1^2 x_1 = -2D_0 D_1 x_0 - \alpha x_0^3 - \beta D_0 x_0 + f \cos(\omega_1 T_0 + \sigma T_1) \quad (3-42)$$

假设式(3-41)的解为

$$x_0 = A(T_1) \exp(i\omega_1 T_0) + \bar{A}(T_1) \exp(-i\omega_1 T_0) \quad (3-43)$$

将 $f \cos(\omega_1 T_0 + \sigma T_1)$ 写为指数形式 $\frac{1}{2} f \exp[i(\omega_1 T_0 + \sigma T_1)] + CC$, 并将式(3-43)代入式(3-42), 可得

$$D_0^2 x_1 + \omega_1^2 x_1 = (-2i\omega_1 \dot{A} - 3\alpha A^2 \bar{A} - i\beta\omega_1 A) \exp(i\omega_1 T_0) - \alpha A^3 \exp(3i\omega_1 T_0) + \frac{1}{2} f \exp[i(\omega_1 T_0 + \sigma T_1)] + CC \quad (3-44)$$

消除 x_1 中的长期项可得

$$-i\omega_1 (2\dot{A} - \beta A) - 3\alpha A^2 \bar{A} + \frac{1}{2} f \exp(i\sigma T_1) = 0 \quad (3-45)$$

令 $A = \frac{1}{2} \rho \exp[i\delta]$ 并将其代入式(3-45)，可得

$$-i\omega_1 \dot{\rho} + \omega_1 \rho \dot{\delta} - \frac{1}{2} i\omega_1 \beta \rho - \frac{3}{8} \alpha \rho^3 + \frac{1}{2} f \exp[i(\sigma T_1 - \delta)] = 0 \quad (3-46)$$

将式(3-46)中的实部、虚部进行分离，可得如下极坐标平均方程为

$$\dot{\rho} = -\frac{1}{2} \beta \rho + \frac{1}{2} \frac{f}{\omega_1} \sin(\sigma T_1 - \delta) \quad (3-47)$$

$$\rho \dot{\delta} = \frac{3}{8} \frac{\alpha \rho^3}{\omega_1} - \frac{1}{2} \frac{f}{\omega_1} \cos(\sigma T_1 - \delta) \quad (3-48)$$

式(3-36)的一阶近似解可以表示为

$$x = \rho \cos(\omega_1 t + \delta) + O(\delta) \quad (3-49)$$

则共振响应的平均方程用极坐标形式表示为

$$\dot{\rho} = -\frac{1}{2} \beta \rho + \frac{1}{2} \frac{f}{\omega_1} \sin \eta \quad (3-50)$$

$$\rho \dot{\eta} = \rho \sigma - \frac{3}{8} \frac{\alpha \rho^3}{\omega_1} + \frac{1}{2} \frac{f}{\omega_1} \cos \eta \quad (3-51)$$

当 $\dot{\rho} = \dot{\eta} = 0$ 时，可以得到频响方程为

$$\frac{1}{4} \beta^2 \rho^2 + \left(\rho \sigma - \frac{3}{8} \frac{\alpha \rho^3}{\omega_1} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{f^2}{\omega_1^2} \quad (3-52)$$

为分析共振响应曲线的稳定性及其分岔行为，令 $\rho = \rho_0 + \rho_1$, $\eta = \eta_0 + \eta_1$ ，其中：

ρ_0, η_0 为平衡点， ρ_1, η_1 为小扰动。代入式(3-50)、式(3-51)，并忽略非线性项，可

得以下线性方程组为

$$\dot{\rho}_1 = -\frac{1}{2}\beta\rho_1 - \rho_0\sigma\eta_1 + \frac{3}{8}\frac{\alpha\rho_0^3}{\omega_1}\eta_1 \quad (3-53)$$

$$\dot{\eta}_1 = \frac{\sigma}{\rho_0}\rho_1 - \frac{9}{8}\frac{\alpha\rho_0}{\omega_1}\rho_1 - \frac{1}{2}\beta\eta_1 \quad (3-54)$$

平衡点对应的特征方程可表示为

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \quad (3-55)$$

式中：

$$a_1 = \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\beta\rho_0 \quad (3-56)$$

$$a_2 = \frac{1}{4}\beta^2\rho_0 - \frac{3}{8}\frac{\alpha\sigma\rho_0^2}{\omega_1} - \frac{9}{8}\frac{\sigma\alpha\eta\rho_0^2}{\omega_1} + \frac{27}{64}\frac{\alpha^2\rho_0^4}{\omega_1^2} + \eta_0\sigma^2 \quad (3-57)$$

3.3.2 共振稳定性及其分岔行为分析

根据式(3-50)和式(3-51)，可用于分析共振曲线的稳定性及分岔条件。通过分析，可深入了解混合动力悬置系统在不同参数下的动力学行为，尤其是如何确保系统在共振时的稳定性以及识别可能发生分岔的临界条件。

由 Routh-Hurwitz 准则可知，平衡点稳定的条件为

$$\frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\beta\rho_0 > 0 \quad (3-58)$$

$$\frac{1}{4}\beta^2\rho_0 - \frac{3}{8}\frac{\alpha\sigma\rho_0^2}{\omega_1} - \frac{9}{8}\frac{\sigma\alpha\eta\rho_0^2}{\omega_1} + \frac{27}{64}\frac{\alpha^2\rho_0^4}{\omega_1^2} + \eta_0\sigma^2 > 0 \quad (3-59)$$

分岔可能导致共振曲线失稳，fold 分岔作为典型类型，共振曲线发生失稳的可能性随 fold 分岔发生而显著增加。其必要条件可表示为

$$\frac{1}{4}\beta^2\rho_0 - \frac{3}{8}\frac{\alpha\sigma\rho_0^2}{\omega_1} - \frac{9}{8}\frac{\sigma\alpha\eta\rho_0^2}{\omega_1} + \frac{27}{64}\frac{\alpha^2\rho_0^4}{\omega_1^2} + \eta_0\sigma^2 = 0 \quad (3-60)$$

3.3.3 参数对共振响应的稳定性分析

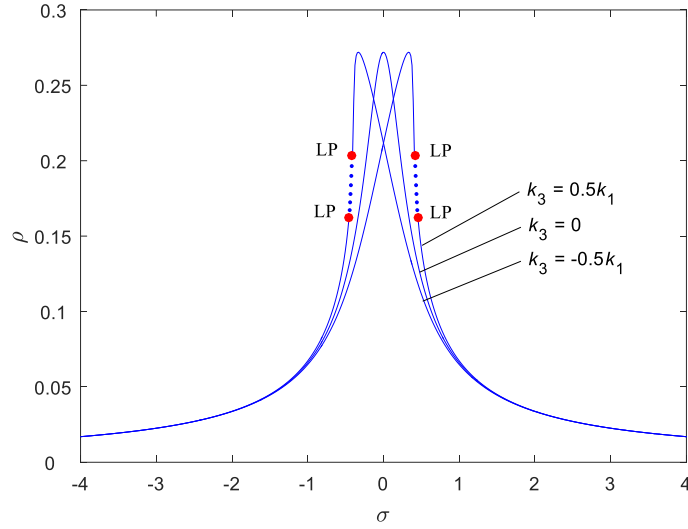


图 3-10 不同非线性刚度下的共振响应

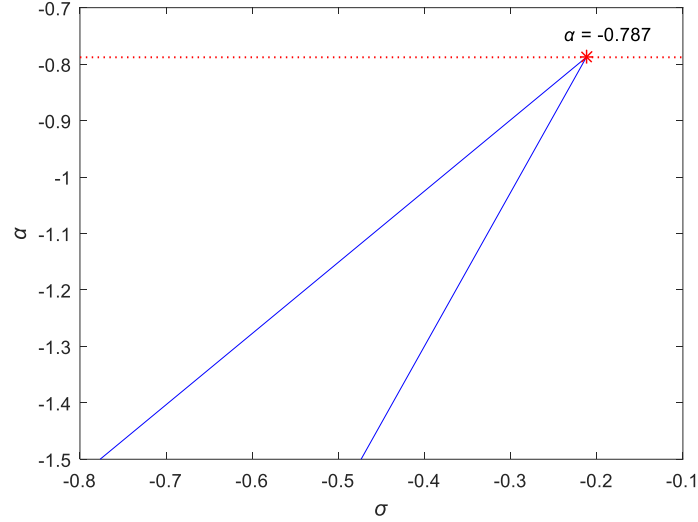


图 3-11 σ - α 平面上的 fold 分岔边界

图 3-10 为不同非线性刚度下的共振响应曲线，其中“LP”为 fold 分岔点，实线、虚线表分别表示稳定区域、不稳定区域。正负非线性刚度均会引起共振峰偏移。而 fold 分岔发生时，共振曲线失稳。因此，为避免 fold 分岔引发悬置系统共振曲线发生失稳、“跳跃”等现象，需对非线性刚度参数给定取值范围。结合 3.2 节的研究，负非线性刚度特性可有效提升系统在冲击载荷作用下的位移衰减性能。图 3-11 为 σ - α 参数间发生 fold 的分岔的边界条件。由图 3-11 可知，当 $\alpha < -0.787$ 时，悬置系统经历 fold 分岔过程并伴随共振失稳现象；而在 $\alpha > -0.787$ 时，悬置系统不经历分岔过程，共振曲线将不会发生失稳、“跳跃”等现象。由以上分析可知，通过合理限制非线性刚度参数的实际应用范围，能够有效避免在特定激励下引起悬置系统发生共振，导致共振曲线失稳的情况。

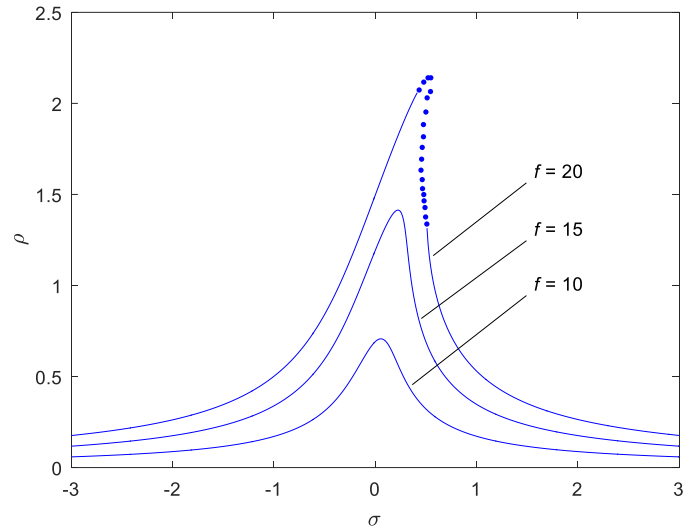
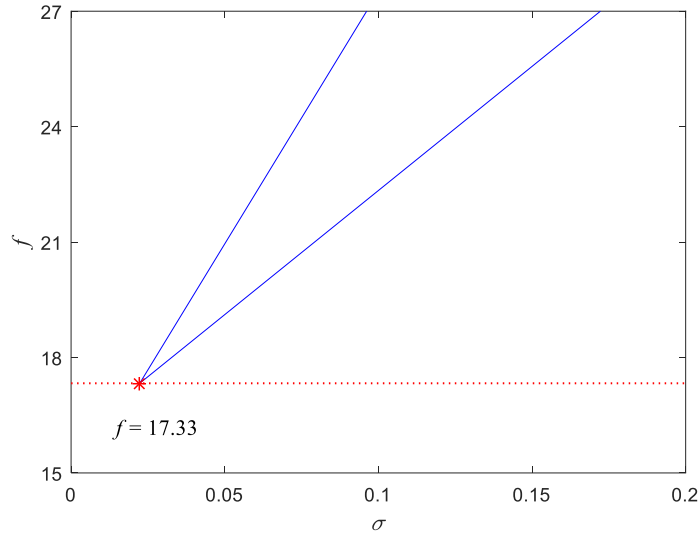


图 3-12 不同激励振幅下的共振响应


 图 3-13 σ - f 平面上的 fold 分岔边界

基于给定的非线性刚度是线性刚度的-0.5 倍，即 $k_3 = -0.5k_1$ ，图 3-12 为不同激励振幅对悬置系统的共振影响曲线图，图 3-12 中稳定区域用实线表示，不稳定区域用虚线表示。当激励振幅的幅值为 $f=10$ 或者 15 时，不存在不稳定区域，表明系统不会发生失稳；当激励振幅的幅值为 $f=20$ 时，fold 分岔发生，存在不稳定区域，导致系统将发生失稳。这说明，外部激励不仅引发悬置系统发生共振，进而影响悬置系统共振曲线的稳定性。图 3-13 为建立 σ - f 参数间的发生 fold 分岔曲线。当激励幅值超过分岔临界值 17.33 时，系统将发生 fold 分岔，导致共振曲线失稳，而当 $f < 17.33$ 时，系统仍能保持稳定。因此，在负三次非线性刚度约束下，将激励幅值限制在分岔临界值内，能确保共振曲线稳定性。

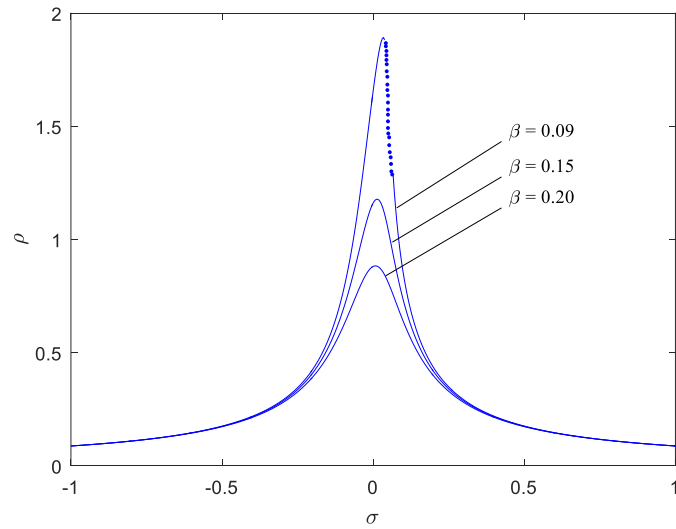


图 3-14 不同线性阻尼系数下的共振响应

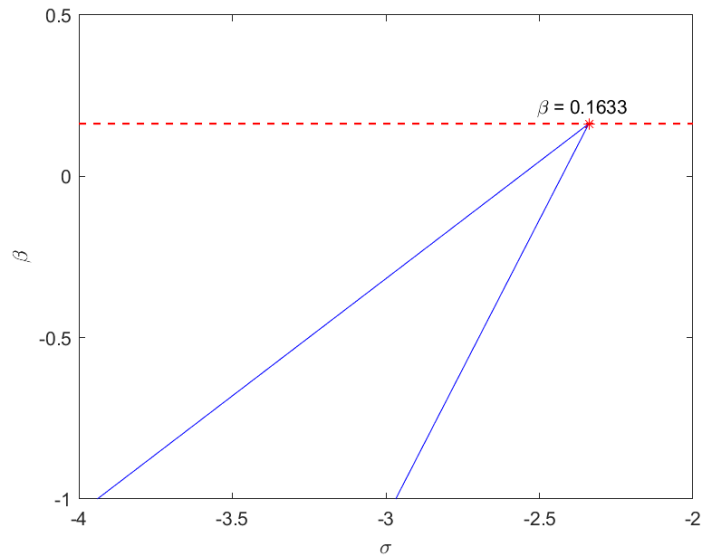


图 3-15 σ - β 平面上的 fold 分岔边界

由图 3-14 可见，线性阻尼系数的增加不仅能够降低共振峰值，还能有效提升共振曲线的稳定性。在悬置系统中，阻尼系数的变化对共振响应特性具有显著影响。较低的阻尼系数可能导致系统在共振频率附近产生较大的振幅，甚至进入不稳定状态，而随着阻尼系数的增大，共振峰值逐渐降低，同时不稳定区域的范围缩小，使系统的振动响应趋于平稳。图 3-15 为 σ - β 平面上阻尼系数 β 的稳定性边界。分析结果表明，当 β 超过 0.1633 时，共振响应曲线能够维持稳定。因此，提高并限制线性阻尼系数在抑制共振、改善系统稳定性方面具有重要作用，有助于优化系统的动态性能。

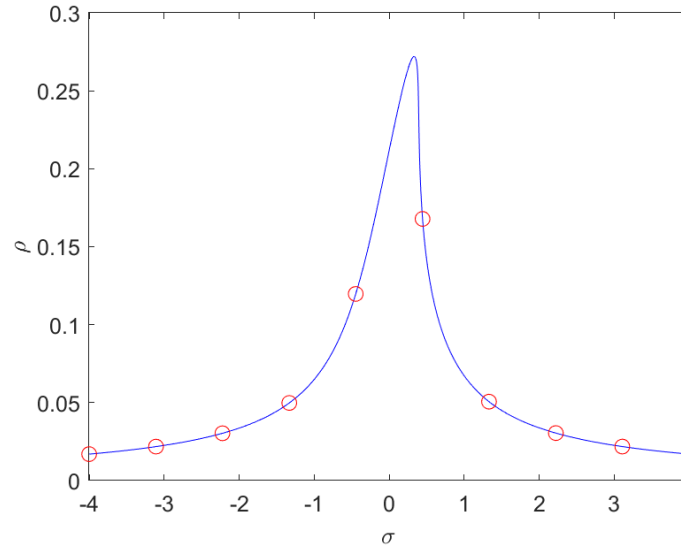


图 3-16 数值仿真结果与多尺度结果对比

图 3-16 为对比式(3-50)解析解与数值仿真解的结果，其中红色圆圈表示不同调谐参数下的数值仿真解。结果显示二者高度吻合，验证了共振响应分析的正确性。由此可知，含有负非线性刚度的系统比仅具有线性刚度的悬置系统更有利于冲击响应的衰减。非线性刚度为负时，可能导致共振曲线偏移，从而影响系统的动态特性。但合理调整刚度和阻尼参数可有效改善系统稳定性，减少不利影响。采用同时含有线性和三次非线性刚度的悬置元件，有助于提升系统的隔振能力。此外，为确保共振曲线稳定，三次非线性刚度系数需控制在合理范围内。

3.4 本章小结

建立了非线性刚度混合动力悬置系统模型，应用多尺度法求解含非线性刚度的混合动力悬置系统的冲击响应与共振问题进行求解，并分析其对应得稳定性问题。分析结果表明：引入负的非线性刚度更有利于悬置系统在受到冲击后的响应衰减；正非线性刚度不利于悬置系统对冲击后的衰减。但悬置系统存在非线性项可能会导致共振曲线的失稳，当激励频率更加接近系统的共振频率的过程会产生更加复杂的响应，进而缩短悬置系统的使用寿命。因此，在设计悬置系统时，可以适当将负的非线性刚度，同时考虑悬置系统在减振过程中可能受到的激励，以防系统发生共振失稳。

第 4 章 考虑非线性刚度及阻尼的混合动力悬置系统动力学分析

针对第三章非线性刚度悬置系统动力学与稳定性研究。与刚度类似，阻尼同样具有非线性特性，根据 Stone-Weierstrass 理论用三次项表示^[50]，但其非线性项较难测量。因此，在假设系统具有非线性阻尼的前提下，分析非线性刚度与阻尼对混合动力悬置系统的动态特性，包括冲击响应、共振影响及稳定性。

4.1 含非线性刚度及阻尼动力学建模

4.1.1 含非线性刚度及阻尼的动力学模型

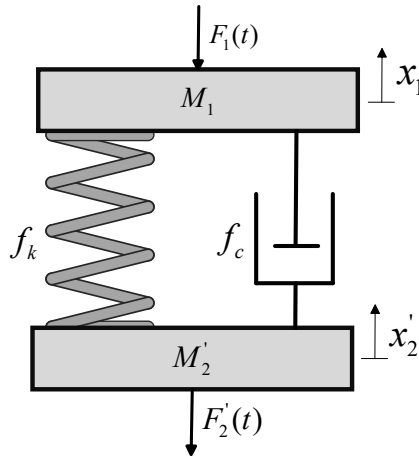


图 4-1 非线性刚度及阻尼悬置系统动力学模型

忽略悬置和小部件的质量，重点考虑发动机、车身的质量及悬置的刚度和阻尼特性，建立悬置系统非线性刚度及阻尼动力学模型如图 4-1 所示。图中 M_1 为动力总成悬置系统质量， M_2' 车架质量。 x_1 、 x_2' 分别代表动力总成以及车架的位移， f_k 代表悬置系统的刚度函数， f_c 为悬置系统的阻尼函数。 $F_1(t)$ 、 $F_2'(t)$ 分别为动力总成的激励力和车架所受到的力。

4.1.2 当量化模型

假设悬置系统为连续系统，不考虑悬置系统安装的形态等因素。将悬置系统中与动力总成位移变化量不同的部件转换为当量参数。 x_1 为动力总成的位移， x_2

当量化后车架的位移, M_1 、 M_2 分别为动力总成悬置系统质量和车架质量, $F_1(t)$ 、 $F_2(t)$ 为动力总成的激励和当量化后车架所受到的力。

动力总成悬置系统的动能为

$$E = \frac{1}{2} M_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} M_2 \dot{x}_2^2 \quad (4-1)$$

动力总成悬置系统的势能为

$$U = \frac{1}{2} k_1 (x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{4} k_3 (x_1 - x_2)^4 \quad (4-2)$$

广义力为

$$Q_{(i)} = F_i^{(j)} \frac{\partial \phi_i}{\partial q_r} \quad (4-3)$$

$$F_i^j = F_i + F_i^{(c)} \quad (4-4)$$

式中: F_i 为广义外力; $F_i^{(c)}$ 为广义阻尼力; q_r 为广义坐标, 下角标 r 为 1 或 2。

$$F_1^{(c)} = c_1 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^3 \quad (4-5)$$

$$F_2^{(c)} = c_1 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^3 \quad (4-6)$$

拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial L}{\partial q_r} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_r} = Q_r \quad (4-7)$$

混合动力总成悬置系统的振动方程为

$$M_1 \ddot{x}_1 + k_1 (x_1 - x_2) + k_3 (x_1 - x_2)^3 + c_1 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + c_3 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^3 = F_1(t) \quad (4-8)$$

$$M_2 \ddot{x}_2 - k_1 (x_1 - x_2) - k_3 (x_1 - x_2)^3 - c_1 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - c_3 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^3 = -F_2(t) \quad (4-9)$$

这种当量化方法将悬架质量、悬置刚度和阻尼等参数转换为等效量, 同时保持动力总成激励力及悬架受力不变。与第三章仅考虑刚度非线性不同, 此处理方式旨在证明研究非线性因素对混合动力悬置系统的动力学作用, 并分析其不受到特定量化方法的影响。

4.2 考虑非线性刚度及阻尼的悬置系统冲击行为分析

4.2.1 冲击响应方程建立

假设悬置系统在运动过程中受到反向冲击力 F' 的作用,并且因为这个冲击力造成悬置的主动端和被动端的位移变化分别为 Δx_1 和 Δx_2 ,由式(4-8)和式(4-9)可得

$$M_1(\ddot{x}_1 + \Delta \ddot{x}_1) + c_1((\dot{x}_1 + \Delta \dot{x}_1) - (\dot{x}_2 + \Delta \dot{x}_2)) + c_3((\dot{x}_1 + \Delta \dot{x}_1) - (\dot{x}_2 + \Delta \dot{x}_2))^3 + k_1((x_1 + \Delta x_1) - (x_2 + \Delta x_2)) + k_3((x_1 + \Delta x_1) - (x_2 + \Delta x_2))^3 = F_1(t) \quad (4-10)$$

$$M_2(\ddot{x}_2 + \Delta \ddot{x}_2) - c_1((\dot{x}_1 + \Delta \dot{x}_1) - (\dot{x}_2 + \Delta \dot{x}_2)) - c_3((\dot{x}_1 + \Delta \dot{x}_1) - (\dot{x}_2 + \Delta \dot{x}_2))^3 - k_1((x_1 + \Delta x_1) - (x_2 + \Delta x_2)) + k_3((x_1 + \Delta x_1) - (x_2 + \Delta x_2))^3 = -F_2(t) - F' \quad (4-11)$$

式(4-10)和式(4-11)分别与式(4-8)和式(4-9)相减得

$$M_1 \Delta \ddot{x}_1 + c_1(\Delta \dot{x}_1 - \Delta \dot{x}_2) + c_3(3(x_1 - x_2)^2(\Delta \dot{x}_1 - \Delta \dot{x}_2) + 3(x_1 - x_2)(\Delta \dot{x}_1 - \Delta \dot{x}_2)^2 + (\Delta \dot{x}_1 - \Delta \dot{x}_2)^3) + k_1(\Delta x_1 - \Delta x_2) + k_3(3(x_1 - x_2)^2(\Delta x_1 - \Delta x_2) + 3(x_1 - x_2)(\Delta x_1 - \Delta x_2)^2 + (\Delta x_1 - \Delta x_2)^3) = 0 \quad (4-12)$$

$$M_2 \Delta \ddot{x}_2 - c_1(\Delta \dot{x}_1 - \Delta \dot{x}_2) - c_3(3(x_1 - x_2)^2(\Delta \dot{x}_1 - \Delta \dot{x}_2) + 3(x_1 - x_2)(\Delta \dot{x}_1 - \Delta \dot{x}_2)^2 + (\Delta \dot{x}_1 - \Delta \dot{x}_2)^3) - k_1(\Delta x_1 - \Delta x_2) - k_3(3(x_1 - x_2)^2(\Delta x_1 - \Delta x_2) + 3(x_1 - x_2)(\Delta x_1 - \Delta x_2)^2 + (\Delta x_1 - \Delta x_2)^3) = -F' \quad (4-13)$$

为更好地研究动力总成悬置系统被动端相对于主动端的冲击响应情况,假设主动端受到冲击后形成的位移变化为零,即 $\Delta x_1 = 0$ 。因此,式(4-12)和式(4-13)可以写成如下形式。

$$-c_1 \Delta \dot{x}_2 + c_3(-3(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 \Delta \dot{x}_2^2 + 3(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \Delta \dot{x}_2 - \Delta \dot{x}_2^3) - k_1 \Delta x_2 + k_3(-3(x_1 - x_2)^2 \Delta x_2^2 + 3(x_1 - x_2) \Delta x_2^2 - \Delta x_2^3) = 0 \quad (4-14)$$

$$M_2 \Delta \ddot{x}_2 + c_1 \Delta \dot{x}_2 - c_3(-3(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 \Delta \dot{x}_2^2 + 3(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \Delta \dot{x}_2 - \Delta \dot{x}_2^3) + k_1 \Delta x_2 - k_3(-3(x_1 - x_2)^2 \Delta x_2^2 + 3(x_1 - x_2) \Delta x_2^2 - \Delta x_2^3) = -F' \quad (4-15)$$

当混合动力总成悬置系统在稳态工况时,则有

$$M_1 \ddot{x}_1 = M_2 \ddot{x}_2 = 0, \dot{x}_1 - \dot{x}_2 = 0, F_1(t) - F_2(t) = F = f \quad (4-16)$$

式(4-8)、式(4-9)相减,并将式(4-16)代入可得

$$k_1(x_1 - x_2) + k_3(x_1 - x_2)^3 = f \quad (4-17)$$

令 $x = x_1 - x_2$ ，将其代入式(4-17)可解得

$$x = ((108f + 12((12k_1^3 + 108k_3f^2)/k_3)^{1/2}))^{1/3} / (6k_3) - 2k_1 / ((108f + 12((12k_1^3 + 108k_3f^2)/k_3)^{1/2}))^{1/3} \quad (4-18)$$

将 x 代入式(4-14)和式(4-15)可得

$$-c_1\Delta\dot{x}_2 - c_3\Delta\dot{x}_2^3 - k_1\Delta x_2 + k_3(-3x^2\Delta x_2 + 3x\Delta x_2^2 - \Delta x_2^3) = 0 \quad (4-19)$$

$$M_2\Delta\ddot{x}_2 + c_1\Delta\dot{x}_2 + c_3\Delta\dot{x}_2^3 + k_1\Delta x_2 - k_3(-3x^2\Delta x_2 + 3x\Delta x_2^2 - \Delta x_2^3) = -F \quad (4-20)$$

将式(4-19)、式(4-20)相减可得

$$M_2\Delta\ddot{x}_2 + 2c_1\Delta\dot{x}_2 + 2c_3\Delta\dot{x}_2^3 + 2k_1\Delta x_2 + 6k_3x^2\Delta x_2 - 6k_3x\Delta x_2^2 + 2k_3\Delta x_2^3 = -F \quad (4-21)$$

冲击影响下，系统展现非线性振动特性。式(4-21)可表示动力总成悬置系统在冲击影响下，系统存在三次非线性项特性。由于冲击持续时间较短，且更加关注冲击后的响应。假设冲击力 $F=0$ ，将此假设代入式(4-21)，即可得到悬置系统的冲击响应方程。

$$M_2\Delta\ddot{x}_2 + 2c_1\Delta\dot{x}_2 + 2c_3\Delta\dot{x}_2^3 + 2k_1\Delta x_2 + 6k_3x^2\Delta x_2 - 6k_3x\Delta x_2^2 + 2k_3\Delta x_2^3 = 0 \quad (4-22)$$

为了便于后续分析，可将式(4-21)重新表示为以下形式。

$$\Delta\ddot{x}_2 + \omega_0^2\Delta x_2 + \alpha_0\Delta\dot{x}_2 + \beta_0\Delta\dot{x}_2^3 + \gamma\Delta x_2^3 - \mu\Delta x_2^2 = 0 \quad (4-23)$$

式中： $\omega_0^2 = \frac{2k_1 + 6k_3x^2}{M_2}$ ； $\alpha_0 = \frac{2c}{M_2}$ ； $\beta_0 = \frac{2c_3}{M_2}$ ； $\gamma = \frac{2k_3}{M_2}$ ； $\mu = \frac{6k_3x}{M_2}$ 。

4.2.2 基于多尺度法的冲击响应方程求解

将式(4-23)的非线性项均引入小参数 ε ，式(4-23)可表示为

$$\Delta\ddot{x}_2 + \omega_0^2\Delta x_2 = \varepsilon(-\alpha_0\Delta\dot{x}_2 - \beta_0\Delta\dot{x}_2^3 - \gamma\Delta x_2^3 + \mu\Delta x_2^2) \quad (4-24)$$

令 $T_m = \varepsilon^m t (m=0, 1, 2, \dots)$ ，可得其偏导数的展开形式可以表示为

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} &= \frac{dT_0}{dt} \frac{\partial}{\partial T_0} + \frac{dT_1}{dt} \frac{\partial}{\partial T_1} + \dots = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \\ \frac{d^2}{dt^2} &= D_0^2 + \varepsilon^2 D_1^2 + 2\varepsilon^2 D_0 D_2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots\end{aligned}\quad (4-25)$$

式中: $D_i (i=1, 2, 3, \dots)$ 表示 $\partial / \partial T_i$ 。

假设式(4-23)的解为

$$\Delta x_2(t, \varepsilon) = \Delta x_{20}(T_0, T_1, \dots) + \varepsilon \Delta x_{21}(T_0, T_1, \dots) + \varepsilon^2 \Delta x_{22}(T_0, T_1, \dots) + \dots \quad (4-26)$$

可得动力总成悬置系统的一阶近似解为

$$\begin{aligned}\Delta x_2 &= r \cos(\omega_0 T_0 + \psi) + \frac{1}{32\omega_0} r^3 [\gamma \cos 3(\omega_0 T_0 + \psi) \\ &\quad + \beta \omega_0^3 \sin 3(\omega_0 T_0 + \psi)] - \frac{\varepsilon}{6} \mu r^2 [\cos 2(\omega_0 T_0 + \psi) - \frac{3}{\omega_0}]\end{aligned}\quad (4-27)$$

式中:

$$\begin{cases} D_1 r = \frac{\alpha}{2} r - \frac{3\beta\omega_0^3}{8} r^3 \\ D_1 \psi = \frac{3\gamma}{8\omega} r^2 \end{cases}$$

4.2.3 悬置系统冲击响应稳定性分析

悬置系统的隔振性能对车辆的乘坐舒适性有直接的影响。特别是在混合动力总成中, 因发动机的频繁介入, 悬置系统常常处于冲击环境下工作。因此, 分析动力总成悬置系统在冲击作用下的瞬态行为与稳定性十分关键。通过数值仿真和理论分析, 研究悬置系统在冲击影响下的动力学特性及稳定性。

令 $y_1 = \Delta x_2, y_2 = \dot{\Delta x_2}$, 将冲击响应方程(4-23)转换为状态方程的形式为

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -\omega_0^2 y_1 - \alpha_0 y_2 - \beta_0 y_2^3 - \gamma y_1^3 + \mu y_1^2 \end{cases} \quad (4-28)$$

令 $\dot{y}_1 = 0, \dot{y}_2 = 0$, 可得

$$y_1(-\gamma x^2 + \mu x - \omega_0^2) = 0; \quad y_2 = 0 \quad (4-29)$$

即

$$y_1 = 0 \text{ 或 } y_1 = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4\gamma\omega_0^2}}{2\gamma}; y_2 = 0 \quad (4-30)$$

根据式(4-30)，在特定情况下，冲击相应方程可能始终存在一个具有实际物理意义的平衡点。当 $\mu^2 - 4\gamma\omega_0^2 \geq 0$ 时，还可能出现其他没有物理意义的平衡点。

采用 Routh-Hurwitz 判据，分析平衡点(0, 0)的稳定性。

假设系统冲击响应的平衡点为 $(y_1', 0)$ ，其雅可比矩阵如下。

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 - 3\gamma x_0^2 + 2\mu x_0^2 & -\alpha_0 \end{pmatrix} \quad (4-31)$$

对应的特征方程为

$$\lambda^2 + \alpha_0 \lambda + (\omega_0^2 + 3\gamma x_0^2 - 2\mu x_0^2) = 0 \quad (4-32)$$

根据 Routh-Hurwitz 准则，平衡点稳定的条件为

$$\begin{cases} \alpha_0 > 0 \\ \omega_0^2 + 3\gamma x_0^2 - 2\mu x_0^2 > 0 \end{cases} \quad (4-33)$$

具有实际意义的平衡点(0,0)，其稳定的条件为

$$\alpha_0 > 0, \omega_0^2 > 0 \quad (4-34)$$

可见平衡点(0, 0)为稳定平衡点。

4.2.4 悬置系统动力学响应数值分析

为了进行更有效的对比，假设悬置系统在冲击作用下产生了 0.9 个单位的初始位移，研究不同的非线性参数变化对系统冲击响应的影响。

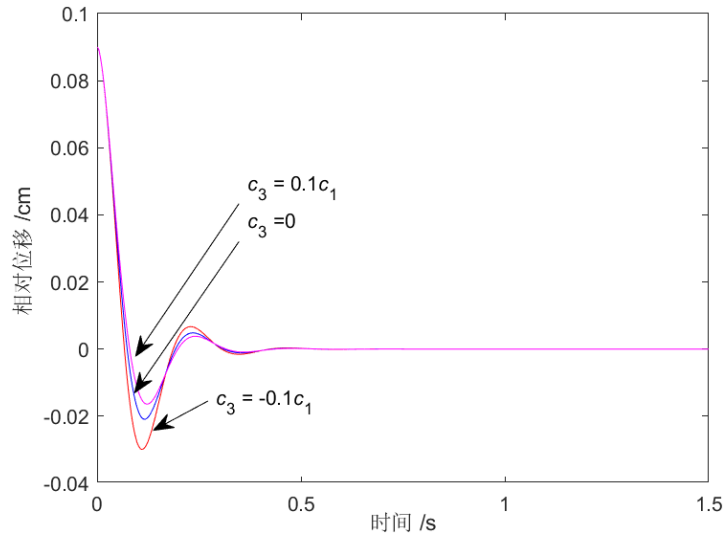


图 4-2 不同非线性阻尼下的冲击响应曲线

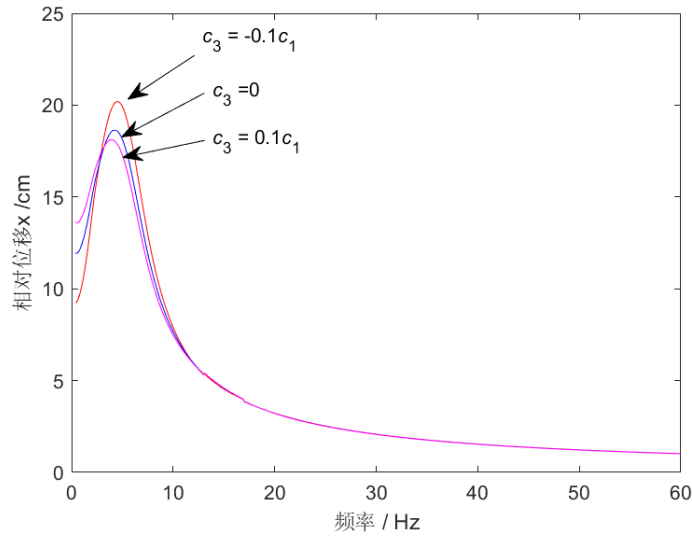


图 4-3 不同非线性阻尼下的 FFT 幅频特性曲线

假设非线性刚度为零，探讨非线性阻尼对悬置系统的冲击响应的影响。图 4-2 反映了在其他参数保持恒定的情况下，不同非线性阻尼系数对悬置系统冲击响应的影响。分别对比了非线性阻尼是线性阻尼的 0.1 倍、-0.1 倍以及不存在非线性阻尼的情况。图 4-3 为对应的幅频特性曲线。

由图 4-2 和图 4-3 可知，相较于仅含线性阻尼的情况，正的非线性阻尼更有助于冲击响应的快速衰减，这是因为引入正的非线性阻尼提升了系统的能量损耗，加快了冲击响应过程的衰减。

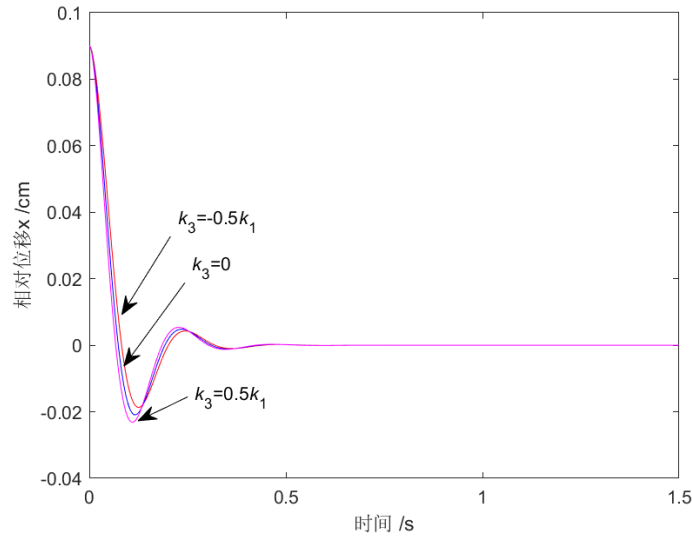


图 4-4 不同非线性刚度下的冲击响应曲线

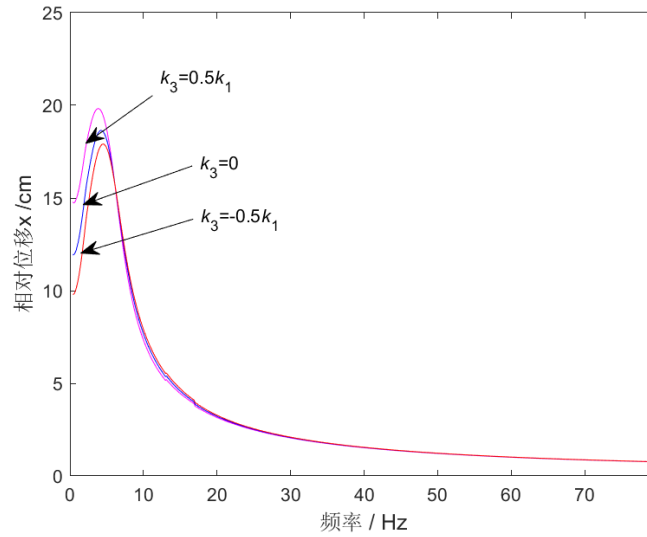


图 4-5 不同非线性刚度下的 FFT 幅频特性曲线

在忽略非线性阻尼作用的条件下，针对悬置系统非线性刚度的冲击响应特性展开研究。图 4-4 揭示了不同非线性刚度系数作用下的冲击响应演变规律，图 4-5 为对应的幅频响应曲线，其验证了系统动力学特性的变化趋势。结果表明：当非线性刚度系数为线性刚度的 0.5 倍时，系统首个冲击响应峰值的绝对值显著比不存在非线性刚度的峰值大，该现象在幅频特性曲线中也得到印证。这证明正刚度非线性参数会抑制系统冲击响应的衰减效果，而负刚度非线性参数对系统冲击响应幅值具有显著的抑制功能。

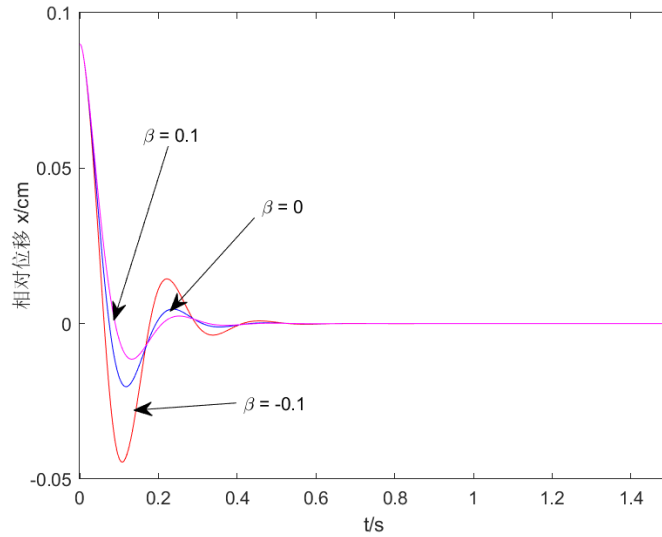


图 4-6 不同非线性刚度及阻尼的悬置系统冲击响应曲线

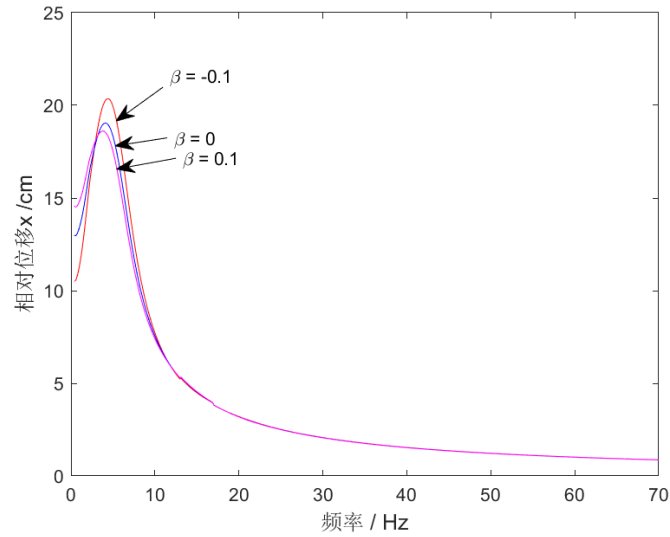


图 4-7 不同非线性刚度及阻尼的悬置系统 FFT 幅频特性曲线

在悬置系统的非线性刚度设定为线性刚度的-0.5 倍时，图 4-6 展示了当非线性阻尼系数 β 分别取-0.1、0、0.1 时，非线性悬置系统冲击响应的变化情况，图 4-7 描绘了对应的幅频特性。从图 4-6 和图 4-7 可知， $\beta=-0.1$ 时，冲击响应的绝对幅值高于其他情况，对应的幅频特性曲线也印证了这一点。这表明，在系统非线性刚度固定的前提下，正的非线性阻尼有助于加快冲击衰减，而负的非线性阻尼则会延长冲击持续时间，不利于系统的冲击响应衰减。因此，在悬置系统设计，合理调整线性刚度与阻尼参数，并引入适当的负非线性刚度与正非线性阻尼，可以优化冲击能量的消散过程，提高系统的隔振性能。

在悬置系统处于稳态工作状态时，悬置的主动端与被动端之间会形成固定的位移差。这一位移差不仅受到动力总成悬置质量的影响，还与系统的线性和非线性

性因素密切相关。在相同工况下，当仅考虑线性阻尼时，若系统包含负的非线性阻尼，则会降低冲击响应的衰减能力，而正的非线性阻尼则有助于增强能量消耗，加快冲击衰减。类似地，当仅含线性刚度时，系统冲击响应的衰减情况也会受到影响。负的非线性刚度有助于降低冲击响应的幅值，提高振动能量消散效率，而正的非线性刚度的引入可能削弱冲击衰减，使系统振动持续时间更长。

4.3 考虑非线性刚度及阻尼的悬置系统共振行为分析

悬置系统共振响应分析中，将式(4-8)乘以 $1/M_1$ 、式(4-9)乘以 $1/M_2$ ，并将式(4-8)代入式(4-9)，推导出无量纲方程如下。

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + ax^3 + b\dot{x} + d\dot{x}^3 = f \quad (4-35)$$

式中： $x = x_1 - x_2$ ； $a = \frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2} k_3$ ； $\omega_0^2 = \frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2} k_1$ ； $b = \frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2} c$ ； $d = \frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2} c_3$ ；

$$f = \frac{1}{M_1 M_2} (M_2 F_1(t) - M_1 F_2(t))。$$

4.3.1 定值激励下悬置系统稳定性及分岔

当动力总成处于稳态工作状态时，悬置系统将受到的激励力为恒定值，即 f 为定值，令 $y = \dot{x}$ ，则式(4-35)可以写为如下的状态空间形式为

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x - ax^3 - by + d\dot{x}^3 + f \end{cases} \quad (4-36)$$

令 $\dot{y} = 0, \dot{x} = 0$ 可得式(4-36)的平衡点可以用 $(x_0, 0)$ ，且 x_0 满足以下形式。

$$-\omega_0^2 x_0 - ax_0^3 + f = 0 \quad (4-37)$$

平衡点处雅可比矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 - 3ax_0^2 & -b - 3dy_0^2 \end{pmatrix} \quad (4-38)$$

平衡点的特征方程为

$$\lambda^2 + b\lambda + \omega_0^2 + 3ax_0^2 = 0 \quad (4-39)$$

相应的特征方程的特征根为

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}b \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4\omega_0^2 - 12ax_0^2} \quad (4-40)$$

由式(4-40)可知, 当 $b > 0$ 且 $\omega_0^2 + 3ax_0^2 > 0$ 时, 式(4-36)平衡点处于稳定, 平衡点失稳时可能引发多种形式的分岔行为。将推导鞍结分岔, 这可能导致系统发生跳跃现象以及 Hopf 分岔, 进而发生平衡点的失稳。

引理^[52]对实系数一元三次方程 $y^3 + ay + b = 0$, 有判别式 $\Delta = \frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}$, 则有

- (1) 当 $\Delta < 0$ 时, 方程有三个不同的实数解;
- (2) 当 $\Delta = 0$ 时, 方程有三个实数解, 且有重根;
- (3) 当 $\Delta > 0$ 时, 方程只有一个实数解和一对共轭复根。

根据上面的引理, 对式(4-37), 有

$$\Delta = \frac{1}{a^2} \left(\frac{F^2}{4} + \frac{\omega_0^6}{27a} \right) \quad (4-41)$$

当 $\Delta > 0$ 时, 方程只有一个实数解; 当 $\Delta < 0$ 时, 方程有三个不同的实数解; 在临界条件 $\Delta = 0$ 时会产生分岔, 分岔现象发生, 导致平衡点的数量发生变化。同时, 根据鞍结分岔的定义, 平衡点处的特征方程会出现零特征值, 从而产生相应的动态变化。则有

$$\begin{cases} \omega_0^2 + 3ax_0^2 = 0 \\ \frac{F^2}{4} + \frac{\omega_0^6}{27a} = 0 \end{cases} \quad (4-42)$$

可见, 只有当三次非线性刚度系数小于零 (即存在负非线性刚度) 时, 才可能发生鞍结分岔。在此情况下, 系统可能生成两个无物理意义的平衡点, 从而引发混沌等不稳定的动力学行为。

当平衡点发生 Hopf 分岔时, 特征方程将出现一对纯虚根。结合特征方程的特征根与式(4-37), 可推导出发生 Hopf 分岔的必要条件为

$$\begin{cases} b = 0 \\ b^2 - 4\omega_0^2 - 12ax_0^2 < 0 \\ -\omega_0^2 x_0 - ax_0^3 + f = 0 \end{cases} \quad (4-43)$$

可见，当代表线性阻尼的项参数为零时，平衡点会发生 Hopf 分岔。

总之，当 f 为定值时，系统的分岔条件较为严格。因此考虑 $f = 0$ 的情况，此时式(4-39)仅存在一个稳定且具有实际意义的平衡点(0,0)，确保系统运动的稳定性。

4.3.2 时变激励下共振响应稳定性及分岔

当悬置系统受到时变激励时， f 的值是随时间变化的。假设 f 仅包含扰动部分，即令 $f = f' \cos(\vec{\omega}t)$ ，式(4-35)可转换为如下形式。

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + ax^3 + b\dot{x} + d\dot{x}^3 = f' \cos(\vec{\omega}t) \quad (4-44)$$

为分析悬置系统的共振行为，令 $a = \varepsilon\alpha$ ， $b = \varepsilon\beta$ ， $d = \varepsilon\gamma$ ，要使外激励力出现，通常需要引入一个摄动方程，令 $f' = \varepsilon f''$ ，式(4-44)可写为如下形式。

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\varepsilon(\alpha x^3 + \beta\dot{x} + \gamma\dot{x}^3 - f'' \cos(\vec{\omega}t)) \quad (4-45)$$

根据第三章关于共振响应方程的建立以及采用多尺度法求解的步骤，因此本节简化步骤。应用多尺度法可得共振响应下的极坐标形式平均方程如下。

$$\dot{\rho} = -\frac{1}{2}\beta\rho + \frac{1}{2}\frac{f}{\omega_1}\sin\eta - \frac{3}{8}\gamma\omega_0^2\rho^3 \quad (4-46)$$

$$\rho\dot{\eta} = \rho\sigma - \frac{3}{8}\frac{\alpha\rho^3}{\omega_0} + \frac{1}{2}\frac{f}{\omega_0}\cos\eta \quad (4-47)$$

当 $\dot{\rho} = \dot{\eta} = 0$ 时，可以得到频响方程为

$$\left(\frac{1}{2}\beta\rho + \frac{3}{8}\gamma\omega_0^2\rho^3\right)^2 + \left(\rho\sigma - \frac{3}{8}\frac{\alpha\rho^3}{\omega_1}\right)^2 = \frac{1}{4}\frac{f^2}{\omega_1^2} \quad (4-48)$$

为分析共振响应曲线的稳定性及其分岔行为，令 $\rho = \rho_0 + \rho_1$ ， $\eta = \eta_0 + \eta_1$ ，其中 ρ_0, η_0 为平衡点， ρ_1, η_1 为小扰动。将其代入式(4-46)、式(4-47)，并忽略非线性项，可得以下线性方程组为

$$\begin{cases} \dot{\rho}_1 = -\frac{1}{2}\beta_0\rho_1 - \frac{9}{8}\gamma\omega_0^2\rho_0^2\rho_1 - \rho_0\sigma\eta_1 + \frac{3}{8}\frac{\alpha\rho_0^3}{\omega_0}\eta_1 \\ \dot{\eta}_1 = \frac{\sigma}{\rho_0}\rho_1 - \frac{9}{8}\frac{\alpha\rho_0}{\omega_0}\rho_1 - \frac{1}{2}\beta\eta_1 - \frac{3}{8}\gamma\omega_0^2\rho_0^2\eta_1 \end{cases} \quad (4-49)$$

平衡点处的特征方程可写为

$$\lambda^2 + \bar{a}_1\lambda + \bar{a}_2 = 0 \quad (4-50)$$

式中：

$$\bar{a}_1 = \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\beta\rho_0 + \frac{3}{2}\gamma\omega_0^2\rho_0^2 \quad (4-51)$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_2 = & \frac{1}{4}\beta^2\rho_0 + \frac{3}{16}\beta\gamma\rho_0^3\omega_0^2 - \frac{3}{8}\frac{\alpha\sigma\rho_0^2}{\omega_0} + \frac{9}{16}\beta\gamma\rho_0^2\omega_0^2 + \frac{27}{64}\gamma^2\rho_0^4\omega_0^4 \\ & - \frac{9}{8}\frac{\sigma\alpha\eta_0\rho_0^2}{\omega_0} + \frac{27}{64}\frac{\alpha^2\rho_0^4}{\omega_0^2} + \eta_0\sigma^2 \end{aligned} \quad (4-52)$$

平衡点稳定条件为

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\beta\rho_0 + \frac{3}{2}\gamma\omega_0^2\rho_0^2 > 0 \\ \frac{1}{4}\beta^2\rho_0 + \frac{3}{16}\beta\gamma\rho_0^3\omega_0^2 - \frac{3}{8}\frac{\alpha\sigma\rho_0^2}{\omega_0} + \frac{9}{16}\beta\gamma\rho_0^2\omega_0^2 \\ + \frac{27}{64}\gamma^2\rho_0^4\omega_0^4 - \frac{9}{8}\frac{\sigma\alpha\eta_0\rho_0^2}{\omega_0} + \frac{27}{64}\frac{\alpha^2\rho_0^4}{\omega_0^2} + \eta_0\sigma^2 > 0 \end{cases} \quad (4-53)$$

当平衡点发生鞍结分岔时，对应的特征方程将出现零特征值。为了使平衡点发生鞍结分岔，必须满足以下条件。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}\beta^2\rho_0 + \frac{3}{16}\beta\gamma\rho_0^3\omega_0^2 - \frac{3}{8}\frac{\alpha\sigma\rho_0^2}{\omega_0} + \frac{9}{16}\beta\gamma\rho_0^2\omega_0^2 \\ & + \frac{27}{64}\gamma^2\rho_0^4\omega_0^4 - \frac{9}{8}\frac{\sigma\alpha\eta_0\rho_0^2}{\omega_0} + \frac{27}{64}\frac{\alpha^2\rho_0^4}{\omega_0^2} + \eta_0\sigma^2 = 0 \end{aligned} \quad (4-54)$$

由鞍结分岔理论可知，当系统发生分岔行为时需满足以下条件。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4}\beta^2 + \frac{1}{2}\beta^2\rho_0 + \frac{3}{2}\beta\gamma\rho_0^2\omega_0^2 + \frac{1}{4}\beta^2\rho_0^2 + \frac{3}{2}\beta\gamma\rho_0^3\omega_0^2 + \frac{9}{4}\gamma^2\rho_0^4\omega_0^4 \\ -\beta^2\rho_0 - \frac{3}{4}\beta\gamma\rho_0^3\omega_0^2 + \frac{3}{2}\frac{\alpha\sigma\rho_0^2}{\omega_0} - \frac{9}{4}\beta\gamma\rho_0^2\omega_0^2 - \frac{27}{24}\gamma^2\rho_0^4\omega_0^4 \\ + \frac{9}{2}\frac{\sigma\alpha\eta_0\rho_0^2}{\omega_0} - \frac{27}{64}\frac{\alpha^2\rho_0^4}{\omega_0^2} - 4\eta_0\sigma^2 < 0 \\ \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\beta\rho_0 + \frac{3}{2}\gamma\omega_0^2\rho_0^2 = 0 \end{array} \right. \quad (4-55)$$

4.3.3 参数对共振响应的稳定性分析

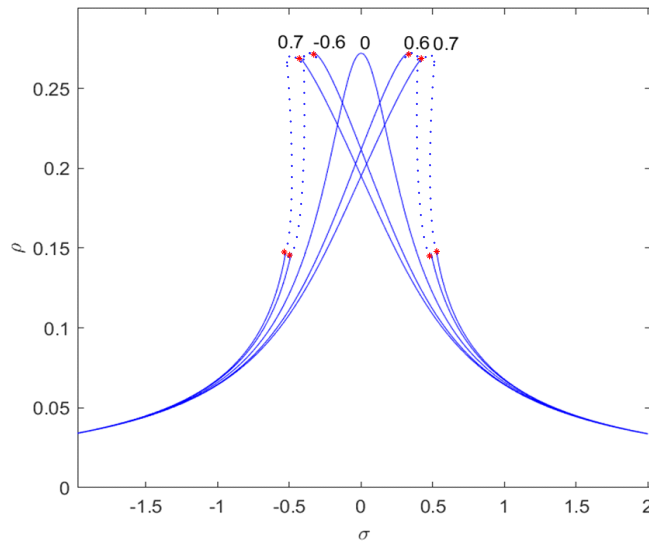


图 4-8 不同非线性刚度下的共振曲线

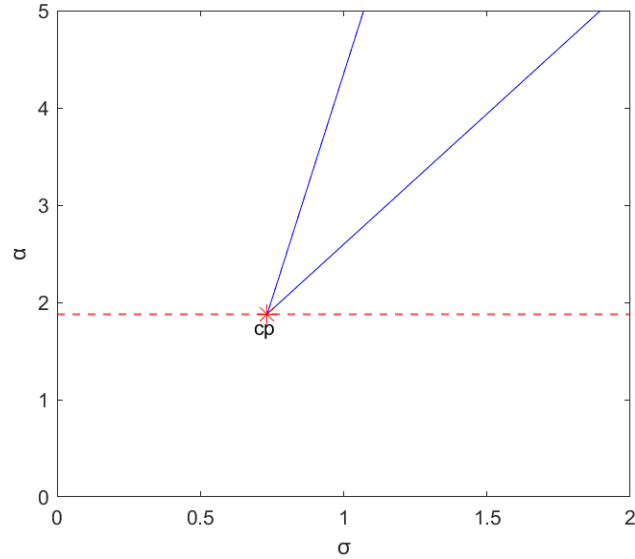


图 4-9 参数 α 对 fold 分岔的影响

基于恒定线性刚度初始条件，图 4-8 为刚度的非线性项与线性刚度的比例关系分别为-0.7、-0.6、0、0.6、0.7 倍数时，悬置系统的共振响应曲线。结果表明：

非线性刚度的引入不仅引发共振峰值的频域偏移现象，因 fold 分岔的发生，导致系统出现动力学平衡态的失稳特性(图中虚线表示)。在悬置系统的建模过程中，若系统包含非线性刚度，可能会引发 fold 分岔，从而影响共振曲线的稳定性。为确保系统维持平稳运行，图 4-9 针对正的非线性刚度绘制了 fold 分岔点的参数范围。研究表明，当 $\alpha > 1.896$ 时，系统会出现 fold 分岔点，从而可能导致共振曲线进入失稳状态。反之，则共振曲线不会发生失稳。

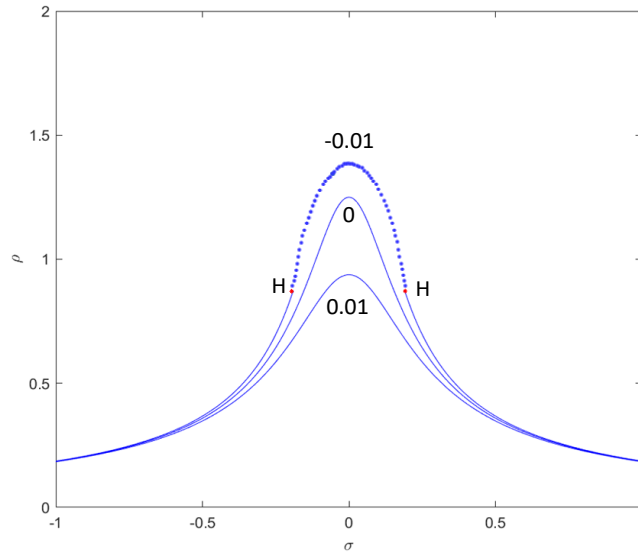


图 4-10 不同非线性阻尼下的共振曲线

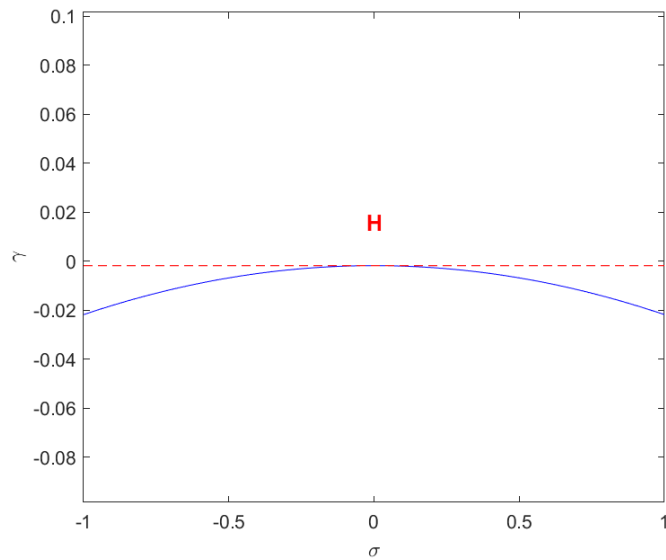


图 4-11 参数 γ 对 Hopf 分岔的影响

图 4-10 反映了悬置系统在不同非线性阻尼条件下的共振响应情况。从分析可知，正的非线性阻尼能够有效降低共振峰值，这是因为其增强了系统的能量耗散能力；而负的非线性阻尼则会提高系统的共振幅值，向系统内额外输入能量。

此外, 负的非线性阻尼可能会触发 Hopf 分岔, 使得共振曲线发生不稳定变化(图中虚线部分)。为了确保共振曲线保持稳定, 需要明确 Hopf 分岔与非线性阻尼之间的临界条件, 并对其取值范围加以约束。图 4-11 展示了 Hopf 分岔发生时非线性阻尼系数的参数区间。研究表明, 当非线性阻尼系数超出 Hopf 分岔曲线时, 系统的共振曲线将可能进入不稳定区域。因此, 为了确保系统维持稳定运行, 非线性阻尼系数 γ 应保持在 -0.0018 以上, 以防止系统进入失稳状态。

分析表明, 在恒定外部激励作用下, 悬置系统通常仅有一个稳定的平衡态, 保证了隔振系统的正常运行。但在时变激励的条件下, 系统的非线性刚度可能会引起 fold 分岔现象, 进而使共振曲线进入非稳态区域。若合理调整非线性刚度的参数范围, 可以有效避免 fold 分岔的出现, 从而使系统保持在稳定状态。此外, 正的非线性阻尼可以提高能量耗散效率, 使得共振峰值降低, 从而减少振动幅度。而负的非线性阻尼则会向系统补充额外能量, 导致共振幅值上升, 甚至可能由于 Hopf 分岔使系统进入不稳定状态。因此, 为确保系统的长期稳定运行, 应合理约束非线性阻尼的取值范围, 防止 Hopf 分岔导致系统失稳。

4.4 本章小结

构建了包含非线性刚度和阻尼特性的悬置系统模型, 并利用多尺度方法对冲击及共振情况下的系统响应进行近似求解, 同时对系统的稳定性进行了分析。研究表明: 负非线性刚度有助于缓解冲击响应, 正得非线性刚度不利于冲击后的衰减; 正的非线性阻尼能够提升能量耗散, 从而减小系统的共振幅值, 负的非线性阻尼则会向系统补充额外能量, 导致共振幅值上升, 甚至可能引起分岔使系统进入不稳定状态。但非线性项的引入可能影响共振曲线的稳定性, 特别是在激励频率接近共振点时, 系统动态行为变得更加复杂, 可能加速悬置元件的损耗。因此, 在设计悬置系统, 适当引入负非线性刚度和正非线性阻尼有助于提升系统的隔振性能, 但同时需要考虑运行过程中的激励因素, 以避免因共振导致系统发生不稳定的情况。

第 5 章 实验分析与研究

整车 NVH 性能的保障依赖于悬置系统动力学验证^[53]。基于实车数据采集与 NVH 测试标准，通过启停工况以及怠速工况下的冲击响应分析，系统性验证仿真模型与实际工况动态特性的匹配性，从而评估悬置系统的动态表现。

5.1 NVH 数据处理

NVH 数据处理涉及噪声、振动和舒适性评估，通过采集噪声、振动等信号进行时域和频域分析，如 FFT 和共振频率分析。常用指标包括加速度、声压级、频谱和舒适性指数。数据处理的目标是识别噪声和振动源、优化设计并提高舒适性^[54]。常见的分析工具包括加速度计、频谱分析仪和模态分析工具。优化方法包括源头控制、路径控制和接收控制，以降低噪声和振动，提高产品舒适性。在实际应用中，NVH 测试能够帮助改善整车或设备的动态性能，减少驾驶过程中的不适感，提升用户体验。

5.1.1 声压级

声压通常作为声音测量的基础物理量被采用。人耳能够感知的声压范围从 $20\text{ }\mu\text{Pa}$ 到 20 Pa ，这意味着人耳对声压的响应范围非常宽广，难以用线性方式准确表征^[55]。如图 5-1 所示，声压级（单位：分贝/dB）作为无量纲量被引入以量化声压的变化。

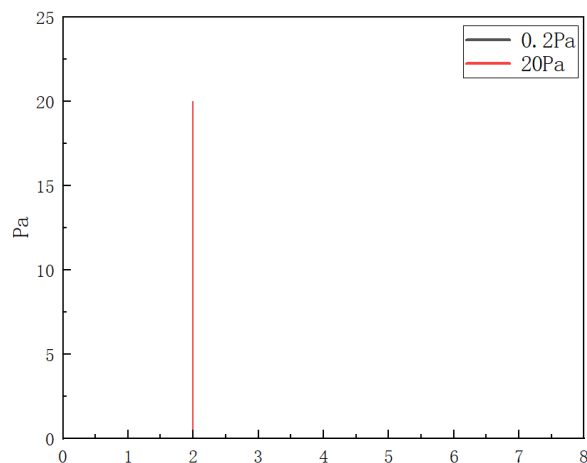


图 5-1 线性尺度下的声压大小

声压级与声压之间的换算公式如下。

$$SPL(p) = 20\lg\left(\frac{p}{p_0}\right) \quad (5-1)$$

式中： p 为声压， p_0 为基准。

人耳可感知的声压级范围为 0~120 dB，因此声压常被转换为声压级进行量化。分贝尺度下的声压级分布（图 5-2）与线性尺度（图 5-1）相比，能更清晰地突显声压的动态变化。

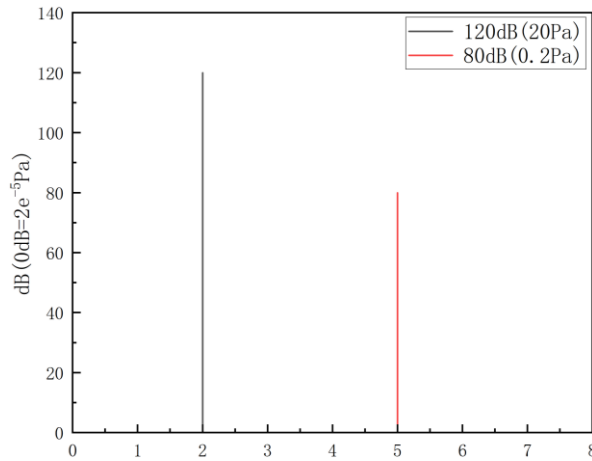


图 5-2 分贝尺度下的声压级大小

受限于人耳对不同频率的感知灵敏度差异，即便原始声压级相同，主观听觉的声压级仍可能出现显著偏差。以极端情况为例：10 Hz 低频环境中 80 dB 的声压级可能被放大感知至 90 dB，而 1000 Hz 中频下相同声压级可能仅对应 40 dB 的主观感受。针对这一现象，声学领域采用“计权”技术，对原始声压级进行频率特性修正，从而准确反映人耳的听觉特性。常见的计权方式有 A 计权、B 计权、C 计权和 D 计权，其中 A 计权是最常使用的标准^[56]。

5.1.2 傅里叶变换

NVH 测试中，测试的数据是时域信号，其随时间的变化。为分析信号（加速度、位移等）随频率的变化规律，需通过时域至频域进行转换，克服时域信号的频率特性表达局限性。这个转换过程通过傅里叶变换实现，其公式为^[57]

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (5-2)$$

式中： $f(t)$ 表示时域信号。

根据图 5-3 的对比分析，时域信号图 a)所示，其幅值表现为正负交替的振荡特性，而频域信号图 b)所示，其幅值均为正值。造成这种差异源于傅里叶变换的数学本质：通过正交基函数（如正弦/余弦）对时域振动信号进行分解，提取各频率分量的幅值信息。由于幅值表征能量强度，频域信号仅保留非负值，从而清晰反映振动能量在频率轴上的分布特征。

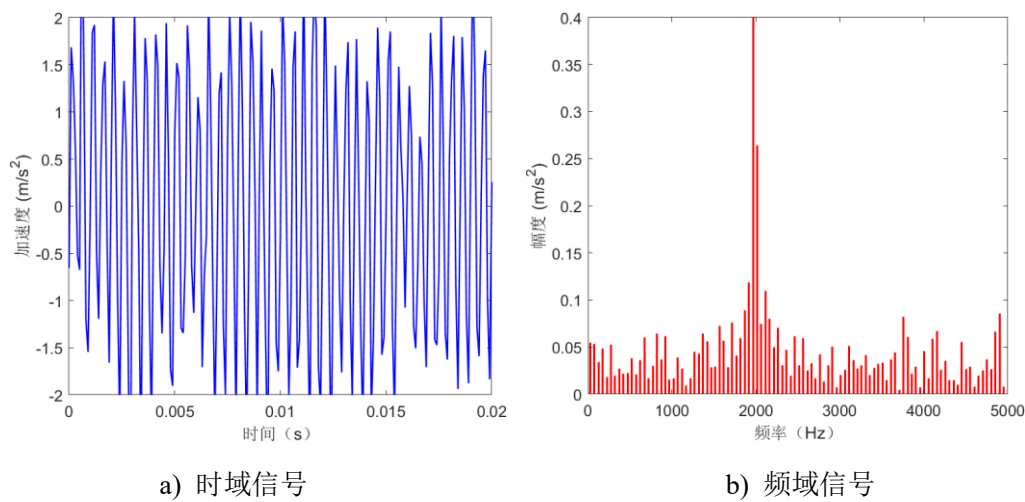


图 5-3 傅里叶变换图

5.2 NVH 测试规范与流程

混合动力悬置系统振动噪声特性评估包含全流程实验环节，包括实验样件准备、准静态刚度特性测试、动力总成空间位姿标定、车载控制单元校验、样件替换、传感器优化布局、数据采集系统调试及信号后处理等环节。图 5-4 展示了传感器布点策略：测点 1（动力总成输出端）、测点 2（悬置主动侧）、测点 3（悬置被动侧）及测点 4（车身/副车架连接端），分别用于捕捉动力传递路径中关键节点的振动响应。

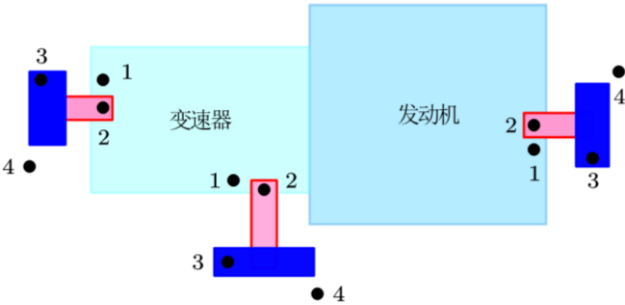


图 5-4 悬置系统传感器布点策略图

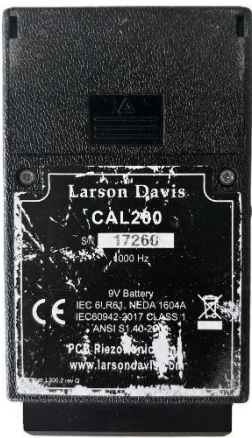
表 5-1 为测试所需的设备明细，图 5-5 和图 5-6 为测试过程所用到的部分测试设备图。

表 5-1 设备清单

	实验装置	规格	参数	功能
数据 采集 模块	笔记本工作站	Latitude E6540	/	操作测试软件完成测试
	PAK 振动测试设备	PAK 5.10 SR4	64 通道	采集振动信号
			提供 94 dB 与	
	麦克风标定器	CAL200	114 dB 两种	满足麦克风频响特性标定
传感 器模 块			标准声压源	
	加速度传感器	356B21/356A32	/	采集加速度振动信号
	麦克风	SN.133981	53.09mV/g	定向采集车内噪声信号
信号 传输	转接线	/	/	实现传感器与数采设备间
				低噪声电气连接
	麦克风连接线	GRAS AA0070	/	连接麦克风与转接线
	3 转 1 转接线	AO-0087	/	传感器连接线与数采设备
	CAN 线	/	/	读取车辆的转速、速度
	电源线	/	/	为数采设备供电



a) PAK 采集设备



b) 麦克风标定器

图 5-5 采集设备



图 5-6 传感器设备

测试时需要遵循以下几个要求为^[58]

- 1) 悬置静刚度测试样件误差需控制在 3 %以内，以匹配设计状态；
- 2) 传感器安装方向应与整车坐标系一致，降低测试误差；
- 3) 传感器直接连接被测部件以减少误差；
- 4) 为避免支架结构模态耦合对振动信号产生附加激励，悬置传感器应布设于橡胶隔振器等弹性支承附近区域；
- 5) 噪声测试环节需在室外安静的测试道路上完成，以消除环境噪声对声压级解析的频谱污染。

5.3 测试实验数据采集

测试过程包括样件制备参数记录、动态响应数据采集及失效特征分析的全流程，结合传感网络拓扑优化配置与多物理场耦合实验工况设计。目的是确保获得合格的测试数据，为后续的数据处理和分析奠定基础。

5.3.1 样件信息

NVH 测试分析的侧重点为动力总成悬置系统中各悬置元件主方向的刚度。基于动力总成振动隔离需求，悬置系统主刚度轴定义如下：左、右悬置沿整车坐标系 W 轴（垂向）承载，后悬置则设定为 U 轴（横向），以匹配空间载荷分布特性。测试前，为了保证验证结果的准确性，采用两套不同刚度的悬置系统，进行

比较验证，表 5-2 是测试的悬置系统样件信息。

表 5-2 悬置系统的样件信息

测试件	悬置系统刚度
系统 I(kN/m)	173
系统 II(kN/m)	206

系统 I 是具有负的非线性刚度以及正的非线性阻尼的悬置系统，系统 II 是正的非线性刚度及负非线性阻尼项悬置系统，两套系统进行对比来验证引入正负非线性项对冲击响应以及隔振的影响。

5.3.2 测试设备

表 5-3 为所需的测试设备及数目。

表 5-3 测试设备信息

设备	数量
电脑(台)	1
PAK 采集设备(台)	1
振动传感器(个)	8
噪声采集单元(个)	2
麦克风标定器(个)	1
转接线(根)	8
麦克风转接线(根)	2
3 转 1 转接线(根)	9
CAN 线(根)	1
电源线(根)	1
胶水(瓶)	1

5.3.3 传感器布置

悬置系统测试过程的传感器布置遵循 5.2 节的测试规范，图 5-7 展示了悬置系统的传感器布置示意图。悬置的主、被动端在图中标注，噪声采集单元 A/B 分别部署于前排驾驶员耳侧（模拟头部声学响应特性）与后排右座乘客近耳域（人

体工效学定位)，形成车内噪声传递路径的双焦点监测。

部署于车内前后排的噪声采集单元，旨在实时捕获声压信号以评估车厢声学环境整体状态，并通过频谱分析进行判断。避免因悬置系统隔振性能衰减引发的发动机特征频率噪声能量突升现象。

基于人体振动感知敏感区域的工程定位原则，NVH 传感器优先布设于方向盘（驾驶员体感振动暴露量最大区域）及座椅导轨（乘员-车身机械阻抗交互界面）。方向盘的振动响应，因涉及转向柱-骨架多级耦合传递路径非线性特性，仅提供悬置低频隔振效能的定性判据；反观座椅导轨，其与白车身的刚性连接特性使振动信号直接反映悬置系统至车身的结构声传递效率，故被列为隔振性能量化评估的核心指标。



图 5-7 传感器布置示意图

5.3.4 测试工况

在 NVH 测试中，启停工况与怠速工况具有重要的测试价值。启停工况涉及发动机频繁启动与熄火的瞬态过程，是评价车辆起步、停车阶段振动冲击感受和声音品质的关键节点，直接影响整车高级感与舒适性；而怠速工况则代表车辆静止时发动机稳定运行状态，是衡量整车低频振动、结构共振、发动机噪声控制水

平的重要基础。因此，选取这两种工况进行测试，NVH 测试工况见表 5-4。在怠速及启停工况测试时，测试环境需保持安静，测试场地选在沥青路面的直线跑道。

为提升分析结果的准确性并有效控制测试误差的干扰，在实验中采用了多重数据保障机制。具体而言，针对每个待测工况均系统性地实施了三次独立数据采集流程。在数据处理阶段，通过构建多维度数据比对体系，对三次采集获得的数据集进行交叉验证与一致性评估，最终基于数据完整性、稳定性及误差离散度等指标，遴选出最具有代表性的数据作为后续深度分析进行使用。

表 5-4 NVH 测试工况

测试阶段	工况
启停	点火/熄火
怠速	ACC OFF/ON

5.4 测试实验数据分析

5.4.1 启停工况

“启停工况”也称为“点熄火工况”^[59]。内燃机启停瞬态特性研究作为悬置系统 NVH 性能评估体系的关键组成模块，其核心研究目标聚焦 阶段的振动能量传递特性。基于该工况下机械激励信号的非平稳特征，工程实践中普遍采用基于时域波形解析的振动评价方法，构建发动机启停冲击振动的量化表征体系。

(1) 方向盘振动能量量化评估

针对方向盘空间振动的多自由度特性，采用 X、Y、Z 轴向振动极值的平方和根（RSS）合成标量参数，通过矢量模量归一化方法实现振动强度的全域能量等效评价。对比非线性项的引入对悬置系统减振效果的影响。表 5-5 是方向盘的振动量和 RSS 值。图 5-8 为两组系统在启停工况下方向盘的振动量图。

表 5-5 方向盘振动量和 RSS 值

	$X_m(m/s^2)$	$Y_m(m/s^2)$	$Z_m(m/s^2)$	RSS(m/s^2)
系统 I	0.66	0.17	0.42	0.80
系统 II	0.69	0.16	0.44	0.83

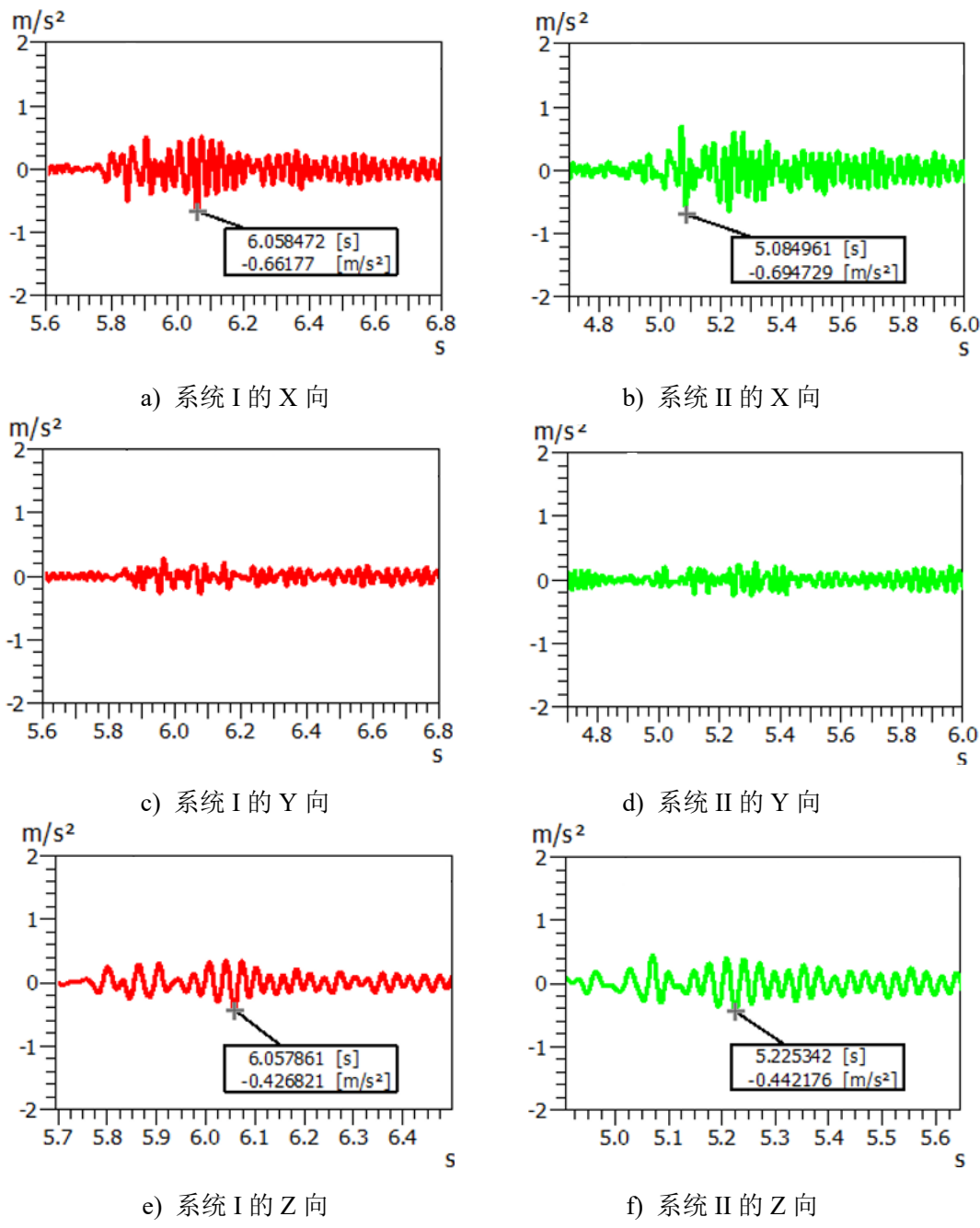


图 5-8 启停工况方向盘的振动量

(2) 座椅振动能量量化评估

图 5-9 为两组系统在启停工况下座椅导轨的振动量图，表 5-6 是座椅导轨的振动量和 RSS 值。

表 5-6 座椅导轨振动量和 RSS 值

	$X_m(m/s^2)$	$Y_m(m/s^2)$	$Z_m(m/s^2)$	RSS(m/s^2)
系统 I	0.115	0.043	0.25	0.28
系统 II	0.25	0.105	0.260	0.37

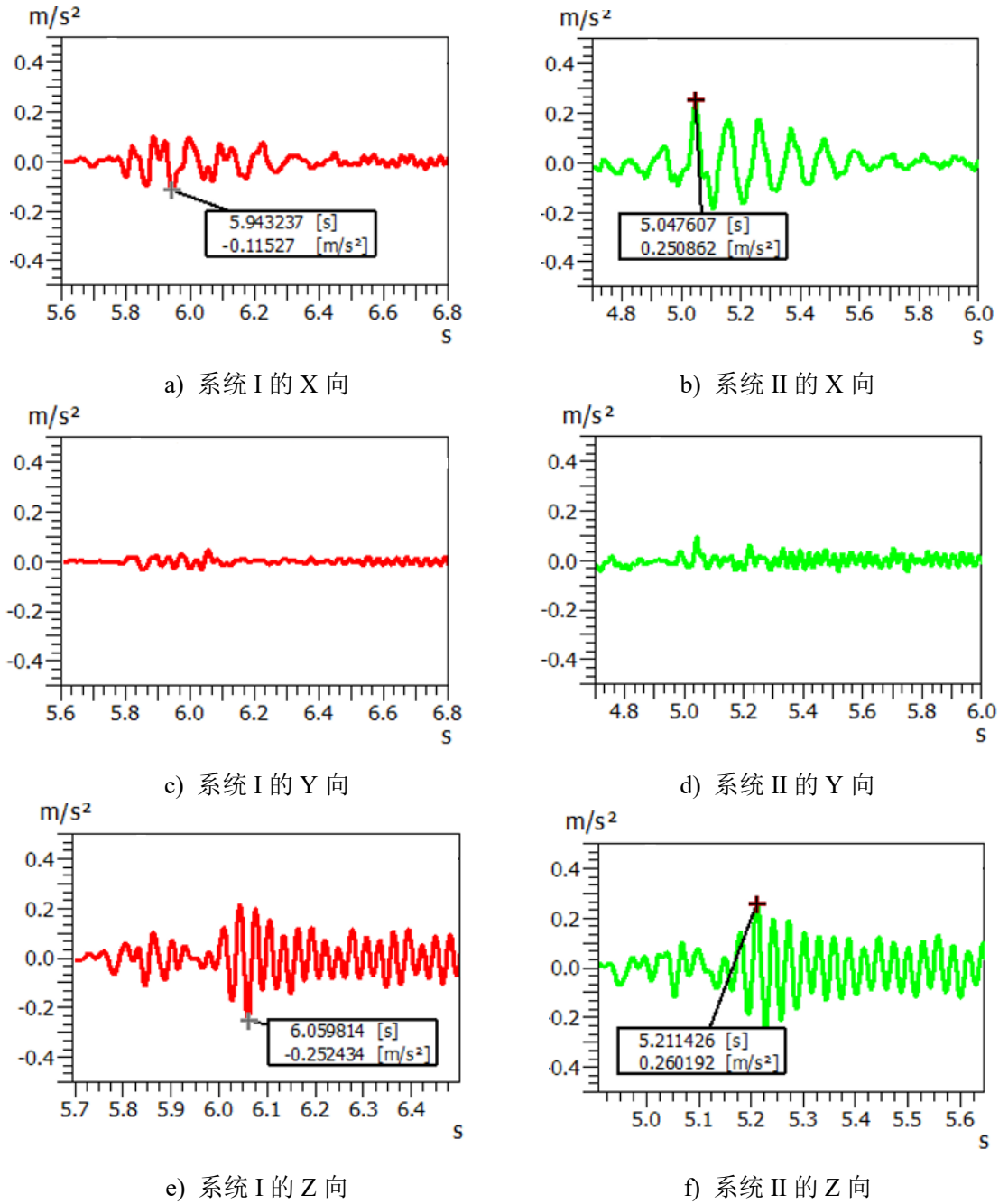


图 5-9 启停工况座椅导轨的振动量

从启停工况下座椅和方向盘的振动结果来看，系统 I 的振动值较系统 II 小，并且振动衰减效果更好。这表明，悬置系统引入负的非线性刚度及正的非线性阻尼能有效改善系统的振动衰减性能。因此，在悬置系统设计，适当引入非线性项有助于提升系统的振动衰减效果。

5.4.2 怠速工况

怠速工况作为车辆动力系统关键运行状态，其工程定义涵盖发动机维持最低

可持续转速的稳态热机过程。典型应用场景包括城市道路周期性驻车场景（交通信号灯相位切换间隔）与路网间歇性停滞（高峰时段车流密度饱和），该状态对整车 NVH 性能及排放控制构成基础性约束条件，属于动力总成热力学分析的核心边界参数。在此状态下，车内的振动是驾驶员和乘客普遍关注的驾乘体验之一，过大的振动可能导致乘客身体不适，影响乘坐舒适性^[60]。

方向盘振动、座椅导轨振动及悬置隔振率为怠速工况评价项目。怠速工况分为全负载运行和无负载运行两种状态。空调运行时，压缩机运转会增强系统振动。对比两套系统，验证引入非线性项对悬置系统隔振性能的影响。

悬置的隔振性能通常通过隔振率衡量，隔振率是评估悬置隔振能力的重要指标，其值越高，说明隔振效果越佳^[61]。其低值状态（如<20 dB）与振动时域幅值的空间分布联合分析，避免因共振频带能量集中或非线性阻尼效应引发误判，依据机械阻抗匹配理论，隔振率 ≥ 20 dB 表示系统在宽频域内实现了振动传递路径的有效解耦。通常，隔振率超过 20 dB 即可认为性能达标。隔振率计算公式为^[62]

$$T_{dB} = 20 \lg \left| \frac{a_a}{a_p} \right| \quad (5-3)$$

式中： a_a 为悬置主动端的加速度， a_p 为悬置被动端的加速度。

(1) 全负载运行状态

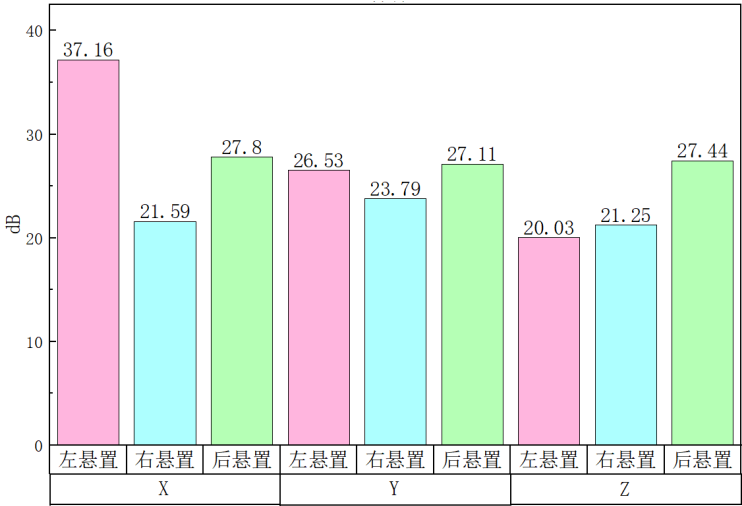
全负载运行状态：当发动机保持最低转速空转（如车辆静止但未熄火时），同时空调系统开启到最强制冷/制热模式。此时方向盘感受到的振动，实际上是发动机自身抖动与空调压缩机高速运转产生的振动共同作用的结果。这两种振动会通过发动机支架的金属连接件，以及空调管路的固定结构传递到驾驶舱，最终在方向盘位置形成叠加放大的振动效应。

表 5-7 为怠速全负载运行状态下方向盘和座椅导轨振动量。系统 I 的怠速工况（全载）的方向盘和座椅导轨的振动量相比系统 II 的振动量小，说明系统 I 对振动的衰减效果好。

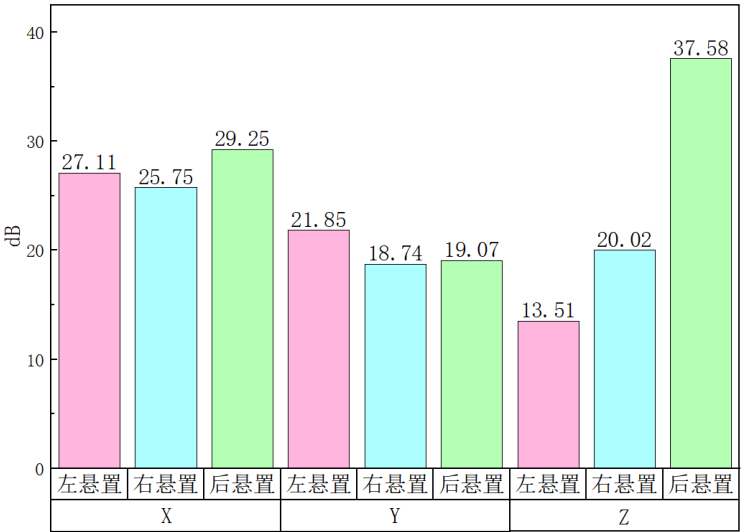
表 5-7 怠速全载方向盘和座椅导轨的振动

测试样件		$X_m(m/s^2)$	$Y_m(m/s^2)$	$Z_m(m/s^2)$	RSS(m/s^2)
方向盘	系统 I	0.0899	0.0684	0.0733	0.135
	系统 II	0.1166	0.0910	0.0792	0.168
座椅导轨	系统 I	0.0132	0.0264	0.0611	0.061
	系统 II	0.0240	0.0184	0.0559	0.064

图 5-10 为两套系统在怠速工况（全载）下悬置的隔振率。图 5-10 中可以看出，在全载工况下，系统 II 在部分方向的隔振率未达到大于 20 dB 的要求，未能满足规定的标准；而系统 I 在所有方向上的隔振率均符合要求，表现出较为良好的隔振性能。因此，系统 I 的隔振效果优于系统 II。



a) 系统 I 的隔振率



b) 系统 II 的隔振率

图 5-10 怠速工况全载的悬置隔振率

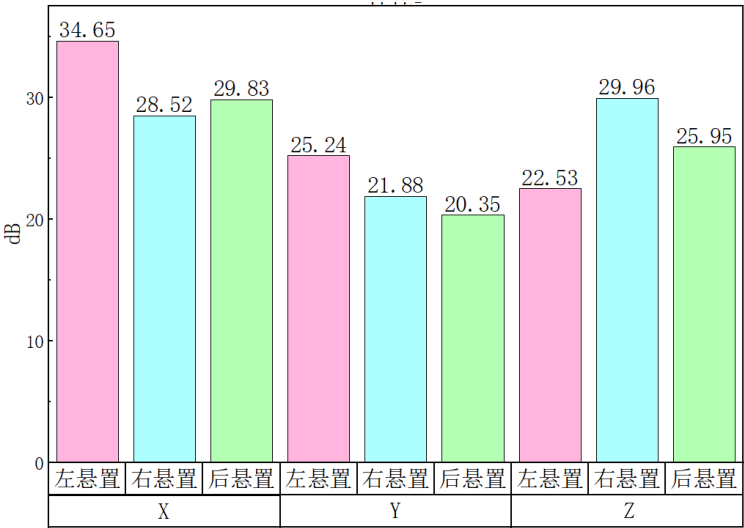
(2) 空载运行状态

空载状态指的是发动机处于怠速运行且空调关闭。在此状态下，振动源主要是发动机的振动。表 5-8 为两套系统在怠速空载工况下方向盘和座椅导轨振动量，从表 5-8 中可以看出，整体上系统 I 的怠速工况（空载）的方向盘和座椅导轨的振动量相比系统 II 的振动量小，则说明系统 I 对振动的衰减效果好。

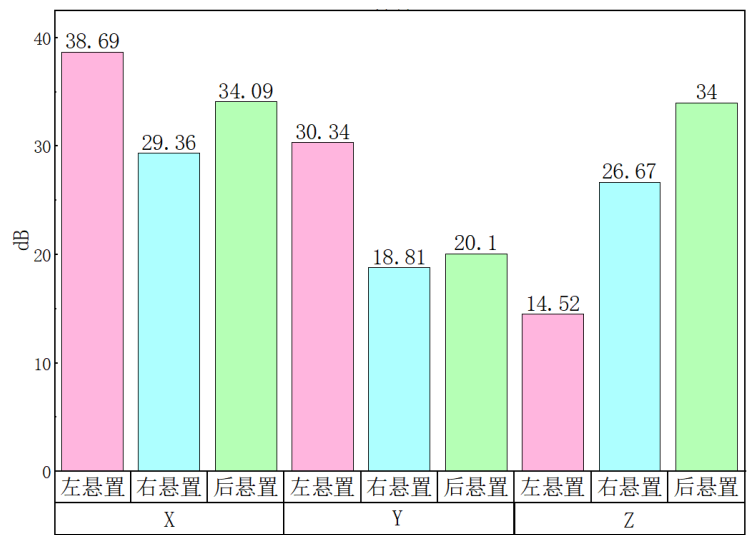
表 5-8 怠速空载方向盘和座椅导轨的振动

测试样件		$X_m(\text{m/s}^2)$	$Y_m(\text{m/s}^2)$	$Z_m(\text{m/s}^2)$	$\text{RSS}(\text{m/s}^2)$
方向盘	系统 I	0.0440	0.1572	0.0324	0.166
	系统 II	0.0667	0.1959	0.0323	0.209
座椅导轨	系统 I	0.0239	0.0036	0.0123	0.027
	系统 II	0.0176	0.0037	0.0197	0.027

图 5-11 为两套系统在怠速工况（空载）下悬置的隔振率。从图 5-11 中可以看出，在空载工况下，系统 II 的左悬置 Z 向和右悬置 Y 向的隔振率未达到大于 20 dB 的要求，未能满足规定标准；而系统 I 在所有方向上的隔振率均符合要求，并且其整体隔振率高于系统 II。因此，在空载工况下，系统 I 的隔振性能优于系统 II。



a) 系统 I 的隔振率



b) 系统 II 的隔振率

图 5-11 怠速工况空载的悬置隔振率

通过对启停工况和怠速工况的振动特性分析,可以发现两套系统在多方向振动量级和隔振效果上存在显著差异。启停工况下,非线性项的引入振动缓解具有积极作用,系统 I 表现出更低的振动量级和更好的稳定性,而在怠速工况下,无论是全载还是空载状态,系统 I 的隔振效果均优于系统 II,尤其在 Z 方向隔振率更为突出。这表明优化设计的系统在不同工况下能够有效提升隔振性能,为悬置系统的改进提供了可靠依据。

5.5 本章小结

通过系统实验验证,深入探讨了 NVH 特性对实际工程应用的影响及非线性项的引入在悬置系统中的优化潜力。实验聚焦于怠速与启停两类典型工况,综合评估了引入非线性项元件后系统在多向振动抑制及隔振性能方面的表现。结果显示,在启停工况下,引入非线性特性的悬置系统显著降低了系统振动响应的幅值,提升了运行的动态稳定性;而在怠速工况下,无论在全载还是空载状态下,优化系统均展现出优于传统系统的隔振效果,尤其在 Z 方向的隔振率提升最为明显,验证了非线性设计对关键方向振动控制的有效性。因此,验证了非线性项悬置系统在工程实际中具备显著的隔振优势,并为相关系统的优化设计提供了坚实的理论支撑与实践指导。

第 6 章 总结与展望

6.1 总结

围绕混合动力悬置系统的动力学特性和稳定性展开研究。应用非线性动力学理论分析了在引入非线性项的基础上,研究悬置系统的动力学行为及稳定性问题,并通过整车实验进行验证。

主要研究成果如下:

(1) 针对混合动力悬置系统的复杂性与非线性特征,建立了包含非线性刚度与阻尼特性的动力学模型。理论推导揭示了引入非线性刚度与阻尼参数后,系统可能发生的 fold 分岔与 Hopf 分岔现象,并推导了分岔失稳的临界条件。数值仿真结果表明:非线性刚度参数的增加会引起共振曲线的 fold 分岔失稳,而非线性阻尼参数则引发 Hopf 分岔失稳,从而导致系统稳定性降低。基于仿真结果提出了确保系统稳定运行的参数选取范围,并提供了相应的优化设计方案,为系统的非线性控制提供了理论指导。

(2) 为了探讨非线性参数对系统冲击响应与稳定性的影响,基于建立的冲击动力学方程,结合 Routh-Hurwitz 稳定性判据,对系统的瞬态响应特性进行了深入分析。仿真结果显示:引入负非线性刚度与正非线性阻尼的组合能够有效抑制系统的冲击响应,显著降低振动幅值并提高系统的稳定性。相反,正非线性刚度与负非线性阻尼参数的组合则会加剧系统振动响应,并可能引发系统不稳定现象。通过绘制冲击响应的时域曲线与幅频特性图谱,进一步验证了非线性参数对系统稳定性的显著影响,并为参数优化提供了清晰的理论依据。基于仿真分析结果,提出了负非线性刚度与正非线性阻尼的合理配置方案,以优化系统的冲击衰减性能与动态稳定性。

(3) 为了验证理论分析与数值仿真的有效性,设计了两套不同非线性参数配置的悬置系统样件,并在启停工况与怠速工况下进行了对比实验。实车实验数据表明:含有负非线性刚度与正非线性阻尼的悬置系统在启停与怠速工况下均表现出更优的隔振性能。特别是在 Z 方向的隔振率方面,优化系统 I 的隔振效果显

著优于对比系统 II，表现出更好的振动抑制能力与系统稳定性。通过对比分析验证了引入非线性参数后，悬置系统的动态性能与稳定性均得到了显著提升。实验结果与理论分析高度一致，进一步证明了优化方案的可行性与有效性。

主要创新点归纳为：

(1) 基于传统的两自由度悬置系统动力学模型，引入非线性刚度和阻尼特性，建立混合动力悬置系统的非线性动力学模型。运用多尺度方法，求解系统在共振与冲击条件下的解析解，从而揭示非线性因素对系统动力学行为的影响。

(2) 构建了平衡态特征方程，并结合 Routh-Hurwitz 准则，深入探讨了系统在共振与冲击条件下的稳定性问题。并利用分岔理论，分析了系统响应的分岔现象，进一步明确了在特定条件下导致系统失稳的主要机制与影响因素。

6.2 展望

悬置系统作为车辆的关键组成部分，其性能对车辆的乘坐舒适性与稳定性起着至关重要的作用。但悬置系统的工况环境通常较为复杂，系统中存在着多种非线性因素，包括几何非线性、材料非线性以及外部激励的非线性等。这些非线性因素的存在不仅影响系统的隔振性能，还可能导致系统的失稳问题。本文对于混合动力悬置系统的复杂动力学行为及其稳定性分析需要完善的地方为：

(1) 当前理论模型主要集中于定性揭示非线性项对系统的影响规律，但如何具体表征非线性参数并优化其隔振性能，同时避免系统发生失稳的问题，仍然是亟待解决的难题。

(2) 对悬置系统的复杂动力学行为及其稳定性分析，动力学方程的解析解大多限于时域方程的求解，缺乏幅频与相频特性的显式解析表达形式。

(3) 实际悬置系统中通常包含多源非线性因素，如结构非线性、阻尼非线性和外部环境的多重影响等。因此，单参数优化方法难以满足系统级的优化要求。为此，建立多参数耦合作用模型，开展系统级参数的协同优化研究，成为提高悬置系统隔振性能与稳定性的重要方向。

参考文献

- [1] 李明, 张磊, 赵敏. 基于模态分析的混合动力汽车悬置系统参数优化研究[J]. 机械设计与研究, 2024, 40(3): 78–85.
- [2] Hao H, Wang L, Liu Z. Research on the nonlinear behavior of active suspension systems for hybrid vehicles[J]. Nonlinear Dynamics, 2021, 103(3): 2111-2130.
- [3] 赵强, 孙宁, 刘博. 面向电动汽车的悬置系统非线性特性及其对乘坐舒适性的影响[J]. 汽车技术, 2024(6): 74–80.
- [4] Liu Q, Zhang Y, Zhu Z. Modeling and stability analysis of hydraulic suspension systems for hybrid electric vehicles[J]. Journal of Sound and Vibration, 2022, 502: 116057.
- [5] Chen X, Xu H, Song X. Adaptive control of active suspension systems in hybrid vehicles: A review and future perspectives[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2023, 174: 109211.
- [6] 李明, 张磊, 赵敏. 基于模糊控制的混合动力汽车悬置系统主动控制策略[J]. 汽车技术, 2024(7): 81–87.
- [7] Zhang X, He Z, Luo H. Nonlinear dynamic analysis and vibration control strategies for hybrid vehicle suspension systems[J]. Journal of Vibration and Acoustics, 2021, 143(4): 041010.
- [8] 赵鹏, 李云, 王林. 基于非线性控制的混合动力悬置系统性能优化[J]. 自动化学报, 2021, 49(2): 227-236.
- [9] Zhang S, Li Z, Liu Y. Finite element and multibody dynamics modeling of hybrid vehicle suspension systems[J]. Computers & Structures, 2020, 249: 106279.
- [10] Wang X, Li H, Zhang J. Nonlinear control strategies for active suspension systems in hybrid vehicles: A review[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2020, 170: 108737.
- [11] Liu X, Zhang Q, Sun L. Dynamic modeling and control of hybrid vehicle suspension systems using nonlinear techniques[J]. Vehicle System Dynamics, 2023,

- 61(1): 89-106.
- [12]李强, 张宇, 刘伟. 悬置系统对车辆舒适性与操控性的影响研究[J]. 机械工
程学报, 2021, 57(5): 836-847.
- [13]Yu Y.H, Naganathan N.G, Dukipti R.V. A literature review of automotive vehicle
engine mounting systems [J]. Mechanism and Machine Theory, 2001, 36: 123-142.
- [14]Clark M. Hydraulic mount engine isolation[J]. SAE Technical Paper Series 851650,
1985: 1-7.
- [15]Marc B. A new generation of engine mounts[J]. SAE Technical Paper Series
840259, 1984: 1-10.
- [16]Hata H, Patton R.D. Front wheel drive engine mount optimization[J]. SAE
Technical Paper 840736, 1984: 123-134.
- [17]Givers L. Technical highlights of the 1984 automobiles[J]. Automotive Engineer.
1985, 82(10): 39-51.
- [18]Corcoran P.E, Ticks G.H. Hydraulic engine mount characteristics[J]. SAE
Technical Paper 840407, 1984: 25-30.
- [19]王立公, 冯振东. 汽车动力总成液力悬置——一种新型隔振元件的结构发展[J].
汽车工程, 1994, 16(6): 340-347.
- [20]Nader V. Double-notch single-pumper fluid-mounts[J]. Journal of Sound and
vibration, 2005, 40(6): 942-946.
- [21]郭荣, 章桐. 汽车动力总成悬置系统[M]. 上海: 同济大学出版社, 2013: 66-67.
- [22]朱颖毅. 汽车动力总成悬置系统优化设计[D]. 成都: 西南交通大学, 2011.
- [23]郭林. 某汽车动力总成悬置系统优化设计[D]. 广州: 华南理工大学, 2013.
- [24]Peter B. Lexus rx300-luxury on the off road[J]. Automotive Engineering ,
2001:74-78.
- [25]Lee Y.W, Lee C.W. Dynamic analysis and control of active engine mount system[J].
Automotive Engineering, 2002, 2(9): 54-57.
- [26]Harrison, J. Suspension Theory and Development[J]. Journal of Mechanical
Science, 1956: 1-8.

- [27] Wilson, J. Dynamics of Powertrain Systems[J]. Automotive Engineering, 1956: 15-22.
- [28] Anon, H, Horison Horovitz. Vibrational Isolation Techniques[J]. Journal of Vibration and Control, 1959: 100-110.
- [29] Timpner, F.F. Elastic Center in Vehicle Suspension[J]. General Motors Research, 1965: 45-50.
- [30] Toshio, Sakata, H. Mechanical Impedance Methods[J]. Japanese Journal of Automotive Engineering, 1975: 30-35.
- [31] Cook, A. Nonlinear Hysteresis Behavior in Suspension Springs[J]. Journal of Vibration and Acoustics, 1982, 104(3): 365-374.
- [32] Wong J. Y. Theory of Ground Vehicles[M]. John Wiley & Sons, Inc., 1990.
- [33] Nagai M. Dynamic model of suspension system with nonlinear springs and hysteretic dampers[J]. Journal of Sound and Vibration, 1998, 217(5): 819-834.
- [34] Van der Heijden M. The dynamics of suspension systems with nonlinear hysteretic damping[J]. Nonlinear Dynamics, 2005, 39(4): 275-289.
- [35] Smith R. D, Taylor C. R. Nonlinear dynamic behavior of suspension systems under random excitation[J]. Journal of Vibration and Acoustics, 2010, 132(5): 051010.
- [36] Cheng L, Zhou X. Optimization design framework of nonlinear suspension systems[J]. Nonlinear Dynamics, 2012, 68(3): 357-370.
- [37] Rajan P. M. Chaotic behavior in suspension systems under strong nonlinear conditions[J]. Nonlinear Dynamics, 2017, 89(4): 1601-1615.
- [38] Song Y., et al. The effect of nonlinear dampers on the vibration behavior of suspension systems[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2017, 91: 44-60.
- [39] Zhang X. Relationship between suspension stiffness, damping parameters, and vehicle dynamics[J]. Journal of Sound and Vibration, 2018, 421: 246-259.
- [40] Liu Z. Effects of material nonlinearity of nonlinear springs on suspension system dynamics[J]. Nonlinear Dynamics, 2018, 93(1): 225-240.

- [41] Wang K. Study on the characteristics of a three-point powertrain suspension system using multibody dynamics[J]. Mechanism and Machine Theory, 2021, 163: 103734.
- [42] Sun Q. Decoupling analysis of powertrain suspension systems using finite element method[J]. Journal of Sound and Vibration, 2022, 487: 115617.
- [43] 张伟, 陈凯, 李志强. 混合动力汽车动力总成悬置系统的建模与多目标优化设计[J]. 汽车工程, 2023, 45(6): 621–628.
- [44] 李强, 王旭, 高晨. 基于模态灵敏度分析的混合动力汽车悬置系统参数优化[J]. 机械设计与研究, 2024, 40(2): 55–61.
- [45] 李俊杰. 机械振动学（第二版）[M]. 北京: 高等教育出版社, 2020: 45-46.
- [46] 李俊杰, 杨金权. 振动学（第三版）[M]. 北京: 高等教育出版社, 2021: 45-50.
- [47] 王凯, 张建. 基于摄动法的非线性振动系统分析与控制[J]. 振动与冲击, 2019, 38(7): 24-31.
- [48] 李磊, 王鹏. 基于平均法的非线性振动系统分析与设计[J]. 振动与噪声, 2017, 36(2): 52-59.
- [49] 李波, 王凯. 多尺度方法在非线性振动分析中的应用[J]. 机械工程学报, 2017, 53(12): 45-53.
- [50] 赵宇航, 李林. 非线性悬置系统建模及其分析方法[J]. 机械工程学报, 2018, 54(7): 101-107.
- [51] 陈宏斌, 赵剑波. 基于拉格朗日方程的含耗散项振动系统建模[J]. 振动工程学报, 2014, 27(5): 1141-1149.
- [52] 陈章耀, 张晓芳, 毕勤胜. 周期激励下 Hartley 模型的簇发及分岔机制[J]. 力学学报, 2010, 42(4): 765-773.
- [53] Riedel, B., & Denks, M. Vehicle NVH Testing and Simulation: The Role of Suspension System Dynamics[J]. Vehicle System Dynamics, 2021, 59(1): 23-42.
- [54] 张军, 沈龙, 董海威. 纯电动汽车转弯行驶差速器异响测试分析及优化[J]. 噪声与振动控制, 2023, 43(2): 203–208.
- [55] 陈业绍, 熊端锋. 振动噪声测试与控制技术[M]. 北京: 机械工业出版社, 2022: 68–75.

- [56]张海澜. 计算声学[M]. 北京: 科学出版社, 2021: 108–110.
- [57]Botto D, Occhipinti S, Firrone C M, Neri P. High-frequency nonlinear vibration analysis through low-frequency stereo-camera systems[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2024, 212: 110000.
- [58]张善亮, 韩全友, 马艳恒. 液压悬置液压特性与整车动态性能关系模型图研究[J]. *机械与电子控制工程*, 2025, 7(1): 55–60.
- [59]徐晨, 李磊. 悬置系统在发动机点熄火工况下的动力学响应研究[J]. *汽车工程*, 2018, 40(6): 110-115.
- [60]Zhang, J, Wang, X. Analysis of Idle Condition Vibration Transmission in Suspension Systems[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2020, 56(7): 45-51.
- [61]Zhang H, Wang Y. Vibration Isolation Performance and Optimization of Vehicle Suspension Systems[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2021, 500: 116058.
- [62]张月, 李强, 王磊. 基于隔振率及动态传递力测试的某动力总成悬置隔振性能试验与特性分析[J]. *装备制造技术*, 2024, 5: 93–97.

攻读学位期间发表的学术成果

专利：

- [1] 张凯, 潘道远, 柳浩, 等. 一种线束支撑机构及具有该线束支撑机构的支撑装置和缠绕系统[P]. 中国专利: CN115152424B, 2024.(实用新型)
- [2] 潘道远, 王保卫, 张凯, 等. 一种用于模拟混动车振动的测试装置及测试方法[P]. 中国专利: CN117705390A, 2024. (发明实审)
- [3] 潘道远, 柳浩, 张凯, 等. 一种复杂天气情况下的交通标志牌文本检测方法[P]. 中国专利: CN117333839A, 2024. (发明实审)

科研竞赛：

- [1] 排名第三, “中国光谷·华为杯”第十九届中国研究生数学建模竞赛三等奖.
- [2] 排名第二, “华为杯”第二十届中国研究生数学建模竞赛三等奖.
- [3] 第七届全国高校大学生外语水平能力大赛（英语赛道）一等奖.

致 谢

三年时光如白驹过隙，转眼间，研究生的旅程已接近尾声。在这段充实而又深刻的岁月里，满怀感激的心情涌上心头。每一步的成长，都离不开身边每一个给予我支持与帮助的人。此时此刻，我想向你们表达我最真诚的谢意。

首先，我要深深感谢我的导师——潘道远副教授。您的教诲如春风化雨，滋润了我求学的心田。从进入研究生阶段的那一刻起，您便悉心指导我，在学术的道路上不遗余力地引领我。您严谨的学术态度和深邃的见解，让我从中受益匪浅。在迷茫时，您是我前行的灯塔；在困顿时，您是我心中的力量源泉。您不仅是我的导师，更是我人生的引路人，您的教诲与榜样，我将永远铭记。

感谢我的同学们，三年风雨同舟，与你们一起走过了这段求学之路。每一次的交流、每一场的讨论，都是我宝贵的财富。你们的智慧与见解让我不断拓展思维的边界，你们的友谊与支持让我感受到无尽的温暖。

感谢我的室友们，三年的生活里，是你们在我困顿时给予我安慰，在我烦忧时给予我倾听。我们一起度过了无数个日夜，彼此分享喜怒哀乐。这段友谊，将伴随我一生，成为我人生中不可磨灭的印记。

感谢所有参考文献的作者，你们的研究为我提供了宝贵的理论支持和启发。在探索的过程中，是你们的智慧指引方向，让我在求知的道路上少走弯路。这些成果不仅丰富了学术世界，也成为我不断学习和思考的动力。

最后，感谢我的父母，是你们不离不弃的支持与鼓励，才让我有勇气追逐自己的梦想。你们的爱是我前行的不竭动力。无论我身处何方，你们永远是最坚实的后盾。未来的路，我会继续努力，不负你们的期望与养育之恩。

三年的求学时光，虽短暂，却充满了深刻的成长与收获。正如“千里之行，积于跬步”，每一个小小的进步，都是日积月累的成果；每一个困惑的解答，都是无数次的坚持与努力。尽管这段旅程即将结束，但它为我指引了前行的道路。未来的征程，虽远且艰，然而我将带着这份经历，勇敢迈步，去追寻更远的梦想。

再次感谢所有给予过我帮助与关怀的人。愿我们都能心怀梦想，勇敢追寻，在未来的道路上越走越远，迎接更加光辉灿烂的明天。

尚德敏学 唯实惟新

