

分类号: O322

密 级: 公开

学校代码: 10363

学 号: 2220120111



安徽工程大学

Anhui Polytechnic University

硕士学位论文

题目 输送两相流纤维增强管道振动
的非线性行为研究

论文作者 汪羽翔

指导教师 唐冶(副教授)

学科(专业) 机械工程

研究方向 机械系统动力学

论文提交日期: 2025 年 5 月 20 日

分类号: O322

学校代码: 10363

密 级: 公开

学 号: 2210120111

输送两相流纤维增强管道振动的非线性行为研究

Research on Nonlinear Behavior of Fiber Reinforced
Pipe Vibration Conveying Two-Phase Flow

学生姓名: 汪羽翔

指导教师: 唐冶 (副教授)

专 业: 机械工程

研究方向: 机械系统动力学

论文答辩时间: 2025 年 5 月 13 日

安徽工程大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：我恪守学术道德，崇尚严谨学风。所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已明确注明和引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品及成果的内容。论文为本人亲自撰写，我对所写的内容负责，并完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

学位论文作者签名：汪羽翔

日期：2025 年 5 月 17 日

安徽工程大学学位论文版权使用授权书

学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅或借阅。本人授权安徽工程大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保密 ☐，在 年解密后适用本版权书。

本学位论文属于

不保密 ☒。

学位论文作者签名：汪羽翔

指导老师签名：康冶

日期：2025 年 5 月 17 日

日期：2025 年 5 月 17 日

输送两相流纤维增强管道振动的非线性行为研究

摘 要

管道因其连续性好、效率高等优点被广泛用于石油和天然气资源的输送中,但这种两相流体混合的输送条件可能会导致更复杂的力学行为。为了避免管道输送两相流体过程中产生的不良振动,本文对输送两相流纤维增强管道振动的非线性动力学行为进行了研究。研究的主要内容有:

首先提出了使用纤维增强复合材料(Fiber-reinforced Composite, 简称 FRC)构建输送固液两相流体的管道,以改善力学环境,并研究了非线性振动和屈曲行为。利用哈密顿原理,建立了控制所提出的管道模型的非线性动力学方程。采用同伦分析方法求解非线性振动行为的控制方程。通过数值模拟揭示了液相速度、滑移率、液相和固相体积系数对屈曲行为的影响。值得注意的是,非线性自由振动受到纤维取向角等材料参数的显著影响,这表明可以通过采用纤维增强材料来调整输流体管道的力学环境。

随后对使用纤维增强复合材料构建输送气液两相流的三维管道进行了全面的研究。基于欧拉-伯努利梁理论,采用哈密顿变分原理建立了管道在外部激励下的三维控制方程。利用 Galerkin 截断法对变量进行离散化,得到系统运动的常微分方程。使用谐波平衡法(Harmonic

Balance Method, 简称 HBM) 结合伪弧长扩展方法获得了频率响应特性。深入研究了纤维取向角、阻尼系数、液相体积系数、液相和外部激励幅值等参数对纤维增强复合管道频率响应的影响。将该方法得到的结果与龙格-库塔法获得的响应曲线进行了对比, 验证了分析方法的准确性。利用全局分岔图结合相图、庞加莱图等进一步预测了管道的非线性动力学演化, 包括分岔和混沌, 为输送两相流的管道设计提供了重要参考。

最后研究了纤维增强复合输流管道系统的非线性涡激振动 (Vortex-induced Vibration, 简称 VIV)。利用哈密顿原理, 得到了输送石油和天然气的纤维增强管道涡激振动的动力学控制方程。应用 Galerkin 截断法将控制方程从偏微分方程离散为一组常微分方程, 并使用龙格-库塔方法获得数值解。通过与有限元结果进行比较, 验证了理论模型的准确性。数值结果揭示了内外速度对管道后屈曲行为的影响。研究发现, 固有频率和最大响应位移与两相流的参数有关。在超临界状态下, 轴向张力对管道的涡激振动响应有显著影响, 这意味着可以通过改变张力幅值来控制管道的最大响应位移。

关键词: 简支输流管道, 非线性动力学, 两相流, 后屈曲行为, 非线性涡激振动

RESEARCH ON NONLINEAR BEHAVIOR OF FIBER REINFORCED PIPE VIBRATION CONVEYING TWO- PHASE FLOW

ABSTRACT

Pipelines are extensively utilized for transporting petroleum and natural gas resources owing to their operational continuity and high efficiency. However, the multiphase flow conditions may induce more complex mechanical behaviors. To mitigate detrimental vibrations during two-phase fluid transportation, this dissertation investigates the nonlinear dynamic characteristics of fiber-reinforced pipeline systems under two-phase flow conditions. The principal research components are as follows:

First, fiber-reinforced composite (FRC) materials were proposed for constructing pipelines conveying solid-liquid two-phase flows to improve mechanical performance, with particular focus on nonlinear vibration and buckling behaviors. The governing nonlinear dynamic equations for the proposed pipeline model were formulated using Hamilton's principle. The homotopy analysis method (HAM) was employed to solve the nonlinear vibration equations. Numerical simulations elucidated the effects of liquid-phase velocity, slip ratio, and volume fractions of both liquid and solid phases on buckling behavior. Notably, nonlinear free vibration exhibited

significant dependence on material parameters, particularly the fiber orientation angle, demonstrating that FRC materials can effectively modulate the mechanical environment of fluid-conveying pipelines.

Subsequently, a comprehensive investigation was conducted on three-dimensional FRC pipelines transporting gas-liquid two-phase flows. Based on Euler-Bernoulli beam theory, the three-dimensional governing equations under external excitation were established through Hamiltonian variational principles. The Galerkin truncation method was applied for variable discretization, yielding a system of ordinary differential equations governing the motion. Frequency response characteristics were obtained using the harmonic balance method (HBM) coupled with pseudo-arc-length continuation. Parametric studies examined the influence of fiber orientation angle, damping coefficient, liquid volume fraction, and external excitation amplitude on the frequency response characteristics. The analytical results showed excellent agreement with numerical solutions obtained via the Runge-Kutta method, validating the proposed methodology. Furthermore, global bifurcation diagrams complemented by phase portraits and Poincaré maps were employed to predict nonlinear dynamic evolution, including bifurcation and chaotic phenomena, providing critical insights for two-phase flow pipeline design.

Finally, the nonlinear vortex-induced vibration (VIV) of FRC pipelines conveying petroleum and natural gas was investigated. The governing equations for VIV dynamics were derived using Hamilton's principle and discretized into a system of ordinary differential equations via the Galerkin method, with numerical solutions obtained through Runge-Kutta integration. The theoretical model was verified against finite element analysis results. Numerical simulations revealed the effects of internal and external flow velocities on post-buckling behavior. The natural

frequency and maximum displacement response were found to be strongly correlated with two-phase flow parameters. In the supercritical regime, axial tension exerted substantial influence on VIV response characteristics, suggesting that pipeline displacement can be effectively controlled through tension modulation.

KEY WORDS: Simplified supported fluid-conveying pipe, nonlinear dynamics, two-phase flow, post-buckling behavior, nonlinear vortex-induced vibration

目录

摘 要.....	I
ABSTRACT.....	III
目录.....	VI
插图清单.....	VIII
插表清单.....	XII
第 1 章 绪论.....	1
1.1 研究背景	1
1.2 输流管道振动国内外研究现状	2
1.3 纤维增强材料管道研究现状	3
1.4 输送两相流管道研究现状	5
1.5 输流管道振动控制研究现状	6
1.6 论文研究意义与内容	8
1.7 本章小结	9
第 2 章 输送两相流纤维增强复合管道自由振动模型与后屈曲行为分析.....	10
2.1 管道模型	10
2.2 管道控制方程	11
2.3 后屈曲行为分析	14
2.4 纤维增强材料复合管道的非线性振动	19
2.5 本章小结	29
第 3 章 输送两相流纤维增强复合管道的建模与非线性受迫振动分析.....	31
3.1 管道模型	31
3.2 管道控制方程	32
3.3 谐波平衡法	36
3.4 非线性振动分岔分析	38
3.5 本章小结	53

第 4 章 输送两相流纤维增强复合管道模型与非线性涡激振动分析.....	55
4.1 管道模型	55
4.2 管道控制方程	56
4.3 伽辽金法	62
4.4 非线性涡激振动分析	70
4.5 本章小结	80
第 5 章 总结和展望.....	82
5.1 总结	82
5.2 展望	83
参考文献.....	84
附录 1.....	93
攻读学位期间发表的学术论文目录.....	94
致谢.....	95

插图清单

图 1-1 管道在海洋工程中的应用	1
图 1-2 纤维增强复合材料示意图	4
图 2-1 输送两相流纤维增强复合管道的模型示意图	11
图 2-2 复合材料管屈曲行为随液相流速变化的分岔图	16
图 2-3 复合材料管屈曲行为随滑移率变化的分岔图	16
图 2-4 复合材料管屈曲行为随液相体积比变化的分岔图	17
图 2-5 复合材料管屈曲行为随轴向张力变化的分岔图	17
图 2-6 液相临界流速随纤维取向角的变化图	18
图 2-7 液相临界流速随滑移率的变化图	18
图 2-8 不同纤维取向角下复合管非线性固有频率与初始幅值的关系图	22
图 2-9 不同纤维取向角下复合管非线性固有频率与液相流速的关系图	22
图 2-10 不同纤维取向角下复合管非线性固有频率与液相密度的关系图	23
图 2-11 不同纤维取向角下复合管非线性固有频率与固相密度的关系图	23
图 2-12 不同纤维取向角度下复合管的非线性固有频率随滑移率的变化图	24
图 2-13 不同纤维取向角度下复合管的非线性固有频率随管长的变化图	24
图 2-14 不同纤维取向角度下复合管非线性固有频率随管道内径的变化图	25
图 2-15 不同纤维取向角度下复合管非线性固有频率随管道外径的变化图	25
图 2-16 复合管非线性固有频率随纤维取向角的变化图	26
图 2-17 不同的液相流速下, 管道中点位置的应力随时间的变化图	27
图 2-18 不同的液体流速下管道稳态振幅随时间的变化图	28
图 2-19 解析法与数值法对复合管无量纲振幅的比较图	28
图 2-20 本研究得到的复合管无量纲振幅与 Khodabakhsh 等的结果比较图	29
图 3-1 输送两相流纤维增强复合管道的模型示意图	32
图 3-2 由解析法和龙格-库塔法确定的系统幅频响应的比较图	39
图 3-3 液相速度对输送两相流体的 FRC 管道幅频响应的影响	40
图 3-4 阻尼系数对输送两相流体的 FRC 管道幅频响应的影响	40
图 3-5 激励振幅对输送两相流体的 FRC 管道幅频响应的影响	41

图 3-6 纤维取向角对输送两相流体的 FRC 管道幅频响应的影响.....	41
图 3-7 液相体积系数对输送两相流体的 FRC 管道幅频响应的影响.....	42
图 3-8 系统响应随 $\tilde{v}_l$ 变化的分岔图.....	43
图 3-9 $\tilde{v}_l = 0.1$ 下系统的动力学行为.....	43
图 3-10 $\tilde{v}_l = 0.5$ 下系统的动力学行为.....	44
图 3-11 $\tilde{v}_l = 1$ 下系统的动力学行为.....	44
图 3-12 $\tilde{v}_l = 1.5$ 下系统的动力学行为.....	45
图 3-13 $\tilde{v}_l = 1.8$ 下系统的动力学行为.....	45
图 3-14 $\tilde{v}_l = 2.4$ 下系统的动力学行为.....	46
图 3-15 系统响应随 $\tilde{Q}_l$ 变化的分岔图.....	46
图 3-16 $\tilde{Q}_l = 0.1$ 下系统的动力学行为.....	47
图 3-17 $\tilde{Q}_l = 0.5$ 下系统的动力学行为.....	47
图 3-18 $\tilde{Q}_l = 0.9$ 下系统的动力学行为.....	48
图 3-19 系统响应随 f_y 变化的分岔图.....	49
图 3-20 $f_y = 0.1$ 下系统的动力学行为.....	49
图 3-21 $f_y = 0.25$ 下系统的动力学行为.....	50
图 3-22 $f_y = 0.6$ 下系统的动力学行为.....	50
图 3-23 $f_y = 0.9$ 下系统的动力学行为.....	51
图 3-24 系统响应随 $\bar{g}$ 变化的分岔图.....	51
图 3-25 $\bar{g} = \pi/3$ 下系统的动力学行为.....	52
图 3-26 $\bar{g} = 7\pi/6$ 下系统的动力学行为.....	52
图 3-27 $\bar{g} = 3\pi/2$ 下系统的动力学行为.....	53

图 4-1 输送两相流纤维增强复合管道的模型示意图	56
图 4-2 复合管的固有频率随液相流速变化图	64
图 4-3 液体临界流速与轴向张力之间的关系图	64
图 4-4 FRC 管和纯金属管受到的应力响应比较图.....	64
图 4-5 FRC 和纯金属管的位移响应分岔图的比较图.....	65
图 4-6 当前工作和已发表的结果确定的后屈曲频率的变化比较图	65
图 4-7 输送气液两相流纤维增强管的有限元模型	66
图 4-8 用解析方法和有限元方法获得的复合材料管道固有频率的比较图	66
图 4-9 通过本方法和有限元方法获得的复合材料管的位移比较图	67
图 4-10 六阶截断下处于超临界状态管道的分岔图	69
图 4-11 复合管响应位移随截断模态数的变化图	69
图 4-12 屈曲平面和外流平面之间的空间关系图	70
图 4-13 复合管屈曲平衡位移随滑移率的变化图	71
图 4-14 复合管屈曲平衡位移随液相体积系数的变化图	71
图 4-15 不同滑移率 β 下复合管的固有频率变化图	72
图 4-16 不同液相体积系数 $\bar{Q}_l$ 下复合管的固有频率变化图.....	72
图 4-17 不同角度 θ 下复合管固有频率的变化	73
图 4-18 不同轴向力 $\hat{p}$ 下复合管道的固有频率变化	73
图 4-19 管道不同位置的最大响应幅值相对于外部流速的变化图	73
图 4-20 不同滑移率下最大响应幅值相对于外部流速的变化图	74
图 4-21 不同液相体积系数下最大响应幅值相对于外部流速的变化图	74
图 4-22 不同滑移率下, 管道任意一点在两个方向上的位移包络图	75
图 4-23 不同液相体积比下, 管道任意一点在两个方向上的位移包络图	75
图 4-24 在不同的轴向张力和外部流速下, 管道任意点处在两个方向上的位移包络图.....	76
图 4-25 不同轴向力和外部流速下两个方向上最大响应幅值的变化图	77
图 4-26 不同外流速下, 超临界状态下管道位置 $\xi = 0.375$ 处的响应位移分岔图 .	78
图 4-27 不同轴向力和液相速度下管道在 $\xi = 0.375$ 位置处两个方向上最大响应幅	

值的变化图	79
图 4-28 管道 $\xi = 0.375$ 位置处的最大响应幅值与张力幅值之间的关系图	80

插表清单

表 3-1 FRC 管的尺寸和材料特性.....	39
--------------------------	----

第 1 章 绪论

1.1 研究背景

作为现代社会不可或缺的能源载体,传统化石能源在推动经济增长和促进社会文明进程中发挥着关键作用。其中,管道运输凭借其独特的优势,包括高效的输送能力和稳定的运行特性,已成为油气资源调配的主要方式。这种运输方式不仅确保了能源供给的持续性,也为能源产业的可持续发展提供了有力保障。由于工作环境的不同,管道在应用中常常会受到不同种类的激励。在这种情况下,意外的振荡可能会导致管道结构的失效或破坏。减小这些有害振动和噪声可以有效提高其安全性、可靠性和使用寿命。输流管道结构不仅被广泛应用于海洋和核工程等各种工程领域,还应用于化学工业等许多工业领域^[1]。



图 1-1 管道在海洋工程中的应用

流体输送管道系统在工程实践中具有普遍的应用价值,其运行环境日趋严苛,对系统性能指标提出了更高标准。输流管道的不良振动在工程中会带来巨大的影响,严重时会导致巨大灾害的发生。以核电站为例,多个互连管道系统其中之一发生故障可能会导致整个管道系统的损坏,这极易发生辐射泄漏和扩散等重大事故。深入探究管道结构的动力学特性及其振动产生机理,进而研发先进的振动抑制方法,已成为当前工程领域亟待解决的重要课题。这一研究方向不仅具有理论价值,更能为提升管道系统的安全性和可靠性提供技术支撑。

与输送单相流的管道相比,对输送多相流的管道的研究较少。然而,在工程应用中,受到成本的限制,管道通常输送各种相流的混合物,包括天然气、石油、水等。

1.2 输流管道振动国内外研究现状

研究输流管道的振动特性的最终目的是实现对输流管道振动的控制, 工程实践中, 管道系统常见的振动类型包括自由振动、自激振动、参激振动和强迫振动。而管道的材料, 结构尺寸, 工况等各有不同, 管道与管道内部流体之间的流固耦合行为难以识别, 一定程度上让管道的振动难以分析。如 Tang 等^[6]发表的综述论文所示, 在现代能源输送系统发展背景下, 输流管道流固耦合作用下的声振控制问题已成为国际机械工程领域的研究焦点。Noah 和 Hopkins^[7]利用 Floquet 理论研究了在稳定和脉动流动的情况下, 支撑柔性对流体输送管道动力学的影响。Rong 等人^[8]将绝对节点坐标理论与传递矩阵法相融合, 对悬臂管道在流体作用下的临界速度等非线性动力学特性进行了数值模拟研究。Chang 等人^[9]采用多尺度分析方法, 深入探讨了碳纳米增强复合材料管道在输送流体过程中的稳定性问题及其非线性振动行为特征。Bahaadiniet 等人^[10]借助扩展的 Galerkin 方法, 对基于在线平移和旋转弹簧的自由端支撑的复合薄壁悬臂管的稳定性分析进行了研究。Arabjamaloei 等人^[11]重点探讨了压电功能层在湿热耦合场中对旋转复合材料叶片振动特性的影响, 特别是尖端质量效应的影响规律。Khodabakhsh 等人^[12]借助同伦分析方法, 研究了方形、水平和垂直矩形三个横截面的流体输送管道的非线性振动。基于 Love 薄壳理论的第一近似假设, Bahaadini 等人^[13]采用广义微分求积法对壳体结构的运动控制方程进行求解, 成功获得了壳体固有频率的精确解。Khodabakhsh 等人^[14]应用 Von Karman 非线性应变和 Hamilton 原理, 研究了在三种边界条件下输送流体的多孔功能梯度管的非线性稳定性分析。Sabahi 等人^[15]借助同伦分析方法, 得到了功能梯度多孔微管输送流体的非线性频率、临界流体速度和阻尼时间响应的闭合形式表达式。Yan 等人^[16]利用扩展的哈密顿原理建立了长度随时间变化的滑动流体输送管道的控制方程, 并进行了非线性分析以研究动态响应。Nguyen 等人^[17]利用范德瓦尔斯方程探索了有限长度旋转直管在热力学流动中至关重要的单相流体下的稳态响应。Tang 和 Yang^[18]深入分析了功能梯度材料管道的后屈曲特性, 并建立了输送流体复合管道的非线性振动理论模型。Wei 等人^[19]关注于非线性支撑条件下粘弹性流体输送管道的力学响应特性, 揭示了其非线性受力机制。周坤等^[20]创新性地将绝对节点坐标法与数值求

解技术相结合,系统研究了铝-钢与钢-铝周期性复合悬臂输流管道的稳定性特征及其非线性动力学行为。田晓洁等^[21]运用 ANSYS 有限元分析平台,对气液两相流海洋立管进行了系统的模态分析与动力学特性研究,其研究结果证实了边界条件等因素对管道固有频率和振动模态具有显著影响。

Zanganeh 和 Srinil^[22]使用时空有限差分技术研究了长距离高度非线性、柔性圆柱形模型的涡激振动响应。此外, Ji 等人^[23]利用混合半解析方法结合有限元技术,发表了一项关于裂纹和流体相关参数对输送流体的裂纹管道动态响应影响的研究。Nayfeh 和 Emam^[24]为后屈曲配置中具有各种边界条件的梁的动力学方程开发了一个精确的解。Jiang 等人^[25]利用伽辽金方法和四阶龙格-库塔方法研究了内部和外部流动的影响分析不同内外流速下立管的动态行为。Facchinetti 等人^[26]创新性地运用 van der Pol 振动方程建立了涡旋脱落波动特性的理论模型。他们研究了管道在这些振动下的动态行为,验证了新的线性惯性耦合在定量描述二维涡激振动主要特征方面的有效性。Wang 等人^[27]考虑了结构和流体之间的耦合关系。他们使用伽辽金技术提供了受漩涡激励影响的柔性管道输送流体的降阶模型。Dai 等人^[28]利用第四模态伽辽金方法离散了输送流体的铰接管道的耦合方程。他们通过系统的数值模拟,深入探讨了亚临界与超临界两种流动状态下,结构位移幅值随外部流体速度变化的响应规律。近年来,输流管道系统的非线性动力学特性已成为学术界关注的热点问题,众多研究者从不同角度对这一复杂系统的动力学行为进行了深入探索,取得了丰硕的研究成果^[29]。迄今为止,多种方法被用于流固耦合动力学行为的研究中,包括有限元算法^[35]、均相分析法^[36]和谱元算法^[37]。基于上述方法,研究了一些有意义的动力学现象,如颤振^[38]和屈曲^[39]。

1.3 纤维增强材料管道研究现状

复合材料是通过将两种或多种性质各异的原材料,采用物理或化学手段在宏观尺度上进行复合而形成的新型功能材料。这类材料通常包含两个基本组成部分:增强相和基体相。其中,以纤维作为增强相的复合材料体系被定义为纤维增强型复合材料,这类材料展现出优异的综合性能。从力学性能角度来看,纤维增强复合材料具有突出的比强度特性;在刚度方面,其比刚度表现优异;此外,这类材料还具备卓越的耐化学腐蚀性能以及出色的抗疲劳特性。其综合性能指标已全面

超越单一材质构件。

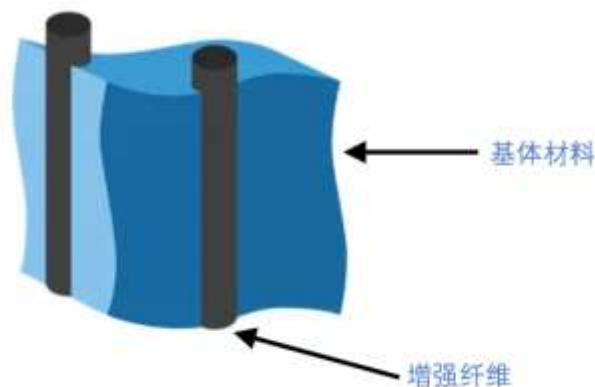


图 1-2 纤维增强复合材料示意图

近年来,海洋工程、核工程和石油工业对管道材料的几何和物理性能都有很高的要求。因此,纤维增强复合材料因其高刚度^[40]和耐腐蚀性^[41]等优异性能,在工程和工业中得到了广泛的应用。纤维增强材料已被广泛应用于各种工程结构中,如壳体^[42]、梁^[44]和板^[46]。近年来,学术界在复合材料结构的力学性能研究领域取得了显著进展。在静态力学特性研究方面,学者们通过理论分析和实验验证,深入探讨了复合材料的应力-应变关系、强度特性以及变形机制。同时,在动态力学行为研究领域,研究人员重点关注了复合材料结构的振动特性、冲击响应以及疲劳损伤演化规律,这些研究成果为复合材料的结构设计和工程应用提供了重要的理论支撑。Guo 等人^[48]利用 Kelvin-Voigt 模型进行参数研究,以估算在临界状态下受到简单支撑的具有不同纤维取向角的管道的动态行为。为了弥补多尺度方法的缺陷,Li 和 Zhu^[49]改进了多尺度方法,以探索表面有裂纹的纤维增强材料缠绕的管道的动态特性,并给出了裂纹与系统稳定性之间的关系。Shen 等人^[50]基于两步摄动法结合高阶剪切变形理论,对压电纤维增强复合材料混合层合梁的热后屈曲行为进行了研究。考虑到粘弹性地基的影响,Fan 等人^[51] 基于改进的 Halpin-Tsai 理论模型,综合考虑粘弹性地基效应,系统分析了温度场等物理参数对功能梯度石墨烯增强复合板热动力响应特性的影响规律。借助奇异摄动技术和两步摄动方法,Shen 和 Xiang^[52] 创新性地将奇异摄动理论与两步摄动法相结合,建立了石墨烯增强复合材料层压圆柱壳的热屈曲理论模型,揭示了其在热环境中的屈曲及后屈曲演化机制。考虑到 von Karman 非线性,Zhou 等人^[53]利用 Kelvin Voigt

模型建立了弹性边界条件下复合材料管的动态模型,揭示了非线性振动特性。根据纤维增强材料沿梁厚度方向均匀分布的假设,Shen 和 Yang^[54]详细研究了施加电压和温度变化等物理参数对梁振动特性的影响。Li 和 Shen^[55] 基于高阶剪切变形理论框架,运用奇异摄动方法对复合材料圆柱壳的后屈曲平衡路径进行了理论推导和数值求解,为相关结构设计提供了理论依据。

1.4 输送两相流管道研究现状

多相流动系统是指同时包含两种或多种物质相的流动体系,其中至少存在一个流体相。如今,流体输送管不仅被应用于海洋、核工程等各个工程领域,而且还应用于化工等许多工业领域。在目前众多的多相流研究中,以油气为代表的气液两相流研究较多。在工程实践领域,气-液两相流动体系具有重要的应用价值,尤其是在深海油气资源开发过程中发挥着关键作用。除气液两相流外,固液两相流动体系在工程应用中也占据同等重要的地位,典型的应用场景包括深海矿产资源开发中的固-液两相管道输送系统。然而,与单相流动体系相比,学术界对多相流动系统的研究相对不足,相关理论体系仍需进一步完善。然而,在工程应用中,管道通常输送各种相流的混合物,包括天然气、石油、水等。Monette 和 Pettigrew^[56]借助一系列实验结果,揭示了在两相内部流动的作用下出现的流体弹性不稳定现象。Montoya Hernandez 等人^[57]利用一种数值算法来评估刚性垂直生产纤维复合材料立管在内部多相流作用下的振动行为。An 和 Su^[58] 创新性地将横向振动理论与广义积分变换方法相结合,建立了气液两相流输送管道的动力学模型,系统分析了其动态响应特性。Li 等^[59]应用广义积分变换技术建立了输送两相流的管道模型,并研究了阻尼比对管道动态性能的影响。Jiang 等人^[60]借助伽辽金方法和龙格-库塔算法,讨论了流体弹性失稳出现后,在间隙约束下输送两相流的悬臂管的动态行为。Guo 等人^[61]考虑到两相流和热效应的影响,提出了悬臂式管中管系统的模型,并提供了物理因素对稳定性和动态行为的影响。Liu 等人^[62] 重点考察了简支边界条件下气液两相流输送管道的振动特性,通过理论推导和数值计算,获得了系统的固有频率参数,并对其动态行为特征进行了定量评估。Ebrahimi-Mamaghani 等人^[63] 基于多种两相流理论模型,引入滑移率矢量构建了管道的动力学控制方程,并采用伽辽金离散化方法和特征值求解技术,深入研究

了系统的线性振动频率特性。Azevedo 等人^[65]基于非线性稳定性分析,获得了输送两相流的管道上升管的朗道方程,推导了受极限环约束的饱和振幅,并确定了液体后退的冲击条件。Adegoke 等人^[66]对受波浪激励作用的单个混合立管进行了分析,发现横向和纵向响应在某些固有频率下相互耦合。Yang 等人^[67]利用范德波尔方程来评估外部流动与管道本身之间的相互作用。Oyelade 等人^[68]借助欧拉-伯努利理论,推导了受正常载荷作用的微弯曲的张紧管的动力学方程,以探索其动态稳定性。Ma 和 Srinil^[70]对输送段塞气液流的长柔性立管的动态行为进行了数值研究,并研究了段塞流特性的力学影响。Miwa 等人^[71]在广泛而全面的文献调查的帮助下,总结了流致振动研究的历史背景,并回顾了过去在两相流领域的研究。

通过对流体输送管道研究现状的分析可以发现,相较于单相流动体系的研究深度和广度,多相流动系统的理论研究仍显不足。然而,在实际工程应用中,两相流动现象普遍存在,特别是在石油化工、能源输送等领域,两相流动问题往往对系统的安全性和稳定性产生重要影响。例如,用于深海采矿的矿石管道的内部介质是两相固液混合的,其中矿物和水混合在一起。此外,在化工生产中的流化床和核工程中的快堆燃料组件中也出现了两相固液流动。基于上述工程背景,应对结构设计的定量和定性标准进行一些研究,以避免因结构振动导致的管道破裂、连接件脱落、密封失效等问题。

1.5 输流管道振动控制研究现状

研究输流管道振动特性,最终是为了能够对输流管道的振动实施有效控制。通过这种控制,能够削减管道的振动幅值,优化其工作时的动力学环境,进而提升机械系统运行的可靠性。当下,振动控制技术大体上可分为主动控制、半主动控制与被动控制这三大类别。其中,传统的被动控制涵盖了吸振、隔振以及阻尼减振等方式。然而,线性调谐质量吸振器的作用频带窄,阻尼减振主要针对中高频能量耗散,基于压电材料的主动控制技术安装和调试过程复杂。输流管道有着广泛的应用,而且其工作环境日益复杂,这对输流管道的性能也提出了更高的要求。而输流管道的不良振动在工程中会带来巨大的影响,严重时会导致巨大灾害的发生。

Tang 等人^[72]提出了一种创新性的设计,把非线性能量阱(Nonlinear energy sink, NES)与压电元件进行了有机融合,专门针对输送流体的三维功能梯度管道,形成了振动控制及其能量利用的一体化方案。Zhou 等人^[73]开创性地设计出一种被动控制方法,用于深入剖析管道减振的具体效果。经研究发现,在管道减振过程中出现的三个抑制区,其变化情况与管道自身动态特性存在紧密联系。Mamaghani 和 Khadem^[74]着眼于外部谐波载荷作用下的固定流量管道减振难题,开发出一种特殊的平滑 NES,以此实现对管道振动的有效抑制。Duan 等人^[75]聚焦于高亚临界流速下流动管道的减振场景,他们设计的惯性增强型非线性能量阱,能够对管道的振动进行有效地控制。Philip 等人^[76]研究了具有几何非线性阻尼的 NES 对减振的影响,通过频域 Hopf 分岔分析分析了非线性阻尼对分岔边界的影响。Yang 等人^[77]将非线性能量吸收器与负刚度元件相结合,创建了一种增强的 NES 结构,实现了低阈值、高鲁棒性和高能量耗散。Chang 等人^[78]研究了带有能量阱的悬臂式流体输送管道的稳定性和非线性振动特性,表明管道系统中的物理因素显著影响临界流速。Yang 等人^[79]开发了一种二维惯性增强 NES 来抑制多向低频振动,展示了优于传统 NES 的隔离能力,并为设计低频、多向隔振器提供了见解。

通过对输流管道振动被动控制的研究综述可知,被动控制技术凭借其结构简单、无需外部能源供给的特点,在抑制高频振动方面展现出显著优势,因而在工程实践中得到了广泛应用。然而,该技术在低频振动控制领域的效果较为有限。为拓展振动控制的频率范围,研究人员逐渐将注意力转向主动控制技术的研究与应用。在相关研究中,Chen 等人^[80]针对硬磁软质材料构成的输流管道进行了深入研究,系统分析了其稳定性、静态变形特性及非线性振动行为。研究发现,管道系统存在一个临界流速值,当流体流速超过该临界值时,管道将产生显著的周期性大幅振荡。研究同时证实,通过施加外部磁场可有效调控管道的静态变形、失稳特性及振动响应等力学行为。在另一项研究中,陈钊等人^[81]开发了一套主动阻尼控制系统,该系统采用惯性作动器对管道施加外部作用力,实现了对管道振动的有效控制。研究特别指出,将惯性作动器布置于管道振动幅值最大区域可显著提升减振效果。此外,Li 等人^[82]提出了一种创新的前馈减振方法,该方法专门

针对悬臂输流管道设计。研究者基于欧拉-伯努利梁理论建立了系统的流固耦合动力学方程，并采用傅里叶级数构建了管道压力脉动函数作为系统输入。实验数据表明，该方法不仅能有效抑制悬臂输流管道的结构振动，通过参数优化还可进一步降低管道末端的振动水平。

1.6 论文研究意义与内容

综上所述，本研究认为复合材料管道输送单相流体的动力学已经进行了大量的研究。然而，对输送两相流纤维增强复合材料管道的研究仍然缺乏。因此，本文对复合管道输送固液流的动力特性进行了研究。针对输送两相流纤维增强复合材料管道动力学建模问题，采用欧拉伯努利梁理论结合哈密顿变分原理，对管道进行动力学建模与非线性振动特性分析，为工程中输送两相流纤维增强复合材料管道的应用与振动控制提供研究意义。

第 1 章，详细说明了本文展开研究的背景及其所蕴含的重要意义，深入讲述输流管道在各类工业领域的广泛应用情况，以及输送两相流纤维增强复合材料管道在提升输送效率、保障输送稳定性等方面的特殊研究价值，对整篇论文的主要研究内容和核心要点予以概括性介绍。

第 2 章，建立了输送两相流纤维增强复合管道的模型，结合欧拉-伯努利梁理论，利用哈密顿变分原理建立系统的动力学控制方程，利用解析法得到了结构的后屈曲位形，预测了非线性振动行为，得到了结构在非线性自由振动下的闭响应。通过数值模拟揭示了液相速度、滑移比、液固两相体积系数对后屈曲行为的影响。并用数值法对解析法的结果进行了验证。

第 3 章，建立了输送两相流纤维增强复合管道的模型，结合欧拉-伯努利梁理论，利用哈密顿变分原理建立管道受迫振动的系统的动力学控制方程，利用谐波平衡法结合伪弧长延拓法求解控制方程，通过数值算例讨论了液相速度、激励振幅、液相体积系数、阻尼系数、纤维取向角等因素对频率响应的影响。通过数值模拟进一步探讨了分岔和混沌等非线性动力学演化。

第 4 章，基于 van der Pol 尾流振子模型，结合欧拉-伯努利梁理论，利用哈密顿变分原理建立了送两相流纤维增强复合管道系统涡激振动的动力学控制方

程，使用数值模拟研究了管道在屈曲前后的非线性动力学。利用哈密顿原理和欧拉-伯努利梁理论，建立了系统的三维控制方程，并采用四阶龙格-库塔方法求解。该研究分析了滑移率、液相体积系数和外部流体速度对液相屈曲前后行为和临界速度的影响，可以对其进行调整以控制非线性涡激振动。进一步探讨了管道在轴向张力控制下的后屈曲状态下的非线性涡激振动响应。

第 5 章，总结与展望。对全文的内容进行总结，指出本文存在的不足，并对仍需进一步探究的方向进行展望。

1.7 本章小结

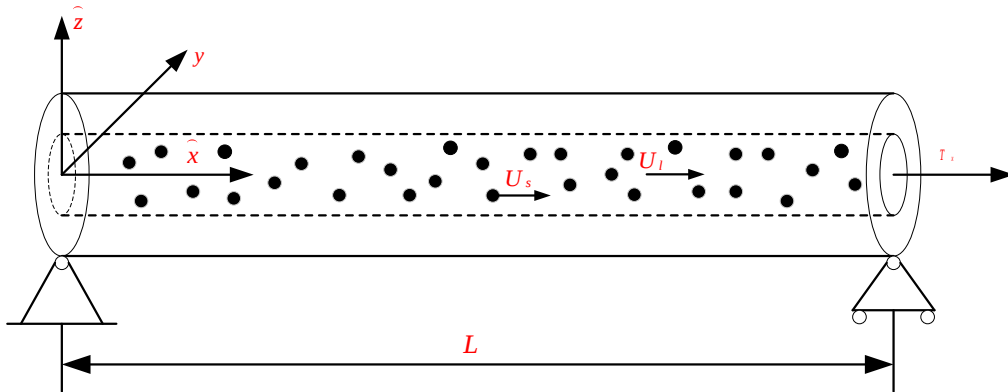
本章阐述了输送两相流纤维增强管道的研究背景以及研究意义，并介绍了相关学者的研究方法。总结了本文的创新之处与主要研究内容，对全文的框架做了筹划与构想。

第 2 章 输送两相流纤维增强复合管道自由振动模型与后屈曲行为分析

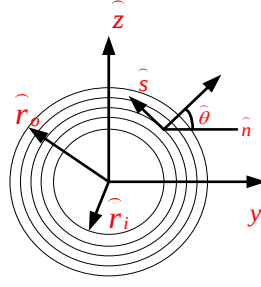
本章首先建立了输送两相流纤维增强复合管道的模型，结合欧拉-伯努利梁理论，利用哈密顿变分原理建立管道自由振动地系统的动力学控制方程，采用同伦分析法针对上述控制方程进行求解，预测了非线性振动行为。通过数值模拟揭示了液相速度、滑移比、液固两相体积系数对后屈曲行为的影响。为确保研究结果的准确性与可靠性，还运用数值法对解析法得出的结果进行了验证。

2.1 管道模型

如图 2-1 所示，考虑各向异性管道。该管的材料是一种纤维增强复合材料，材料的纤维取向角用 $\hat{\theta}$ 来表示。管道的几何参数分别为：内半径 $\hat{r}_i$ ，外半径 $\hat{r}_o$ ，长度 $\hat{L}$ 。管道的长度、宽度和高度对应于直角坐标系 $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ 的 $\hat{x}$, $\hat{y}$ 和 $\hat{z}$ 轴。为了方便地描述截面，在管道侧面建立局部坐标 $(\hat{s}, \hat{n}, \hat{z})$ 。管道截面的径向坐标和周向坐标分别用 $\hat{n}$ 和 $\hat{s}$ 表示，纤维取向角 $\hat{\theta}$ 位于坐标 $\hat{n}$ 和坐标 $\hat{s}$ 之间。管道输送的是两相固液流，流速分别为液相 $\hat{U}_l$ 和固相 $\hat{U}_s$ ，管道内沿轴向存在初始张力 $\hat{T}_x$ 。在工作中提出了一些假设，即忽略 $\hat{x}o\hat{y}$ 面和 $\hat{x}o\hat{z}$ 面管道的剪切变形；将整个管道视为一种欧拉-伯努利梁；假定流体为牛顿流体，不可压缩，流速稳定。我们还认为固相中的颗粒非常小，流体是理想的，管壁光滑无倾斜。



(a) 主视图



(b) 侧视图

图 2-1 输送两相流纤维增强复合管道的模型示意图

2.2 管道控制方程

根据欧拉-伯努利理论，复合管沿 $\hat{x}$, $\hat{y}$ 和 $\hat{z}$ 方向的位移分别可以表示为：

$$\begin{aligned}\hat{u}_0(\hat{x}, \hat{y}, \hat{t}) &= \hat{u}(\hat{x}, \hat{t}) - \hat{z} \frac{\partial \hat{w}(\hat{x}, \hat{t})}{\partial \hat{x}} \\ \hat{v}_0(\hat{x}, \hat{y}, \hat{t}) &= 0 \\ \hat{w}_0(\hat{x}, \hat{y}, \hat{t}) &= \hat{w}(\hat{x}, \hat{t})\end{aligned}\quad (2-1)$$

在式(2-1)中， $\hat{u}(\hat{x}, \hat{t})$ 和 $\hat{w}(\hat{x}, \hat{t})$ 分别表示沿 $\hat{x}$ 和 $\hat{z}$ 方向的位移。 $\hat{u}_0(\hat{x}, \hat{y}, \hat{t})$, $\hat{v}_0(\hat{x}, \hat{y}, \hat{t})$ 和 $\hat{w}_0(\hat{x}, \hat{y}, \hat{t})$ 分别是管道上任意点在 $\hat{x}$, $\hat{y}$ 和 $\hat{z}$ 方向上的位移。

截面轴向应变为：

$$\hat{\varepsilon}_{xx} = \hat{\varepsilon}_{xx}^I + \hat{n} \hat{\varepsilon}_{xx}^{II} \quad (2-2)$$

垂直应变 $\hat{\varepsilon}_{xx}^I$ 与管道位移有关，可表示为：

$$\hat{\varepsilon}_{xx}^I = \frac{\partial \hat{u}_0}{\partial \hat{x}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \right)^2 = -\hat{z} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \right)^2 \quad (2-3)$$

应变的其他分量分别为：

$$\hat{\varepsilon}_{xx}^I = \frac{d\hat{z}}{d\hat{s}} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2}, \hat{\varepsilon}_{xx} = \hat{\varepsilon}_{xx}^I + \hat{n} \hat{\varepsilon}_{xx}^{II} \quad (2-4)$$

$$\hat{\varepsilon}_{yy} = \hat{\varepsilon}_{zz} = \hat{\gamma}_{yz} = 0 \quad (2-5)$$

根据式(2-1)-式(2-5)，复合管的应变能可表示为：

$$\begin{aligned}\delta W &= \int_0^{\hat{L}} \oint_c \int_{-\frac{\hat{h}}{2}}^{\frac{\hat{h}}{2}} \hat{\sigma}_{xx} \delta \hat{\varepsilon}_{xx} d\hat{n} d\hat{s} d\hat{x} = \int_0^{\hat{L}} \oint_c \int_{-\frac{\hat{h}}{2}}^{\frac{\hat{h}}{2}} \hat{\sigma}_{xx} \delta \left(\hat{\varepsilon}_{xx}^I + \hat{n} \hat{\varepsilon}_{xx}^{II} \right) d\hat{n} d\hat{s} d\hat{x} \\ &= \int_0^{\hat{L}} \oint_c \left[\hat{N}_{xx}^o \delta \hat{\varepsilon}_{xx}^I + \hat{L}_{xx}^o \delta \hat{\varepsilon}_{xx}^{II} \right] d\hat{s} d\hat{x}\end{aligned}\quad (2-6)$$

式中， $\hat{h}$ 表示厚度，应力 $\hat{N}_{xx}^o$ 和 $\hat{L}_{xx}^o$ 分别表示为：

$$\hat{N}_{xx}^o = \int_{-\frac{\hat{h}}{2}}^{\frac{\hat{h}}{2}} \hat{\sigma}_{xx} d\hat{n} = \hat{K}_{(1)} \hat{\varepsilon}_{xx}^I + \hat{K}_{(2)} \hat{\varepsilon}_{xx}^{II} \quad (2-7)$$

$$\hat{L}_{xx}^o = \int_{-\frac{\hat{h}}{2}}^{\frac{\hat{h}}{2}} \hat{\sigma}_{xx} \hat{n} d\hat{n} = \hat{K}_{(3)} \hat{\varepsilon}_{xx}^I + \hat{K}_{(4)} \hat{\varepsilon}_{xx}^{II} \quad (2-8)$$

其中， $\hat{K}_{(1)}$ 、 $\hat{K}_{(2)}$ 、 $\hat{K}_{(3)}$ 、 $\hat{K}_{(4)}$ 的详细表达式见附录 1。

系统的动能由三部分组成，即管道动能 $\hat{T}_p$ 、液相动能 $\hat{T}_l$ 和固相动能 $\hat{T}_s$ ，它们的表达式如下：

$$\hat{T}_p = \frac{1}{2} \int_0^{\hat{L}} \hat{m}_p \left[\left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{t}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} \right)^2 \right] d\hat{x} \quad (2-9)$$

$$\hat{T}_l = \frac{1}{2} \int_0^{\hat{L}} \hat{m}_l \left[\left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{t}} + \hat{U}_l \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + \hat{U}_l \left(1 + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} \right) \right)^2 \right] d\hat{x} \quad (2-10)$$

$$\hat{T}_s = \frac{1}{2} \int_0^{\hat{L}} \hat{m}_s \left[\left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{t}} + \hat{U}_s \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + \hat{U}_s \left(1 + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} \right) \right)^2 \right] d\hat{x} \quad (2-11)$$

在式(2-9)-式(2-11)中 $\hat{U}_l$ 和 $\hat{U}_s$ 分别表示液相和固相的流速，它们的关系可以用滑移比 $\hat{\beta}$ 表示如下：

$$\hat{U}_s = \hat{\beta} \hat{U}_l \quad (2-12)$$

$\hat{m}_p$ 、 $\hat{m}_l$ 和 $\hat{m}_s$ 分别表示单位长度的管道、流体相和固体相的质量。表达式为：

$$\hat{m}_p = \oint \sum_{k=1}^{\hat{N}_{Cl}} \int_{\hat{z}_k}^{\hat{z}_{k+1}} \hat{\rho}_p^{(k)} d\hat{n} d\hat{s} \quad (2-13)$$

$$\hat{m}_l = \int_0^{2\pi} \int_0^{\hat{r}_l} \hat{Q}_l \hat{\rho}_l \hat{r} d\hat{r} \quad (2-14)$$

$$\hat{m}_s = \int_0^{2\pi} \int_0^{\hat{r}_s} \hat{Q}_s \hat{\rho}_s \hat{r} d\hat{r} \quad (2-15)$$

式中 $\hat{\rho}_p^{(k)}$ 为 k 层的材料系数， $\hat{\rho}_l$ 和 $\hat{\rho}_s$ 分别为式(2-14)-式(2-15)中液相和固相的密度。液固两相的体积比分别用 $\hat{Q}_l$ 和 $\hat{Q}_s$ 表示，两者的关系如下：

$$\hat{Q}_l + \hat{Q}_s = 1 \quad (2-16)$$

根据哈密顿原理有

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T_l + \delta T_s + \delta T_p - \delta W) dt = 0 \quad (2-17)$$

式中 t_1 为初始时间, t_2 为一般时间。

代入式(2-6)和式(2-9)-式(2-11)代入式(2-17), 采用分部积分法, 可得系统控制方程为:

$$\begin{aligned} & \left[(EI)^* \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^4} + (\bar{m}_p + \bar{m}_l + \bar{m}_s) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} + 2\bar{m}_l \bar{U}_l \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x} \partial t} + 2\bar{m}_s \bar{U}_s \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x} \partial t} + \bar{m}_l \bar{U}_l^2 \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} \right. \\ & \left. + \bar{m}_s \bar{U}_s^2 \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} - \frac{1}{2} (EA)^* \left(3 \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + 2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + 2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right) \right] \delta \bar{w} = 0 \end{aligned} \quad (2-18)$$

$$\begin{aligned} & \left[(\bar{m}_p + \bar{m}_l + \bar{m}_s) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + 2\bar{m}_l \bar{U}_l \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial t} + 2\bar{m}_s \bar{U}_s \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial t} + \bar{m}_l \bar{U}_l^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} \right. \\ & \left. + \bar{m}_l \bar{U}_l^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} - (EA)^* \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} \right) \right] \delta \bar{u} = 0 \end{aligned} \quad (2-19)$$

这里, $(EI)^*$ 表示管道弯曲刚度, $(EA)^*$ 表示轴向刚度。它们可以写成:

$$(EI)^* = \pi \hat{K}_{(1)} \bar{r}_m^3 + \pi \hat{K}_{(4)} \bar{r}_m \quad (2-20)$$

$$(EA)^* = 2\pi \hat{K}_{(1)} \bar{r}_m \quad (2-21)$$

在本工作中, 复合管材的振动可以看作是有限拉伸的问题, 因此忽略式(2-19)中与时间有关的项, 得到

$$(\bar{m}_l + \bar{m}_s + \bar{m}_p) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = 2\bar{m}_l \bar{U}_l \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial t} + 2\bar{m}_s \bar{U}_s \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial t} = 0 \quad (2-22)$$

并且, 液相刚度项 $\bar{m}_l \bar{U}_l^2$ 和固相刚度项 $\bar{m}_s \bar{U}_s^2$ 也可以忽略, 式(2-19)可以化简为:

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} = 0 \quad (2-23)$$

根据式(2-23), 复合管的轴向位移 $\bar{u}$ 可以表示为:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} = -\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} \quad (2-24)$$

对式(2-24)积分得到:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \bar{a}_u \quad (2-25)$$

将式(2-25)对管道长度积分, 并与相关边界条件联立, 得到待定项 $\bar{a}_u$, 边界

条件如下：

$$\begin{aligned}\hat{u}(\hat{x}=0) &= 0 \\ \hat{u}(\hat{x}=\hat{L}) &= \hat{T}_x \hat{L} / (EA)^*\end{aligned}\quad (2-26)$$

$\hat{a}_u$ 可以表示为：

$$\hat{a}_u = \int_0^{\hat{L}} \frac{1}{2\hat{L}} \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \right)^2 d\hat{x} + \hat{T}_x / (EA)^* \quad (2-27)$$

将式(2-25)和式(2-27)代入式(2-18)可得复合管水平方向的控制方程

$$\begin{aligned}(EI)^* \frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial \hat{x}^4} + (\hat{m}_p + \hat{m}_l + \hat{m}_s) \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{t}^2} + 2\hat{m}_l \hat{U}_l \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x} \partial \hat{t}} + 2\hat{m}_s \hat{U}_s \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x} \partial \hat{t}} \\ + (\hat{m}_l \hat{U}_l^2 + \hat{m}_s \hat{U}_s^2 - \hat{T}_x) \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} - \frac{1}{2\hat{L}} (EA)^* \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} \int_0^{\hat{L}} \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \right)^2 d\hat{x} = 0\end{aligned}\quad (2-28)$$

2.3 后屈曲行为分析

当简支管道内的流体速度达到并超过临界值时，管道会出现屈曲或发散失稳等非线性行为。具体而言，消去式(2-28) 里与时间相关的项后，可以得到静态控制方程，利用该方程来深入研究复合材料管材的后屈曲行为。因此，式(2-28)可以改写为

$$(EI)^* \frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial \hat{x}^4} + (\hat{m}_l \hat{U}_l^2 + \hat{m}_s \hat{U}_s^2 - \hat{T}_x) \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} - \frac{1}{2\hat{L}} (EA)^* \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} \int_0^{\hat{L}} \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \right)^2 d\hat{x} = 0 \quad (2-29)$$

$\hat{X}$ 可表示为

$$\hat{X} = \frac{1}{2\hat{L}} (EA)^* \int_0^{\hat{L}} \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \right)^2 d\hat{x} \quad (2-30)$$

则式(2-29)可写为

$$(EI)^* \frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial \hat{x}^4} + (\hat{m}_l \hat{U}_l^2 + \hat{m}_s \hat{U}_s^2 - \hat{T}_x - \hat{X}) \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} = 0 \quad (2-31)$$

假设

$$\hat{\lambda}^2 = \frac{\hat{m}_l \hat{U}_l^2 + \hat{m}_s \hat{U}_s^2 - \hat{T}_x - \hat{X}}{(EI)^*} \quad (2-32)$$

式(2-29)可以改写为：

$$\frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial \hat{x}^4} + \hat{\lambda}^2 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} = 0 \quad (2-33)$$

式(2-33)的形式参考 Nayfeh^[24]，得到式(2-33)的通解为

$$\hat{w}(\hat{x}) = \hat{C} \sin(\hat{\lambda} \hat{x}) \quad (2-34)$$

在式(2-34)中, 符号 $\hat{C}$ 表示待定常数。将式(2-34)与边界条件联立, 可以得到特征方程, 其形式为:

$$\begin{aligned} \sin(\hat{\lambda} \hat{L}) &= 0 \\ \hat{\lambda} &= \frac{\hat{\omega} \pi}{\hat{L}} \end{aligned} \quad (2-35)$$

其中, $\hat{\omega} = (1, 2, 3, \dots)$

联立式(2-30)、式(2-32)和式(2-24), 可求得待定常数 $\hat{C}$:

$$\hat{C} = \pm 2 \left(\sqrt{\frac{1}{(EA)^*}} \right) \sqrt{\frac{\hat{m}_l \hat{U}_l^2 + \hat{m}_s \hat{U}_s^2 - \hat{T}_x}{\hat{\lambda}^2} - (EI)^*} \quad (2-36)$$

将式(2-36)代入式(2-34), 并与式(2-35)联立, 可得到后屈曲方程为:

$$\hat{w}(\hat{x}) = \pm 2 \left(\sqrt{\frac{1}{(EA)^*}} \right) \sqrt{\frac{\hat{m}_l \hat{U}_l^2 + \hat{m}_s \hat{U}_s^2 - \hat{T}_x}{\hat{\lambda}^2} - (EI)^*} \sin(\hat{\omega} \pi \hat{x}) \quad (2-37)$$

将式(2-37)中的 $\sqrt{\frac{\hat{m}_l \hat{U}_l^2 + \hat{m}_s \hat{U}_s^2 - \hat{T}_x}{\hat{\lambda}^2} - (EI)^*}$ 项设为零, 结合式(2-12), 得到液相的临界流速为:

$$\hat{U}_{lc} = \sqrt{\frac{(EI)^* \left(\frac{\hat{\omega} \pi}{\hat{L}} \right)^2 + \hat{T}_x}{\hat{m}_l + \hat{m}_s \hat{\beta}^2}} \quad (2-38)$$

纤维增强复合管材的几何物理参数为: 管材长度 $\hat{L} = 10m$, 内半径 $\hat{r}_i = 0.08m$, 外半径 $\hat{r}_o = 0.1m$ 。将环氧树脂设定为基材, 把石墨用作增强纤维构造纤维增强材料。石墨的弹性模量以及环氧树脂的弹性模量分别为 $\hat{E}_1 = 144GPa$ 和 $\hat{E}_2 = 9.65GPa$ 。纤维取向角的选择对材料的几何和物理性能有显著影响, 可进一步拓宽纵向拉伸应力和横向剪切应力的可调自由度, 因此在模拟过程中, 分别选择纤维取向角为 $\hat{\theta} = \pi/6, \pi/5, \pi/4, \pi/3$ 。另外, 其他参数选择为: 液体密度 $\hat{\rho}_l = 1020kg/m^3$; 固体密度 $\hat{\rho}_s = 3500kg/m^3$; 管道密度 $\hat{\rho}_p = 1390kg/m^3$; 材料泊松比 $\hat{\nu}_l = \hat{\nu}_s = 0.3$ 。

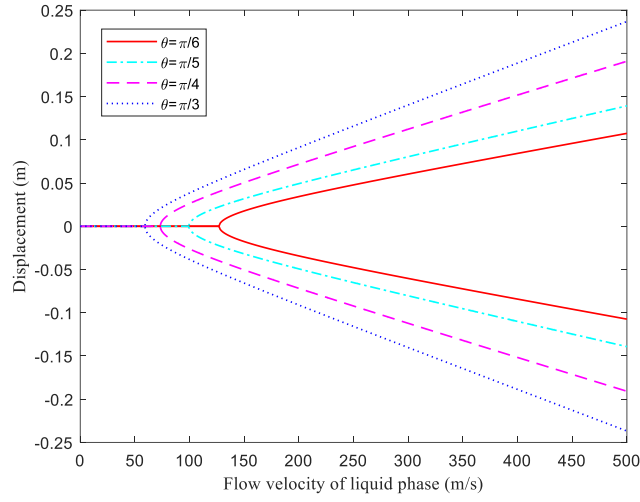


图 2-2 复合材料管屈曲行为随液相流速变化的分岔图

$$(\hat{x} = 0.005\hat{L}, \hat{T}_x = -20N, \hat{Q}_l = 0.9, \hat{\beta} = 1)$$

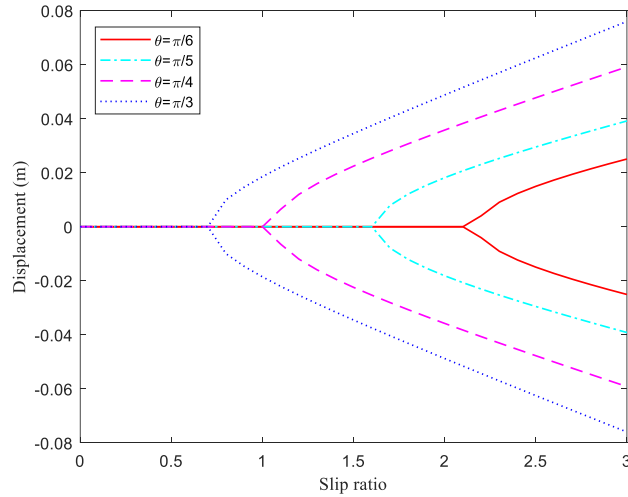


图 2-3 复合材料管屈曲行为随滑移率变化的分岔图

$$(\hat{x} = 0.005\hat{L}, \hat{T}_x = -20N, \hat{Q}_l = 0.9, \hat{U}_l = 60\text{ m/s})$$

根据式(2-37)，选择液相流速、滑移比、液相体积比和初始张力作为控制参数。如图 2-2-图 2-5 所示，分岔图描述了复合材料管材在不同纤维取向角度下的后屈曲行为。结果表明，这些控制参数对液相临界流体速度有显著影响。从图中可以看出，当流速、滑移比、初始张力较小，液相体积比较高时，复合管材呈现不变形的静力平衡和稳定状态。但当这些控制参数超过或小于相关临界值时，复合材料管材会发生发散分岔，出现后屈曲行为，复合材料管材呈现双稳态后屈曲

状态。此外，从图 2-2-图 2-6 可以看出，随着纤维取向角从 $\pi/6$ 增加到 $\pi/3$ ，复合管材屈曲位移逐渐增大。

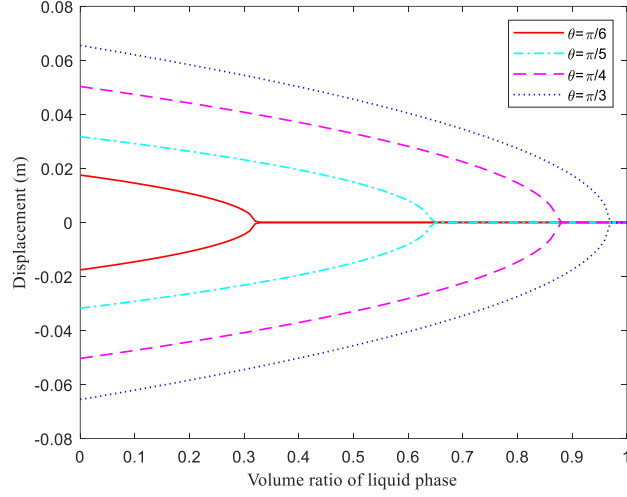


图 2-4 复合材料管屈曲行为随液相体积比变化的分岔图

$$(\hat{x} = 0.005\hat{L}, \hat{T}_x = -20N, \hat{\beta} = 1.5, \hat{U}_l = 60 m/s)$$

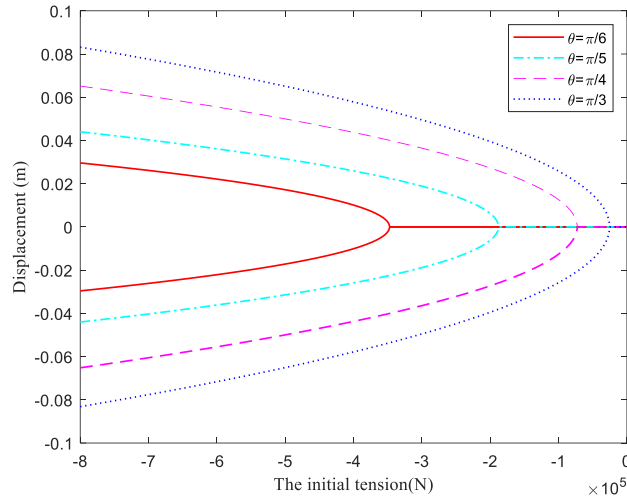


图 2-5 复合材料管屈曲行为随轴向张力变化的分岔图

$$(\hat{x} = 0.005\hat{L}, \hat{\beta} = 1.5, \hat{Q}_l = 0.9, \hat{U}_l = 60 m/s)$$

图 2-3-图 2-6 给出了液相临界流速随纤维取向角变化的趋势，可以看出，临界流速与纤维取向角之间存在非线性关系。在纤维取向角处于较小数值的情况下 ($\hat{\theta} < \pi/3$)，伴随着纤维取向角的逐步增大，液相临界速度会快速下降。然而，当

纤维取向角达到较大数值时($\hat{\theta} > \pi/3$)，临界速度随取向角增大而产生的变化极为微小，几乎可以忽略不计。此外，如图 2-7 所示，临界流速与滑移比之间存在非线性关系。当滑移比较小时($\hat{\beta} < 0.5$)，液相临界速度降低较慢。然而，当该值变得更大时($\hat{\beta} > 0.5$)，临界速度下降得更快。

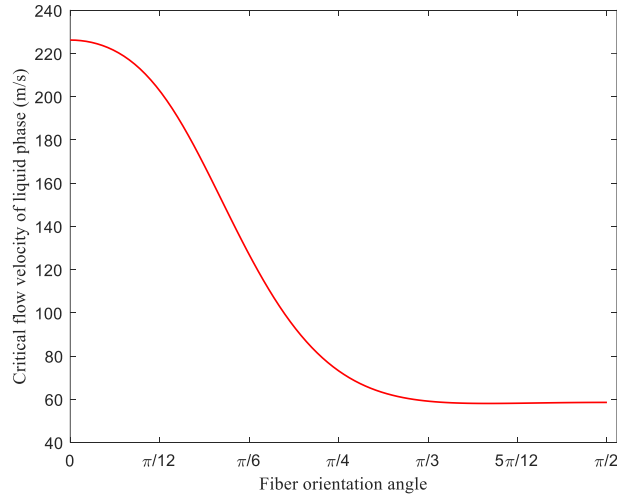


图 2-6 液相临界流速随纤维取向角的变化图

$$\left(\hat{T}_x = -20N, \hat{\beta} = 1, \hat{\rho}_l = 1020 \text{ kg/m}^3 \right)$$

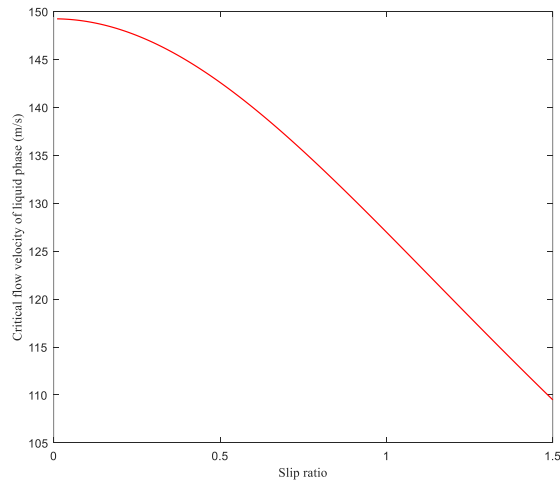


图 2-7 液相临界流速随滑移率的变化图

$$\left(\hat{T}_x = -20N, \hat{\theta} = \pi/6, \hat{\rho}_l = 1020 \text{ kg/m}^3 \right)$$

2.4 纤维增强材料复合管道的非线性振动

为了得到复合管道输送流体的非线性振动,采用一阶伽辽金方法对变量进行分离。假设管道的侧向位移可表示为:

$$\hat{w}(\hat{t}, \hat{x}) = \hat{\xi}(\hat{t}) \hat{\varphi}(\hat{x}) \quad (2-39)$$

式(2-39)中的 $\hat{\xi}(\hat{t})$ 表示无量纲振幅, $\hat{\varphi}(\hat{x})$ 表示复合管道的一阶模态。在相同的边界条件下,假定管道的模态与梁相同,得到

$$\hat{\varphi}(\hat{x}) = \sin\left(\frac{\pi \hat{x}}{\hat{L}}\right) \quad (2-40)$$

将式(2-39)和式(2-40)代入式(2-28)可得:

$$\frac{\pi^2}{\hat{L}^2} \left[(EI)^* \frac{\pi^2}{\hat{L}^2} - \hat{m}_l \hat{U}_l^2 - \hat{m}_s \hat{U}_s^2 + \hat{T}_x \right] \hat{\xi} + (\hat{m}_p + \hat{m}_l + \hat{m}_s) \frac{d^2 \hat{\xi}}{d\hat{t}^2} + \frac{\pi^4}{4\hat{L}^4} (EA)^* \hat{\xi}^3 = 0 \quad (2-41)$$

$\hat{\chi}_1$ 和 $\hat{\chi}_2$ 表示如下:

$$\begin{aligned} \hat{\chi}_1 &= \frac{(EI)^* \frac{\pi^4}{\hat{L}^4} - \hat{m}_l \hat{U}_l^2 \frac{\pi^2}{\hat{L}^2} - \hat{m}_s \hat{U}_s^2 \frac{\pi^2}{\hat{L}^2} + \hat{T}_x \frac{\pi^2}{\hat{L}^2}}{(\hat{m}_p + \hat{m}_l + \hat{m}_s)} \\ \hat{\chi}_2 &= \frac{(EA)^* \frac{\pi^4}{\hat{L}^4}}{4(\hat{m}_p + \hat{m}_l + \hat{m}_s)} \end{aligned} \quad (2-42)$$

因此,式(2-41)可化简为:

$$\frac{d^2 \hat{\xi}}{d\hat{t}^2} + \hat{\chi}_1 \hat{\xi} + \hat{\chi}_2 \hat{\xi}^3 = 0 \quad (2-43)$$

相应的边界条件可定义为:

$$\begin{aligned} \hat{\xi}(\hat{t} = 0) &= \hat{a} \\ \frac{d\hat{\xi}}{d\hat{t}}(\hat{t} = 0) &= 0 \end{aligned} \quad (2-44)$$

其中, $\hat{a}$ 表示复合管的初始振幅。

式(2-43)为类 duffing 方程的一种形式,这表明该系统具备同时呈现强非线性与弱非线性的特性。传统的多尺度法等方法不适用于这种情况,因此 Liao^[34]首先提出了同伦分析的方法来求解式(2-43)。为方便起见,引入以下转换:

$$\begin{aligned} \hat{\tau} &= \omega \hat{t} \\ \hat{\xi}(\hat{t}) &= \hat{\eta}(\hat{\tau}) \end{aligned} \quad (2-45)$$

将式(2-45)代入式(2-43)、式(2-44)，可得：

$$\bar{\omega}^2 \frac{d^2 \bar{\eta}(\bar{\tau})}{d\bar{t}^2} + \bar{\chi}_1 \bar{\eta}(\bar{\tau}) + \bar{\chi}_2 \bar{\eta}(\bar{\tau})^3 = 0 \quad (2-46)$$

$$\begin{aligned} \bar{\eta}(\bar{\tau}=0) &= \bar{a} \\ \frac{d\bar{\eta}}{d\bar{\tau}}(\bar{\tau}=0) &= 0 \end{aligned} \quad (2-47)$$

非线性微分方程可表示为：

$$\hat{N}[\bar{\eta}(\bar{\tau})] = 0 \quad (2-48)$$

上式中的 $\hat{N}$ 表示一个非线性算子。

构造同伦函数如下：

$$\hat{H}[\bar{\phi}(\bar{\tau}, \bar{q}); \bar{q}, \bar{h}, \bar{h}(\bar{\tau})] = (1-\bar{q})\bar{L}[\bar{\phi}(\bar{\tau}, \bar{q}) - \bar{\eta}_0(\bar{\tau})] - \bar{q}\bar{h}\bar{h}(\bar{\tau})\hat{N}[\bar{\phi}(\bar{\tau}, \bar{q})] \quad (2-49)$$

在式(2-49)中， $\bar{h}$ 表示辅助参数， $\bar{h}$ 表示与 $\bar{\tau}$ 相关的辅助函数。此外， $\bar{L}$ 表示一个线性算子， $\bar{q}$ 表示一个范围从 0 到 1 的参数， $\bar{\eta}_0(\bar{\tau})$ 表示原始猜想解，而 $\bar{\phi}(\bar{\tau}, \bar{q})$ 表示未知函数。在 $\bar{q}$ 等于 0 或 1 的情况下，我们可以定义以下条件：

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(\bar{\tau}, 0) &= \bar{\eta}_0(\bar{\tau}) \\ \bar{\phi}(\bar{\tau}, 1) &= \bar{\eta}(\bar{\tau}) \end{aligned} \quad (2-50)$$

展开 $\bar{q}$ 的泰勒级数，可以得到：

$$\bar{\phi}(\bar{\tau}, \bar{q}) = \bar{\eta}_0(\bar{\tau}) + \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\eta}_i(\bar{\tau}) \bar{q}^i \quad (2-51)$$

在上式中， $\bar{\eta}_i(\bar{\tau})$ 表示 i 阶变形导数，其形式为：

$$\bar{\eta}_i(\bar{\tau}) = \frac{1}{i!} \left. \frac{\partial^i \bar{\phi}(\bar{\tau}, \bar{q})}{\partial \bar{q}^i} \right|_{\bar{q}=0} \quad (2-52)$$

借助式(2-46)，可将 $\bar{L}$ 写成：

$$\bar{L}[\bar{\phi}(\bar{\tau}, \bar{q})] = \bar{\omega}^2 \left[\frac{d^2 \bar{\phi}(\bar{\tau}, \bar{q})}{d\bar{t}^2} + \bar{\phi}(\bar{\tau}, \bar{q}) \right] \quad (2-53)$$

而非线性算子可以表示为

$$\hat{N}[\bar{\phi}(\bar{\tau}, \bar{q})] = \bar{\omega}^2 \frac{d^2 \bar{\phi}(\bar{\tau}, \bar{q})}{d\bar{t}^2} + \bar{\chi}_1 \bar{\phi}(\bar{\tau}, \bar{q}) + \bar{\chi}_2 \bar{\phi}(\bar{\tau}, \bar{q})^3 \quad (2-54)$$

零阶的同伦方程通过取 $\hat{H}[\bar{\phi}(\bar{\tau}, \bar{q}); \bar{q}, \bar{h}, \bar{h}(\bar{\tau})] = 0$ 得到：

$$(1-\bar{q})\bar{L}[\hat{\phi}(\bar{\tau},\bar{q})-\hat{\eta}_0(\bar{\tau})]=\bar{q}\bar{h}\bar{h}(\bar{\tau})\bar{N}[\hat{\phi}(\bar{\tau},\bar{q})] \quad (2-55)$$

式(2-55)的边界条件为:

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(0,\bar{q}) &= \bar{a} \\ \frac{d\hat{\phi}(0,\bar{q})}{d\bar{t}} &= 0 \end{aligned} \quad (2-56)$$

当 $\bar{q}$ 的值等于零时, 式(2-22)的解满足如下条件:

$$\hat{\phi}(\bar{\tau},0)=\hat{\eta}_0(\bar{\tau})=\bar{a}\cos(\bar{\tau}) \quad (2-57)$$

将式(2-55)对参数 $\bar{q}$ 求导, 然后令 $\bar{q}=0$, 得到一阶同伦方程:

$$\bar{L}[\hat{\eta}_1(\bar{\tau})]=\bar{h}\bar{h}(\bar{\tau})\bar{N}[\hat{\phi}(\bar{\tau},\bar{q})]\Big|_{\bar{q}=0} \quad (2-58)$$

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_1(0) &= 0 \\ \frac{d\hat{\eta}_1(0)}{d\bar{t}} &= 0 \end{aligned} \quad (2-59)$$

在 $\bar{h}=1, \bar{h}(\bar{\tau})=1$ 的假设下, 将式(2-51), 式(2-53), 式(2-54)代入式(2-58), 可以得到:

$$\bar{\omega}^2 \left[\frac{d^2 \hat{\eta}_1(\bar{\tau})}{d\bar{t}^2} + \hat{\eta}_1(\bar{\tau}) \right] = \bar{\omega}^2 \frac{d^2 \hat{\eta}_0(\bar{\tau})}{d\bar{t}^2} + \hat{\chi}_1 \hat{\eta}_0(\bar{\tau}) + \hat{\chi}_2 \hat{\eta}_0(\bar{\tau})^3 \quad (2-60)$$

求解方程(2-59)和方程(2-60), 可得:

$$\hat{\eta}_1(\bar{\tau}) = \frac{\bar{a}}{8\bar{\omega}_{nl}^2} (4\hat{\chi}_1 + 3\hat{\chi}_2 \bar{a}^2 - 4\bar{\omega}_{nl}^2) \bar{\tau} \sin \bar{\tau} + \frac{\hat{\chi}_2}{32\bar{\omega}_{nl}^2} \bar{a}^3 (\cos \bar{\tau} - \cos 3\bar{\tau}) \quad (2-61)$$

可以看出, 在 $\hat{\eta}_1(\bar{\tau})$ 的解中存在着项 $\bar{\tau} \sin \bar{\tau}$, 根据可解性条件, 项 $\bar{\tau} \sin \bar{\tau}$ 的系数值不能为除零以外的任何值。因此, 复合管材的非线性固有频率可推导为:

$$\bar{\omega}_{nl} = \sqrt{\hat{\chi}_1 + \frac{3\hat{\chi}_2}{4} \bar{a}^2} \quad (2-62)$$

$$\hat{\eta}_1(\bar{\tau}) = \frac{\hat{\chi}_2}{32\bar{\omega}_{nl}^2} \bar{a}^3 (\cos \bar{\tau} - \cos 3\bar{\tau}) \quad (2-63)$$

因此, 管道系统的一阶响应可以近似为

$$\hat{\eta}(\bar{\tau}) \approx \hat{\eta}_0(\bar{\tau}) + \hat{\eta}_1(\bar{\tau}) \approx \left(\frac{\hat{\chi}_2 \bar{a}^3}{32\bar{\omega}_{nl}^2} + \bar{a} \right) \cos(\bar{\tau}) - \frac{\hat{\chi}_2 \bar{a}^3}{32\bar{\omega}_{nl}^2} \cos(3\bar{\tau}) \quad (2-64)$$

$$\hat{\xi}(\hat{t}) = \frac{\hat{a}^3}{32\hat{\omega}_{nl}^2} (\hat{\chi}_2 \hat{a}^2 + 32\hat{\omega}_{nl}^2) \cos(\hat{\omega}_{nl} \hat{t}) - \frac{\hat{\chi}_2 \hat{a}^3}{32\hat{\omega}_{nl}^2} \cos(3\hat{\omega}_{nl} \hat{t}) \quad (2-65)$$

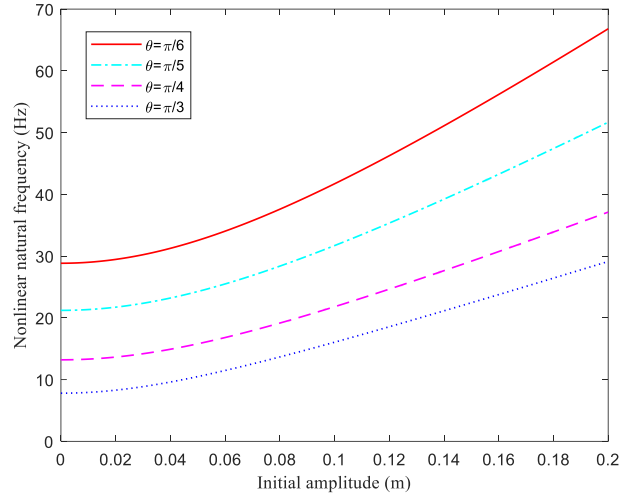


图 2-8 不同纤维取向角下复合管非线性固有频率与初始幅值的关系图

$$(\hat{\beta} = 1, \hat{U}_l = 50 \text{ m/s}, \hat{Q}_l = 0.9)$$

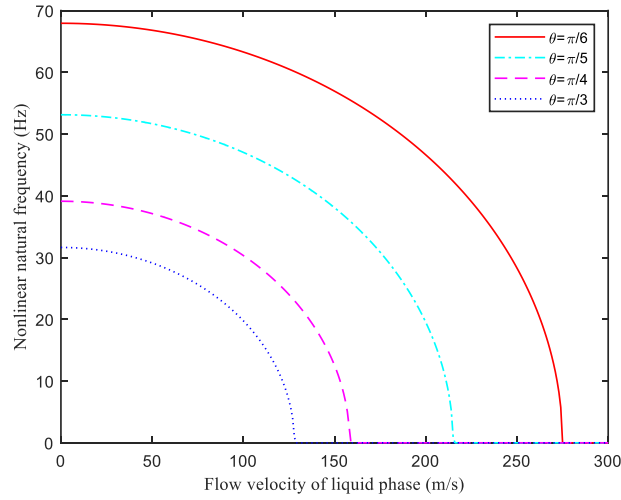


图 2-9 不同纤维取向角下复合管非线性固有频率与液相流速的关系图

$$(\hat{\beta} = 1, \hat{Q}_l = 0.9, \hat{\rho}_l = 1020 \text{ kg/m}^3, \hat{\rho}_s = 3500 \text{ kg/m}^3)$$

根据式(2-62)，详细估计了初始振幅以及物理和几何参数对复合管材非线性频率的影响。不同纤维取向角下复合管道非线性频率随初始幅值变化情况如图 2-8 所示。从图中可以很容易地观察到，初始幅值的提高会使非线性频率移向更高的值。这表明，初始幅值越低，频率位移就越小。非线性频率始终大于线性频率，而且随着纤维取向角的增大，线性频率会逐渐减小。另外，当初始幅值为 0 时，

可以得到线性频率，可以看出线性响应总是小于非线性响应。

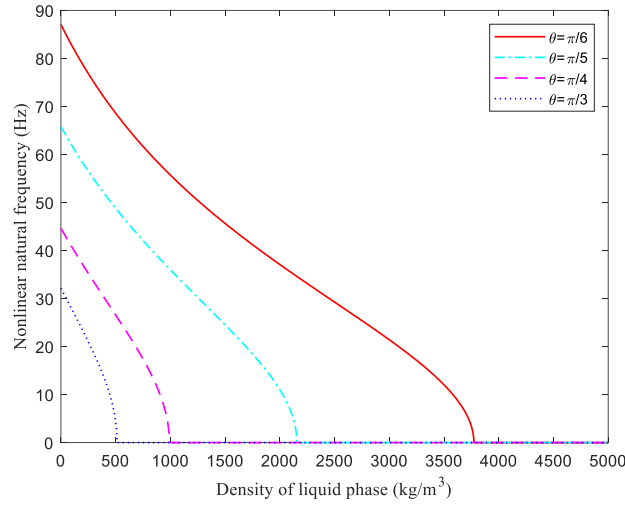


图 2-10 不同纤维取向角下复合管非线性固有频率与液相密度的关系图

$$(\hat{\beta}=1, \hat{U}_l=160\text{ m/s}, \hat{Q}_l=0.9)$$

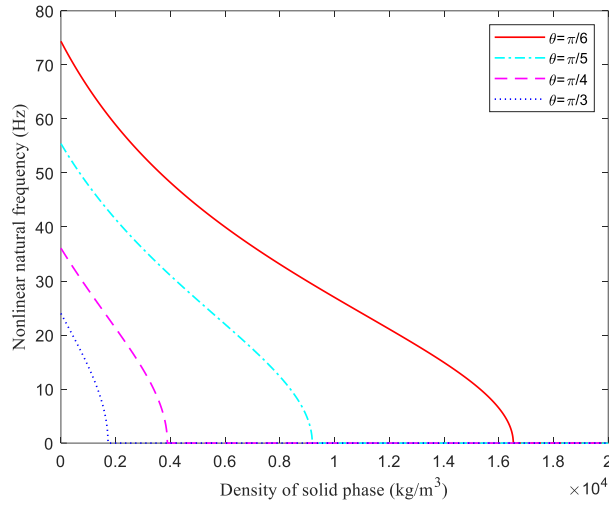


图 2-11 不同纤维取向角下复合管非线性固有频率与固相密度的关系图

$$(\hat{\beta}=1, \hat{U}_l=130\text{ m/s}, \hat{Q}_l=0.7)$$

图 2-9 描述了不同纤维取向角下管道非线性固有频率随液相流速的变化情况。在模拟过程中，初始振幅设为 $\hat{a}=0.2$ 。结果表明，非线性固有频率随液相流体速度的增大而减小。这是由于在管道系统中接收到的流体速度增加时更加灵活，因此系统稳定性降低。图中另一个重要的观察结果是，在非线频率为零的情况下，当纤维取向角从 $\pi/6$ 变化到 $\pi/3$ 时，临界流速从 275 m/s 降低到 129 m/s 。

图 2-10 和图 2-11 分别展示了不同纤维取向角度下复合管材的非线性频率随液相和固相密度的变化情况。可以看出，液相和固相密度的增加导致非线性频率的减小。产生这种现象的原因是，随着液相和固相密度的增大，系统的惯性力和科里奥利力也相应增大。因此，这些力的增大将导致系统更容易丧失稳定性。

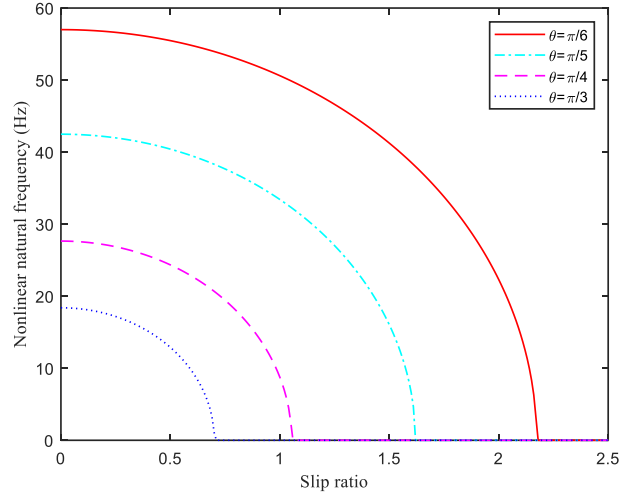


图 2-12 不同纤维取向角度下复合管的非线性固有频率随滑移率的变化图

$$(\hat{U}_l = 130 \text{ m/s}, \hat{Q}_l = 0.7, \hat{L} = 10 \text{ m}, \hat{r}_o = 0.1 \text{ m}, \hat{r}_i = 0.08 \text{ m})$$

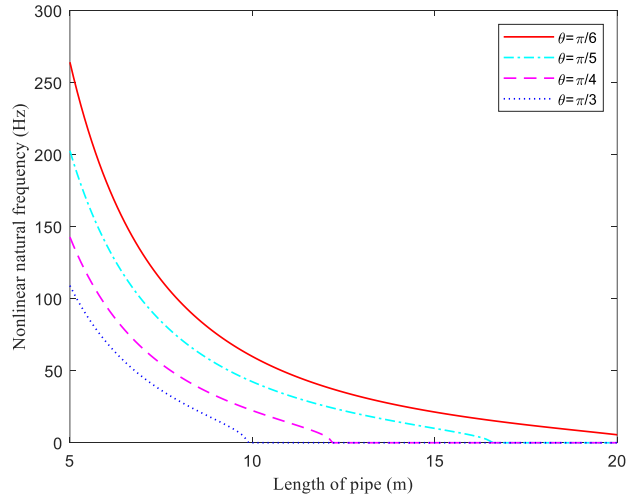


图 2-13 不同纤维取向角度下复合管的非线性固有频率随管长的变化图

$$(\hat{\beta} = 1, \hat{U}_l = 130 \text{ m/s}, \hat{Q}_l = 0.9)$$

图 2-12 为不同纤维取向角度下，非线性频率随滑移比变化的情况。能够看出，当两相流滑移比不断增大时，非线性频率呈现出上升的态势。在不同纤维取

向角度的情形下，非线性固有频率随管道长度的变化曲线如图 2-13 所展示。从结果能够发现，伴随着管道长度的增加，非线性固有频率会相应地减小。所以，能够推断出管道长度越长，其固有频率就越小的结论。产生这种现象的原因是，管道越长，管道的柔韧性越高，因此具有较低的系统刚度。

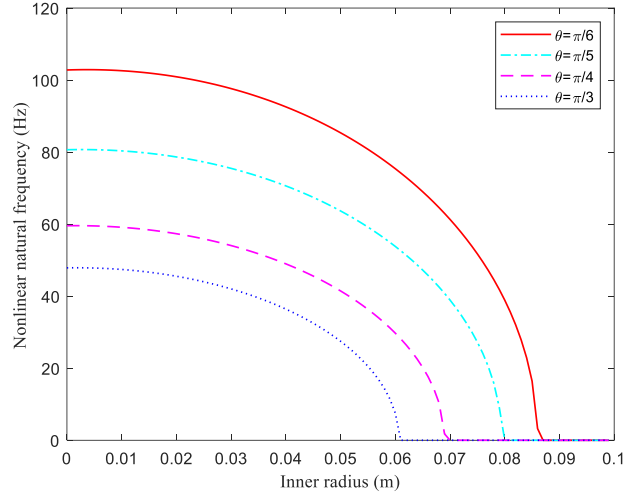


图 2-14 不同纤维取向角度下复合管非线性固有频率随管道内径的变化图

$$(\hat{\beta} = 1, \hat{U}_l = 200 \text{ m/s}, \hat{Q}_l = 0.8)$$

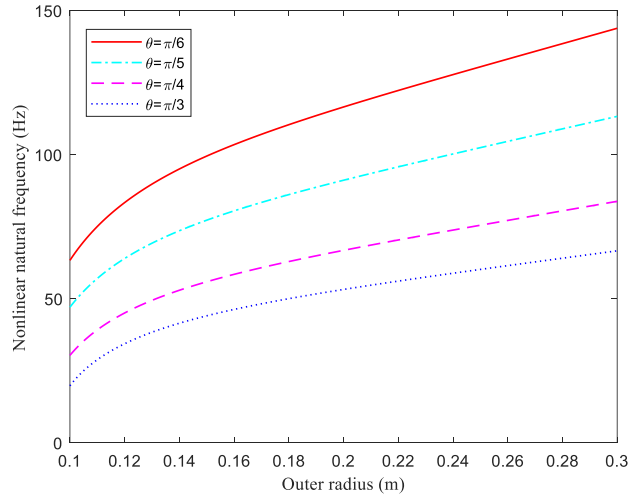


图 2-15 不同纤维取向角度下复合管非线性固有频率随管道外径的变化图

$$(\hat{\beta} = 1, \hat{U}_l = 100 \text{ m/s}, \hat{Q}_l = 0.9)$$

不同纤维取向角下复合管材非线性频率随内外半径变化的变化如图 2-14 和图 2-15 所示。从这些图可以得出结论，对于较低的内半径，内半径的提升几乎

对非线性频率没有影响。然而，当外半径与内半径相当接近时，频率会迅速下降。此外，复合材料管道的非线性频率下降趋势显著，而外半径较小。

由图 2-8-图 2-15 不难看出，随着纤维取向角的增大，复合管道内非线性频率减小。为了进一步揭示材料分布的影响，图 2-16 考察了复合材料管道非线性频率随纤维取向角的变化情况。结果表明：在纤维取向角较小的情况下，随着纤维取向角的增大，非线性频率呈快速下降趋势，而在 $(\hat{\theta} > \pi/3)$ 的情况下，非线性频率几乎没有变化。由此得出结论，相对较小的纤维取向角值对非线性自由振动有显著影响。

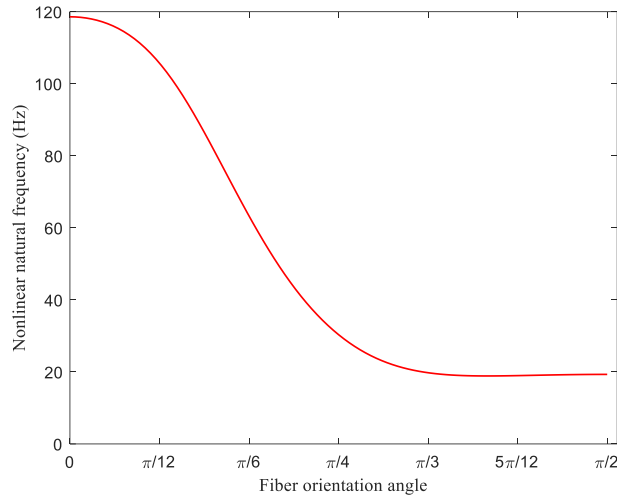
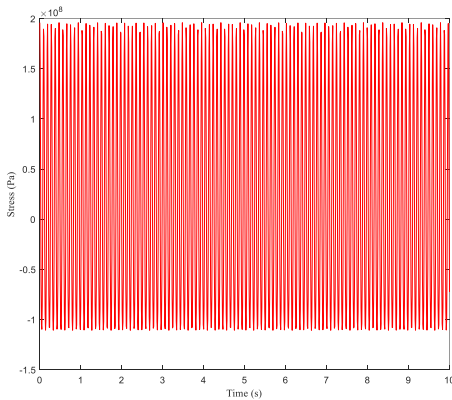
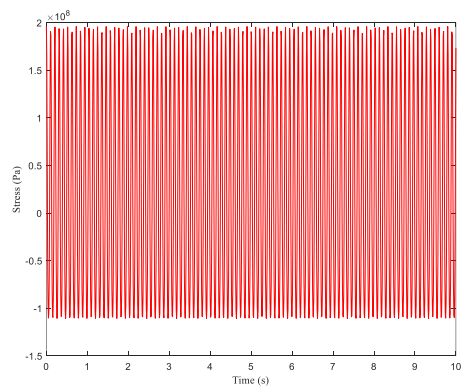


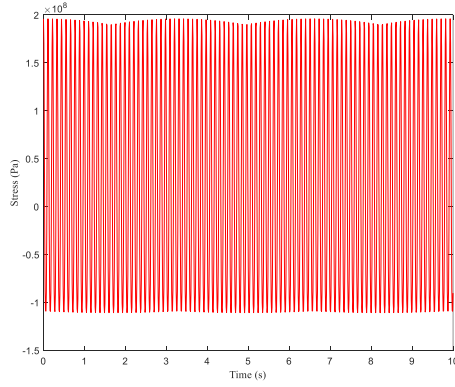
图 2-16 复合管非线性固有频率随纤维取向角的变化图 $(\hat{\beta}=1, \hat{U}_l=100\text{ m/s}, \hat{Q}_l=0.9)$



(a) $(\hat{U}_l = 50\text{ m/s})$



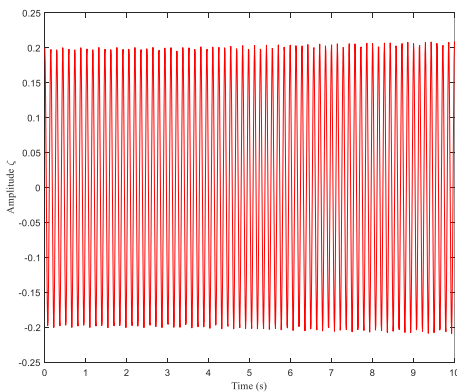
(b) $(\hat{U}_l = 126.9847\text{ m/s})$



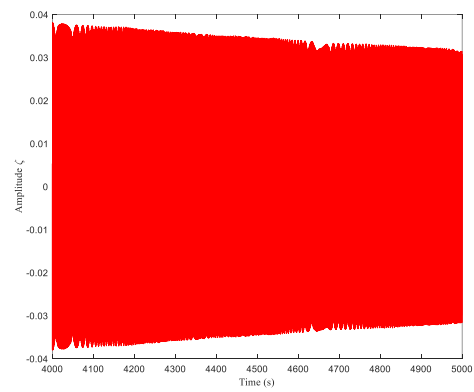
(c) ($\bar{U}_l = 150 \text{ m/s}$)

图 2-17 不同的液相流速下管道中点位置的应力随时间的变化图

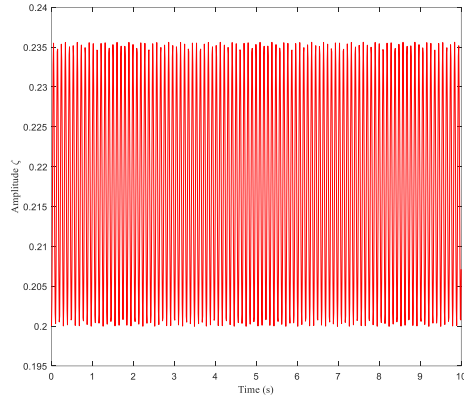
设纤维取向角为 30° ，滑移比为 1，并根据式(2-38)，可得液相的临界速度 $U_{lc} = 127 \text{ m/s}$ 。初始振幅 $\hat{a}$ 设置为 0.2。借助龙格-库塔法，得到了三种液体流速(小于、等于、大于临界流速)下复合管道中点位置应力随时间的变化图，如图 2-17 所示。可见，在亚临界情况下，随着液体速度的增大，应力周期增大，这与频率变化的结果是一致的。另一个观察是运动现象逐渐变得更加复杂。如图 2-18 所示，为不同液体流速条件下，复合管道稳态幅值随时间的变化情况。与之类似，伴随液体流速的不断增大，稳态振幅下运动的复杂程度也逐步提升。值得注意的是，管道的平衡位置位于液相超临界速度的零点处，这与之前研究(后屈曲分析)的解相吻合。实际上，获得更多的振动能量伴随着液体速度的增加，这可能会进一步引起更复杂的运动。



(a) ($\bar{U}_l = 50 \text{ m/s}$)



(b) ($\bar{U}_l = 126.9847 \text{ m/s}$)



(c) ($\bar{U}_l = 150 \text{ m/s}$)

图 2-18 不同的液体流速下管道稳态振幅随时间的变化图

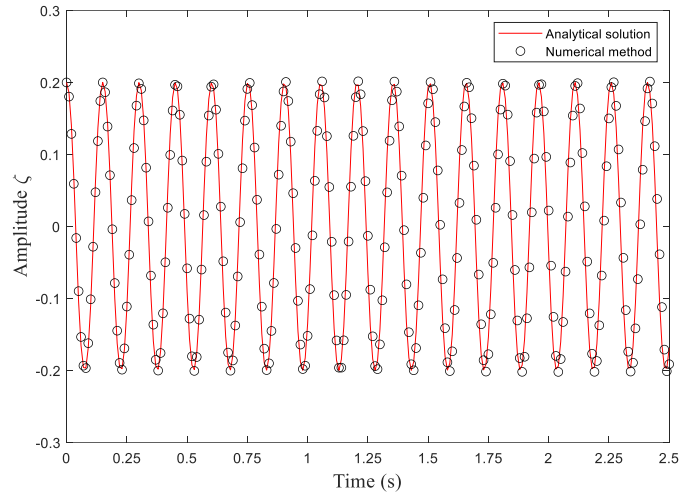


图 2-19 解析法与数值法对复合管无量纲振幅的比较图

为验证所提方案的有效性，我们把通过同伦分析方法得到的无量纲振幅，与采用龙格-库塔方法确定的振幅进行了对比，具体对比情况如图 2-19 所示。从图中可以看出，这两种方法的求解结果高度相符。此外，图 2-20 给出了采用本方法的纤维增强复合材料管道输送流体的无量纲振幅，并与 Khodabakhsh 等^[33]的工作进行了对比。可以看出，本研究与 Khodabakhsh 等的结果非常吻合，进一步说明本研究是有效的。

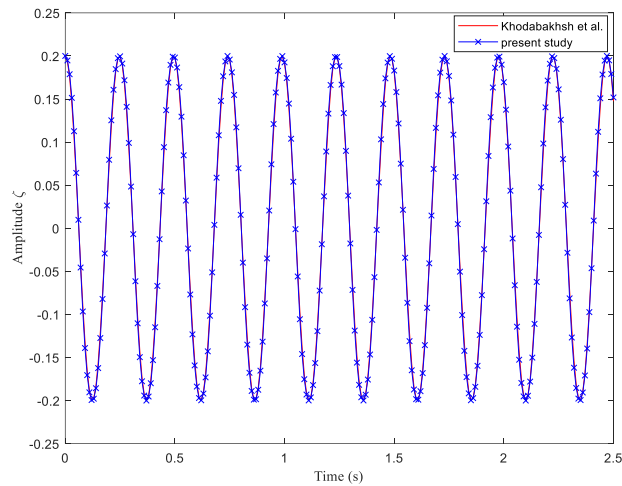


图 2-20 本研究得到的复合管无量纲振幅与 Khodabakhsh 等的结果比较图

2.5 本章小结

本文建立了一种新型的纤维增强复合材料输送固液两相流管道的非线性动力学模型，研究了管道的非线性力学行为，通过对材料纤维取向角的调整，可以提高管道的结构强度和系统的稳定性。基于哈密顿原理，推导了大变形管道的非线性横向控制方程。利用解析法得到了结构的后屈曲位形，并采用同伦分析方法得到了结构在非线性自由振动下的闭式响应。通过数值算例说明了纤维取向角和滑移比等参数对复合材料管材后屈曲、液相临界流速和非线性频率等非线性行为的影响。主要结论如下：

(1) 对于复合管而言，其振动初始幅值越低，对应的非线性频率也就越低。而当流速、液固密度以及管道长度不断增加时，这些因素对管道非线性频率产生的影响会逐渐减小。

(2) 当流速、初始张力和滑移比较小时，以及体积比较大时，复合管材处于稳定状态，变形响应均为零。而当这些控制参数超过或低于临界值时，系统会发生草叉分岔，进入后屈曲状态。

(3) 当纤维取向角较小时，纤维取向角的增大会使液相的非线性固有频率和临界流速明显减小，但当纤维取向角较大时，这两种行为几乎不会对固有频率产生影响。

(4) 同伦分析方法能准确地找到输送固液两相流的复合管的解析解，与龙格-

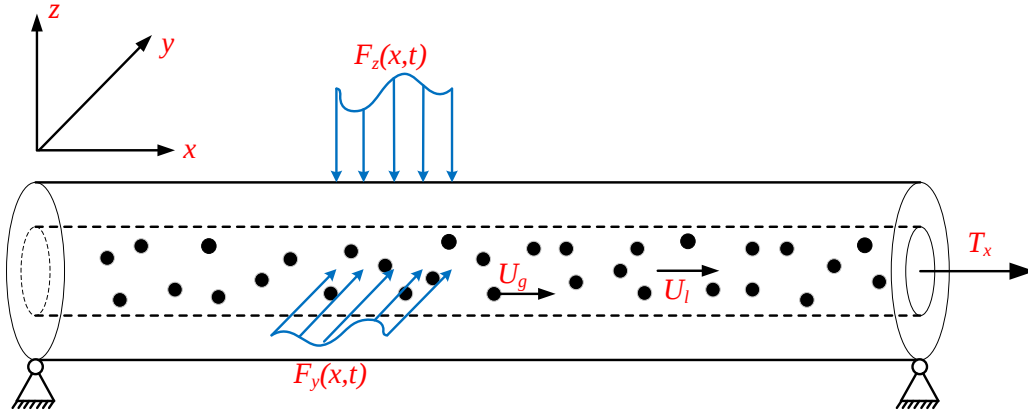
库塔法的解析解进行比较验证，除此之外，将本文的研究方法所得结果与文献中的相关结果进行对比，证实了本文所采用研究方法的有效性。该研究可为基于声学黑洞结构等被动技术研究两相流输送管道的振动抑制提供重要参考。

第3章 输送两相流纤维增强复合管道的建模与非线性受迫振动分析

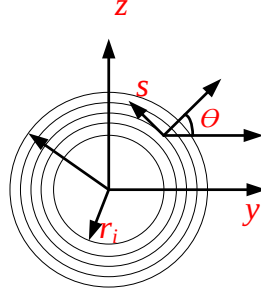
在本章中,首先针对输送两相流纤维增强复合管道构建了相应的模型。随后,将欧拉-伯努利梁理论与哈密顿变分原理相结合,以此为基础建立了管道受迫振动系统的动力学控制方程。在求解该控制方程时,采用了谐波平衡法并配合伪弧长延拓法。通过设计数值算例,深入探讨了液相速度、激励振幅、液相体积系数、阻尼系数以及纤维取向角等多种因素对频率响应所产生的影响。此外,借助数值模拟的方法,进一步对分岔和混沌等非线性动力学的演化过程展开了深入研究。

3.1 管道模型

如图 3-1 所示,考虑了一种各向异性 FRC 管道,管道两侧均为简单支撑,用于输送气液两相流。管道承受水平方向上的周期性外力 $\hat{F}_y(\hat{x},\hat{t})$ 和垂直方向的周期性外力 $\hat{F}_z(\hat{x},\hat{t})$ 。管道长度为 $\hat{L}$,内半径和外半径分别为 $\hat{r}_i$ 和 $\hat{r}_o$ 。本研究采用笛卡尔坐标系 $(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$,位移场定义为 $(\hat{u},\hat{v},\hat{w})$ 。同时采用局部坐标系 $(\hat{s},\hat{n},\hat{z})$ 来更准确地描述 FRC 管的横截面。 $\hat{\theta}$ 是纤维取向角,用于表示方向 $\hat{n}$ 和方向 $\hat{s}$ 之间的角度。FRC 管分别以气相速度 $\hat{U}_g$ 和液相速度 $\hat{U}_l$ 传输气液流。为了简化模型,特提出如下假设:将 FRC 管视作细长梁,基于此运用欧拉-伯努利梁理论;假定管道处于不倾斜状态,且管壁表面光滑;同时假设管道所输送的两相流体流型为分层流。



(a) 主视图



(b) 侧视图

图 3-1 输送两相流纤维增强复合管道的模型示意图

3.2 管道控制方程

为了得到系统的运动方程，哈密顿原理采用以下形式：

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\hat{T}_l + \hat{T}_g + \hat{T}_p - \hat{V}_p - \hat{W}_{ef}) dt = 0 \quad (3-1)$$

其中， $\hat{T}_l$ 、 $\hat{T}_g$ 和 $\hat{T}_p$ 分别代表液相、气相和管道的动能。 $\hat{V}_p$ 表示管道的势能，

$\hat{W}_{ef}$ 代表非保守力产生的虚功。

动能可以表示为：

$$\hat{T}_p = \frac{1}{2} \hat{m}_p \int_0^L \left(\left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial t} \right)^2 \right) d\bar{x} \quad (3-2)$$

$$\hat{T}_l = \frac{1}{2} \hat{m}_l \int_0^L \left\{ \left[\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \hat{U}_l \left(1 + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{x}} \right) \right]^2 + \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + \hat{U}_l \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial t} + \hat{U}_l \frac{\partial \hat{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 \right\} d\bar{x} \quad (3-3)$$

$$\hat{T}_g = \frac{1}{2} \hat{m}_g \int_0^L \left\{ \left[\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \hat{U}_g \left(1 + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{x}} \right) \right]^2 + \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + \hat{U}_g \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial t} + \hat{U}_g \frac{\partial \hat{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 \right\} d\bar{x} \quad (3-4)$$

其中， $\hat{m}_p$ 、 $\hat{m}_l$ 和 $\hat{m}_g$ 表示 FRC 管、液相和气相的单位长度质量，其表达式为

$$\hat{m}_p = \oint \sum_{k=1}^{\hat{N}} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \hat{\rho}_p^{(k)} d\hat{n} d\hat{s} \quad (3-5)$$

$$\hat{m}_l = \int_0^{2\pi} \int_0^{\hat{r}_l} \hat{Q}_l \hat{\rho}_l \hat{r} d\hat{r} \quad (3-6)$$

$$\hat{m}_g = \int_0^{2\pi} \int_0^{\hat{r}_i} \hat{Q}_g \hat{\rho}_g \hat{r} d\hat{r} \quad (3-7)$$

在式(3-5)中， $\hat{N}$ 代表 FRC 材料的层数， $\hat{\rho}_p^{(k)}$ 代表第 k 层的密度。式(3-6)的 $\hat{Q}_l$

和式(3-7)中的 $\hat{Q}_g$ 分别代表液相和气相的体积系数，它们的密度分别为 $\hat{\rho}_l$ 和 $\hat{\rho}_g$ 。

引入滑移率 $\hat{\beta}$ 来表示液相和气相速度之间的关系，其形式如下：

$$\hat{U}_g = \hat{U}_l \hat{\beta} \quad (3-8)$$

FRC 管道的势能为

$$\hat{V}_p = \frac{\hat{E}\hat{A}}{2} \int_0^{\hat{L}} \hat{\varepsilon}^2 d\hat{x} + \frac{\hat{E}\hat{I}}{2} \int_0^{\hat{L}} \left[(1 + \hat{\varepsilon})^2 \hat{\kappa}^2 \right] d\hat{x} \quad (3-9)$$

其中， $\hat{E}\hat{A}$ 和 $\hat{E}\hat{I}$ 分别为 FRC 管的轴向刚度和弯曲刚度。此外， $\hat{\kappa}$ 表示曲率， $\hat{\varepsilon}$ 表示应变。它们的表达式如下：

$$\hat{E}\hat{A} = 2\pi\hat{K}_{(1)}\hat{r}_m \quad (3-10)$$

$$\hat{E}\hat{I} = \pi\hat{K}_{(1)}\hat{r}_m^3 + \pi\hat{K}_{(4)}\hat{r}_m \quad (3-11)$$

$$\hat{\varepsilon} = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}}\right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}}\right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}}\right)^2} - 1 \quad (3-12)$$

$$\hat{\kappa} = \sqrt{\left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x}^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{x}^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2}\right)^2} \quad (3-13)$$

附录中详细显示了式(3-10)和(3-11)中的参数 $\hat{K}_{(1)}$ 和 $\hat{K}_{(4)}$ 的计算过程。假设：

$\hat{u} \sim O(\hat{\varepsilon}^2)$ ， $\hat{v} \sim O(\hat{\varepsilon}^2)$ ， $\hat{w} \sim O(\hat{\varepsilon})$ ，可以推导出

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \right)^2 + O(\hat{\varepsilon}^4) \quad (3-14)$$

$$\hat{\kappa} = \left(\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{x}^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} \right)^2 + O(\hat{\varepsilon}^4) \quad (3-15)$$

将式(3-14)和(3-15)代入式(3-9)并进行变分运算，得出

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta \hat{V}_p dt &= \hat{E}\hat{I} \int_0^{\hat{L}} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial^4 \hat{v}}{\partial \hat{x}^4} \delta \hat{v} + \frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial \hat{x}^4} \delta \hat{w} \right) d\hat{x} dt - \int_0^{\hat{L}} \int_{t_1}^{t_2} \hat{E}\hat{A} \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} \right) \delta \hat{u} d\hat{x} dt \\ &- \int_0^{\hat{L}} \int_{t_1}^{t_2} \left[\hat{E}\hat{A} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x}^2} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}} + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} \right) \right] \delta \hat{v} d\hat{x} dt \\ &- \int_0^{\hat{L}} \int_{t_1}^{t_2} \left[\hat{E}\hat{A} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x}^2} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{x}^2} \right) \right] \delta \hat{w} d\hat{x} dt \end{aligned} \quad (3-16)$$

虚功的表达式为

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \hat{W}_{ef} dt = \int_{t_1}^{t_2} (\hat{F}_y \delta \hat{v} + \hat{F}_z \delta \hat{w}) dt \quad (3-17)$$

其中, $\hat{F}_y$ 和 $\hat{F}_z$ 分别是水平和垂直方向上的周期性外力。

将式(3-2)、(3-3)、(3-4)、(3-16)和(3-17)代入式(3-1)并进行变分运算, 得到输送气液两相流的 FRC 管的三维动力学控制方程。

$$\begin{aligned} & (\hat{m}_p + \hat{m}_l + \hat{m}_g) \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} + 2\hat{m}_l \hat{U}_l \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t \partial \bar{x}} + 2\hat{m}_g \hat{U}_g \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t \partial \bar{x}} + \hat{m}_l \hat{U}_l^2 \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \bar{x}^2} + \hat{m}_g \hat{U}_g^2 \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \bar{x}^2} \\ & - \hat{E} \hat{A} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \bar{x}^2} - \hat{E} \hat{A} \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \bar{x}^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3-18)$$

$$\begin{aligned} & (\hat{m}_p + \hat{m}_l + \hat{m}_g) \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial t^2} + (2\hat{m}_l \hat{U}_l + 2\hat{m}_g \hat{U}_g) \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial t \partial \bar{x}} + (\hat{m}_l \hat{U}_l^2 + \hat{m}_g \hat{U}_g^2) \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \bar{x}^2} + \hat{E} \hat{I} \frac{\partial^4 \hat{v}}{\partial \bar{x}^4} \\ & - \hat{E} \hat{A} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \bar{x}^2} \right) = \hat{F}_y \end{aligned} \quad (3-19)$$

$$\begin{aligned} & (\hat{m}_p + \hat{m}_l + \hat{m}_g) \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial t^2} + (2\hat{m}_l \hat{U}_l + 2\hat{m}_g \hat{U}_g) \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial t \partial \bar{x}} + (\hat{m}_l \hat{U}_l^2 + \hat{m}_g \hat{U}_g^2) \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \bar{x}^2} + \hat{E} \hat{I} \frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial \bar{x}^4} \\ & - \hat{E} \hat{A} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \bar{x}} + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \bar{x}^2} \right) = \hat{F}_z \end{aligned} \quad (3-20)$$

考虑到本文中 FRC 管道的运动被视为有限拉伸问题, 故式(3-18)中的时间相关项被忽略。此外, 与 $\hat{E} \hat{A}$ 相比, 液相和气相的刚度项 $\hat{m}_l \hat{U}_l^2$ 、 $\hat{m}_g \hat{U}_g^2$ 小到可以忽略不计。在执行简化后, 式(3-18)变为以下形式

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \bar{x}^2} = - \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \bar{x}^2} \right) \quad (3-21)$$

对上述方程对 $\bar{x}$ 进行两次积分运算, 可以得到

$$\hat{u} = -\frac{1}{2} \int_0^{\bar{x}} \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 d\bar{x} + \hat{C}_1 \bar{x} + \hat{C}_2 \quad (3-22)$$

其中 $\hat{C}_1$ 和 $\hat{C}_2$ 是由边界条件确定的系数, 可以写成:

$$\hat{u}(\bar{x} = 0) = 0 \quad (3-23)$$

$$\hat{u}(\bar{x} = \hat{L}) = \frac{\hat{T}_x}{\hat{E} \hat{A} \hat{L}} \int_0^{\hat{L}} \frac{1}{1 + \varepsilon} \left(1 + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{x}} \right) d\bar{x} \quad (3-24)$$

将式(3-23)和式(3-24)代入式(3-22)得到

$$\begin{aligned}\hat{C}_1 &= \frac{\hat{T}_x}{\hat{E}\hat{A}\hat{L}} \int_0^{\hat{L}} \frac{1}{1+\hat{\varepsilon}} \left(1 + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} \right) d\hat{x} + \frac{1}{2\hat{L}} \int_0^{\hat{L}} \left[\left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \right)^2 \right] d\hat{x} \\ \hat{C}_2 &= 0\end{aligned}\quad (3-25)$$

将式(3-22)和(3-25)代入式(3-19)和(3-20)中，可以得到

$$\begin{aligned}& \left(\hat{m}_p + \hat{m}_l + \hat{m}_g \right) \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial t^2} + \left(2\hat{m}_l \hat{U}_l + 2\hat{m}_g \hat{U}_g \right) \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial t \partial \hat{x}} + \left(\hat{m}_l \hat{U}_l^2 + \hat{m}_g \hat{U}_g^2 \right) \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{x}^2} - \hat{T}_x \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{x}^2} \\ & + \hat{E}\hat{I} \frac{\partial^4 \hat{v}}{\partial \hat{x}^4} + \left(\hat{T}_x - \hat{E}\hat{A} \right) \frac{1}{2\hat{L}} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{x}^2} \int_0^{\hat{L}} \left[\left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \right)^2 \right] d\hat{x} = \hat{F}_y\end{aligned}\quad (3-26)$$

$$\begin{aligned}& \left(\hat{m}_p + \hat{m}_l + \hat{m}_g \right) \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial t^2} + \left(2\hat{m}_l \hat{U}_l + 2\hat{m}_g \hat{U}_g \right) \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial t \partial \hat{x}} + \left(\hat{m}_l \hat{U}_l^2 + \hat{m}_g \hat{U}_g^2 \right) \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} - \hat{T}_x \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} \\ & + \hat{E}\hat{I} \frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial \hat{x}^4} + \left(\hat{T}_x - \hat{E}\hat{A} \right) \frac{1}{2\hat{L}} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} \int_0^{\hat{L}} \left[\left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \right)^2 \right] d\hat{x} = \hat{F}_z\end{aligned}\quad (3-27)$$

管道材料的外部阻尼和 Kelvin-Voigt 粘度对动态行为有显著影响，将阻尼引入式(3-26)和(3-27)，可以得出

$$\begin{aligned}& \left(\hat{m}_p + \hat{m}_l + \hat{m}_g \right) \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial t^2} + \left(2\hat{m}_l \hat{U}_l + 2\hat{m}_g \hat{U}_g \right) \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial t \partial \hat{x}} + \left(\hat{m}_l \hat{U}_l^2 + \hat{m}_g \hat{U}_g^2 \right) \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{x}^2} - \hat{T}_x \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{x}^2} \\ & + \hat{E}\hat{I} \left(1 + \hat{\eta} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^4 \hat{v}}{\partial \hat{x}^4} + \hat{C}_d \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + \left(\hat{T}_x - \hat{E}\hat{A} \right) \frac{1}{2\hat{L}} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{x}^2} \int_0^{\hat{L}} \left[\left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \right)^2 \right] d\hat{x} \\ & + \hat{\eta} \left(\hat{T}_x - \hat{E}\hat{A} \right) \frac{1}{2\hat{L}} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{x}^2} \int_0^{\hat{L}} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \right)^2 \right] d\hat{x} = \hat{F}_y\end{aligned}\quad (3-28)$$

$$\begin{aligned}& \left(\hat{m}_p + \hat{m}_l + \hat{m}_g \right) \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial t^2} + \left(2\hat{m}_l \hat{U}_l + 2\hat{m}_g \hat{U}_g \right) \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial t \partial \hat{x}} + \left(\hat{m}_l \hat{U}_l^2 + \hat{m}_g \hat{U}_g^2 \right) \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} - \hat{T}_x \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} \\ & + \hat{E}\hat{I} \left(1 + \hat{\eta} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial \hat{x}^4} + \hat{C}_d \frac{\partial \hat{w}}{\partial t} + \left(\hat{T}_x - \hat{E}\hat{A} \right) \frac{1}{2\hat{L}} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} \int_0^{\hat{L}} \left[\left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \right)^2 \right] d\hat{x} \\ & + \hat{\eta} \left(\hat{T}_x - \hat{E}\hat{A} \right) \frac{1}{2\hat{L}} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} \int_0^{\hat{L}} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \right)^2 \right] d\hat{x} = \hat{F}_z\end{aligned}\quad (3-29)$$

其中， $\hat{\eta}$ 和 $\hat{C}_d$ 分别表示粘度系数和阻尼系数。

无量纲变量采用以下形式：

$$\begin{aligned}
 \tilde{\xi} &= \frac{\hat{x}}{\hat{L}}, \tilde{u} = \frac{\hat{u}}{\hat{L}}, \tilde{v} = \frac{\hat{v}}{\hat{L}}, \tilde{w} = \frac{\hat{w}}{\hat{L}}, \tau = \sqrt{\frac{\hat{E}_1 \hat{I}}{\hat{m}_p + \hat{m}_l + \hat{m}_g}} \frac{t}{\hat{L}^2}, \tilde{K}_l = \frac{\hat{m}_l}{\hat{m}_p + \hat{m}_l + \hat{m}_g}, \\
 \tilde{K}_g &= \frac{\hat{m}_g}{\hat{m}_p + \hat{m}_l + \hat{m}_g}, \tilde{V}_l = \hat{L} \hat{U}_l \sqrt{\frac{\hat{m}_l}{\hat{E}_1 \hat{I}}}, \tilde{t}_x = \frac{\hat{L}^2 \hat{T}_x}{\hat{E}_1 \hat{I}}, \tilde{\beta} = \frac{\hat{U}_g}{\hat{U}_l}, \tilde{\chi} = \frac{\hat{E} \hat{A} \hat{L}^2}{2 \hat{E}_1 \hat{I}}, \\
 \tilde{c} &= \frac{\hat{C}_d \hat{L}^2}{\sqrt{(\hat{m}_p + \hat{m}_l + \hat{m}_g) \hat{E}_1 \hat{I}}}, \tilde{\lambda} = \frac{\hat{E} \hat{I}}{\hat{E}_1 \hat{I}}, \tilde{\eta} = \frac{\hat{\eta}}{\hat{L}^2} \sqrt{\frac{\hat{E}_1 \hat{I}}{\hat{m}_p + \hat{m}_l + \hat{m}_g}}
 \end{aligned} \quad (3-30)$$

将式(3-30)代入式(3-28)和(3-29)中，得到以下无量纲形式：

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tau^2} + \left(2\sqrt{\tilde{K}_l} \tilde{V}_l + 2 \frac{\tilde{K}_g}{\sqrt{\tilde{K}_l}} \tilde{V}_l \tilde{\beta} \right) \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tau \partial \tilde{\xi}} + \left(\tilde{V}_l^2 + \frac{\tilde{K}_g}{\tilde{K}_l} \tilde{V}_l^2 \tilde{\beta}^2 \right) \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{\xi}^2} \\
 &+ \tilde{\lambda} \left(1 + \tilde{\eta} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \frac{\partial^4 \tilde{v}}{\partial \tilde{\xi}^4} + \tilde{c} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tau} - \tilde{t}_x \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{\xi}^2} + \left(\frac{\tilde{t}_x}{2} - \tilde{\chi} \right) \int_0^1 \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{\xi}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{\xi}} \right)^2 d\tilde{\xi} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{\xi}^2} \\
 &+ \tilde{\eta} \left(\frac{\tilde{t}_x}{2} - \tilde{\chi} \right) \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{\xi}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{\xi}} \right)^2 \right) d\tilde{\xi} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{\xi}^2} = \tilde{f}_y
 \end{aligned} \quad (3-31)$$

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tau^2} + \left(2\sqrt{\tilde{K}_l} \tilde{V}_l + 2 \frac{\tilde{K}_g}{\sqrt{\tilde{K}_l}} \tilde{V}_l \tilde{\beta} \right) \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tau \partial \tilde{\xi}} + \left(\tilde{V}_l^2 + \frac{\tilde{K}_g}{\tilde{K}_l} \tilde{V}_l^2 \tilde{\beta}^2 \right) \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{\xi}^2} \\
 &+ \tilde{\lambda} \left(1 + \tilde{\eta} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{\xi}^4} + \tilde{c} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tau} - \tilde{t}_x \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{\xi}^2} + \left(\frac{\tilde{t}_x}{2} - \tilde{\chi} \right) \int_0^1 \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{\xi}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{\xi}} \right)^2 d\tilde{\xi} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{\xi}^2} \\
 &+ \tilde{\eta} \left(\frac{\tilde{t}_x}{2} - \tilde{\chi} \right) \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{\xi}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{\xi}} \right)^2 \right) d\tilde{\xi} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{\xi}^2} = \tilde{f}_z
 \end{aligned} \quad (3-32)$$

3.3 谐波平衡法

为了推导输送两相流的纤维增强复合材料(FRC)管道的常微分控制方程，利用 Galerkin 方法对式(3-31)和(3-32)进行离散化。管道在水平和垂直方向上的位移表示为

$$\begin{aligned}
 \tilde{v}(\tilde{\xi}, \tau) &= \sum_{m=1}^N \hat{v}_m(\tau) \phi_m(\tilde{\xi}) \\
 \tilde{w}(\tilde{\xi}, \tau) &= \sum_{m=1}^N \hat{w}_m(\tau) \phi_m(\tilde{\xi})
 \end{aligned} \quad (3-33)$$

周期性外力为

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}_y(\tilde{\xi}, \tau) &= \sum_{m=1}^N \hat{f}_y(\tau) \tilde{\phi}_m(\tilde{\xi}) \\
 \tilde{f}_z(\tilde{\xi}, \tau) &= \sum_{m=1}^N \hat{f}_z(\tau) \tilde{\phi}_m(\tilde{\xi})
 \end{aligned} \quad (3-34)$$

在上述方程中, N 表示截断模态的数量, $\hat{v}_m(\tau)$ 和 $\hat{w}_m(\tau)$ 是广义坐标。 $\tilde{\phi}_m(\tilde{\xi})$ 表示 FRC 管道的第 m 阶模态函数。 $\hat{f}_y(\tau)$ 和 $\hat{f}_z(\tau)$ 是周期函数, 分别设置为

$$\begin{aligned}\hat{f}_y(\tau) &= f_y \sin(\tilde{\omega}\tau + \tilde{\omega}_y) \\ \hat{f}_z(\tau) &= f_z \sin(\tilde{\omega}\tau + \tilde{\omega}_z)\end{aligned}\quad (3-35)$$

其中 f_y 和 f_z 是激励的幅值, $\tilde{\omega}$ 代表激励的频率。此外, $\tilde{\omega}_y$ 和 $\tilde{\omega}_z$ 分别代表水平和垂直方向上激励的初始相位角。这两个角度之间的相位差由 $\bar{\theta}$ 表示。

本研究采用微分求积法来准确预测动态行为。根据参考文献^[83], 认为二阶截断足以确保系统精度。因此, 选择二阶截断进行分析。将式(3-33)和(3-34)代入式(3-31)和(3-32)中, 再将得到的方程式乘以 $\tilde{\phi}_m(\tilde{\xi})$ 并在 0 到 1 的区间上对 $\tilde{\xi}$ 积分后, 得到

$$\begin{aligned}& \sum_{m=1}^N \psi_{sm}^{(1)} \frac{d^2 \hat{v}_m}{d\tau^2} + \sum_{m=1}^N \psi_{sm}^{(2)} \frac{d\hat{v}_m}{d\tau} + \sum_{m=1}^N \psi_{sm}^{(3)} \hat{v}_m + \tilde{\eta} \left(\frac{\tilde{t}_x}{2} - \tilde{\chi} \right) \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \sum_{h=1}^N \psi_{smnh}^{(4)} \frac{d\hat{v}_m}{d\tilde{\xi}} \hat{v}_n \hat{v}_h \\ & + \tilde{\eta} \left(\frac{\tilde{t}_x}{2} - \tilde{\chi} \right) \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \sum_{h=1}^N \psi_{smnh}^{(4)} \frac{d\hat{v}_m}{d\tilde{\xi}} \hat{w}_n \hat{w}_h + \left(\frac{\tilde{t}_x}{2} - \tilde{\chi} \right) \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \sum_{h=1}^N \psi_{smnh}^{(4)} \hat{v}_m \hat{v}_n \hat{v}_h \\ & + \left(\frac{\tilde{t}_x}{2} - \tilde{\chi} \right) \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \sum_{h=1}^N \psi_{smnh}^{(4)} \hat{v}_m \hat{w}_n \hat{w}_h = \sum_{m=1}^N \psi_{sm}^{(1)} \hat{f}_y\end{aligned}\quad (3-36)$$

$$\begin{aligned}& \sum_{m=1}^N \psi_{sm}^{(1)} \frac{d^2 \hat{w}_m}{d\tau^2} + \sum_{m=1}^N \psi_{sm}^{(2)} \frac{d\hat{w}_m}{d\tau} + \sum_{m=1}^N \psi_{sm}^{(3)} \hat{w}_m + \tilde{\eta} \left(\frac{\tilde{t}_x}{2} - \tilde{\chi} \right) \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \sum_{h=1}^N \psi_{smnh}^{(4)} \frac{d\hat{w}_m}{d\tilde{\xi}} \hat{v}_n \hat{v}_h \\ & + \tilde{\eta} \left(\frac{\tilde{t}_x}{2} - \tilde{\chi} \right) \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \sum_{h=1}^N \psi_{smnh}^{(4)} \frac{d\hat{w}_m}{d\tilde{\xi}} \hat{w}_n \hat{w}_h + \left(\frac{\tilde{t}_x}{2} - \tilde{\chi} \right) \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \sum_{h=1}^N \psi_{smnh}^{(4)} \hat{w}_m \hat{v}_n \hat{v}_h \\ & + \left(\frac{\tilde{t}_x}{2} - \tilde{\chi} \right) \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \sum_{h=1}^N \psi_{smnh}^{(4)} \hat{w}_m \hat{w}_n \hat{w}_h = \sum_{m=1}^N \psi_{sm}^{(1)} \hat{f}_z\end{aligned}\quad (3-37)$$

其中

$$\begin{aligned}\psi_{sm}^{(1)} &= \int_0^1 \tilde{\phi}_s \tilde{\phi}_m d\tilde{\xi}, \\ \psi_{sm}^{(2)} &= \left(2\sqrt{\tilde{K}_l} \tilde{V}_l + 2 \frac{\tilde{K}_g}{\sqrt{\tilde{K}_l}} \tilde{V}_l \tilde{\beta} \right) \int_0^1 \tilde{\phi}_s \frac{d\tilde{\phi}_m}{d\tilde{\xi}} d\tilde{\xi} + \tilde{\lambda} \tilde{\eta} \int_0^1 \tilde{\phi}_s \frac{d^4 \tilde{\phi}_m}{d\tilde{\xi}^4} d\tilde{\xi} + c \int_0^1 \tilde{\phi}_s \tilde{\phi}_m d\tilde{\xi}, \\ \psi_{sm}^{(3)} &= \lambda \int_0^1 \tilde{\phi}_s \frac{d^4 \tilde{\phi}_m}{d\tilde{\xi}^4} d\tilde{\xi} + \left(\tilde{V}_l^2 + \frac{\tilde{K}_g}{\tilde{K}_l} \tilde{V}_l^2 \tilde{\beta}^2 - \tilde{t}_x \right) \int_0^1 \tilde{\phi}_s \frac{d^2 \tilde{\phi}_m}{d\tilde{\xi}^2} d\tilde{\xi}, \\ \psi_{smnh}^{(4)} &= \int_0^1 \tilde{\phi}_s \frac{d^2 \tilde{\phi}_m}{d\tilde{\xi}^2} d\tilde{\xi} \int_0^1 \frac{d\tilde{\phi}_n}{d\tilde{\xi}} \frac{d\tilde{\phi}_h}{d\tilde{\xi}} d\tilde{\xi}\end{aligned}\quad (3-38)$$

随后, 采用谐波平衡法 (HBM) 对系统里的强非线性振动以及弱非线性振动展开求解。在该方法框架下, 广义坐标借助傅里叶级数展开的方式进行近似处理,

具体如下。

$$\hat{v}_m(\tau) = X_m^{(0)} + \sum_{i=1}^Z X_{m,i}^{(1)} \cos(\tilde{i}\omega\tau) + \sum_{i=1}^Z X_{m,i}^{(2)} \sin(\tilde{i}\omega\tau) \quad (3-39)$$

$$\hat{w}_m(\tau) = \Xi_m^{(0)} + \sum_{i=1}^Z \Xi_{m,i}^{(1)} \cos(\tilde{i}\omega\tau) + \sum_{i=1}^Z \Xi_{m,i}^{(2)} \sin(\tilde{i}\omega\tau) \quad (3-40)$$

其中 z 代表谐波阶数。并且 $X_m^{(0)}$ 和 $\Xi_m^{(0)}$ 是常数项, $X_{m,i}^{(1)}$ 、 $X_{m,i}^{(2)}$ 、 $\Xi_{m,i}^{(1)}$ 和 $\Xi_{m,i}^{(2)}$ 表示谐波相位系数。广义坐标关于 τ 的一阶和二阶导数可以表示为

$$\frac{d\hat{v}_m}{d\tau} = -\sum_{i=1}^Z \tilde{i}\omega X_{m,i}^{(1)} \sin(\tilde{i}\omega\tau) + \sum_{i=1}^Z \tilde{i}\omega X_{m,i}^{(2)} \cos(\tilde{i}\omega\tau) \quad (3-41)$$

$$\frac{d\hat{w}_m}{d\tau} = -\sum_{i=1}^Z \tilde{i}\omega \Xi_{m,i}^{(1)} \sin(\tilde{i}\omega\tau) + \sum_{i=1}^Z \tilde{i}\omega \Xi_{m,i}^{(2)} \cos(\tilde{i}\omega\tau) \quad (3-42)$$

$$\frac{d^2\hat{v}_m}{d\tau^2} = -\sum_{i=1}^Z (\tilde{i}\omega)^2 X_{m,i}^{(1)} \cos(\tilde{i}\omega\tau) - \sum_{i=1}^Z (\tilde{i}\omega)^2 X_{m,i}^{(2)} \sin(\tilde{i}\omega\tau) \quad (3-43)$$

$$\frac{d^2\hat{w}_m}{d\tau^2} = -\sum_{i=1}^Z (\tilde{i}\omega)^2 \Xi_{m,i}^{(1)} \cos(\tilde{i}\omega\tau) - \sum_{i=1}^Z (\tilde{i}\omega)^2 \Xi_{m,i}^{(2)} \sin(\tilde{i}\omega\tau) \quad (3-44)$$

为了验证 HBM 结果的可行性, 式(3-39)和式(3-40)被重新写为

$$\hat{v}_m(\tau) = X_m^{(0)}(\tau) + \sum_{i=1}^Z X_{m,i}^{(1)}(\tau) \cos(\tilde{i}\omega\tau) + \sum_{i=1}^Z X_{m,i}^{(2)}(\tau) \sin(\tilde{i}\omega\tau) \quad (3-45)$$

$$\hat{w}_m(\tau) = \Xi_m^{(0)}(\tau) + \sum_{i=1}^Z \Xi_{m,i}^{(1)}(\tau) \cos(\tilde{i}\omega\tau) + \sum_{i=1}^Z \Xi_{m,i}^{(2)}(\tau) \sin(\tilde{i}\omega\tau) \quad (3-46)$$

把式(3-45)与(3-46)代入到式(3-36)以及(3-37)中。通过伪弧长扩展法, 求得了谐波项的系数。之后, 由这些系数推导得出的雅可比矩阵被用于对系统响应的稳定性进行评估; 若特征值中的实部为正, 则表明系统处于稳定状态, 反之, 若实部为负, 则意味着系统不稳定。另外, 将龙格-库塔法和 HBM 的结果进行对比, 这对验证分析解的正确性是有帮助的。

3.4 非线性振动分岔分析

本节对纤维增强复合材料(FRC)管道的动态行为进行了全面的数值研究。该研究考察了液相速度、激励振幅、液相体积系数、阻尼系数和纤维取向角等各种因素如何影响系统的共振响应。除非另有规定, 模拟中使用的几何和物理参数详见表 3-1。

首先, 对使用谐波平衡法(HBM)和伪弧长扩展法获得的频率响应曲线与龙格-库塔法得出的频率响应进行了比较。如图 3-2 所示, 两种方法的结果具有高度的一致性, 验证了所提出的分析方法的准确性。

表 3-1 FRC 管的尺寸和材料特性

名称	符号	值
杨氏模量	$\hat{E}_1$	144GPa
	$\hat{E}_2$	4.14GPa
剪切模量	$\hat{G}_s$	9.65GPa
泊松比	$\hat{\nu}_I$	0.3
	$\hat{\nu}_{II}$	0.3
管道密度	$\hat{\rho}_p$	1390kg/m ³
液相密度	$\hat{\rho}_l$	870kg/m ³
气相密度	$\hat{\rho}_g$	0.7kg/m ³
管道内半径	$\hat{r}_i$	0.08m
管道外半径	$\hat{r}_o$	0.1m
管道长度	$\hat{L}$	25m

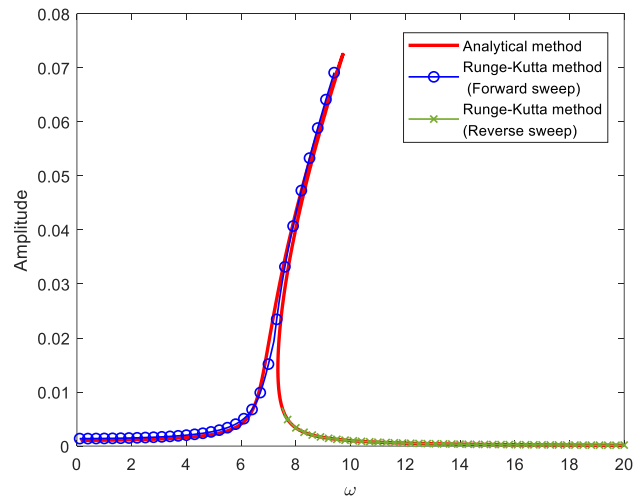


图 3-2 由解析法和龙格-库塔法确定的系统幅频响应的比较图

图 3-3 显示了无量纲液相速度对管道频率响应的影响。研究表明，响应幅值随着液相速度的增加而减小，因为较高的速度会增大管道系统的柔韧性。

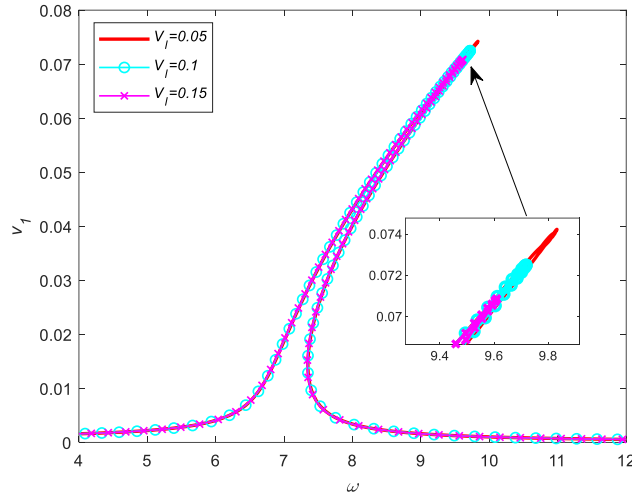


图 3-3 液相速度对输送两相流体的 FRC 管道幅频响应的影响

$$(\tilde{c} = 0.005, f_y = 0.1, \hat{\theta} = 60^\circ, \hat{Q}_l = 0.9)$$

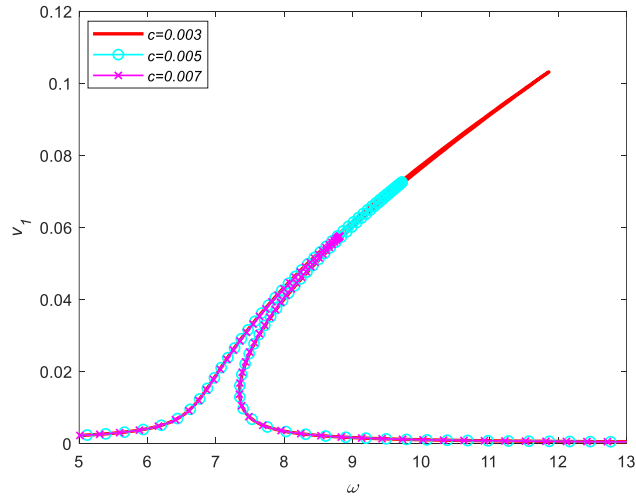


图 3-4 阻尼系数对输送两相流体的 FRC 管道幅频响应的影响

$$(\tilde{V}_l = 0.1, f_y = 0.1, \hat{\theta} = 60^\circ, \hat{Q}_l = 0.9)$$

图 3-4 呈现了阻尼系数给管道频率响应带来的影响。当阻尼系数由 0.003 逐步增大至 0.007 时，最大响应幅度出现了明显的下降。相应地，峰值响应振幅出现的非线性频率也降低了，这表明增加的阻尼有效地减轻了共振响应。

图 3-5 显示了不同激励振幅下响应振幅随激励频率的变化情况。结果表明，随着激励振幅从 0.05 增加到 0.15，与峰值振幅相关的非线性频率下降，而最大响应振幅上升，表明更大的激励振幅会使系统更不稳定。

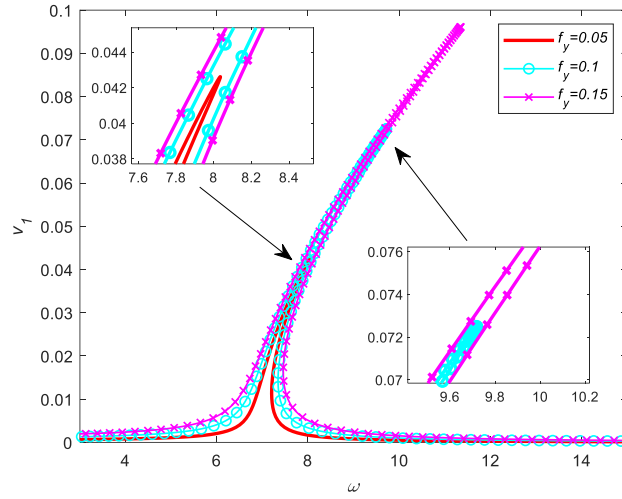


图 3-5 激励幅值对输送两相流体的 FRC 管道幅频响应的影响

$$(\tilde{c} = 0.005, \tilde{V}_l = 0.1, \hat{\theta} = 60^\circ, \hat{Q}_l = 0.9)$$

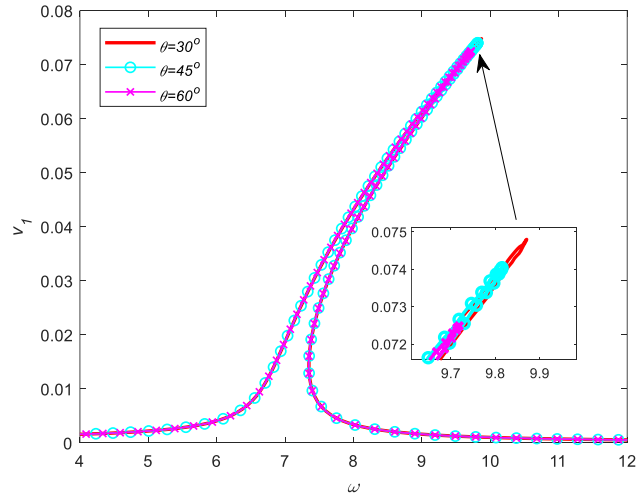


图 3-6 纤维取向角对输送两相流体的 FRC 管道幅频响应的影响

$$(\tilde{c} = 0.005, \tilde{V}_l = 0.1, f_y = 0.1, \hat{Q}_l = 0.9)$$

图 3-6 探讨了纤维取向角在频率响应特性中作为控制参数的作用。观察到，随着纤维取向角的增加，由于复合材料对横向剪切和纵向拉伸应力的抵抗力增强，响应幅度略有减小。

图 3-7 显示了液相体积系数对管道频率响应的影响。分析得出结论，随着液相体积系数从 0.3 增加到 0.9，最大响应幅值和与达到峰值时的非线性频率降低。这一结论具有重要意义，因为它有助于我们理解液相体积对系统行为的影响。

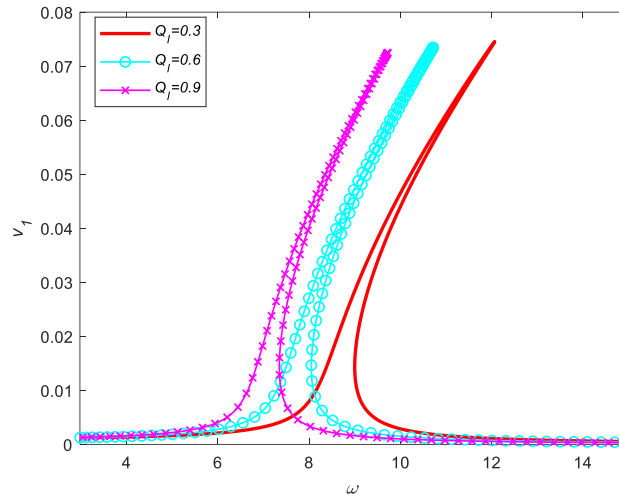


图 3-7 液相体积系数对输送两相流体的 FRC 管道幅频响应的影响

$$(\tilde{c} = 0.005, \tilde{V}_l = 0.1, f_y = 0.1, \hat{\theta} = 60^\circ)$$

图 3-8 显示了 FRC 管道输送两相流时相对于液相流体速度的分岔图。通过对图像的观察可知，在流体速度处于较低水平时，管道系统呈现出单周期运动的状态。然而，随着流体速度的不断提升，系统的运动形式转变为双周期运动。此后，系统在周期性运动形式交替变换的过程中，出现了跳跃现象，进而进入到混沌区间。在经历了第一个混沌区间后，系统通过倍周期分岔现象，依次出现了单周期运动区间、三周期运动区间、单周期运动区间、单周期运动区间、混沌区间以及双周期运动区间。为了进一步验证这些运动，我们给出了不同液相流体速度值下的时程图、振幅谱、相图和庞加莱图，如图 3-9-图 3-14 所示。图 3-8 中的另一个重要观察结果是，当流体速度达到 0.27 时，系统首先失去稳定性，两个混沌区间为 $0.63 < \tilde{V}_l < 1.41$ 和 $2.3 < \tilde{V}_l < 2.43$ ，其他区间中的系统表现出周期性运动。

图 3-15 显示了将两相流输送到液相体积系数的 FRC 管道的分岔图。从图中可以看出当液相体积系数相对较低时，管道系统显示出单周期运动。伴随系数的不断增大，系统逐渐转变为双周期运动状态。此后，系统在单周期运动与双周期运动两种状态之间循环交替，而后进入混沌区间，并且在此过程中伴随着跳跃现象。图 3-16-图 3-18 分别展示了在不同液相体积系数取值情况下，系统所对应的时程图、振幅谱、相图以及庞加莱图。当液相体积系数达到 0.25 时，系统首先失

去稳定性，导致混沌区间 $(0.67 < \hat{Q}_l < 1)$ ，在其他区间表现出周期性运动。

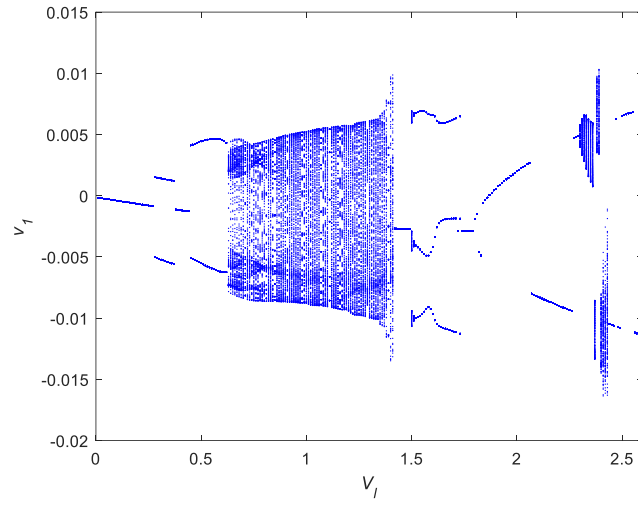


图 3-8 系统响应随 $\tilde{v}_l$ 变化的分岔图($\tilde{c} = 0.005, f_y = 0.1, \hat{\theta} = 60^\circ, \hat{Q}_l = 0.9$)

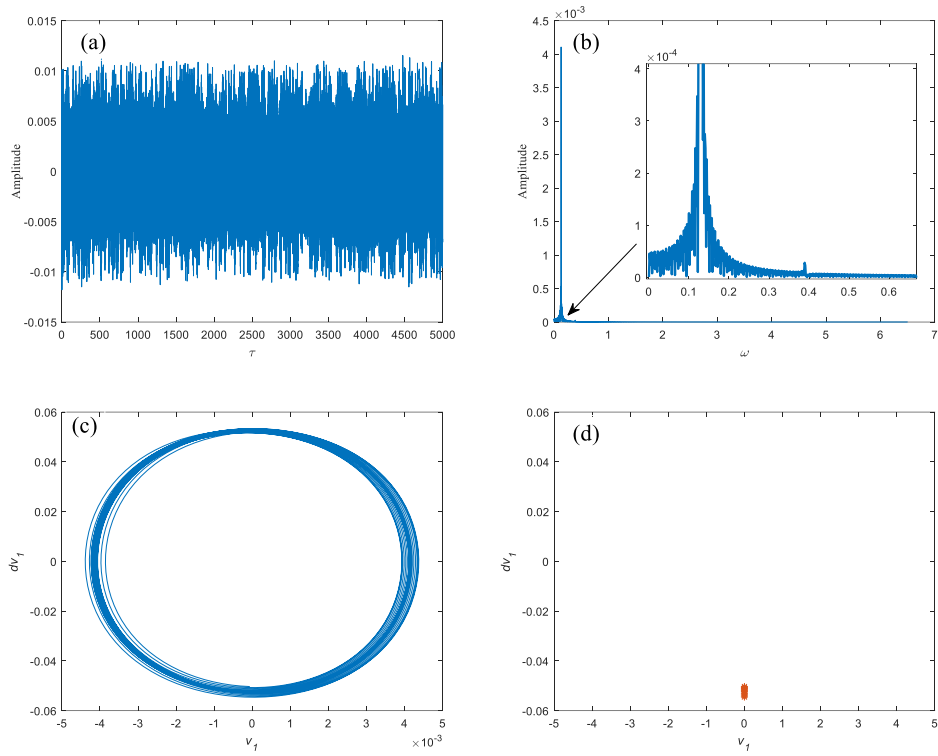


图 3-9 $\tilde{v}_l = 0.1$ 下系统的动力学行为: (a)时程图, (b)振幅谱, (c)相图, (d)庞加莱图

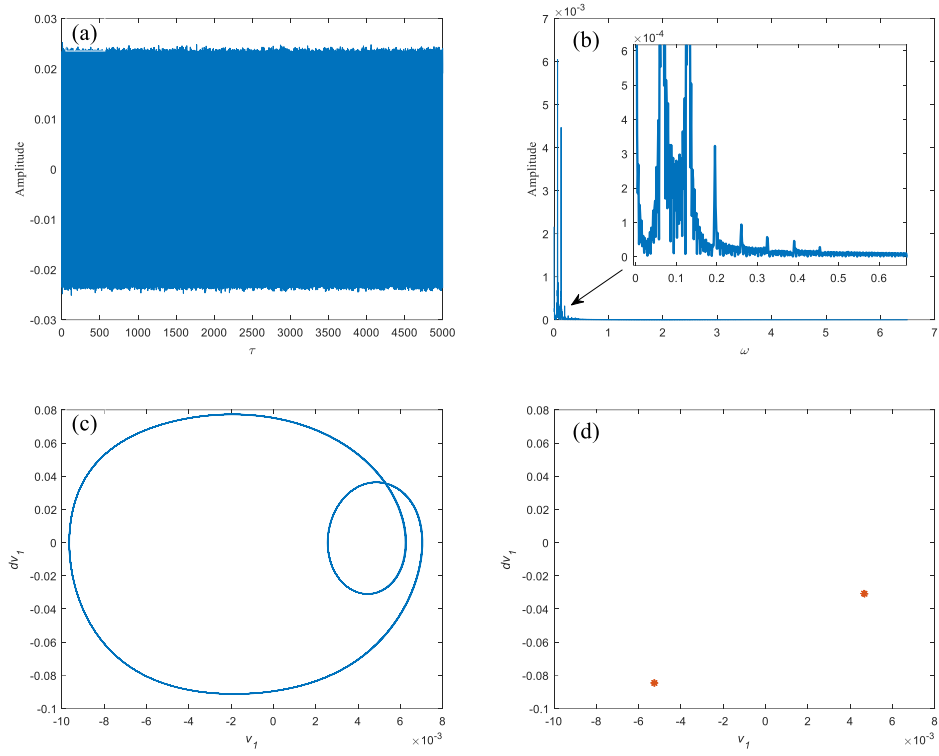


图 3-10 $\tilde{V}_l = 0.5$ 下系统的动力学行为: (a)时程图, (b)振幅谱, (c)相图, (d)庞加莱图

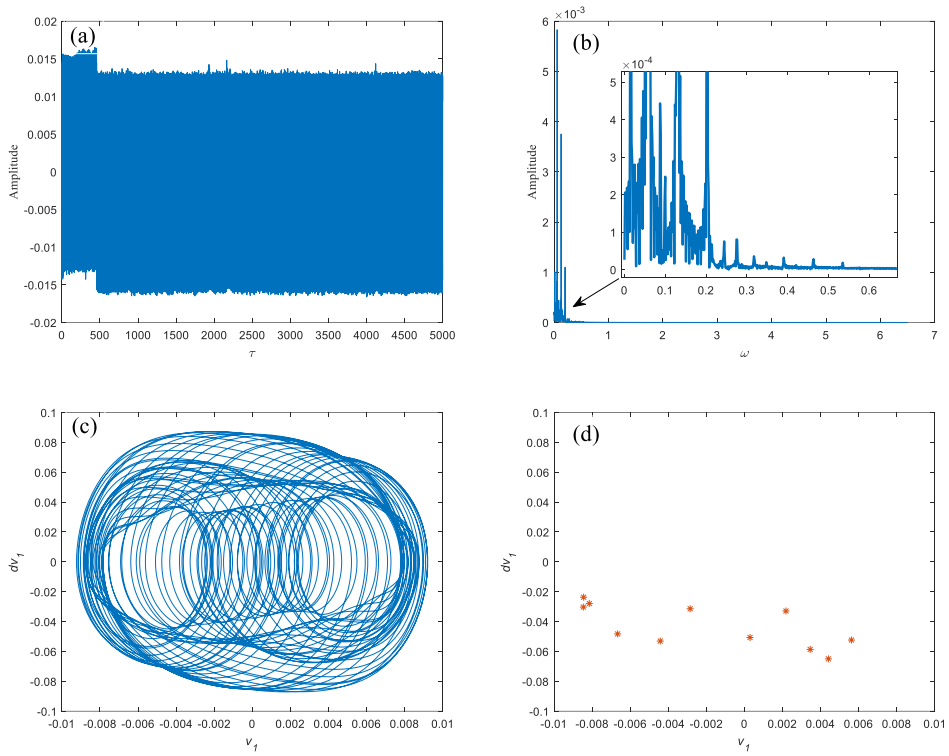


图 3-11 $\tilde{V}_l = 1$ 下系统的动力学行为: (a)时程图, (b)振幅谱, (c)相图, (d)庞加莱图

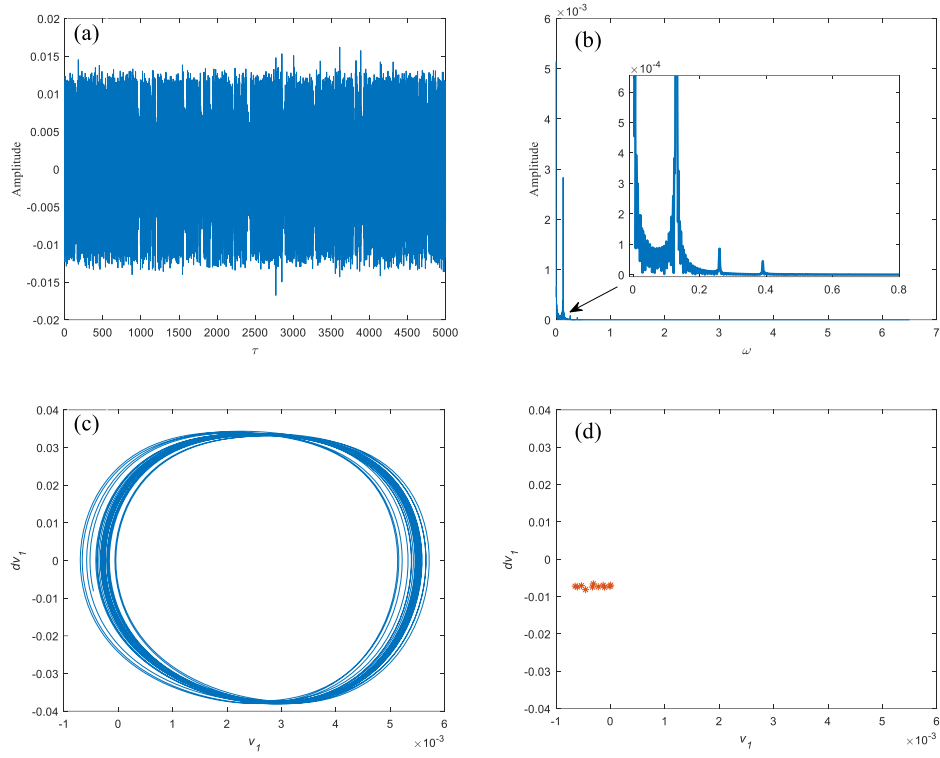


图 3-12 $\tilde{V}_l = 1.5$ 下系统的动力学行为: (a)时程图, (b)振幅谱, (c)相图, (d)庞加莱图

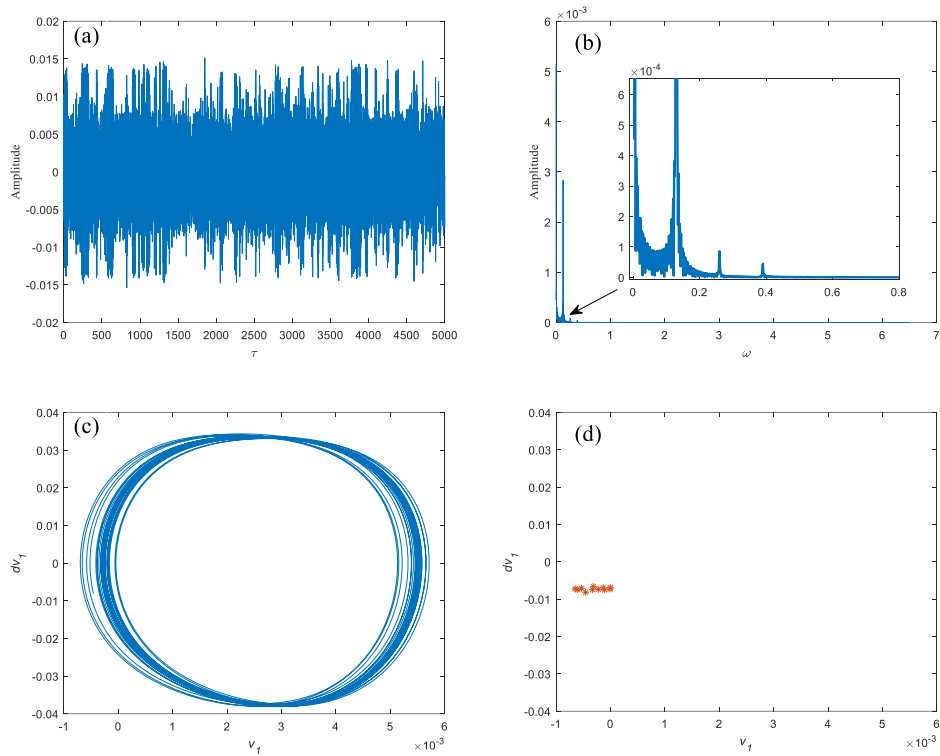


图 3-13 $\tilde{V}_l = 1.8$ 下系统的动力学行为: (a)时程图, (b)振幅谱, (c)相图, (d)庞加莱图

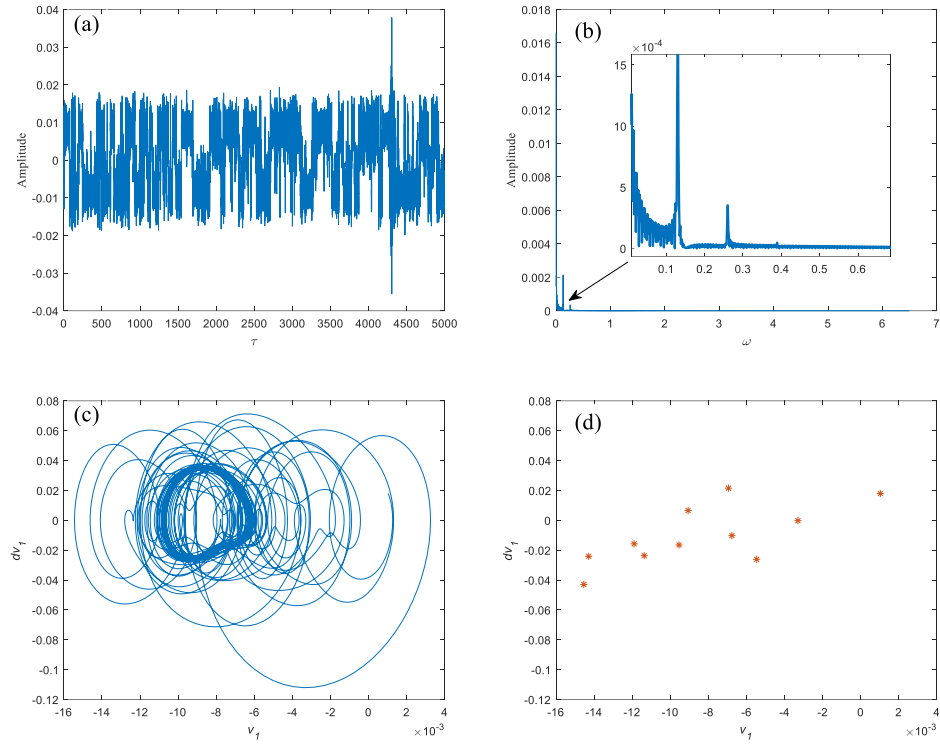


图 3-14 $\tilde{V}_l = 2.4$ 下系统的动力学行为: (a)时程图, (b)振幅谱, (c)相图, (d)庞加莱图

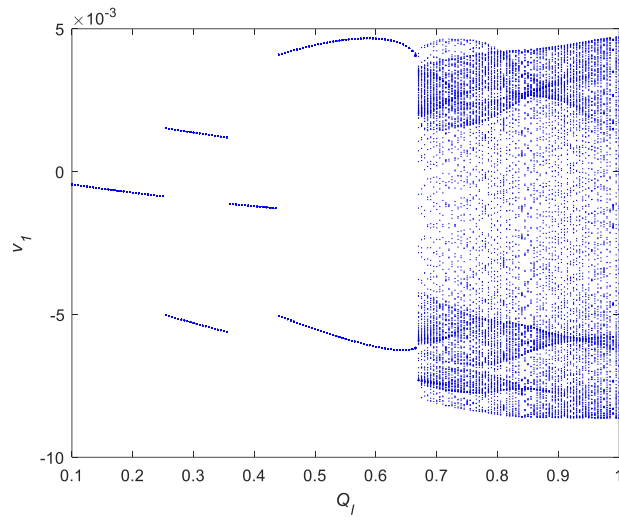


图 3-15 系统响应随 $\bar{Q}_l$ 变化的分岔图 ($\tilde{c} = 0.005, \tilde{V}_l = 0.1, f_y = 0.1, \hat{\theta} = 60^\circ$)

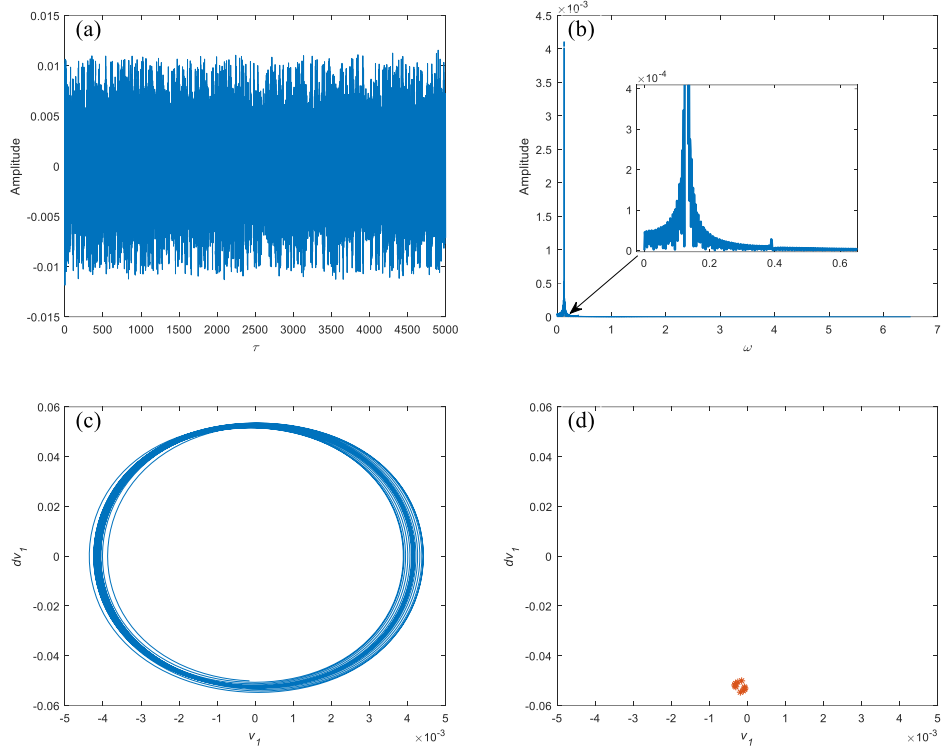


图 3-16 $\hat{Q}_l = 0.1$ 下系统的动力学行为: (a)时程图, (b)振幅谱, (c)相图, (d)庞加莱图

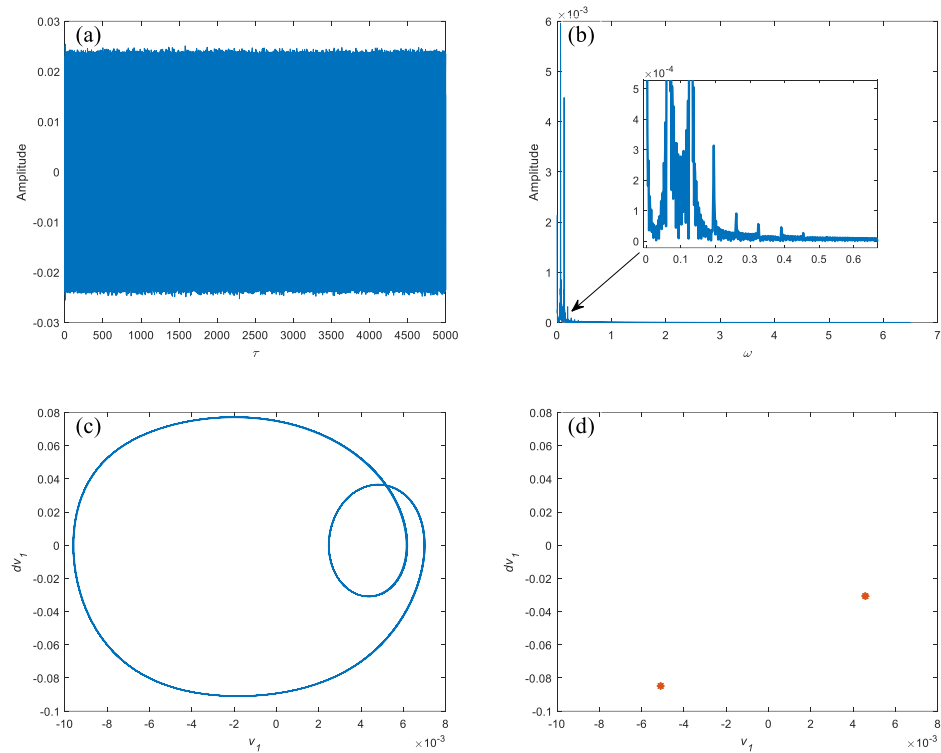


图 3-17 $\hat{Q}_l = 0.5$ 下系统的动力学行为: (a)时程图, (b)振幅谱, (c)相图, (d)庞加莱图

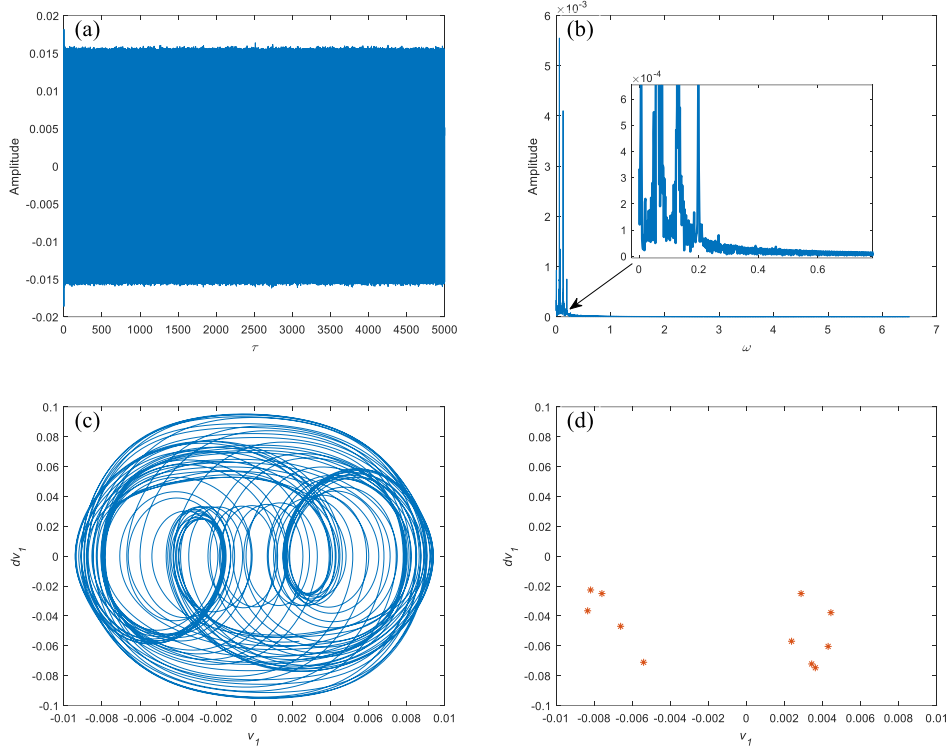


图 3-18 $\hat{Q}_t = 0.9$ 下系统的动力学行为: (a)时程图, (b)振幅谱, (c)相图, (d)庞加莱图

图 3-19 显示了 FRC 管道输送两相流时关于激励振幅的分岔图。当流体速度较低时, 系统表现出单周期运动。随着激励幅度的增加, 系统在进入混沌区间之前会转变为三周期运动, 在此之前会出现单周期运动和跳跃现象。在经历混沌运动之后, 系统又重新回归到单周期运动状态。图 3-20-图 3-23 分别呈现了在不同激励幅值条件下, 系统所对应的时程图、振幅谱、相图以及庞加莱图。此外, 从图 3-19 中还能够观察到, 当激励幅值达到 0.22 时, 系统率先失去稳定性, 其混沌区间为 $(0.47 < f_y < 0.76)$, 在其他区间观察到周期性运动。

图 3-24 提供了输送两相流的 FRC 管道的分岔图, 该分岔图是水平和垂直激励之间初始相位差的函数。可以发现, 随着相位差的增加, 系统逐步转变为混沌运动。在此之后, 系统返回到单周期运动, 然后是三周期运动和额外的跳跃现象。为了验证这些运动, 时间历程图、振幅谱、相图和庞加莱图如图 3-25 图 3-27 所示。此外, 图 3-24 表明混沌区间出现在 $0 < \bar{g} < \pi$, 而在其他区间观察到周期性运动。

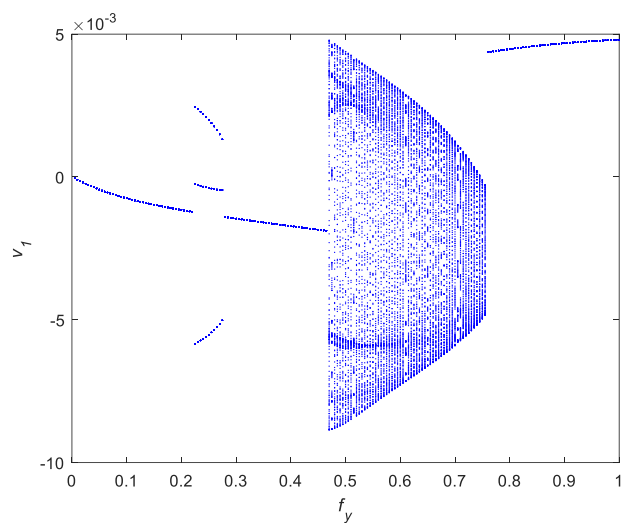


图 3-19 系统响应随 f_y 变化的分岔图 ($\tilde{c} = 0.005, \tilde{V}_l = 0.1, \hat{\theta} = 60^\circ, \hat{Q}_l = 0.9$)

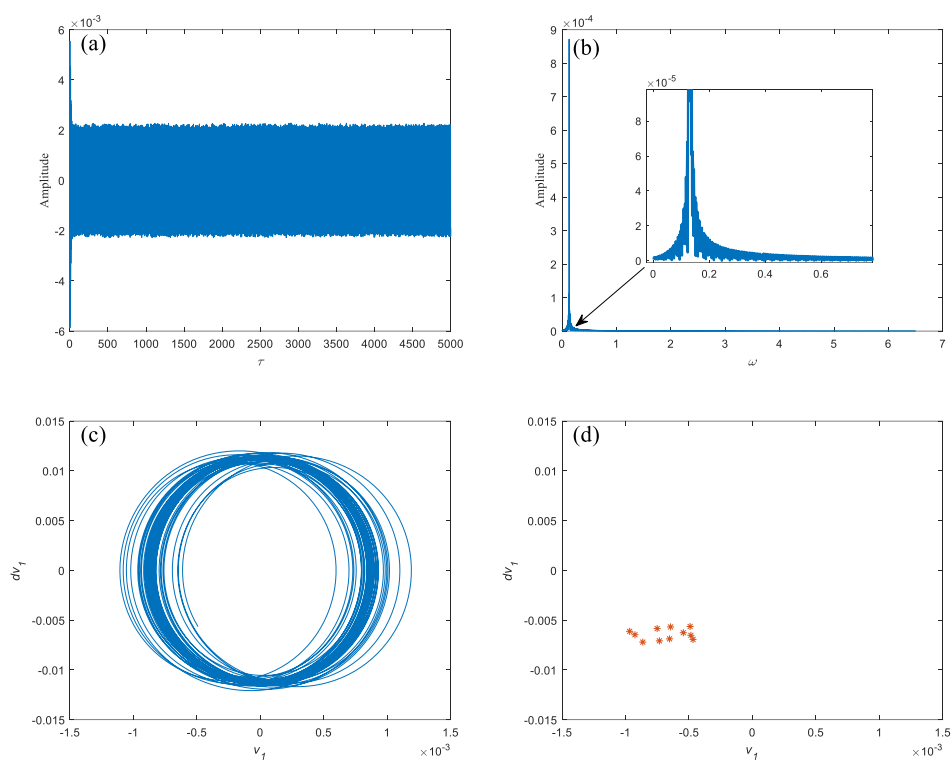


图 3-20 $f_y = 0.1$ 下系统的动力学行为: (a)时程图, (b)振幅谱, (c)相图, (d)庞加莱图

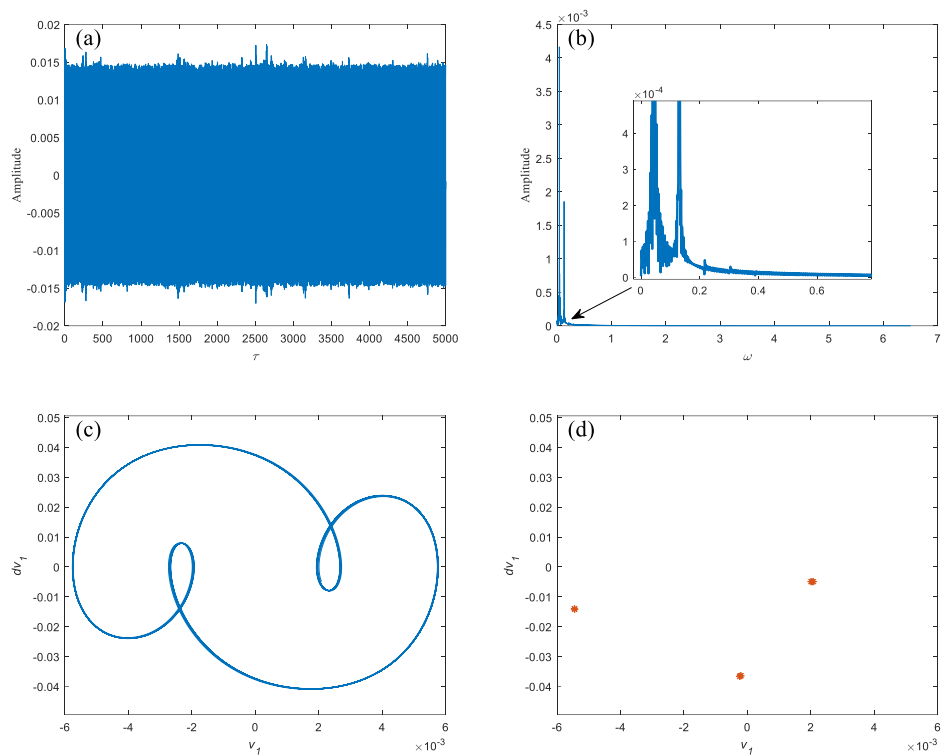


图 3-21 $f_y = 0.25$ 下系统的动力学行为: (a)时程图, (b)振幅谱, (c)相图, (d)庞加莱图

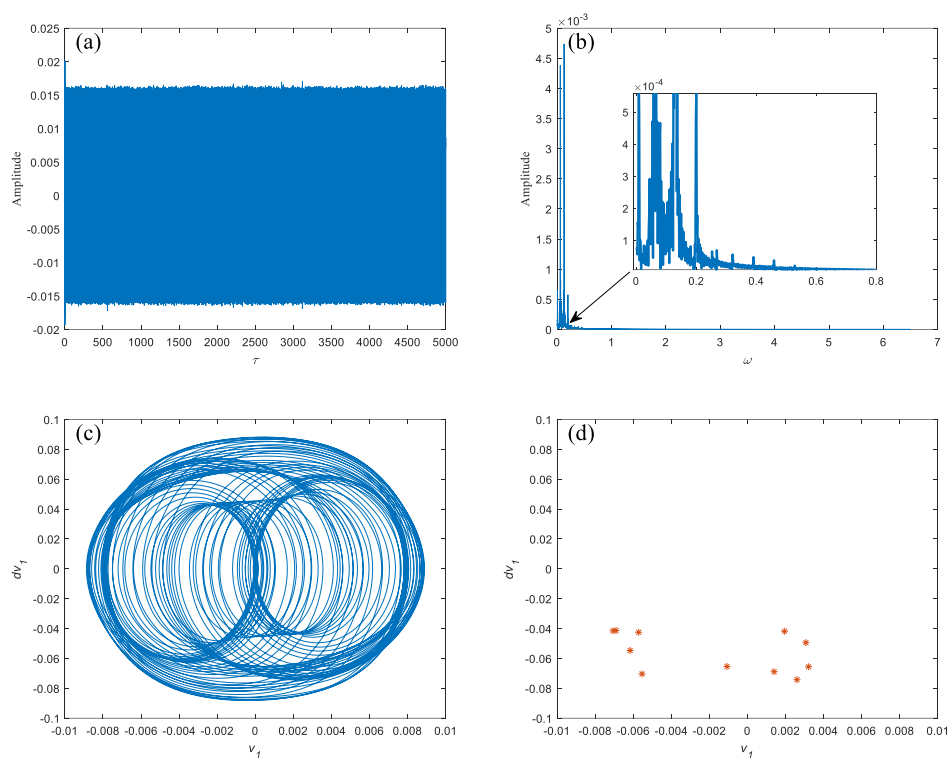


图 3-22 $f_y = 0.6$ 下系统的动力学行为: (a)时程图, (b)振幅谱, (c)相图, (d)庞加莱图

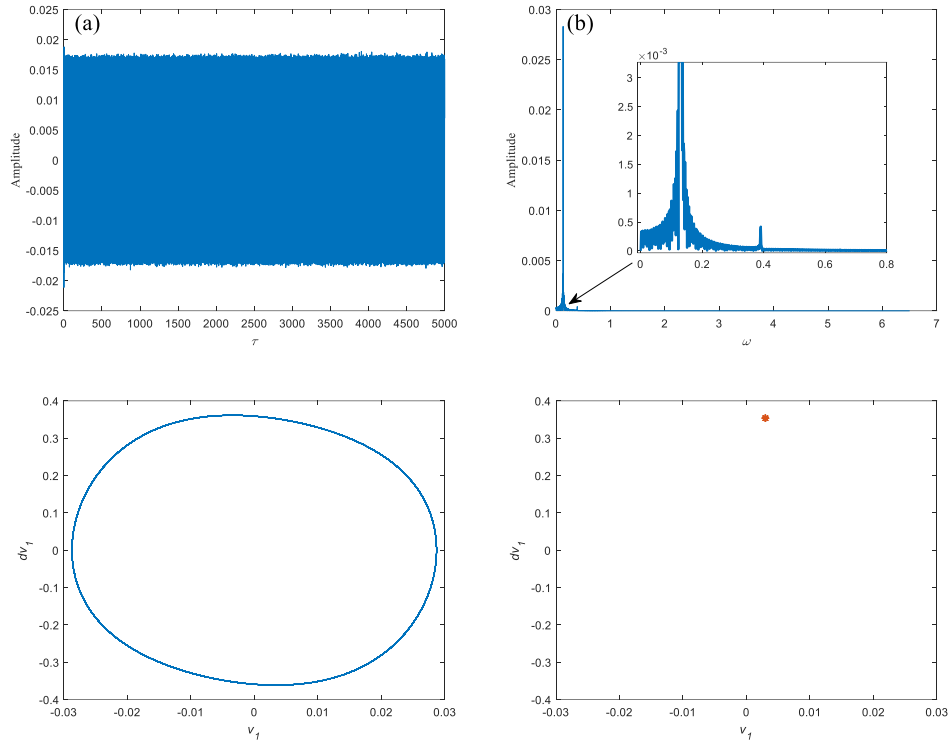


图 3-23 $f_y = 0.9$ 下系统的动力学行为: (a)时程图, (b)振幅谱, (c)相图, (d)庞加莱图

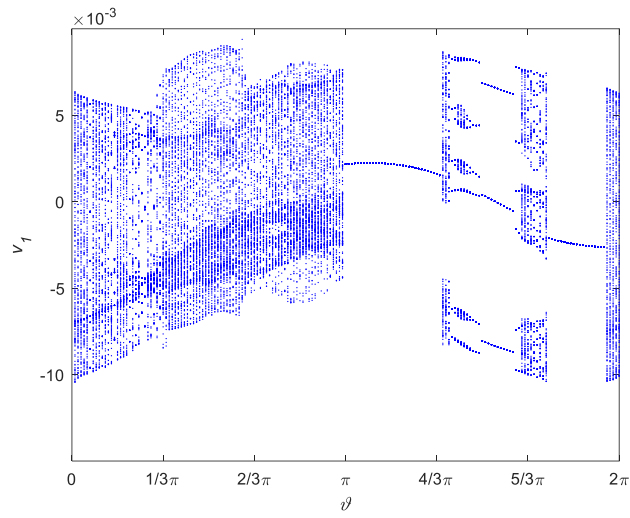


图 3-24 系统响应随 $\bar{g}$ 变化的分岔图 ($\tilde{c} = 0.005, \tilde{V}_l = 1.3, \hat{\theta} = 60^\circ, \hat{Q}_l = 0.9, f_y = 0.5$)

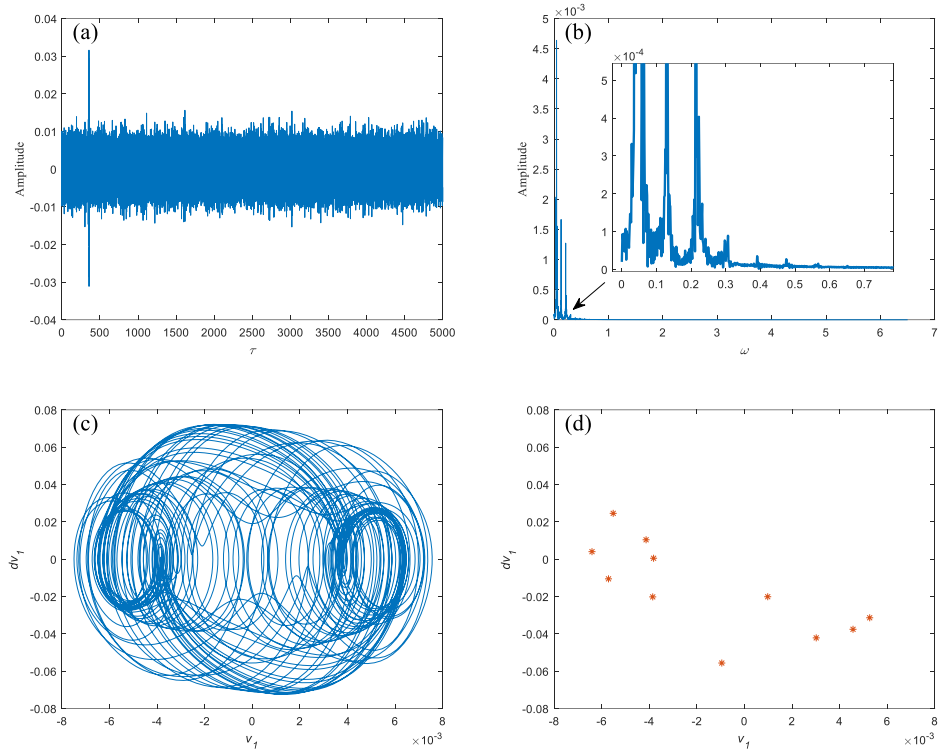


图 3-25 $\bar{g} = \pi/3$ 下系统的动力学行为: (a)时程图, (b)振幅谱, (c)相图, (d)庞加莱图

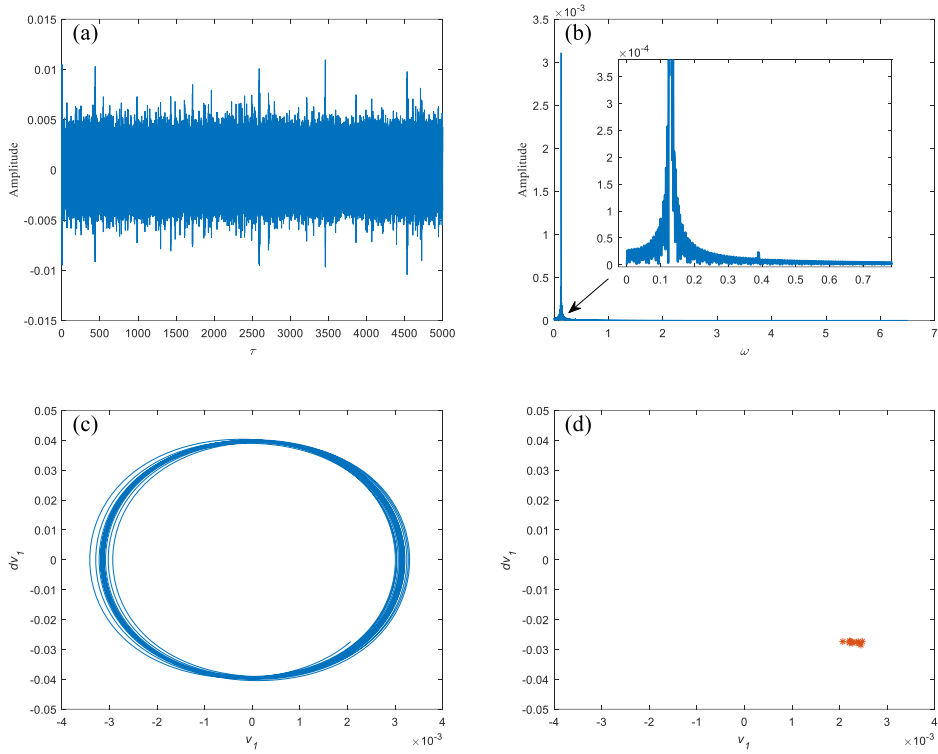


图 3-26 $\bar{g} = 7\pi/6$ 下系统的动力学行为: (a)时程图, (b)振幅谱, (c)相图, (d)庞加莱图

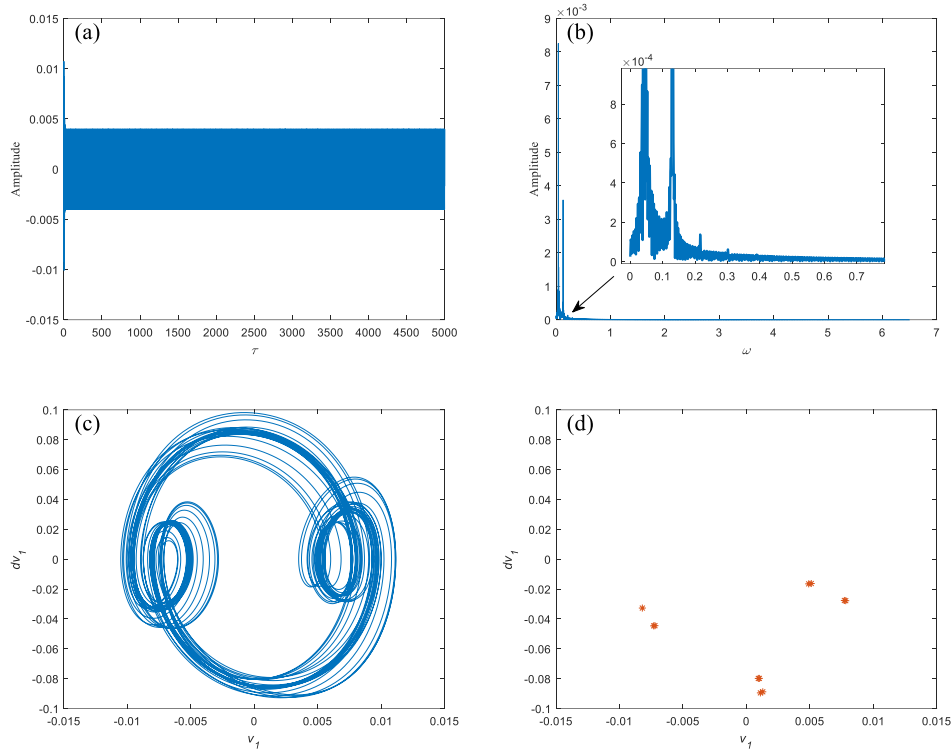


图 3-27 $\bar{g} = 3\pi/2$ 下系统的动力学行为: (a)时程图, (b)振幅谱, (c)相图, (d)庞加莱图

3.5 本章小结

在本节内容中,着重针对纤维增强复合材料管道在受到沿两个横向的外界激励,且内部输送气液两相流的情况,展开了对其非线性动力学的深入研究。首先,以欧拉 - 伯努利梁理论作为理论基础,运用哈密顿变分原理,成功推导出能够控制管道沿两个横向进行运动的非线性方程。采用伽辽金截断方法对变量进行离散处理,经过一系列计算推导,最终得到一组常微分方程。在预测数值模态时,选用了微分求积法,该方法为后续研究提供了有力的数值工具支持。在此基础上,运用谐波平衡法,并结合伪弧长方法,对解曲线的运动轨迹进行有效跟踪。同时,通过设计一系列数值算例,深入探讨了诸如液相速度、激励振幅、液相体积系数、阻尼系数、纤维取向角等多个关键因素,对系统频率响应所产生的影响。除此之外,借助数值模拟手段,进一步对该系统中诸如分岔和混沌等非线性动力学演化过程进行了详细研究。通过对上述内容的研究分析,得出了以下主要结论:

- (1) 已经证实,目前的结果有效地分析了非线性动力学,分析方法获得的频率响应与数值方法获得的响应一致;

(2) 对于不同的纤维取向角, 非线性固有频率随着液相速度和体积系数的增加而降低;

(3) 共振幅值随着激励幅值的增大而增大。然而, 对于不同的纤维取向角度, 它随着液相速度、液相体积系数和阻尼系数的增加而减小;

(4) 数值结果表明, 随着控制参数的不同, 该系统表现出复杂的运动模式, 并且可以观察到分岔和混沌特性;

(5) 不同外部激励及其相位角对管道时间历程、相位轨迹和庞加莱截面的影响存在显著差异。

第 4 章 输送两相流纤维增强复合管道模型与非线性涡激振动分析

在本节内容里，以 van der Pol 尾流振子模型作为重要基础，同时紧密结合欧拉-伯努利梁理论，通过运用哈密顿变分原理，成功构建起针对输送两相流纤维增强复合管道系统涡激振动情况的动力学控制方程。此外，为获取该方程的数值解，选用了四阶龙格-库塔方法来开展求解工作。分析了滑移率、液相体积系数和外部流体速度对液相屈曲前后行为和临界速度的影响，可以对其进行调整以控制非线性涡激振动。进一步探讨了管道在轴向张力控制下的后屈曲状态下的非线性涡激振动响应。

4.1 管道模型

图 4-1 显示了各向异性管道。该模型考虑了由纤维增强复合材料制成的管道在管道两侧进行简单支撑。管道的尺寸包括其长度 $\hat{L}$ 、内径 $\hat{r}_i$ 和外径 $\hat{r}_o$ 。笛卡尔坐标轴 $\hat{x}$ 、 $\hat{y}$ 和 $\hat{z}$ 分别对应于管道的长度、宽度和高度方向。沿这些坐标轴的位移由 $\hat{u}$ 、 $\hat{v}$ 和 $\hat{w}$ 表示。建立局部坐标系 $(\hat{n}, \hat{s}, \hat{x})$ 以有效地描述管道的横截面，其中局部坐标 $\hat{n}$ 和 $\hat{s}$ 分别表示半径和周长的方向。坐标 $\hat{n}$ 和 $\hat{s}$ 之间的角度表示纤维取向角 $\hat{\theta}$ ，可以直接影响复合材料的性能。管道内部输送两相流，液相流速 $\hat{U}_l$ 和气相流速 $\hat{U}_g$ 。在管道外部，管道承受速度为 $\hat{U}_e$ 的稳定外流。管道沿线存在轴向张力 $\hat{t}_x$ 。为了获得简化模型，这些假设如下：管道的纵横比足够大，可以将其视为欧拉-伯努利梁；所输送的流体可以被认为不能被压缩的均匀牛顿流体；内部和外部流动都保持稳定的速度；管道承受的应变最小，壁光滑均匀；忽略平面 $\hat{x}\hat{o}\hat{y}$ 和平面 $\hat{x}\hat{o}\hat{z}$ 中的剪切变形。

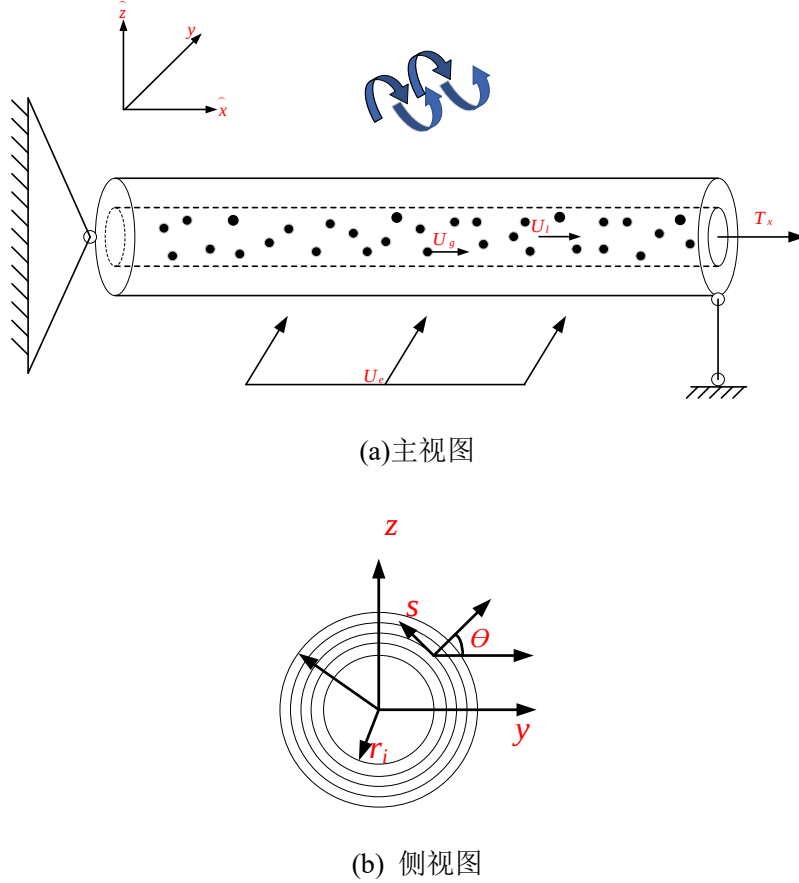


图 4-1 输送两相流纤维增强复合管道的模型示意图

4.2 管道控制方程

根据哈密顿原理，复合管道的动力学方程可以建立为：

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\hat{T}_l + \hat{T}_g + \hat{T}_p - \hat{V}_p - \hat{W}_{ef}) dt = 0 \quad (4-1)$$

在式(4-1)中， $\hat{T}_l$ 和 $\hat{T}_g$ 分别表示液相和气相的动能。而 $\hat{T}_p$ 表示管道本身的动能。

管道的势能由 $\hat{V}_p$ 表示， $\hat{W}_{ef}$ 表示非保守力产生的虚功。

管道、液相和气相的动能表达式可表示为：

$$\hat{T}_p = \frac{1}{2} (\hat{m}_p + \hat{m}_a) \int_0^L \left[\left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial t} \right)^2 \right] dx \quad (4-2)$$

$$\hat{T}_l = \frac{1}{2} \hat{m}_l \int_0^L \left\{ \left[\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \hat{U}_l \left(1 + \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right) \right]^2 + \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + \hat{U}_l \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial t} + \hat{U}_l \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \right)^2 \right\} dx \quad (4-3)$$

$$\hat{T}_g = \frac{1}{2} \hat{m}_g \int_0^L \left\{ \left[\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \hat{U}_g \left(1 + \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right) \right]^2 + \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + \hat{U}_g \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial t} + \hat{U}_g \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \right)^2 \right\} dx \quad (4-4)$$

在式(4-2)-式(4-4)中, $\hat{m}_l$ 和 $\hat{m}_g$ 分别是单位长度的液相质量和气相质量, 而 $\hat{m}_p$ 表示单位长度管道的质量, $\hat{m}_a$ 表示单位长度的附加质量。他们的表达式为

$$\hat{m}_l = \int_0^{2\pi} \int_0^{\hat{r}_i} \hat{Q}_l \hat{\rho}_l r dr \quad (4-5)$$

$$\hat{m}_g = \int_0^{2\pi} \int_0^{\hat{r}_i} \hat{Q}_g \hat{\rho}_g r dr \quad (4-6)$$

$$\hat{m}_p = \oint \sum_{k=1}^{N_{cl}} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \hat{\rho}_p^{(k)} dnds \quad (4-7)$$

$$\hat{m}_a = \hat{C}_a \pi \hat{r}_o^2 \hat{\rho}_e \quad (4-8)$$

在式(4-5)-(4-8)中, $\hat{\rho}_l$ 、 $\hat{\rho}_g$ 和 $\hat{\rho}_e$ 分别表示液体密度、气体密度和外部流体的密度。 $\hat{\rho}_p^{(k)}$ 代表 k 层的材料的密度, $\hat{C}_a$ 表示附加质量系数, 圆柱体的附加质量系数等于 1。为了便于表达这些方程, 引入了滑移率 $\hat{\beta}$ 、液相体积系数 $\hat{Q}_l$ 和气相体积系数 $\hat{Q}_g$ 等物理参数。液相和气相速度之间的关系可以表示如下:

$$\hat{U}_g = \hat{\beta} \hat{U}_l \quad (4-9)$$

对于两相速度相同的均匀模型, 滑移率为 1。然而, 由于浮力效应和其他因素, 该模型并不现实。对于不同流型的两相流体, 它们的滑移率各不相同。

管道的势能, 包括轴向应变能和弯曲应变能, 表示为:

$$\hat{V}_p = \frac{\hat{E}\hat{A}}{2} \int_0^{\hat{L}} \hat{\varepsilon}^2 dx + \frac{\hat{E}\hat{I}}{2} \int_0^{\hat{L}} \left[(1+\hat{\varepsilon})^2 \hat{\kappa}^2 \right] dx \quad (4-10)$$

其中 $\hat{E}$ 表示弹性模量, $\hat{A}$ 表示横截面积, $\hat{I}$ 表示面积惯性矩, $\hat{\kappa}$ 表示曲率, $\hat{\varepsilon}$ 为应变。这些参数可以表示为:

$$\hat{\varepsilon} = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial \hat{u}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial x}\right)^2} - 1 \quad (4-11)$$

$$\hat{\kappa} = \sqrt{\left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x^2}\right)^2} \quad (4-12)$$

通过假设三个方向上的位移遵循以下关系: $\hat{u} \sim O(\hat{\varepsilon}^2)$, $\hat{v} \sim O(\hat{\varepsilon})$, $\hat{w} \sim O(\hat{\varepsilon})$, 可以得到:

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \right)^2 + O(\hat{\varepsilon}^4) \quad (4-13)$$

$$\hat{\kappa} = \left(\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x^2} \right)^2 + O(\varepsilon^4) \quad (4-14)$$

通过将式(4-13)和式(4-14)代入式(4-10)并进一步进行变分运算，可以得出：

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \hat{V}_p dt = & \hat{E} \hat{I} \int_0^{\hat{L}} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial^4 \hat{v}}{\partial x^4} \delta \hat{v} + \frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial x^4} \delta \hat{w} \right) dx dt - \int_0^{\hat{L}} \int_{t_1}^{t_2} \hat{E} \hat{A} \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x^2} \right) dx dt \\ & - \int_0^{\hat{L}} \int_{t_1}^{t_2} \left[\hat{E} \hat{A} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x^2} \right) \right] \delta \hat{v} dx dt \\ & - \int_0^{\hat{L}} \int_{t_1}^{t_2} \left[\hat{E} \hat{A} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2} \right) \right] \delta \hat{w} dx dt \end{aligned} \quad (4-15)$$

其中， $\hat{E} \hat{A}$ 和 $\hat{E} \hat{I}$ 分别代表管道的轴向刚度和弯曲刚度。他们的表达式如下，

$$\hat{E} \hat{A} = 2\pi \hat{K}_{(1)} \hat{r}_m \quad (4-16)$$

$$\hat{E} \hat{I} = \pi \hat{K}_{(1)} \hat{r}_m^3 + \pi \hat{K}_{(4)} \hat{r}_m \quad (4-17)$$

其中， $\hat{K}_{(1)}$ 和 $\hat{K}_{(4)}$ 的详细表达式见附录 1，虚功的表达式为：

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta W_{ef} dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[(\hat{c}_s + \hat{c}_f) \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \delta \hat{u} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} \delta \hat{v} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial t} \delta \hat{w} \right) + \hat{F}_x \delta \hat{u} + \hat{F}_y \delta \hat{v} + \hat{F}_z \delta \hat{w} \right] dt \quad (4-18)$$

沿 $\hat{x}$ 、 $\hat{y}$ 和 $\hat{z}$ 方向的外部流体动力分别由 $\hat{F}_x$ 、 $\hat{F}_y$ 和 $\hat{F}_z$ 表示。 $\hat{c}_s$ 代表结构阻尼系数，而 $\hat{c}_f$ 表示由粘性剪切力的阻尼系数，表示为^[27]：

$$\hat{c}_s = 2\hat{\zeta}(\hat{m}_p + \hat{m}_l + \hat{m}_g)\hat{\omega}_r \quad (4-19)$$

$$\hat{c}_f = 4\hat{g}\hat{\omega}_s\hat{\rho}_e\hat{r}_o^2 \quad (4-20)$$

此外， $\hat{\zeta}$ 是结构阻尼比， $\hat{g}$ 表示影响平均阻力系数 $\hat{C}_{D0}$ 和振幅的失速参数。为了便于计算，失速参数应为 0.8^[25]， $\hat{\omega}_r$ 代表振动的第 r 阶固有频率，而代表 $\hat{\omega}_s$ 涡流脱落的频率，表示为：

$$\hat{\omega}_s = \pi \hat{S}_t \frac{\hat{U}_e}{\hat{r}_o} \quad (4-21)$$

其中 $\hat{S}_t$ 代表斯特罗哈数。

通过将式(4-2)-(4-4)、式(4-15)和式(4-18)代入式(4-1)中并进行变分运算，获得输送两相流的管道在外部稳定均匀流中的非线性三维动力学方程。

$$\begin{aligned} & (\hat{m}_p + \hat{m}_a + \hat{m}_l + \hat{m}_g) \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} + 2\hat{m}_l \hat{U}_l \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t \partial x} + 2\hat{m}_g \hat{U}_g \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t \partial x} + \hat{m}_l \hat{U}_l^2 \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + \hat{m}_g \hat{U}_g^2 \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} \\ & + (\hat{c}_s + \hat{c}_f) \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} - \hat{E} \hat{A} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} - \hat{E} \hat{A} \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial x} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x^2} \right) = \hat{F}_x \end{aligned} \quad (4-22)$$

$$\begin{aligned} & (\hat{m}_p + \hat{m}_a + \hat{m}_l + \hat{m}_g) \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial t^2} + (2\hat{m}_l \hat{U}_l + 2\hat{m}_g \hat{U}_g) \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial t \partial x} + (\hat{m}_l \hat{U}_l^2 + \hat{m}_g \hat{U}_g^2) \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2} + \hat{E} \hat{I} \frac{\partial^4 \hat{v}}{\partial x^4} \\ & - \hat{E} \hat{A} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x^2} \right) = \hat{F}_y \end{aligned} \quad (4-23)$$

$$\begin{aligned} & (\hat{m}_p + \hat{m}_a + \hat{m}_l + \hat{m}_g) \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial t^2} + (2\hat{m}_l \hat{U}_l + 2\hat{m}_g \hat{U}_g) \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial t \partial x} + (\hat{m}_l \hat{U}_l^2 + \hat{m}_g \hat{U}_g^2) \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x^2} + \hat{E} \hat{I} \frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial x^4} \\ & - \hat{E} \hat{A} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2} \right) = \hat{F}_z \end{aligned} \quad (4-24)$$

值得注意的是，升力和阻力对沿三维方向的外部水动力有显著影响，但 x 轴方向的水动力影响很小，可以忽略^[22]。因此，本研究为了提高计算效率采用了 Ge 等人^[29]提出的二维流体动力学模型。借助该假设，可以估算水动力，其表达式为：

$$\begin{aligned} \hat{F}_x &= 0 \\ \hat{F}_y &= \hat{f}_D + \hat{f}_{D0} - \frac{\hat{f}_L}{\hat{U}_e} \frac{\partial \hat{w}}{\partial t} \\ \hat{F}_z &= \hat{f}_L + \frac{\hat{f}_D}{\hat{U}_e} \frac{\partial \hat{w}}{\partial t} \end{aligned} \quad (4-25)$$

这里， $\hat{f}_D$ 表示由于振荡引起的阻力， $\hat{f}_{D0}$ 表示平均阻力， $\hat{f}_L$ 表示升力。它们的表达式可以推导如下：

$$\begin{aligned} \hat{f}_D &= \hat{C}_{Di} \hat{\rho}_0 \hat{r}_0 \hat{U}_e^2 \\ \hat{f}_{D0} &= \hat{C}_{D0} \hat{\rho}_0 \hat{r}_0 \hat{U}_e^2 \\ \hat{f}_L &= \hat{C}_L \hat{\rho}_0 \hat{r}_0 \hat{U}_e^2 \end{aligned} \quad (4-26)$$

其中 $\hat{C}_{Di}$ 和 $\hat{C}_{D0}$ 是无量纲系数。它们的表达式如下：

$$\begin{aligned} \hat{C}_{Di} &= 0.5 \hat{C}_{Di0} \hat{p}(x, t) \\ \hat{C}_L &= 0.5 \hat{C}_{L0} \hat{q}(x, t) \end{aligned} \quad (4-27)$$

在这项研究中，经验系数 $\hat{C}_{D0}$ 和 $\hat{C}_{L0}$ 分别设置为 2.0、0.1、0.3^[27]。描述沿 $\hat{y}$ 轴和 $\hat{z}$ 轴的涡流尾流的变量 $\hat{p}(x, t)$ 和 $\hat{q}(x, t)$ 与时间和沿 $\hat{x}$ 轴方向上的位移有关。利用范德波尔方程可以推导出这些变量，从而得管道的涡激振动响应^[25]。

$$\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial t^2} = 2\hat{\omega}_s \hat{\varepsilon}_y (\hat{p}^2 - 1) \frac{\partial \hat{p}}{\partial t} + 4\hat{\omega}_s^2 \hat{p} = \frac{\hat{A}_y}{2\hat{r}_0} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial t^2} \quad (4-28)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{q}}{\partial t^2} = \hat{\omega}_s \hat{\varepsilon}_z (\hat{q}^2 - 1) \frac{\partial \hat{q}}{\partial t} + \hat{\omega}_s^2 \hat{q} = \frac{\hat{A}_z}{2\hat{r}_0} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial t^2} \quad (4-29)$$

值得注意的是，尽管范德波尔尾流振子模型忽略了外部缺陷等一些因素，但其预测的涡激振动响应与数值模拟的结果非常吻合。其中， $\hat{\varepsilon}_y$ 、 $\hat{A}_y$ 、 $\hat{\varepsilon}_z$ 和 $\hat{A}_z$ 是经验参数。将式(4-26)和式(4-27)代入式(6-25)中，可以得到：

$$\begin{aligned}\hat{F}_x &= 0 \\ \hat{F}_y &= 0.5\hat{C}_{D10}\hat{p}\hat{\rho}_0\hat{r}_0\hat{U}_e^2 + \hat{C}_{D0}\hat{\rho}_0\hat{r}_0\hat{U}_e^2 - 0.5\hat{C}_{L0}\hat{q}\hat{\rho}_0\hat{r}_0\hat{U}_e\frac{\partial\hat{w}}{\partial t} \\ \hat{F}_z &= 0.5\hat{C}_{L0}\hat{q}\hat{\rho}_0\hat{r}_0\hat{U}_e^2 + 0.5\hat{C}_{D10}\hat{p}\hat{\rho}_0\hat{r}_0\hat{U}_e\frac{\partial\hat{w}}{\partial t}\end{aligned}\quad (4-30)$$

由于定义了这四个经验参数和式(4-21)中提到的斯特罗哈数 $\hat{S}_i$ ，结合式(4-22)-(4-24)、式(4-28)和式(4-29)，可以推导出涡激振动响应。斯特罗哈数 $\hat{S}_i$ 和经验参数 $\hat{\varepsilon}_y$ 、 $\hat{A}_y$ 、 $\hat{\varepsilon}_z$ 和 $\hat{A}_z$ 确定为 $\hat{S}_i=0.16$ 、 $\hat{\varepsilon}_y=0.08$ 、 $\hat{A}_y=96$ 、 $\hat{\varepsilon}_z=0.1$ 、 $\hat{A}_z=12$ 以使模型符合本研究中的实验结果^[27]。

当液相和气相的流体速度足够高时，管道可能会从稳态转变为屈曲状态，输送的流体进入超临界状态。在此过程中，由于屈曲导致的沿 $\hat{x}$ 方向的位移明显小于沿 $\hat{y}$ 和 $\hat{z}$ 方向上的位移。鉴于本研究的重点是超临界状态下输送气液两相流的管道的动力学行为，因此可以忽略式(4-22)中的时间相关项。同样，为了简化，刚度项 $\hat{m}_l\hat{U}_l^2$ 和 $\hat{m}_g\hat{U}_g^2$ 由于与 $\hat{E}\hat{A}$ 相比太小而被忽略。结合式(4-30)后，式(4-22)简化为：

$$\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial x^2} = -\left(\frac{\partial\hat{v}}{\partial x}\frac{\partial^2\hat{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial\hat{w}}{\partial x}\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial x^2}\right)\quad (4-31)$$

对式(4-31)进行积分运算，得到：

$$\frac{\partial\hat{u}}{\partial x} = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\hat{v}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\hat{w}}{\partial x}\right)^2\right] + \hat{c}_1\quad (4-32)$$

$$\hat{u} = -\frac{1}{2}\int_0^x\left[\left(\frac{\partial\hat{v}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\hat{w}}{\partial x}\right)^2\right]dx + \hat{c}_1x + \hat{c}_2\quad (4-33)$$

考虑到轴向张力的影响，沿 $\hat{x}$ 方向的位移等于每个点的总应变。因此，边界条件可推导出：

$$\begin{aligned}\hat{u}|_{x=0} &= 0 \\ \hat{u}|_{x=\hat{L}} &= \frac{\hat{T}_x}{EA}\int_0^{\hat{L}}\frac{1}{1+\hat{\varepsilon}}\left(1 + \frac{\partial\hat{u}}{\partial x}\right)dx\end{aligned}\quad (4-34)$$

通过将边界条件代入式(4-33)，可以得到待定系数 $\hat{c}_1$ 和 $\hat{c}_2$ ：

$$\begin{aligned}\bar{c}_1 &= \frac{\bar{T}_x}{\bar{E}\bar{A}\bar{L}} \int_0^{\bar{L}} \frac{1}{1+\bar{\varepsilon}} \left(1 + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) dx + \frac{1}{2\bar{L}} \int_0^{\bar{L}} \left[\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)^2 \right] dx \\ \bar{c}_2 &= 0\end{aligned}\quad (4-35)$$

通过将式(4-33)和式(4-35)代入式(4-23)和式(4-24)，推导出了管道沿 $\hat{y}$ 轴和 $\hat{z}$ 轴方向涡激振动的动力学控制方程：

$$\begin{aligned}(\bar{m}_p + \bar{m}_a + \bar{m}_l + \bar{m}_g) \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \tau^2} + 2\bar{m}_l \bar{U}_l \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x \partial \tau} + 2\bar{m}_g \bar{U}_g \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x \partial \tau} + \bar{m}_l \bar{U}_l^2 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \bar{m}_g \bar{U}_g^2 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \\ + (\bar{c}_s + \bar{c}_f) \frac{\partial \bar{v}}{\partial \tau} + \bar{E}\bar{I} \frac{\partial^4 \bar{v}}{\partial x^4} - \bar{T}_x \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + (\bar{T}_x - \bar{E}\bar{A}) \frac{1}{2\bar{L}} \int_0^{\bar{L}} \left[\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)^2 \right] dx \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} = \bar{F}_y\end{aligned}\quad (4-36)$$

$$\begin{aligned}(\bar{m}_p + \bar{m}_a + \bar{m}_l + \bar{m}_g) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \tau^2} + 2\bar{m}_l \bar{U}_l \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial \tau} + 2\bar{m}_g \bar{U}_g \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial \tau} + \bar{m}_l \bar{U}_l^2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \bar{m}_g \bar{U}_g^2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \\ + (\bar{c}_s + \bar{c}_f) \frac{\partial \bar{w}}{\partial \tau} + \bar{E}\bar{I} \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial x^4} - \bar{T}_x \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + (\bar{T}_x - \bar{E}\bar{A}) \frac{1}{2\bar{L}} \int_0^{\bar{L}} \left[\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)^2 \right] dx \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} = \bar{F}_z\end{aligned}\quad (4-37)$$

采用下面形式的无量纲变量：

$$\begin{aligned}\xi = \frac{\bar{x}}{\bar{L}}, \hat{u} = \frac{\bar{u}}{\bar{L}}, \hat{v} = \frac{\bar{v}}{\bar{L}}, \hat{w} = \frac{\bar{w}}{\bar{L}}, \tau = \sqrt{\frac{\bar{E}\bar{I}}{(\bar{m}_a + \bar{m}_p + \bar{m}_l + \bar{m}_g)}} \frac{t}{\bar{L}^2}, \hat{V}_l = \sqrt{\frac{\bar{m}_l}{\bar{E}\bar{I}}} \bar{L} \bar{U}_l, \\ \hat{m}_l = \frac{\bar{m}_l}{\bar{m}_p + \bar{m}_a + \bar{m}_l + \bar{m}_g}, \hat{m}_g = \frac{\bar{m}_g}{\bar{m}_p + \bar{m}_a + \bar{m}_l + \bar{m}_g}, \hat{\sigma} = \frac{(\bar{c}_s + \bar{c}_f) \bar{L}^2}{\sqrt{\bar{E}\bar{I}} (\bar{m}_p + \bar{m}_a + \bar{m}_l + \bar{m}_g)}, \\ \hat{\gamma} = \frac{\bar{L}^2 \bar{T}_x}{\bar{E}\bar{I}}, \hat{\lambda} = \frac{\bar{A} \bar{L}^2}{2\bar{I}}, \hat{\alpha} = \frac{\bar{\rho}_0 \bar{r}_0 \bar{U}_e \bar{L}^3}{2\bar{E}\bar{I}}, \hat{\zeta} = \frac{\bar{\rho}_0 \bar{r}_0 \bar{U}_e \bar{L}^2}{2\sqrt{\bar{E}\bar{I}} (\bar{m}_p + \bar{m}_a + \bar{m}_l + \bar{m}_g)}, \\ \hat{\Omega}_s = \sqrt{\frac{\bar{m}_p + \bar{m}_a + \bar{m}_l + \bar{m}_g}{\bar{E}\bar{I}}} \bar{L}^2, \hat{\Pi} = \frac{\bar{L}}{2\bar{r}_0}\end{aligned}\quad (4-38)$$

通过这些无量纲变量代入式(4-28)、式(4-29)、式(4-36)和式(4-37)中，无量纲形式的控制方程为：

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \tau^2} + 2\sqrt{\hat{m}_l} \hat{V}_l \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \xi \partial \tau} + 2\frac{\hat{m}_g}{\sqrt{\hat{m}_l}} \hat{\beta} \hat{V}_l \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \xi \partial \tau} + \hat{V}_l^2 \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \xi^2} + \frac{\hat{m}_g}{\hat{m}_l} \hat{\beta}^2 \hat{V}_l^2 \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \xi^2} + \hat{\sigma} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \tau} + \frac{\partial^4 \hat{v}}{\partial \xi^4} \\ - \hat{\gamma} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\hat{\gamma}}{2} - \hat{\lambda} \right) \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \xi^2} \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi} \right)^2 \right] d\xi = 2\hat{\alpha} \hat{C}_{D0} + \hat{\alpha} \hat{C}_{D10} \hat{p} - \hat{\zeta} \hat{C}_{L0} \hat{q} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \tau}\end{aligned}\quad (4-39)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \tau^2} + 2\sqrt{\hat{m}_l} \hat{V}_l \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \xi \partial \tau} + 2\frac{\hat{m}_g}{\sqrt{\hat{m}_l}} \hat{\beta} \hat{V}_l \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \xi \partial \tau} + \hat{V}_l^2 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \xi^2} + \frac{\hat{m}_g}{\hat{m}_l} \hat{\beta}^2 \hat{V}_l^2 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \xi^2} + \hat{\sigma} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \tau} + \frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial \xi^4} \\ - \hat{\gamma} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\hat{\gamma}}{2} - \hat{\lambda} \right) \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \xi^2} \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi} \right)^2 \right] d\xi = \hat{\zeta} \hat{C}_{D10} \hat{p} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \tau} + \hat{\alpha} \hat{C}_{L0} \hat{q}\end{aligned}\quad (4-40)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial \tau^2} + 2\hat{\varepsilon}_y \hat{\Omega}_s (\hat{p}^2 - 1) \frac{\partial \hat{p}}{\partial \tau} + 4\hat{\Omega}_s^2 \hat{p} = \hat{A}_y \hat{\Pi} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \tau^2}\quad (4-41)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{q}}{\partial \tau^2} + \hat{\varepsilon}_z \hat{\Omega}_s (\hat{q}^2 - 1) \frac{\partial \hat{q}}{\partial \tau} + \hat{\Omega}_s^2 \hat{q} = \hat{A}_z \hat{\Pi} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \tau^2}\quad (4-42)$$

4.3 伽辽金法

在输送流体的管道系统中，如果流体速度不超过特定的临界阈值，管道将在接近其平衡位置振动，这种情况称为前屈曲行为^[27]。相反，如果流体速度超过这个临界值，即超临界流速，管道就会变得不稳定，并转变为后屈曲状态^{[24][28]}。以下文本将讨论这两种状态下的固有频率以及液相的临界流速，这是决定管道系统行为的关键因素。

为了进行分析，先采用伽辽金截断来分离变量，将偏微分方程转化为常微分方程，如下^[22]：

$$\begin{aligned}\hat{u}(\xi, \tau) &= \sum_{i=1}^n \bar{\phi}_i(\xi) \bar{u}_i(\tau), \\ \hat{v}(\xi, \tau) &= \sum_{i=1}^n \bar{\phi}_i(\xi) \bar{v}_i(\tau), \\ \hat{w}(\xi, \tau) &= \sum_{i=1}^n \bar{\phi}_i(\xi) \bar{w}_i(\tau), \\ \hat{p}(\xi, \tau) &= \sum_{i=1}^n \bar{\phi}_i(\xi) \bar{p}_i(\tau), \\ \hat{q}(\xi, \tau) &= \sum_{i=1}^n \bar{\phi}_i(\xi) \bar{q}_i(\tau)\end{aligned}\tag{4-43}$$

式中， $\bar{u}_i(\tau)$ 、 $\bar{v}_i(\tau)$ 、 $\bar{w}_i(\tau)$ 、 $\bar{p}_i(\tau)$ 和 $\bar{q}_i(\tau)$ 都表示广义坐标， n 表示截断模的数量。此外， $\bar{\phi}_i(\xi)$ 表示第 i 阶模态的模态函数，其表达式为 $\bar{\phi}_i(\xi) = \sqrt{2} \sin(i\pi\xi)$ 。

通过将式(4-39)-式(4-42)的两侧同乘以 $\bar{\phi}_i(\xi)$ ，将式(4-43)代入其中，并在0到1的范围内进行积分，可以得到无量纲形式的非线性常微分方程。纤维增强复合材料管道的几何参数如下：管道长度 $\hat{L}=50m$ 、外径 $\hat{r}_o=0.1m$ 、内径 $\hat{r}_i=0.08m$ 。本研究选择环氧树脂作为复合管的基材料，石墨作为增强纤维。石墨和环氧树脂的主要物理性质为：弹性模量 $\hat{E}_1=144GPa$ ， $\hat{E}_2=9.65GPa$ 和泊松比 $\hat{\nu}_I=\hat{\nu}_{II}=0.3$ 表示。所选的纤维取向角会影响管道的抗拉应力和抗剪应力的能力，选定为 $\hat{\theta}=30^\circ$ 。流体的密度分别由液相密度 $\hat{\rho}_l=870kg/m^3$ 、气相密度 $\hat{\rho}_g=0.7kg/m^3$ 和外部流体密度 $\hat{\rho}_o=1025kg/m^3$ 定义。此外，液相和气相的体积系数分别为 $\hat{Q}_l=0.9$ 和 $\hat{Q}_g=0.1$ 。为了便于全面讨论两相流速度的影响，使滑移率 $\hat{\beta}=1$ 。利用这些参数和模态函数，借

助四阶龙格-库塔方法计算方程的数值解。沿不同方向的位移和尾流变量的初始值假设如下：

$$\begin{aligned}
 \dot{u}(0) &= 0, \frac{\partial \dot{u}}{\partial \tau}(0) = 0, \\
 \dot{v}(0) &= 0, \frac{\partial \dot{v}}{\partial \tau}(0) = 0, \\
 \dot{w}(0) &= 0, \frac{\partial \dot{w}}{\partial \tau}(0) = 0, \\
 \dot{p}(0) &= 2, \frac{\partial \dot{p}}{\partial \tau}(0) = 0, \\
 \dot{q}(0) &= 2, \frac{\partial \dot{q}}{\partial \tau}(0) = 0
 \end{aligned} \tag{4-44}$$

去除式(4-22)-(4-26)中的非线性项和外力项，并通过式(6-38)进行无量纲变换，可以得到：

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \tau^2} + 2\sqrt{\hat{m}_l} \hat{V}_l \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \xi \partial \tau} + 2\frac{\hat{m}_g}{\sqrt{\hat{m}_l}} \hat{V}_l \hat{\beta} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \xi \partial \tau} + \hat{V}_l^2 \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \xi^2} + \frac{m_g}{m_l} \hat{V}_l^2 \hat{\beta}^2 \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \xi^2} + \hat{\sigma} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi} - 2\hat{\chi} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \xi^2} = 0 \tag{4-45}$$

$$\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \tau^2} + 2\sqrt{\hat{m}_l} \hat{V}_l \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \xi \partial \tau} + 2\frac{\hat{m}_g}{\sqrt{\hat{m}_l}} \hat{V}_l \hat{\beta}_l \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \xi \partial \tau} + \hat{V}_l^2 \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \xi^2} + \frac{m_g}{m_l} \hat{V}_l^2 \hat{\beta}^2 \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \xi^2} + \hat{\sigma} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} + \frac{\partial^4 \hat{v}}{\partial \xi^4} = 0 \tag{4-46}$$

$$\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \tau^2} + 2\sqrt{\hat{m}_l} \hat{V}_l \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \xi \partial \tau} + 2\frac{\hat{m}_g}{\sqrt{\hat{m}_l}} \hat{V}_l \hat{\beta} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \xi \partial \tau} + \hat{V}_l^2 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \xi^2} + \frac{m_g}{m_l} \hat{V}_l^2 \hat{\beta}^2 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \xi^2} + \hat{\sigma} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi} + \frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial \xi^4} = 0 \tag{4-47}$$

通过将式(4-43)代入式(4-45)-式(4-47)并结合式(4-44)，可以得到随液相流速变化的三个方向上的前四阶固有频率 $\omega_i (i=1,2,3,4)$ ，如图 4-2 所示，可以发现随着液相流速的提升，管道在 $\hat{y}$ 和 $\hat{z}$ 方向上的前四阶固有频率明显降低，而 $\hat{x}$ 方向上的固有频率几乎保持不变。此外， $\hat{x}$ 方向上的固有频率远大于另外两个方向的固有频率，这会让管道在 $\hat{x}$ 方向上产生更大的振动响应。此外，可以观察到，在 $0 < \hat{V}_l < 6$ 的范围内，管道在 $\hat{x}$ 和 $\hat{y}$ 方向上的固有频率随着液相流速的增加而降低，当一阶固有频率降至零时，管道发生屈曲失稳，此时的液相流速值即为临界流速。

通过令固有频率等于零并改变轴向张力值，可以得出随轴向力变化的临界速度曲线。如图 4-3 所示，这表明临界流速和轴向张力之间存在明显的线性关系。此外还发现，更大的轴向张力会导致液相的临界速度更高。

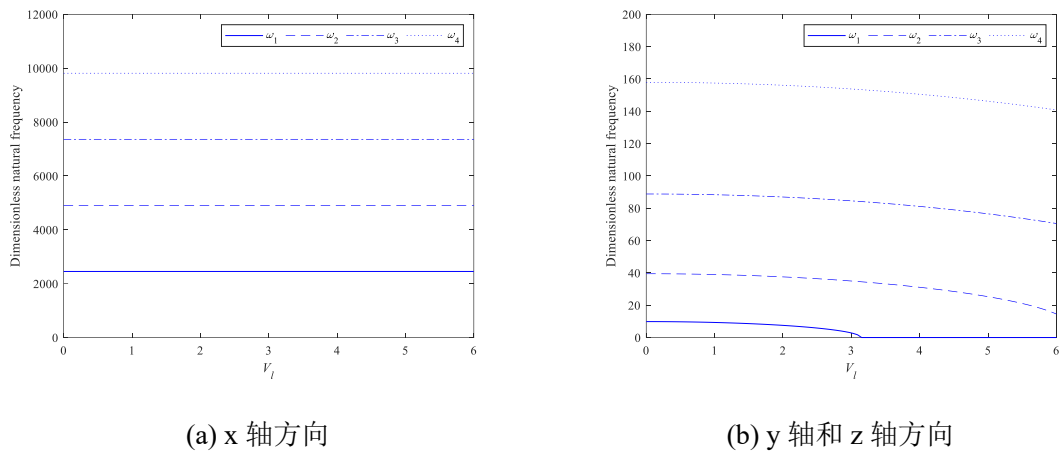


图 4-2 复合管的固有频率随液相流速变化图

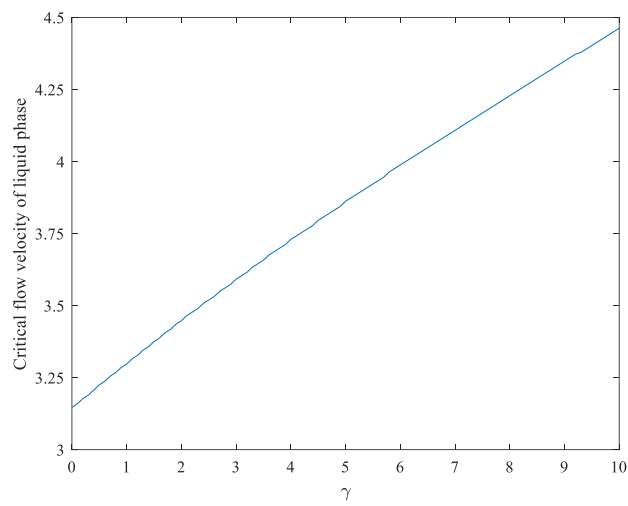


图 4-3 液体临界流速与轴向张力之间的关系图

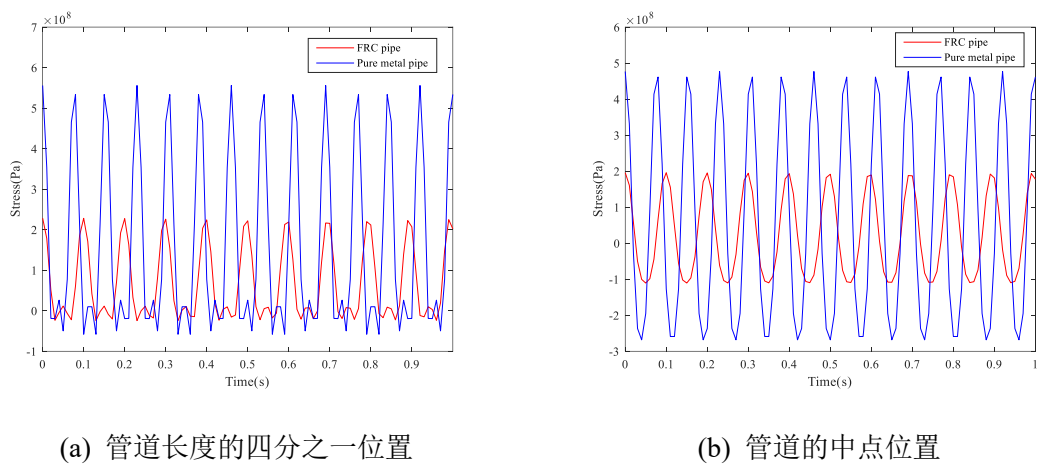


图 4-4 FRC 管和纯金属管受到的应力响应比较图

由纤维增强复合材料(FRC)制成的管道显示出显著的优势，如结构强度的提

高。为了说明这个问题，图 4-4 比较了纤维增强管和纯金属管在管道长度四分之一和中间位置的应力响应。结果表明，纤维增强复合管在不同位置的应力幅值远小于纯金属管，这证实了纤维增强管的优越性。图 4-5 比较了纤维增强复合材料和纯金属管获得的位移响应的分岔图。从图中可以看出，纯金属管的响应位移远高于 FRC 管，证明了在工程应用中纤维增强管强度方面的优势。

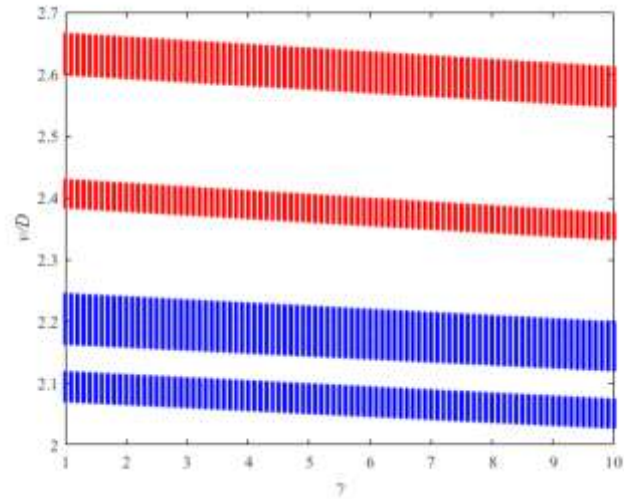


图 4-5 FRC 和纯金属管(蓝点：FRC 管；红点：纯金属管)的位移响应分岔图的比较图

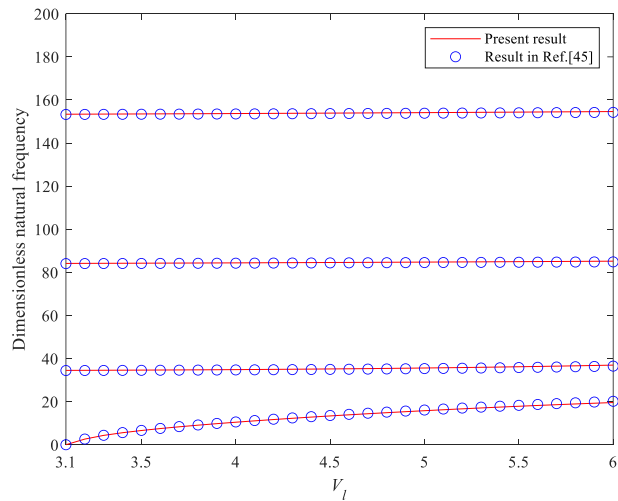


图 4-6 当前工作和已发表的结果确定的后屈曲频率的变化比较图

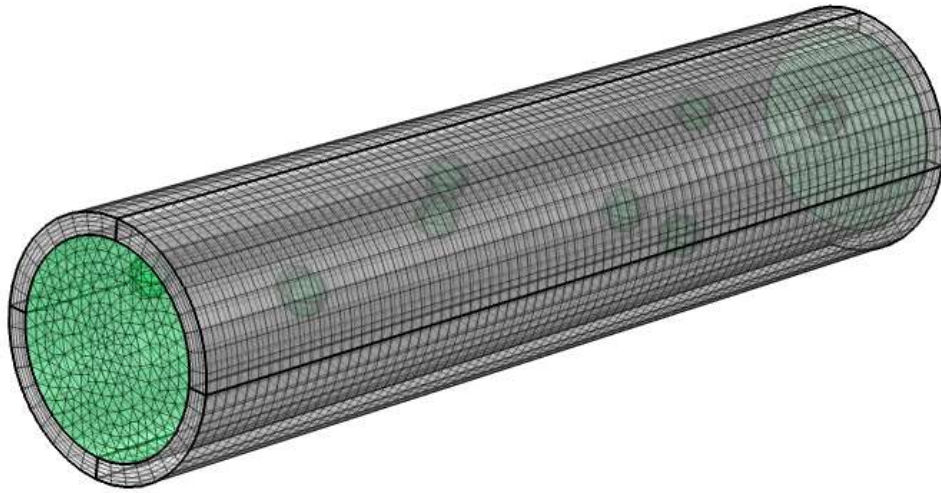


图 4-7 输送气液两相流纤维增强管的有限元模型

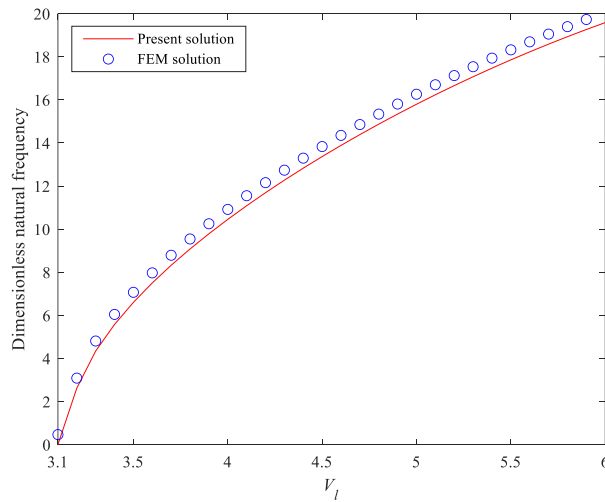


图 4-8 用解析方法和有限元方法获得的复合材料管道固有频率的比较图($\hat{\beta}=1, \hat{Q}_l=0.9$)

在分析超临界状态下的振动响应之前，有必要确认研究的正确性。图 4-6 展示了后屈曲的前四阶固有频率与液相速度之间的联系，表明结果与参考文献^[45]中的曲线非常吻合，从而验证了本研究的准确性。为了进一步验证本方法的准确性，我们比较了本方法和有限元方法(FEM)获得的复合管的频率和响应。首先，选择碳纤维和环氧树脂材料来模拟材料的增强纤维和基体材料，并通过进行反对称变换来创建五层复合材料。然后，选择石油和天然气的混合物来模拟气液两相流。建立了输送两相流的纤维增强复合材料管道的有限元模型，如图 4-7 所示。通过进行有限元模拟，获得了自由振动中的固有频率和响应位移。图 4-8 和图 4-9 显

示了通过本方法和有限元法确定的纤维增强复合材料管的固有频率和位移响应的比较。由于网格划分和边界条件的近似，本方法和有限元方法在超临界情况下管道的固有频率差异很小。此外，这两个位移解有着良好的一致性，进一步表明目前的解是准确的。

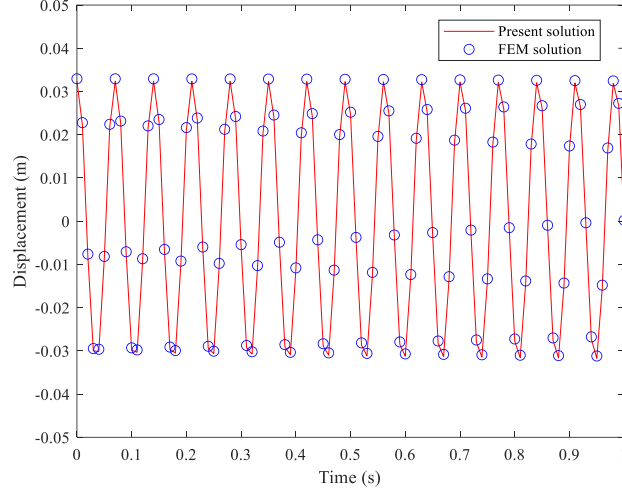


图 4-9 通过本方法和有限元方法获得的复合材料管的位移比较图($\hat{U}_l = 5m/s, \hat{Q}_l = 0.9$)

一旦液相流速超过临界阈值，就会沿 $\hat{y}$ 和 $\hat{z}$ 方向发生屈曲。由于涡流产生的脉动压力，总位移可分为屈曲平衡位移和振动位移两部分^[25]：

$$\hat{v}(\xi, \tau) = \hat{v}_1(\xi) + \hat{v}_2(\xi, \tau) \quad (4-48)$$

$$\hat{w}(\xi, \tau) = \hat{w}_1(\xi) + \hat{w}_2(\xi, \tau) \quad (4-49)$$

振动位移的变量 $\hat{v}_2(\xi, \tau)$ 和 $\hat{w}_2(\xi, \tau)$ 通过式(4-43)分离出来。在将屈曲平衡位移变量 $\hat{v}_1(\xi)$ 和 $\hat{w}_1(\xi)$ 代入式(4-39)和式(4-40)并删除与时间相关的项后，屈曲平衡方程可得出^[28]：

$$\frac{\partial^4 \hat{v}_1}{\partial \xi^4} + \left\{ \hat{V}_l^2 + \frac{\hat{m}_g}{\hat{m}_l} \hat{V}_l^2 \hat{\beta}^2 - \hat{\gamma} + \left(\frac{\hat{\gamma}}{2} - \hat{\chi} \right) \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial^2 \hat{v}_1}{\partial \xi^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \hat{w}_1}{\partial \xi^2} \right)^2 \right] d\xi \right\} \frac{\partial^2 \hat{v}_1}{\partial \xi^2} = 0 \quad (4-50)$$

$$\frac{\partial^4 \hat{w}_1}{\partial \xi^4} + \left\{ \hat{V}_l^2 + \frac{\hat{m}_g}{\hat{m}_l} \hat{V}_l^2 \hat{\beta}^2 - \hat{\gamma} + \left(\frac{\hat{\gamma}}{2} - \hat{\chi} \right) \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial^2 \hat{v}_1}{\partial \xi^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \hat{w}_1}{\partial \xi^2} \right)^2 \right] d\xi \right\} \frac{\partial^2 \hat{w}_1}{\partial \xi^2} = 0 \quad (4-51)$$

振动方程的相应边界条件为：

$$\begin{aligned}
 \hat{v}_1(0) &= 0, \frac{\partial^2 \hat{v}_1}{\partial \xi^2}(0) = 0, \\
 \hat{w}_1(0) &= 0, \frac{\partial^2 \hat{w}_1}{\partial \xi^2}(0) = 0, \\
 \hat{v}_1(1) &= 0, \frac{\partial^2 \hat{v}_1}{\partial \xi^2}(1) = 0, \\
 \hat{w}_1(1) &= 0, \frac{\partial^2 \hat{w}_1}{\partial \xi^2}(1) = 0
 \end{aligned} \tag{4-52}$$

假设 $\hat{v}_1 = \bar{\mu}_1 \bar{\phi}_1$ 和 $\hat{w}_1 = \bar{\mu}_2 \bar{\phi}_1$ [28], 将边界条件代入式(4-50)和式(4-51)中, 表达式可改写为:

$$\hat{v}_1 = \frac{\bar{\mu}_1}{\sqrt{\bar{\mu}_1^2 + \bar{\mu}_2^2}} \sqrt{\frac{(\hat{V}_l^2 + \hat{V}_l^2 \bar{\beta}^2 \hat{m}_g / \hat{m}_l)}{(\hat{\lambda} - \hat{\gamma}/2)\pi^2}} \bar{\phi}_1 \tag{4-53}$$

$$\hat{w}_1 = \frac{\bar{\mu}_2}{\sqrt{\bar{\mu}_1^2 + \bar{\mu}_2^2}} \sqrt{\frac{(\hat{V}_l^2 + \hat{V}_l^2 \bar{\beta}^2 \hat{m}_g / \hat{m}_l)}{(\hat{\lambda} - \hat{\gamma}/2)\pi^2}} \bar{\phi}_1 \tag{4-54}$$

通过将式(4-48)和式(4-49)代入式(4-39)和式(4-40)中, 描述屈曲行为的动力学控制方程为:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 \hat{v}_2}{\partial \tau^2} + 2\sqrt{\hat{m}_l} \hat{V}_l \frac{\partial^2 \hat{v}_2}{\partial \xi \partial \tau} + 2 \frac{\hat{m}_g}{\sqrt{\hat{m}_l}} \bar{\beta} \hat{V}_l \frac{\partial^2 \hat{v}_2}{\partial \xi \partial \tau} + \hat{V}_l^2 \frac{\partial^2 \hat{v}_2}{\partial \xi^2} + \frac{\hat{m}_g}{\hat{m}_l} \bar{\beta}^2 \hat{V}_l^2 \frac{\partial^2 \hat{v}_2}{\partial \xi^2} + \hat{\sigma} \frac{\partial \hat{v}_2}{\partial \tau} + \frac{\partial^4 \hat{v}_2}{\partial \xi^4} \\
 & - \hat{\gamma} \frac{\partial^2 \hat{v}_2}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\hat{\gamma}}{2} - \hat{\lambda} \right) \frac{\partial^2 \hat{v}_1}{\partial \xi^2} \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial \hat{v}_2}{\partial \xi} \right)^2 + 2 \frac{\partial \hat{v}_1}{\partial \xi} \frac{\partial \hat{v}_2}{\partial \xi} + 2 \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial \xi} \frac{\partial \hat{w}_2}{\partial \xi} + \left(\frac{\partial \hat{w}_2}{\partial \xi} \right)^2 \right] d\xi \\
 & + \left(\frac{\hat{\gamma}}{2} - \hat{\lambda} \right) \frac{\partial^2 \hat{v}_2}{\partial \xi^2} \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial \hat{v}_1}{\partial \xi} \right)^2 + 2 \frac{\partial \hat{v}_1}{\partial \xi} \frac{\partial \hat{v}_2}{\partial \xi} + \left(\frac{\partial \hat{v}_2}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{w}_1}{\partial \xi} \right)^2 + 2 \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial \xi} \frac{\partial \hat{w}_2}{\partial \xi} + \left(\frac{\partial \hat{w}_2}{\partial \xi} \right)^2 \right] d\xi \\
 & = 2\hat{\alpha} \hat{C}_{D0} + \hat{\alpha} \hat{C}_{D0} \hat{p} - \hat{\zeta} \hat{C}_{L0} \hat{q} \frac{\partial \hat{w}_2}{\partial \tau}
 \end{aligned} \tag{4-55}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 \hat{w}_2}{\partial \tau^2} + 2\sqrt{\hat{m}_l} \hat{V}_l \frac{\partial^2 \hat{w}_2}{\partial \xi \partial \tau} + 2 \frac{\hat{m}_g}{\sqrt{\hat{m}_l}} \bar{\beta} \hat{V}_l \frac{\partial^2 \hat{w}_2}{\partial \xi \partial \tau} + \hat{V}_l^2 \frac{\partial^2 \hat{w}_2}{\partial \xi^2} + \frac{\hat{m}_g}{\hat{m}_l} \bar{\beta}^2 \hat{V}_l^2 \frac{\partial^2 \hat{w}_2}{\partial \xi^2} + \hat{\sigma} \frac{\partial \hat{w}_2}{\partial \tau} + \frac{\partial^4 \hat{w}_2}{\partial \xi^4} \\
 & - \hat{\gamma} \frac{\partial^2 \hat{w}_2}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\hat{\gamma}}{2} - \hat{\lambda} \right) \frac{\partial^2 \hat{w}_1}{\partial \xi^2} \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial \hat{v}_2}{\partial \xi} \right)^2 + 2 \frac{\partial \hat{v}_1}{\partial \xi} \frac{\partial \hat{v}_2}{\partial \xi} + 2 \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial \xi} \frac{\partial \hat{w}_2}{\partial \xi} + \left(\frac{\partial \hat{w}_2}{\partial \xi} \right)^2 \right] d\xi \\
 & + \left(\frac{\hat{\gamma}}{2} - \hat{\lambda} \right) \frac{\partial^2 \hat{w}_2}{\partial \xi^2} \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial \hat{v}_1}{\partial \xi} \right)^2 + 2 \frac{\partial \hat{v}_1}{\partial \xi} \frac{\partial \hat{v}_2}{\partial \xi} + \left(\frac{\partial \hat{v}_2}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{w}_1}{\partial \xi} \right)^2 + 2 \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial \xi} \frac{\partial \hat{w}_2}{\partial \xi} + \left(\frac{\partial \hat{w}_2}{\partial \xi} \right)^2 \right] d\xi \\
 & = \hat{\zeta} \hat{C}_{D0} \hat{p} \frac{\partial \hat{w}_2}{\partial \tau} + \hat{\alpha} \hat{C}_{L0} \hat{q}
 \end{aligned} \tag{4-56}$$

利用伽辽金方法分离式(4-55)和式(4-56)中的变量, 可以得出复合材料管在后屈曲状态下的一组常微分控制方程。求解这些方程可以计算沿 $\bar{y}$ 和 $\bar{z}$ 方向的位移, 以分析管道的涡激振动响应特性。由于响应取决于固有频率, 因此消除了非线性项、阻尼项和涡激力项, 从而推导出频率方程以供进一步研究。

在分析涡激振动特性之前，确定截断模态的数量是非常必要的。因此，本研究将截断模态数设置为 $n=6$ 。此外，液相的无量纲速度设定为 $\hat{V}_l=6$ ，而外部速度设定为 $\hat{U}_e=2\text{m/s}$ 。图 4-10 为六阶截断条件下复合管的涡激振动响应分岔图，该复合管在沿 $\hat{y}$ 和 $\hat{z}$ 方向的输送超临界状态的液气两相流。横轴表示不同的轴向力大小，而纵轴表示响应的最大值和最小值。图 4-11 展示了复合管的位移响应随截断模态数的变化。可以观察到，当考虑超过六阶伽辽金截断时，结果的准确性不会受明显改变。因此，本研究选择六阶伽辽金截断来研究复合管的动力学。

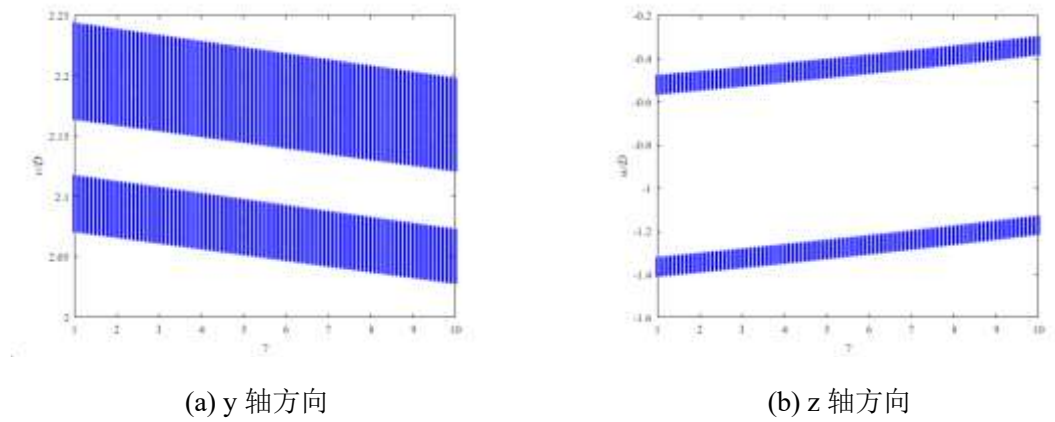


图 4-10 六阶截断下处于超临界状态管道的分岔图 ($\hat{V}_l=2, \hat{U}_e=6\text{m/s}$)

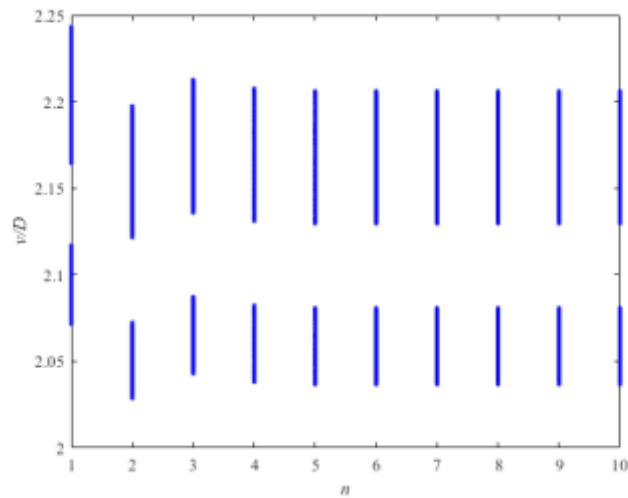


图 4-11 复合管响应位移随截断模态数的变化图 ($\hat{V}_l=2, \hat{U}_e=6\text{m/s}, \gamma=8$)

4.4 非线性涡激振动分析

下面将讨论屈曲振幅和固有频率之间的关系。在讨论之前，提出了一些条件和假设：由于频率方程在 $\hat{y}$ 和 $\hat{z}$ 方向上的形式相似，因此只考虑了这两个方向中的一个；超临界状态下管道的屈曲方向是随机的， $\bar{\mu}_1$ 和 $\bar{\mu}_2$ 之间的关系可以很容易地从式(4-53)和式(4-54)中推导出来，即 $\bar{\mu}_1^2 + \bar{\mu}_2^2 = (\hat{V}_1^2 + \hat{V}_1^2 \hat{\beta}^2 \hat{m}_g / \hat{m}_l) / [(\hat{\chi} - \hat{\gamma}/2)\pi^2] = \bar{\mu}_0^2$ 。因此引入角度 $\hat{\Theta}$ 来表示外部流动平面和屈曲平面之间的关系，如图 4-12 所示。利用该角度，沿 $\hat{y}$ 和 $\hat{z}$ 方向的响应幅度可以分别表示为 $\bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_0 \sin(\hat{\Theta}\pi/180)$ 和 $\bar{\mu}_2 = \bar{\mu}_0 \cos(\hat{\Theta}\pi/180)$ 。

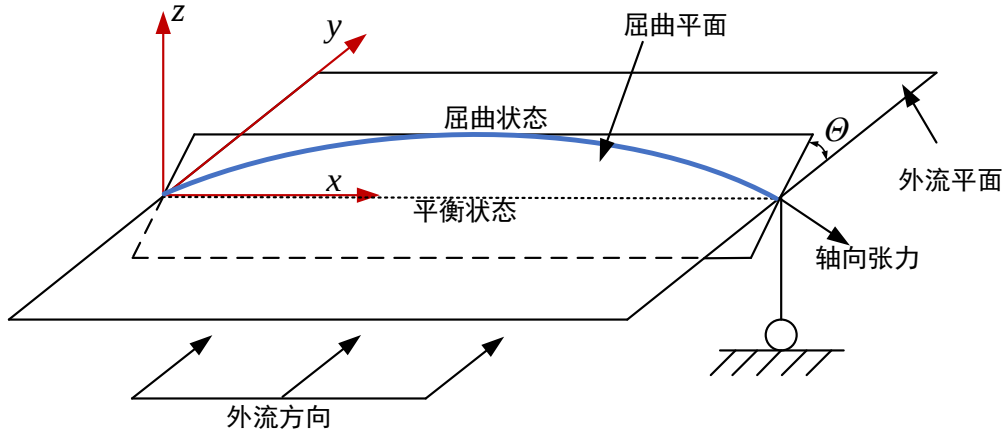
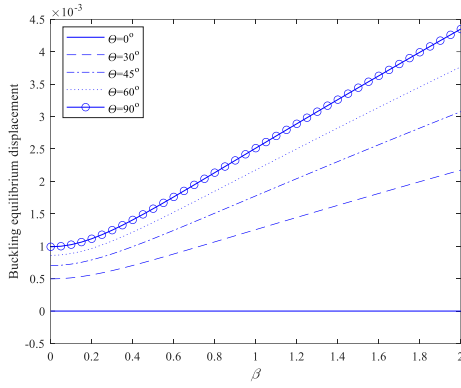
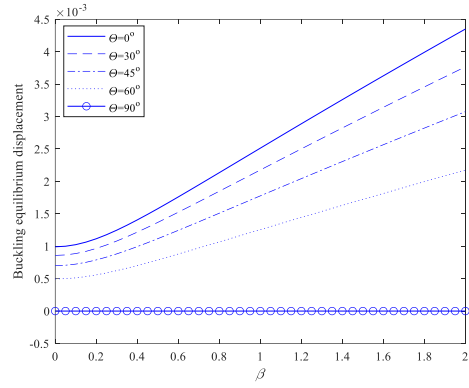


图 4-12 屈曲平面和外流平面之间的空间关系图

根据式(4-53)和式(4-54)，选择滑移率和液相体积系数作为控制参数来研究两相流系统的屈曲行为。如图 4-13 所示，在不同的屈曲角 $\hat{\Theta}$ 下，较高的滑移率会导致 $\hat{y}$ 和 $\hat{z}$ 方向上较大的屈曲平衡位移。另外，图 4-14 中值得注意的是，在保持其他参数不变的情况下，屈曲平衡位移随着液相体积系数的增加而增长。这意味着，在输送非均匀两相流体的管道系统中，由于气泡流、段塞流等不同的流体状态，系统的屈曲行为会发生变化。

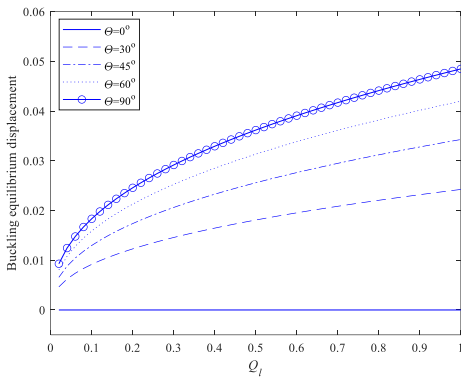


(a) y 方向

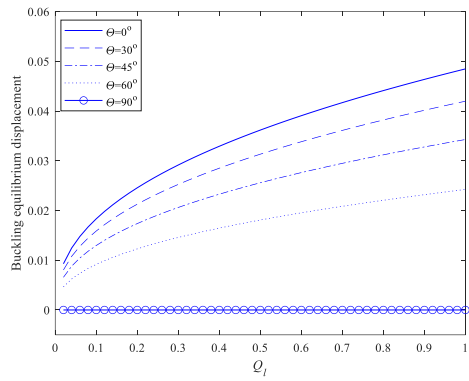


(b) z 方向

图 4-13 复合管屈曲平衡位移随滑移率的变化图



(a) y 方向



(b) z 方向

图 4-14 复合管屈曲平衡位移随液相体积系数的变化图

图 4-15 和图 4-16 分别呈现了在液相滑移率和体积系数各异的条件下，一阶固有频率与二阶固有频率随液相流速的改变情况。其中，二阶固有频率是本研究着重关注的关键内容。从图中能够看出，较高的液相滑移率会使得前两阶固有频率处于相对较小的数值范围。鉴于气相和液相在动能方面存在显著差异，这种复杂的变化情形进一步凸显了开展相关研究的重要意义。在液相体积系数不断增加的过程中，管道的一阶固有频率会随之上升，而此时其他相关参数均保持恒定。与之相反，二阶固有频率却呈现出与一阶固有频率截然不同的变化趋势。

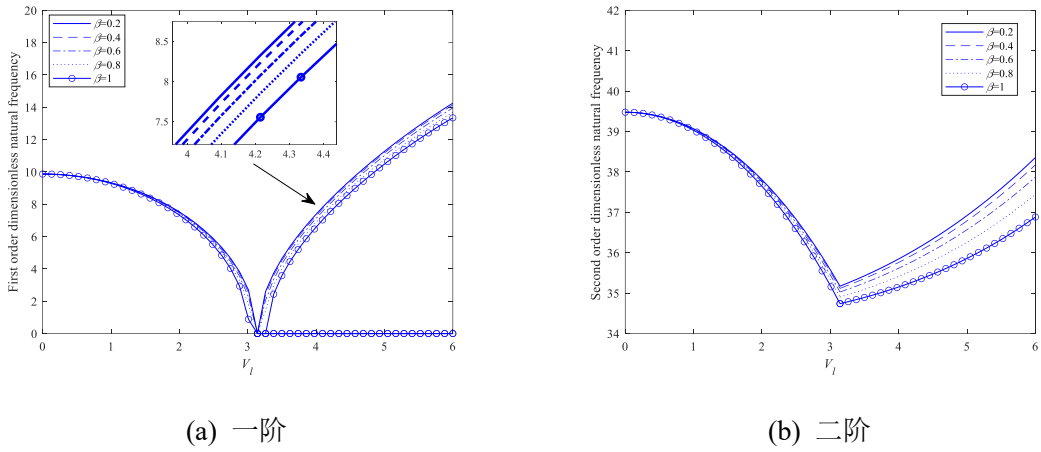
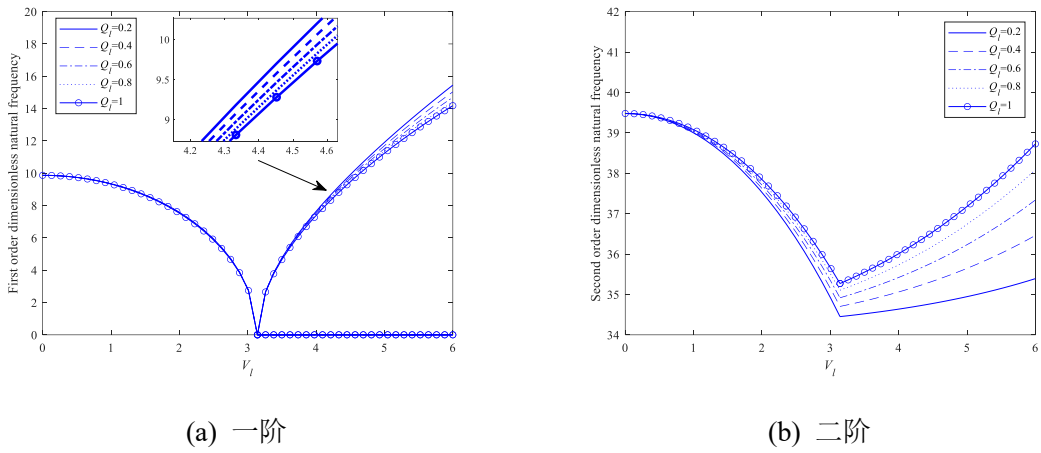

 图 4-15 不同滑移率 β 下复合管的固有频率变化图

 图 4-16 不同液相体积系数 $\hat{Q}_l$ 下复合管的固有频率变化图

图 4-17 呈现出一阶与二阶固有频率在不同角度条件下 ($\hat{\Theta} = 0^\circ - 90^\circ$)，随液相流速变化所呈现出的趋势。在诸多影响因素中，角度的改变对临界液体速度产生的影响最为微弱。究其原因，在于式(4-46)以及式(4-47)当中，并未包含有关屈曲幅值的项。此外，不同角度下的前屈曲频率几乎无法区分。比较分析表明，在所对比的角度上，二阶固有频率随液相速度的变化小于一阶频率。

图 4-18 描绘了不同值的液相流体速度下的前两阶固有频率。在达到临界速度之前，一阶固有频率和二阶固有频率与轴向力 $\hat{\gamma}$ 的增大有明显的关系，表明存在预屈曲状态。然而，速度超过临界值之后，更高的轴向力会导致频率降低和屈曲行为的开始。

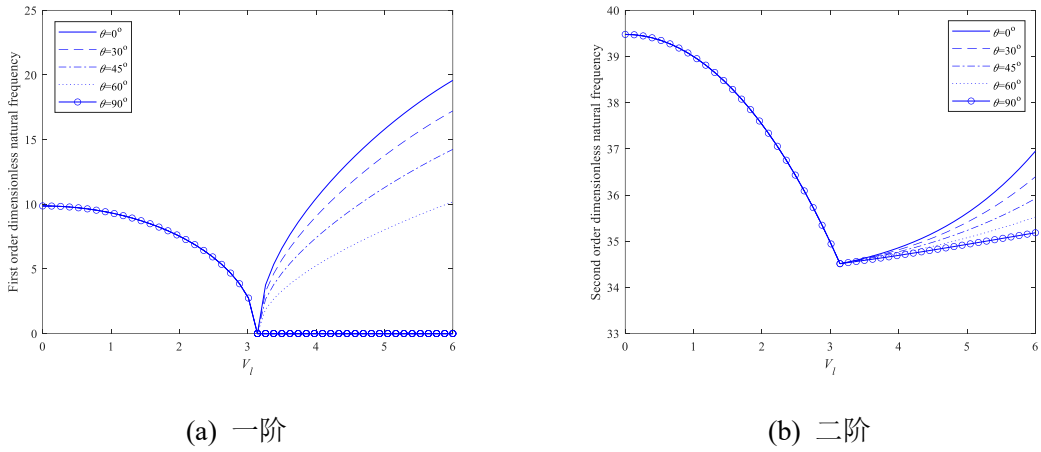


图 4-17 不同角度 θ 下复合管固有频率的变化图

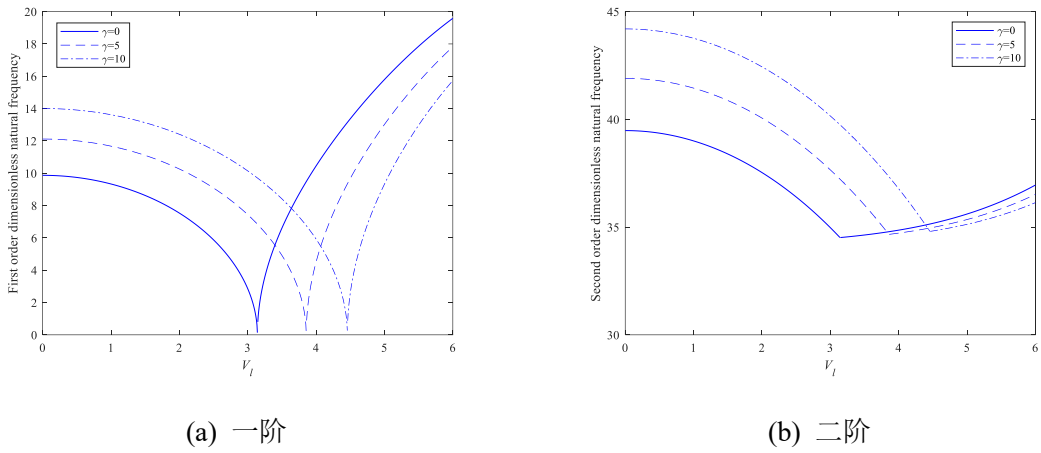


图 4-18 不同轴向力 γ 下复合管道的固有频率变化图

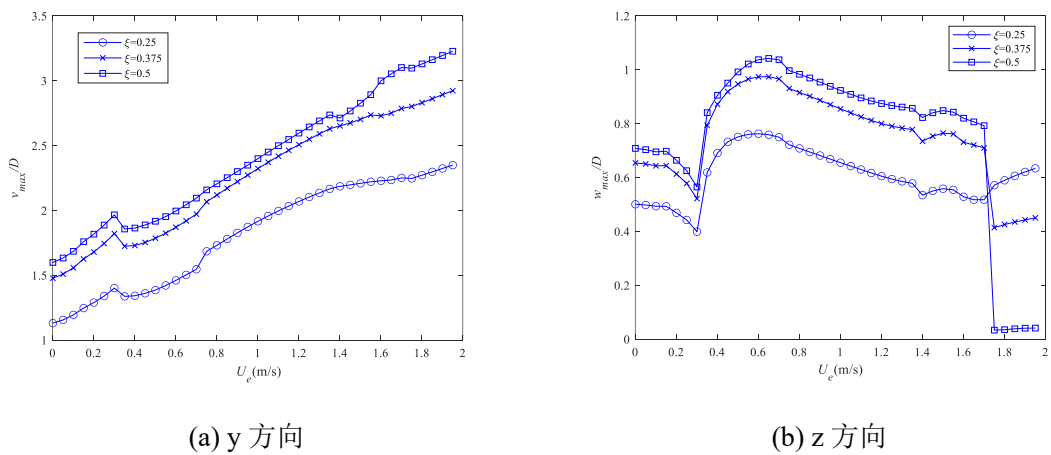


图 4-19 管道不同位置的最大响应幅值相对于外部流速的变化图

图 4-19 显示了不同管道位置(包括四分之一、八分之三和管道中点处)的最大响应振幅随外部流速的变化情况。在图 4-19 (a)中, 沿 $\hat{x}$ 方向的最大响应振幅随着

外部流速的增加而增加。具体而言，在 $\hat{U}_e = 0.3 \text{ m/s}$ 时观察到局部峰值，振幅在达到峰值后继续上升。相反，沿 $\hat{z}$ 方向的响应不同于沿 $\hat{y}$ 方向的响应。当 $\hat{U}_e = 0.3 \text{ m/s}$ 时，振幅的局部谷值出现，振幅在达到谷值之前随着外流速度的增加而减小。此外，振幅在外流速达到 $\hat{U}_e = 0.6 \text{ m/s}$ 之前持续增长，然后在外流速达到 $\hat{U}_e = 1.4 \text{ m/s}$ 之前振幅减小，直到响应曲线中存在第二对局部谷值。当外流速 $\hat{U}_e = 1.7 \text{ m/s}$ 时，管道长度的八分之三和管道中点处的响应幅值急剧下降，管道中点处的响应位移接近零。出现这种现象是因为沿 $\hat{z}$ 方向的位移仅包括振动分量；然而，沿 $\hat{y}$ 方向的位移包含除振动分量之外的平均分量。随着外部流速的增加，振动位移减小，而平均位移增加。

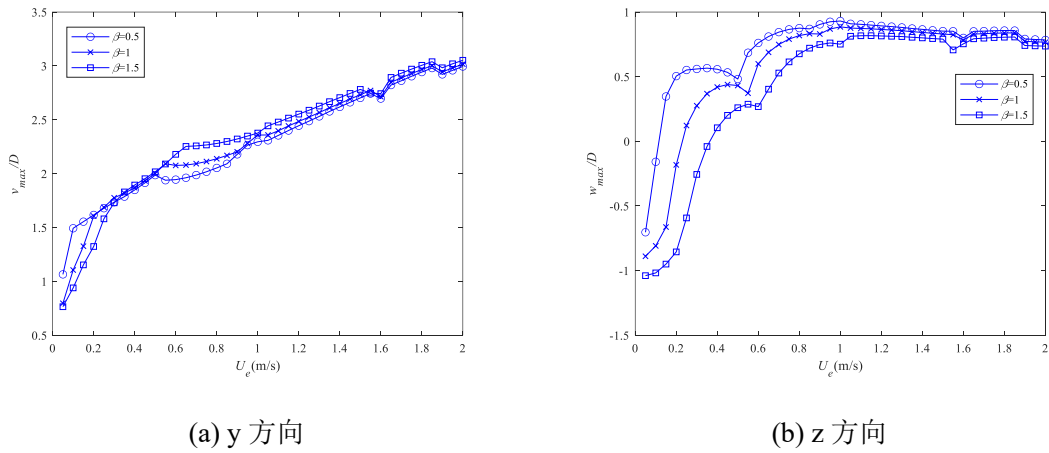


图 4-20 不同滑移率下最大响应幅值相对于外部流速的变化图

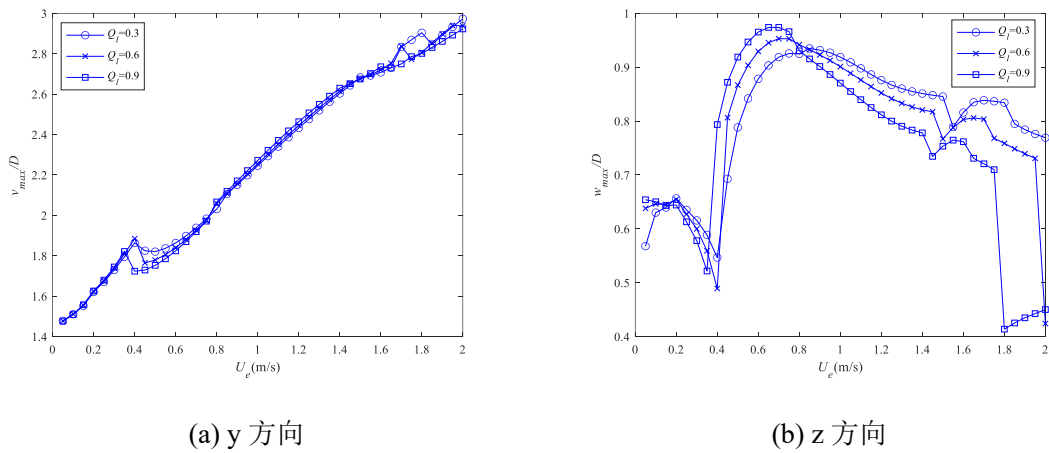


图 4-21 不同液相体积系数下最大响应幅值相对于外部流速的变化图

图 4-20 显示了不同流体滑移率下最大响应幅值随外部流速的变化。在图 4-20 (a)中, 当外部速度超过 0.35m/s 时, 可以观察到较大的滑移率会导致较大的响应幅值。然而, 当外部流体的速度不超过 0.35m/s 时, 情况正好相反。在图 4-20 (b)中, 当外部速度小于 1m/s 时, 较大的滑移率导致 $\hat{z}$ 方向上的响应幅值较小。随着外部速度的增加到大于 1m/s 时, 振幅随滑移率变化的程度变得难以观察。图 4-21 显示了不同液相体积系数下最大响应幅值随外部流速变化的规律。从图 4-21 中可以看出, 当 $\hat{U}_e < 0.8\text{m/s}$ 时, 体积系数越大, $\hat{y}$ 方向的响应幅值越大, $\hat{z}$ 方向的响应幅值越小。然而当 $\hat{U}_e > 0.8\text{m/s}$ 时, 结论正好相反。

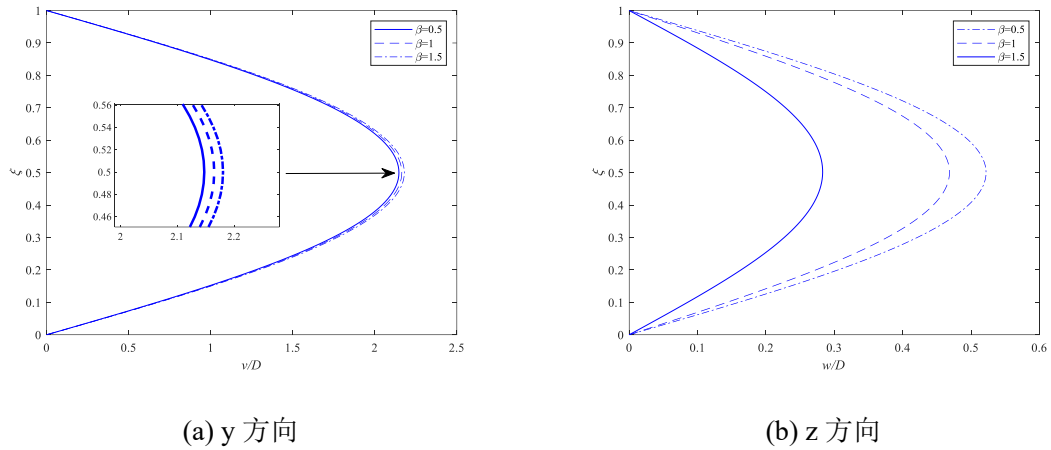


图 4-22 不同滑移率下, 管道任意一点在两个方向上的位移包络图

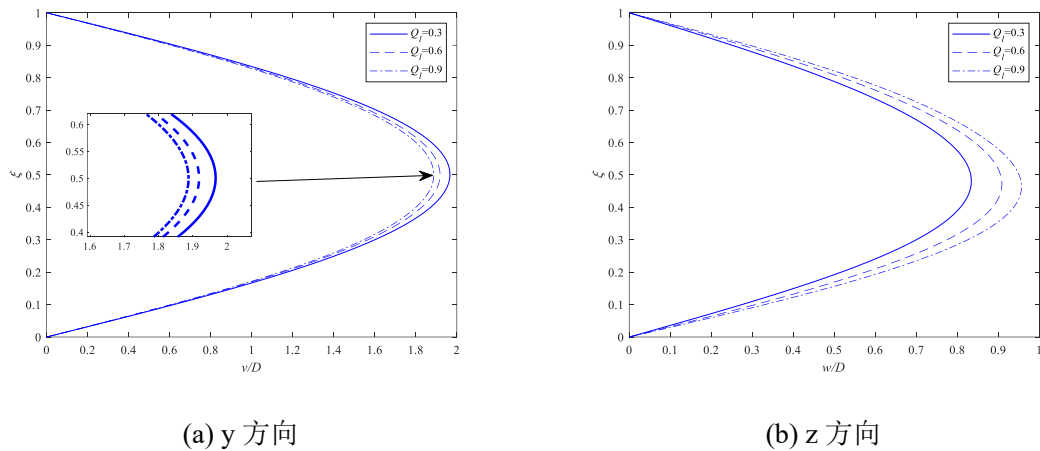


图 4-23 不同液相体积比下, 管道任意一点在两个方向上的位移包络图

通过保持其他参数不变, 只改变两相流体的滑移率, 可以得到图 4-22 来描

述滑移率对管道任何位置位移的影响。由此可以观察到，滑移率的增长会导致 $\hat{y}$ 方向的位移增加，但 $\hat{z}$ 方向的位移减少。此外，管道的位移从管道边缘到中间逐渐增加，在两个方向上管道中点附近达到最大值。同样，图 4-23 说明液相体积比的提升会导致 $\hat{y}$ 方向位移的下降，但 $\hat{z}$ 方向位移会随之增加。

图 4-24 显示了考虑不同轴向力和外部流速的管道沿线任何点的动力学响应，表明 $\hat{y}$ 方向的位移随着外部流速的增加而增加，响应模式从一阶转变为三阶。沿 $\hat{y}$ 方向的振动位移峰值出现在管道的中点处。对于 $\hat{z}$ 方向的位移，当流出速度的增加导致响应模式的变化时，最大位移从管道中间过渡到管道长度的四分之一和四分之三处。当轴向张力从 $\hat{\gamma}=0$ 转变到 $\hat{\gamma}=10$ 时，则很难观察到 $\hat{z}$ 方向上的位移变化。

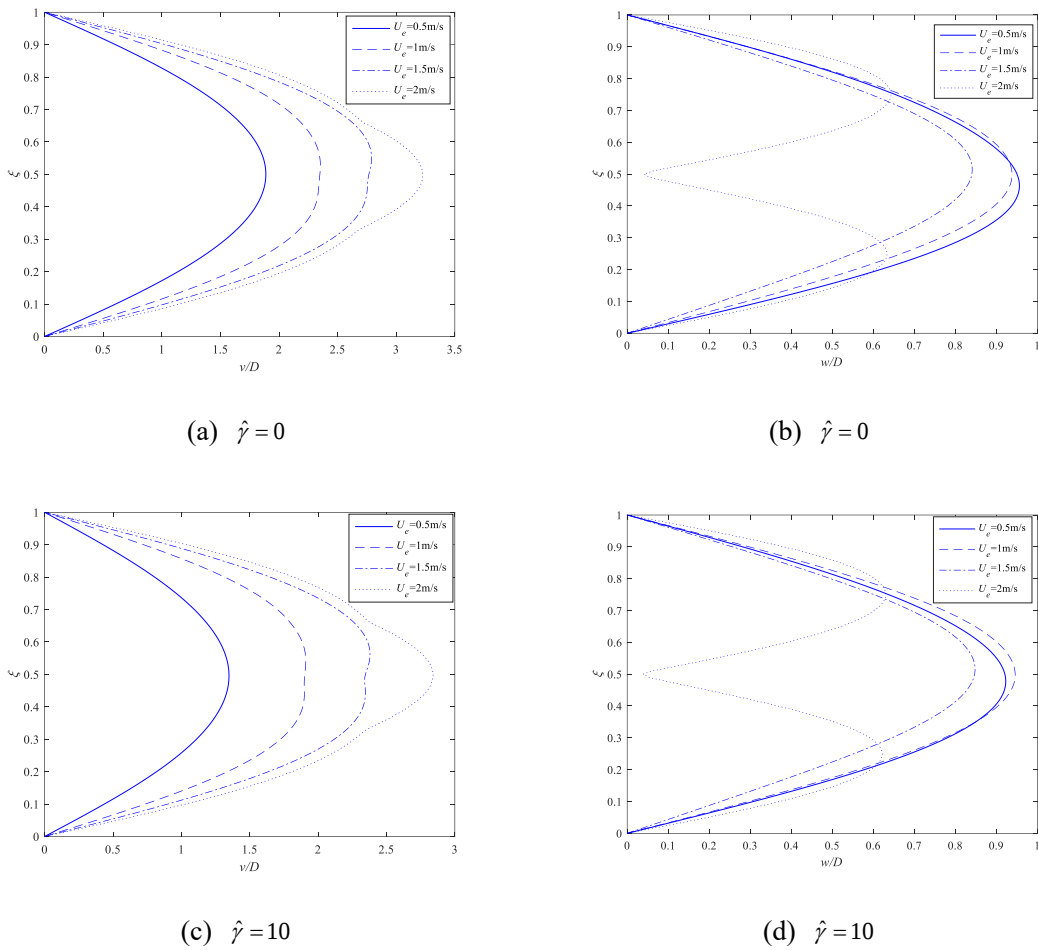


图 4-24 在不同的轴向张力和外部流速下，管道任意点处在两个方向上的位移包络图

在此基础上，确定了 $\xi = 0.375$ 位置管道的动态，以供进一步讨论。图 4-25 展示了在不同外部流速和轴向张力下，最大响应幅值如何随液相速度变化。如图 4-18 所示，轴向张力越大，液相的临界速度越高。此外，涡激振动响应的原点随着不同的轴向张力而变化。从图 7-25 (a)和图 7-25 (b)中可以看出， $\hat{y}$ 方向上的最大响应幅值随着液体流速的增加而增加，而 $\hat{z}$ 方向上的响应幅值首先上升然后下降。

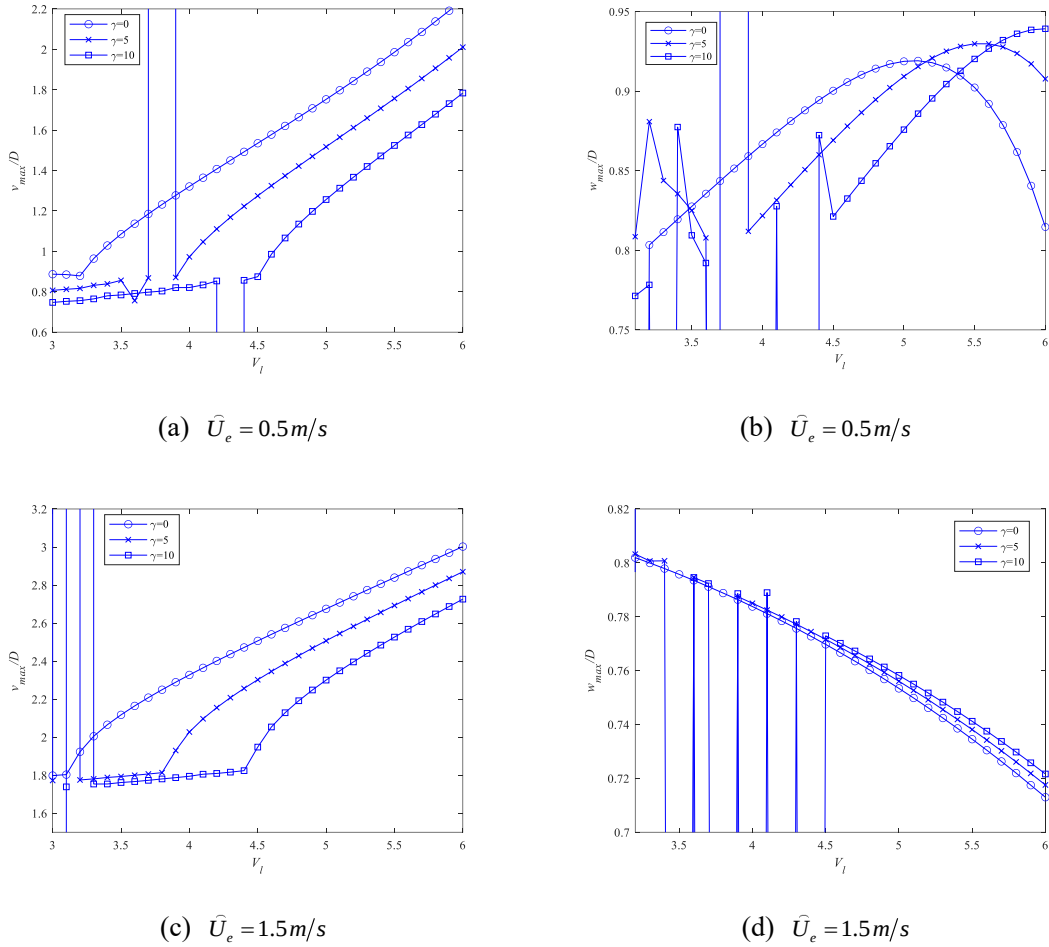


图 4-25 不同轴向力和外部流速下两个方向上最大响应幅值的变化图

根据式(4-53)和式(4-54)，静位移随着液相速度的增加而增加，导致 $\hat{y}$ 方向上的响应位移增加。在 $\hat{\gamma} = 0$ 的情况下，最大峰值出现在液相流速为 $\hat{V}_l = 5$ 的节点。此外，对应于最大峰值的液体速度随着轴向张力的增加而增加。与图 4-25 (a)类似，图 4-25 (c)显示了相同的趋势，尽管它们的外部流速不同。如图 4-25 (d)所示，当液相流速增加时，最大响应幅值减小。原因是管道在 $\hat{z}$ 方向上的峰值响应是在液

相流速达到 $\hat{V}_l=3.2$ 之前达到的。达到该峰值后，随着液相流速的增加，最大响应位移开始下降。图 4-26 (a)和图 4-26 (b)说明，在较低的外部流速下($\hat{U}_e=0.5\text{m/s}$)，管道从 $\hat{y}$ 和 $\hat{z}$ 方向的准周期运动切换到周期运动。此外，图 4-26 (c)和 4-26 (d)说明，在较高的外部流速下($\hat{U}_e=1.5\text{m/s}$)，管道在两个方向上都会经历周期性振动。

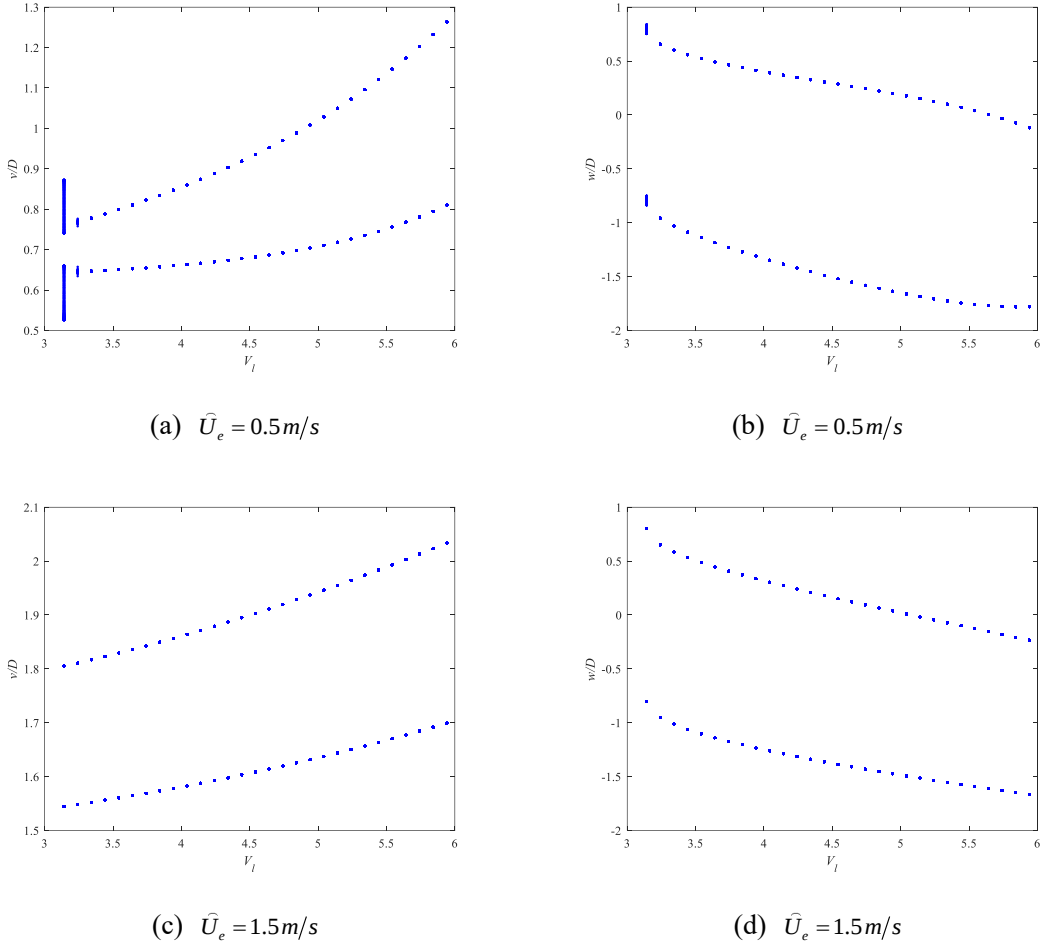


图 4-26 不同外流速下超临界状态下管道位置 $\xi = 0.375$ 处的响应位移分岔图

为了进一步探索外部流体速度对管道涡激振动的影响，引入了一个外流速的无量纲参数 $\hat{U}_r$ ，定义为 $\hat{U}_r = \pi \hat{U}_e / (\hat{\omega}_{y1} \hat{r}_o)$ ，其中， $\hat{\omega}_{y1}$ 是管道在 $\hat{y}$ 方向上的一阶固有频率。如图 4-27 所示，在超临界状态下， $\hat{y}$ 方向上的最大响应位移随着轴向张力的增加而减小。当内部速度 $\hat{V}_l=5$ 时， $\hat{z}$ 方向上的最大响应位移随着轴向张力的增加而减小，除非外部速度在 $2 < \hat{U}_r < 6$ 和 $\hat{U}_r > 15$ 范围内。因此，当内部速度 $\hat{V}_l=6$ 时，

除了 $1 < \hat{U}_r < 4$ 和 $11 < \hat{U}_r < 16$ 的情况外， $\hat{z}$ 方向上的最大响应位移随着轴向张力的增加而减小。图 4-26(a)和图 4-26 (b)显示，当 $\hat{U}_r < 6$ 和 $\hat{U}_r > 15$ 时，轴向张力较大的管道的响应幅值可能超过轴向张力较小的管道的幅值。根据前面的讨论，在超临界状态下，管道的轴向张力增长和固有频率降低导致 $\hat{y}$ 和 $\hat{z}$ 方向的振动位移增加。随着轴向张力的增加，静态位移下降，最终导致 $\hat{y}$ 方向上的总位移下降。同样地，图 4-27 (c)和图 4-27 (d)说明在较小的轴向张力下，一阶固有频率 $\hat{\omega}_{y1}$ 较高会导致频率大于涡流脱落的频率，表示为 $\hat{\omega}_s = U_r S_t \hat{\omega}_{y1}$ 。

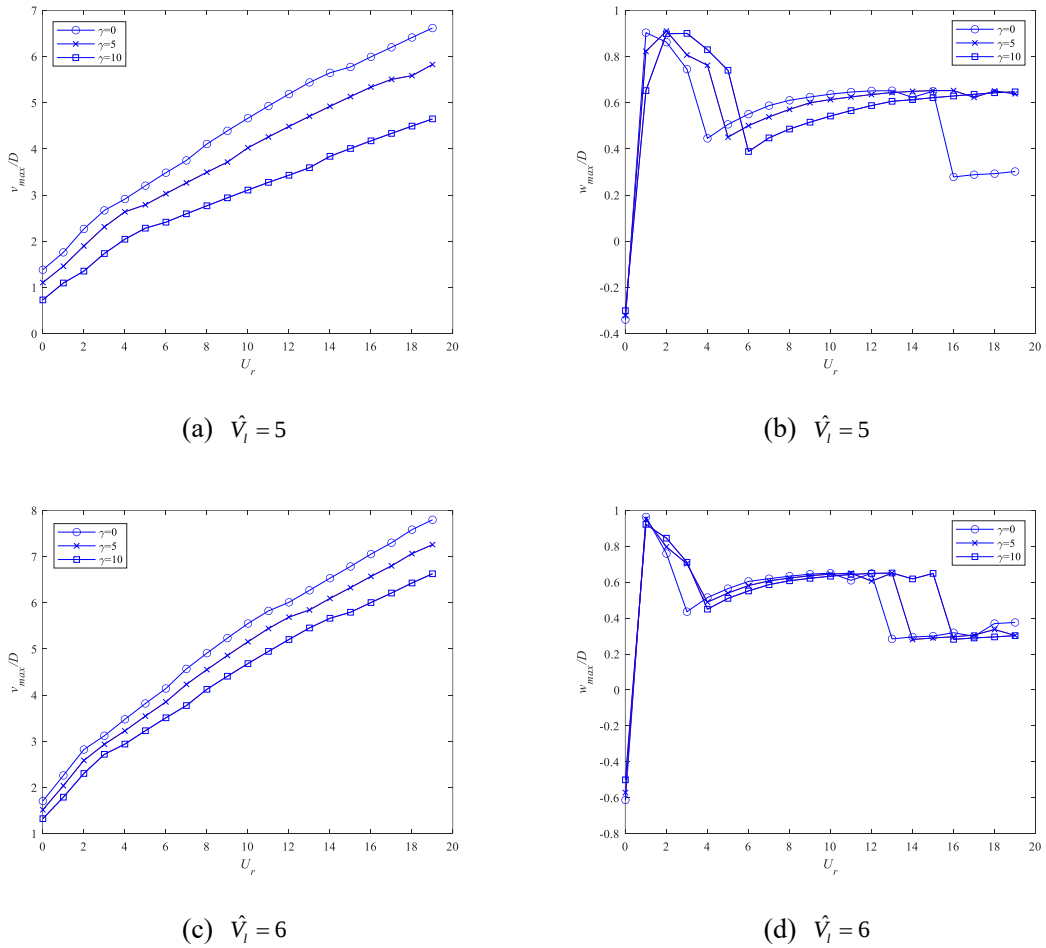


图 4-27 不同轴向力和液相速度下管道在 $\xi = 0.375$ 位置处两个方向上最大响应幅值的变化图

当轴向张力随时间变化时，管道将经历涡激振动和参数振动的联合激励，其表达式为 $\hat{y} = \hat{y}_1 + \hat{y}_2 \cos(\hat{\Omega}_t \tau)$ 。无量纲参数 $\hat{\Omega}_t = \sqrt{(\hat{m}_p + \hat{m}_a + \hat{m}_l + \hat{m}_g) / (\hat{EI})} \hat{\omega}_t \hat{L}^2$ ，其中 $\hat{\omega}_t$ 表

示角频率， $\hat{\gamma}_1$ 表示静张力， $\hat{\gamma}_2$ 代表张力幅值。为了避开在 $\hat{z}$ 方向上发生锁定的范围，参数设置为 $(\hat{U}_r=9, \hat{V}_l=5)$ 。图 4-28 显示了不同张力幅值和速度下， $\xi=0.375$ 位置处的最大响应幅值随张力振幅与一阶固有频率的比值变化的情况。从图 4-28 (a) 中可以明显看出，较大的轴向张力幅值会导致沿 $\hat{y}$ 方向的振动幅值较大。然而，当张力幅值从 2 转变为 3 时，在 $1.2 < \hat{\omega}_l/\hat{\omega}_{y1} < 1.4$ 范围内，最大响应幅值实际上会减小。同样，除了在 $1.3 < \hat{\omega}_l/\hat{\omega}_{y1} < 1.5$ 的情况， $\hat{z}$ 方向上的响应幅值随着张力幅值的增加而增加。与 $\hat{y}$ 方向上的最大响应幅值不同， $\hat{z}$ 方向上的响应幅值波动更剧烈。总之，通过改变时变张力的值可以抑制涡激振动。

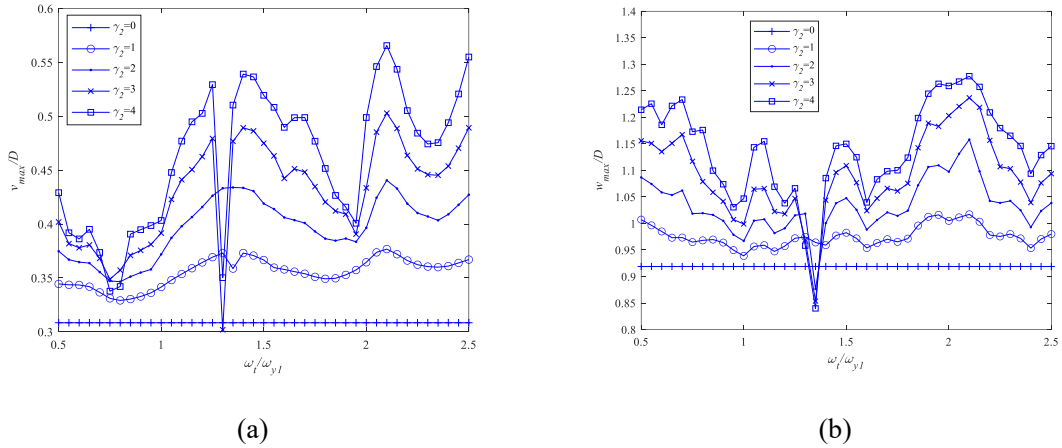


图 4-28 管道 $\xi=0.375$ 位置处的最大响应幅值与张力幅值之间的关系图

$$(\hat{U}_r=9, \hat{V}_l=5, \hat{\gamma}_1=5, \hat{U}_e=0.5\text{m/s})$$

4.5 本章小结

在本节内容中，借助数值模拟的方法，对管道在屈曲前与屈曲后的非线性动力学行为展开深入探究。依据哈密顿原理并融合欧拉-伯努利梁理论，构建起该系统的三维控制方程，随后采用四阶龙格-库塔方法进行求解。针对滑移率、液相体积系数以及外部流体速度这几个因素，详细分析了它们在液相屈曲前后对管道行为以及临界速度造成的影响。通过对这些因素进行合理调整与定制，能够实现对非线性涡激振动的有效控制。进一步深入研究了在轴向张力控制条件下，管道于后屈曲状态下的非线性涡激振动响应情况。此项研究成果，对于复合纤维增强

管道在设计以及实际操作过程中，具有极为重要的现实意义。具体而言，主要结论如下：

(1) 屈曲面和外流面之间的夹角对液体临界速度的影响相对较小。随着该角度不断增大，水平方向上的固有频率会逐渐降低。

(2) 当流体滑移比逐渐增大时，屈曲平衡位移会随之增大，而前两个固有频率则会相应减小。并且，屈曲平衡位移会随着液相体积系数的增大而呈现增大的趋势。同时，固有频率也会依据液相体积系数的变化而发生相应的改变。

(3) 随着轴向张力的不断增大，液相临界速度也会随之升高。在达到临界流速之前，轴向张力越高，固有频率也会越高；一旦超过临界流速，这种关系则相反。

(4) 液相流速超过临界值，进入超临界状态时影响显著。在这种状态下，轴向张力的增加会导致固有频率的降低和竖直方向上位移的增加，这就迫切需要对管道运行进行管理，以防止这种后果超过临界值。

(5) 随着张力幅值的增大，管道在超临界工况下的最大响应幅值也随之增大。因此，可以通过限制轴向张力的幅值来抑制管道的涡激振动。此外，张力幅值的增大可以带来更好的振动抑制效果。

(6) 与传统管道相比，在输送液气两相流的管道中引入纤维增强复合材料可以提高管道的结构强度，降低管道在超临界工况下的响应幅值。

第5章 总结和展望

5.1 总结

为了改善工程中输流管道的工作环境，有效地抑制工作中产生的振动和噪声，本文提出采用纤维增强复合材料来构造管道结构。基于欧拉-伯努利梁理论，利用哈密顿变分原理建立了输送两相流纤维增强复合管道的动力学控制方程。对于不同工作环境下产生的振动分别进行了分析。通过分析系统的振动响应得到了管道的振动特性，并揭示了纤维增强材料相较于传统纯金属管道的优越性。此外，通过对管道输送的流体参数和管道响应进行参数分析，发现了输送的两相流体对管道的振动会产生不可忽视的影响。

(1) 建立了一种新型的纤维增强复合材料输送固液两相流管道的非线性动力学模型，研究了管道的非线性力学行为，通过对人造材料的调整，可以提高管道的结构强度和系统的稳定性。基于哈密顿原理，推导了大变形管道的非线性横向控制方程。利用解析法得到了结构的后屈曲位形。

(2) 采用同伦分析规则得到了结构在非线性自由振动下的闭响应。通过数值算例说明了纤维取向角和滑移比等参数对复合材料管材后屈曲、液相临界流速和非线性频率等非线性行为的影响。为工程中输送固液两相流体的复合材料管道振动的被动控制提供了参考。

(3) 研究了纤维增强复合材料管道在沿两个横向的外部激励下输送气液两相流的非线性动力学。基于欧拉-伯努利梁理论，利用哈密顿变分原理推导了控制管道沿两个横向运动的非线性方程。通过执行伽辽金截断来离散变量，得到一组常微分方程。微分求积法用于预测数值模式。

(4) 利用谐波平衡法结合伪弧长方法来跟踪解曲线的运动轨迹；通过数值算例讨论了液相速度、激励振幅、液相体积系数、阻尼系数、纤维取向角等因素对频率响应的影响。通过数值模拟进一步探讨了分岔和混沌等非线性动力学演化。解决了实际工程应用中输送气液两相流的复合材料管道的设计问题。

(5) 使用数值模拟研究了管道在屈曲前后的非线性动力学。利用哈密顿原理和欧拉-伯努利梁理论，建立了系统的三维控制方程，并采用四阶龙格-库塔方

法求解。

(6) 分析了滑移率、液相体积系数和外部流体速度对液相屈曲前后行为和临界速度的影响,可以对其进行调整/定制以控制非线性涡诱导行为。它进一步探讨了管道在轴向张力控制下的后屈曲状态下的非线性涡激振动响应。这项研究的结果对复合纤维增强管道的设计和操作具有重大的实际意义。解决了输送气液两相流的复合材料管道在超临界状态下的涡激振动控制问题,并且为海洋钻井立管系统等工程应用中输送液气两相流的管道设计提供重要参考。

5.2 展望

由于目前输送两相流纤维增强复合管道的研究较少,再加上本人的能力有限,因此本文仍存在部分难点需要更深入的研究探讨:

(1) 考虑到管道输送的是两相流体,采用滑移率来表示两相之间的速度关系,当输送固液两相流体时,流体中的固相在通过管道时可能在流体中沉淀,以及对管道产生一定程度的磨损;

(2) 本研究考虑的两相流是分层流,实际中两相流流型可能是其他流型,比如气泡流、段塞流和环形流以及多种流型共存的情况;

(3) 本研究是基于欧拉伯努利梁理论来对管道进行建模的,当管道的长径比不满足条件时则不适用,即本研究不适用于 Timoshenko 型输流管道。

参考文献

- [1] Butt M F J, Nahon M, Païdoussis M P. Dynamics of a confined pipe aspirating fluid concurrently subjected to external axial flow: Experiments on confinement length effects[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2024, 571:118001.
- [2] 颜雄, 魏莎, 毛晓晔等. 两端弹性支承输流管道固有特性研究[J]. *力学学报*, 2022, 54(05): 1341-1352.
- [3] Guo X, Xiao C, Ge H, et al. Dynamic modeling and experimental study of a complex fluid-conveying pipeline system with series and parallel structures[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2022, 109: 186-208.
- [4] 严昌镐. 输流管道流固耦合振动分析与软件模拟[D]. 上海: 上海应用技术大学, 2023.
- [5] 肖斌, 周玉龙, 高超等. 考虑流体附加质量的输流管道振动特性分析[J]. *振动与冲击*, 2021, 40(15): 182-188.
- [6] Tang Y, Zhang H J, Chen L Q, et al. Recent progress on dynamics and control of pipes conveying fluid[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2024, DOI:10.1007/s11071-024-10486-1
- [7] Noah S T, Hopkins G R. Dynamic stability of elastically supported pipes conveying pulsating fluid[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1980, 71: 103-116.
- [8] Rong B, Lu K, Rui X T, et al. Nonlinear dynamics analysis of pipe conveying fluid by Riccati absolute nodal coordinate transfer matrix method[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2018, 92: 699-708.
- [9] Chang X P, Hong X X, Qu C J, et al. Stability and nonlinear vibration of carbon nanotubes-reinforced composite pipes conveying fluid[J]. *Ocean Engineering*, 2023, 281:114960.
- [10] Bahaadini R, Dashtbayazi M R, Hosseini M, et al. Stability analysis of composite thin-walled pipes conveying fluid[J]. *Ocean Engineering*, 2018, 160:311-323.
- [11] Arabjamaloei Z, Mofidi M, Hosseini M, et al. Vibration analysis of rotating

- composite blades with piezoelectric layers in hygrothermal environment[J]. European Physical Journal Plus, 2019, 134:556.
- [12] Khodabakhsh R, Saidi A R, Bahaadini R. Homotopy solution for nonlinear vibration analysis of multilayer graphene platelets-reinforced thin-walled pipes conveying fluid with rectangular cross-section[J]. Acta Mechanica, 2023, 234:577-598.
- [13] Bahaadini R, Saidi A R, Arabjamaloei Z, et al. Vibration analysis of functionally graded graphene reinforced porous nanocomposite shells[J]. International Journal of Applied Mechanics, 2019, 11:1950068.
- [14] Khodabakhsh R, Saidi A R, Bahaadini R. Exact closed form solution for nonlinear stability analysis of porous functionally graded pipes conveying fluid under various boundary conditions[J]. Journal of Vibration Engineering & Technologies, 2022, 10:2877-2891.
- [15] Sabahi M A, Saidi A R, Khodabakhsh R. An analytical solution for nonlinear vibration of functionally graded porous micropipes conveying fluid in damping medium[J]. Ocean Engineering. 2022, 245:110482.
- [16] Yan H, Dai H, Ni Q, et al. Nonlinear dynamics of a sliding pipe conveying fluid[J]. Journal of Fluids and Structures, 2018, 81:36-57.
- [17] Nguyen L Y, Rusak Z, Wang S X. Swirling flow states of compressible single-phase supercritical fluids in a rotating finite-length straight circular pipe[J]. Journal of Fluid Mechanics. 2018, 849:576-614.
- [18] Tang Y, Yang T Z. Post-buckling behavior and nonlinear vibration analysis of a fluid-conveying pipe composed of functionally graded material[J]. Composite Structures, 2018, 185 393-400.
- [19] Wei S, Yan X, Fan X, et al. Vibration of fluid-conveying pipe with nonlinear supports at both ends[J]. Applied Mathematics and Mechanics English Edition, 2022, 43:845-862.
- [20] 周坤, 倪樵, 代胡亮, 等. 周期性输流管道的非线性动力学特性研究[J]. 振

动与冲击, 2020, 39(10):75-80

- [21] 田晓洁, 谢大帅, 刘贵杰, 等. 基于 ANSYS 的气液两相流海洋立管流固耦合特性分析[J]. 振动与冲击, 2021, 40(07):260-267.
- [22] Zanganeh H, Srinil N. Three-dimensional VIV prediction model for a long flexible cylinder with axial dynamics and mean drag magnifications[J]. Journal of Fluids and Structures, 2016, 66:127-46.
- [23] Ji W H, Ma H W, Sun W, et al. Nonlinear dynamic modeling and analysis of the fluid transporting cracked pipe using the hybrid semi-analytical and finite element method[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2024, 216:111505.
- [24] Nayfeh A H, Emam S A. Exact solution and stability of postbuckling configurations of beams[J]. Nonlinear Dynamics, 2008, 54:395-408.
- [25] Jiang T L, Liu Z Y, Dai H L, et al. Nonplanar multi-modal vibrations of fluid conveying risers under shear cross flows[J]. Applied Ocean Research, 2019, 88:187-209.
- [26] Facchinetti M L, Langre E D, Biolley F. Coupling of structure and wake oscillators in vortex-induced vibrations[J]. Journal of Fluids and Structures, 2004, 19:123-40.
- [27] Wang L, Jiang T L, Dai H L, et al. Three-dimensional vortex-induced vibrations of supported pipes conveying fluid based on wake oscillator models[J]. Journal of Sound and Vibration, 2018, 422:590-612.
- [28] Dai H L, Wang L, Qian Q, et al. Vortex-induced vibrations of pipes conveying fluid in the subcritical and supercritical regimes[J]. Journal of Fluids and Structures, 2013, 39:322-34.
- [29] Ge F, Long X, Wang L, et al. Flow-induced vibrations of long circular cylinders modeled by coupled nonlinear oscillators[J]. Science China-physics Mechanics & Astronomy, 2009, 52:1086-93.
- [30] Xu A D, Chai Y Y, Li F M, et al. Nonlinear vortex-induced vibrations of slightly curved pipes conveying fluid in steady and oscillatory flows[J]. Ocean Engineering, 2023, 270:113623.

- [31] Chai Y Y, Li F M, Song Z G, et al. Analysis and active control of nonlinear vibration of composite lattice sandwich plates[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2020, 102(4): 2179-203.
- [32] Monette C, Pettigrew M J. Fluidelastic instability of flexible tubes subjected to two phase internal flow[J]. *Journal of Fluids and Structures*, 2004, 19:943-56.
- [33] Khodabakhsh R, Saidi A R, Bahaadini R. An analytical solution for nonlinear vibration and post-buckling of functionally graded pipes conveying fluid considering the rotary inertia and shear deformation effects[J]. *Applied Ocean Research*, 2020, 101:102277.
- [34] Liao S. Beyond perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method[M]. CRC Press. 2003.
- [35] Zha S X, Lan H Q. Fracture behavior of pre-cracked polyethylene gas pipe under foundation settlement by extended finite element method[J]. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 2021, 189:104270.
- [36] Chen Y F, Dong S H, Zang Z P, et al. Buckling analysis of subsea pipeline with idealized corrosion defects using homotopy analysis method[J]. *Ocean Engineering*, 2021, 234:108865.
- [37] Zhao L Y, Yang X W, Wang J X, et al. Improved frequency-domain spectral element method for vibration analysis of nonuniform pipe conveying fluid[J]. *Thin-Walled Structures*, 2023, 182:110254.
- [38] Ebrahimi R, Ziaei-Rad S. Nonplanar vibration and flutter analysis of vertically spinning cantilevered piezoelectric pipes conveying fluid[J]. *Ocean Engineering*, 2022, 261:112180.
- [39] Li W, Zhao D, Zhang Q, et al. Post-buckling loads of a horizontal pipe string with variable length[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2023, 241:107997.
- [40] Holmes C, Godfrey M, Mennea P L, et al. Flexible photonics in low stiffness doped silica for use in fibre reinforced polymer composite materials[J]. *Optical Materials*,

2022, 134:113133.

- [41] Liang N H, Mao J W, Yan R, et al. Corrosion resistance of multiscale polypropylene fiber-reinforced concrete under sulfate attack[J]. Case Studies in Construction Materials, 2022, 16:e01065.
- [42] Li M, Zhu H Y, Lai C, et al. Recent progresses in lightweight carbon fibre reinforced lattice cylindrical shells[J]. Progress in Aerospace Sciences, 2022, 135:100860.
- [43] Hua F F, Fu W B, You Q Q, et al. Wave dispersion characteristics of laminated carbon fiber reinforced polymer composite shells resting on viscoelastic foundations under thermal field[J]. Composite Structures, 2022, 301:116225.
- [44] Liu, J D R, Huang L Y, Wu Z H, et al. Development of enhanced fiber beam element with multi-axial material constitutive models for reinforced/prestressed concrete beams[J]. Engineering Structures, 2021, 248:113289.
- [45] Ferrier E, Michel L, Ngo M D. Experimental study on the shear behavior of RC beams reinforced by natural composite materials (flax fibers) [J]. Structures, 2021, 33:637-654.
- [46] Zeng J J, Zeng W B, Ye Y Y, et al. Flexural behavior of FRP grid reinforced ultra-high-performance concrete composite plates with different types of fibers[J]. Engineering Structures, 2022, 272:115020.
- [47] Wang K H, Chen Y T, Hwang S J, et al. Influence of back pressure and geometry on microstructure of injection-molded long-glass-fiber-reinforced polypropylene ribbed plates[J]. Polymer Testing, 2022, 116:107797.
- [48] Guo Y, Zhu B, Li Y H. Nonlinear dynamics of fluid-conveying composite pipes subjected to time-varying axial tension in sub- and super-critical regimes[J]. Applied Mathematical Modelling, 2021, 101:632-653.
- [49] Li X H, Zhu Z W. Nonlinear dynamic characteristics of a cracked steel pipe wound by carbon fiber reinforced composite[J]. Material Letters, 2021, 306:130889.
- [50] Shen H S, Chen X H, Huang X L. Nonlinear bending and thermal postbuckling of

- p>functionally graded fiber reinforced composite laminated beams with piezoelectric fiber reinforced composite actuators[J]. Composite Part B-Engineering, 2016, 90:326-335.
- [51] Fan Y, Xiang Y, Shen H S. Nonlinear forced vibration of FG-GRC laminated plates resting on visco-Pasternak foundations[J]. Composite Structures, 2019, 209:443-452.
- [52] Shen H S, Xiang Y. Postbuckling of functionally graded graphene-reinforced composite laminated cylindrical shells subjected to external pressure in thermal environments[J]. Thin-Walled Structures, 2018, 124:151-160.
- [53] Zhou J, Chang X P, Xiong Z J, et al. Stability and nonlinear vibration analysis of fluid-conveying composite pipes with elastic boundary conditions[J]. Thin-Walled Structures, 2022, 197:109597.
- [54] Shen H S, Yang D Q. Nonlinear vibration of functionally graded fiber reinforced composite laminated beams with piezoelectric fiber reinforced composite actuators in thermal environments[J]. Engineering Structures, 2015, 90:183-192.
- [55] Li Z M, Shen H S. Postbuckling analysis of three-dimensional textile composite cylindrical shells under axial compression in thermal environments[J]. Composite Science and Technology, 2008, 68:872-879.
- [56] Monette C, Pettigrew M J. Fluidelastic instability of flexible tubes subjected to two-phase internal flow[J]. Journal of Fluids and Structures, 2004, 19:943-956.
- [57] Montoya-Hernandez D J, Vazquez-Hernandez A O, Cuamatzi R, et al. Natural frequency analysis of a marine riser considering multiphase internal flow behavior[J]. Ocean Engineering, 2015, 92:103-113.
- [58] An C, Su J. Dynamic behavior of pipes conveying gas-liquid two-phase flow[J]. Nuclear Engineering and Design, 2015, 292:204-212.
- [59] Li F Q, An C, Duan M L., et al. Combined damping model for dynamics and stability of a pipe conveying two-phase flow[J]. Ocean Engineering, 2020, 195:106683.

- [60] Jiang P Z, Li P Z, Ma J Z, et al. Nonlinear dynamics of a cantilevered tube with clearance constraint subject to two-phase cross-flow[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2019, 459:114857.
- [61] Guo Y, Zhu B, Zhao X, et al. Dynamic characteristics and stability of pipe-in-pipe system conveying two-phase flow in thermal environment[J]. *Applied Ocean Research*, 2020, 103:102333.
- [62] Liu G, Wang Y S, Hao Z R, et al. Prediction of the instability for simply supported pipes conveying gas-liquid two-phase slug flow[J]. *Ocean Engineering*, 2022, 244:110388.
- [63] Ebrahimi-Mamaghani A, Sotudeh-Gharebagh R, Zarghami R, et al. Dynamics of two-phase flow in vertical pipes[J]. *Journal of Fluids and Structures*, 2019, 87:150-173.
- [64] Ebrahimi-Mamaghani A, Mostoufi N, Sotudeh-Gharebagh R, et al. Vibrational analysis of pipes based on the drift-flux two-phase flow model[J]. *Ocean Engineering*, 2022, 249:110917.
- [65] Azevedo G R, Balino J L, Andreolli L. Nonlinear stability analysis for severe slugging in an air-water two-phase flow[J]. *International Journal of Multiphase Flow*, 2022, 159:104334.
- [66] Adegoke A S, Fashanu A, Adewumi O, et al. Modelling and nonlinear analysis of the wave-induced vibrations of a single hybrid riser conveying two-phaseflow[J]. *Ocean Engineering*, 2023, 278:114305.
- [67] Yang W W, Chang X P, Gou R Y. Nonlinear vortex-induced vibration dynamics of a flexible pipe conveying two-phase flow[J]. *Advances in Mechanical Engineering*, 2019, 11:1687814019881924.
- [68] Oyelade A O, Oyediran A A. Nonlinear dynamics of horizontal pipes conveying two phase flow[J]. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2021, 90:104367.
- [69] Oyelade A O, Ponte P J V, Oyediran A A. Dynamic stability of slightly curved tensioned pipe conveying pressurized hot two phase fluid resting on non uniform

- foundation[J]. *Engineering Structures*, 2023, 286:116138.
- [70] Ma B W, Srinil N. Planar dynamics of inclined curved flexible riser carrying slug liquid-gas flows[J]. *Journal of Fluids and Structures*, 2020, 94:102911.
- [71] Miwa S, Mori M, Hibiki T. Two-phase flow induced vibration in piping systems[J]. *Progress in Nuclear Energy*, 2015, 78:270-284.
- [72] Tang Y, Wang G, Yang T Z, et al. Nonlinear dynamics of three-directional functional graded pipes conveying fluid with the integration of piezoelectric attachment and nonlinear energy sink[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2022, 111(3): 2415-2442.
- [73] Zhou K, Xiong F R, Jiang N B, et al. Nonlinear vibration control of a cantilevered fluid-conveying pipe using the idea of nonlinear energy sink[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2019, 95(2):1435-1456.
- [74] Mamaghani A E, Khadem S E, Bab S. Vibration control of a pipe conveying fluid under external periodic excitation using a nonlinear energy sink[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2016, 86(3):1761-1795.
- [75] Duan N, Wu Y H, Sun X M, et al. Vibration Control of Conveying Fluid Pipe Based on Inerter Enhanced Nonlinear Energy Sink[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2021, 68(4): 1610-1623.
- [76] Philip R, Santhosh B, Balaram B, et al. Vibration control in fluid conveying pipes using NES with nonlinear damping[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2023, 194: 110250.
- [77] Yang T Z, Liu T, Tang Y, et al. Enhanced targeted energy transfer for adaptive vibration suppression of pipes conveying fluid[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2019, 97(3):1937-1944.
- [78] Chang X P, Hong X X. Stability and nonlinear vibration characteristics of cantilevered fluid-conveying pipe with nonlinear energy sink[J]. *Thin-Walled Structures*, 2024, 205: 111987.
- [79] Yang T Z, Dang W H, Chen L Q: Two-dimensional inerter-enhanced nonlinear

- energy sink[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2024, 112(1): 379-401.
- [80] Chen W, Wang L, Peng Z. A magnetic control method for large-deformation vibration of cantilevered pipe conveying fluid[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2021, 105(2): 1459-1481.
- [81] 陈钊, 何立东, 邓哲. 不同安装位置下主动阻尼装置对管道振动的控制效果研究[J]. *北京化工大学学报 (自然科学版)*, 2020, 47(03): 93-99.
- [82] Li J, Deng H, Jiang W. Dynamic response and vibration suppression of a cantilevered pipe conveying fluid under periodic excitation[J]. *Journal of Vibration and Control*, 2019, 25(11): 1695-1705.
- [83] Tang Y, Gao C K, Li M M, et al. Novel active-passive hybrid piezoelectric network for vibration suppression in fluid-conveying pipes[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2023, 117: 378-398.
- [84] Tan X, Ding H, Chen L Q. Nonlinear frequencies and forced responses of pipes conveying fluid via a coupled Timoshenko model[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2019, 455: 241-255.
- [85] Khazaei M, Khadem S E, Moslemi A, et al. A comparative study on optimization of multiple essentially nonlinear isolators attached to a pipe conveying fluid[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2020, 141: 106442.

附录 1

参数 $\bar{K}_{(1)}$ 和 $\bar{K}_{(4)}$ 可表示为

$$\bar{K}_{(1)} = \bar{A}_{11} - \frac{\bar{A}_{12}^2}{\bar{A}_{22}}, \bar{K}_{(4)} = \bar{D}_{11} - \frac{\bar{B}_{12}^2}{\bar{A}_{22}}$$

参数 $\bar{A}_{ij}$, $\bar{B}_{ij}$ 和 $\bar{D}_{ij}$ 表示为

$$[\bar{A}_{ij}, \bar{B}_{ij}, \bar{D}_{ij}] = \sum_{k=1}^{N_{CL}} \int_{r_k}^{r_{k+1}} \hat{P}_{ij}^{(k)} [1, n, n^2] dn$$

参数 $\hat{P}_{ij}$ 表示如下

$$\begin{aligned} \hat{P}_{11} &= \tilde{P}_{11} \cos^4 \bar{\theta} + 2(\tilde{P}_{12} + 2\tilde{P}_{66}) \sin^2 \bar{\theta} \cos^2 \bar{\theta} + \tilde{P}_{22} \sin^4 \bar{\theta} \\ \hat{P}_{12} &= (\tilde{P}_{11} + \tilde{P}_{22} - 4\tilde{P}_{66}) \sin^2 \bar{\theta} \cos^2 \bar{\theta} + \tilde{P}_{12} (\sin^4 \bar{\theta} + \cos^4 \bar{\theta}) \\ \hat{P}_{22} &= \tilde{P}_{11} \sin^4 \bar{\theta} + 2(\tilde{P}_{12} + 2\tilde{P}_{66}) \sin^2 \bar{\theta} \cos^2 \bar{\theta} + \tilde{P}_{22} \cos^4 \bar{\theta} \\ \hat{P}_{66} &= (\tilde{P}_{11} + \tilde{P}_{22} - 2\tilde{P}_{12} - 2\tilde{P}_{66}) \sin^2 \bar{\theta} \cos^2 \bar{\theta} + \tilde{P}_{66} (\sin^4 \bar{\theta} + \cos^4 \bar{\theta}) \end{aligned}$$

参数 $\tilde{P}_{ij}$ 表示为

$$\tilde{P}_{11} = \frac{\bar{E}_1}{1 - \bar{\nu}_I \bar{\nu}_{II} \bar{E}_2 / \bar{E}_1}, \tilde{P}_{12} = \frac{\bar{\nu}_{II} \bar{E}_2}{1 - \bar{\nu}_I \bar{\nu}_{II} \bar{E}_2 / \bar{E}_1}, \tilde{P}_{22} = \frac{\bar{E}_2}{1 - \bar{\nu}_I \bar{\nu}_{II} \bar{E}_2 / \bar{E}_1}, \tilde{P}_{66} = \bar{G}_s$$

其中 $\bar{E}_1$ 和 $\bar{E}_2$ 纤维增强复合管的两种材料的杨氏模量, $\bar{G}_s$ 代表剪切模量, $\bar{\nu}_I$

和 $\bar{\nu}_{II}$ 代表泊松比。

攻读学位期间发表的学术论文目录

- [1] Wang Y X, Tang Y, Yang T Z. Nonlinear mechanic analysis of a composite pipe conveying solid-liquid two-phase flow [J]. Applied Ocean Research, 2024, 144: 103905.
- [2] Wang Y X, Tang Y, Yang T Z. Nonlinear vortex-induced vibration analysis of a fiber-reinforced composite pipes transporting liquid-gas two-phase flow [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2025, 142: 108516.
- [3] 汪羽翔, 唐冶. 输送两相流功能梯度管道的后屈曲行为及非线性振动分析 [J]. 东莞理工学院学报, 2025, 32(3): 101-109.

致谢

行文至此，投笔踌躇。万卷古今消永昼，一窗昏晓送流年。始于金秋，终于盛夏。三年读研时光如白驹过隙，不胜唏嘘。在此想同在这段旅途中所有给我帮助的同学，每一位老师表达诚挚的谢意。

桃李不言，下自成蹊。感谢我的指导老师唐冶。从论文选题到最终的成文，感谢您陪我字字斟酌，感谢您对我倾囊相授。难忘那论文稿上的批注，鞭辟入里。难忘那声声诲人不倦的勉励和肯定。三载求学之路，老师一丝不苟的科研态度深深感染了我，令我受益终生。天涯海角有时尽，唯有师恩无穷期。

焉得谖草，言树之背。感谢我的家人，尤其是我的父母，是你们教会我为人处世的道理，是你们言传身教地让我成为了一个顶天立地的人。无论是过去还是现在亦或未来，你们总是无条件地支持我的每个决定，做我最坚强的后盾，让我能够肆无忌惮地追求理想。世事去如烟，亲情存如血。

同窗数载，知己难忘。感谢我的同门李成龙和好友凌基，是你们一直在工位伴我左右与我一同攻坚克难，感谢你们陪伴我奋斗过无数个白天和黑夜，让我的求学之路不再孤单。感谢我的师兄张互杰、高传康、张文轩，感谢你们在学习上对我的指导和生活上给我的宝贵建议。感谢室友许成涛、张锦程，感谢你们在我失意的时候给予的鼓励，总能让我重燃信心，满血复活。感谢我的挚友任智和任吟晨，感谢你们一直以来的陪伴，不厌其烦地听我诉说所有的喜怒哀乐。我们分享着彼此的青春，相互鼓励，共同奋斗着。愿我们友谊长存，在未来的日子里继续相伴而行。恰同学少年，风华正茂。

身如逆旅独前行，谢尽浮华心自明。感谢自己一直以来的坚持，人的脆弱和坚强都超乎自己的想象。有时，可能脆弱得一句话就泪流满面；有时回头看，也发现自己咬着牙走了很长的路。那段曾经以为永远过不去的时光，偶尔回过头的时候才发现都已经在身后了。

世人皆有始终，此刻与君别，相聚亦有得。长路漫漫，生为此行，切勿我憾！

尚德敏学 唯实惟新

