

分类号: O159
密 级: 公开

单位代码: 10363
学 号: 2221020105

题 目 毕达哥拉斯模糊多准则群决策方法
及其应用研究

英文并列

题 目 Pythagorean Fuzzy Multi-Criteria Group Decision
Making Methods and Applications

学生姓名: 陶胜男
指导教师: 周金明 副教授
专 业: 数学
研究方向: 决策理论与方法

论文答辩日期: 2025 年 5 月 14 日

安徽工程大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：我恪守学术道德，崇尚严谨学风。所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已明确注明和引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品及成果的内容。论文为本人亲自撰写，我对所写的内容负责，并完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

学位论文作者签名：陶胜男

日期：2025 年 5 月 14 日

安徽工程大学学位论文版权使用授权书

学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅或借阅。本人授权安徽工程大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保密 ☐，在 _____ 年解密后适用本版权书。

本学位论文属于

不保密 ☐。

学位论文作者签名：陶胜男

日期：2025 年 5 月 14 日

指导教师签名：王利

日期：2025 年 5 月 14 日

毕达哥拉斯模糊多准则群决策方法及其应用研究

摘 要

随着决策问题的复杂化,决策者无法使用传统精确数学进行决策信息的表达,模糊集的提出为处理具有模糊性的决策问题提供了有效的解决方法。毕达哥拉斯模糊集(PFS)作为传统模糊集的推广,具有更灵活的信息表达能力,并被广泛应用于多准则群决策(MCGDM)中。然而,现有的基于毕达哥拉斯模糊多准则群决策方法在集成不确定性信息和处理含有模糊性与随机性决策意见方面仍存在改进空间。本文通过理论拓展与方法创新,构建了兼顾科学性与实用性的决策框架,具体研究内容如下:

首先,基于现有的权重计算方法及排序模型,将毕达哥拉斯模糊逐步权重评估比率分析法(PF-SWARA)、毕达哥拉斯模糊熵测度(PF-EM)和毕达哥拉斯模糊组合妥协解法(PF-CoCoSo)相结合。得到基于毕达哥拉斯模糊集的动态主客观协同赋权模型,提高模糊环境下指标体系的评价准度,并采用 PF-CoCoSo 对方案进行排序,确定最优方案。通过选择最优医疗废物处理方案(MWDP)的实例来验证该方法的可行性。

其次,考虑集成算子在探究准则间相互关系中十分重要,本文在区间毕达哥拉斯模糊环境中扩展出区间毕达哥拉斯模糊规范加权 Bonferroni 均值(IVPFNWB $M^{p,q}$)算子,改善了原有决策信息表达模糊的缺点。结合组合赋权模型,构建基于区间毕达哥拉斯模糊加权平均算子(IVPFWA)和 IVPFNWB $M^{p,q}$ 算子的群决策方法,通过案例表明该方法的有效性。

最后,进一步考虑隶属度和非隶属度中存在模糊性和随机性情形。将云模型与毕达哥拉斯模糊集结合,给出一种毕达哥拉斯模糊正态云

(PNC) 的形式, 弥补了以往 PNC 概念未考虑模糊集隶属度和非隶属度随机性的不足。拓展出毕达哥拉斯正态云加权算术平均算子 (PNCWAA) 和毕达哥拉斯正态云加权划分 Bonferroni 均值算子 (PNCWPBM^{r,s}) 进行信息的集成, 形成备选方案的综合评价云, 降低了模糊性和随机性导致的信息扭曲和风险误差, 最后用得分函数对备选方案进行排序。

关键词: 毕达哥拉斯模糊, MCGDM, 规范加权 BM 算子, 毕达哥拉斯正态云, 加权划分 BM 算子

PYTHAGOREAN FUZZY MULTI-CRITERIA GROUP DECISION MAKING METHODS AND APPLICATIONS

ABSTRACT

With the complexity of decision-making problems, decision makers cannot use traditional exact mathematics for the expression of decision-making information, and the proposal of fuzzy sets provides an effective solution for dealing with decision-making problems with ambiguity. As a generalization of traditional fuzzy sets, Pythagorean fuzzy sets (PFS) have more versatile information representation capabilities and are broadly used in multi-criteria group decision making (MCGDM).

However, the existing Pythagorean fuzzy-based MCGDM methods still have some improvement in integrating uncertainty information and handling decision-making opinions containing fuzziness and stochasticity. Therefore, this paper improves the above deficiencies and constructs a set of decision-making frameworks that take into account both scientificity and practicality through theoretical expansion and methodological innovation, with the following specific research contents as follows:

Firstly, based on the existing weight calculation methods and ranking models, combining Pythagorean fuzzy with Stepwise Weighted

Assessment Ratio Analysis (PF-SWARA), Pythagorean fuzzy Entropy Measure (PF-EM) and Pythagorean fuzzy Combined Compromise Solution (PF-CoCoSo), we constructed the dynamic subjective-objective synergistic empowerment model based on Pythagorean fuzzy set to improve the assessment precision of the guideline system in the fuzzy environment, and the PF-CoCoSo method is used to rank the programs and determine the optimal program; the method usability was validated by selecting an example of an optimal medical waste disposal program (MWDP).

Secondly, the integration operator is considered to be important in exploring the interrelationships among the norms. In this paper, the interval-valued Pythagorean fuzzy normal weighted Bonferroni mean (IVPFNWBM^{p,q}) operator is extended to improve the shortcomings of the original fuzzy expression of decision information. Construct a GDM method based on the interval Pythagorean fuzzy weighted average (IVPFWA) operator and the IVPFNWBM^{p,q} operator by combining the assignment models, and demonstrate the effectiveness of the method through case studies.

Further considering the existence of fuzziness and randomness situation in affiliation and non-affiliation, combining the cloud model with Pythagorean fuzzy sets, giving a new form of Pythagorean fuzzy Normal Cloud (PNC), constructing the affiliation cloud model and the non-

affiliation cloud model, and expanding the Pythagorean Normal Cloud Weighted Arithmetic Average (PNCWAA) operator and the Pythagorean Normal Cloud Weighted Partitioned Bonferroni Mean (PNCWPBM^{r,s}) operator, using the operator to integrate expert opinions, form a comprehensive evaluation cloud of alternatives, and finally rank the alternatives with a score function. It makes up for the lack of considering the randomness of fuzzy set affiliation and non-affiliation of previous PNC concepts and reduces the information distortion and risk error caused by randomness.

Tao Shengnan (Mathematics)

Supervised by Zhou Jinming

KEY WORDS: Pythagorean fuzzy, MCGDM, normal weighted BM operator, Pythagorean normal cloud, weighted partitioned BM operator

目 录

摘 要	I
ABSTRACT	III
第 1 章 绪论	1
1.1 研究背景及意义	1
1.2 国内外研究现状	2
1.3 研究内容和技术路线	4
1.4 创新点	5
第 2 章 理论基础	7
2.1 毕达哥拉斯模糊集	7
2.2 云模型理论	10
第 3 章 基于组合权重的毕达哥拉斯模糊多准则群决策方法研究	12
3.1 PF-SWARA-EM-CoCoSo 法	12
3.2 基于组合赋权的群决策方法	15
3.3 应用案例	16
3.4 本章小结	23
第 4 章 基于区间毕达哥拉斯模糊的多准则群决策方法研究	24
4.1 IVPFNWBM ^{p,q} 算子与 CRITIC 法	24
4.2 基于 IVPFNWBM ^{p,q} 算子的群决策模型	29
4.3 应用案例	30
4.4 本章小结	33
第 5 章 基于赋权划分算子的毕达哥拉斯正态云群决策方法研究	34
5.1 毕达哥拉斯正态云	34
5.2 基于 PNCWAA 算子和 PNCWPBM ^{r,s} 算子的群决策模型	37
5.3 应用案例	48
5.4 本章小结	55
第 6 章 总结与展望	56
6.1 总结	56
6.2 展望	56
参考文献	58
硕士期间发表的论文	64
致谢	65

第 1 章 绪论

1.1 研究背景及意义

1.1.1 研究背景

决策是指人们通过分析和评估各种因素,从而做出最合适的决定。一些复杂的决策问题中包含了目标的多样性以及状态的不确定性,同时还需要考虑多个不同的准则,这类问题被称为多准则决策(MCDM)问题。若决策问题涉及专家群体的评价结果,则演变为多准则群决策(MCGDM)问题,例如医疗废弃站选址和制造业可持续人力资源管理方案选择等。多准则决策旨在帮助决策者面对众多相互冲突的备选方案时做出最优决策,其中分析偏好结构和确定权重是多准则决策的两个关键问题。然而现实决策问题中的不确定因素导致在进行决策时,往往无法使用传统精确数学方法进行计算。此时,模糊集的提出为处理具有模糊性的决策问题提供了有效的解决方案。

Zadeh 首次提出了模糊集的概念。然而,模糊集利用隶属度 μ 表示属于的状态, $1-\mu$ 表示不属于的状态,却不能描述中间状态。为了同时表示属于、不属于和中立三种状态, Atanassov 将模糊集拓展为直觉模糊集,直觉模糊集利用不同指标即隶属函数 μ 、非隶属函数 ν 和中立 π 表示三种状态,其中 $\pi=1-\mu-\nu$, $0\leq\mu\leq1$, $0\leq\nu\leq1$ 。研究发现,直觉模糊集隶属度等级所属的集合范围较小,因此 Yager^[1]引入毕达哥拉斯模糊集(PFS)的概念,规定 $\mu^2+\nu^2\leq1$ 。不难发现,毕达哥拉斯隶属度等级的集合所属范围大于直觉隶属度等级的集合所属范围。毕达哥拉斯模糊集的提出为决策者提供了更大的灵活性。

鉴于毕达哥拉斯模糊集具有对不确定性信息的表达能力,学者们将多准则群决策与毕达哥拉斯模糊相结合,在此基础上发展出一系列毕达哥拉斯模糊群决策算法,并有效应用于现实问题中。对该领域的研究不仅拓宽模糊决策理论的边界,同时为复杂决策问题的求解提供新的技术支撑。

1.1.2 研究意义

本文将新型集成算子应用于决策之中,不但拓展了毕达哥拉斯模糊集的相关理论,而且为现有的知识体系增加价值和优势,从而提高决策的合理性及科学性。

从理论层面看,对毕达哥拉斯模糊集成算子的研究,有助于深入理解模糊信息的表达和处理方式,并且可以降低专家给出的准则评价信息存在的误差。对决策方法和技术的结合,能够丰富决策科学的理论体系,从而不断完善和拓展多准则群决策方法,为解决复杂决策问题提供更坚实的理论基础。

从实践层面看,由于复杂决策的不确定性,专家们所给出的评价信息会存在偏差,且多个评价准则间也会相互影响,因此需要完善现有的多准则群决策方法,降低决策结果的误差。多准则决策方法在地理选址、项目评估、资源分配等众多领域被广泛使用,结合毕达哥拉斯模糊集等理论,能够更全面、准确地考虑各种因素,从而做出更科学合理的决策。

1.2 国内外研究现状

1.2.1 毕达哥拉斯模糊研究述评

毕达哥拉斯模糊集及多准则群决策问题受到国内外学者的普遍关注,本文研究主要对集中于其中两大类:方案排序与信息集结。

Zhang 和 Xu^[2]给出了 PFS 的数学形式,提出毕达哥拉斯模糊数(PFN)的概念、运算法则、比较方法以及距离测度。Zhang^[3]提出基于贴近度函数的毕达哥拉斯模糊多准则决策方法。Gou 等^[4]定义了 PFN 的减法和除法运算,并研究了它们的性质。Garg^[5]指出了直觉模糊集相关系数的弱点,并提出一种新的毕达哥拉斯模糊集相关系数和加权相关系数公式。Dick 和 Yager^[6]利用毕达哥拉斯模糊集研究复数模糊逻辑。为了更广泛地体现决策信息,Zhang^[7]提出区间毕达哥拉斯模糊集(IVPFS),使用区间值刻画隶属度与非隶属度。

国内外专家学者从不同角度提出代表决策者的真实偏好结构以及准则权重的模型,如熵权法^[8](EM)、层次分析法^[9](AHP)、逐步权重评估比率分析法^[10](SWARA)等,并将其与毕达哥拉斯模糊理论结合。Xue 和 Xu^[11]将模糊熵理论引入毕达哥拉斯模糊,提出一种考虑不完全信息模糊性的毕达哥拉斯模糊多维偏好分析的线性规划法,用于铁路项目投资决策问题中。为解除层次之间的限制,Saaty^[12]对 AHP 法进行扩展,提出网络层次分析法(ANP)。Karasan 等^[13]将毕达哥拉斯模糊集理论引入 AHP 中,形成应用范围更广的 PF-AHP 法并应用于垃圾填埋场选址问题。Kant 等^[14]提出组合的 SWARA-WASPAS 方法并将其应用于评

估克服人道主义供应链管理障碍的解决方案中。Rani^[15]在毕达哥拉斯模糊环境下将 SWARA 与 VIKOR 结合,使得 SWARA 应用范围变广。Zhou 和 Li 等^[16]人将基于距离的组合评估方法扩展到语言毕达哥拉斯模糊环境中。Habib 和 Akram^[17]利用毕达哥拉斯模糊熵和 TOPSIS 进行儿童癌症风险评估。Yazdani^[18]提出 CoCoSo 多准则决策方法,与其他 MCDM 技术相比,CoCoSo 方法在决策结果中具有可靠性和稳定性的优势。Liao 和 Yazdani 等^[19]人将 PFN 引入 CoCoSo,使得它成为解决决策问题中不确定因素的有力技术。Liu 等^[20]人提出了毕达哥拉斯模糊相似度和 CoCoSo 框架来医疗废物处理技术评价。Wang^[21]提出毕达哥拉斯立方模糊多属性群体决策法用于可持续供应链管理。Gupta 等^[22]构建 PF-Delphi-AHP-CoCoSo 法探索食品行业可持续供应链障碍和缓解战略。

模糊集发展的同时伴随着集成算子的发展,Yager^[23]提出用其他平均算子代替简单平均值来推广 Bonferron 均值 (BM),如 Choquet 积分和有序加权平均算子。BM 算子作为一种特殊的平均算子能够考虑信息之间的相互作用,已被扩展到许多模糊环境中。但在实际的决策过程中,部分准则之间可能存在相互关系,因此,有必要将准则划分为不同的部分。Dutta 和 Guha^[24]开发了用于二元组语言信息的分区 BM (PBM) 算子。Liu 等^[25]提出了考虑隶属度和非隶属度相互作用的直觉模糊划分 BM 算子。Lin 等^[26]将 PBM 算子和分区几何 BM 算子推广到语言毕达哥拉斯模糊集中。Alhamzi 等^[27]提出了一种新型分数函数,并通过 IVPF 扩展 Dombi 集成算子,用来处理决策中对称或不对称的信息。

1.2.2 云模型研究评述

为了兼顾不确定环境中的模糊性和随机性,李德毅等^[28]提出了云模型理论;该理论主要利用期望 (Ex)、熵 (En) 和超熵 (He) 三个数字特征来表述论域中不确定概念,并通过云模型实现定性概念与定量数值间的转换。随着云模型的推广,它逐渐成为解决决策问题的常用方法。徐聪等^[29]提出了一种综合云相似度量方法。狄鹏等^[30]结合云模型和 D-S 证据理论,给出解决决策中语言具有模糊性和不确定性问题的多属性决策优化算法。何乐平等^[31]参考博弈论理论,实现主客观权重优化,在此基础上提出一种新的云模型综合风险评价方法。王石等^[32]计算了不同风险等级的各指标云模型,并对矿山风险进行了评估。此外也有学者将聚合算子与云模型结合起来,Wang 等^[33]提出了云加权算术平均算子和云加权几何

平均算子。随后, Wang 和 Yang^[34]提出了直觉正态云集成算子。周金明等^[35]构建直觉模糊规范加权 BM 云模型集成算子, 将其应用于评估信息系统安全中。Zhou 和 Zhan 等^[36]研究了多维云模型与 TOPSIS 等决策方法组合的优势。毕达哥拉斯模糊环境中, 结合云模型可得毕达哥拉斯正态云 (PNC) 加权算术平均算子、PNC 加权几何平均算子^[37]。

1.3 研究内容和技术路线

1.3.1 研究内容

本文主要研究毕达哥拉斯模糊环境下的多准则群决策方法, 定义了几类新的集成算子, 用来解决决策过程中存在的语义模糊性、准则关联性等关键问题。通过集成算子, 提出面向复杂决策场景的多准则群决策方法。本文共六章, 主要内容如下:

第一章, 绪论。本章系统阐述了本文的研究背景与研究意义, 根据方案排序、信息集结和云模型发展现状对国内外的研究进行总结, 进而明确本文的主要研究内容及创新之处。

第二章, 理论基础。本章具体介绍了毕达哥拉斯模糊集定义及相互作用规律、区间毕达哥拉斯模糊集定义及相互作用规律、云模型数字特征和逆向云发生算法的基本概念, 为多准则群决策提供理论基础。

第三章, 基于组合权重的毕达哥拉斯模糊多准则群决策方法研究。本章主要提出了一种组合赋权与排序方法相结合的决策模型。并通过选择医疗废物处理方案 (MWDP) 来验证方法的可行性, 通过调参和改变权值来验证方法的稳定性。

第四章, 基于区间毕达哥拉斯模糊的多准则群决策方法研究。本章将模糊环境扩展至区间毕达哥拉斯模糊, 提出区间毕达哥拉斯模糊规范加权 Bonferroni 均值 (IVPFNWB $M^{p,q}$) 算子, 并研究算子的相关性质及概念。构建了基于 IVPFNWB $M^{p,q}$ 算子的群决策过程。

第五章, 基于赋权划分算子的毕达哥拉斯正态云群决策方法研究。本章进一步结合云模型考虑信息间存在模糊性与随机性的情形, 扩展出毕达哥拉斯正态云加权算术平均 (PNCWAA) 算子和毕达哥拉斯正态云加权划分 Bonferroni 均值

($\text{PNCWPBM}^{r,s}$) 算子, 研究算子的定义、定理与相关性质, 并构建了基于 PNC 的群决策模型。

第六章, 总结与展望。本章对全文主要研究内容和结果进行总结概况, 并针对文章中存在的一些不足和未来进一步需要改进的问题进行展望。

1.3.2 技术路线图

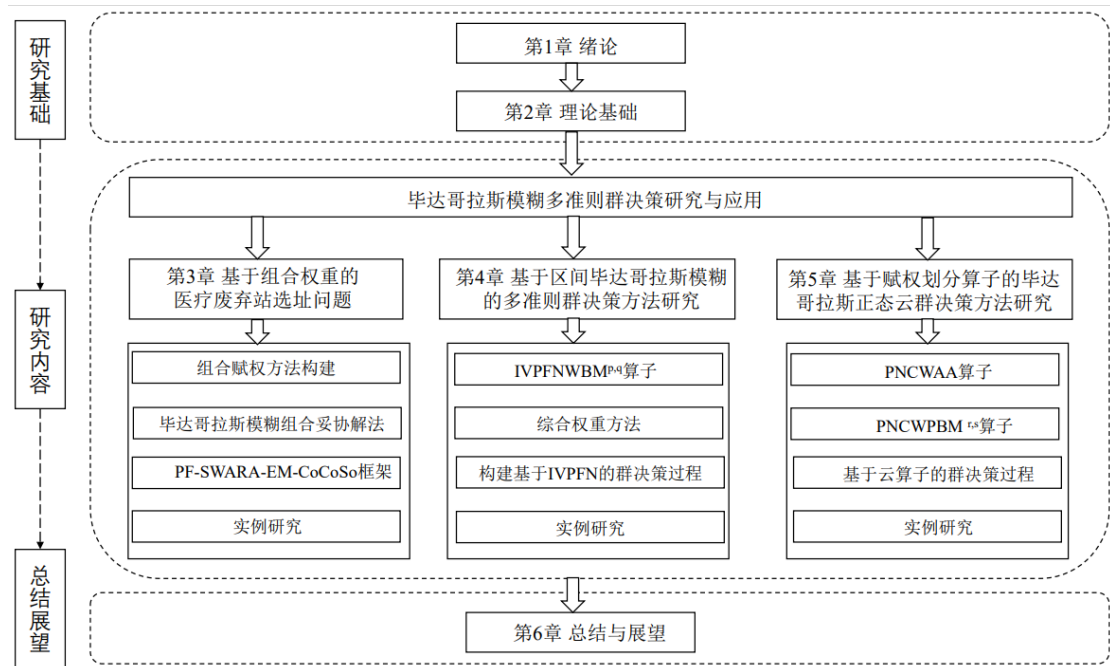


图 1-1 本文研究框架

1.4 创新点

本文主要分析了在毕达哥拉斯模糊环境下多准则群决策的应用, 拓展了毕达哥拉斯模糊集的相关理论, 改善了评价信息模糊造成的偏差, 提高决策结果的准确性。主要创新点有以下几个方面:

(1) 构建基于毕达哥拉斯模糊集的动态主客观协同赋权模型, 可提高模糊环境下指标体系的评价准度, 将其应用于医疗废物处理方案选择的决策中, 能有效解决发展中国家在公共卫生危机中应急决策的难题, 为全球环境治理提供新型决策方法。

(2) 在区间毕达哥拉斯模糊环境中扩展出 $\text{IVPFNWBM}^{p,q}$ 算子, 改善规范加权 Bonferroni 均值 ($\text{NWBM}^{p,q}$) 算子在原有模糊环境中存在的决策信息表达的模糊性, 从而提高决策结果的合理性和实用性。

(3) 考虑隶属度和非隶属度中存在模糊性与随机性情形, 将云模型与毕达哥拉斯模糊集相结合, 给出一种新的 PNC 形式, 弥补了以往 PNC 概念未考虑模糊集隶属度和非隶属度模糊性与随机性的不足。提出 PNCWAA 算子与 PNCWPBM^{r,s} 算子降低了随机性导致的信息扭曲以及 PBM 算子内在的风险误差。

第 2 章 理论基础

本章主要介绍毕达哥拉斯模糊集、区间毕达哥拉斯模糊集 (IVPFS) 和云模型理论的相关概念。

2.1 毕达哥拉斯模糊集

2.1.1 毕达哥拉斯模糊集

定义 2.1.1^[2] 设集合 X 为论域, 此时称三元组 $P = \{ \langle x, \mu_p(x), \nu_p(x) \rangle | x \in X \}$ 为一个毕达哥拉斯模糊集, 其中 $\mu_p(x)$ 表示元素 x 属于 P 的程度, $\mu_p \in [0, 1]$; $\nu_p(x)$ 表示元素 x 不属于 P 的程度, $\nu_p \in [0, 1]$ 。且对于 $\forall x \in X$ 来说, 均满足 $\mu_p^2(x) + \nu_p^2(x) \leq 1$ 。

对于任意毕达哥拉斯模糊集 P , $x \in X$, $\pi_p(x) = \sqrt{1 - \mu_p^2(x) - \nu_p^2(x)}$ 称为 x 隶属于 P 的犹豫度。

定义 2.1.2^[2] 设 $x \in X$, 则一个二元数组形如 $\alpha = (\mu_\alpha(x), \nu_\alpha(x))$ 被称为是一个毕达哥拉斯模糊数, 其中 $\mu_\alpha, \nu_\alpha \in [0, 1]$, $\pi_\alpha = \sqrt{1 - \mu_\alpha^2 - \nu_\alpha^2}$ 且满足 $\mu_\alpha^2 + \nu_\alpha^2 \leq 1$, π_α 也称为 PFN _{α} 的犹豫度。

定义 2.1.3^[2] 设 $\alpha_1 = (\mu_{\alpha_1}, \nu_{\alpha_1})$, $\alpha_2 = (\mu_{\alpha_2}, \nu_{\alpha_2})$ 为两个 PFN, 定义算术运算如下:

- (1) $\alpha_1 \oplus \alpha_2 = \left(\sqrt{\mu_{\alpha_1}^2 + \mu_{\alpha_2}^2 - \mu_{\alpha_1}^2 \mu_{\alpha_2}^2}, \nu_{\alpha_1} \nu_{\alpha_2} \right);$
- (2) $\alpha_1 \otimes \alpha_2 = \left(\mu_{\alpha_1} \mu_{\alpha_2}, \sqrt{\nu_{\alpha_1}^2 + \nu_{\alpha_2}^2 - \nu_{\alpha_1}^2 \nu_{\alpha_2}^2} \right);$
- (3) $\lambda \alpha_1 = \left(\sqrt{1 - (1 - \mu_{\alpha_1}^2)^\lambda}, \nu_{\alpha_1}^\lambda \right), \lambda > 0;$
- (4) $\alpha_1^\lambda = \left(\mu_{\alpha_1}^\lambda, \sqrt{1 - (1 - \nu_{\alpha_1}^2)^\lambda} \right), \lambda > 0.$

定义 2.1.4^[2] 设 $\alpha = (\mu_\alpha, \nu_\alpha)$ 是一个毕达哥拉斯模糊数, 此时定义 PFN _{α} 的得

分函数为 $S(\alpha) = \mu_\alpha^2 - \nu_\alpha^2$ ，精确函数为 $H(\alpha) = \mu_\alpha^2 + \nu_\alpha^2$ ，且 $S(\alpha) \in [-1, 1]$ ， $H(\alpha) \in [0, 1]$ 。

由于 $S(\alpha) \in [-1, 1]$ ，因此，改进后的 PFN _{α} 得分函数由定义 2.1.5 所示。

定义 2.1.5^[2] 设 $\alpha = (\mu_\alpha, \nu_\alpha)$ 为 PFN，由于 $S(\alpha) \in [-1, 1]$ ，改进的 PFN _{α} 归一化得分函数和不确定度函数为

$$\begin{aligned} S'(\alpha) &= \frac{1}{2}[S(\alpha) + 1], \\ H'(\alpha) &= 1 - H(\alpha). \end{aligned} \quad (2.1)$$

此时 $S'(\alpha), H'(\alpha) \in (0, 1)$ 。

定义 2.1.6^[2] 假设 $\alpha_1 = (\mu_{\alpha_1}, \nu_{\alpha_1})$ ， $\alpha_2 = (\mu_{\alpha_2}, \nu_{\alpha_2})$ 为两个 PFN，则

(1) 当 $S'(\alpha_1) > S'(\alpha_2)$ 时认为 α_1 大于 α_2 ，记作 $\alpha_1 > \alpha_2$ ；

(2) 当 $S'(\alpha_1) = S'(\alpha_2)$ 时，

若 $H'(\alpha_1) > H'(\alpha_2)$ ，记作 $\alpha_1 < \alpha_2$ ；

若 $H'(\alpha_1) = H'(\alpha_2)$ ，记作 $\alpha_1 = \alpha_2$ 。

2.1.2 区间毕达哥拉斯模糊集

定义 2.1.7^[38] 设集合 X 为论域，此时称 $P = \{ \langle x, [\mu_p^-(x), \mu_p^+(x)], [\nu_p^-(x), \nu_p^+(x)] \rangle \mid x \in X \}$ 为一个区间毕达哥拉斯模糊集，其中 $[\mu_p^-(x), \mu_p^+(x)]$ 表示元素 x 属于 P 的程度区间； $[\nu_p^-(x), \nu_p^+(x)]$ 表示元素 x 不属于 P 的程度区间。其中 $\mu_p^+(x)$ 、 $\nu_p^+(x)$ 分别代表隶属度与非隶属度的上界， $\mu_p^-(x)$ 、 $\nu_p^-(x)$ 分别代表隶属度与非隶属度的下界。

对于 $\forall x \in X$ 来说，若满足 $\mu_p^+, \mu_p^-, \nu_p^+, \nu_p^- \in [0, 1]$ ，且 $(\mu_p^+(x))^2 + (\nu_p^+(x))^2 \leq 1$ ，则称 P 为一组区间毕达哥拉斯模糊数 (IVPFN)。 x 隶属于 P 的犹豫度区间形式为

$$\pi_p(x) = [\pi_p^-(x), \pi_p^+(x)] = \left[\sqrt{1 - (\mu_p^+(x))^2 - (\nu_p^+(x))^2}, \sqrt{1 - (\mu_p^-(x))^2 - (\nu_p^-(x))^2} \right].$$

定义 2.1.8^[38] 设 $\alpha = ([\mu_{\alpha}^{-}, \mu_{\alpha}^{+}], [\nu_{\alpha}^{-}, \nu_{\alpha}^{+}])$ 为 IVPFN, 定义 α 的得分函数 $S(\alpha)$ 和精度函数 $H(\alpha)$ 为

$$\begin{aligned} S(\alpha) &= \frac{1}{2}[S'(\alpha) + 1], \\ H(\alpha) &= H(\alpha) = \frac{1}{2}((\mu_{\alpha}^{-})^2 + (\mu_{\alpha}^{+})^2 + (\nu_{\alpha}^{-})^2 + (\nu_{\alpha}^{+})^2). \end{aligned} \quad (2.2)$$

其中 $S'(\alpha) = \frac{1}{2}((\mu_{\alpha}^{-})^2 + (\mu_{\alpha}^{+})^2 - (\nu_{\alpha}^{-})^2 - (\nu_{\alpha}^{+})^2)$, 且 $S(\alpha), H'(\alpha) \in (0, 1)$ 。

定义 2.1.9^[38] 设 $\alpha_1 = ([\mu_{\alpha_1}^{-}, \mu_{\alpha_1}^{+}], [\nu_{\alpha_1}^{-}, \nu_{\alpha_1}^{+}])$, $\alpha_2 = ([\mu_{\alpha_2}^{-}, \mu_{\alpha_2}^{+}], [\nu_{\alpha_2}^{-}, \nu_{\alpha_2}^{+}])$ 为两个 IVPFN, 则

(1) 当 $S(\alpha_1) > S(\alpha_2)$ 时, $\alpha_1 > \alpha_2$;

(2) 当 $S(\alpha_1) = S(\alpha_2)$ 时,

若 $H(\alpha_1) > H(\alpha_2)$, 记作 $\alpha_1 > \alpha_2$;

若 $H'(\alpha_1) = H'(\alpha_2)$, 记作 $\alpha_1 = \alpha_2$ 。

此外, 当 $\alpha_1 \geq \alpha_2$, 可得 $\mu_{\alpha_1}^{-} \geq \mu_{\alpha_2}^{-}, \mu_{\alpha_1}^{+} \geq \mu_{\alpha_2}^{+}, \nu_{\alpha_1}^{-} \leq \nu_{\alpha_2}^{-}, \nu_{\alpha_1}^{+} \leq \nu_{\alpha_2}^{+}$, 且 $S(\alpha_1) \geq S(\alpha_2)$ 。

定义 2.1.10^[38] 设 $\alpha_1 = ([\mu_{\alpha_1}^{-}, \mu_{\alpha_1}^{+}], [\nu_{\alpha_1}^{-}, \nu_{\alpha_1}^{+}])$, $\alpha_2 = ([\mu_{\alpha_2}^{-}, \mu_{\alpha_2}^{+}], [\nu_{\alpha_2}^{-}, \nu_{\alpha_2}^{+}])$ 为两个 IVPFN, 定义算术运算如下:

$$\begin{aligned} (1) \quad \alpha_1 \oplus \alpha_2 &= \left(\left[\frac{\sqrt{(\mu_{\alpha_1}^{-})^2 + (\mu_{\alpha_2}^{-})^2 - (\mu_{\alpha_1}^{-})^2 \cdot (\mu_{\alpha_2}^{-})^2}}{\sqrt{(\mu_{\alpha_1}^{+})^2 + (\mu_{\alpha_2}^{+})^2 - (\mu_{\alpha_1}^{+})^2 \cdot (\mu_{\alpha_2}^{+})^2}}, \left[\nu_{\alpha_1}^{-} \nu_{\alpha_2}^{-}, \nu_{\alpha_1}^{+} \nu_{\alpha_2}^{+} \right] \right]; \right. \\ (2) \quad \alpha_1 \otimes \alpha_2 &= \left(\left[\mu_{\alpha_1}^{-} \mu_{\alpha_2}^{-}, \mu_{\alpha_1}^{+} \mu_{\alpha_2}^{+} \right], \left[\frac{\sqrt{(\nu_{\alpha_1}^{-})^2 + (\nu_{\alpha_2}^{-})^2 - (\nu_{\alpha_1}^{-})^2 \cdot (\nu_{\alpha_2}^{-})^2}}{\sqrt{(\nu_{\alpha_1}^{+})^2 + (\nu_{\alpha_2}^{+})^2 - (\nu_{\alpha_1}^{+})^2 \cdot (\nu_{\alpha_2}^{+})^2}} \right] \right); \\ (3) \quad \lambda \alpha_1 &= \left(\left[\sqrt{1 - (1 - (\mu_{\alpha_1}^{-})^2)^\lambda}, \sqrt{1 - (1 - (\mu_{\alpha_1}^{+})^2)^\lambda} \right], \left[(\nu_{\alpha_1}^{-})^\lambda, (\nu_{\alpha_1}^{+})^\lambda \right] \right); \\ (4) \quad \alpha_1^\lambda &= \left(\left[(\mu_{\alpha_1}^{-})^\lambda, (\mu_{\alpha_1}^{+})^\lambda \right], \left[\sqrt{1 - (1 - (\nu_{\alpha_1}^{-})^2)^\lambda}, \sqrt{1 - (1 - (\nu_{\alpha_1}^{+})^2)^\lambda} \right] \right). \end{aligned}$$

定理 2.1.1 设 $\alpha_1 = ([\mu_{\alpha_1}^-, \mu_{\alpha_1}^+], [\nu_{\alpha_1}^-, \nu_{\alpha_1}^+])$, $\alpha_2 = ([\mu_{\alpha_2}^-, \mu_{\alpha_2}^+], [\nu_{\alpha_2}^-, \nu_{\alpha_2}^+])$ 为两个 IVPFN, 则 IVPFN 之间的相互作用运算规律满足以下性质:

- (1) $C_1 \oplus C_2 = C_2 \oplus C_1$;
- (2) $C_1 \otimes C_2 = C_2 \otimes C_1$;
- (3) $\lambda(C_1 \oplus C_2) = \lambda C_1 \oplus \lambda C_2$;
- (4) $(C_1 \otimes C_2)^\lambda = C_1^\lambda \otimes C_2^\lambda$;
- (5) $\lambda_1 C_1 \oplus \lambda_2 C_1 = (\lambda_1 + \lambda_2) C_1$.

定义 2.1.11^[38] 设 $\alpha_1 = ([\mu_{\alpha_1}^-, \mu_{\alpha_1}^+], [\nu_{\alpha_1}^-, \nu_{\alpha_1}^+])$, $\alpha_2 = ([\mu_{\alpha_2}^-, \mu_{\alpha_2}^+], [\nu_{\alpha_2}^-, \nu_{\alpha_2}^+])$ 为两个 IVPFN, 此时两个模糊数之间 Hamming 距离 $d(\alpha_1, \alpha_2)$ 定义为:

$$d(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{4} \times \left(\left| (\mu_{\alpha_1}^-)^2 - (\mu_{\alpha_2}^-)^2 \right| + \left| (\mu_{\alpha_1}^+)^2 - (\mu_{\alpha_2}^+)^2 \right| + \left| (\nu_{\alpha_1}^-)^2 - (\nu_{\alpha_2}^-)^2 \right| + \left| (\nu_{\alpha_1}^+)^2 - (\nu_{\alpha_2}^+)^2 \right| \right) \quad (2.3)$$

且满足: $d(\alpha_1, \alpha_2) \in [0, 1]$, $d(\alpha_1, \alpha_2) = d(\alpha_2, \alpha_1)$, $d(\alpha_1, \alpha_2) \leq d(\alpha_1, \alpha_3) +$

$d(\alpha_3, \alpha_2)$ 。

2.2 云模型理论

云模型可处理具有模糊性和随机性的问题, 弥补了传统模糊集理论仅关注模糊性的局限。通过云模型, 可以将人类语言中的定性概念转化为定量数值, 并保留其不确定性特征。

定义 2.2.1^[28] 云的数字特征由 3 个参数来表示, 称为云模型 (Ex, En, He) , 其中期望 Ex 是最能够代表定性概念的点; 熵 En 表示定性概念的模糊性度量, 反映云滴的离散程度; 超熵 He 是熵的不确定性度量。

定义 2.2.2^[28] 给定一个论域 U , T 为 U 中的一个定性概念。若设 $x \in U$ 是 T 的随机样本, 且 x 满足 $x \sim N(Ex, En^2)$, 其中 $En' \sim N(En, He^2)$, 则在给定 x 分布的条件, x 属于 T 的确定度 y 为

$$y = \exp\left(-\frac{(x - Ex)^2}{2(En')^2}\right). \quad (2.4)$$

其中, y 为 U 中 x 的正态云, (x, y) 为云滴, 生成云滴的过程为定性概念向定量数值的转化。

利用逆向云生成算法将定量数值变换为定性概念。逆向云生成算法的步骤如下:

步骤 1 计算样本平均值 $Ex = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ 以及一阶样本绝对中心矩

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - Ex|, \text{ 样本方差 } S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - Ex)^2;$$

步骤 2 获得 Ex, En, He 的估计: $Ex^* = Ex$, $En^* = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - Ex|$,

$$He^* = \sqrt{S^2 - \frac{1}{3}(En^*)^2};$$

步骤 3 输出预估的云模型 (Ex^*, En^*, He^*) 。

第3章 基于组合权重的毕达哥拉斯模糊多准则群决策方法研究

本章提出了一种将毕达哥拉斯模糊与逐步权重评估比率分析法、毕达哥拉斯模糊熵测度、和毕达哥拉斯模糊组合妥协解法相结合的新方法。通过 PF-SWARA 法和 PF-EM 法计算方案中各指标的组合权重，并采用 PF-CoCoSo 法对方案进行排序，确定最优方案。通过案例选择医疗废物处理方案（MWDP），通过改变权值来验证该方法的稳定性。

3.1 PF-SWARA-EM-CoCoSo 法

3.1.1 PF-SWARA 法

主观权重是专家通过对主题的熟悉程度来得出的，主观权重可通过 AHP 法、ANP 法和专家打分法等等。纵观上述方法，准则重要程度排序是根据专家决策时的偏好进行的，因此由于准则之间差异的显著性不确定，准则的权重无法进行确定。为解决上述问题 Keršulienė 提出了一种有效的模型，用于计算准则的主观权重，称为逐步权重评估比率分析（SWARA）法。PF-SWARA^{[39][40]}计算过程如下：

步骤 1 利用式（2.1）确定 PFN 的精确得分 $S'(p_{ij})$ 。

步骤 2 根据专家的偏好将准则从最重要的到最不重要的准则进行组织。

步骤 3 从第二个准则开始，第 j 个准则与第 $j-1$ 个准则进行比较，在这个两两比较中，专家使用语言变量来表示得分的相对重要性 s_j 。

步骤 4 计算相对系数 k_j

$$k_j = \begin{cases} 1, & j=1 \\ s_j + 1, & j>1 \end{cases} \quad (3.1)$$

其中， s_j 代表得分的相对重要性。

步骤 5 评估权重 p_j

$$p_j = \begin{cases} 1, & j=1 \\ p_{j-1}/k_j, & j>1 \end{cases} \quad (3.2)$$

步骤 6 计算各准则权重 ω_j

$$\omega_1^j = p_j / \sum_{j=1}^n p_j. \quad (3.3)$$

3.1.2 PF-熵权法

毕达哥拉斯模糊熵测度能够反映数据中所包含的隐藏信息,增强准则之间的可辨性和差异性,通过实际决策信息确定各准则的权重,从而更充分地反映准则的重要性,获得合理的决策结果。PF-EM 计算过程如下:

步骤 1 通过下式 (3.4) [41], 计算由一个毕达哥拉斯模糊数 P 表示的任意准则的熵值 $M(P)$:

$$M(P) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m [M'(P_i) + \pi_p(p_i) - \pi_p(p_i)M'(P_i)] \quad (3.4)$$

其中, $M'(P_i) = 1 - |\mu_p(p_i) - \nu_p(p_i)|$ 。

步骤 2 每个准则的加权熵由下式计算:

$$\omega_2^j = \frac{1 - M_j}{n - \sum_j M_j}. \quad (3.5)$$

通常决策者对主客观权重的不同重视程度会影响最终权值,为了减少偏好产生的权重偏差的同时兼顾决策者的主观偏好,本文选择使用组合权重的方式构造准则权重,结果如下[42] (通常取 $\theta = 0.5$):

$$\omega_j = \theta \omega_1^j + (1 - \theta) \omega_2^j, \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad (3.6)$$

其中, $\theta = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$, $1 - \theta = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$, α 、 β 分别表示决策者对主客观权重的偏好程度, 满足: $\alpha, \beta \geq 0$ 且 $\alpha + \beta = 1$ 。

3.1.3 PF-CoCoSo 法

CoCoSo 将简单加性加权和指数加权决策算法与集成策略相结合，得到一个组合妥协解。Yazdani 等将 PFS 理论整合到 CoCoSo 方法中，PF-CoCoSo 是一种处理决策问题中存在的确定性问题的决策支持工具。PFS 与其他现有的 MCDM 技术相比，具有区分最佳替代方案的强大能力。PF-CoCoSo^[43]的计算过程如下：

步骤 1 通过专家意见，利用分配 PF-CoCoSo 的语言变量表构造决策矩阵 $D = (A_{ij})_{m \times n}$ 。

步骤 2 利用式 (2.4) 将语言决策矩阵转换为毕达哥拉斯模糊决策矩阵 (PF-DM) $P = (p_{ij})_{m \times n}$ 。

步骤 3 利用式 (3.7) 计算每个 PFN $p_{ij} = (\mu_{ij}, \nu_{ij})$ 的得分函数矩阵 $X = (x_{ij})_{m \times n}$ 。

$$x_{ij} = \mu_{ij}^2 - \nu_{ij}^2 - \ln(1 + \pi_{ij}^2) \quad (3.7)$$

步骤 4 利用式 (3.8)、(3.9) 将得分函数矩阵 $X = (x_{ij})_{m \times n}$ 转化为毕达哥拉斯规范矩阵 $X' = (x'_{ij})_{m \times n}$ 。

$$x'_{ij} = \frac{x_{ij} - \min_i x_{ij}}{\max_i x_{ij} - \min_i x_{ij}}, j \in B \quad (3.8)$$

$$x'_{ij} = \frac{\max_i x_{ij} - x_{ij}}{\max_i x_{ij} - \min_i x_{ij}}, j \in C \quad (3.9)$$

步骤 5 利用式 (3.10)、(3.11) 计算各备选方案算数加权序列与几何加权序列的总和。

$$G_i = \sum_{j=1}^n (\omega_j x'_{ij}) \quad (3.10)$$

$$P_i = \sum_{j=1}^n (x'_{ij})^{\omega_j} \quad (3.11)$$

步骤 6 采用集成得分策略确定备选方案的相对权重。在这一步中，利用式 (3.12)、(3.13)、(3.14) 三种评价得分策略来生成其他方案的相对权重。

$$k_{ia} = \frac{P_i + G_i}{\sum_{i=1}^m (P_i + G_i)} \quad (3.12)$$

$$k_{ib} = \frac{G_i}{\min_i G_i} + \frac{P_i}{\min_i P_i} \quad (3.13)$$

$$k_{ic} = \frac{\lambda(G_i) + (1-\lambda)(P_i)}{\left(\lambda \max_i G_i + (1-\lambda) \max_i P_i\right)}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1. \quad (3.14)$$

式(2.12)表示加权和测度与加权积测度得分之和的算术平均值, 式(3.13)表示加权和测度与加权积测度相对于最优的相对得分之和, 式(3.14)给出了加权和测度与加权积测度得分的平衡折衷。在式(3.14)中, 决策者通常选择 $\lambda = 0.5$ 。

步骤 7 根据比较 k_i 值确定备选方案的最终排名 (结果越大越好)。

$$k_i = (k_{ia} k_{ib} k_{ic})^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}(k_{ia} + k_{ib} + k_{ic}) \quad (3.15)$$

3.2 基于组合赋权的群决策方法

基于以上权重方法以及排序方法的基础理论, 本文将以上形式的主客观权重进行结合, 在毕达哥拉斯模糊环境下, 通过建立的毕达哥拉斯模糊 SWARA-EM-CoCoSo 法框架确定准则合适的权重, 从而进行最优方案的选择。

该方法的主要步骤如下^[44]:

步骤 1 专家通过语言变量构造出语言决策矩阵 $D = (A_{ij}^{(k)})_{m \times n}$, 其中, $A_{ij}^{(k)}$ 表示第 k 个专家对第 i 个备选方案的第 j 个准则的评价, $k = 1, 2, \dots, l$ 。

步骤 2 确定专家权重。设 $E_k = (\mu_k, \nu_k)$ 为 PFN, 则使用式(3.16)可得第 k 个专家的权重。

$$\omega_k = \frac{\left(\mu_k^2 + \pi_k^2 \times \left(\frac{\mu_k^2}{\mu_k^2 + \nu_k^2} \right) \right)}{\sum_{k=1}^l \left(\mu_k^2 + \pi_k^2 \times \left(\frac{\mu_k^2}{\mu_k^2 + \nu_k^2} \right) \right)} \quad (3.16)$$

其中, $\omega_k \geq 0, \sum_{k=1}^l \omega_k = 1$ 。

步骤 3 使用毕达哥拉斯模糊加权平均算子 (PFWA) 集成专家意见, 从而构

造 PF-DM $P = (p_{ij})_{m \times n}$, 其中

$$p_{ij} = (\mu_{ij}, \nu_{ij}) = PFWA_{\omega} \left(A_{ij}^{(1)}, A_{ij}^{(2)}, \dots, A_{ij}^{(k)} \right) = \left(\sqrt{1 - \prod_{k=1}^l (1 - \mu_k^2)^{\omega_k}}, \prod_{k=1}^l (\nu_k)^{\omega_k} \right). \quad (3.17)$$

步骤 4 使用 PF-SWARA 计算准则主权重, PF-EM 计算准则的客观权重, 再使用式 (3.6) 计算准则组合权重。

步骤 5 结合 PF-CoCoSo 方法对准则进行排序, 从而选出最优方案。
具体流程如图 3-1 所示。

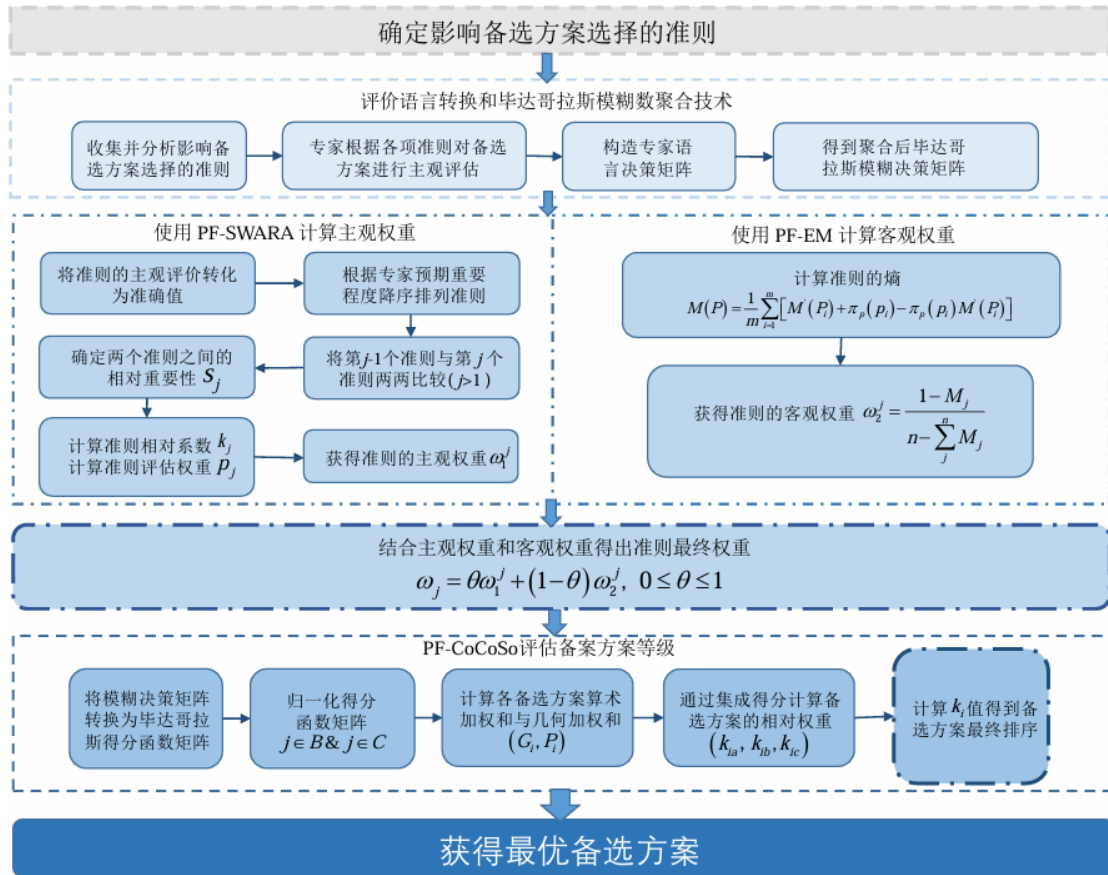


图 3-1 毕达哥拉斯模糊 SWARA-EM-CoCoSo 技术路线图

3.3 应用案例

3.3.1 案例研究

疾病是人类自诞生以来就面临的天敌。在现代医学飞速发展的同时，与疾病相关的各类病毒也在不断进化。在日常生活中也会产生医疗废物，处置不当会影响人们的生活并导致其他疾病。医疗废物处理方案的选择需要考虑到国情，一旦发生突发公共卫生事件，医疗废物的数量会呈现爆发式增长，难以处理，而且病毒传播的风险也很高。对于发展中国家来说，由于人口众多、医疗资源有限、医疗服务水平参差不齐等因素，医疗废物的产生量通常较大，废物处理设施相对不足。医疗废物处置不当可能造成环境污染和公共健康风险，威胁人们的健康和生态环境。因此在实践中，结合不同国家的情况，做出最优的医疗废物处置方案选择至关重要。本文将 PF-SWARA-EM-CoCoSo 方法应用于医疗废物处理方案的选择，并用于验证该方法的可行性。

在选择医疗废物处理方案时，需要考虑几个标准，如环境影响、成本效益和社会可接受性。这些标准的结合旨在确保最终的处置解决方案最大限度地满足社会和利益相关者的要求，同时保护环境和节约资源。本文总结已有文献，选取影响医疗废物处置方案选择的 10 项准则，如表 3-1 所示；同时确定了发展中国家常用的医疗废物处理方案：高压灭菌 (S_1)、微波 (S_2)、等离子体热解 (S_3)、化学消毒 (S_4) 和焚烧 (S_5)。最后，由 4 位专家组成的决策小组 $E = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ 根据准则对备选方案进行主观评价。具体步骤如下：

表 3-1 医疗废物处理的评估准则

准则	属性
公众接受度 (C_1)	B
残余废弃物 (C_2)	C
能源消耗 (C_3)	C
微生物灭活 (C_4)	B
成本 (C_5)	C
土地需求 (C_6)	C
处置效果 (C_7)	B
可靠性 (C_8)	B
自动化程度 (C_9)	B
对熟练操作人员的需求 (C_{10})	B

步骤 1 使用表 3-2 中对应的语言变量表表示专家的重要性，并根据式 (2.3) 得到专家的权重，结果如表 3-3 所示。

表 3-2 专家评估的语言变量

评价等级	PFNs
极其熟练 (ES)	(0.95,0.15)
非常熟练 (VVS)	(0.75,0.40)
熟练 (S)	(0.60,0.50)
中等 (M)	(0.50,0.55)
不太熟练 (LS)	(0.40,0.50)
非常不熟练 (VLS)	(0.30,0.85)
技术水平极低 (ELS)	(0.10,0.90)

表 3-3 专家权重

专家	评价等级	PFNs	权重
E_1	VVS	(0.75,0.40)	0.2847
E_2	S	(0.60,0.50)	0.2158
E_3	ES	(0.95,0.15)	0.3568
E_4	LS	(0.40,0.80)	0.1427

步骤 2 3 位专家利用表 3-4 中的语言变量对 10 个标准进行评分，如表 3-5 所示。

表 3-4 准则评估的语言变量

评价等级	PFNs
极高 (PH)	(0.95,0.20)
非常高 (VH)	(0.80,0.35)
高 (H)	(0.70,0.45)
中等偏高 (MH)	(0.60,0.55)
中等 (M)	(0.50,0.60)
中等偏低 (ML)	(0.40,0.70)
低 (L)	(0.30,0.75)
非常低 (VL)	(0.20,0.85)
极低 (EL)	(0.10,0.95)

表 3-5 专家对准则的主观评价

准则	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
C_1	(PH,H,PH,MH)	(PH,MH,H,L)	(MH,PH,H,ML)	(M,MH,MH,ML)	(H,H,ML,L)
C_2	(L,M,L,L)	(M,M,L,VL)	(L,H,L,M)	(MH,M,L,VL)	(M,MH,H,MH)
C_3	(PH,H,L,L)	(H,H,ML,L)	(H,H,L,VL)	(H,MH,L,L)	(PH,M,L,MH)
C_4	(M,MH,H,L)	(M,MH,H,ML)	(H,L,H,MH)	(MH,MH,PH,ML)	(M,MH,H,ML)
C_5	(H,M,ML,M)	(PH,L,M,M)	(H,L,M,L)	(PH,L,M,M)	(PH,PH,L,L)
C_6	(L,MH,H,M)	(VL,H,MH,MH)	(VL,H,H,VL)	(ML,MH,M,L)	(H,PH,L,L)
C_7	(M,L,L,PH)	(ML,L,MH,H)	(ML,M,ML,H)	(MH,H,ML,H)	(MH,H,ML,M)
C_8	(M,H,PH,MH)	(PH,H,H,PH)	(L,M,M,H)	(L,MH,M,H)	(M,MH,M,M)
C_9	(PH,L,M,M)	(H,M,MH,M)	(H,M,M,H)	(PH,H,H,PH)	(PH,MH,H,H)
C_{10}	(H,VL,MH,H)	(H,ML,M,PH)	(H,L,M,MH)	(MH,L,M,M)	(MH,H,L,M)

步骤 3 与上章计算类似，将表 3-5 中的语言变量转换为相应的 PFN，利用式（2.4）进行集成，得到 PF 决策矩阵。

步骤 4 通过表 3-4 得到这 10 个准则的专家评分，集成后使用式（2.1）得到其精确值，结果如表 3-6 所示。

表 3-6 专家根据语言变量表给出的准则评级

准则	E_1	E_2	E_3	E_4	集成 PFNs	精确值
C_1	VL	L	VL	ML	(0.2625,0.8047)	0.2107
C_2	L	L	M	VL	(0.3797,0.7051)	0.3235
C_3	PH	MH	PH	H	(0.9026,0.2793)	0.8683
C_4	PH	H	PH	H	(0.9075,0.2675)	0.8760
C_5	ML	M	L	ML	(0.3957,0.6940)	0.3375
C_6	L	VL	M	VL	(0.3664,0.7244)	0.3047
C_7	M	H	H	ML	(0.6235,0.5202)	0.5591
C_8	PH	M	MH	H	(0.7904,0.4083)	0.7290
C_9	H	H	MH	PH	(0.7505,0.4306)	0.6889
C_{10}	L	ML	L	VL	(0.3142,0.7522)	0.2664

步骤 5 根据 PF-SWARA 中的式（3.1）至式（3.3），将各指标对应的精确值由大到小排序，得到各指标的最终权重，结果如下所示：

$$\begin{aligned}\omega_1^j &= (\omega_1^1, \omega_1^2, \dots, \omega_1^{10}) \\ &= (0.0737, 0.0827, 0.1288, 0.1299, 0.0851, 0.0811, 0.1055, 0.1188, 0.1168, 0.0776).\end{aligned}$$

步骤 6 使用式（3.4）计算出各个准则的总熵值，然后使用式（3.5）计算出各个准则的客观权重，结果如下：

$$\begin{aligned}M(P) &= (M_1, M_2, \dots, M_{10}) \\ &= (0.8319, 0.9100, 0.9284, 0.9297, 0.8752, 0.9586, 0.9738, 0.8623, 0.8417, 0.9618), \\ \omega_2^j &= (\omega_2^1, \omega_2^2, \dots, \omega_2^{10}) \\ &= (0.1814, 0.0971, 0.0772, 0.0759, 0.1347, 0.0447, 0.0283, 0.1486, 0.1708, 0.0412).\end{aligned}$$

步骤 7 根据式（3.6）计算组合权重，最终指标权重结果如下：

$$\begin{aligned}\omega &= (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{10}) \\ &= (0.1276, 0.0899, 0.1030, 0.1029, 0.1099, 0.0629, 0.0669, 0.1337, 0.1438, 0.0594).\end{aligned}$$

步骤 8 根据 PF-CoCoSo 法，再次利用上述得到的 PF 决策矩阵，利用式（3.7）至式（3.15）进行排序，结果如表 3-7 所示。

表 3-7 备选方案排名

	k_i	排名
S_1	2.9851	1
S_2	2.9108	2
S_3	2.2060	4
S_4	2.7727	3
S_5	1.4970	5

根据上述结果，可以得到一个排序： $S_1 \succ S_2 \succ S_4 \succ S_3 \succ S_5$ 。因此，已知 S_1 是可用的最优 MWDP。

3.3.2 稳定性检验

考虑权重变化和参数 θ 、 λ 变化对备选方案最优排序的影响。首先，观察当准则权重发生变化时备选方案的排序是否发生变化，准则权重的变化规则如下^[37]：假设准则权重为 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$ ，其中一个准则权重发生改变时，其余准则权重随之改变，满足 $\sum_{j=1}^n \omega_j = 1$ ；此时选取准则 1 的权重作为操作对象。

令 $\Delta_1 = \{-0.1275, -0.0500, 0.1000, 0.4000, 0.8000, 0.8723\}$ 。备选方案的最终排名如表 3-8 所示。备选方案排序的可视化结果如图 3-2 所示。从结果可以看出，当 $\Delta_1 \in [-0.05, 0.8]$ ，最优和最差的选择是一致的，结果是稳定的。

表 3-8 备选方案排名

场景	Δ_1	排名
1	-0.1275	$S_4 \succ S_1 \succ S_2 \succ S_3 \succ S_5$
2	-0.05	$S_1 \succ S_2 \succ S_4 \succ S_3 \succ S_5$
3	0.1	$S_1 \succ S_2 \succ S_4 \succ S_3 \succ S_5$
4	0.4	$S_1 \succ S_2 \succ S_3 \succ S_4 \succ S_5$
5	0.8	$S_1 \succ S_2 \succ S_3 \succ S_4 \succ S_5$
6	0.8723	$S_1 \succ S_2 \succ S_3 \succ S_5 \succ S_4$

其次，在专家权重不变的情况下，结合专家对主观和客观权重的偏好，观察当总权重 θ 的参数发生变化时，备选方案的排序是否发生变化。随机取 4 组不同参数 θ ，计算不同参数下备选方案的综合 k_i 值，结果如表 3-9 所示，方案排序见图 3-3。

表 3-9 综合 k_i 值

	$k_{i1} (\theta = 0.88)$	$k_{i2} (\theta = 0.67)$	$k_{i3} (\theta = 0.41)$	$k_{i4} (\theta = 0.21)$
S_1	3.0815	3.0284	2.9620	2.9105
S_2	2.9151	2.9128	2.9098	2.9074
S_3	2.2401	2.2214	2.1976	2.1788
S_4	2.6585	2.7222	2.7990	2.8567
S_5	1.4982	1.4974	1.4969	1.4968

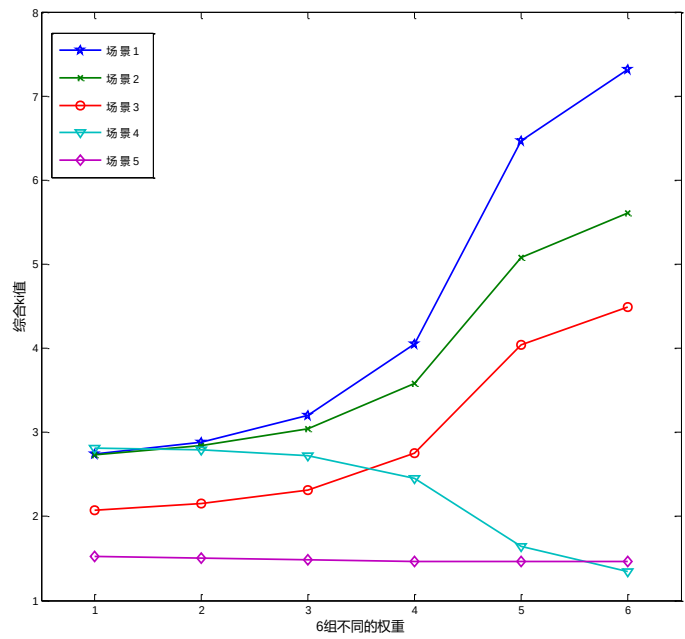


图 3-2 不同场景下对备选方案进行排序

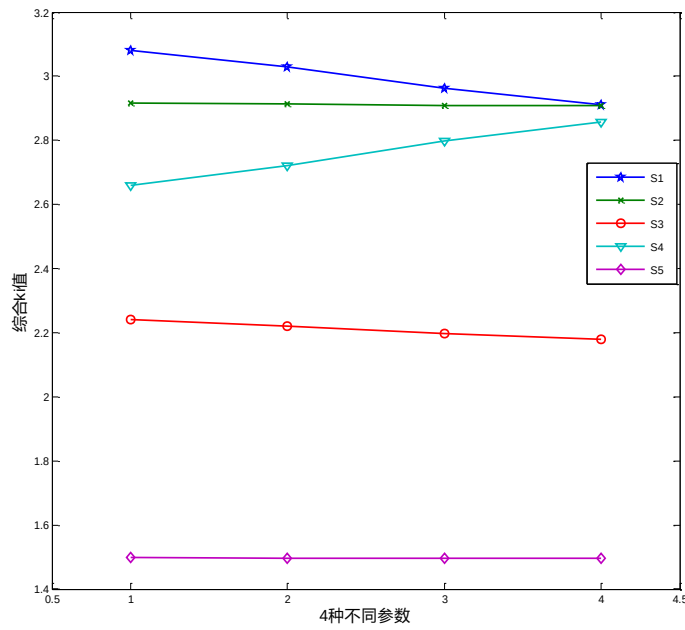


图 3-3 不同参数 θ 下对备选方案进行排序

最后, 观察假设专家权重和主客观权重的偏好程度不变, 参数 λ 发生变化时, 备选方案的排序是否发生变化, 令

$$\lambda = \{0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0\},$$

不同参数下的备选方案排序如图 3-4 所示。

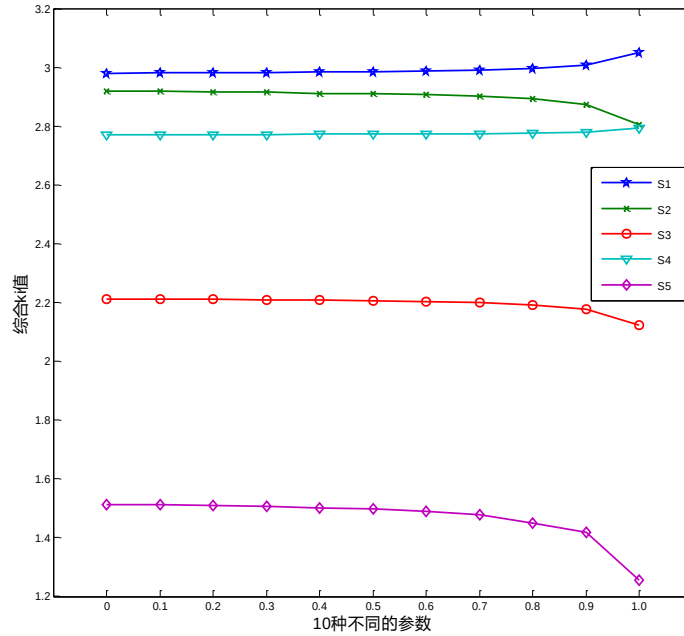


图 3-4 使用不同参数对备选方案进行排序

从图 3-3 可以看出, 专家对主客观权重的偏好变化对方案的最终 k_i 值影响不大, 可见方法具有稳定性。由图 3-4 可以看出, PF-SWARA-EM-CoCoSo 模型在不同参数 λ 下的稳定性都是可以接受的, 与其他几种方案相比, S_1 受参数的影响最小, 我们可以得到排序 $S_1 \succ S_2 \succ S_4 \succ S_3 \succ S_5$, 即最优结果仍然是 S_1 。

3.3.3 对比分析

将本文方法与其他方法进行对比分析, 说明了该方法的可行性。不同文献的排名结果见表 3-10。除参考文献[47]外, 其他方法得到的最优解均为 S_1 , 与本文的结果一致, 而参考文献[47]以 S_5 焚烧为最优解是不合理的, 因为医疗废弃物焚烧会产生有毒气体, 造成严重的空气污染。对发展中国家来说, 废气的净化也极其昂贵。在[45][48]中, 权重的计算方法为单一赋值, 只关注主客观评价中的一方, 结果存在偏差。而本文方法采用主客观混合分配, 在满足专家偏好的同时避免了主观随意性, 弥补了单一分配的不足。参考文献[45]、[47]、[49]都是在直觉模糊环境下进行 MWDP 的选择, 直觉模糊集虽然弥补了以往模糊集的不足, 但

本文将模糊扩展到毕达哥拉斯模糊环境，使得模糊范围比直觉模糊集更大，包含的模糊信息也更多。

表 3-10 不同方法呈现的排序顺序

参考文献	方法	最终排名
Zheng et al ^[45]	IF-EM-TOPSIS	$S_1 \succ S_2 \succ S_4 \succ S_3 \succ S_5$
Liu et al ^[46]	PF-SM-CoCoSo	$S_1 \succ S_4 \succ S_2 \succ S_5 \succ S_3$
Rani et al ^[47]	PF-SWARA-ARAS	$S_1 \succ S_2 \succ S_3 \succ S_4 \succ S_5$
Salimian et al ^[48]	IF-EM-MCDM	$S_5 \succ S_2 \succ S_1 \succ S_3 \succ S_4$
Patel et al ^[49]	IF-EM-SWARA-TOPSIS	$S_1 \succ S_2 \succ S_3 \succ S_4 \succ S_5$
The proposed method	The proposed method	$S_1 \succ S_2 \succ S_4 \succ S_3 \succ S_5$

3.4 本章小结

作为人口最多的国家，中国面临着巨大的医疗废物处理压力。近年来，中国加大了对医疗废物处理的监管力度，促进了技术升级和资源回收利用。PF-SWARA-EM-CoCoSo 方法可用于为中国或其他发展中国家选择良好 MWDP；同时，该方法可推广应用于其他多准则决策问题，如选址问题、风险投资选择问题、新能源电池供应商评价问题等。决策领域中某些方法和技术的有意义的合并可以为给定的知识体系增加价值和优势。

第 4 章 基于区间毕达哥拉斯模糊的多准则群决策方法研究

由于现实决策中决策者对不同准则的评价很难用具体的数值表示出来,因此许多情况下决策者选择使用区间数,来表达对准则的直观感受和模糊判断,从而提高决策结果的合理性和实用性。本章在区间毕达哥拉斯模糊环境下,扩展出 IVPFNWBM^{p,q} 算子的形式。通过 CRITIC 法和专家打分法计算出准则的综合权重,并采用区间毕达哥拉斯模糊加权平均 (IVPFWA) 算子和 IVPFNWBM^{p,q} 算子集成准则相关评价结果,构建了基于 IVPFN 的群决策过程。最后,通过案例展示该方法的有效性。

4.1 IVPFNWBM^{p,q} 算子与 CRITIC 法

4.1.1 区间毕达哥拉斯算子

定义 4.1.1^[50] 设 $\alpha_i = ([\mu_{\alpha_i}^-(x), \mu_{\alpha_i}^+(x)], [\nu_{\alpha_i}^-(x), \nu_{\alpha_i}^+(x)])$ 为一组 IVPFN, 存在一组权重 ω_i , 满足 $i=1, 2, \dots, n$, $\omega_i \in [0, 1]$ 且 $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ 。区间毕达哥拉斯模糊加权平均 (IVPFWA) 算子定义为

$$IVPFWA(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \left(\left[\sqrt{1 - \prod_{i=1}^n (1 - (\mu_{\alpha_i}^-(x))^2)^{\omega_i}}, \sqrt{1 - \prod_{i=1}^n (1 - (\mu_{\alpha_i}^+(x))^2)^{\omega_i}} \right], \left[\prod_{i=1}^n (\nu_{\alpha_i}^-(x))^{\omega_i}, \prod_{i=1}^n (\nu_{\alpha_i}^+(x))^{\omega_i} \right] \right). \quad (4.1)$$

定义 4.1.2^[51] 对于任意 $p, q \geq 0$ 并且 $p+q > 0$, 权重向量

$\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$, 满足 $i=1, 2, \dots, n$, $\omega_i \in [0, 1]$ 且 $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ 。规范加权

Bonferroni 均值 (NWBM^{p,q}) 算子定义为

$$NWBM^{p,q}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \left(\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \omega_i \alpha_i^p \frac{\omega_j}{(1 - \omega_i)} \alpha_j^q \right)^{\frac{1}{p+q}}. \quad (4.2)$$

NWBM^{p,q}算子性质同BM均值算子类似，下面将其扩展至区间毕达哥拉斯模糊环境中。

定义 4.1.3 设 $\alpha_i = ([\mu_{\alpha_i}^-(x), \mu_{\alpha_i}^+(x)], [\nu_{\alpha_i}^-(x), \nu_{\alpha_i}^+(x)])$ 为一组 IVPFN，对于任意 $p, q \geq 0$ 且 $p+q > 0$ ，IVPFNWBM^{p,q}算子定义为

$$IVPFNWBM^{p,q}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \left(\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \omega_i \alpha_i^p \frac{\omega_j}{(1-\omega_i)} \alpha_j^q \right)^{\frac{1}{p+q}}. \quad (4.3)$$

其中 ω_i 为 α_i 的权重向量， $i=1, 2, \dots, n$ ，满足 $0 \leq \omega_i \leq 1$ 和 $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ 。

定理 4.1.1 设 $\alpha_i = ([\mu_{\alpha_i}^-(x), \mu_{\alpha_i}^+(x)], [\nu_{\alpha_i}^-(x), \nu_{\alpha_i}^+(x)])$ 为一组 IVPFNs 的集合。那么，IVPFNs 的汇总结果仍然是 IVPFN，其形式如下：

$$\begin{aligned} & IVPFNWBM^{p,q}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \\ &= \left(\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \omega_i \alpha_i^p \frac{\omega_j}{(1-\omega_i)} \alpha_j^q \right)^{\frac{1}{p+q}} \\ &= \left[\left[\left(\sqrt{1 - \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}} 1 - l^-} \right)^{\frac{1}{p+q}}, \left(\sqrt{1 - \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}} 1 - l^+} \right)^{\frac{1}{p+q}} \right], \right. \\ & \quad \left. \left[\sqrt{1 - \left(1 - \left(\prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}} \sqrt{r^-} \right)^2 \right)^{\frac{1}{p+q}}}, \sqrt{1 - \left(1 - \left(\prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}} \sqrt{r^+} \right)^2 \right)^{\frac{1}{p+q}}} \right] \right]. \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\text{其中 } l^- = \left(1 - \left(1 - (\mu_{\alpha_i}^-)^{2p} \right)^{\omega_i} \right) \left(1 - \left(1 - (\mu_{\alpha_j}^-)^{2q} \right)^{\frac{\omega_j}{(1-\omega_i)}} \right),$$

$$l^+ = \left(1 - \left(1 - (\mu_{\alpha_i}^+)^{2p} \right)^{\omega_i} \right) \left(1 - \left(1 - (\mu_{\alpha_j}^+)^{2q} \right)^{\frac{\omega_j}{(1-\omega_i)}} \right),$$

$$r^- = \left(1 - \left(1 - (\nu_{\alpha_i}^-)^2 \right)^p \right)^{\omega_i} + \left(1 - \left(1 - (\nu_{\alpha_j}^-)^2 \right)^q \right)^{\frac{\omega_j}{(1-\omega_i)}} - \left(1 - \left(1 - (\nu_{\alpha_i}^-)^2 \right)^p \right)^{\omega_i} \cdot \left(1 - \left(1 - (\nu_{\alpha_j}^-)^2 \right)^q \right)^{\frac{\omega_j}{(1-\omega_i)}},$$

$$r^+ = \left(1 - \left(1 - (\nu_{\alpha_i}^+)^2\right)^p\right)^{\omega_i} + \left(1 - \left(1 - (\nu_{\alpha_j}^+)^2\right)^q\right)^{\frac{\omega_j}{(1-\omega_i)}} - \left(1 - \left(1 - (\nu_{\alpha_i}^+)^2\right)^p\right)^{\omega_i} \cdot \left(1 - \left(1 - (\nu_{\alpha_j}^+)^2\right)^q\right)^{\frac{\omega_j}{(1-\omega_i)}}.$$

证明：通过定义 2.1.10，可得

$$\alpha_i^p = \left[\left[(\mu_{\alpha_i}^-)^p, (\mu_{\alpha_i}^+)^p \right], \left[\sqrt{1 - \left(1 - (\nu_{\alpha_i}^-)^2\right)^p}, \sqrt{1 - \left(1 - (\nu_{\alpha_i}^+)^2\right)^p} \right] \right],$$

$$\omega_i \alpha_i^p = \left[\left[\sqrt{1 - \left(1 - ((\mu_{\alpha_i}^-)^p)^2\right)^{\omega_i}}, \sqrt{1 - \left(1 - ((\mu_{\alpha_i}^+)^p)^2\right)^{\omega_i}} \right], \left[\left(\sqrt{1 - \left(1 - (\nu_{\alpha_i}^-)^2\right)^p} \right)^{\omega_i}, \left(\sqrt{1 - \left(1 - (\nu_{\alpha_i}^+)^2\right)^p} \right)^{\omega_i} \right] \right]$$

,

$$\frac{\omega_j}{(1-\omega_i)} \alpha_j^q = \left[\left[\sqrt{1 - \left(1 - ((\mu_{\alpha_j}^-)^q)^2\right)^{\frac{\omega_j}{(1-\omega_i)}}}, \sqrt{1 - \left(1 - ((\mu_{\alpha_j}^+)^q)^2\right)^{\frac{\omega_j}{(1-\omega_i)}}} \right], \left[\left(\sqrt{1 - \left(1 - (\nu_{\alpha_j}^-)^2\right)^q} \right)^{\frac{\omega_j}{(1-\omega_i)}}, \left(\sqrt{1 - \left(1 - (\nu_{\alpha_j}^+)^2\right)^q} \right)^{\frac{\omega_j}{(1-\omega_i)}} \right] \right],$$

所以

$$\omega_i \alpha_i^p \frac{\omega_j}{(1-\omega_i)} \alpha_j^q = \left[\left[\sqrt{\left(1 - \left(1 - (\mu_{\alpha_i}^-)^{2p}\right)^{\omega_i}\right) \left(1 - \left(1 - (\mu_{\alpha_j}^-)^{2q}\right)^{\frac{\omega_j}{(1-\omega_i)}}\right)}, \sqrt{\left(1 - \left(1 - (\mu_{\alpha_i}^+)^{2p}\right)^{\omega_i}\right) \left(1 - \left(1 - (\mu_{\alpha_j}^+)^{2q}\right)^{\frac{\omega_j}{(1-\omega_i)}}\right)} \right], \left[\sqrt{\left(1 - \left(1 - (\nu_{\alpha_i}^-)^2\right)^p\right)^{\omega_i} + \left(1 - \left(1 - (\nu_{\alpha_j}^-)^2\right)^q\right)^{\frac{\omega_j}{(1-\omega_i)}}}, \sqrt{-\left(1 - \left(1 - (\nu_{\alpha_i}^-)^2\right)^p\right)^{\omega_i} \cdot \left(1 - \left(1 - (\nu_{\alpha_j}^-)^2\right)^q\right)^{\frac{\omega_j}{(1-\omega_i)}}}, \sqrt{\left(1 - \left(1 - (\nu_{\alpha_i}^+)^2\right)^p\right)^{\omega_i} + \left(1 - \left(1 - (\nu_{\alpha_j}^+)^2\right)^q\right)^{\frac{\omega_j}{(1-\omega_i)}}}, \sqrt{-\left(1 - \left(1 - (\nu_{\alpha_i}^+)^2\right)^p\right)^{\omega_i} \cdot \left(1 - \left(1 - (\nu_{\alpha_j}^+)^2\right)^q\right)^{\frac{\omega_j}{(1-\omega_i)}}} \right] \right],$$

此时令 $\omega_i \alpha_i^p \frac{\omega_j}{(1-\omega_i)} \alpha_j^q = \left(\left[\sqrt{l^-}, \sqrt{l^+} \right], \left[\sqrt{r^-}, \sqrt{r^+} \right] \right)$, 由数学归纳法可得

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \omega_i \alpha_i^p \frac{\omega_j}{(1-\omega_i)} \alpha_j^q = \left(\left[\sqrt{1 - \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}} 1 - l^-}, \sqrt{1 - \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}} 1 - l^+} \right], \left[\prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}} \sqrt{r^-}, \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}} \sqrt{r^+} \right] \right),$$

则

$$\left(\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \omega_i \alpha_i^p \frac{\omega_j}{(1-\omega_i)} \alpha_j^q \right)^{\frac{1}{p+q}} = \left(\left[\left(\sqrt{1 - \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}} 1 - l^-} \right)^{\frac{1}{p+q}}, \left(\sqrt{1 - \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}} 1 - l^+} \right)^{\frac{1}{p+q}} \right], \left[\sqrt{1 - \left(1 - \left(\prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}} \sqrt{r^-} \right)^2 \right)^{\frac{1}{p+q}}}, \sqrt{1 - \left(1 - \left(\prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}} \sqrt{r^+} \right)^2 \right)^{\frac{1}{p+q}}} \right] \right).$$

因此, 我们完成定理 4.1.1 的证明, IVPFN 的综合结果仍然是一个 IVPFN。同时, IVPFNWBM^{p,q} 算子具有幂等性、单调性、可交换性和有界性。

4.1.2 CRITIC 法

指标的权重不仅反映了要素的重要性, 引导决策方向, 同时可以增强决策科学性, 提高决策质量。合理的权重设置能够使决策者更好地平衡不同要素之间的关系, 因此, 在决策过程中, 决策者应充分考虑各项指标的权重, 确保决策结果的合理性和有效性。

CRITIC 法基于数据的客观属性进行评价, 避免了人为因素的主观干扰。通过量化指标间的对比强度和冲突性, 能够更准确地反映各指标在评价体系中的重要性, 从而提高了评价结果的准确性和可靠性。基于区间毕达哥拉斯模糊的 CRITIC 法步骤如下:

步骤 1 利用式 (2.2) 确定 IVPFN 的精确得分 $S(r_{ij})$ 。

步骤 2 使用下式 (4.5) 对得分函数矩阵进行规范化处理, 得到规范化后得分函数矩阵 $D = (d_{ij})_{m \times n}$ 。

$$d_{ij} = \begin{cases} \frac{r_{ij} - r_i^-}{r_i^+ - r_i^-}; & i=1, \dots, m, j=1, \dots, n, j \in B, \\ \frac{r_{ij} - r_i^+}{r_i^- - r_i^+}; & i=1, \dots, m, j=1, \dots, n, j \in C. \end{cases} \quad (4.5)$$

其中 d_{ij} 表示第 j 个属性中第 i 个备选方案的规范化后得分值，且

$$r_i^+ = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}_{\max} \text{ 和 } r_i^- = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}_{\min}。$$

步骤 3 计算准则间相关系数 ρ_{ij} 。

$$\rho_{jk} = \frac{\sum_{i=1}^m (d_{ij} - \bar{d}_j)(d_{ik} - \bar{d}_k)}{\sqrt{\sum_{i=1}^m (d_{ij} - \bar{d}_j)^2 \sum_{i=1}^m (d_{ik} - \bar{d}_k)^2}} \quad (4.6)$$

其中 $\bar{d}_j$ 和 $\bar{d}_k$ 是第 j 个和第 k 个属性的平均值； ρ_{jk} 是第 j 个和第 k 个属性之间的相关系数。

步骤 4 计算指数 C_j 。先使用下式 (4.7) 计算每个准则的标准偏差，再使用下式 (4.8) 计算准则指数。

$$\sigma_j = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^m (d_{ij} - \bar{d}_j)^2}, \quad i=1, 2, \dots, m \quad (4.7)$$

$$C_j = \sigma_j \sum_{k=1}^n (1 - \rho_{jk}); \quad j=1, 2, \dots, n \quad (4.8)$$

步骤 5 使用下式 (4.9) 计算准则客观权重。

$$\omega_2^j = \frac{C_j}{\sum_{j=1}^n C_j} \quad (4.9)$$

然而在实际应用中，客观赋权法无法充分考虑决策者的主观意图和偏好，可能导致权重结果与实际情况存在偏差。因此我们选择使用下式 (4.10) 将主客观权重结合进行赋权，提高权重分配的准确性和合理性。

$$\omega_j = \frac{\omega_1^j \times \omega_2^j}{\sum_{j=1}^n \omega_1^j \times \omega_2^j} \quad (4.10)$$

其中 ω_1^j 代表第 j 个准则的主观权重， ω_2^j 代表客观权重， ω_j 为准则组合权重。

4.2 基于 IVPFNWBM^{p,q} 算子的群决策模型

TOPSIS法具有简单直观、客观准确等特点，因此我们选择参考TOPSIS排序思想，通过求解备选方案与正负理想解的距离，从而得到备选方案的最优排序。

假设决策问题中存在 m 个备选方案 $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ ； k 个决策者 $E = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ 和 n 个准则 $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ ，准则权重向量为 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ ，其中 $\sum_{j=1}^n \omega_j = 1$ ， $\omega_j > 0$ ， $(j=1, 2, \dots, n)$ ，则决策者根据准则 c_j 为每个备选 s_i 提供评级，评级结果为一个IVPFN $\alpha_i = \left(\left[\mu_{\alpha_i}^-(x), \mu_{\alpha_i}^+(x) \right], \left[\nu_{\alpha_i}^-(x), \nu_{\alpha_i}^+(x) \right] \right)$ 。

多准则群决策过程具体步骤如下：

步骤 1 专家使用语言决策表在不同准则下对每个备选方案进行评级，构造语言决策矩阵

$$R = (r_{ij}), (i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n),$$

使用 IVPFWA 算子集成专家意见，从而构造 PF-DM

$$\tilde{D} = (\tilde{d}_{ij}), (i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n),$$

其中 $\tilde{d}_{ij}$ 为IVPFN。

步骤 2 先使用专家打分法得到准则的主观权重 ω_1^j ，再使用 CRITIC 法得到准则的客观权重 ω_2^j 。

步骤 3 使用式 (4.10) 获得备选方案的准则的组合权重。

步骤 4 使用式 (4.11) 对 PF-DM 进行规范化处理，得到规范化后模糊决策矩阵 $D = (d_{ij}), (i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n)$ 。

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \left(\left[\mu_{\tilde{d}_{ij}}^-(x), \mu_{\tilde{d}_{ij}}^+(x) \right], \left[\nu_{\tilde{d}_{ij}}^-(x), \nu_{\tilde{d}_{ij}}^+(x) \right] \right) \\ &= \begin{cases} \left(\left[\mu_{\tilde{d}_{ij}}^-(x), \mu_{\tilde{d}_{ij}}^+(x) \right], \left[\nu_{\tilde{d}_{ij}}^-(x), \nu_{\tilde{d}_{ij}}^+(x) \right] \right), & j \in B, \\ \left(\left[\nu_{\tilde{d}_{ij}}^-(x), \nu_{\tilde{d}_{ij}}^+(x) \right], \left[\mu_{\tilde{d}_{ij}}^-(x), \mu_{\tilde{d}_{ij}}^+(x) \right] \right), & j \in C. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.11)$$

步骤 5 使用 IVPFNWBM^{p,q} 获得备选方案的综合评价 IVPFN。

步骤 6 使用式 (2.3) 得到备选方案的综合评价值与正理想解 δ^+ 的距离 $d(S_i, \delta^+)$ ，其中 $\delta^+ = ([\mu^-(x), \mu^+(x)]_{\max}, [\nu^-(x), \nu^+(x)]_{\min})$ 。

步骤 7 根据 $d(S_i, \delta^+)$ 对备选方案进行排序， d 越小，方案越优。

4.3 应用案例

4.3.1 案例研究

随着全球经济的增长，资源枯竭和环境退化问题愈发严重。为此，各国制定了多种环境法律法规和政策，将经济增长与环境保护相结合。在这一背景下，通过减少供应链中污染物的排放，推动可持续发展的绿色供应链管理被证明是解决资源与环境问题的有效方法。而绿色供应商作为绿色供应链的重要环节，它的选择有助于推动整个供应链的可持续发展，实现经济、社会和环境的协调发展。因此，选择有能力的绿色供应商，不仅有助于企业保持供应链管理的竞争优势，还能为环境保护作出重要贡献。

现有 4 个备选的绿色供应商 $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ ，以及 4 名专家组成的决策小组 $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ 。专家组对绿色供应商进行评估需考虑以下 4 项准则：产品和服务质量(C_1)、成本(C_2)、可持续性(C_3)、声誉(C_4)。其中 C_1 、 C_3 、 C_4 为效益型准则， C_2 为成本型准则， $p = q = 2$ ，专家权重^[52]为 $\omega = (0.1, 0.2, 0.4, 0.3)^T$ 。步骤如下：

步骤 1 专家在不同准则下对每个备选方案进行评级，构造语言决策矩阵，结果如表 4-1 所示。使用 IVPFWA 算子集成专家意见，从而构造 PF-DM，结果如表 4-2 所示。

步骤 2 利用式 (2.2) 确定 IVPFN 的精确得分 $S(r_{ij})$ ，使用式 (4.5) 对得分函数矩阵进行规范化处理，得到规范化后得分函数矩阵，结果如表 4-3 所示。

步骤 3 使用专家打分法得到准则的主观权重 ω_1^j ，再使用式 (4.6) 计算准则间相关系数 ρ_{ij} ，结果如表 4-4 所示。

$$\omega_1^j = (\omega_1^1, \omega_1^2, \omega_1^3, \omega_1^4) = (0.3, 0.1, 0.2, 0.4).$$

表 4-1 专家在不同准则下对备选方案的评价

		S_1	S_2	S_3	S_4
C_1	e_1	[[0.4,0.5],[0.2,0.5]]	[[0.3,0.6],[0.5,0.6]]	[[0.3,0.4],[0.2,0.7]]	[[0.3,0.5],[0.2,0.6]]
	e_2	[[0.2,0.7],[0.2,0.6]]	[[0.3,0.5],[0.5,0.8]]	[[0.4,0.6],[0.3,0.7]]	[[0.2,0.7],[0.3,0.8]]
	e_3	[[0.3,0.5],[0.1,0.4]]	[[0.2,0.6],[0.1,0.4]]	[[0.2,0.4],[0.3,0.4]]	[[0.2,0.5],[0.1,0.6]]
	e_4	[[0.4,0.6],[0.3,0.7]]	[[0.2,0.3],[0.3,0.8]]	[[0.3,0.7],[0.3,0.7]]	[[0.2,0.4],[0.5,0.8]]
C_2	e_1	[[0.7,0.8],[0.5,0.6]]	[[0.2,0.7],[0.5,0.7]]	[[0.3,0.4],[0.4,0.6]]	[[0.2,0.6],[0.4,0.7]]
	e_2	[[0.1,0.6],[0.4,0.5]]	[[0.1,0.4],[0.4,0.5]]	[[0.3,0.5],[0.2,0.3]]	[[0.1,0.5],[0.4,0.7]]
	e_3	[[0.4,0.6],[0.2,0.7]]	[[0.1,0.2],[0.2,0.9]]	[[0.3,0.5],[0.3,0.7]]	[[0.2,0.5],[0.1,0.5]]
	e_4	[[0.4,0.5],[0.3,0.7]]	[[0.3,0.5],[0.2,0.8]]	[[0.3,0.5],[0.2,0.4]]	[[0.2,0.5],[0.5,0.8]]
C_3	e_1	[[0.4,0.6],[0.2,0.5]]	[[0.2,0.7],[0.4,0.5]]	[[0.5,0.6],[0.4,0.5]]	[[0.2,0.5],[0.3,0.6]]
	e_2	[[0.2,0.3],[0.4,0.8]]	[[0.1,0.5],[0.3,0.7]]	[[0.3,0.5],[0.5,0.8]]	[[0.5,0.7],[0.4,0.5]]
	e_3	[[0.4,0.7],[0.3,0.7]]	[[0.4,0.7],[0.3,0.7]]	[[0.3,0.7],[0.3,0.8]]	[[0.2,0.4],[0.2,0.7]]
	e_4	[[0.3,0.6],[0.3,0.5]]	[[0.3,0.7],[0.2,0.6]]	[[0.2,0.5],[0.3,0.6]]	[[0.2,0.7],[0.3,0.6]]
C_4	e_1	[[0.2,0.4],[0.2,0.6]]	[[0.6,0.7],[0.5,0.8]]	[[0.3,0.4],[0.3,0.6]]	[[0.5,0.7],[0.6,0.8]]
	e_2	[[0.2,0.5],[0.4,0.7]]	[[0.4,0.5],[0.3,0.6]]	[[0.2,0.6],[0.2,0.4]]	[[0.2,0.5],[0.3,0.4]]
	e_3	[[0.5,0.7],[0.2,0.4]]	[[0.5,0.8],[0.2,0.6]]	[[0.1,0.3],[0.5,0.6]]	[[0.3,0.5],[0.1,0.5]]
	e_4	[[0.3,0.6],[0.3,0.5]]	[[0.1,0.7],[0.3,0.6]]	[[0.3,0.4],[0.3,0.7]]	[[0.2,0.5],[0.4,0.5]]

表 4-2 集成专家评价的毕达哥拉斯模糊决策矩阵

	S_1	S_2	S_3	S_4
C_1	[[0.3304,0.5813], [0.1712,0.5247]]	[[0.2351,0.5156], [0.2253,0.5891]]	[[0.2917,0.5613], [0.2881,0.5596]]	[[0.2124,0.5307], [0.2164,0.6928]]
C_2	[[0.4174,0.6053], [0.2844,0.6444]]	[[0.1941,0.4304], [0.2518,0.7532]]	[[0.3000,0.4914], [0.2521,0.4919]]	[[0.1846,0.5117], [0.2456,0.6369]]
C_3	[[0.3410,0.6107], [0.3051,0.6284]]	[[0.3145,0.6702], [0.2734,0.6463]]	[[0.3049,0.6061], [0.3420,0.7002]]	[[0.2937,0.5940], [0.2702,0.6153]]
C_4	[[0.3796,0.6165], [0.2595,0.4981]]	[[0.4234,0.7216], [0.2685,0.6175]]	[[0.2206,0.4226], [0.3393,0.5795]]	[[0.2885,0.5276], [0.2259,0.5012]]

表 4-3 规范化后得分函数矩阵

	S_1	S_2	S_3	S_4
C_1	0.6811	0.4941	0.9122	0.0000
C_2	0.2080	1.0000	1.0000	0.1156
C_3	0.0000	0.2919	0.3078	0.7228
C_4	1.0000	0.0000	0.0000	1.0000

表 4-4 准则间相关系数矩阵

	C_1	C_2	C_3	C_4
C_1	1.0000	0.5942	-0.7669	-0.5401
C_2	0.5942	1.0000	-0.1964	-0.9970
C_3	-0.7669	-0.1964	1.0000	0.1196
C_4	-0.5401	-0.9970	0.1196	1.0000

步骤 4 使用式 (4.7) 计算每个准则的标准偏差 σ_j ，式 (4.8) 计算准则指数 C_j ，使用式 (4.9) 得到准则客观权重 ω_2^j ，最后由式 (4.10) 得到准则组合权重 ω_j ，结果见表 4-5。

表 4-5 准则权重计算过程结果

	σ_j	C_j	ω_2^j	ω_j
C_1	0.1503	0.5579	0.1734	0.1841
C_2	0.2356	0.8481	0.2635	0.0933
C_3	0.0884	0.3397	0.1056	0.0747
C_4	0.3333	1.4725	0.4575	0.6479

步骤 5 使用式 (4.11) 对集成后 PF-DM 进行规范化处理，并使用 IVPFNWBM^{p,q} 获得备选方案的综合评价 IVPFN，综合评价结果如下：

$$\begin{aligned}
 IVPFN_{S_1} &= ([0.0147, 0.1446], [0.4165, 0.9070]), \\
 IVPFN_{S_2} &= ([0.0119, 0.2217], [0.5726, 0.9252]), \\
 IVPFN_{S_3} &= ([0.0043, 0.0614], [0.3439, 0.8299]), \\
 IVPFN_{S_4} &= ([0.0049, 0.0980], [0.4688, 0.9108]).
 \end{aligned}$$

由备选方案的综合评价 IVPFN 可得正理想解为

$$\delta^+ = ([0.0147, 0.2217], [0.3439, 0.8299]).$$

步骤 6 使用式 (2.3) 得到备选方案的综合评价值与正理想解 δ^+ 的距离 $d(S_i, \delta^+)$ ，根据 $d(S_i, \delta^+)$ 由小到大排序，可知方案最终排序为 $S_2 \succ S_1 \succ S_4 \succ S_3$ ，因此可选择的最优绿色供应商为 S_2 ，过程结果如表 4-6 所示。

4.3.2 鲁棒性检验

为了更清晰地观察参数在控制数据聚合过程中的交互作用，以及对极端值的敏感程度，对参数 p, q 选取 16 种不同的取值： $p = q = 1$ ； $p = 1, q = 2$ ； $p = 1, q = 3$ ； $p = 2, q = 1$ ； $p = q = 2$ ； $p = 2, q = 3$ ； $p = 2, q = 4$ ； $p = 3, q = 1$ ； $p = 3, q = 2$ ；

$p=q=3$; $p=3,q=4$; $p=4,q=1$; $p=4,q=2$; $p=4,q=3$; $p=q=4$ 。

在上述 16 种参数下观察结果的稳定性，排序结果如图 4-1 所示。可以发现，大部分参数下可选择的最优绿色供应商均为 S_2 ，因此方法具有稳定性。

表 4-6 与正理想解的距离和最终排名

	S_1	S_2	S_3	S_4
$d(S_i, \delta^+)$	0.1241	0.1132	0.1570	0.1508
排名	2	1	4	3

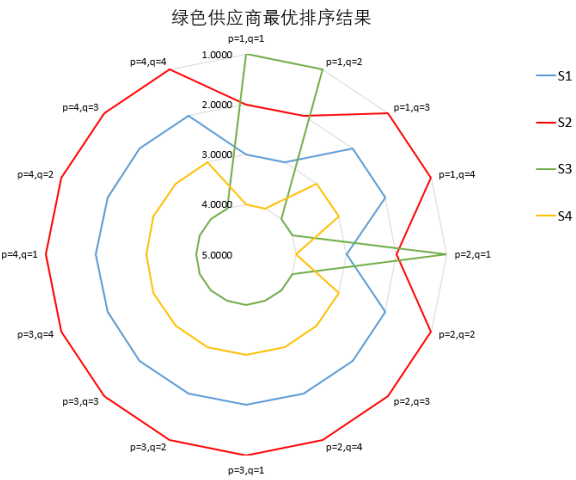


图 4-1 不同参数下备选方案排序结果

4.4 本章小结

本章在区间毕达哥拉斯模糊环境下，构建了基于 IVPFNWBM^{p,q} 算子的多准则群决策方法，使用 CRITIC 法和专家打分法计算准则的组合权重，结合 TOPSIS 思想对备选方案进行排序，最后选取了选择最优绿色供应商的案例进行实证研究，研究表明该方法具有稳定性。

在多准则决策中，通过区间的形式对多个方案进行综合评估，不仅能体现决策信息的模糊性，还能反映由于误差导致的不确定性，使决策结果更加可靠。并且 IVPF 使用区间数表示隶属度和非隶属度，也使得决策者在对方案的评价时有更大的灵活性。

第5章 基于赋权划分算子的毕达哥拉斯正态云群决策方法研究

为解决使用区间毕达哥拉斯模糊数表示决策信息时,隶属度和非隶属度的区间可能存在重叠或接近,会增加信息表达的模糊性的问题,本章给出一种新的 PNC 形式,考虑隶属度和非隶属度中存在模糊性与随机性的情形。并结合准则间的相互关系,扩展出毕达哥拉斯正态云加权算术平均算子(PNCWAA)和毕达哥拉斯正态云加权划分 BM 算子(PNCWPBM^{r,s}),构建了基于 PNC 的群决策过程。最后,通过案例展示该方法的有效性。采用 PNC 表示决策信息,隶属度和非隶属度均以云模型表示能更加有效地处理不确定信息。

5.1 毕达哥拉斯正态云

针对专家给出的准则评价信息可能存在误差问题,将毕达哥拉斯模糊集与云模型进行结合,提出一种新的 PNC,从而降低随机性导致的隶属度和非隶属度信息的扭曲。

定义 5.1.1^[23] 对于任意 $r, s \geq 0$ 并且 $r + s > 0$, n 维的 BM 聚合算子可看成一个映射 $BM: (R^+)^n \rightarrow R^+$, 具体形式如下:

$$BM^{r,s}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \left(\frac{1}{n(n-1)} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \alpha_i^r \alpha_j^s \right)^{\frac{1}{r+s}}. \quad (5.1)$$

定义 5.1.2^[24] 对于任意 $r, s \geq 0$ 且 $r + s > 0$, 存在一个集合

$T = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, 集合 T 划分为 d 种不同类型的子集即 $P_1, P_2, \dots, P_d$, 满足

$\bigcup_{h=1}^d P_h = T, P_{h_i} \cap P_{h_j} = \Phi, (i \neq j)$, 划分 BM 集成算子(PBM 算子)定义为

$$PBM^{r,s}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \frac{1}{d} \sum_{h=1}^d \left(\frac{1}{|P_h|} \sum_{i \in P_h} \alpha_i^r \frac{1}{|P_h|-1} \sum_{\substack{i \in P_h \\ i \neq j}} \alpha_j^s \right)^{\frac{1}{r+s}}, \quad (5.2)$$

其中 $|P_h|$ 是 P_h 划分的基数, d 表示划分的个数, $\sum_{h=1}^d |P_h| = n$ 。

定义 5.1.3^[53] 给定一个论域 U , X 为 U 中非空集, 则 X 上的 PNC 为

$$C = ((\mu_{Ex}, \mu_{En}, \mu_{He}), (\nu_{Ex}, \nu_{En}, \nu_{He})),$$

其中, 称 $(\mu_{Ex}, \mu_{En}, \mu_{He})$ 和 $(\nu_{Ex}, \nu_{En}, \nu_{He})$ 为隶属度云模型和非隶属度云模型。

μ_{Ex} 和 ν_{Ex} 是决策者给出的具有随机性和模糊性的决策信息, 用 μ_{En} 和 ν_{En} 来描述决策信息的离散程度, 用 μ_{He} 和 ν_{He} 来描述 μ_{En} 和 ν_{En} 的离散程度。参考文献[54], 可得到 PNC 以下运算规律:

定义 5.1.4 设 $C_i = ((\mu_{Ex_i}, \mu_{En_i}, \mu_{He_i}), (\nu_{Ex_i}, \nu_{En_i}, \nu_{He_i}))$, $i=1, 2, 3$, 为三个 PNC, λ 是一个非零实数, 进一步考虑 PNC 之间的相互关系, 定义 PNC 之间的相互作用规律如下:

$$\begin{aligned} (1) \quad C_1 \oplus C_2 &= \left(\begin{pmatrix} \sqrt{\mu_{Ex_1}^2 + \mu_{Ex_2}^2 - \mu_{Ex_1}^2 \mu_{Ex_2}^2}, \\ \mu_{En_1} + \mu_{En_2}, \mu_{He_1} + \mu_{He_2} \\ (\nu_{Ex_1} \nu_{Ex_2}, \nu_{En_1} + \nu_{En_2}, \nu_{He_1} + \nu_{He_2}) \end{pmatrix} \right); \\ (2) \quad C_1 \otimes C_2 &= \left(\begin{pmatrix} \mu_{Ex_1} \mu_{Ex_2}, \mu_{En_1} + \mu_{En_2}, \mu_{He_1} + \mu_{He_2}, \\ \sqrt{\nu_{Ex_1}^2 + \nu_{Ex_2}^2 - \nu_{Ex_1}^2 \nu_{Ex_2}^2}, \nu_{En_1} + \nu_{En_2}, \\ \nu_{He_1} + \nu_{He_2} \end{pmatrix} \right); \\ (3) \quad \lambda C &= \left(\begin{pmatrix} \left(\sqrt{1 - (1 - \mu_{Ex}^2)^\lambda}, \lambda \mu_{En}, \lambda \mu_{He} \right), \\ (\nu_{Ex}^\lambda, \lambda \nu_{En}, \lambda \nu_{He}) \end{pmatrix} \right); \\ (4) \quad C^\lambda &= \left(\begin{pmatrix} \mu_{Ex}^\lambda, \lambda \mu_{En}, \lambda \mu_{He}, \\ \left(\sqrt{1 - (1 - \nu_{Ex}^2)^\lambda}, \lambda \nu_{En}, \lambda \nu_{He} \right) \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

定理 5.1.1 设 $C_i = ((\mu_{Ex_i}, \mu_{En_i}, \mu_{He_i}), (\nu_{Ex_i}, \nu_{En_i}, \nu_{He_i}))$, $i=1, 2, 3$, 为三个 PNC,

λ 为非零实数, 则 PNC 之间的相互作用运算规律满足以下性质:

- (1) $C_1 \oplus C_2 = C_2 \oplus C_1$;
- (2) $C_1 \otimes C_2 = C_2 \otimes C_1$;
- (3) $\lambda(C_1 \oplus C_2) = \lambda C_1 \oplus \lambda C_2$;

$$(4) (C_1 \otimes C_2)^\lambda = C_1^\lambda \otimes C_2^\lambda;$$

$$(5) \lambda_1 C \oplus \lambda_2 C = (\lambda_1 + \lambda_2) C.$$

证:

(1) 由定义 5.1.4 可知

$$\begin{aligned} C_1 \oplus C_2 &= \left(\left(\sqrt{\mu_{Ex_1}^2 + \mu_{Ex_2}^2 - \mu_{Ex_1}^2 \mu_{Ex_2}^2}, \mu_{En_1} + \mu_{En_2}, \mu_{He_1} + \mu_{He_2} \right), \right. \\ &\quad \left. \left(v_{Ex_1} v_{Ex_2}, v_{En_1} + v_{En_2}, v_{He_1} + v_{He_2} \right) \right) \\ &= \left(\left(\sqrt{\mu_{Ex_2}^2 + \mu_{Ex_1}^2 - \mu_{Ex_2}^2 \mu_{Ex_1}^2}, \mu_{En_2} + \mu_{En_1}, \mu_{He_2} + \mu_{He_1} \right), \right. \\ &\quad \left. \left(v_{Ex_2} v_{Ex_1}, v_{En_2} + v_{En_1}, v_{He_2} + v_{He_1} \right) \right) \\ &= C_2 \oplus C_1. \end{aligned}$$

(2) 由定义 5.1.4 可得

$$\begin{aligned} C_1 \otimes C_2 &= \left(\left(\mu_{Ex_1} \mu_{Ex_2}, \mu_{En_1} + \mu_{En_2}, \mu_{He_1} + \mu_{He_2} \right), \right. \\ &\quad \left. \left(\sqrt{v_{Ex_1}^2 + v_{Ex_2}^2 - v_{Ex_1}^2 v_{Ex_2}^2}, v_{En_1} + v_{En_2}, v_{He_1} + v_{He_2} \right) \right) \\ &= \left(\left(\mu_{Ex_2} \mu_{Ex_1}, \mu_{En_2} + \mu_{En_1}, \mu_{He_2} + \mu_{He_1} \right), \right. \\ &\quad \left. \left(\sqrt{v_{Ex_2}^2 + v_{Ex_1}^2 - v_{Ex_2}^2 v_{Ex_1}^2}, v_{En_2} + v_{En_1}, v_{He_2} + v_{He_1} \right) \right) \\ &= C_2 \otimes C_1. \end{aligned}$$

(3) 由定义 5.1.4 知

$$\begin{aligned} \lambda(C_1 \oplus C_2) &= \left(\left(\sqrt{1 - (1 - \mu_{Ex_1}^2 - \mu_{Ex_2}^2 + \mu_{Ex_1}^2 \mu_{Ex_2}^2)}^\lambda, \lambda(\mu_{En_1} + \mu_{En_2}), \lambda(\mu_{He_1} + \mu_{He_2}) \right), \right. \\ &\quad \left. \left((v_{Ex_1} v_{Ex_2})^\lambda, \lambda(v_{En_1} + v_{En_2}), \lambda(v_{He_1} + v_{He_2}) \right) \right) \\ &= \left(\left(\sqrt{\left(1 - (1 - \mu_{Ex_1}^2)^\lambda \right) + \left(1 - (1 - \mu_{Ex_2}^2)^\lambda \right) - \left(1 - (1 - \mu_{Ex_1}^2)^\lambda \right) \left(1 - (1 - \mu_{Ex_2}^2)^\lambda \right)}^\lambda, \right. \right. \\ &\quad \left. \left(\lambda \mu_{En_1} + \lambda \mu_{En_2}, \lambda \mu_{He_1} + \lambda \mu_{He_2} \right), \right. \\ &\quad \left. \left(v_{Ex_1}^\lambda v_{Ex_2}^\lambda, \lambda v_{En_1} + \lambda v_{En_2}, \lambda v_{He_1} + \lambda v_{He_2} \right) \right) \\ &= \left(\left(\sqrt{1 - (1 - \mu_{Ex_1}^2)^\lambda}^\lambda, \lambda \mu_{En_1}, \lambda \mu_{He_1} \right), \right) \oplus \left(\left(\sqrt{1 - (1 - \mu_{Ex_2}^2)^\lambda}^\lambda, \lambda \mu_{En_2}, \lambda \mu_{He_2} \right), \right. \\ &\quad \left. \left(v_{Ex_1}^\lambda, \lambda v_{En_1}, \lambda v_{He_1} \right) \right) \oplus \left(\left(\sqrt{1 - (1 - \mu_{Ex_2}^2)^\lambda}^\lambda, \lambda \mu_{En_2}, \lambda \mu_{He_2} \right), \right. \\ &\quad \left. \left(v_{Ex_2}^\lambda, \lambda v_{En_2}, \lambda v_{He_2} \right) \right) \\ &= \lambda C_1 \oplus \lambda C_2. \end{aligned}$$

(4) 由定义 5.1.4 易知

$$\begin{aligned}
 (C_1 \otimes C_2)^\lambda &= \left(\left(\left(\mu_{Ex_1}^\lambda \mu_{Ex_2}^\lambda \right)^\lambda, \lambda(\mu_{En_1} + \mu_{En_2}), \lambda(\mu_{He_1} + \mu_{He_2}) \right), \right. \\
 &\quad \left. \left(\sqrt{1 - (1 - \nu_{Ex_1}^2 - \nu_{Ex_2}^2 + \nu_{Ex_1}^2 \nu_{Ex_2}^2)}^\lambda, \lambda(\nu_{En_1} + \nu_{En_2}), \lambda(\nu_{He_1} + \nu_{He_2}) \right) \right) \\
 &= \left(\left(\mu_{Ex_1}^\lambda \mu_{Ex_2}^\lambda, \lambda\mu_{En_1} + \lambda\mu_{En_2}, \lambda\mu_{He_1} + \lambda\mu_{He_2} \right), \right. \\
 &\quad \left. \left(\sqrt{1 - (1 - \nu_{Ex_1}^2)^\lambda + 1 - (1 - \nu_{Ex_2}^2)^\lambda - (1 - (1 - \nu_{Ex_1}^2)^\lambda)(1 - (1 - \nu_{Ex_2}^2)^\lambda)}^\lambda, \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \lambda\nu_{En_1} + \lambda\nu_{En_2}, \lambda\nu_{He_1} + \lambda\nu_{He_2} \right) \right) \\
 &= \left(\left(\mu_{Ex_1}^\lambda, \lambda\mu_{En_1}, \lambda\mu_{He_1} \right), \right. \\
 &\quad \left. \left(\sqrt{1 - (1 - \nu_{Ex_1}^2)^\lambda}, \lambda\nu_{En_1}, \lambda\nu_{He_1} \right) \right) \otimes \left(\left(\mu_{Ex_2}^\lambda, \lambda\mu_{En_2}, \lambda\mu_{He_2} \right), \right. \\
 &\quad \left. \left(\sqrt{1 - (1 - \nu_{Ex_2}^2)^\lambda}, \lambda\nu_{En_2}, \lambda\nu_{He_2} \right) \right) \\
 &= C_1^\lambda \otimes C_2^\lambda.
 \end{aligned}$$

(5) 由定义 5.1.4 可得

$$\begin{aligned}
 (\lambda_1 + \lambda_2)C_3 &= \left(\left(\sqrt{1 - (1 - \mu_{Ex_3}^2)^{\lambda_1 + \lambda_2}}, (\lambda_1 + \lambda_2)\mu_{En_3}, (\lambda_1 + \lambda_2)\mu_{He_3} \right), \right. \\
 &\quad \left. \left(\nu_{Ex_3}^{\lambda_1 + \lambda_2}, (\lambda_1 + \lambda_2)\nu_{En_3}, (\lambda_1 + \lambda_2)\nu_{He_3} \right) \right) \\
 &= \left(\left(\sqrt{1 - (1 - \mu_{Ex_3}^2)^{\lambda_1} + 1 - (1 - \mu_{Ex_3}^2)^{\lambda_2} - (1 - (1 - \mu_{Ex_3}^2)^{\lambda_1})(1 - (1 - \mu_{Ex_3}^2)^{\lambda_2})}^\lambda, \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \lambda_1\mu_{En_3} + \lambda_2\mu_{En_3}, \lambda_1\mu_{He_3} + \lambda_2\mu_{He_3} \right), \right. \\
 &\quad \left. \left(\nu_{Ex_3}^{\lambda_1} \nu_{Ex_3}^{\lambda_2}, \lambda_1\nu_{En_3} + \lambda_2\nu_{En_3}, \lambda_1\nu_{He_3} + \lambda_2\nu_{He_3} \right) \right) \\
 &= \left(\left(\sqrt{1 - (1 - \mu_{Ex_3}^2)^{\lambda_1}}, \lambda_1\mu_{En_3}, \lambda_1\mu_{He_3} \right), \right. \\
 &\quad \left. \left(\nu_{Ex_3}^{\lambda_1}, \lambda_1\nu_{En_3}, \lambda_1\nu_{He_3} \right) \right) \oplus \left(\left(\sqrt{1 - (1 - \mu_{Ex_3}^2)^{\lambda_2}}, \lambda_2\mu_{En_3}, \lambda_2\mu_{He_3} \right), \right. \\
 &\quad \left. \left(\nu_{Ex_3}^{\lambda_2}, \lambda_2\nu_{En_3}, \lambda_2\nu_{He_3} \right) \right) \\
 &= \lambda_1 C_3 \oplus \lambda_2 C_3.
 \end{aligned}$$

5.2 基于 PNCWAA 算子和 PNCWPBM^{r,s} 算子的群决策模型

5.2.1 PNC 集成算子

为了给出备选方案的综合评价结果，需要选择适当的算子来集成含模糊信息的 PNC。参考文献[37]提出的 PNCWAA 算子给出 PNCWAA 的拓展形式。

定义 5.2.1 设 $X = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ 为一组 PNCs 的集合，此时 PNCWAA 算子被定义为：

$$PNCWAA(C_1, C_2, \dots, C_n) = \sum_{i=1}^n \omega_i C_i \quad (5.3)$$

其中 ω_i 为 C_i 的权重向量, $i=1, 2, \dots, n$, 满足 $0 \leq \omega_i \leq 1$ 和 $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ 。

定理 5.2.1 设 $X = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ 为一组 PNCs 的集合。那么, PNCs 的汇总结果仍然是 PNC, 其形式如下:

$$PNCWAA(C_1, C_2, \dots, C_n) = \left(\left(\left(1 - \prod_{i=1}^n (1 - \mu_{Ex_i}^2)^{\omega_i} \right)^{\frac{1}{2}}, \sum_{i=1}^n \omega_i \mu_{En_i}, \sum_{i=1}^n \omega_i \mu_{He_i} \right), \left(\prod_{i=1}^n \nu_{Ex_i}^{\omega_i}, \sum_{i=1}^n \omega_i \nu_{En_i}, \sum_{i=1}^n \omega_i \nu_{He_i} \right) \right). \quad (5.4)$$

证明:

$$\begin{aligned} PNCWAA(C_1, C_2, \dots, C_n) &= \sum_{i=1}^n \omega_i C_i = \sum_{i=1}^n \left(\left(\left(1 - (1 - \mu_{Ex_i}^2)^{\omega_i} \right)^{\frac{1}{2}}, \omega_i \mu_{En_i}, \omega_i \mu_{He_i} \right), \left(\nu_{Ex_i}^{\omega_i}, \omega_i \nu_{En_i}, \omega_i \nu_{He_i} \right) \right) \\ &= \left(\left(\left(1 - \prod_{i=1}^n (1 - \mu_{Ex_i}^2)^{\omega_i} \right)^{\frac{1}{2}}, \sum_{i=1}^n \omega_i \mu_{En_i}, \sum_{i=1}^n \omega_i \mu_{He_i} \right), \left(\prod_{i=1}^n \nu_{Ex_i}^{\omega_i}, \sum_{i=1}^n \omega_i \nu_{En_i}, \sum_{i=1}^n \omega_i \nu_{He_i} \right) \right). \end{aligned}$$

定义 5.2.2 设 $X = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ 为 PNC 的集合, 且 $r, s \geq 0$ 并满足 $r + s > 0$,

它被划分为 d 种不同的类型即 $P_1, P_2, \dots, P_d$, 满足 $\bigcup_{h=1}^d P_h = X$ 。此时 PNCWPBM

r, s 算子被定义为:

$$PNCWPBM^{r,s}(C_1, C_2, \dots, C_n) = \frac{1}{d} \left(\sum_{h=1}^d \left(\frac{1}{|P_h|(|P_h|-1)} \sum_{\substack{i,j \in P_h \\ i \neq j}} ((\omega_i C_i)^r \otimes (\omega_j C_j)^s) \right)^{\frac{1}{r+s}} \right). \quad (5.5)$$

其中 $C_i = ((\mu_{Ex_i}, \mu_{En_i}, \mu_{He_i}), (\nu_{Ex_i}, \nu_{En_i}, \nu_{He_i}))$, $(i=1, 2, \dots, n)$, $|P_h|$ 是 P_h 分区的基数, d 表示分区的个数, $\sum_{h=1}^d |P_h| = n$ 。 $\omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ 是 $PNC \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ 的权重向量, 满足 $0 \leq \omega_j \leq 1$, $j=1, 2, \dots, n$ 和 $\sum_{j=1}^n \omega_j = 1$ 。

定理 5.2.2 设 $X = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ 为 PNC 的集合, 任意 $r, s \geq 0$ 且 $r+s > 0$, 则 PNC 集成结果亦为 PNC, 形式如下:

$$\begin{aligned}
 PNCWPBM^{r,s}(C_1, C_2, \dots, C_n) &= \frac{1}{d} \sum_{h=1}^d \left(\frac{1}{|P_h|(|P_h|-1)} \sum_{\substack{i,j \in P_h \\ i \neq j}} (\omega_i C_i)^r \otimes (\omega_j C_j)^s \right)^{\frac{1}{r+s}} \\
 &= \left(\left(\left(1 - \left(\prod_{h=1}^d 1 - t^2 \right)^{\frac{1}{d}} \right)^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{d} \sum_{h=1}^d \frac{1}{r+s} \left(\frac{1}{|P_h|(|P_h|-1)} \sum_{\substack{i,j \in P_h \\ i \neq j}} r \cdot \omega_i \cdot \mu_{En_i} + s \cdot \omega_j \cdot \mu_{En_j} \right) \right), \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{d} \sum_{h=1}^d \frac{1}{r+s} \left(\frac{1}{|P_h|(|P_h|-1)} \sum_{\substack{i,j \in P_h \\ i \neq j}} r \cdot \omega_i \cdot \mu_{He_i} + s \cdot \omega_j \cdot \mu_{He_j} \right) \right) \\
 &= \left(\left(\left(\prod_{h=1}^d k \right)^{\frac{1}{d}}, \frac{1}{d} \sum_{h=1}^d \frac{1}{r+s} \left(\frac{1}{|P_h|(|P_h|-1)} \sum_{\substack{i,j \in P_h \\ i \neq j}} r \cdot \omega_i \cdot \nu_{En_i} + s \cdot \omega_j \cdot \nu_{En_j} \right) \right), \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{d} \sum_{h=1}^d \frac{1}{r+s} \left(\frac{1}{|P_h|(|P_h|-1)} \sum_{\substack{i,j \in P_h \\ i \neq j}} r \cdot \omega_i \cdot \nu_{He_i} + s \cdot \omega_j \cdot \nu_{He_j} \right) \right) \\
 &= ((\mu_{Ex}, \mu_{En}, \mu_{He}), (\nu_{Ex}, \nu_{En}, \nu_{He})).
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\text{其中, } t = \left(\left(1 - (1 - \gamma^2)^{\frac{1}{|P_h|(|P_h|-1)}} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{r+s}}, \quad k = \left(1 - \left(\eta^{\frac{1}{|P_h|(|P_h|-1)}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{r+s}} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\gamma = \left(1 - \prod_{\substack{i,j \in P_h \\ i \neq j}} 1 - \left(\left(1 - (1 - \mu_{Ex_i}^2)^{\omega_i} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^r \left(\left(1 - (1 - \mu_{Ex_j}^2)^{\omega_j} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^s \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\eta = \prod_{\substack{i, j \in P_h \\ i \neq j}} \left(1 - \left(1 - \left(\nu_{Ex_i}^{\omega_i} \right)^2 \right)^r \left(1 - \left(\nu_{Ex_j}^{\omega_j} \right)^2 \right)^s \right)^{\frac{1}{2}}.$$

证明：通过定义 5.1.4，我们可以获得

$$\omega_i C_i = \left(\left(\left(1 - \left(1 - \mu_{Ex_i}^2 \right)^{\omega_i} \right)^{\frac{1}{2}}, \omega_i \mu_{En_i}, \omega_i \mu_{He_i} \right), \left(\left(\left(1 - \mu_{Ex_i}^2 \right)^{\omega_i} - \left(1 - \mu_{Ex_i}^2 - \nu_{Ex_i}^2 \right)^{\omega_i} \right)^{\frac{1}{2}}, \omega_i \nu_{En_i}, \omega_i \nu_{He_i} \right) \right), \text{ 因此}$$

$$(\omega_i C_i)^r = \left(\left(\left(\left(1 - \left(1 - \mu_{Ex_i}^2 \right)^{\omega_i} + \left(1 - \mu_{Ex_i}^2 - \nu_{Ex_i}^2 \right)^{\omega_i} \right)^r - \left(1 - \mu_{Ex_i}^2 - \nu_{Ex_i}^2 \right)^{\omega_i} \right)^{\frac{1}{2}}, r \omega_i \mu_{En_i}, r \omega_i \mu_{He_i} \right), \left(\left(1 - \left(1 - \left(1 - \mu_{Ex_i}^2 \right)^{\omega_i} + \left(1 - \mu_{Ex_i}^2 - \nu_{Ex_i}^2 \right)^{\omega_i} \right)^r \right)^{\frac{1}{2}}, r \omega_i \nu_{En_i}, r \omega_i \nu_{He_i} \right) \right),$$

此时 $\omega_j C_j$ 与 $(\omega_j C_j)^s$ 形式同上。令 $\mu_{Ex_i}((\omega_i C_i)^r) = \gamma_i$, $\nu_{Ex_i}((\omega_i C_i)^r) = \eta_i$,

$\mu_{Ex_j}((\omega_j C_j)^s) = \gamma_j$, $\nu_{Ex_j}((\omega_j C_j)^s) = \eta_j$, 因此我们可以得到

$$(\omega_i \alpha_i)^r \otimes (\omega_j \alpha_j)^s = \left(\left(\left(\gamma_i^2 + \gamma_j^2 - \gamma_i^2 \gamma_j^2 - \gamma_i^2 \eta_j^2 - \gamma_j^2 \eta_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}, r \omega_i \mu_{En_i} + s \omega_j \mu_{En_j}, r \omega_i \mu_{He_i} + s \omega_j \mu_{He_j} \right), \left(\left(\eta_i^2 + \eta_j^2 - \eta_i^2 \eta_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}, r \omega_i \nu_{En_i} + s \omega_j \nu_{En_j}, r \omega_i \nu_{He_i} + s \omega_j \nu_{He_j} \right) \right).$$

令 $\mu_{Ex}((\omega_i \alpha_i)^r \otimes (\omega_j \alpha_j)^s) = t$, $\nu_{Ex}((\omega_i \alpha_i)^r \otimes (\omega_j \alpha_j)^s) = k$ 再结合数学归纳法思想,

$$\sum_{\substack{i,j \in P_h \\ i \neq j}} \left((\omega_i \alpha_i)^r \otimes (\omega_j \alpha_j)^s \right) = \left(\begin{array}{c} \left(\left(1 - \prod_{\substack{i,j \in P_h \\ i \neq j}} 1 - t^2 \right)^{\frac{1}{2}} , \sum_{\substack{i,j \in P_h \\ i \neq j}} r \omega_i \mu_{En_i} + s \omega_j \mu_{En_j} , \right. \\ \left. \sum_{\substack{i,j \in P_h \\ i \neq j}} r \omega_i \mu_{He_i} + s \omega_j \mu_{He_j} \right) \\ \left(\left(\prod_{\substack{i,j \in P_h \\ i \neq j}} 1 - t^2 - \prod_{\substack{i,j \in P_h \\ i \neq j}} 1 - t^2 - k^2 \right)^{\frac{1}{2}} , \sum_{\substack{i,j \in P_h \\ i \neq j}} r \omega_i \nu_{En_i} + s \omega_j \nu_{En_j} , \right. \\ \left. \sum_{\substack{i,j \in P_h \\ i \neq j}} r \omega_i \nu_{He_i} + s \omega_j \nu_{He_j} \right) \end{array} \right),$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|P_h|(|P_h|-1)} \sum_{\substack{i,j \in P_h \\ i \neq j}} \left((\omega_i \alpha_i)^r \otimes (\omega_j \alpha_j)^s \right) \\ &= \left(\begin{array}{c} \left(\left(1 - \left(\prod_{\substack{i,j \in P_h \\ i \neq j}} 1 - t^2 \right)^{\frac{1}{|P_h|(|P_h|-1)}} \right)^{\frac{1}{2}} , \frac{1}{|P_h|(|P_h|-1)} \sum_{\substack{i,j \in P_h \\ i \neq j}} r \omega_i \mu_{En_i} + s \omega_j \mu_{En_j} , \right. \\ \left. \frac{1}{|P_h|(|P_h|-1)} \sum_{\substack{i,j \in P_h \\ i \neq j}} r \omega_i \mu_{He_i} + s \omega_j \mu_{He_j} \right) \\ \left(\left(\left(\prod_{\substack{i,j \in P_h \\ i \neq j}} 1 - t^2 \right)^{\frac{1}{|P_h|(|P_h|-1)}} - \left(\prod_{\substack{i,j \in P_h \\ i \neq j}} 1 - t^2 - k^2 \right)^{\frac{1}{|P_h|(|P_h|-1)}} \right)^{\frac{1}{2}} , \right. \\ \left. \frac{1}{|P_h|(|P_h|-1)} \sum_{\substack{i,j \in P_h \\ i \neq j}} r \omega_i \nu_{En_i} + s \omega_j \nu_{En_j} , \frac{1}{|P_h|(|P_h|-1)} \sum_{\substack{i,j \in P_h \\ i \neq j}} r \omega_i \nu_{He_i} + s \omega_j \nu_{He_j} \right) \end{array} \right). \end{aligned}$$

$$\text{令 } \mu_{\text{Ex}} \left(\frac{1}{|P_h|(|P_h|-1)} \sum_{\substack{i,j \in P_h \\ i \neq j}} \left((\omega_i \alpha_i)^r \otimes (\omega_j \alpha_j)^s \right) \right) = \delta ,$$

$$\nu_{\text{Ex}} \left(\frac{1}{|P_h|(|P_h|-1)} \sum_{\substack{i,j \in P_h \\ i \neq j}} \left((\omega_i \alpha_i)^r \otimes (\omega_j \alpha_j)^s \right) \right) = \xi ,$$

$$\text{则 } \left(\frac{1}{|P_h|(|P_h|-1)} \sum_{\substack{i,j \in P_h \\ i \neq j}} \left((\omega_i \alpha_i)^r \otimes (\omega_j \alpha_j)^s \right) \right)^{\frac{1}{r+s}}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\left(\left((1-\xi^2)^{\frac{1}{r+s}} - (1-\xi^2 - \delta^2)^{\frac{1}{r+s}} \right)^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{r+s} \left(\frac{1}{|P_h|(|P_h|-1)} \left(\sum_{\substack{i,j \in P_h \\ i \neq j}} r\omega_i \mu_{En_i} + s\omega_j \mu_{En_j} \right) \right) \right) \right), \\
 & \left(\frac{1}{r+s} \left(\frac{1}{|P_h|(|P_h|-1)} \left(\sum_{\substack{i,j \in P_h \\ i \neq j}} r\omega_i \mu_{He_i} + s\omega_j \mu_{He_j} \right) \right) \right) \\
 & \left(\left(1 - (1-\xi^2)^{\frac{1}{r+s}} \right)^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{r+s} \left(\frac{1}{|P_h|(|P_h|-1)} \left(\sum_{\substack{i,j \in P_h \\ i \neq j}} r\omega_i v_{En_i} + s\omega_j v_{En_j} \right) \right) \right), \\
 & \left(\frac{1}{r+s} \left(\frac{1}{|P_h|(|P_h|-1)} \left(\sum_{\substack{i,j \in P_h \\ i \neq j}} r\omega_i v_{He_i} + s\omega_j v_{He_j} \right) \right) \right) \\
 & \sum_{h=1}^d \left(\frac{1}{|P_h|(|P_h|-1)} \sum_{\substack{i,j \in P_h \\ i \neq j}} \left((\omega_i \alpha_i)^r \otimes (\omega_j \alpha_j)^s \right) \right)^{\frac{1}{r+s}} \\
 & \left(\left(1 - \prod_{h=1}^d \left(1 - (1-\xi^2)^{\frac{1}{r+s}} + (1-\xi^2 - \delta^2)^{\frac{1}{r+s}} \right) \right)^{\frac{1}{2}}, \right. \\
 & \left. \sum_{h=1}^d \frac{1}{r+s} \left(\frac{1}{|P_h|(|P_h|-1)} \left(\sum_{\substack{i,j \in P_h \\ i \neq j}} r\omega_i \mu_{En_i} + s\omega_j \mu_{En_j} \right) \right) \right), \\
 & \left. \sum_{h=1}^d \frac{1}{r+s} \left(\frac{1}{|P_h|(|P_h|-1)} \left(\sum_{\substack{i,j \in P_h \\ i \neq j}} r\omega_i \mu_{He_i} + s\omega_j \mu_{He_j} \right) \right) \right) \\
 & \left(\left(\prod_{h=1}^d \left(1 - (1-\xi^2)^{\frac{1}{r+s}} + (1-\xi^2 - \delta^2)^{\frac{1}{r+s}} \right) - \prod_{h=1}^d (1-\xi^2 - \delta^2)^{\frac{1}{r+s}} \right)^{\frac{1}{2}}, \right. \\
 & \left. \sum_{h=1}^d \frac{1}{r+s} \left(\frac{1}{|P_h|(|P_h|-1)} \left(\sum_{\substack{i,j \in P_h \\ i \neq j}} r\omega_i v_{En_i} + s\omega_j v_{En_j} \right) \right) \right), \\
 & \left. \sum_{h=1}^d \frac{1}{r+s} \left(\frac{1}{|P_h|(|P_h|-1)} \left(\sum_{\substack{i,j \in P_h \\ i \neq j}} r\omega_i v_{He_i} + s\omega_j v_{He_j} \right) \right) \right)
 \end{aligned}$$

最后

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{d} \left(\sum_{h=1}^d \left(\frac{1}{|P_h|(|P_h|-1)} \sum_{\substack{i,j \in P_h \\ i \neq j}} \left((\omega_i \alpha_i)^r \otimes (\omega_j \alpha_j)^s \right) \right)^{\frac{1}{r+s}} \right) \\
 & \left(\left(\left(1 - \left(\prod_{h=1}^d \left(1 - (1 - \xi^2)^{\frac{1}{r+s}} + (1 - \xi^2 - \delta^2)^{\frac{1}{r+s}} \right) \right)^{\frac{1}{d}} \right)^{\frac{1}{2}}, \right. \right. \\
 & \left. \frac{1}{d} \sum_{h=1}^d \frac{1}{r+s} \left(\frac{1}{|P_h|(|P_h|-1)} \left(\sum_{\substack{i,j \in P_h \\ i \neq j}} r \cdot \omega_i \cdot \mu_{En_i} + s \cdot \omega_j \cdot \mu_{En_j} \right) \right) \right), \\
 & \left. \frac{1}{d} \sum_{h=1}^d \frac{1}{r+s} \left(\frac{1}{|P_h|(|P_h|-1)} \left(\sum_{\substack{i,j \in P_h \\ i \neq j}} r \cdot \omega_i \cdot \mu_{He_i} + s \cdot \omega_j \cdot \mu_{He_j} \right) \right) \right) \right) \\
 & = \left(\left(\left(\left(\prod_{h=1}^d \left(1 - (1 - \xi^2)^{\frac{1}{r+s}} + (1 - \xi^2 - \delta^2)^{\frac{1}{r+s}} \right) \right)^{\frac{1}{d}} - \left(\prod_{h=1}^d (1 - \xi^2 - \delta^2)^{\frac{1}{r+s}} \right)^{\frac{1}{d}} \right)^{\frac{1}{2}}, \right. \right. \\
 & \left. \frac{1}{d} \sum_{h=1}^d \frac{1}{r+s} \left(\frac{1}{|P_h|(|P_h|-1)} \left(\sum_{\substack{i,j \in P_h \\ i \neq j}} r \cdot \omega_i \cdot \nu_{En_i} + s \cdot \omega_j \cdot \nu_{En_j} \right) \right) \right), \\
 & \left. \frac{1}{d} \sum_{h=1}^d \frac{1}{r+s} \left(\frac{1}{|P_h|(|P_h|-1)} \left(\sum_{\substack{i,j \in P_h \\ i \neq j}} r \cdot \omega_i \cdot \nu_{He_i} + s \cdot \omega_j \cdot \nu_{He_j} \right) \right) \right) \right).
 \end{aligned}$$

因此，我们完成定理 5.2.2 的证明，PNCs 的综合结果仍然是一个 PNC。

此外，考虑 PNCWPBM^{r,s} 算子的其他性质，研究如下。

定理 5.2.3 幂等性 假设任意 $C_i = ((\mu_{Ex_i}, \mu_{En_i}, \mu_{He_i}), (\nu_{Ex_i}, \nu_{En_i}, \nu_{He_i}))$ 与

$C = ((\mu_{Ex}, \mu_{En}, \mu_{He}), (\nu_{Ex}, \nu_{En}, \nu_{He}))$ 均相同，则 $PNCWPBM^{r,s}(C_1, C_2, \dots, C_n) = C$ 。

证明：假设 $\omega_i = \frac{1}{n}$ ，则

$$\left(1 - \left(\prod_{h=1}^d \left(1 - (1 - \xi^2)^{\frac{1}{r+s}} + (1 - \xi^2 - \delta^2)^{\frac{1}{r+s}} \right) \right)^{\frac{1}{d}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(1 - \prod_{h=1}^d \left(1 - \left(1 - \left(\prod_{\substack{i,j \in P_h \\ i \neq j}} 1 - t^2 \right)^{\frac{1}{|P_h|(|P_h|-1)}} + \left(\prod_{\substack{i,j \in P_h \\ i \neq j}} 1 - t^2 - k^2 \right)^{\frac{1}{|P_h|(|P_h|-1)}} \right)^{\frac{1}{r+s}} \right)^{\frac{1}{d}} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\text{又因为 } t = \left(\left(1 - (1 - \mu_{Ex}^2)^{\frac{1}{n}} + (1 - \mu_{Ex}^2 - \nu_{Ex}^2)^{\frac{1}{n}} \right)^{r+s} - \left(1 - \mu_{Ex}^2 - \nu_{Ex}^2 \right)^{\frac{1}{n}} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$k = \left(1 + \left(1 - (1 - \mu_{Ex}^2)^{\frac{1}{n}} + (1 - \mu_{Ex}^2 - \nu_{Ex}^2)^{\frac{1}{n}} \right)^{r+s} \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ 所以}$$

$$\left(1 - \left(\prod_{h=1}^d \left(1 - (1 - \xi^2)^{\frac{1}{r+s}} + (1 - \xi^2 - \delta^2)^{\frac{1}{r+s}} \right) \right)^{\frac{1}{d}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(1 - \prod_{h=1}^d \left(1 - \left(1 - \left(\prod_{\substack{i,j \in P_h \\ i \neq j}} \left(1 - \left(1 - (1 - \mu_{Ex}^2)^{\frac{1}{n}} + (1 - \mu_{Ex}^2 - \nu_{Ex}^2)^{\frac{1}{n}} \right)^{r+s} \right)^{\frac{1}{|P_h|(|P_h|-1)}} + \left(1 - \mu_{Ex}^2 - \nu_{Ex}^2 \right)^{\frac{1}{n}} \right)^{r+s} \right)^{\frac{1}{r+s}} \right)^{\frac{1}{d}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \mu_{Ex};$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{d} \sum_{h=1}^d \frac{1}{r+s} \left(\frac{1}{|P_h|(|P_h|-1)} \left(\sum_{\substack{i,j \in P_h \\ i \neq j}} r \cdot \omega_i \cdot \mu_{En_i} + s \cdot \omega_j \cdot \mu_{En_j} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{d} \sum_{h=1}^d \frac{1}{r+s} \left(\frac{1}{|P_h|(|P_h|-1)} \left(\sum r \cdot \frac{1}{n} \cdot \mu_{En} + s \cdot \frac{1}{n} \cdot \mu_{En} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{d} \sum_{h=1}^d \frac{1}{r+s} \left(\frac{1}{|P_h|(|P_h|-1)} \mu_{En} (r+s) \right) \\
 &= \frac{1}{d} \sum_{h=1}^d \frac{1}{|P_h|(|P_h|-1)} \mu_{En} = \mu_{En}; \\
 & \frac{1}{d} \sum_{h=1}^d \frac{1}{r+s} \left(\frac{1}{|P_h|(|P_h|-1)} \left(\sum_{\substack{i,j \in P_h \\ i \neq j}} r \cdot \omega_i \cdot \mu_{He_i} + s \cdot \omega_j \cdot \mu_{He_j} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{d} \sum_{h=1}^d \frac{1}{r+s} \left(\frac{1}{|P_h|(|P_h|-1)} \left(\sum r \cdot \frac{1}{n} \cdot \mu_{He} + s \cdot \frac{1}{n} \cdot \mu_{He} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{d} \sum_{h=1}^d \frac{1}{r+s} \left(\frac{1}{|P_h|(|P_h|-1)} \mu_{He} (r+s) \right) \\
 &= \frac{1}{d} \sum_{h=1}^d \frac{1}{|P_h|(|P_h|-1)} \mu_{He} = \mu_{He} .
 \end{aligned}$$

$(\nu_{Ex}, \nu_{En}, \nu_{He})$ 证明同上, 因此 $PNCWPBM^{r,s}(C_1, C_2, \dots, C_n) = C$ 得证。

定理 5.2.4 可交换性 假设 $C_i = ((\mu_{Ex_i}, \mu_{En_i}, \mu_{He_i}), (\nu_{Ex_i}, \nu_{En_i}, \nu_{He_i}))$, $i=1, 2, \dots, n$ 是 PNCs 的集合, $(C_1^*, C_2^*, \dots, C_n^*)$ 是 $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ 的一个任意排列, 如果 C_i 与 $C_i^* (i=1, 2, \dots, n)$ 具有相同的分区, 那么

$$PNCWPBM^{r,s}(C_1, C_2, \dots, C_n) = PNCWPBM^{r,s}(C_1^*, C_2^*, \dots, C_n^*).$$

证明:

$$\begin{aligned}
 PNCWPBM^{r,s}(C_1, C_2, \dots, C_n) &= \frac{1}{d} \left(\sum_{h=1}^d \left(\frac{1}{|P_h|(|P_h|-1)} \sum_{\substack{i,j \in P_h \\ i \neq j}} ((\omega_i C_i)^r \otimes (\omega_j C_j)^s) \right)^{\frac{1}{r+s}} \right) \\
 &= \frac{1}{d} \left(\sum_{h=1}^d \left(\frac{1}{|P_h|(|P_h|-1)} \sum_{\substack{i,j \in P_h \\ i \neq j}} ((\omega_i C_i^*)^r \otimes (\omega_j C_j^*)^s) \right)^{\frac{1}{r+s}} \right)
 \end{aligned}$$

$$= PNCWPBM^{r,s}(C_1^*, C_2^*, \dots, C_n^*).$$

因此，定理 5.2.4 得证。

定理 5.2.5 单调性 假设 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 和 $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ 是两组 PNC 的集合，并且对于任意 $i (i=1, 2, \dots, n)$ ，若存在 $\mu_{Ex_{ai}} \geq \mu_{Ex_{\beta i}}, \nu_{Ex_{ai}} \leq \nu_{Ex_{\beta i}}$ ，

$$\mu_{En_{ai}} \leq \mu_{En_{\beta i}}, \nu_{En_{ai}} \leq \nu_{En_{\beta i}}, \mu_{He_{ai}} \leq \mu_{He_{\beta i}}, \nu_{He_{ai}} \leq \nu_{He_{\beta i}}, \text{ 则}$$

$$PNCWPBM^{r,s}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \geq PNCWPBM^{r,s}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n).$$

证明：假设 $\mu_{Ex_{ai}} \geq \mu_{Ex_{\beta i}}, \nu_{Ex_{ai}} \leq \nu_{Ex_{\beta i}}, \mu_{En_{ai}} \leq \mu_{En_{\beta i}}, \nu_{En_{ai}} \leq \nu_{En_{\beta i}}$ ，

$$\mu_{He_{ai}} \leq \mu_{He_{\beta i}}, \nu_{He_{ai}} \leq \nu_{He_{\beta i}}, \text{ 则由定理 5.2.2 可知聚合后}$$

$$\mu_{Ex_{\alpha}} \geq \mu_{Ex_{\beta}}, \nu_{Ex_{\alpha}} \leq \nu_{Ex_{\beta}}, \mu_{En_{\alpha}} \leq \mu_{En_{\beta}}, \nu_{En_{\alpha}} \leq \nu_{En_{\beta}}, \mu_{He_{\alpha}} \leq \mu_{He_{\beta}}, \nu_{He_{\alpha}} \leq \nu_{He_{\beta}};$$

因此，可认为 $\tilde{\alpha} \geq \tilde{\beta}$ ，同时，结合定理 5.2.3、5.2.4，所以

$$PNCWPBM^{r,s}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \geq PNCWPBM^{r,s}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n).$$

因此，定理 5.2.5 得证。

定理 5.2.6 有界性 假设 $C_i = ((\mu_{Ex_i}, \mu_{En_i}, \mu_{He_i}), (\nu_{Ex_i}, \nu_{En_i}, \nu_{He_i}))$, $i=1, 2, \dots, n$ 是 PNCs 的集合， $C^- = \min_{1 \leq i \leq n} \{C_i\}$ ， $C^+ = \max_{1 \leq i \leq n} \{C_i\}$ ，则

$$C^- \leq PNCWPBM^{r,s}(C_1, C_2, \dots, C_n) \leq C^+.$$

证明：假设 $C_i = ((\mu_{Ex_i}, \mu_{En_i}, \mu_{He_i}), (\nu_{Ex_i}, \nu_{En_i}, \nu_{He_i})) = C^+$, $i=1, 2, \dots, n$ ，由定理 5.2.2

可得 $PNCWPBM^{r,s}(C^+, C^+, \dots, C^+) = C^+$ ，并且

$$PNCWPBM^{r,s}(C_1, C_2, \dots, C_n) \leq PNCWPBM^{r,s}(C^+, C^+, \dots, C^+) = C^+;$$

同理假设 $C_i = ((\mu_{Ex_i}, \mu_{En_i}, \mu_{He_i}), (\nu_{Ex_i}, \nu_{En_i}, \nu_{He_i})) = C^-$, $i=1, 2, \dots, n$ ，可得

$$PNCWPBM^{r,s}(C^-, C^-, \dots, C^-) = C^-，\text{ 并且}$$

$$PNCWPBM^{r,s}(C_1, C_2, \dots, C_n) \geq PNCWPBM^{r,s}(C^-, C^-, \dots, C^-) = C^-，$$

综上，可得 $C^- \leq PNCWPBM^{r,s}(C_1, C_2, \dots, C_n) \leq C^+$ 。

因此，定理 5.2.6 得证。

5.2.2 决策过程与步骤

毕达哥拉斯模糊信息的多准则群决策方法利用 PNCWAA 与 PNCWPBM^[53]算子给出专家综合评价结果，结合得分函数^[53]将备选方案进行排序。

设备选方案 $S = \{s_i\}_{i=1}^m$ ，决策者 $E = \{e_\tau\}_{\tau=1}^k$ 和准则 $C = \{c_j\}_{j=1}^n$ ，准则权重为 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$ ，其中 $\omega_j > 0$, ($j=1, 2, \dots, n$)， $\sum_{j=1}^n \omega_j = 1$ ，则决策者根据准则为每个备选方案进行评级。评级结果为一个 PNC。

本文采用黄金分割法^[55]构造评价语言变量对应的 PNC，决策者的语言评估标度为 n ，专家指定有效论域为 $[X_{\min}, X_{\max}]$ ，在有效论域上生成 n 朵云。给定有效论域 $U = [0.10, 0.90]$ ， $He_0 = 0.1$ ，生成粒度为 9 的评语集 $L = [l_{-4}, l_{-3}, l_{-2}, l_{-1}, l_0, l_1, l_2, l_3, l_4]$ ，对应的 9 朵云参见表 5-1。

表 5-1 评估等级的语言变量与 PNC

语言变量	PNC
极好 (l_4)	$((0.90, 0.22, 0.69), (0.10, 0.22, 0.69))$
非常好 (l_3)	$((0.81, 0.13, 0.42), (0.19, 0.13, 0.42))$
好 (l_2)	$((0.75, 0.08, 0.26), (0.25, 0.08, 0.26))$
较好 (l_1)	$((0.65, 0.05, 0.16), (0.35, 0.05, 0.16))$
中等 (l_0)	$((0.50, 0.03, 0.10), (0.50, 0.03, 0.10))$
较差 (l_{-1})	$((0.35, 0.05, 0.16), (0.65, 0.05, 0.16))$
差 (l_{-2})	$((0.25, 0.08, 0.26), (0.75, 0.08, 0.26))$
非常差 (l_{-3})	$((0.19, 0.13, 0.42), (0.81, 0.13, 0.42))$
极差 (l_{-4})	$((0.10, 0.22, 0.69), (0.90, 0.22, 0.69))$

多准则群决策过程具体步骤如下：

步骤 1 专家使用表 5-1 在不同准则下对每个备选方案进行评级，构造语言决策矩阵：

$$P = (p_{ij}), (i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n),$$

使用 PNCWAA 算子集成专家意见，从而构造 PF-DM：

$$\tilde{P} = (\tilde{p}_{ij}), (i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n),$$

其中 $\tilde{p}_{ij} = \left(\left(\mu_{Ex_{ij}}, \mu_{En_{ij}}, \mu_{He_{ij}} \right), \left(\nu_{Ex_{ij}}, \nu_{En_{ij}}, \nu_{He_{ij}} \right) \right)$ 。

步骤 2 使用式 (5.7) 对 PF-DM 进行规范化处理, 得到规范化后模糊决策矩阵 $D = (d_{ij}), (i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n)$ 。

$$d_{ij} = \left(\left(\tilde{\mu}_{Ex}, \tilde{\mu}_{En}, \tilde{\mu}_{He} \right), \left(\tilde{\nu}_{Ex}, \tilde{\nu}_{En}, \tilde{\nu}_{He} \right) \right) = \begin{cases} \left(\left(\mu_{Ex}, \mu_{En}, \mu_{He} \right), \left(\nu_{Ex}, \nu_{En}, \nu_{He} \right) \right), & j \in B, \\ \left(\left(\nu_{Ex}, \nu_{En}, \nu_{He} \right), \left(\mu_{Ex}, \mu_{En}, \mu_{He} \right) \right), & j \in C. \end{cases} \quad (5.7)$$

步骤 3 使用 PNCWPBM^{r,s} 获得备选方案的综合评价云模型。

步骤 4 计算每个备选方案的得分值 $S(C_i)$, 首先计算各备选方案隶属度云与非隶属度云的综合期望, 再使用式 (5.8) 计算备选方案综合得分, 结果越大越好。

$$S(C) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n x_{\mu_i} \cdot \sum_{i=1}^n y_{\mu_i} - \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n x_{\nu_i} \cdot \sum_{i=1}^n y_{\nu_i} \right) + 1 \right) \quad (5.8)$$

步骤 5 根据得分值对备选方案进行排序, 得分值越大结果越优。

5.3 应用案例

5.3.1 案例研究

可再生能源影响着各国的环境、社会和经济展, 为减少资源损耗, 如何选择适当的可再生能源作为传统化石燃料的可持续替代品是一个复杂的多准则决策问题。现有 5 种可再生能源, 需要在其中选择一个最合适的能源, 专家组有 3 名专家, 记作 $E = \{e_1, e_2, e_3\}$; 可再生能源为太阳能(S_1)、生物质能(S_2)、地热能(S_3)、风能(S_4)、水能(S_5)。专家组评估备选方案需考虑以下 10 项准则: 可行性(C_1)、经济风险(C_2)、污染物排放(C_3)、土地需求(C_4)、废物处置需要(C_5)、社会及政治接受程度(C_6)、水污染(C_7)、投资成本(C_8)、能源供应安全(C_9)、能源耐久性(C_{10})。根据准则间的相互关系, 将准则分为两组,

$$P_1 = \{C_1, C_4, C_5, C_9, C_{10}\}, \quad P_2 = \{C_2, C_3, C_6, C_7, C_8\},$$

其中, P_1 为效益型, P_2 为成本型。假设 $r = s = 2$, 准则权重^[56]分别为

$$\omega_j = \{0.0824, 0.1188, 0.0382, 0.0794, 0.1462, 0.1623, 0.0950, 0.0781, 0.0336, 0.1660\}。$$

步骤 1 3 名专家在 10 项准则下对 5 种可再生能源进行初始化评级^[56], 构建语言决策矩阵, 如表 5-2 所示, 将其转化为 PNC, 通过 PNCWAA 算子集成专家意见, 由式 (5.4) 得到 PF-DM, 如表 5-3 所示。

步骤 2 由式 (5.7) 得到规范化后 PF-DM, 如表 5-4 所示。

步骤 3 由 PNCWPBM^{TS} 算子可得备选方案的综合评价云模型, 将 5 种备选方案的综合评价云模型转变为由 2000 个云滴组成的云图(参见图 5-1), 综合评价云模型结果如下:

$$\begin{aligned} C_{S_1} &= ((0.1547, 0.0051, 0.0165), (0.9421, 0.0051, 0.0165)), \\ C_{S_2} &= ((0.1800, 0.0061, 0.0199), (0.9340, 0.0061, 0.0199)), \\ C_{S_3} &= ((0.1927, 0.0071, 0.0230), (0.9273, 0.0071, 0.0230)), \\ C_{S_4} &= ((0.2207, 0.0080, 0.0258), (0.9165, 0.0080, 0.0258)), \\ C_{S_5} &= ((0.1903, 0.0058, 0.0188), (0.9295, 0.0058, 0.0188)). \end{aligned}$$

表 5-2 专家对标准的评价

Criteria	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
C_1	(l_2, l_1, l_2)	(l_1, l_0, l_0)	(l_2, l_1, l_2)	(l_0, l_0, l_0)	(l_1, l_2, l_1)
C_2	(l_0, l_0, l_1)	(l_3, l_1, l_1)	(l_2, l_1, l_1)	(l_1, l_2, l_1)	(l_2, l_1, l_1)
C_3	(l_0, l_1, l_1)	(l_2, l_1, l_2)	(l_2, l_2, l_1)	(l_3, l_3, l_3)	(l_2, l_0, l_1)
C_4	(l_0, l_1, l_0)	(l_1, l_0, l_2)	(l_2, l_0, l_1)	(l_3, l_3, l_3)	(l_2, l_1, l_1)
C_5	(l_1, l_0, l_0)	(l_3, l_0, l_0)	(l_0, l_2, l_2)	(l_2, l_1, l_2)	(l_1, l_0, l_0)
C_6	(l_2, l_1, l_2)	(l_1, l_1, l_2)	(l_2, l_3, l_3)	(l_2, l_2, l_1)	(l_0, l_0, l_0)
C_7	(l_0, l_1, l_2)	(l_1, l_1, l_3)	(l_2, l_2, l_2)	(l_2, l_2, l_2)	(l_0, l_1, l_2)
C_8	(l_0, l_1, l_2)	(l_1, l_0, l_3)	(l_2, l_2, l_2)	(l_2, l_3, l_2)	(l_1, l_2, l_2)
C_9	(l_1, l_0, l_0)	(l_3, l_1, l_2)	(l_0, l_2, l_1)	(l_3, l_4, l_2)	(l_4, l_2, l_1)
C_{10}	(l_2, l_1, l_0)	(l_0, l_0, l_2)	(l_0, l_0, l_2)	(l_2, l_3, l_0)	(l_3, l_2, l_1)

表 5-3 集成后毕达哥拉斯模糊决策矩阵

Criteria	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
C_1	$((0.7212, 0.0700, 0.2267), (0.2794, 0.0700, 0.2267))$	$((0.5591, 0.0367, 0.1200), (0.4440, 0.0367, 0.1200))$	$((0.7212, 0.0700, 0.2267), (0.2797, 0.0700, 0.2267))$	$((0.5000, 0.0300, 0.1000), (0.5000, 0.0300, 0.1000))$	$((0.6881, 0.0600, 0.1933), (0.3129, 0.0600, 0.1933))$
C_2	$((0.5591, 0.0367, 0.1200), (0.4440, 0.0367, 0.1200))$	$((0.7170, 0.0767, 0.2467), (0.2855, 0.0767, 0.2467))$	$((0.4687, 0.0600, 0.1933), (0.5546, 0.0600, 0.1933))$	$((0.6881, 0.0600, 0.1933), (0.3129, 0.0600, 0.1933))$	$((0.6881, 0.0600, 0.1933), (0.3129, 0.0600, 0.1933))$
C_3	$((0.6082, 0.0433, 0.1400), (0.3942, 0.0433, 0.1400))$	$((0.7212, 0.0700, 0.2267), (0.2797, 0.0700, 0.2267))$	$((0.7212, 0.0700, 0.2267), (0.2797, 0.0700, 0.2267))$	$((0.5625, 0.1300, 0.4200), (0.4995, 0.1300, 0.4200))$	$((0.6524, 0.0533, 0.1733), (0.3524, 0.0533, 0.1733))$
C_4	$((0.5591, 0.0367, 0.1200), (0.4440, 0.0367, 0.1200))$	$((0.6524, 0.0533, 0.1733), (0.3524, 0.0533, 0.1733))$	$((0.6524, 0.0533, 0.1733), (0.3524, 0.0533, 0.1733))$	$((0.7177, 0.1300, 0.4200), (0.3081, 0.1300, 0.4200))$	$((0.6283, 0.0600, 0.1933), (0.3846, 0.0600, 0.1933))$
C_5	$((0.4579, 0.0367, 0.1200), (0.5457, 0.0367, 0.1200))$	$((0.6494, 0.0633, 0.2067), (0.3622, 0.0633, 0.2067))$	$((0.6902, 0.0633, 0.2067), (0.3150, 0.0633, 0.2067))$	$((0.7212, 0.0700, 0.2267), (0.2797, 0.0700, 0.2267))$	$((0.4579, 0.0367, 0.1200), (0.5457, 0.0367, 0.1200))$

续表 5-3 集成后毕达哥拉斯模糊决策矩阵

Criteria	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
C_6	((0.7212,0.0700,0.2267), (0.2797,0.0700,0.2267))	((0.6881,0.0600,0.1933), (0.3129, 0.0600,0.1933))	((0.7921,0.1133,0.3667), (0.2082, 0.1133,0.3667))	((0.6695,0.0700,0.2267), (0.3438, 0.0700,0.2267))	((0.5000,0.0300,0.1000), (0.5000, 0.0300,0.1000))
C_7	((0.6524,0.0533,0.1733), (0.3524, 0.0533,0.1733))	((0.7170,0.0767,0.1733), (0.2855, 0.0767,0.2467))	((0.7500,0.0800,0.2600), (0.2500, 0.0800,0.2600))	((0.5223,0.0800,0.2600), (0.5200, 0.0800,0.2600))	((0.6524,0.0533,0.1733), (0.3524, 0.0533,0.1733))
C_8	((0.6524,0.0533,0.1733), (0.3524, 0.0533,0.1733))	((0.6250,0.0700,0.2267), (0.3953, 0.0700,0.2267))	((0.7500,0.0800,0.2600), (0.2500, 0.0800,0.2600))	((0.5158,0.0967,0.3133), (0.5335, 0.0967,0.3133))	((0.7212,0.0700,0.2267), (0.2797, 0.0700,0.2267))
C_9	((0.5591,0.0367,0.1200), (0.4440, 0.0367,0.1200))	((0.2728,0.0867,0.2800), (0.7336, 0.0867,0.2800))	((0.5094,0.0533,0.1733), (0.5082, 0.0533,0.1733))	((0.8332,0.1433,0.4567), (0.1861, 0.1433,0.4567))	((0.7978,0.1167,0.3700), (0.2061, 0.1167,0.3700))
C_{10}	((0.3856,0.0533,0.1733), (0.6274, 0.0533,0.1733))	((0.6110,0.0467,0.1533), (0.3969, 0.0467,0.1533))	((0.6110,0.0467,0.1533), (0.3696,0.0467,0.1533))	((0.7189,0.0800,0.2600), (0.2874, 0.0800,0.2600))	((0.6550,0.0867,0.2800), (0.3681, 0.0867,0.2800))

表 5-4 规范化后毕达哥拉斯模糊决策矩阵

Criteria	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
C_1	((0.7212,0.0700,0.2267), (0.2794, 0.0700,0.2267))	((0.5591,0.0367,0.1200), (0.4440, 0.0367,0.1200))	((0.7212,0.0700,0.2267), (0.2797, 0.0700,0.2267))	((0.5000,0.0300,0.1000), (0.5000, 0.0300,0.1000))	((0.6881,0.0600,0.1933), (0.3129, 0.0600,0.1933))
C_2	((0.4440,0.0367,0.1200), (0.5591, 0.0367,0.1200))	((0.2855,0.0767,0.2467), (0.7170, 0.0767,0.2467))	((0.5546,0.0600,0.1933), (0.4687, 0.0600,0.1933))	((0.3129,0.0600,0.1933), (0.6881, 0.0600,0.1933))	((0.3129,0.0600,0.1933), (0.6881, 0.0600,0.1933))
C_3	((0.3942,0.0433,0.1400), (0.6082, 0.0433,0.1400))	((0.2797,0.0700,0.2267), (0.7212, 0.0700,0.2267))	((0.2797,0.0700,0.2267), (0.7212, 0.0700,0.2267))	((0.4995,0.1300,0.4200), (0.5625, 0.1300,0.4200))	((0.3524,0.0533,0.1733), (0.6524, 0.0533,0.1733))
C_4	((0.5591,0.0367,0.1200), (0.4440, 0.0367,0.1200))	((0.6524,0.0533,0.1733), (0.3524, 0.0533,0.1733))	((0.6524,0.0533,0.1733), (0.3524, 0.0533,0.1733))	((0.7177,0.1300,0.4200), (0.3081, 0.1300,0.4200))	((0.6283,0.0600,0.1933), (0.3846, 0.0600,0.1933))
C_5	((0.4579,0.0367,0.1200), (0.5457, 0.0367,0.1200))	((0.6494,0.0633,0.2067), (0.3622, 0.0633,0.2067))	((0.6902,0.0633,0.2067), (0.3150, 0.0633,0.2067))	((0.7212,0.0700,0.2267), (0.2797, 0.0700,0.2267))	((0.4579,0.0367,0.1200), (0.5457, 0.0367,0.1200))
C_6	((0.2797,0.0700,0.2267), (0.7212, 0.0700,0.2267))	((0.3129,0.0600,0.1933), (0.6881, 0.0600,0.1933))	((0.2082,0.1133,0.3667), (0.7921, 0.1133,0.3667))	((0.3438,0.0700,0.2267), (0.6695, 0.0700,0.2267))	((0.5000,0.0300,0.1000), (0.5000, 0.0300,0.1000))
C_7	((0.3524,0.0533,0.1733), (0.6524, 0.0533,0.1733))	((0.2855,0.0767,0.2467), (0.7170, 0.0767,0.2467))	((0.2500,0.0800,0.2600), (0.7500, 0.0800,0.2600))	((0.5200,0.0800,0.2600), (0.5223, 0.0800,0.2600))	((0.3524,0.0533,0.1733), (0.6524, 0.0533,0.1733))
C_8	((0.3524,0.0533,0.1733), (0.6524, 0.0533,0.1733))	((0.3953,0.0700,0.2267), (0.6520, 0.0700,0.2267))	((0.2500,0.0800,0.2600), (0.7500, 0.0800,0.2600))	((0.5335,0.0967,0.3133), (0.5158, 0.0967,0.3133))	((0.2797,0.0700,0.2267), (0.7212, 0.0700,0.2267))
C_9	((0.5591,0.0367,0.1200), (0.4440, 0.0367,0.1200))	((0.2728,0.0867,0.2800), (0.7336, 0.0867,0.2800))	((0.5094,0.0533,0.1733), (0.5082, 0.0533,0.1733))	((0.8332,0.1433,0.4567), (0.1861, 0.1433,0.4567))	((0.7978,0.1167,0.3700), (0.2061, 0.1167,0.3700))
C_{10}	((0.3856,0.0533,0.1733), (0.6274, 0.0533,0.1733))	((0.6110,0.0467,0.1533), (0.3969, 0.0467,0.1533))	((0.6110,0.0467,0.1533), (0.3696,0.0467,0.1533))	((0.7189,0.0800,0.2600), (0.2874, 0.0800,0.2600))	((0.6550,0.0867,0.2800), (0.3681, 0.0867,0.2800))

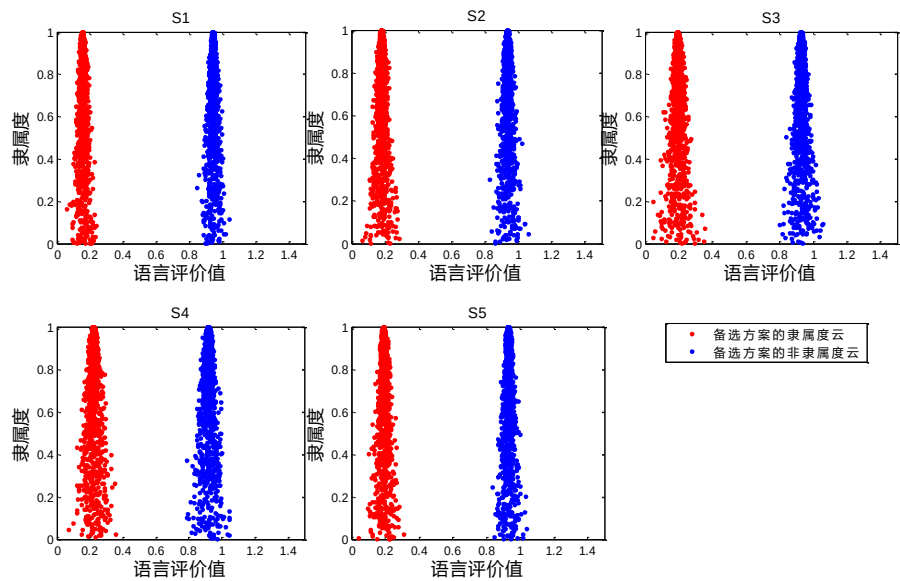


图 5-1 五种备选方案的综合评价云图

从图 5-1 可以看出，备选方案 S_4 隶属度为 1 的评价语言值相较于其他方案而言最大，因此可以初步判断备选方案 S_4 性能较好。

步骤 4 计算备选方案隶属度云与非隶属度云的综合期望，并通过式 (5.8) 给出每个备选方案综合得分及排名，如表 5-5 所示。

表 5-5 各备选方案的期望值和得分值

	$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{\mu_i}$	$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_{\mu_i}$	$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{\nu_i}$	$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_{\nu_i}$	$S(C_i)$	排名
S_1	0.1548	0.7055	0.9420	0.7053	0.2224	5
S_2	0.1805	0.7151	0.9342	0.7039	0.2357	4
S_3	0.1931	0.7060	0.9287	0.6977	0.2442	2
S_4	0.2214	0.7070	0.9160	0.6976	0.2588	1
S_5	0.1906	0.7086	0.9294	0.7043	0.2403	3

决策结果排序为 $S_4 \succ S_3 \succ S_5 \succ S_2 \succ S_1$ ，因此，风能为最优可再生能源。

5.3.2 鲁棒性分析

对参数 r, s 选取 10 种不同的取值： $r=s=1$ ； $r=s=2$ ； $r=s=3$ ； $r=s=4$ ； $r=1, s=2$ ； $r=1, s=3$ ； $r=1, s=4$ ； $r=2, s=3$ ； $r=2, s=4$ ； $r=3, s=4$ 。采用 PNCWPBM^{rs} 算子可以给出不同参数下集成后的备选方案综合评价云模型，结果如表 5-6 所示，得分值如表 5-7 所示，排序结果如图 5-2 所示。结果表明： r, s

可以反映决策者的风险态度,随着 r 、 s 的增加,决策者更倾向于寻求风险;云滴的随机产生不影响最优结果。在某些情形下 S_3 与 S_5 的排序发生变化,但 S_4 排名保持不变,始终为最优方案。

表 5-6 使用 PNCWPBM^{r,s} 运算符的汇总结果

	$r = s = 1$	$r = s = 2$	$r = s = 3$	$r = s = 4$	$r = 1, s = 2$
S_1	((0.1498,0.0051,0.0165), (0.9452, 0.0051,0.0165))	((0.1547,0.0051,0.0165), (0.9421, 0.0051,0.0165))	((0.1585,0.0051,0.0165), (0.9397, 0.0051,0.0165))	((0.1614,0.0051,0.0165), (0.9379, 0.0051,0.0165))	((0.1540,0.0051,0.0165), (0.8810, 0.0051,0.0165))
S_2	((0.1683,0.0061,0.0199), (0.9411, 0.0061,0.0199))	((0.1800,0.0061,0.0199), (0.9341, 0.0061,0.0199))	((0.1867,0.0061,0.0199), (0.9293, 0.0061,0.0199))	((0.1916,0.0061,0.0199), (0.9258, 0.0061,0.0199))	((0.1763,0.0061,0.0199), (0.8763, 0.0061,0.0199))
S_3	((0.1827,0.0071,0.0230), (0.9342, 0.0071,0.0230))	((0.1927,0.0071,0.0230), (0.9273, 0.0071,0.0230))	((0.1985,0.0071,0.0230), (0.9224, 0.0071,0.0230))	((0.2023,0.0071,0.0230), (0.9189, 0.0071,0.0230))	((0.1917,0.0071,0.0230), (0.8670, 0.0071,0.0230))
S_4	((0.2093,0.0080,0.0258), (0.9223, 0.0080,0.0258))	((0.2207,0.0080,0.0258), (0.9165, 0.0080,0.0258))	((0.2293,0.0080,0.0258), (0.9111, 0.0080,0.0258))	((0.2357,0.0080,0.0258), (0.9064, 0.0080,0.0258))	((0.2176,0.0080,0.0258), (0.8496, 0.0080,0.0258))
S_5	((0.1811,0.0058,0.0188), (0.9338 0.0058,0.0188))	((0.1903,0.0058,0.0188), (0.9295 0.0058,0.0188))	((0.1981,0.0058,0.0188), (0.9260, 0.0058,0.0188))	((0.2045,0.0058,0.0188), (0.9233, 0.0058,0.0188))	((0.1892,0.0058,0.0188), (0.8652, 0.0058,0.0188))

续表 5-6 使用 PNCWPBM^{r,s} 运算符的汇总结果

	$r = 1, s = 3$	$r = 1, s = 4$	$r = 2, s = 3$	$r = 2, s = 4$	$r = 3, s = 4$
S_1	((0.1593,0.0051,0.0165), (0.8217, 0.0051,0.0165))	((0.1646,0.0051,0.0165), (0.7705, 0.0051,0.0165))	((0.1577,0.0051,0.0165), (0.9092, 0.0051,0.0165))	((0.1615,0.0051,0.0165), (0.8765, 0.0051,0.0165))	((0.1607,0.0051,0.0165), (0.9174, 0.0051,0.0165))
S_2	((0.1826,0.0061,0.0199), (0.8169, 0.0061,0.0199))	((0.1874,0.0061,0.0199), (0.7657, 0.0061,0.0199))	((0.1841,0.0061,0.0199), (0.8998, 0.0061,0.0199))	((0.1877,0.0061,0.0199), (0.8664, 0.0061,0.0199))	((0.1894,0.0061,0.0199), (0.9058, 0.0061,0.0199))
S_3	((0.2008,0.0071,0.0230), (0.8066, 0.0071,0.0230))	((0.2081,0.0071,0.0230), (0.7551, 0.0071,0.0230))	((0.1977,0.0071,0.0230), (0.8917, 0.0071,0.0230))	((0.2033,0.0071,0.0230), (0.8574, 0.0071,0.0230))	((0.2018,0.0071,0.0230), (0.8979, 0.0071,0.0230))
S_4	((0.2252,0.0080,0.0258), (0.7865, 0.0080,0.0258))	((0.2313,0.0080,0.0258), (0.7338, 0.0080,0.0258))	((0.2261,0.0080,0.0258), (0.8783, 0.0080,0.0258))	((0.2309,0.0080,0.0258), (0.8421, 0.0080,0.0258))	((0.2330,0.0080,0.0258), (0.8848, 0.0080,0.0258))
S_5	((0.1988,0.0058,0.0188), (0.8038, 0.0058,0.0188))	((0.2073,0.0058,0.0188), (0.7517, 0.0058,0.0188))	((0.1962,0.0058,0.0188), (0.8936, 0.0058,0.0188))	((0.2030,0.0058,0.0188), (0.8589, 0.0058,0.0188))	((0.2026,0.0058,0.0188), (0.9014, 0.0058,0.0188))

当准则权重发生变化时,分析备选方案的排序变化情况。准则权重改变原则如下同第三章类似。此时令 ω_2 改变 Δ_2 个单位, Δ_2 取值如下:

$$\Delta_2 \in \{-0.1187, 0.1000, 0.3000, 0.5000, 0.8000, 0.8810\}。$$

准则权重如表 5-8 所示, 备选方案的最终排序如表 5-9 所示。不同准则下备选方案排序的可视化结果如图 5-3 所示。可以看出, 当 $\Delta_2 \in [-0.1187, 0.5]$ 时, 备选方案的最优和最劣均是一致的, 结果也是稳定的。

表 5-7 备选方案在不同参数下的得分值

	$r=s=1$	$r=s=2$	$r=s=3$	$r=s=4$	$r=1,s=2$
S_1	0.2200	0.2224	0.2225	0.2298	0.2413
S_2	0.2245	0.2357	0.2391	0.2427	0.2525
S_3	0.2376	0.2442	0.2413	0.2514	0.2617
S_4	0.2499	0.2588	0.2638	0.2682	0.2764
S_5	0.2336	0.2403	0.2448	0.2478	0.2573

续表 5-7 备选方案在不同参数下的得分值

	$r=1,s=3$	$r=1,s=4$	$r=2,s=3$	$r=2,s=4$	$r=3,s=4$
S_1	0.2636	0.2815	0.2288	0.2466	0.2326
S_2	0.2775	0.2972	0.2423	0.2614	0.2442
S_3	0.2849	0.3101	0.2543	0.2709	0.2531
S_4	0.3012	0.3217	0.2733	0.2813	0.2703
S_5	0.2820	0.3066	0.2544	0.2673	0.2563

表 5-8 不同情况下的准则向量

	$\Delta_2=-0.1187$	$\Delta_2=0.1$	$\Delta_2=0.3$	$\Delta_2=0.5$	$\Delta_2=0.8$	$\Delta_2=0.8810$
C_1	0.0935	0.0730	0.0543	0.0356	0.0076	0.0000
C_2	0.0001	0.2188	0.4188	0.6188	0.9188	0.9998
C_3	0.0433	0.0339	0.0252	0.0165	0.0035	0.0000
C_4	0.0901	0.0704	0.0524	0.0343	0.0073	0.0000
C_5	0.1659	0.1296	0.0964	0.0632	0.0135	0.0000
C_6	0.1842	0.1439	0.1070	0.0702	0.0150	0.0000
C_7	0.1078	0.0842	0.0627	0.0411	0.0088	0.0000
C_8	0.0886	0.0692	0.0515	0.0338	0.0072	0.0000
C_9	0.0381	0.0298	0.0222	0.0145	0.0031	0.0000
C_{10}	0.1884	0.1472	0.1095	0.0718	0.0153	0.0000

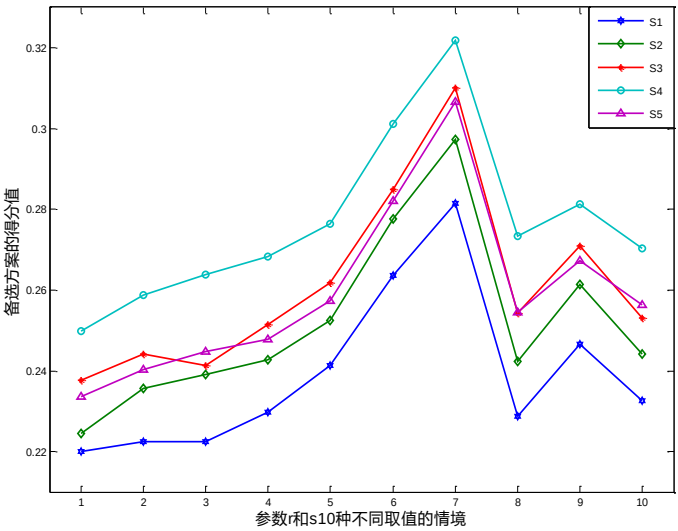


图 5-2 不同参数取值下备选方案排名

表 5-9 备选方案排名

Scene	Δ_2	Rank
1	-0.1187	$S_4 \succ S_3 \succ S_5 \succ S_2 \succ S_1$
2	0.1	$S_4 \succ S_3 \succ S_5 \succ S_2 \succ S_1$
3	0.3	$S_4 \succ S_3 \succ S_5 \succ S_2 \succ S_1$
4	0.5	$S_4 \succ S_5 \succ S_3 \succ S_2 \succ S_1$
5	0.8	$S_4 \succ S_1 \succ S_3 \succ S_5 \succ S_2$
6	0.8810	$S_3 \succ S_5 \succ S_2 \succ S_1 \succ S_4$

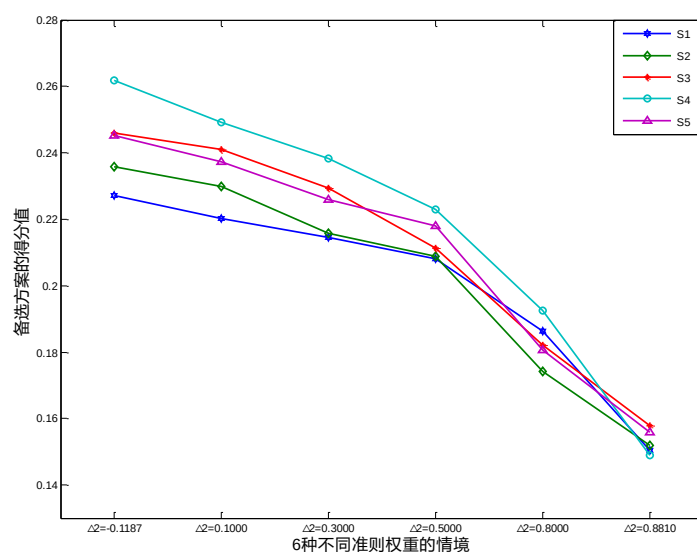


图 5-3 不同权重场景中的备选方案排名

5.3.3 对比分析

选取了几种典型的多准则群决策方法与本文提出的方法进行比较(参见表 5-10)。Al-Barakati 等^[56]中的决策信息通过区间毕达哥拉斯模糊数表示,隶属度和非隶属度的区间可能存在重叠或接近的情形,会增加信息表达的模糊性,本文采用 PNC 表示决策信息,隶属度和非隶属度均以云模型表示,云模型能更加有效地处理不确定信息。Mishra^[57], Gupta^[58]在直觉模糊环境下进行操作,具有局限性,VIKOR 方法需要进行多次计算和迭代,本文在毕达哥拉斯模糊环境中,使用得分函数得到最终排名,不但为决策者提供更大的灵活性,使决策结果更具有广泛性,而且降低计算的复杂度。Mishra 等^[59]使用基于模糊阿基米德公式的 Maclaurin 对称平均算子进行集成,MSM 算子具有信息损失小、处理复杂数据灵活等优点,但同时也存在参数选择敏感、适用范围有限等缺点,本文提出的

PNCWPBM^{r,s}算子不仅包含这些优点,同时根据准则不同的分区也将扩大算子的使用范围。

综上所述,本文方法所得到的最佳可持续能源为风能(S_4),与其他文献结果一致,表明方法具有可行性,可应用并推广于现实问题决策。

表 5-10 不同方法呈现的排序顺序

文献来源	方法模型	最终排名
Al-Barakati 等 ^[56]	PF-WASPAS	$S_4 \succ S_5 \succ S_3 \succ S_2 \succ S_1$
Mishra A R 等 ^[57]	IF-divergence measure	$S_4 \succ S_5 \succ S_3 \succ S_2 \succ S_1$
Gupta P 等 ^[58]	TrIFLEIWA-VIKOR	$S_4 \succ S_1 \succ S_2 \succ S_3 \succ S_5$
Mishra A R 等 ^[59]	Fermatean fuzzy-COPRAS	$S_4 \succ S_1 \succ S_2 \succ S_5 \succ S_3$
本文方法	PNCWPBM	$S_4 \succ S_3 \succ S_5 \succ S_2 \succ S_1$

5.4 本章小结

在毕达哥拉斯模糊环境下,本章构建隶属度云模型和非隶属度云模型,并提出 PNCWAA 与 PNCWPBM^{r,s}算子,通过算子集成专家意见,形成备选方案的综合评价云,最后用得分函数对备选方案进行排序。选取可再生能源案例进行实证研究,结果表明:风能(S_4)是可选择的最优可再生能源。

第 6 章 总结与展望

6.1 总结

本文主要聚焦于毕达哥拉斯模糊多准则群决策方法研究。首先建立毕达哥拉斯模糊主客观协同赋权模型，将其应用于 MCGDM。其次针对准则评估的语义模糊特征，扩展出 IVPFNWBM^{P,q} 算子并构建了基于 IVPFN 的群决策过程。最后引入正态云模型，提出毕达哥拉斯正态云加权算术平均算子和毕达哥拉斯正态云加权划分 BM 算子，并结合准则间的相互关系，构建了基于 PNC 的群决策流程。具体内容如下：

(1) 将毕达哥拉斯模糊与 SWARA、EM 和 CoCoSo 法相结合，通过 PF-SWARA 法和 PF-EM 法计算方案中各指标的组合权重，并采用 PF-CoCoSo 法对方案进行排序，确定最优方案；通过案例选择医疗废物处理方案；通过改变判据的权值来验证该方法的稳定性。

(2) 在区间毕达哥拉斯模糊环境下，扩展出 IVPFNWBM^{P,q} 算子的形式。通过 CRITIC 法和专家打分法计算出准则的综合权重，并采用 IVPFWA 算子和 IVPFNWBM^{P,q} 算子集成准则相关评价结果，构建了基于 IVPFN 的群决策过程。最后，通过案例展示该方法的有效性。

(3) 将云模型与毕达哥拉斯模糊结合，给出一种新的 PNC 形式，考虑准则间的相互关系，提出 PNCWAA 和 PNCWPBM^{rs}，构建了基于 PNC 的群决策过程。最后，通过案例展示该方法的有效性。采用 PNC 表示决策信息，隶属度和非隶属度均以云模型表示能更加有效地处理不确定信息。

6.2 展望

本文对毕达哥拉斯模糊多准则群决策方法进行了一定的研究，但目前仍存在一些需要改进的地方，可在未来做出更为深入的探究。

(1) 本文使用云模型进行决策信息的表达，在未来研究工作中，将进一步考虑使用多维云模型。

(2) 本文主要对 BM 算子进行扩展，但是目前也有其余功能优异的算子存在，如 Dombi 集成算子、Heronian 平均算子等。因此下一步考虑是否可以扩展

其他算子进行决策信息的集成。

(3) 除毕达哥拉斯模糊以外, 还存在 q -Rung 模糊、T-spherical 模糊及中智模糊等。上述模糊环境在多准则群决策中的应用有待进一步研究, 将集成算子推广到其他不确定环境中是未来工作的重点之一。

参考文献

- [1] Yager R R. Pythagorean membership grades in multi-criteria decision making[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2014, 22(4): 958-965.
- [2] Zhang X, Xu Z. Extension of TOPSIS to multiple criteria decision making with Pythagorean fuzzy sets[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2014, 29(12): 1061-1078.
- [3] Zhang X. Multi-criteria Pythagorean fuzzy decision analysis: A hierarchical QUALIFLEX approach with the closeness index-based ranking methods[J]. Information Sciences, 2016, 330: 104-124.
- [4] Gou X, Xu Z, Ren P. The properties of continuous Pythagorean fuzzy information[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2016, 31(5): 401-424.
- [5] Garg H. A novel correlation coefficients between Pythagorean fuzzy sets and its applications to decision making processes[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2016, 31(12): 1234-1252.
- [6] Dick S, Yager R R, Yazdanbakhsh O. On Pythagorean and complex fuzzy set operations[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2016, 24(5): 1009-1021.
- [7] Zhang X L. Multicriteria Pythagorean fuzzy decision analysis: A hierarchical QUALIFLEX approach with the closeness index-based ranking methods[J]. Information Sciences, 2016, 330: 104-124.
- [8] Luca A D, Termini S. A definition of a nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory[J]. Information and Control, 1972, 20(4): 301-312.
- [9] Saaty T L. A scaling method for priorities in hierarchical structures[J]. Journal of Mathematical Psychology, 1977, 15(3): 234-281.
- [10] Keršuliene V, Zavadskas E K, Turskis Z. Selection of rational dispute resolution method by applying new step-wise weight assessment ratio analysis (SWARA)[J]. Journal of Business Economics & Management, 2010, 11(2): 243-258.
- [11] Xue W, Xu Z, Zhang X, et al. Pythagorean fuzzy LINMAP method based on the entropy theory for railway project investment decision making[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2018, 33(1): 93-125.

- [12] Saaty T L. Decision making with dependence and feedback: The analytic network process[J]. *International*, 1996, 95(2): 129-157.
- [13] Karasan A, Ilbahar E, Kahraman C. A novel Pythagorean fuzzy AHP and its application to landfill site selection problem[J]. *Soft Computing*, 2019, 23(7): 10953-10968.
- [14] Agarwal S, Kant R, Shankar R. Evaluating solutions to overcome humanitarian supply chain management barriers: A hybrid fuzzy SWARA-Fuzzy WASPAS approach[J]. *International Journal of Disaster Risk Reduction*, 2020, 51(4): 1-18.
- [15] Rani P, Mishra A R, Mardani A, et al. Pythagorean fuzzy SWARA-VIKOR framework for performance evaluation of solar panel selection[J]. *Sustainability*, 2020, 12(4278): 1-18.
- [16] Zhou J M, Li K W, Baleentis T, et al. Pythagorean fuzzy combinative distance-based assessment with pure linguistic information and its application to financial strategies of multi-national companies[J], *Economic Research Ekonomska Istraživanja*, 2020, 33(1), 974-998.
- [17] Habib S, Akram M, Al-Shamiri M M A. Comparative analysis of Pythagorean MCDM methods for the risk assessment of childhood cancer[J]. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2023, 135(3): 2585-2615.
- [18] Yazdani M, Zarate P, Zavadskas E K, et al. A combined compromise solution (CoCoSo) method for multi-criteria decision-making problems[J]. *Management Decision*, 2019, 57(9): 2501-2519.
- [19] Liao H, Qin R, Wu D, et al. Pythagorean fuzzy combined compromise solution method integrating the cumulative prospect theory and combined weights for cold chain logistics distribution center selection[J]. *International Journal of Intelligent Systems*, 2020, 35(12): 2009-2031.
- [20] Liu P, Rani P, Mishra A R. A novel Pythagorean fuzzy combined compromise solution framework for the assessment of medical waste treatment technology[J]. *Journal of Cleaner Production*, 2021, 292: 1-17.
- [21] Wang F. Pythagorean cubic fuzzy multiple attributes group decision method for

- sustainable supply chain management[J]. *Applied Soft Computing*, 2025, 172: 1-27.
- [22] Gupta N, Garg P, Ahuja N. An integrated Pythagorean fuzzy Delphi-AHP-CoCoSo approach for exploring barriers and mitigation strategies for sustainable supply chain in the food industry[J]. *Supply Chain Analytics*, 2025, 10: 1-14.
- [23] Yager R R. On generalized Bonferroni mean operators for multi-criteria aggregation[J], *International Journal of Approximate Reasoning*, 2009, 50(8): 1279-1286.
- [24] Dutta B, Guha D. Partitioned Bonferroni mean based on linguistic 2-tuple for dealing with multi-attribute group decision making[J]. *Applied Soft Computing*, 2015, 37: 166-179.
- [25] Liu P D, Chen S M, Liu J L. Multiple attribute group decision making based on intuitionistic fuzzy interaction partitioned Bonferroni mean operators[J]. *Information Sciences*, 2017, 411: 98-121.
- [26] Lin M W, Wei J H, Xu Z S, et al. Multi-attribute group decision-making based on linguistic Pythagorean fuzzy interaction partitioned Bonferroni mean aggregation operators[J]. *Complexity*, 2018: 1-24.
- [27] Alhamzi G, Javaid S, Shuaib U, et al. Enhancing interval-valued Pythagorean fuzzy decision-making through Dombi-based aggregation operators[J]. *Symmetry*, 2023, 15(3): 765-765.
- [28] 李德毅, 孟海军, 史雪梅. 隶属云和隶属云发生器[J]. *计算机研究与发展*, 1995, 32(6): 15-20.
- [29] 徐聪, 潘小东. 基于正态云相似度的语言型多属性群决策方法[J]. *计算机科学*, 2019, 46(6): 218-223.
- [30] 狄鹏, 倪子纯, 尹东亮. 基于云模型和证据理论的多属性决策优化算法[J]. *系统工程理论与实践*, 2021, 41(4): 1061-1070.
- [31] 何乐平, 徐应东, 胡启军, 等. 基于博弈论-云模型的软岩隧道大变形风险评估[J]. *现代隧道技术*, 2021, 58(6): 85-94.
- [32] 王石, 魏美亮, 宋学朋, 等. 基于改进 CRITIC-G1 法组合赋权云模型的高阶

- 段充填体稳定性分析[J]. 重庆大学学报, 2022, 45(2): 68-80.
- [33]Wang J Q, Liu T. Uncertain linguistic multi-criteria group decision-making approach based on integrated cloud[J]. Control and Decision, 2012, 27(8): 1185-1190.
- [34]Wang J Q, Yang W E. Multiple criteria group decision-making method based on intuitionistic normal cloud by monte carlo simulation[J]. System Engineering Theory and Practice, 2013, 33(11): 2859-2865.
- [35]周金明, 詹媛媛, 李龙莲, 等. 直觉模糊云 Bonferroni 赋权均值算子集成方法研究[J]. 数学的实践与认识, 2023, 53(06): 187-196.
- [36]Zhou J M, Zhan Y Y, Chen S B. Multi-dimensional cloud model-based assessment and its application to the risk of supply chain financial companies[J]. International Journal of Fuzzy System Applications, 2024, 13(1): 1-29.
- [37]Zhou J M, Su W H, Tomas B, et al. Multiple criteria group decision-making considering symmetry with regards to the positive and negative ideal solutions via the Pythagorean normal cloud model for application to economic decisions[J]. Symmetry, 2018, 10(5): 140-155.
- [38]Zhang X L. Multicriteria Pythagorean fuzzy decision analysis: A hierarchical QUALIFLEX approach with the closeness index-based ranking methods[J]. Information Sciences, 2016, 330: 104-124.
- [39]Zavadskas E K, Podvezko V. Integrated determination of objective criteria weights in MCDM[J]. International Journal of Information Technology & Decision Making, 2016, 15(2): 267-283.
- [40]Saeidi P, Mardani A, Mishra A R, et al. Evaluate sustainable human resource management in the manufacturing companies using an extended Pythagorean fuzzy SWARA-TOPSIS method[J]. Journal of Cleaner Production, 2022, 370: 1-19.
- [41]Xu, T T., Zhang, H. Pythagorean fuzzy entropy and its application in multiple-criteria decision-making[J]. Int. J. Fuzzy Syst., 2020, 22: 1552–1564.
- [42]Wang Z X, Li Q X. An approach to integrate the final weights based on the subjective and objective weights[J]. Comm. On Appl. Math. and Comput, 2006,

- (01): 87-92.
- [43] Lahane S, Kant R. A hybrid Pythagorean fuzzy AHP – CoCoSo framework to rank the performance outcomes of circular supply chain due to adoption of its enablers[J]. *Waste Management*, 2021, 130: 48-60.
- [44] Rani P, Mishra A R, Pardasani K R, et al. A novel VIKOR approach based on entropy and divergence measures of Pythagorean fuzzy sets to evaluate renewable energy technologies in India[J]. *Journal of Cleaner Production*, 2019, 238: 1-17.
- [45] Zheng Y, Xu J, Chen H. TOPSIS-based entropy measure for intuitionistic trapezoidal fuzzy sets and application to multi-attribute decision-making[J]. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 2020 17(5): 5604-5617.
- [46] Liu P, Rani P, Mishra A R. A novel Pythagorean fuzzy combined compromise solution framework for the assessment of medical waste disposal technology[J]. *Journal of Cleaner Production*, 2021, 292: 1-17.
- [47] Rani P, Mishra A R, Krishankumar R, et al. A new Pythagorean fuzzy based decision framework for assessing healthcare waste treatment[J]. *IEEE Transactions on Engineering Management*, 2022, 69(6): 2915-2929.
- [48] Salimian S, Mousavi M. The selection of healthcare waste disposal technologies by a multi-criteria group decision-making method with intuitionistic fuzzy sets[J]. *Journal of Industrial and Systems Engineering*, 2022, 14(1): 205-220.
- [49] Patel A, Jana S, Mahanta J. Intuitionistic fuzzy EM-SWARA-TOPSIS approach based on new distance measure to assess the medical waste disposal techniques[J]. *Applied Soft Computing*, 2023, 144: 1-22.
- [50] 胡俊, 吴君民, 吴洁, 等. 基于区间 Pythagorean 模糊 WA 算子的 TOPSIS 多属性群决策研究[J]. *淮阴工学院学报*, 2024, 33(2): 96-104.
- [51] Zhou J M, Baležentis T, Streimikiene D. Normalized weighted Bonferroni harmonic mean-based intuitionistic fuzzy operators and their application to the sustainable selection of search and rescue robots[J]. *Symmetry*, 2019, 11(2): 218-241.
- [52] Zulqarnain R M, Ma W X, Siddique I, et al. An intelligent MCGDM model in green

- suppliers selection using interactional aggregation operators for interval-valued Pythagorean fuzzy soft sets[J]. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2024, 139(2): 1829-1862.
- [53]Liang R, Wang J Q. A linguistic Intuitionistic cloud decision support model with sentiment analysis for product selection in E-commerce[J]. *International Journal of Fuzzy Systems*, 2019, 21(3): 963-977.
- [54]Yang Z, Shang W L, Zhang H, et al. Assessing the green distribution transformer manufacturing process using a cloud-based q-rung orthopair fuzzy multi-criteria framework[J]. *Applied Energy*, 2022, 311: 1-21.
- [55]徐选华. 基于改进云模型的语言偏好信息多属性大群体决策方法[J].*管理工程学报*, 2018, 32(1): 1-9.
- [56]Al-Barakati A, Mishra A R, Mardani A, et al. An extended Interval-valued Pythagorean fuzzy WASPAS method based on new similarity measures to evaluate the renewable energy sources[J]. *Applied Soft Computing*, 2022, 120: 1-19.
- [57]Mishra A R, Kumari R, Sharma D K. Intuitionistic fuzzy divergence measure-based multi-criteria decision-making method[J]. *Neural Computing & Applications*, 2017: 1-16.
- [58]Gupta P, Mehrawar M K, Ahmad F. Selection of renewable energy sources: a novel VIKOR approach in an intuitionistic fuzzy linguistic environment[J]. *Environment, Development and Sustainability*, 2022: 1-39.
- [59]Mishra A R, Rani P, Saha A, et al. Fermatean fuzzy copula aggregation operators and similarity measures-based complex proportional assessment approach for renewable energy source selection[J]. *Complex & intelligent systems*, 2022, 8(6): 5223-5248.

硕士期间发表的论文

- [1] 陶胜男, 周金明, 黄日朋, 李龙莲. 基于赋权划分算子的云群决策方法研究[J]. 滁州学院学报 (已录用)
- [2] Jinming Zhou, **Shengnan Tao (陶胜男)**, Longlian Li. SWARA-EM-CoCoSo based Pythagorean fuzzy multi-criteria group decision-making: optimal disposal selection for medical waste[J]. Environmental Impact Assessment Review, (Submitted).

致谢

行文至此，意味着我的研究生之旅即将结束，回望这段在探索与挑战中成长的时光，心中只剩感激。在此，我想向所有陪伴我走过这段旅程的人致以最诚挚的谢意。

首先尤为感谢我的导师周金明老师，我想如果没有他，我的学习路不会这么顺畅。从论文选题到框架搭建，无论大小环节都有周老师在引领我前进。周老师是一位对待学术非常严谨的老师，要求我们脚踏实地，认真阅读文献，坚守学术规范。同时，周老师也是一位对待学生非常和蔼的老师，在我论文被退稿时，老师会安慰我帮我重铸信心，在我对未来迷茫时，会认真给我提出建议。能成为周金明老师的学生，我深感幸运。

其次感谢我的父母，他们从不抱怨日复一日的辛苦劳作，只一味的希望给我创造更好的生活条件。他们不会给我太多的建议，但是却支持着我的每一个决定，给了我读书的信心与决心。感谢父母对我的托举，让我能够去看世界，作为普通家庭的孩子，我深知父母给予我的一切何其珍贵，而我也希望在未来能够成为他们的依靠，带着他们去看世界。

再次要感谢我的朋友，我很幸运身边拥有一群陪伴我的朋友，她们包容我的一切缺点，愿意陪我去做我想要做的事，愿意完成我天马行空的想象，我们之间从不在意是谁最后没回消息，从不在意发的视频到底看了没有，因为我们知道挚友之间，不拘小节。另外要感谢我的同门和师姐，感谢她们对我学习上的鼓励和生活上的帮助。

最后感谢学院提供的学习环境，感谢宿管阿姨给予的生活上的帮助，感谢保安叔叔给我打开的门，感谢食堂提供的美味饭菜，感谢学校里的自行车带来的方便，感谢可爱的小猫让我心情美好，以及感谢我自己的坚持让我走完这段路。

我将带着这份感激，给我近二十年的读书生涯画上句点，同时，开启我的下一段美好人生。