
分类号: O231.3

单位代码: 10363

密 级: 公开

学 号: 2221020126

题 目 倒向随机微分方程在衍生证券风险度量中的
应用

题 目 Application of BSDE in Derivative
Security Risk Measurement

学 生 姓 名 : 王海军

指 导 教 师 : 李志民 教授

专 业 : 数学

研 究 方 向 : 金融数学

论文答辩日期: 2025 年 5 月 14 日

安徽工程大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：我恪守学术道德，崇尚严谨学风。所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已明确注明和引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品及成果的内容。论文为本人亲自撰写，我对所写的内容负责，并完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

学位论文作者签名：王海军

日期：2025 年 5 月 14 日

安徽工程大学学位论文版权使用授权书

学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅或借阅。本人授权安徽工程大学可以将本学位论文的全部内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保密 ☐，在 ____ 年解密后适用本版权书。

本学位论文属于

不保密 ☒。

学位论文作者签名：

王海军

指导教师签名：

李长友

日期：2025 年 5 月 14

日期：2025 年 5 月 14 日

BSDE 在衍生证券风险度量中的应用

摘 要

随着全球金融市场的快速发展, 衍生证券的定价和风险管理日益成为投资者关注的焦点。特别是对于美式巴黎期权等复杂衍生品, 其定价与风险度量问题已成为金融研究的热点。美式巴黎期权结合了美式期权和巴黎期权的特点, 不仅具备灵活的早期行权机制, 还受到障碍条件的限制。传统期权定价模型在处理此类问题时效果有限, 因此其定价尤为困难。如何应对这些衍生证券的复杂路径, 尤其是如何精确量化期权风险, 已成为当前金融研究中的重要课题。本文旨在探讨美式巴黎期权的定价模型及其风险管理方法, 以期为投资者提供更为精确的风险评估工具。

本文从定价与风险度量两个维度对美式巴黎期权开展研究。在定价方面, 传统 Black-Scholes 模型虽在欧式期权定价中应用广泛, 但其无法有效处理美式期权的提前行权特征及路径依赖性问题, 导致其在复杂衍生品定价中存在明显局限性, 本文引入倒向随机微分方程 (BSDE) 这一数学工具, 并进一步采用反射倒向随机微分方程 (RBSDE) 以解决最优停止问题, 首先, 基于 RBSDE 构建了美式巴黎期权定价模型, 提出了 RBSDE 的美式巴黎期权定价方法, 通过求解最优停止问题并推导出相应的偏微分方程 (PDE), 从而能够精确刻画期权价格动态变化过程, 有效克服了传统方法在路径依赖性和提前行权处理上的不足, 解决了提前行权难题。其次, 较为深入探讨了波动率、利率等市场因素对定价的影响, 从而为美式巴黎期权的定价

提供了新的视角。

在风险度量方面，传统方法虽适用于一般性风险评估，但在处理路径依赖型衍生品及复杂市场环境下的风险度量时表现不足，针对这一问题，本文引入凸风险度量工具，将 RBSDE 与凸风险度量相结合，较好的解决了美式巴黎期权的风险度量问题。通过将 RBSDE 与凸风险度量相结合，构建了的风险量化框架，并利用数值模拟验证了该方法在不同市场环境下的适用性与准确性。

研究结果表明，RBSDE 与凸风险度量的结合不仅提升了定价精度，还为复杂市场环境下的风险管理提供了理论支持，具有一定的实践指导意义。

关键词：美式巴黎期权；反射倒向随机微分方程（RBSDE）；凸风险度量；期权定价；路径依赖性；最优停止问题

Application of BSDE in Derivative Security Risk Measurement

Abstract

With the rapid development of global financial markets, the pricing and risk management of derivative securities have increasingly become the focus of investors' attention. Especially for complex derivatives such as American Paris options, their pricing and risk measurement issues have become a hot spot in finance research. The American Paris option combines the features of American and Paris options, which not only possesses a flexible early exercise mechanism, but is also subject to barrier conditions. Traditional option pricing models have limited effectiveness in dealing with such problems, making their pricing particularly difficult. How to deal with the complex paths of these derivative securities, especially how to accurately quantify the option risk, has become an important issue in current financial research. The purpose of this paper is to explore the pricing model of American Paris options and its risk management methodology, with a view to providing investors with a more accurate risk assessment tool.

In this paper, the American Paris option is studied from two dimensions: pricing and risk measurement. In terms of pricing, although the traditional Black-Scholes model is widely used in European option pricing, it is unable to effectively deal with the early exercise characteristics and path-dependence of American options, resulting in obvious limitations in pricing of complex derivatives. This paper introduces the mathematical tool of inverse stochastic differential

equations (BSDEs) and further adopts the reflective inverse stochastic differential equations (RBSDEs) to solve the problem of optimal stopping. This paper introduces the mathematical tool of inverse stochastic differential equation (BSDE) and further adopts the reflective inverse stochastic differential equation (RBSDE) to solve the optimal stopping problem. Firstly, an American Paris option pricing model is constructed based on the RBSDE, and the American Paris option pricing method of the RBSDE is put forward, which can accurately depict the dynamic change process of the option price and effectively overcome the shortcomings of the traditional method in the treatment of the path dependence and the early exercise, and solve the problem of the shortcomings of the early exercise. The PDE is able to accurately portray the dynamic process of option price change, effectively overcoming the shortcomings of traditional methods in path dependence and early exercise treatment, and solving the early exercise problem. Secondly, the impact of market factors such as volatility and interest rates on pricing is explored in depth, thus providing a new perspective for the pricing of American Paris options.

In terms of risk measurement, although the traditional method is suitable for general risk assessment, it is insufficient in dealing with path-dependent derivatives and risk measurement in complex market environments. In order to address this problem, this paper introduces a convex risk measurement tool and combines the RBSDE with the convex risk measurement to better solve the risk measurement problem of American Paris options. The risk quantification framework is constructed by combining the RBSDE with the convex risk measure, and numerical simulations are used to verify the applicability and accuracy of the method in different market environments.

The results show that the combination of RBSDE and convex risk

measure not only improves the pricing accuracy, but also provides theoretical support for risk management in complex market environments, which is of practical significance.

Wang Haijun (Applied Mathematics)

Supervised by Prof. Li Zhimin

KEY WORDS: American Parisian options; reflected backward stochastic differential equations (RBSDE); convex risk measures; option pricing; path dependence; optimal stopping problem

目 录

摘 要	3
Abstract	5
符号说明	9
第 1 章 绪论	10
1.1 研究背景与动机	10
1.2 文献综述	11
1.3 论文结构	13
第 2 章 基于 RBSDE 的美式巴黎期权定价	14
2.1 预备知识	14
2.2 连续美式巴黎期权 PDE 表达式	17
2.3 数值模拟	20
2.4 本章总结	25
第 3 章 基于 RBSDE 的美式巴黎期权风险度量	25
3.1 基本记法和主要结论	26
3.2 主要结论的证明	30
3.3 数值模拟	33
3.4 本章总结	36
第 4 章 总结与展望	36
4.1 总结	36
4.2 展望	37
参考文献	39

符号说明

BSDE	倒向随机微分方程
RBSDE	反射倒向随机微分方程
PDE	偏微分方程
$\{W_t\}_{t \in [0, T]}$	d-维 Brown 运动
$(\Omega, \mathcal{F}_t^W, P)$	完备概率空间
$\{\mathcal{F}_t^W\}_{t \in [0, T]}$	布朗运动 W_t 生成的 σ 域流。
$L^2(0, T) := \{S : S_t \text{ 是 } \mathcal{F}_t^W \text{ 的适应 } \mathbb{R}^n \text{ 过程并且满足 } E[\int_0^T S_t ^2 dt] < \infty\}$	
$L^2(\Omega, \mathcal{F}^W, P) := \{\xi : \xi \text{ 是 } \mathcal{F}_T^W \text{ 可测的随机变量并且满足 } E[\sup_{t \in [0, T]} \xi ^2] < \infty\}$	

第 1 章 绪论

1.1 研究背景

随着经济的发展,金融衍生品市场变得前所未有的繁盛,衍生证券的种类更呈现出多元化,但是适用于这些衍生证券的金融工具,仍并不能满足现有衍生品种类的需求。传统的定价方法中如 Black-Scholes 模型和有限差分法,其在欧式期权定价中表现出色,但在处理复杂性期权时(如美式巴黎期权),往往无法准确捕捉早期行权条件和障碍条件,这也就导致这使用传统模型对复杂衍生品进行定价时会出现显著的定价误差的情况。在风险管理方面,现实情况下的金融市场具有不确定性和剧烈波动这会使得传统的风险度量方法(如 VaR 和 CVaR)因这些不确定因素出现度量偏差,难以满足这类复杂衍生品证券的风险评估需求。因此,探索一种能够同时解决定价与风险度量问题的新方法,不仅具有重要的理论意义,还为金融市场的风险管理实践提供更加有效的金融工具。

本文选取美式巴黎期权作为研究目标,美式巴黎期权作为一种复杂的金融衍生品,其融合了美式期权和巴黎期权的特征。美式期权的特征在于其在到期日前任何时刻可以自由行使权利,而巴黎期权则带有特定的障碍条件,必须满足这些条件后期权才能生效或失效。由此引入倒向随机微分方程(BSDE)这一数学工具,其独特的逆向演化特性,使得其可以满足复杂衍生品路径依赖的问题,这使得其在复杂金融衍生品的定价与风险管理中展现出了巨大的潜力。但是目前的研究多集中于单一问题的解决,缺乏对定价与风险度量问题的系统性整合,并且传统的风险度量方法在应对复杂衍生品时存在着明显不足,无法全面反映市场的不确定性和投资者的风险偏好。这时候凸风险度量作为一种更具包容性的风险管理工具,逐渐受到学术界和业界的重视。其动态相容性和灵活性使其能够更好地应对金融市场中的不确定性,为期权风险管理提供了全新的视角。然而,如何将 BSDE 与凸风险度量有机结合,以解决美式巴黎期权的定价与风险度量问题,仍是一个亟待探索的研究方向。

本文的研究目标是通过将 BSDE 与凸风险度量相联系起来,并更加深入分析美式巴黎期权的定价与风险度量问题,探索这一结合在金融实际应用中的价值。

通过构建基于 BSDE 的美式巴黎期权定价模型,并结合凸风险度量进行风险评估,本文为复杂衍生品的定价和风险管理提供了新的理论支持和实践指导,旨在为未来的金融市场提供更加精准和创新的风险管理工具。

1.2 文献综述

1.2.1 倒向随机微分方程 (BSDE) 及其在金融领域的应用

倒向随机微分方程 (BSDE) 研究期权源于 Pardoux 和 Peng^[1]于 1990 年开创的工作,用于描述马尔可夫过程的逆向演化,BSDE 通过从终端条件逆向推导初始状态,能够有效处理路径依赖性和随机性等问题,因此其在期权定价领域得到了广泛应用。杨维强^[2]基于倒向随机微分方程建立了两类欧式期权的稳健定价公式,并通过买入价和卖出价数据进行了实证研究。苗杰^[3]利用倒向随机微分方程理论构建了满足可分离债券的倒向随机微分方程,并使用 Feynman-Kac 公式推导出相应的偏微分方程,为 BSDE 在复杂金融工具中的应用提供了实践支持。

随着对 BSDEs 理论的深入研究,研究者开始关注在随机微分方程中引入反射条件的可能性。RBSDE 的反射条件要求解必须“反射”于预设的边界上,使得方程的解在演化过程中不会超出给定范围,这在处理美式期权早期行权问题时尤为重要^[4]。由于美式期权允许投资者在到期前的任意时刻行权,其定价问题涉及最优停止时间的确定,而 RBSDE 的反射条件恰好能够有效解决这一问题。

1.2.2 美式巴黎期权的定价研究现状

美式巴黎期权作为一种美式期权和巴黎期权特性的复杂衍生品,其定价问题因涉及早期行权和障碍问题受到了国内外学术界的广泛讨论。在国外,Chesney 等^[5]通过提出了布朗运动徘徊的概念,并提供了一个包含四重积分的定价公式,用于计算巴黎期权的价格。Hugonnier^[6]则使用 Feynman-Kac 公式对累计巴黎期权进行了研究,并建立了定价公式,但该公式在连续巴黎期权的定价中仍存在一定局限性。Labart^[7]在此在此基础上进行了更详尽的研究,并推导出更详细的定价公式,采用 Euler 求和法得到了近似计算结果,为巴黎期权的数值计算提供了新的思路。国内学者宋斌等^[4]基于通过在拉普拉斯逆变换中引入欧拉求和法,加快了计算截尾级数的收敛速度,降低了计算成本,并提出了一种新的稳健对冲策略。宋斌和井帅^[8]进一步研究了美式巴黎期权的定价模型,通过数值方法解决了自由边界问题,推动了美式期权与巴黎期权的融合研究。这些研究成果不仅为美

式巴黎期权的定价提供了理论支持，也为本文基于 RBSDE 的定价分析奠定了坚实基础。

1.2.3 凸风险度量及其在风险管理中的应用

作为为期权风险评估提供了更灵活的工具，凸风险度量弱化了传统一致性风险度量中正齐次性和次可加性的假设，从而更好地应对金融市场的不确定性。该方法是继 Artzner 等人^[9]最早提出一致性风险度量，通过引入单调性、平移不变性、正齐次性和次可加性等特性，构建了风险管理的基础框架后，由 Frittelli^[10]提出的，由于凸风险度量采用较弱的凸性假设，拓宽了风险度量的应用范围。特别是在期权定价和风险评估中，凸风险度量能够更灵活地捕捉路径依赖性和风险偏好。Rosazza^[11]将 BSDE 中的 g -期望引入凸风险度量，提出了动态相容的凸风险度量方法，为风险评估提供了新的思路。Jiang^[12]进一步研究了生成元 g 与凸风险度量的关系，证明了凸风险度量的动态相容性和灵活性。

通过上述的理论基础，凸风险度量在复杂衍生品风险评估中的应用逐渐深入。郭冬梅等^[13]研究了累积和连续巴黎期权的非线性定价，并提出了相应的理论模型，为路径依赖型衍生品提供了新的定价框架。Elliott 等^[17,18]通过结合 RBSDE 与凸风险度量，提出了一种新的期权风险度量方法，并成功应用于美式期权的定价中。这些研究表明，BSDE 与凸风险度量的结合不仅能够有效解决复杂衍生品的定价问题，还能提供更加精准的风险评估工具。

1.3 论文结构

综上所述，BSDE 及其扩展形式 RBSDE 在应对复杂金融衍生品的定价时具有独特的优势，尤其是在处理路径依赖性和早期行权问题时可以表现出其特有的优越之处。同时，凸风险度量的引入为期权的风险评估提供了灵活和动态的解决方案。本文将在现有研究的基础上，结合 RBSDE 与凸风险度量构建适用于美式巴黎期权的定价与风险评估框架。

本文共分为四个章节，具体安排如下：

第 1 章为绪论。对研究背景，国内外相关研究现状，研究目标与意义进行介绍，并对论文的整体结构进行说明。

第 2 章为基于 RBSDE 的美式巴黎期权定价问题。本章通过分析美式巴黎期权的定价特征，通过反射倒向随机微分方程（RBSDE）对美式巴黎期权建立定

价模型，推导出与之相对应的偏微分方程（PDE）模型，并通过数值模拟验证模型的有效性。

第3章探讨基于RBSDE的美式巴黎期权风险度量方法。本章将RBSDE与凸风险度量理论相结合，具体通过将美式巴黎期权对损失过程进行分析，提出一种风险度量方法，并利用数值模拟分析不同市场条件下风险度量的变化规律。

第4章为总结与展望。对本文主要内容进行总结，并给出未来可以研究的方向。

第 2 章 基于 RBSDE 的美式巴黎期权定价

本章研究了美式巴黎期权早期行权的问题。将美式巴黎期权的价格问题表述为倒向随机微分方程，并在 Markov 状态下将其与抛物型偏微分方程关联，将期权特性表述为自由边界问题，从而得到了相应的偏微分方程表达式。数值分析显示，在不同波动率和利率水平下，反射倒向随机微分方程能够有效解决美式巴黎期权的早期行权问题，并且波动率和利率对期权定价有显著影响。

2.1 预备知识

考虑概率测度空间 $(\Omega, \mathcal{F}_t^W, P)$ ，用于表示股票和债券的金融市场 (B-S 市场) 环境, W_t 为 d-维 Brown 运动, 用于表述市场上的一些未知的不可预测的因素, $\mathcal{F}_t^W$ 表述由 W_t 生成的 σ 域流, 用于表述到 t 时刻的市场信息。引入下面两个空间:

$$L^2(0, T) := \{S : S_t \text{ 是 } \mathcal{F}_t^W \text{ 的适应 } \mathbb{R}^n \text{ 过程并且满足 } E[\int_0^T |S_t|^2 dt] < \infty\}$$

$$L^2(\Omega, \mathcal{F}^W, P) := \{\xi : \xi \text{ 是 } \mathcal{F}_T^W \text{ 可测的随机变量并且满足 } E[\sup_{t \in [0, T]} |\xi|^2] < \infty\}$$

本地无风险资产的价格过程 B_t , 风险资产 S_t 的价格过程表示如下:

$$\begin{cases} B_t = \exp(\int_0^t r(u) du), \\ B_0 = 1, \\ dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dW_t, \\ S_0 = s_0 > 0. \end{cases} \quad (2.1.1)$$

考虑与上述两个价格过程对应反射倒向随机微分方程:

$$\begin{cases} -dY_t = g(t, y, z) dt + dK_t - Z_t dW_t, \\ Y_T = \xi. \end{cases} \quad (2.1.2)$$

方程中, ξ 表示美式巴黎向上敲出期权的终端支付; 生成元 $g(t, y, z)$ 表示一种定价机制; Z_t 表示投资组合; Y_t 表示 t 时刻的期权价格。

进一步, 假设方程 2.1.2 的相关系数满足下列假设:

$$H0. E[\int_0^T |g(t, y, z)|^2 dt] < \infty$$

H1. 函数 $g(t, y, z) \in L^2$, 对于所有的 $(y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 。存在一正常数 M , 对所有的 $t \in [0, T]$ 和 $(y_1, z_1), (y_2, z_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, 满足下面的 Lipschitz 条件:

$$|g(t, y_1, z_1) - g(t, y_2, z_2)| \leq M(|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|).$$

H2. 关于生成元 $g(t, y, z) \in L^2$, 关于 y 线性增长, 关于 z 平方增长, 并且存在

$$\alpha, \beta, \gamma > 0 \text{ 且 } \alpha \geq \frac{\beta}{\gamma}. \text{ 即 } |g(t, y, z)| \leq \alpha + \beta|y| + \frac{\gamma}{2}|z|^2.$$

H3. 障碍 O_t 是一个有界的连续过程, 满足以下条件:

$$E[\sup_{t \in [0, T]} (O_t^+)^2] < \infty.$$

其中 $O_t^+ := \max(O_t, 0)$, 并且 $O_T \leq \xi$ 。

H4. $\{K(t) | t \in \Gamma\}$ 这是一个递增的过程, 满足以下条件:

$$Y_t \geq O_t, \int_0^t (Y_t - O_t) dK_t = 0.$$

$$H5. dP \times dt - a.s., g(t, 0, 0) = 0.$$

引理 2.1 (存在唯一性定理) ^[4] 假设条件 H0, H2, H3, H4 成立的情况下, 则以 (ξ, g, O) 为参数的反射倒向随机微分方程存在至少一个解, 假设 H0-H5 成立的情况下则 RBSDE 存在唯一解 (Y, Z, K) 。

引理 2.2 (比较定理) ^[4] 假设条件 H0-H5 满足的条件下, 对于任意的 $\xi_1 \leq \xi_2, O_1 \leq O_2$, $g_1(t, y, z) \leq g_2(t, y, z), \forall (t, y, z) \in [0, T]$, 则有 $Y_1^1 \leq Y_1^2$ 。

考虑一个美式巴黎期权, 假设 D 是持续时间, J 是障碍水平。根据美式巴黎期权特征, 引入状态变量 H 来描述截止在时刻 t , 资产价格 S_t 不低于障碍 J 的持续时间:

$$H_t = t - \sup\{t' \leq t | S_{t'} \leq J\}. \quad (2.1.3)$$

持续时间导数形式:

$$dH_t \begin{cases} dt & S_t > J, \\ -H_{t-} & S_t = J, \\ 0 & S_t < J. \end{cases} \quad (2.1.4)$$

其中 H_{t-} 是连续持续时间变量 H 在 t 时刻的左极限。

为了简化市场金融资产的定价，引入风险中性测度 Q 。这个测度下所有的资产收益都将以无风险利率折现。基于美式巴黎期权的特性，引入 V_t 作为美式巴黎期权的价值过程。在风险中性测度下 V_t 的值由以下最优停时问题的解来确定：

$$V_t = \text{ess} \cdot \sup E^Q[(O_{\tau} I_{\{\tau < T\}} + \xi I_{\{\tau = T\}}) I_{\{H_t \leq D\}} | \mathcal{F}^W].$$

在这里 E^Q 表示 Q 下的期望； I_A 是事件 A 的指示函数。

通过 V_t 构建美式巴黎期权非线性定价模型。将 V_t 带入到公式 (2.1.2) 并且满足假设 H0-H5 那么连续美式巴黎期权模型如下：

$$\begin{cases} -dV_t = [-r_t V_t - \pi_t (\mu_t - r_t)] dt + dK_t - \pi_t \sigma_t dW_t, \\ V_T = \xi I_{\{H_T \leq D\}}, V_t \geq O_t, \int_0^T (V_t - O_t) dK_t = 0, t \in [0, T]. \end{cases} \quad (2.1.5)$$

最优停止时间 $\tau^* = \inf\{u \in [t, T] | V_u = O_u\}$ ，其中 r_t 表示利率演变， μ_t 表示回报率， σ_t 表示风险资产的波动率。 V_t 为价值过程， π_t 为投资组合， O_t 为障碍过程，使得价值过程始终在其之上， K_t 是一个递增的实值过程，并且 $K_0 = 0$ ，在这里 K_t 可以被解释为一个累积消费过程，根据引理 2.1，2.2 可知上述 RBSDE 有唯一的三重解 $\{V_t, \pi_t, K_t | t \in [0, T]\}$ 。

命题 2.1 连续美式巴黎期权关于障碍 J 是递增的，当且仅当 $J=0$ 时标的资产为正，且 D 达到无穷大，美式连续巴黎期权退化为普通美式期权。

证明： 由引理 2.2（比较定理），由 $\xi_1 \leq \xi_2$ ， $O_t^1 \leq O_t^2$ ， $g_1(t, y, z) \leq g_2(t, y, z)$ ， $\forall (t, y, z) \in \Gamma$ ，则有以下 $Y_t^1 \leq Y_t^2$ 。

现在设立两个障碍值 J^1, J^2 且 $J^1 \geq J^2$ 根据引理 2.1 可知当其对应的 H_t 。所以对应的终端条件：

$$\xi I_{\{H^1(t) \leq D\}} \geq \xi I_{\{H^2(t) \leq D\}}.$$

根据比较定理可得：

$$V_t^1 \geq V_t^2.$$

当障碍值 $J = 0$ 时, $\xi I_{\{H_t \leq D\}} = 0$ 根据引理 2.1, 以及 H5 可得 $V_t = 0$ 。当 $D \rightarrow \infty$ 时, $D > T$ 。美式连续巴黎期权在到期日前不会达到敲出条件, 退化为普通美式期权。

命题 2.2 连续美式巴黎期权价格关于持续时间 D 是递增的, 当 $D = 0$ 时, 美式连续巴黎期权达到障碍水平即失效, 且无法提前行权, 退化为欧式障碍期权, 同时当 $J \rightarrow \infty$ 时, 美式连续巴黎期权将再次退化, 变为普通欧式期权

证明: 由引理 2.2 (比较定理), 对于所有的 $\xi_1 \leq \xi_2$, $O_t^1 \leq O_t^2$, $g_1(t, y, z) \leq g_2(t, y, z)$, $\forall (t, y, z) \in \Gamma$, 则有, $Y_t^1 \leq Y_t^2$ 。

设置两个 D^1, D^2 且 $D^1 \geq D^2$ 。根据引理 2.1 可知当其对应的 H_t 。所以对应的终端条件:

$$\xi I_{\{H_t^1 \leq D\}} \geq \xi I_{\{H_t^1 \leq D^2\}}.$$

根据比较定理可得:

$$V_t^1 \geq V_t^2.$$

当美式巴黎期权 $D = 0$ 时, 在整个价格过程中期权达到障碍价格就会失效并且在到期日之前无法早期行使权力。美式巴黎期权退化为欧式障碍期权。同时 $J \rightarrow \infty$ 时, 整个价格过程无法达到障碍价格, 美式巴黎期权退化为普通欧式期权。

2.2 连续美式巴黎期权 PDE 表达式

本节中将使用 Feynman-kac 公式将反射倒向随机微分方程转化为一个抛物型偏微分方程, 为此需要构建一个 Markov 状态下的市场条件。在 Markov 条件下, 风险资产 $S_s^{t,x}$ 和无风险资产 $B_s^{t,x}$ 的价格过程由以下构成:

$$\begin{cases} dS_s^{t,x} = \mu(s, S_s^{t,x}) S_s^{t,x} ds + \sigma(s, S_s^{t,x}) S_s^{t,x} dW_s, s \geq t, \\ S_s^{t,x} = x > 0, \\ dB_s^{t,x} = r(s, S_s^{t,x}) B_s^{t,x} ds, \\ B_0^{t,x} = 0. \end{cases} \quad (2.2.1)$$

风险资产 $S_s^{t,x}$ 的价格过程的生成元算子:

$$L_t = \mu_{t,x} x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma_{t,x}^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}. \quad (2.2.2)$$

在满足假设 H1-H5 的情况下，考虑以下形式 Markov 过程的 RBSDE:

$$\begin{cases} -dV_s^{t,x} = [(-r(s, S_s^{t,x})V_s^{t,x} - \pi_s^{t,x})(\mu(s, S_s^{t,x}) - r(s, S_s^{t,x}))]ds + dK_s^{t,x} \\ -\pi_s^{t,x}\sigma(s, S_s^{t,x})dW_s, \\ V_T^{t,x} = l_{T, S_T^{t,x}}, \\ V_s^{t,x} \geq h_{s, S_s^{t,x}}, \\ \int_t^T (V_s^{t,x} - h_{s, S_s^{t,x}})dK_s^{t,x} = 0, \end{cases} \quad (2.2.3)$$

该方程最优停止时间为: $\tau^* = \inf\{s \in [t, T] | V_u^{t,x} = h_1(u, S_u^{t,x})\}$ 。其中 $V_s^{t,x}$ 为美式巴黎期权的价值过程；障碍过程 $O_s^{t,x} = h(s, S_s^{t,x})$ ；终端条件: $\xi = l_{T, S_T^{t,x}}$ ，根据的引理 2.1 可知 $\{V_s^{t,x}, \pi_s^{t,x}, K_s^{t,x} | s \in [t, T]\}$ 是 RBSDE 的唯一解。

类似文献^[4]，建立了在 Markov 框架中偏微分方程障碍问题的 RBSDE 解和粘性解之间的联系。

引理 2.3 假设系数 μ, σ, g, l, h 关于 t, x 的函数连续。那么函数 $u(t, x)$ 为以下障碍问题的粘性解:

$$\begin{cases} \min(u_{t,x} - h_{t,x}, \frac{\partial u_{t,x}}{\partial t} - L_t u_{t,x} - g(t, x, u_{t,x}, \sigma_{t,x} x \frac{\partial u_{t,x}}{\partial x})) = 0, \\ u_{T,x} = l_{T,x}, (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

在 Markov 条件下，RBSDE 中的变量及过程都是关于时间 t ，空间 x （代表股价）的函数，将上述变量表述为以下形式:

$$\begin{cases} V_s^{t,x} = v_{t,x}, \\ g(t, x, u_{t,x}, \sigma_{t,x} x \frac{\partial u_{t,x}}{\partial x}) = r_{t,x} v_{t,x} + \pi_{t,x} (\mu_{t,x} - r_{t,x}), \\ \pi_{t,x} \sigma_{t,x} = \sigma_{t,x} x \frac{\partial v_{t,x}}{\partial x}, \\ S_s^{t,x} = x > 0. \end{cases}$$

定理 2.1 $V_s^{t,x}$ 是关于 (t, x) 的一个确定的函数。那么 $V_s^{t,x}$ 可以表示为以下障碍问

题的粘性解:

$$\begin{cases} \min(u_{t,x} - h_{t,x}, \frac{\partial u_{t,x}}{\partial t} - L_t u_{t,x} - g(t, x, u_{t,x}, \sigma_{t,x} x \frac{\partial u_{t,x}}{\partial x})) = 0, \\ u_{T,x} = l_{T,x}, (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

从而美式期权为以下障碍问题的解:

$$\begin{cases} \min(v_{t,x} - h_{t,x}, \frac{\partial v_{t,x}}{\partial t} + r_{t,x} x \frac{\partial v_{t,x}}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma_{t,x}^2 x^2 \frac{\partial^2 v_{t,x}}{\partial x^2} - r_{t,x} v_{t,x}) = 0, \\ v_{T,x} = l_{T,x}, (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

证明: 由 Feynman-kac 公式可得:

$$\begin{cases} \frac{\partial V_s^{t,x}}{\partial t} + L_t V_s^{t,x} + g(t, x, V_s^{t,x}, \pi_{t,x} \sigma_{t,x} x) = 0, \\ V_T^{t,x} = l_{T,x}. \end{cases}$$

进一步有:

$$\begin{cases} V_s^{t,x} = v_{t,x}, \\ g(t, x, u_{t,x}, \sigma_{t,x} x \frac{\partial u_{t,x}}{\partial x}) = r_{t,x} v_{t,x} + \pi_{t,x} (\mu_{t,x} - r_{t,x}), \\ \pi_{t,x} \sigma_{t,x} = \sigma_{t,x} x \frac{\partial v_{t,x}}{\partial x}, \\ L_t = \mu_{t,x} x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma_{t,x}^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}. \end{cases}$$

从而有:

$$\begin{cases} \frac{\partial v_{t,x}}{\partial t} + (\mu_{t,x} x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma_{t,x}^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}) v_{t,x} + g(t, x, v_{t,x}, \sigma_{t,x} x \frac{\partial v_{t,x}}{\partial x}) = 0, \\ v_{T,x} = l_{T,x}. \end{cases}$$

将上式化简可得:

$$\begin{cases} \frac{\partial v_{t,x}}{\partial t} + r_{t,x} x \frac{\partial v_{t,x}}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma_{t,x}^2 x^2 \frac{\partial^2 v_{t,x}}{\partial x^2} - r_{t,x} v_{t,x} = 0, \\ v_{T,x} = l_{T,x}. \end{cases}$$

下面对美式巴黎期权特性进行分析, 将障碍过程 $h_{t,x}$ 定义为期权的内在价值,

$v_{t,x}$ 表示期权的市场价值。 $v_{t,x} - h_{t,x}$ 表示美式巴黎期权的市场价格与其内在价值的差值。

(1). $v_{t,x} - h_{t,x} > 0$ 美式巴黎期权的市场价值高于其内在价值，持有者不会立即行使期权，市场预期未来可能有更大的收益。

(2). $v_{t,x} - h_{t,x} = 0$ 美式巴黎期权的市场价值等于其内在价值，期权持有者无差异于立即行使或继续持有，期权的时间价值为零，市场预期未来获得额外收益的可能性很小。

(3). $v_{t,x} - h_{t,x} < 0$ 美式巴黎期权的市场价值低于其内在价值，意味着市场存在套利机会，低价买入期权并立即行使可获无风险利润，实际市场中这种情况会迅速被套利交易消除。

为了充分处理美式期权的早期行权行为。在二者之间取最小值，这反映了期权持有者在每一时刻的决策：是选择继续持有期权，还是立即行使期权。

$$\begin{cases} \min(v_{t,x} - h_{t,x}, \frac{\partial v_{t,x}}{\partial t} + (\mu_{t,x}x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma_{t,x}^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}) v_{t,x} + g(t, x, v_{t,x}, \sigma_{t,x} x \frac{\partial v_{t,x}}{\partial x}) = 0 \\ v_{T,x} = l_{T,x}, (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

将其化简可得：

$$\begin{cases} \min(v_{t,x} - h_{t,x}, \frac{\partial v_{t,x}}{\partial t} + r_{t,x}x \frac{\partial v_{t,x}}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma_{t,x}^2 x^2 \frac{\partial^2 v_{t,x}}{\partial x^2} - r_{t,x}v_{t,x}) = 0 \\ v_{T,x} = l_{T,x}, (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

2.3.数值模拟

本节将对美式巴黎期权中巴黎期权特性进行分析，已知巴黎期权只有当标的资产达到障碍水平，并且持续一段时间才会敲出或敲入。将其表述为一个自由边界问题，并得到其自由边界表达式。最后使用蒙特卡洛模拟对模型在不同市场参数下期权价格与标的资产价格关系。

将自由边界划分为两个区域：持有区域和执行区域。在持有区域 $x < J$ ，价值函数被定义为 $v_{t,x}^1$ ，而在执行区域 $x \geq J$ ，价值函数被定义为 $v_{t,x,h}^2$ 。此外，将持续时间的概念引入执行区域模型中。

考虑以下形式的美式巴黎期权 RBSDE 非线性定价模型:

$$\begin{cases} -dV_s^{t,x} = [-r(s, S_s^{t,x})V_s^{t,x} - \pi_s^{t,x}(\mu(s, S_s^{t,x}) - r(s, S_s^{t,x}))]ds + dK_s^{t,x} \\ -\pi_s^{t,x}\sigma(s, S_s^{t,x})dW_s, \\ V_T^{t,x} = l_{T,x}, \\ V_s^{t,x} \geq h_{s,x}, \\ \int_t^T (V_s^{t,x} - h_{s,x})dK_s^{t,x} = 0. \end{cases}$$

根据定理 2.1 将其转换为 PDE 形式:

$$\begin{cases} \min(v_{t,x} - h_{t,x}, \frac{\partial v_{t,x}}{\partial t} + r_{t,x}x \frac{\partial v_{t,x}}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma_{t,x}^2 x^2 \frac{\partial^2 v_{t,x}}{\partial x^2} - r_{t,x}v_{t,x}) = 0, \\ v_{T,x} = l_{T,x}, (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

将边界条件划分为两个系统分别处理在障碍价格上下的两种情况。自由边界表达式如下所示:

$$\begin{aligned} \text{持有区域: } & \begin{cases} \min(v_{t,x}^1 - h_{t,x}^1, \frac{\partial v_{t,x}^1}{\partial t} + r_{t,x}x \frac{\partial v_{t,x}^1}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma_{t,x}^2 x^2 \frac{\partial^2 v_{t,x}^1}{\partial x^2} - r_{t,x}v_{t,x}^1) = 0, \\ v_{t,0}^1 = 0, \\ v_{t,J}^1 = v_{t,J,0}^2, \\ v_{T,x}^1 = (x - K)^+, \\ t \in [0, T], x \in [0, L]. \end{cases} \\ \text{执行区域: } & \begin{cases} \min(v_{t,x,h}^2 - h_{t,x,h}^2, \frac{\partial v_{t,x,h}^2}{\partial t} + \frac{\partial v_{t,x,h}^2}{\partial h} + r_{t,x,h}x \frac{\partial v_{t,x,h}^2}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma_{t,x,h}^2 x^2 \frac{\partial^2 v_{t,x,h}^2}{\partial x^2} - r_{t,x,h}v_{t,x,h}^2) = 0, \\ v_{t,+\infty,h}^2 = 0, \\ v_{t,x,D}^2 = 0, \\ v_{t,J,h}^2 = v_{t,J}^1, \\ t \in [\tau, T], h \in [0, D], x \in [L, +\infty]. \end{cases} \end{aligned}$$

边界条件: 将障碍过程 $h_{t,x}$ 规定为在 t 时刻的支付函数即 $\max(x - K, 0)$ 。

根据 $v_{t,x}^1 - h_{t,x}^1 \geq 0$ 情况下对上述边界条件进行分析可得:

(1).持有区域边界条件: 对于时间 $t \in [0, T]$, 资产价格 $x \in [0, L]$ 。当标的资产

价格 $x = 0$ 时, 期权价值为 0,

$$v_{t,0}^1 = 0. \quad (2.3.1)$$

当 $t=T$ 时期权未被敲出, 按终端条件进行支付,

$$v_{T,x}^1 = (S_T^{t,x} - K)^+. \quad (2.3.2)$$

当标的资产价格在 $x = J$ 时, 即达到障碍水平, 由持有区域转化到执行区域, 连接边界条件为:

$$v_{t,J}^1 = v_{t,J,0}^2. \quad (2.3.3)$$

(2). 执行区域边界条件: 对于时间 $t \in [\tau, T]$, 资产价格 $x \in [L, +\infty]$ 。当标的资产价格 $x \rightarrow +\infty$ 时, 在实际状况中不可能达到这种情况。期权必定达到敲出水平,

$$v_{t,+\infty,h}^2 = 0. \quad (2.3.4)$$

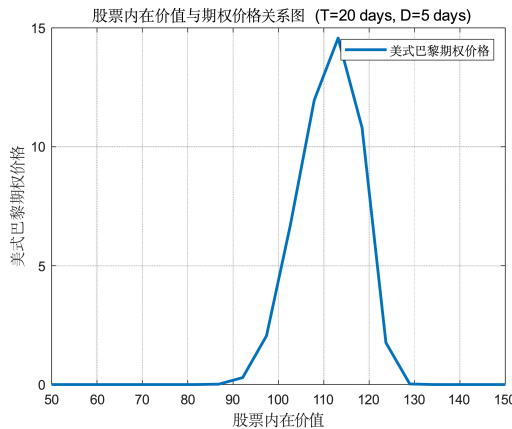
当持续时间 $\tau = D$ 时, 期权失效,

$$v_{t,x,D}^2 = 0. \quad (2.3.5)$$

当标的资产价格在 $x = J$ 时, 即由执行区域跳转到持有区域, 连接边界条件为:

$$v_{t,J,h}^2 = v_{t,J}^1. \quad (2.3.6)$$

考虑具有两种基本证券的 B-S 市场, 即由债券和股票两个资产所构成。设置期权的障碍水平为 $J = 120$, 执行价格 $K = 10$, 到期时间 $T = 20$ 天, 持续时间 $D = 5$ 天, 市场波动规律 $\sigma = 0.2$, 无风险利率 $r = 0.05$ 连续复利计算。

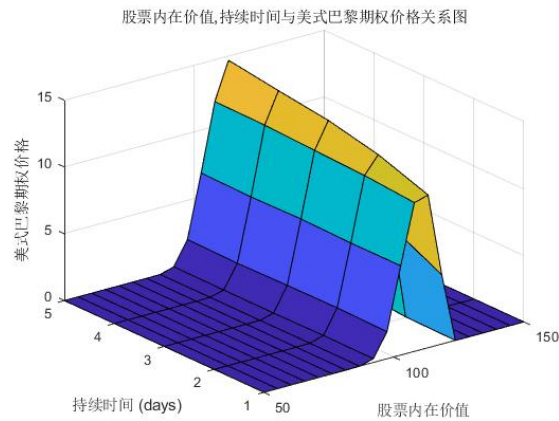


图一股票内在价值与美式期权价格关系图

Figure 1: Relationship between Intrinsic Value of Stock and American Option Price

图一描述了股票内在价值与美式巴黎期权价格的关系。如图所示, 当股票价

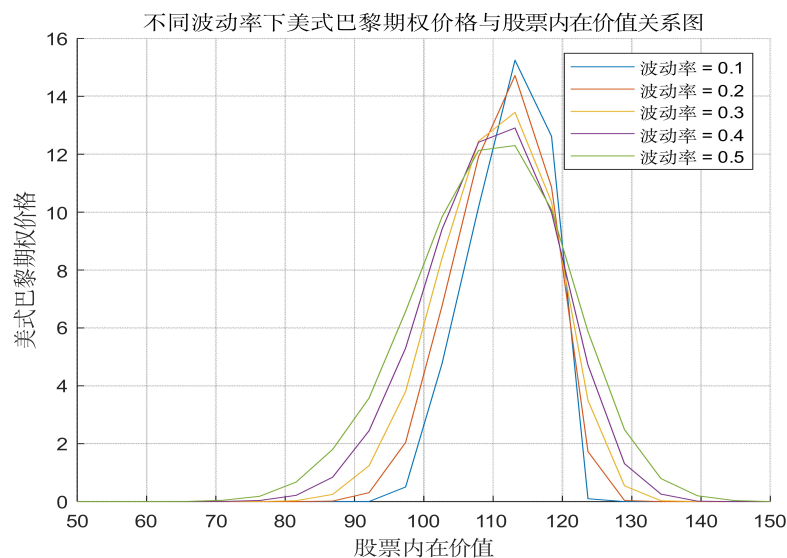
格接近执行价格 100 时, 期权价格的增长速度显著加快, 表明敲出特征愈发明显。在股票价格达到障碍水平 120 后, 期权价格迅速降为零, 这表明期权达到了敲出条件并因此失效。这一现象符合美式巴黎期权的特性。



图二股票内在价值, 持续时间与美式巴黎期权价格关系图

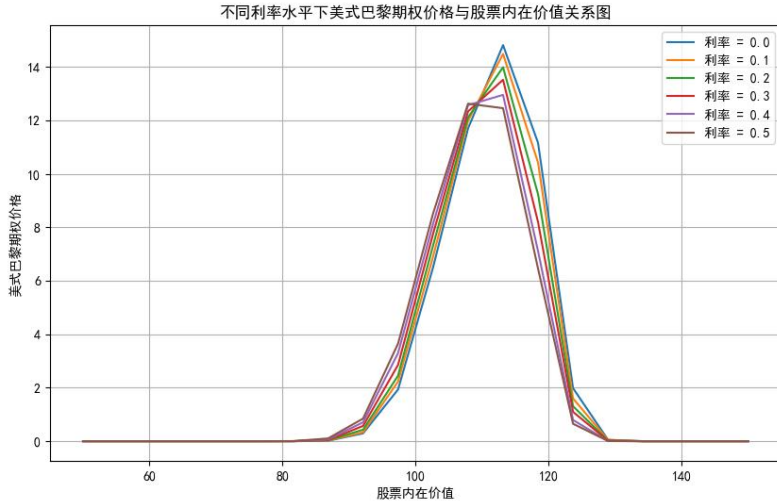
Figure 2: Relationship between Intrinsic Value, Duration, and American Parisian Option Price

在图二中引入了持续时间变量, 表示期权在达到障碍水平时所停留的时间。如图所示, 随着持续时间从低到高的增加, 期权价格也不断上升, 这表明期权价格与持续时间密切相关。当期权达到障碍水平时, 其价格依赖于持续时间的长短, 这种关系是递增的。这一结果证明了命题 2.2 中的结论。



图三股票与期权价格在不同波动率市场下的关系

Figure 3: Relationship between Stock and Option Prices under Different Market Volatilities



图四股票与期权价格在不同利率水平下的关系

Figure 4: Relationship between Stock and Option Prices under Different Interest Rate Levels

图三和图四分别展示了在不同市场条件下，股票价格与期权价格的关系。

在图三中，市场波动率从低到高逐步增加。可以看出，在低波动率情况下，期权价格的峰值显著高于高波动率下的峰值；同时，低波动率下的峰宽明显小于高波动率情况下的峰宽。这一现象符合市场波动对期权价格的影响，验证了模型的合理性和说服力。

图四展示了不同利率水平下股票价格与期权价格的关系。随着利率的增加，期权价格的峰值逐渐降低，但峰宽几乎不变。这表明利率水平对期权价格的影响主要体现在峰高上，而对峰宽的影响较小。

2.4 本章总结

本章主要通过将反射倒向随机微分方程与美式巴黎期权特性相结合，构造出符合美式巴黎期权特性的定价模型，并且给出了反射倒向随机微分方程 (RBSDE) 相耦合的偏微分方程 (PDE) 表达式，通过自由边界进行约束使其满足这类复杂期权的机制。最后进行数值模拟使得其更具有说服力，并验证了模型的准确性。通过实验可以看出反射倒向随机微分方程在期权定价中的重要应用价值。该方法不仅提供了一个解决美式期权早期行权问题的有效工具，还通过数值分析展示了其在实际金融市场中应用的潜力。

第 3 章 基于 RBSDE 的美式巴黎期权风险度量

在本章中，研究了美式巴黎期权的风险度量问题。将凸风险度量引入损失模型，并将其表述为最优停止问题，证明了凸风险度量可以作为最优停止问题的解函数，在给定条件下，凸风险度量可以作为标的资产对应期权损失变量关联的 RBSDE 的解。同时给出了美式巴黎期权风险度量的 PDE 表达式。数值模拟凸风险度量在不同风险厌恶系数下的变化，以及上下确界风险度量的关系，结果显示，不同风险偏好对期权所面临的风险有显著影响，特别是在不同市场条件下凸风险度量的变化更为明显。

3.1 基本记法和主要结论

设 $T \in (0, \infty)$ 为给定的终端时刻， $\{W_t\}_{t \in [0, T]}$ 是 d -维 Brown 运动 $(\Omega, \mathcal{F}_t^W, P)$ 为完备概率空间， $\{\mathcal{F}_t^W\}_{t \in [0, T]}$ 是由该布朗运动 W_t 生成的 σ 域流。

定义两类过程的空间如下：

$$L^2(0, T) := \{S : S_t \text{ 是 } \mathcal{F}_t^W \text{ 的适应 } \mathbb{R}^n \text{ 过程并且满足 } E[\int_0^T |S_t|^2 dt] < \infty\},$$

$$L^2(\Omega, \mathcal{F}^W, P) := \{\xi : \xi \text{ 是 } \mathcal{F}_T^W \text{ 可测的随机变量并且满足 } E[\sup_{t \in [0, T]} |\xi|^2] < \infty\}.$$

对于一般形式标的资产价格过程

$$\begin{cases} dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dW_t, \\ S_0 = s_0 > 0. \end{cases} \quad (3.1.1)$$

考虑与之对应的反射倒向随机微分方程 (RBSDE)

$$\begin{cases} -dY_t = g(t, Y_t, Z_t)dt + dK_t - Z_t dW_t, \\ Y_T = \xi I_{\{H_T \leq D\}}, Y_t \geq f_t, \int_0^t (Y_t - f_t) dK_t = 0, t \in [0, T]. \end{cases} \quad (3.1.2)$$

其中 ξ 为终端支付； $g(t, y, z)$ 为生成元，表示其定价机制； Z_t 表示资产组合； Y_t 为在 t 时刻期权的价格； f_t 为障碍过程，确保价格始终在障碍过程之上； $I_{\{H_t \leq D\}}$ 为指示函数，其包含美式巴黎期权特性，其中 $H_t = t - \sup\{t' \leq t \mid S_{t'} \leq L\}$ ，表示美式巴黎期权达到障碍水平的持续时间； K_t 是一个递增的实值过程，并且 $K_0 = 0$ ，

在这里 K_t 可以被解释为一个累积消费过程。生成元 g 满足以下假设:

$$H0. E[\int_0^T |g(t, y, z)|^2 dt] < \infty.$$

H1. 函数 $g(t, y, z) \in L^2$, 对于所有的 $(y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 。存在一正常数 M , 对所有的 $t \in [0, T]$ 和 $(y_1, z_1), (y_2, z_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, 满足下面的 Lipschitz 条件:

$$|g(t, y_1, z_1) - g(t, y_2, z_2)| \leq M(|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|);$$

$$H2. g(t, 0, 0) = 0.$$

H3. g 关于 y 和 z 是凸的即对任意的 $(y_1, y_2), (z_1, z_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \lambda \in (0, 1)$ 有以下

$$g(t, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2, \lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2) \leq \lambda g(t, y_1, z_1) + (1 - \lambda)g(t, y_2, z_2).$$

H4. g 独立于 y 关于 z 是凸的

$$g(t, \cdot, \lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2) \leq \lambda g(t, \cdot, z_1) + (1 - \lambda)g(t, \cdot, z_2).$$

H5. 生成元 g 关于 y 是非增的。

引理 3.1 (存在唯一性定理) ^[4] 假设条件 H0, H1 成立的情况下, 则以 (ξ, g, f) 为参数的反射倒向随机微分方程存在至少一个解, 假设 H0-H2 成立的情况下则 RBSDE 存在唯一解 (Y, Z, K) 。

引理 3.2 (比较定理) ^[4] 假设条件 H0-H1 全部满足的条件下, 对于任意的 $\xi_1 \leq \xi_2$, $f_1 \leq f_2$, $g_1(t, y, z) \leq g_2(t, y, z) \forall (t, y, z) \in \Gamma$, 则有 $Y_t^1 \leq Y_t^2$ 。

为考虑与标的资产对应衍生证券的风险, 引入凸风险度量的概念。

定义 3.1 设 φ 是在 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的下有界随机变量的构成的集合, 定义一个凸风险度量 ρ 满足以下属性:

- (1). (平移不变性) 如果 $L \in \varphi$ 并且 $a \in \mathbb{R}$, 则有 $\rho(L + a) = \rho(L) - a$ 。
- (2). (单调性) 对于 $L_1, L_2 \in \varphi$, 并且 $L_1(\omega) \geq L_2(\omega)$, 则对于所有 $\rho(L_1) \leq \rho(L_2)$ 。
- (3). (凸性) 对于 $L_1, L_2 \in \varphi, \lambda \in (0, 1)$, 则 $\rho(\lambda L_1 + (1 - \lambda)L_2) \leq \lambda \rho(L_1) + (1 - \lambda)\rho(L_2)$ 。
- (4). (正则性) $\rho(0) = 0$ 。

设 $\cdot$ 为一个绝对连续于 P 的概率测度 θ 。其中 $\theta \in [\theta^-, \theta^+]$ 。考虑以下形式的凸风险度量:

$$\rho(L) = \sup_{\theta \in \cdot} \{E^\theta[-L] - \eta(\theta)\}. \quad (3.1.3)$$

对于一只美式连续向上敲出巴黎期权, 假设其在 t 时刻建立, $t + d$ 时刻清算,

其障碍水平为 L ，持续时间为 D 。引入 $\Delta V_{t,\tau}$ 代表损失变量，定义如下：

$$\Delta V_{t,\tau} = V_t - \exp(-\int_t^\tau r_u du) V_\tau. \quad (3.1.4)$$

其中 $V_\tau = \text{ess} \cdot \sup E^\theta[(g_\tau I_{\{t < T\}} + \xi I_{\{T=T\}}) I_{\{H_s \leq D\}} | \mathcal{F}_\tau^W]$ 代表期权路径上所有达到障碍水平的价值过程的集合； $H_t = t - \sup\{t' \leq t | S_{t'} \leq L\}$ ，表示美式巴黎期权达到障碍水平的持续时间；其中 r_u 表示利率演变； τ 代表美式巴黎期权停止的时间。 $\Delta V_{t,\tau}$ 是一个实值的 $\mathcal{F}_\tau^W$ 可测的过程，可知 $\Delta V_{t,\tau}$ 为损失变量，描述两个期权价格的贴现差值。

进一步引入惩罚函数，规定一个固定时间 $[t, t+d]$ ，对于所有的 $\theta \in \cdot$ 有

$$E^\theta[\int_t^{t+d} |\lambda(u, S_u, \theta_u)| du + |g(S_u)|] < \infty.$$

在固定时间中惩罚函数定义如下：

$$\eta_{t,t+d}(p^\theta) = E^\theta[\int_t^{t+d} |\lambda(u, S_u, \theta_u)| du + |g(S_u)|]. \quad (3.1.5)$$

其中 $\lambda: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [\theta^-, \theta^+] \rightarrow R$ 和 $g_t: R \rightarrow R$ 是两个有界可测的凸函数， $g(S_u)$ 是在停止时间 u 到终端时刻 $t+d$ 的终端损失； $\lambda(t, S_u, \theta_u)$ 为运行成本（或称为成本函数），衡量在时间 u ，价格路径 S_u ，投资者不同风险偏好 θ_u 所产生的即时代价。

从而对于 t 时刻期权损失变量，则有其对应的凸风险

$$\rho(\Delta V_{t,\tau} | \mathcal{F}_u^W) = \text{ess} \cdot \sup_{\theta \in \cdot} \{E^\theta[\Delta V_{t,\tau} | \mathcal{F}_u^W] - \eta_{p^\theta}\}. \quad (3.1.6)$$

η_{p^θ} 是关于概率测度 P^θ 的惩罚函数表示对不同市场情景的风险厌恶； $\cdot$ 是一组可能的概率测度集合。

定理 3.1 $\{\Delta V_{t,\tau}\}_{t \leq \tau \leq t+d}$ 是一个 $\{\mathcal{F}_u^W\}$ 适应的期权损失过程，满足正则性条件，则其凸风险度量可以表示为一个随机最优停止问题的解：

$$\rho(\Delta V_{t,\tau} | \mathcal{F}_u^W) = \sup_{\theta \in \cdot, \tau \in [u, t+d]} J_u.$$

其中

$$J_u = E^\theta[\Delta V_{t,\tau} - \int_u^\tau \lambda(t, S_u, \theta_u) du - g(S_\tau) | \mathcal{F}_u^W].$$

假设成本函数 $\lambda(t, S_u, \theta_u)$ 和损失变量 $\Delta V_{t,\tau}$ 满足 Lipschitz 条件，则上述凸风险度量为最优停止问题的最优值函数。

命题 3.1 设 V_t 为期权在 t 时刻的价值, V_τ 为期权在 τ 时刻的价值, r 为贴现率, $t+d$ 为期权的到期时间, τ 为随机停止时刻。则上确界(最坏情况下) 风险度量可以表述为以下随机最优停止问题:

$$\rho_1(\Delta V_{t,\tau} | \mathcal{F}_{u_1}^W) = \text{ess} \sup_{\theta \in \cdot, \tau \in [u, t+d]} J_{u_1}^{\tau, \theta}.$$

命题 3.2 设 V_t 为期权在 t 时刻的价值, V_τ 为期权在 τ 时刻的价值, r 为贴现率, $t+d$ 为期权的到期时间, τ 为随机停止时刻。则下确界(最优情况下) 风险度量可以表述为以下随机最优停止问题:

$$J_{u_2}^{\tau, \theta} = \text{ess} \inf_{\tau \in [u, t+d]} \rho_2(\Delta V_{t,\tau} | \mathcal{F}_{u_2}^W).$$

通过 V_t 构建美式巴黎期权非线性定价模型。并且 V_t 满足假设 H0-H5 那么连续美式巴黎期权模型如下:

$$\begin{cases} -dV_u = [-r_u V_u - \pi_u (\mu_u - r_u)] du + dK_u - \pi_u \sigma_u dW_u, \\ V_{t+d} = \xi I_{\{H_t \leq D\}}, V_u \geq f_u, \int_t^{t+d} (V_u - f_u) dK_u = 0, u \in [t, t+d]. \end{cases} \quad (3.1.7)$$

最优停止时间 $\tau^* = \inf\{\tau \in [t, t+d] | V_\tau = f_\tau\}$, 其中 r_u 表示利率演变, μ_u 表示回报率, σ_u 表示风险资产的波动率。 V_u 为价值过程, π_u 为投资组合, K_u 是一个递增的实值过程, 并且 $K_0 = 0$, 在这里 K_u 可以被解释为一个累积消费过程, 根据引理 3.1, 3.2 可知上述 RBSDE 有唯一的三重解 $\{V_u, \pi_u, K_u | u \in [t, t+d]\}$ 。

通过对上述期权定价模型引入基于损失变量的 RBSDE 模型:

$$\begin{cases} \Delta Y_{t,u} = \Delta Y_{t,t+d} + \int_t^{t+d} H(u, S_u, Z_u) du + K_{t+d} - K_u - \int_u^{t+d} Z_u dW_u, \\ \Delta Y_{t,t+d} = V_t - \exp(-\int_t^{t+d} r_u du) V_{t+d} - g(S_{t+d}), \\ \Delta Y_{t,u} \geq f_{t,u} = V_t - \exp(-\int_t^u r_u du) V_u - g(S_u), \\ \int_t^{t+d} \Delta Y_{t,u} - f_{t,u} dK_u = 0, \\ u \in [t, t+d]. \end{cases}$$

最优停止时间 $\tau^* = \inf\{u \in [t, t+d] | \Delta Y_{t,u} = f_{t,u}\}$ 。其中 $\Delta Y_{t,t+d}$ 为终端条件表示最终的

损失； $H(u, S_u, Z_u)$ 用于描述即时成本、收益和其他相关因素； $\Delta Y_{t,u}$ 表示 u 时刻的损失； $f_{t,u}$ 为障碍过程； V_t 表示在定价模型中美式巴黎期权 t 时刻的价格； $g(S_u)$ 是在停止时间 u 之后的终端损失。

定理 3.2 在函数 H 满足假设 H0-H5 情况下, 反射倒向随机微分方程 (RBSDE) 的存在唯一性定理与比较定理均得以成立。凸风险度量所表述的随机最优停止问题可以作为 RBSDE 的解,

$$\Delta Y_{t,u} = \text{ess} \cdot \sup_{\theta \in \cdot, \tau \in [u, t+d]} J_u = \text{ess} \cdot \sup_{\tau \in [u, t+d], \theta \in \cdot} J_u = J^{D_u, \theta_u^*} = \rho(\Delta V_{t,u} | F_u^W).$$

最佳控制策略 (D_u, θ_u^*) 其中最佳停止时间 $D_u = \inf\{u \in [t, t+d] | Y_{t,u} = f_{t,u}\}$ 。

3.2 主要结论的证明

本节将给出上面主要结果的证明。首先引入以下引理。

引理 3.3 (动态规划原理)^[21] 设有一个受控随机过程 S_t , 其动态由以下随机微分方程 (SDE) 描述:

$$dS_t = \mu_t(u, S_t, \theta_t)dt + \sigma_t(u, S_t, \theta_t)dW_t.$$

则其累积成本:

$$J = E[\int_t^T l(u, S_s, \theta_s)du + h(S_T) | S_t = s].$$

值函数则为:

$$V_{t,s} = \inf_{u \in [t, T]} J.$$

在适当的正则性条件下, 值函数 $V_{t,s}$ 满足以下 HJB 方程:

$$\begin{cases} -\frac{\partial V_{t,s}}{\partial t} = \inf_{\theta \in [0, T]} \{l(u, S_t, \theta_t) + \mu_t \frac{\partial V_{t,s}}{\partial s} + \frac{1}{2} \sigma_t^2 \frac{\partial^2 V_{t,s}}{\partial s^2}\}, \\ V_{T,s} = h(S_t). \end{cases}$$

定理 3.1 的证明: 凸风险度量为

$$\rho(L) = \sup_{\theta_t \in \cdot} \{E^\theta[-L] - \eta(\theta)\}.$$

将损失变量, 惩罚函数带入上式得

$$\rho(\Delta V_{t,\tau} | F_u^W) = \sup_{\theta \in \cdot, \tau \in [u, t+d]} E^\theta[\Delta V_{t,\tau} | F_u^W] - E^\theta\left[\int_u^{t+d} \lambda(u, S_u, \theta_u) du + g(S_u) | F_u^W\right].$$

利用期望的线性性质合并得

$$\rho(\Delta V_{t,\tau} | F_u^W) = \sup_{\theta \in \cdot, \tau \in [u, t+d]} E^\theta\left[\Delta V_{t,\tau} - \int_u^{t+d} \lambda(u, S_u, \theta_u) du - g(S_u) | F_u^W\right].$$

定义成本泛函

$$J_u = E^\theta\left[\Delta V_{t,\tau} - \int_u^\tau \lambda(t, S_u, \theta_u) du - g(S_\tau) | F_u^W\right].$$

找到最优控制策略控制策略 θ_u 使得目标函数 J_u 最大化。

构造值函数

$$V_{u,s} = \sup_{\theta \in \cdot, \tau \in [u, t+d]} J_u.$$

根据引理 3.1 可知值函数满足下列 HJB 方程:

$$-\frac{\partial V_{u,s}}{\partial u} = \sup_{\theta \in \cdot, \tau \in [u, t+d]} \left\{ \lambda(u, S_t, \theta_t) + \mu_t \frac{\partial V_{u,s}}{\partial s} + \frac{1}{2} \sigma_t^2 \frac{\partial^2 V_{u,s}}{\partial s^2} \right\}.$$

终端条件为

$$V_{T,s} = g(S_t).$$

通过求解 HJB 方程, 可以获得最优停止时间。最优停止时间满足 τ^* :

$$\tau^* = \arg \sup_{\theta \in \cdot, \tau \in [u, t+d]} J_u.$$

则凸风险度量可以表示为一个随机最优停止问题的解:

$$\rho(\Delta V_{t,\tau} | F_u^W) = \sup_{\theta \in \cdot, \tau \in [u, t+d]} J_u.$$

命题 3.1 的证明: 由定义

$$\rho_1(\Delta V_{t,\tau} | F_{u_1}^W) = \text{ess} \sup_{\theta \in \cdot, \tau \in [u, t+d]} \rho(\Delta V_{t,\tau} | F_{u_1}^W).$$

将上公式展开可得:

$$\rho_1(\Delta V_{t,\tau} | F_{u_1}^W) = \text{ess} \sup_{\theta \in \cdot, \tau \in [u, t+d]} E^\theta\left[\Delta V_{t,\tau} - \int_u^\tau \lambda(u_1, S_{u_1}, \theta_{u_1}) du_1 - g(S_\tau) | F_{u_1}^W\right].$$

运用动态规划原理构造目标函数, 对于 $\theta \in \cdot, \tau \in [u, t+d]$ 则有:

$$J_{u_1}^{\tau, \theta} = E^\theta\left[\Delta V_{t,\tau} - \int_u^\tau \lambda(u_1, S_{u_1}, \theta_{u_1}) du_1 - g(S_\tau) | F_{u_1}^W\right].$$

如上所示凸风险度量问题可以表示为以下形式的最优停止控制问题:

$$\rho_1(\Delta V_{t,\tau} | F_{u_1}^W) = \text{ess} \sup_{\theta \in \cdot, \tau \in [u, t+d]} J_{u_1}^{\tau, \theta}.$$

命题 3.2 的证明: 根据命题 1 证明可得

$$\rho_2(\Delta V_{t,\tau} | F_{u_2}^W) = \text{ess} \cdot \sup_{\theta \in \cdot, \tau \in [u, t+d]} E^\theta[\Delta V_{t,\tau} - \int_u^\tau \lambda(u_2, S_{u_2}, \theta_{u_2}) du_2 - g(S_\tau) | F_{u_2}^W].$$

运用动态规划原理构造目标函数, 其中所有的 $\theta \in \cdot, \tau \in \Gamma_{u, t+d}$ 则有:

$$J_{u_2}^{\tau, \theta} = E^\theta[\Delta V_{t,\tau} - \int_u^\tau \lambda(u_2, S_{u_2}, \theta_{u_2}) du_2 - g(S_\tau) | F_{u_2}^W].$$

如上所示凸风险度量问题可以表示为以下形式的最优停止控制问题:

$$J_{u_2}^{\tau, \theta} = \text{ess} \cdot \inf_{\tau \in [u, t+d]} \rho_2(\Delta V_{t,\tau} | F_{u_2}^W).$$

由 $J_{u_1}^{\tau, \theta}$, $J_{u_2}^{\tau, \theta}$ 可以将其结合为以下随机最优控制问题:

$$J_{u_2}^{\tau, \theta} = \text{ess} \cdot \inf_{\tau \in [u, t+d]} \text{ess} \cdot \sup_{\theta \in \cdot} J_{u_1}^{\tau, \theta}.$$

定理 3.2 的证明: 上述满足 H3, H4, H5 即 H 是关于 z 的凸函数且关于 y 是非递减函数, 通过等价鞅测度对上述 RBSDE 进行表示可得:

$$\Delta Y_{t,u} = \text{ess} \cdot \sup_{\theta \in \cdot, \tau \in [u, t+d]} E^\theta[\Delta V_{t,\tau} + \int_t^{t+d} H(u, S_u, Z_u) du | F_u^W].$$

构建以下形式的 HJB 函数其中 $\theta \in \cdot$.

$$H^\theta(u, \omega, z) = -\lambda(u, S_\omega, z) + \theta_{u,\omega} z, \forall (u, \omega, z) \in [t, t+d] \times \Omega \times \mathbb{R}$$

上述方程及参数满足 A2, A3 即其中 λ 关于 θ_u 是凸的; H^θ 关于 θ_u 是凹的。

所以对于所有的 $\theta \in \cdot$, $H^\theta(u, \omega, z)$ 关于 z 是 Lipschitz 的。

$$\text{设 } (u, \omega, z) \in [t, t+d] \times \Omega \times \mathbb{R}, \quad H(u, \omega, z) = \sup_{\theta \in \cdot} H^\theta(u, \omega, z) = H^{\theta^*}(u, \omega, z),$$

$H(u, \omega, z)$ 是关于 z 是 Lipschitz 的并且 F_u^W 可测。

由上可知终端条件 $f_{t,\tau} = (\xi I_{\{\tau=t+d\}} + f_{t,\tau} I_{\{\tau < t+d\}}) I_{\{H_S \leq D\}}$ 将终端条件带入初始时刻可得:

$$\begin{aligned} \Delta Y_{t,t} &= \text{ess} \cdot \sup_{\theta \in \cdot, \tau \in [u, t+d]} E^\theta[(\xi I_{\{\tau=t+d\}} + f_{t,\tau} I_{\{\tau < t+d\}}) I_{\{H_S \leq D\}} - \int_t^\tau \lambda(0, S_t, z) - \theta_{t,\omega} z du | F_u^W] \\ &= \text{ess} \cdot \sup_{\theta \in \cdot, \tau \in [u, t+d]} E^\theta[f_{t,t} - \int_t^t \lambda(0, S_t, z) - \theta_{t,\omega} z du | F_u^W] \\ &= 0 \end{aligned}$$

同时过程的 RBSDE 等价鞅测度 $\Delta Y_{t,u}$ 可表示为:

$$\begin{aligned}
 \Delta Y_{t,u} &= \sup_{\theta \in \cdot, \tau \in [u, t+d]} E^\theta[(\xi I_{\{\tau=t+d\}} + f_{t,\tau} I_{\{\tau < t+d\}}) I_{\{H_s \leq D\}} - \int_u^\tau \lambda(u, S_\omega, z) - \theta_{u,\omega}^* z du | F_u^W] \\
 &= \sup_{\theta \in \cdot, \tau \in [u, t+d]} E^\theta[(\xi I_{\{\tau=t+d\}} + f_{t,\tau} I_{\{\tau < t+d\}}) I_{\{H_s \leq D\}} - \int_u^\tau \lambda(u, S_u, z) - \theta_u^* z du | F_u^W] \\
 &= \sup_{\theta \in \cdot, \tau \in [u, t+d]} E^\theta[(\xi I_{\{\tau=t+d\}} + f_{t,\tau} I_{\{\tau < t+d\}}) I_{\{H_s \leq D\}} - \int_u^\tau \lambda(u, S_u, \theta_u^*) du - g(S_\tau) | F_u^W] \\
 &= \sup_{\theta \in \cdot, \tau \in [u, t+d]} E^\theta[\Delta V_{t,\tau} - \int_u^\tau \lambda(u, S_u, \theta_u^*) du - g(S_\tau) | F_u^W] \\
 &= \sup_{\theta \in \cdot, \tau \in [u, t+d]} J_u \\
 &= \rho(\Delta V_{t,\tau} | F_u^W)
 \end{aligned}$$

由此可得最坏情况 $\Delta Y_{t,u}^1$ 和最优情况 $\Delta Y_{t,u}^2$ 可得:

$$\begin{aligned}
 \Delta Y_{t,u_1}^1 &= \text{ess} \cdot \sup_{\theta \in \cdot, \tau \in [u, t+d]} J_{u_1}^{\tau, \theta} = \text{ess} \cdot \sup_{\tau \in [u, t+d], \theta \in \cdot} J_{u_1}^{\tau, \theta} = J_{u_1}^{D_u, \theta_u^*} = \rho_1(\Delta V_{t,u_1} | F_{u_1}^W). \\
 \Delta Y_{t,u_2}^2 &= \text{ess} \cdot \inf_{\theta \in \cdot} \text{ess} \cdot \sup_{\tau \in [u, t+d]} J_{u_2}^{\tau, \theta} = \text{ess} \cdot \sup_{\tau \in [u, t+d]} \text{ess} \cdot \inf_{\theta \in \cdot} J_{u_2}^{\tau, \theta} = J_{u_2}^{P_2, \theta_2^*} = \rho_2(\Delta V_{t,u_2} | F_{u_2}^W)
 \end{aligned}$$

3.3 数值模拟

本节通过将凸风险度量与反射倒向随机微分方程相耦合的偏微分方程相联系，得到凸风险度量的偏微分方程表达式。

根据定理 3.1, 定理 3.2 得到以下加入凸风险度量条件下的期权定价修正 PDE 模型:

$$\begin{cases}
 \Delta Y_{t,u}^i = \rho^i(\Delta V_{t,u} | F_u^W) = \rho_{u,x}^i, \\
 \min(\rho_{u,x}^i - f_{u,x}^i, \frac{\partial \rho_{u,x}^i}{\partial u} - (\mu_{u,x} + \theta_u^* \sigma_{u,x}) \frac{\partial \rho_{u,x}^i}{\partial u} + \frac{1}{2} \sigma_{u,x}^2 x^2 \frac{\partial^2 \rho_{u,x}^i}{\partial x^2} - \lambda(u, x, \theta_u^*)) = 0, \\
 \rho_{t+d,x} = \Delta Y_{t+d,x}, (u, x) \in (t, t+d) \times \mathbb{R}_+.
 \end{cases}$$

现在假设一只美式巴黎期权（连续向上敲出型），障碍水平为 L ，持续时间为 D 。考虑美式巴黎期权特性，巴黎期权只有当标的资产达到障碍水平，并且持续一段时间才会敲出或敲入。将其表述为一个自由边界问题，并得到其自由边界表达式。使用蒙特卡洛模拟，在不同市场风险下凸风险度量与标的资产价格具有以下的关系。

$$\begin{cases} \min(\rho_{u,x}^i - f_{u,x}^i, \frac{\partial \rho_{u,x}^i}{\partial u} - (\mu_{u,x} + \theta_u^* \sigma_{u,x}) \frac{\partial \rho_{u,x}^i}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma_{u,x}^2 x^2 \frac{\partial^2 \rho_{u,x}^i}{\partial x^2} - \lambda(u, x, \theta_u^*)) = 0, \\ \rho_{t,0}^1 = 0, \\ \rho_{t,J}^1 = v_{t,J,0}^2, \\ \rho_{T,x}^1 = (x - K)^+, \\ t \in [0, T], x \in [0, L]. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \min(\rho_{u,x,h}^i - f_{u,x,h}^i, \frac{\partial \rho_{u,x,h}^i}{\partial u} + \frac{\partial \rho_{u,x,h}^i}{\partial h} - (\mu_{u,x,h} + \theta_u^* \sigma_{u,x,h}) \frac{\partial \rho_{u,x,h}^i}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma_{u,x,h}^2 x^2 \frac{\partial^2 \rho_{u,x,h}^i}{\partial x^2} - \lambda(u, x, \theta_u^*)) = 0, \\ \rho_{t,+\infty,h}^2 = \infty, \\ \rho_{t,x,D}^2 = \infty, \\ \rho_{t,J,h}^2 = v_{t,J}^1, \\ t \in [\tau, T], h \in [0, D], x \in [L, +\infty]. \end{cases}$$

其中 ρ 表示凸风险度量； i 取值为 1, 2 分别表示凸风险度量取上确界（最坏情况）与下确界（最优情况）的情况； f 表示障碍过程； u 表示时间； x 表示标的资产价格； h 表示巴黎期权达到障碍水平的持续时间； θ_u^* 表示在本质上确界和本质下确界下的概率系数；其中 $\lambda(u, x, \theta_u^*)$ 是一个根据特定凸风险度量 ρ 和概率测度 θ_u^* 而定的修正项。这个修正项反映了在测度 θ_u^* 下，期权价格演化的偏好或风险特征。特别的当 $\lambda(u, x, \theta_u^*) = 0$ 时，则变为一致性风险度量。

考虑具有两种基本证券的 B-S 市场。即包含股票和债券的市场。设立期权的障碍水平为 $J = 40$ ，执行价格 $K = 30$ ，到期时间 $T = 20$ 天，持续时间 $D = 5$ 天，市场波动规律 $\sigma = 0.2$ ，无风险利率 $r = 0.05$ 连续复利计算。

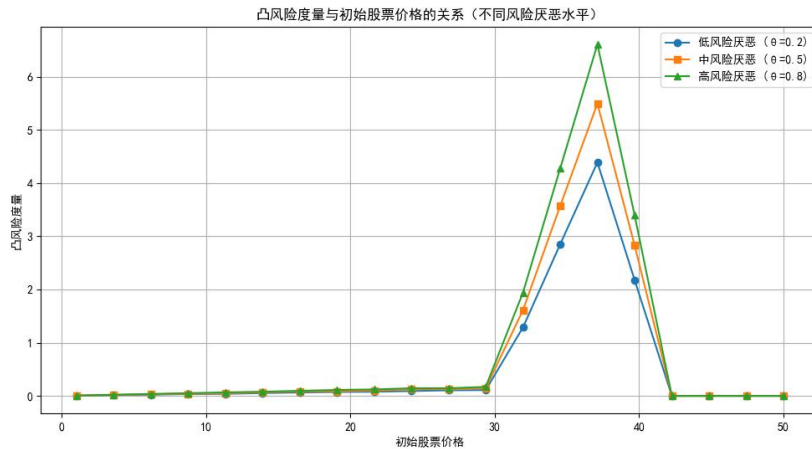


图 1，初始股票价格与期权价格，凸风险度量趋势图

Figure 1: Initial Stock Price vs. Option Price and Convex Risk Measure Trend

如图 1 所示：低初始股票价格：在所有风险厌恶水平下，当初始股票价格较低时，凸风险度量相对较小。这是因为当股票价格远低于行权价 ($K=30$) 时，期权的价值较低，投资者的潜在损失也较少。对于巴黎期权来说，此时未触发障碍条件 ($L=40$)，凸风险度量的影响较为平缓。

股票价格接近行权价和障碍价：当股票价格逐渐接近行权价和障碍价时，凸风险度量迅速上升。特别是在高风险厌恶水平下，凸风险度量的上升更为显著。这反映了美式巴黎期权的特性：当股票价格接近行权价，期权的行权概率增大，而障碍条件使得期权价值更为敏感，增加了投资者面临的潜在损失。凸风险度量此时反映了对这种风险的保守估计，尤其在波动性较大时，投资者可能会提前行权，以规避进一步的波动风险。

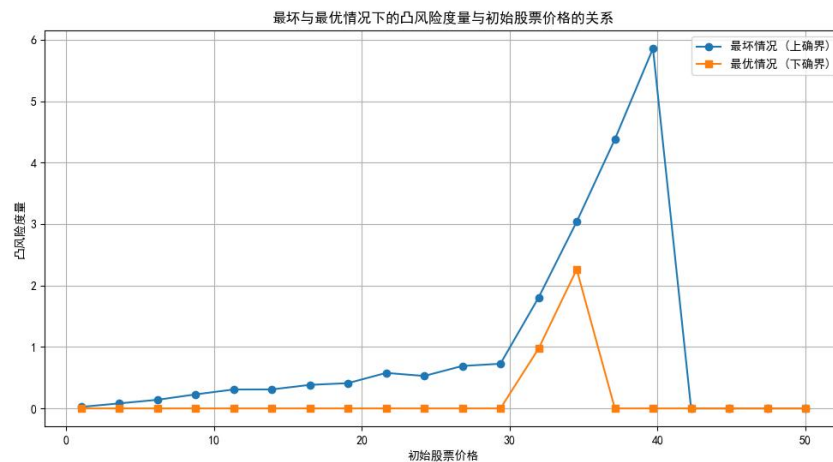


图 2，最好情况和最坏情况下凸风险度量趋势图

Figure 2: Trend Chart of Convex Risk Measure under Best and Worst Case Scenarios

如图 2 所示：

(1) 上确界（最坏情况）的曲线逐步上升：

上确界表示的是最坏情况下的风险度量，随着初始股票价格的上升，风险逐渐增加。这符合经济学意义：当股票价格逐渐上升接近甚至超过行权价格时，期权的价值变得更加敏感，潜在损失也会随着价格的波动而增加。特别是在触发障碍价格之后，期权的风险急剧增加。

这种走势反映了在最坏情况下，投资者的潜在损失在市场条件不利时会显著增加，凸风险度量通过保守估计对这些风险进行了充分的评估。这符合凸风险度

量在经济学中强调尾部风险管理的核心理念。

(2) 下确界（最优情况）曲线趋于平稳：

下确界表示最优情况的风险度量，代表在最有利的市场条件下，风险最小。随着初始股票价格的上升，最优情况的风险度量保持相对较低且较为平稳。这是因为在最优情况下，投资者有可能通过某种方式减少损失，比如通过对冲或提前平仓，特别是在股票价格接近行权价格但尚未触及障碍时。

这种平稳的曲线符合经济学上的预期：在市场条件良好时，投资者能够控制风险，最大化收益，甚至规避损失。这种情况反映了凸风险度量在保守评估和最优条件之间的平衡。

(3) 两条曲线之间的差距：

最优情况和最坏情况之间的差距代表了市场中可能出现的潜在风险范围。这一区间越大，表明市场的不确定性越高，投资者面临的潜在损失也越大。

这种差距表明凸风险度量考虑了多种市场情景下的潜在风险，从最优到最坏，使投资者能够在决策时拥有更全面的风险评估。

3.4 本章总结

本章旨在探讨美式巴黎期权的风险度量问题，采用反射倒向随机微分方程（RBSDE）对美式巴黎期权的损失过程进行建模，并引入了凸风险度量。通过将凸风险度量与反射倒向随机微分方程相结合的方法研究美式巴黎期权。研究了更加精确的风险度量方法，不仅推导出适用于美式巴黎期权的偏微分方程表达式，还能够更好地捕捉复杂市场条件下的风险特征。

在数值模拟部分，通过分析凸风险度量在不同风险厌恶系数下的变化，以及上下确界风险度量的关系，展示了美式巴黎期权的复杂风险特性。结果表明，随着初始股票价格的增加，凸风险度量在所有风险厌恶水平下均上升，尤其在高风险厌恶下增幅显著，反映了投资者对价格波动的敏感性。此外，上下确界图揭示了在最坏情况下，期权面临的极端风险显著增大，而在最优情况下，潜在损失较小且趋于平稳。整体分析符合期权的路径依赖性及灵活行权特性，揭示了市场中潜在的尾部风险和投资者在不同风险容忍度下的应对策略。

第 4 章 总结与展望

4.1 总结

本文围绕美式巴黎期权的定价与风险度量问题展开研究,结合反射倒向随机微分方程(RBSDE)和凸风险度量理论,提出了创新的解决方案。研究分为两部分:基于RBSDE的美式巴黎期权定价和基于RBSDE的美式巴黎期权风险度量,以下是具体内容与创新点的总结。

第一部分: 基于RBSDE的美式巴黎期权定价

美式巴黎期权的定价难点在于其路径依赖性和早期行权特性,传统方法如Black-Scholes模型难以有效处理。本文提出基于RBSDE的定价方法,通过以下步骤解决这一问题:

- (1).将美式巴黎期权的定价问题转化为RBSDE模型,并构建自由边界问题。
- (2).推导相关偏微分方程(PDE),建立数学模型,并通过数值方法求解。
- (3).利用有限差分法和蒙特卡洛模拟进行数值验证,展示模型在不同市场条件下的适应性。

创新点:

- (1).基于RBSDE的定价框架:通过RBSDE处理路径依赖性和最优停止问题,为美式巴黎期权定价提供了新思路。
- (2).自由边界问题的求解:通过PDE和自由边界问题的转化,提供了新的数学工具。
- (3).数值模拟验证:通过数值实验验证模型的有效性,展示了其在不同市场环境中的适用性。

第二部分: 基于RBSDE的美式巴黎期权风险度量

针对路径依赖型期权的风险度量难题,本文结合RBSDE与凸风险度量理论,提出了一种新的风险评估框架:

- (1).将RBSDE与凸风险度量结合,构建风险度量模型,量化美式巴黎期权的潜在风险。
- (2).通过数值模拟分析波动率、利率等市场因素对风险度量的影响;

(3).探讨市场不确定性和投资者风险偏好对风险评估的作用，提供了一种灵活且精准的风险度量工具。

创新点：

RBSDE 与凸风险度量的结合：首次将两者结合，有效处理路径依赖型期权的风险评估；

(1).风险度量模型的创新：引入凸风险度量，突破传统一致性风险度量方法的局限性；

(2).市场环境适应性：通过数值模拟验证模型在不同市场条件下的有效性，为风险管理提供了科学依据。

总结与创新贡献

本文的主要创新点包括：

理论框架创新：结合 RBSDE 与凸风险度量，为美式巴黎期权的定价与风险度量提供了新的理论框架，解决了路径依赖性和灵活行权机制带来的难题；

数学工具创新：通过自由边界问题和 PDE 的求解，为复杂衍生品定价提供了新的数学工具；

风险度量方法创新：提出的风险度量框架能够动态反映市场条件和投资者偏好，具有更高的灵活性和精准性；

实践应用价值：通过数值模拟验证了模型在不同市场环境中的适应性，为金融市场的期权交易与风险管理提供了理论支持和实践工具。

总体而言，本文通过理论创新与数值验证，为美式巴黎期权的定价与风险度量提供了系统的解决方案，具有较强的理论价值和实际应用前景。未来的研究可进一步探索该方法在其他复杂金融衍生品中的应用，以验证其普适性和扩展性。

4.2 展望

本文以反射倒向随机微分方程 (RBSDE) 和凸风险度量理论作为基础，并将其理论进行融合对美式巴黎期权进行定价与风险度量，并且在路径依赖性、市场波动性和早期行权特性等方面提供了创新的解决方案，但受限于研究时间和个人能力，仍有许多问题值得进一步探索。以下是未来可能的研究方向：

1. 扩展至更多类型的复杂衍生品

本文的研究主要集中于美式巴黎期权，但 RBSDE 与凸风险度量结合的理论框架具有广泛的适用性。在目前的研究中，我们发现对反射倒向随机微分方程添加延迟条件时，其方程性质可以记录历史数据这一特点，因此使用带有延迟条件的反射倒向随机微分方程来研究一些价格会被历史数据影响的衍生品证券（如障碍期权），由此这一课题将会成为接下来研究的补充与方向。

2. 提高数值求解的效率与精度

本文通过数值模拟（蒙特卡洛模拟）验证了定价模型和风险度量模型的有效捕捉美式巴黎期权的价格和风险变化。但在实际应用中，复杂衍生品的定价计算往往因更多现实因素而存在误差（如：高维度，自由边界问题和市场参数的多变性）。因此在未来的研究中可以探索更高效的数值方法（比如基于深度学习或强化学习的优化算法），来提升模拟计算准确率。

3. 引入宏观经济因素与市场不确定性

本文主要考虑了波动率和利率等市场参数对衍生品证券价格和风险的影响，但在宏观经济因素和市场不确定性等方面并未考虑全面。因此未来研究可将这些因素纳入模型，通过对这些因素考量来拓展风险评估的适用范围。

4. 实证研究方面

本文通过对美式巴黎期权价格和损失变量进行数值模拟，并通过蒙特卡洛模拟得到了符合美式巴黎期权的价格走势和风险变化关系。但这种方法在现实市场环境中的应用仍然相应进一步的检验。在未来研究可以结合真实市场数据（例如真实美式巴黎期权数据）对模型进行实证分析，评估其在实际交易和风险管理中的表现，并根据市场反馈对模型进行优化。

本文通过对美式巴黎期权的定价与风险度量进行了理论研究和模拟检验，但在其中仍存在不少问题值得我们去深入探索。未来的研究可在扩展模型适用范围、优化数值方法、引入宏观经济因素以及结合实际市场数据等方面进一步去推进，为复杂衍生品的定价与风险管理提供更加全面和实用的解决方案。

参考文献

- [1] Pardoux E, Peng S. Adapted solution of a backward stochastic differential equation[J]. Systems & Control Letters,1990,14:55–61.
- [2] 杨维强,彭实戈.期权稳健定价模型及实证[J]. 山东大学学报(理学版),2006,(2):69-73.
- [3] 苗杰. 基于倒向随机微分方程理论的可分离债券定价[J]. 工程数学学报,2022,39 (03):487-494.
- [4] El Karoui, Kapoudjian N, Pardoux C, et al. Reflected solutions of backward SDE's and related obstacle problems for PDE's[J]. The Annals of Probability,1997,17:702-737.
- [5] Chesney M, Jeanblanc-Picqué M, Yor M. Brownian excursions and Parisian barrier options[J]. Advances in Applied Probability,1997,29:165–184.
- [6] Hugonnier J. The Feynman-Kac formula and pricing occupation time derivatives[J]. International Journal of Theoretical and Applied Finance,1999,2:153–178.
- [7] Labart C, Lelong J. Pricing double barrier Parisian options using Laplace transforms. Internat J Theo Appl Finance,2009,12:19–44.
- [8] 宋斌,井帅. 美式巴黎期权的定价模型与数值方法 [J]. 系统工程,2015,33(02):1-8.
- [9] Artzner P, Delbaen F, Eber J M, Heath D. Coherent measures of risk[J]. Mathematical Finance,1999,9:203–228.
- [10] Frittelli M, Rosazza-Gianin E. Putting order in risk measures[J]. Journal of Banking and Finance,2002,26:1473-1486.
- [11] Rosazza-Gianin E. Risk measures via g-expectations[J]. Insurance Math Econom,2006,39:19–34.
- [12] Jiang L. Convexity translation invariance and subadditivity for g-expectations and related risk measures[J]. Ann Appl Probab,2008,18:245–258.
- [13] 郭冬梅, 宋斌, 汪寿阳. 倒向随机微分方程与巴黎期权的非线性定价[J]. 中

- 国科学: 数学,2013,43(01):91-103.
- [14] 宋斌,梁恩奇,唐逞. 基于拉普拉斯变换的巴黎期权的定价[J].系统工程,2017,35 (01):1-4.
- [15] Frittelli M, Rosazza-Gianin E. Putting order in risk measures[J]. Journal of Banking and Finance,2002,26:1473-1486.
- [16] Pauwelyn, L, Applying Convex risk measures to dynamic risk measurement problems: a BSDE-based dynamic risk measure model[J].Journal of Risk and Financial Management,2015,8:45-68.
- [17] Elliott R, Siu T K. A BSDE approach to convex risk measures for derivative securities[J]. Stochastic Analysis and Applications,2012,30:1083–1101.
- [18] Elliott R, Siu T K. Reflected backward stochastic differential equations, convex risk measures and American options[J]. Stochastic Analysis and Applications,2013,31:1077–1096.
- [19] Carroll C,Pricing parisian options with path-dependence: a BSDE-based approach[J]. Journal of Derivatives and Quantitative Studies,2014,22:123-145.
- [20] Xu X.Necessary and sufficient condition for the comparison theorem of multidimensional anticipated backward stochastic differential equations[J]. Sci China Math,2011,10:301–310.
- [21] Bellman R. The theory of dynamic programming[J]. Bulletin of the American Mathematical Society,1954,60:503-515.
- [22] 李立. 倒向随机微分方程在经济金融优化问题中的应用[D]. 山东大学, 2016.
- [23] 彭实戈,史树中. 倒向随机微分方程和金融数学[J].科学,1997,49(05):30-33.
- [24] 徐振达.反射倒向随机微分方程与混合递归最优控制问题[D].山东大学,2023.
- [25] 纪荣林.动态凸风险度量及相关问题研究[D].中国矿业大学,2016.
- [26] El Karoui N,Peng S and Quenez M C.Backward stochastic differential equations in finance[J]. Mathematical Finance,1997,7:1–71.
- [27] Delbaen F,Peng S,Rosazza Gianin E.Representation of the penalty term of dynamic concave utilities[J].Finance Stoch,2010,14:449–472.
- [28] Tang S,Wei W.Representation of dynamic time-consistent convex risk mea

- tures with jumps[J]. Risk Decis Anal,2012,3:167–190.
- [29] 张港,江龙,张伟.Osgood 条件下 G-Brown 运动驱动的多维倒向随机微分方程 [J].应用概率统计,2025,41(01):83-100.
- [30] 钟文倩,纪荣林,李敏,等.g-期望的一些性质及其应用研究[J].哈尔滨师范大学自然科学学报,2024,40(02):1-6.
- [31] 陈晓兰,王凯凯,朱庆峰.部分可观测带跳倒向随机系统的非零和微分博弈及其应用[J].工程数学学报,2023,40(05):738-750.
- [32] 周敏,颜瑞,李志民.基于鞅驱动的时滞倒向随机微分方程最优控制[J].长春师范大学学报,2023,42(08):20-27.
- [33] 吴臻,张德涛.正倒向随机微分方程理论基础及相关应用[J].应用概率统计,2023,39(03):413-435.
- [34] 侯杰.随机条件下一类一般时间终端的一维 BSDE 解的一个比较定理[J].高等数学研究,2023,26(03):91-94.
- [35] 张港,江龙,张伟. β -阶毛氏条件下 G-Brown 运动驱动的多维倒向随机微分方程[J].数学学报(中文版),2024,67(03):489-499.
- [36] Gueye C ,Aidara S ,Sow B A .Backward stochastic differential equations driven by G-Lévy process with double reflexions [J]. Random Operators and Stochastic Equations,2025,33:1-22.
- [37] 张港,江龙,张伟. Osgood 条件下 G-Brown 运动驱动的多维倒向随机微分方程 [J].应用概率统计,2025,41(01):83-100.
- [38] Holland C D,Denis L,Popier A . Growth condition on the generator of B SDE with singular terminal value ensuring continuity up to terminal time [J]. Stochastic Processes and their Applications,2025,183:104-108.
- [39] Wessels L.Semilinear Feynman–Kac formulae for B-continuous viscosity solutions [J]. Stochastic Analysis and Applications,2025,43:112-129.

攻读硕士期间取得的学术成果

已发表的学术论文:

- [1] ***(作者), ***(导师), **. 基于 RBSDE 的美式巴黎期权定价[J].安徽大学学报自然科学版 (在审)
- [2] ***(作者), ***(导师), **. 基于反射倒向随机微分方程的美式巴黎期权风险度量[J]. 安徽师范大学学报. (已录用)

致 谢

不知不觉间三年研究生生涯已经接近尾声。在这三年的时光里，有欢乐，有吵闹，有为了写出论文拼搏到不吃不喝的坚持，也有拿到录用通知时那种激动万分喜悦。在这三年的时光里，得到了许多人的帮助与支持。每一位给予我鼓励和指导的老师、同学，都在我的成长与学术道路上留下了深刻的足迹。当然也为我之后所努力的道路寻找到了方向。在申博与考博的道路上，在群发邮件，搜索导师的时间里，每一分每一秒都那么充实。对于以后的道路，目前还在继续努力等待结果。一路走来真的很感谢在生活中所遇到的每一个人，尤其是身边的老师、朋友和家人。你们适时给予的肯定与鼓励，是我在前行途中勇于面对挫折与挑战的力量源泉。

首先，我要特别感谢我的导师——李志民教授。在研究生的三年学习时光里，感谢李老师在您学习中给我的启发，才使得我在仅仅三个月的时间里完成了两篇论文的写作。当然在投稿以及后续的工作中，李老师给了我充分的建议与支持。您治学上精益求精，严谨认真的态度，对职责工作的认真负责，使我受益匪浅，终身难忘。同样，我不仅汲取了宝贵的学术资源，也结交了许多志同道合的朋友。特别是在研究过程中遇到困难时，实验室的老师和同学们总是热心提供帮助，遇到难题时我们耐心讨论，虽然有时会发生口角，但是总能为最后的目标打下夯实的基础。这些讨论不仅给我带来了新的思路，也帮助我在研究方法和技术上不断提升。此外，特别感谢安徽工程大学，数理与金融学院的所有任课老师，本科和研究生阶段七年的求学生涯，正是你们的悉心帮助和认真栽培，才能安心、稳定地走到这段学术生涯的终点。

感谢自习室 1802 的郝诗凡、冯登宏、孔志等同门的兄弟姐妹和严昊、李中原等舍友。三年时光，有你们相伴身旁，在学习上问题相商，在生活中困难相帮，相处融洽，此生难忘，临近毕业，想必也定不会匆匆散场。

很感谢我的家人们，感谢爸爸、妈妈、爷爷、奶奶和弟弟，感谢你们的无偿付出，鼓励与支持我继续我的学业，给了我很大的勇气和信心，让我得以无惧困难，无畏前行。

最后，感谢各位参与评审工作的老师们，感谢你们在百忙之中抽时间审阅我

的论文。祝你们身体健康，工作顺心!