
分类号 O231.3
密 级：公开

学校代码：10363
学 号：2221020115

题 目 一类高度非线性混杂随机系统的稳定性研究

英文并列

题 目 Research on the Stability of a Class of
Highly Nonlinear Hybrid Stochastic Systems

学生姓名： 杨思亮

指导教师： 吴小太 教授

专 业： 0701 数 学

研究方向： 随机系统稳定与控制

论文答辩日期： 年 月 日

安徽工程大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：我恪守学术道德，崇尚严谨学风。所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已明确注明和引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品及成果的内容。论文为本人亲自撰写，我对所写的内容负责，并完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

学位论文作者签名： 杨思亮

日期： 2025 年 5 月 14 日

安徽工程大学学位论文版权使用授权书

学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅或借阅。本人授权安徽工程大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保密 ☐，在 _____ 年解密后适用本版权书。

本学位论文属于

不保密 ☒。

学位论文作者签名：杨思亮

指导教师签名：吴小华

日期：2025 年 5 月 14 日

日期：2025 年 5 月 14 日

一类高度非线性混杂随机系统的稳定性研究

摘 要

随着工业系统的日趋复杂，系统的时滞、切换及随机扰动的发生等会导致系统偏离平衡位置，混杂随机系统吸引了学者的广泛关注。中立型切换随机系统是一类特殊的时滞混杂随机系统，其特点是系统的演化过程不仅依赖于当前和过去的状态，还受过去的状态变化率影响。中立型随机系统的这种特点能够更准确的刻画系统的演化规律。中立型切换随机系统广泛的用于气液体长管道输送、无损耗传输线、分布式网络及人口免疫等建模中。另一方面，传统的线性随机微分方程已不能准确的对现实中非线性随机系统的复杂性进行描述，若随机系统的系数函数不满足线性增长条件，而仅能由多项式函数所控制时，这类系统常被称为高度非线性随机系统。

本文针对一类确定性切换规则下具有不同子系统结构的高度非线性中立型切换随机时滞系统，研究其稳定性与反馈控制问题。本文的主要内容总结如下：

第一章概述了混杂随机系统的研究意义和国内外相关的研究现状，并介绍了本论文的主要研究内容，最后给出了论文中出现的主要符号定义。

第二章讨论了确定性切换信号下具有不同结构子系统的高度非线性中立型随机时滞系统的稳定性问题。在这类系统中，其系数满足

局部 Lipschitz 条件和多项式增长条件。假设切换信号的模态空间可以分为两个子空间，对于不同模态空间的子系统，其满足不同的类 Khasminskii 型条件。借助模态依赖的平均驻留时间法和 Lyapunov 函数法，证明了系统解的存在唯一性和 p 阶矩指数稳定性。

第三章针对确定性切换信号下具有不同结构子系统的高度非线性中立型随机时滞系统，通过设置基于连续时间观测的时滞反馈控制器，研究了系统的镇定性问题。假设时滞反馈控制器满足压缩映射，通过平均驻留时间法和设计合适的 Lyapunov 泛函，得到了系统的稳定性和时滞依赖的指数稳定。

第四章梳理了本文的研究结果，并针对本文的不足之处给出了对未来的研究内容的展望。

关键词：混杂随机系统，高度非线性，确定性切换信号，中立型，时滞反馈控制

Research on the Stability of a Class of Highly Nonlinear Hybrid Stochastic Systems

ABSTRACT

As industrial systems become increasingly complex, time delays, switching behaviors, and random disturbances often cause systems to deviate from their equilibrium states. These challenges have brought hybrid stochastic systems to the forefront of research. Among them, neutral-type switched stochastic systems represent a special class of time-delay hybrid systems whose evolution depends not only on current and past states but also on the rate of change of past states. This property enables a more accurate characterization of system dynamics and is widely utilized in modeling long-distance gas and liquid pipelines, lossless transmission lines, distributed networks, and population immunity models.

Meanwhile, traditional linear stochastic differential equations are inadequate for capturing the complexity of real-world nonlinear stochastic systems. When the system coefficients fail to satisfy linear growth conditions and instead follow polynomial growth, the system is referred to as highly nonlinear.

This thesis investigates the stability and feedback control of a class of highly nonlinear neutral-type switched stochastic time-delay systems with

heterogeneous subsystem structures under deterministic switching rules.

The main contributions are summarized as follows:

In Chapter 1, the research significance of hybrid stochastic systems and the related research status both domestically and internationally are outlined. The main research content of this thesis is introduced, and finally, the definitions of the main symbols appearing in the thesis are provided.

In Chapter 2, the stability problem of highly nonlinear neutral-type stochastic time-delay systems with different structural subsystems under deterministic switching signals is discussed. The coefficients of such systems satisfy local Lipschitz conditions and polynomial growth conditions. It is assumed that the mode space of the switching signal can be divided into two subspaces, and the subsystems in different mode spaces satisfy different Khasminskii-type conditions. By means of the mode-dependent average dwell time method and Lyapunov function method, the existence and uniqueness of the system solution and the exponential stability of the moment are proved.

In Chapter 3, for highly nonlinear neutral-type stochastic time-delay systems with different structural subsystems under deterministic switching signals, the stabilization problem of the system is studied by setting up a time-delay feedback controller based on continuous-time observation. Assuming that the time-delay feedback controller satisfies the contraction mapping, the stability of the system and the time-delay-dependent

exponential stability are obtained by using the average dwell time method and designing appropriate Lyapunov functionals.

In Chapter 4, the research results of this thesis are combed, and the prospects for future research content are given aiming at the shortcomings of this paper.

Yang Siliang (Mathematics)

Supervised by Wu Xiaotai

KEY WORDS: Highly nonlinear stochastic systems, Deterministic switching signals, Neutral-type, Time-delay feedback control

目录

摘 要.....	I
ABSTRACT.....	III
第 1 章 绪论.....	1
1.1 研究背景	1
1.2 国内外研究现状	3
1.3 论文内容安排	5
1.4 符号说明	6
第 2 章 具有异构子系统的高度非线性中立型时滞切换随机系统的稳定性.....	7
2.1 模型介绍	7
2.2 主要结果证明	10
2.3 数值例子	16
2.4 本章小结	18
第 3 章 基于时滞反馈控制的高度非线性中立型切换随机系统的镇定性.....	19
3.1 模型介绍	20
3.2 主要结果证明	23
3.3 数值例子	35
3.4 本章小结	37
第 4 章 结论与展望.....	37
参考文献.....	39
硕士期间发表论文.....	45
致谢.....	45

第 1 章 绪论

1.1 研究背景

自上个世纪六十年代,德国学者 Winstsenhausen 提出混杂系统的概念并给出混杂系统的精确描述^[1]。随着工业系统的日趋复杂,混杂随机系统的稳定性与控制问题已经成为控制领域的研究热点之一,开展这一研究的背景,主要源于现实世界中各类复杂问题的实际需求。例如,智能交通系统、生态系统的演化、化工生产过程等等^[2-5]。由于时滞的存在、系统的切换及随机扰动的发生等原因会导致系统具有更加丰富多样的行为和动态,也会产生一般随机系统所不具有的新性质,同时与一般的随机系统相比,混杂随机系统的理论研究也充满了诸多挑战,但也更具有价值。

切换随机系统作为一类具有代表性的混杂随机系统,由有限个数的子系统以及规定各个子系统之间关联的逻辑规则共同构成,这一逻辑规则也被称作切换信号,在实际生产中有着广泛应用^[6-8]。在切换随机系统中,子系统之间的切换并非随意进行,而是依据特定规律进行转移,因此切换信号的性质在切换随机系统中发挥着关键作用。切换信号主要有以下两种:一种是切换信号是非随机的。这类受限的切换信号主要涉及针对特定类型的切换序列,其切换规则不具有随机性。这类切换信号可能受到多种因素的制约,比如驻留时间、平均驻留时间、周期时间等切换条件以及系统状态的约束的限制等^[9-13]。另一种是切换信号是随机切换信号,其切换规则满足随机性。目前,Markov 切换是随机切换系统中研究比较多随机切换信号之一。系统状态在不同模块间以 Markov 链的方式进行转移,Markov 链是一个随机过程,即未来状态只取决于当前状态,而与过去的历史状态无关。由于系统状态转移的随机性,使得系统存在一定程度的不确定性,这种特性使得 Markov 切换系统能够很好地描述实际系统中存在的随机变化和不确定因素^[14-16]。本文将考虑第一种切换信号的稳定性,即在非随机切换信号下,研究切换系统的稳定性以及控制问题。

在实际的工程应用场景研究中,人们还逐渐认识到,系统所具有的延迟特性,并非仅取决于过去的状态,还与过去某段时间内的状态的变化速率紧密相

关。在描述这类复杂系统时，中立型时滞切换随机系统发挥着重要作用，能够满足众多实际应用的需求，为解决生物医学、金融、通信等领域的实际问题提供了重要帮助^[17]。例如在生物医学工程中，可用于建立更准确的生理模型，辅助疾病诊断和治疗；在金融领域，有助于分析金融市场动态，进行风险评估和投资决策；在通信网络中，能优化网络资源分配和提高通信质量^[18-28]。通过对系统稳定性、鲁棒性等关键性能指标的分析，可以优化系统的结构和参数，设计出更加有效的控制策略。许多实际系统运行在复杂多变的环境中，需要应对各种不确定性和切换情况。中立型随机切换系统的研究成果能够帮助系统更好地适应这些复杂环境和任务需求。在无人驾驶汽车的导航与控制系统中，车辆行驶过程中受到路况、天气等随机因素影响，同时需要根据行驶路线和交通规则在不同驾驶模式间切换。基于中立型随机切换系统的研究，可以开发出更智能的控制算法，使无人驾驶汽车在复杂环境下能够安全、高效地行驶，提升驾驶的舒适性和安全性。

众所周知，在随机系统的研究中，线性增长条件是确保切换系统解的存在性的常用假设。然而，在实际工程系统中，许多系统不满足线性增长条件。这类不满足线性增长条件或者不能被线性增长函数所控制的随机系统被称为高度非线性随机系统或超线性随机系统，高度非线性随机系统在现实世界中广泛存在，如种群中的捕食掠夺模型^[29]和金融中的 CEV 模型^[30]等。值得注意的是高度非线性系统有着诸多与线性随机系统或传统的非线性随机系统完全不同的特性，使得传统的非线性随机系统的分析方法并不能直接应用到高度非线性随机系统特性分析上如高度非线性随机系统不满足线性增长条件或者不能被线性函数所控制，这使得研究传统的非线性随机系统的方法(线性增长条件、线性矩阵不等式等)不再适用于研究高度非线性随机系统。因此，高度非线性随机系统的稳定性分析与控制更具复杂性与挑战性，而且具有更广泛的应用范围。

因此，鉴于现实中混杂系统的复杂性，本文主要研究确定性切换规则下具有异构子系统的高度非线性中立型时滞随机系统的稳定性与反馈控制问题，具有较为深刻的理论与应用背景。

1.2 国内外研究现状

随着控制工程领域的持续发展,切换思想被引入其中。这一思想的融入,能够更有效地描述和控制多模态系统的行为,显著提升系统的性能与鲁棒性。鉴于此,切换系统作为一类特殊的混杂系统,逐渐受到研究人员的重点关注。

由于很多随机系统本身具备时滞特征,其不仅与系统当前的状态相关联,还涉及过去某一时刻的状态及其变化速率。所以,针对中立型随机时滞微分方程的理论探究与实际应用研究,已引发广泛关注,诸多关于方程解的存在唯一性、稳定性、有界性等问题的研究成果不断涌现。Mao^[31]在全局 Lipschitz 条件以及线性增长的条件下,对中立型随机系统的指数稳定及几乎必然指数稳定的充分条件展开了研究。国外学者 Obradović^[32]探讨了一类带有无界时滞以及 Markov 切换的中立型随机微分方程,得出其解的存在性、唯一性和稳定性结论。Zong 等^[33]对一类非线性混合中立型随机微分方程展开研究,该方程不满足线性增长条件,研究内容涵盖了方程的有界性以及指数稳定性。国外学者 Milošević^[34]对这类方程解的以及几乎必然指数稳定性展开了深入研究,同时还分析了不同数值解的稳定性和收敛性。Xie 等^[35]在全新的主导条件下,探讨了方程的渐近有界性和指数稳定性;Li 等^[36]则聚焦于具有一般衰减率的混合中立型随机微分时滞方程,研究其几乎必然稳定性。上述这些结论是大部分是在方程系数满足特定非线性增长条件时得到的,随后在漂移系数中添加线性增长条件,借助 Euler-Maruyama 方法,在时滞有界的情况下证明了几乎必然指数稳定性。此外, Lyapunov 泛函法也常被用于分析随机微分方程的稳定性。Mao^[37]借助 Lyapunov-Razumikhin 方法,推导出中立型随机微分方程指数稳定性的结论。Hu 等^[38]运用 Lyapunov 泛函法,针对带有马尔可夫切换的中立型随机微分方程展开探究,从而得到了系统稳定性的判定标准。

在切换系统的研究中,为确保全局解的唯一性,一般要求其系数满足线性增长条件与局部利普希茨条件。然而,实际中的众多系统呈现出高度非线性特征,难以满足上述条件。鉴于此,研究人员将目光投向了非线性系统。Hu 等^[39]提出了一种新技术,借助适当的 Khasminskii 型条件,成功实现了对系统解的渐近稳定性和有界性的研究。此后,众多学者受此启发,将该技术拓展应用于其他相关

方程的研究。Shen 等^[41]在 Fei 等^[40]的研究基础之上,对高度非线性中立型混杂随机系统,建立了系统系数的多项式增长条件,证明了系统的时滞依赖的渐近稳定性。Zhao^[42]研究了具有确定性切换规则的高度非线性随机系统的稳定性问题,通过运用模态相依的平均驻留时间法和 Lyapunov 泛函法给出了系统解的存在唯一性定理以及指数稳定性定理,随后在文献[43]中考虑了具有确定性切换规则的高度非线性随机时滞系统,并通过设置连续时间反馈控制研究了系统的镇定性的问题,给出了时滞依赖的稳定性。

当前,大部分已研究的随机切换系统结构相似,它们在切换状态子空间中,子系统结构一致,仅参数大小存在差异。但在实际情况中,许多随机系统的子系统结构差异巨大。这种不同结构的随机系统比单一结构的系统更具一般性和实用性,例如,在传染病防控中,针对病毒的不同预防阶段所采取的不同控制方法,会导致病毒传播呈现出完全不同的结构^[44]。然而,目前针对这类不同结构随机系统稳定性的研究相对较少。在已有的相关研究中,Fei 等^[45]第一次研究了不同状态下具有不同结构的非线性随机延迟微分方程的有界性和方程的鲁棒稳定性;Wu 等^[46]进一步深入研究了中立型随机系统的指数稳定性;Lu 等^[47]针对了一种子系统具有多结构且包含多重时变延迟的高度非线性混合中立型随机微分方程展开研究。通过采用 Lyapunov 函数并结合改进的伊藤公式,证明了该随机系统全局解的存在性和唯一性,并进一步推导出系统的渐近有界性。

尽管上述研究中的条件能够确保随机系统解的唯一性,但系统依然可能不稳定,并且这些不同结构的系统在研究过程中均未考虑反馈控制。近年来,越来越多的研究人员致力于通过反馈控制来研究混合随机系统的稳定性。在局部 Lipschitz 条件和 Khasminskii 型条件下,不稳定的混合随机系统可能会出现解的爆炸现象。在此情形下,大量研究表明,设计合适的反馈控制函数能够保证具有马尔可夫切换信号的混合随机系统的稳定性。Fan 等^[48]近期的一些研究成果及其中引用的文献指出,对于给定的不稳定随机系统,合理设计时滞反馈控制函数,可使系统在控制后达到稳定状态。例如,Shen 等^[49]研究了依赖过去状态的反馈控制器的设计规则,以实现一类混合非线性中立型随机系统的渐近稳定;Li 等^[50]的研究通过时滞反馈控制研究高度非线性混合随机微分时滞方程的稳定性,但其切换信号为马尔可夫切换信号,这种方法在确定性切换信号的情况下难以适用。

Shi 等^[51]采用基于离散时间观测的反馈控制来稳定高度非线性带切换信号的随机微分方程,一部分模式呈线性增长,而另一部分的系统为非线性。随后, Lu 等^[52]进一步拓展了该研究方向,通过引入时间延迟反馈控制器,深入分析了在不同结构子空间条件下的高度非线性混合中立型随机系统的渐近有界性和指数稳定性。Liu 等学者^[53]针对具有多重时变延迟的混合中立型随机微分方程,提出了一种新型离散时间反馈控制策略,研究了该类系统在异构条件下的渐近稳定性与指数稳定性。Dong 等^[54]通过设计有界延迟反馈控制,在不可微时滞条件下实现系统指数稳定,拓展了相关理论的应用范围。Hu 等^[55]针对一类高度非线性的混合随机延迟微分方程展开研究,特别考虑了延迟函数不可微的情形。他们通过建立推广的 Khasminskii 型定理,成功证明了该系统全局解的存在性和唯一性。同时,他们还提出了一系列充分条件,用于分析解的渐近有界性和稳定性。Zhao 等^[56]在这些研究的基础上,进一步探讨了在确定切换信号下,具有不可微时滞的高度非线性切换随机系统的延迟反馈控制镇定问题。

1.3 论文内容安排

受上述工作启发,本文主要基于确定性切换信号下研究具有不同结构子系统的高度非线性中立性切换随机系统的稳定性与反馈控制问题。具体工作和章节安排如下:

第一章绪论部分着重介绍论文研究的背景,通过详细阐述国内外关于非线性中立时滞切换随机系统的研究现状进而说明本文的研究意义,随后引出本文的研究内容与结构,最后说明了文中出现的相关符号的具体含义。

第二章研究了具有异构子系统的高度非线性中立型切换随机系统的稳定性问题,其切换信号是确定性切换信号的。在局部 Lipschitz 条件的保证下,针对不同结构的子系统,通过建立了不同结构的 Khasminskii 型条件,证明了具有异构子系统的高度非线性中立型切换随机系统解的存在唯一性和 p 阶矩指数稳定性的充分条件。最后,给出了一个数值例子,验证了理论结果的有效性。

第三章研究了带时滞反馈控制的具有异构子系统的高度非线性中立型切换随机系统的稳定性问题。当具有异构子系统的高度非线性中立型切换随机系统不稳定的时候,通过设置连续时间反馈控制,并且考虑了反馈控制与系统存在时滞

增长的情况,证明了在确定性切换信号下的高度非线性中立型时滞切换随机系统的镇定性。最后,给出了一个数值例子,验证了理论结果的有效性。

第四章是总结部分,我们对论文的主要工作,所运用的方法以及取得的研究结论进行了全面梳理与概括,并针对有待深入探究的问题提出了展望。

1.4 符号说明

在本文中,以下符号将被使用。

$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$; $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$; $\mathbb{R}^{n \times m}$ 表示为 $n \times m$ 实矩阵; $\mathbb{R}^n$ 表示为 n 维欧氏空间; $|x|$ 表示为 x 的欧氏范数, $x \in \mathbb{R}^n$ 。

$(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ 表示完备的概率空间,其中流域 $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ 满足通常条件,即滤波是右连续的, $\mathcal{F}_0$ 包含所有 P 零集。 $B(t)$ 表示为定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ 上的布朗运动。 $E(\cdot)$ 表示为数学期望。

A^T 表示矩阵 A 的转置, $|A| = \sqrt{\text{trace}(A^T A)}$ 表示矩阵 A 的迹范数。

$C([- \tau, 0]; \mathbb{R}^n)$ 表示为连续函数 $\varphi: [- \tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ 的集合,其中 $\|\varphi\| = \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} |\varphi(\theta)|$ 。

$C^{1,2}$ 表示为所有非负函数 $V(t, x, i): [t, +\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbf{S} \rightarrow \mathbb{R}_+$ 的集合,其中函数 $V(t, x, i)$ 对 t 一阶连续可微,对 x 二阶连续可微。

$a \vee b$ 和 $a \wedge b$ 分别表示为 a 和 b 之间的最大值和最小值。

第 2 章 具有异构子系统的高度非线性中立型时滞切换随机系统的稳定性

在现实世界中,复杂工程系统常常由多个具有不同结构和功能的子系统组成。特别是在电力系统、网络通信以及生物系统等领域,由于系统在不同运行状态下会激活不同的控制策略或设备,使得系统整体呈现出“混杂”特性。随着对这些系统建模和控制精度要求的不断提升,研究具有异构子系统结构的混杂随机系统逐渐成为一个重要而具有挑战性的课题。

在实际应用中,许多混杂随机系统的子系统可能会具有完全不同的结构。由于子系统的结构不同,使得系统的稳定性也变得复杂,因此研究具有同构子系统的混杂随机系统稳定性的方法可能不再适用于具有异构子系统的混杂随机系统。在文献[46]中,研究了具有不同结构的高度非线性混杂系统,但其切换信号满足 Markov 切换,采用 M 矩阵方法分析 Markov 切换信号;而本章研究的系统(2-1)的切换信号是非随机切换信号,其不满足 Markov 性质,所以本章采用平均驻留时间法。此外,与文献[42]相比,本章究的系统(2-1)具有中立项;同时,系统(2-1)具有两种不同的子系统结构。

目前,关于确定性切换信号下具有不同结构的高度非线性中立型随机系统的研究还没有。基于此,本章将研究一类在确定性切换信号作用下并且由不同结构子系统构成的高度非线性中立型随机时滞系统。本章将系统划分为两类不同的子结构,分别设定适用于它们的 Khasminskii 型稳定性条件。通过构造适当的 Lyapunov 函数,结合模态依赖的平均驻留时间法,推导出系统解的存在唯一性以及 p 阶矩指数稳定性的充分条件。

2.1 模型介绍

本章的研究对象为如下异构子系统高度非线性中立型时滞切换随机系统:

$$\begin{aligned} & d\left(x(t)-G\left(x(t-\tau)\right)\right) \\ & =f_{\omega(t)}\left(x(t), x(t-\tau), t\right) d t+g_{\omega(t)}\left(x(t), x(t-\tau), t\right) d B(t), \end{aligned} \quad (2-1)$$

初始条件为:

$$\{x(t): -l \leq t \leq 0\} = \xi \in C([-l, 0]; \mathbb{R}^n). \quad (2-2)$$

切换信号 $\omega(t): [0, \infty) \rightarrow \mathbf{S} = \{1, 2, \dots, N\}$ 为一个非随机的分段常数函数，且满足右连续；当 $t \in [t_m, t_{m+1})$ 时， $\omega(t) = i_m \in \mathbf{S}$ ，其中 t_m 是第 m 次切换时间， $m \in \mathbb{N}$ 。且对于任意的 $i \in \mathbf{S}$ ，映射 $f_i: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ 和 $g_i: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ 是 Borel 可测函数， $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是中立项。为了书写方便，在全文中令 $y(t) = x(t-l)$ 。

对于非负连续函数 $V \in C^{1,2}$ ，定义 LV 算子函数： $LV: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \times \mathbf{S} \rightarrow \mathbb{R}$ ：

$$\begin{aligned} LV(x, y, t, i) = & V_t(x - G(y), t, i) \\ & + V_x(x - G(y), t, i) f_i(x, y, t) \\ & + \frac{1}{2} \text{trace}(g_i^T(x, y, t) V_{xx}(x, y, t, i) g_i(x, y, t)), \end{aligned} \quad (2-3)$$

其中

$$V_t(x, t, i) = \frac{\partial V(x, t, i)}{\partial t}; \quad V_x(x, t, i) = \frac{\partial V(x, t, i)}{\partial x}; \quad V_{xx}(x, t, i) = \left(\frac{\partial^2 V(x, t, i)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{d \times d}.$$

在介绍本章的主要结论之前，先给出下列假设条件以及相关定义引理。

假设 2.1.1 对于任意的 $h > 0$ ， $t \geq 0$ ， $i \in \mathbf{S}$ ， $x, y, \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ ，存在一个常数 $K_h > 0$ ，使得 $|x| \vee |y| \vee |\bar{x}| \vee |\bar{y}| \leq h$ 时，有

$$|f_i(x, y, t) - f_i(\bar{x}, \bar{y}, t)| \vee |g_i(x, y, t) - g_i(\bar{x}, \bar{y}, t)| \leq K_h(|x - \bar{x}| + |y - \bar{y}|). \quad (2-4)$$

假设 2.1.2 存在常数 $K > 0$ ， $q_1 > 1$ ， $q_2 > 1$ 且 $q_1 \vee q_2 > 1$ ，使得对于任意的 $(x, y, t, i) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \times \mathbf{S}$ ，有：

$$\begin{aligned} |f_i(x, y, t)| & \leq K(|x| + |y| + |x|^{q_1} + |y|^{q_1}), \\ |g_i(x, y, t)| & \leq K(|x| + |y| + |x|^{q_2} + |y|^{q_2}). \end{aligned} \quad (2-5)$$

假设 2.1.3 对于任意的 $x, y \in \mathbb{R}^n$ ，存在一个常数 $\kappa \in (0, 1)$ ，使得

$$|G(x) - G(y)| \leq \kappa |x - y|, \quad (2-6)$$

同时假设 $G(0) = 0$ ，将得到 $|G(x)| \leq \kappa |x|$ 。

我们将系统(2-1)中切换系统的状态空间 $\mathbf{S} = \{1, 2, \dots, N\}$ 分成了两个子系统： $\mathbf{S}_1 = \{1, 2, \dots, N_1\}$ 和 $\mathbf{S}_2 = \{N_1 + 1, N_1 + 2, \dots, N\}$ 。在假设 2.1.1 和 2.1.3 的保证下，系统(2-1)有唯一最大局部解，但是其局部解可能在有限时间内爆破，因此，需要给出如下类 Khasminskii 型条件。

假设 2.1.4 对于两个给定的常数 $p > q \geq 2$ ，当 $i \in \mathbf{S}_1$ 时，存在常数 $p, q, \theta_{i1}, \theta_{i2} \in \mathbb{R}_+$ ，对于所有的 $(x, y, t, i) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \times \mathbf{S}_1$ ，有：

$$(x - G(y))^T f_i(x, y, t) + \frac{q-1}{2} |g_i(x, y, t)|^2 \leq -\theta_{i1} |x - G(y)|^2 + \theta_{i2} |y|^2. \quad (2-7)$$

当 $i \in \mathbf{S}_2$ 时，还存在常数 $p, q, \theta_{i1}, \theta_{i2}, \theta_{i3}, \theta_{i4} \in \mathbb{R}_+$ ，且 $p > q \geq 2$ ，使得对于任意的 $(x, y, t, i) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \times \mathbf{S}_2$ ，有：

$$\begin{aligned} & (x - G(y))^T f_i(x, y, t) + \frac{p-1}{2} |g_i(x, y, t)|^2 \\ & \leq -\theta_{i1} |x - G(y)|^2 + \theta_{i2} |y|^2 - \theta_{i3} |x - G(y)|^{q-p+2} + \theta_{i4} |y|^{q-p+2}. \end{aligned} \quad (2-8)$$

注释 2.1 根据假设 2.1.3 可以看出系统(2-1)具有两种不同结构的子系统，类似于文献[46]，系统(2-1)也被称为具有异构子系统的高度非线性中立型切换随机系统。

定义 2.1.5^[47] 当 $p > 2$ ，如果存在常数 $K > 0$ ，使得对于任意的初值 x_0 ，系统(2-1)的解满足以下条件，则称该系统的解在 H_∞ 意义下稳定的

$$\int_0^\infty \mathbb{E} |x(t)|^p dt < \infty.$$

如果系统的解满足以下条件，则称该系统在 p 阶矩意义下指数稳定的

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbb{E} |x(t)|^p < 0.$$

定义 2.1.6^[56] 对于给定切换信号 $\omega(t)$ 和任意的 $t \geq s > 0$ ，令 $T_i(t, s)$ 表示第 i 个子系统在区间 $[s, t)$ 内的总运行时间， $N_i(t, s)$ 表示在区间 $[s, t)$ 内的切换次数。令

$$N_i(t, s) \leq \frac{T_i(t, s)}{\mathfrak{T}_{ai}} + N_{0i}, \quad (2-9)$$

则存在 $N_{0i} \geq 0$ 和 $\mathfrak{T}_{ai} > 0$ ， $\mathfrak{T}_{ai}$ 为切换信号 $\omega(t)$ 的平均驻留时间， N_{0i} 为模态依赖频

跳界。

引理 2.1.7^[46] 当任意的 $a, b \geq 0$, $\aleph > 0$, $p \geq 1$ 时, 有:

$$(a+b)^p \leq (1+\aleph)^{p-1} a^p + (1+\aleph^{-1})^{p-1} b^p. \quad (2-10)$$

当上式中 $\aleph = \frac{\kappa}{1-\kappa}$, $a = x - G(y)$, $b = G(y)$ 时, 或当 $\aleph = \kappa$, $a = x$, $b = -G(y)$ 时, 下式不等号成立

$$(1-\kappa)^{p-1} (|x|^p - \kappa|y|^p) \leq |x - G(y)|^p \leq (1+\kappa)^{p-1} (|x|^p + \kappa|y|^p). \quad (2-11)$$

2.2 主要结果证明

定理 2.2.1 在假设 2.1.1-2.1.4 的保证下, 假设存在正常数 $\lambda, \mathfrak{S}_{ai}, \hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3, \hat{\eta}_4, c_2$

以及 $\mu_i > 1$, 对于 $\forall i, j \in \mathbf{S}$ 如果满足以下条件:

$$V(x, t, i) \leq \mu_i V(x, t, j), \quad (2-12)$$

$$\mathfrak{S}_{ai} > \frac{\ln \mu_i}{\lambda}, \quad (2-13)$$

$$\hat{\eta}_1 - c_2 \lambda (1+k)^p - \hat{\eta}_2 e^{\lambda t} \geq 0, \quad (2-14)$$

$$\hat{\eta}_3 - c_2 \lambda (1+k)^q - \hat{\eta}_4 e^{\lambda t} \geq 0, \quad (2-15)$$

则对于任意初始值 $x(0)$ 和 $t \geq 0$, 系统(2-1)存在唯一解 $x(t)$, 且系统(2-1)的解满足:

$$\int_0^\infty \mathbb{E} |x(t)|^p dt < \infty. \quad (2-16)$$

证明: 由于 $\mathbf{S}_1$ 和 $\mathbf{S}_2$ 的结构不同, 因此定理 2.2.1 的证明将分三步证明。

(1) 需要定义一个与结构特征相关的 Lyapunov 函数, 并估计其对应的算子。

定义如下 Lyapunov 函数 $V: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \times \mathbf{S} \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$V(x(t), t, \omega(t)) = \begin{cases} \alpha_i |x|^p + \beta_i |x|^q, & i \in \mathbf{S}_1, \\ \alpha_i |x|^p, & i \in \mathbf{S}_2, \end{cases} \quad (2-17)$$

其中 α_i 和 β_i 均为正常数。由上式可以得到:

$$c_1 |x|^p \leq V(x, t, i) \leq c_2 (|x|^p + |x|^q), \quad (2-18)$$

其中 $c_1 = \min_{i \in S} \alpha_i$, $c_2 = \left(\max_{i \in S} \alpha_i \right) \vee \left(\max_{i \in S} \beta_i \right)$ 。令 $\tilde{x}(t) = x(t) - G(x(t-t))$, 使用广义伊藤公式可得:

$$V(\tilde{x}(t), t, i) = V(\tilde{x}(0), t_0, i_0) + \int_0^t LV(x(s), x(s-\tau), s, i_s) ds + M(t),$$

其中 $M(t)$ 是一个连续的局部鞅, 并且有 $M(0) = 0$ 。

当 $i \in S_1$ 时, 有:

$$\begin{aligned} & LV(x, y, t, i) \\ & \leq p\alpha_i |x - G(y)|^{p-2} (x - G(y))^T f_i(x, y, t) \\ & \quad + q\beta_i |x - G(y)|^{q-2} (x - G(y))^T f_i(x, y, t) \\ & \quad + \frac{1}{2} p\alpha_i |x - G(y)|^{p-2} |g_i(x, y, t)|^2 + \frac{1}{2} q\beta_i |x - G(y)|^{q-2} |g_i(x, y, t)|^2 \\ & \quad + \frac{1}{2} (p-2) p\alpha_i |x - G(y)|^{p-4} \left| (x - G(y))^T |g_i(x, y, t)| \right|^2 \\ & \quad + \frac{1}{2} (q-2) q\beta_i |x - G(y)|^{q-4} \left| (x - G(y))^T |g_i(x, y, t)| \right|^2. \end{aligned} \quad (2-19)$$

根据不等式 $|x^T y|^2 \leq |x|^2 + |y|^2$ 可以推出:

$$\begin{aligned} & LV(x, y, t, i) \\ & \leq p\alpha_i |x - G(y)|^{p-2} \left((x - G(y))^T f_i(x, y, t) + \frac{p-1}{2} |g_i(x, y, t)|^2 \right) \\ & \quad + q\beta_i |x - G(y)|^{q-2} \left((x - G(y))^T f_i(x, y, t) + \frac{q-1}{2} |g_i(x, y, t)|^2 \right). \end{aligned} \quad (2-20)$$

根据假设 2.1.3 可得到:

$$\begin{aligned} & LV(x, y, t, i) \\ & \leq p\alpha_i |x - G(y)|^{p-2} \left(-\theta_{i1} |x - G(y)|^2 + \theta_{i2} |y|^2 \right) \\ & \quad + q\beta_i |x - G(y)|^{q-2} \left(-\theta_{i1} |x - G(y)|^2 + \theta_{i2} |y|^2 \right). \end{aligned} \quad (2-21)$$

根据 Young 不等式, 得到:

$$\begin{aligned} |x - G(y)|^{p-2} |y|^2 & \leq \frac{p-2}{p} |x - G(y)|^p + \frac{2}{p} |y|^p, \\ |x - G(y)|^{q-2} |y|^2 & \leq \frac{q-2}{q} |x - G(y)|^q + \frac{2}{q} |y|^q. \end{aligned}$$

将上式代入(2-21)可得:

$$\begin{aligned}
 & LV(x, y, t, i) \\
 & \leq (-p\alpha_i\theta_{i1} + (p-2)\alpha_i\theta_{i2})|x - G(y)|^p + 2\alpha_i\theta_{i2}|y|^p \\
 & \quad + (-q\beta_i\theta_{i1} + (q-2)\beta_i\theta_{i2})|x - G(y)|^q + 2\beta_i\theta_{i2}|y|^q \\
 & \leq -\eta_{i1}|x|^p + \eta_{i2}|y|^p - \eta_{i3}|x|^q + \eta_{i4}|x|^q,
 \end{aligned} \tag{2-22}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \eta_{i1} &= (p\alpha_i\theta_{i1} - (p-2)\alpha_i\theta_{i2})(1-\kappa)^{p-1}, & \eta_{i3} &= (q\beta_i\theta_{i1} - (q-2)\beta_i\theta_{i2})(1-\kappa)^{q-1}, \\
 \eta_{i2} &= (-p\alpha_i\theta_{i1} + (p-2)\alpha_i\theta_{i2})\kappa(1-\kappa)^{p-1} + 2\alpha_i\theta_{i2}, \\
 \eta_{i4} &= (-q\beta_i\theta_{i1} + (q-2)\beta_i\theta_{i2})\kappa(1-\kappa)^{q-1} + 2\beta_i\theta_{i2}.
 \end{aligned}$$

同理，可以得到对于任意 $i \in \mathbf{S}_2$ ，可以类似的推导出：

$$LV(x, y, t, i) \leq -\eta_{i5}|x|^p + \eta_{i6}|y|^p - \eta_{i5}|x|^q + \eta_{i6}|x|^q, \tag{2-23}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \eta_{i5} &= \left(p\alpha_i\theta_{i3} - \frac{p(p-2)}{q}\alpha_i\theta_{i4} \right) (1-\kappa)^{q-1}, \\
 \eta_{i6} &= \left(-p\alpha_i\theta_{i3} + \frac{p(p-2)}{q}\alpha_i\theta_{i4} \right) \kappa(1-\kappa)^{q-1} + \frac{p(q-p+2)}{q}\alpha_i\theta_{i4}.
 \end{aligned}$$

因此，可以得到对于任意 $i \in \mathbf{S}$ ，有：

$$LV(x, y, t, i) \leq -\hat{\eta}_1|x|^p + \hat{\eta}_2|y|^p - \hat{\eta}_3|x|^q + \hat{\eta}_4|x|^q, \tag{2-24}$$

其中

$$\hat{\eta}_1 = \min_{i \in \mathbf{S}} \{\eta_{i1}\}, \quad \hat{\eta}_2 = \max_{i \in \mathbf{S}} \{\eta_{i2}\}, \quad \hat{\eta}_3 = \min_{i \in \mathbf{S}} \{\eta_{i3}, \eta_{i5}\}, \quad \hat{\eta}_4 = \max_{i \in \mathbf{S}} \{\eta_{i4}, \eta_{i6}\}.$$

(2)接下来证明系统(2-1)在 $t \in [-t, \infty)$ 存在唯一解。

根据假设 2.1.2 和假设 2.1.3，系统(2-1)在 $t \in [-t, \sigma_\infty)$ 存在最大局部解 $x(t)$ ， σ_∞ 是爆炸时间。因此若要证明系统在 $t \in [-t, \infty)$ 存在唯一解，则证明 $\sigma_\infty = \infty$ a.s.即可。因为初始值 x_0 有界，所以存在正常数 k_0 满足 $\|x_0\| \leq k_0$ ，对任意 $k \geq k_0$ ，定义停时序列 τ_k ：

$$\tau_k := \inf \{t \geq 0 : |x(t)| \geq k\}.$$

显然 τ_k 是关于 k 递增的, 定义 $\tau_\infty := \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k \leq \rho_\infty$, 要证明系统(2-1)的解 $x(t)$, $t \in [0, \infty)$ 在有限时间内不会爆炸, 证明 $\tau_k = \infty$ 即可。

当 $t \in [t_0, t_1)$ 时, 通过使用广义伊藤公式可以推导出:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} e^{\lambda(t \wedge \tau_k)} V(\tilde{x}_{t \wedge \tau_k}, t \wedge \tau_k, i_{t \wedge \tau_k}) \\ &= \mathbb{E} e^{\lambda t_0} V(\tilde{x}(t_0), t_0, i_0) + \mathbb{E} \int_{t_0}^{t \wedge \tau_k} e^{\lambda s} [\lambda V(\tilde{x}(s), s, i_0) + LV(x(s), x(s-t), s, i_0)] ds. \end{aligned}$$

当 $t \in [t_1, t_2)$ 时, 可以得到:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} e^{\lambda(t \wedge \tau_k)} V(\tilde{x}_{t \wedge \tau_k}, t \wedge \tau_k, i_1) \\ &= \mathbb{E} e^{\lambda t_1} V(\tilde{x}(t_1), t_1, i_1) + \mathbb{E} \int_{t_1}^{t \wedge \tau_k} e^{\lambda s} [\lambda V(\tilde{x}(s), s, i_1) + LV(x(s), x(s-t), s, i_1)] ds \\ &\leq \mu_{i_1} \mathbb{E} e^{\lambda t_0} V(\tilde{x}(t_0), t_0, i_0) + \mu_{i_1} \mathbb{E} \int_{t_0}^{t_1} e^{\lambda s} [\lambda V(\tilde{x}(s), s, i_0) + LV(x(s), x(s-t), s, i_0)] ds \\ &\quad + \mathbb{E} \int_{t_1}^{t \wedge \tau_k} e^{\lambda s} [\lambda V(\tilde{x}(s), s, i_1) + LV(x(s), x(s-t), s, i_1)] ds. \end{aligned}$$

当 $t \in [t_{m-1}, t_m)$ 时, 可以得出:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} e^{\lambda(t \wedge \tau_k)} V(\tilde{x}_{t \wedge \tau_k}, t \wedge \tau_k, i_{m-1}) \\ &\leq \mu_{i_1}^{N_i(t_m, t_0)} \mathbb{E} e^{\lambda t_0} V(\tilde{x}(t_0), t_0, i_0) \\ &\quad + \sum_{m=1}^{N_i(t_m, t_0)-1} \mu_{i_m}^{N_i(t_m, t_0)-(m-1)} \mathbb{E} \int_{t_{m-2}}^{t_{m-1}} e^{\lambda s} [\lambda V(\tilde{x}(s), s, i_{m-2}) + LV(x(s), x(s-t), s, i_{m-2})] ds \\ &\quad + \mathbb{E} \int_{t_1}^{t \wedge \tau_k} e^{\lambda s} [\lambda V(\tilde{x}(s), s, i_{m-1}) + LV(x(s), x(s-t), s, i_{m-1})] ds. \end{aligned}$$

可以推导出, 当 $t \in [t_m, t_{m+1})$ 时,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} e^{\lambda(t \wedge \tau_k)} V(\tilde{x}_{t \wedge \tau_k}, t \wedge \tau_k, i_m) \\ &= \mathbb{E} e^{\lambda t_m} V(\tilde{x}(t_m), t_m, i_m) + \mathbb{E} \int_{t_1}^{t \wedge \tau_k} e^{\lambda s} [\lambda V(\tilde{x}(s), s, i_m) + LV(x(s), x(s-t), s, i_m)] ds \\ &\leq \mu_{i_1}^{N_i(t_{m+1}, t_0)} \mathbb{E} e^{\lambda t_0} V(\tilde{x}(t_0), t_0, i_0) \\ &\quad + \sum_{m=1}^{N_i(t_{m+1}, t_0)-1} \mu_{i_m}^{N_i(t_{m+1}, t_0)-m} \mathbb{E} \int_{t_{m-1}}^{t_m} e^{\lambda s} [\lambda V(\tilde{x}(s), s, i_{m-1}) + LV(x(s), x(s-t), s, i_{m-1})] ds \\ &\quad + \mathbb{E} \int_{t_1}^{t \wedge \tau_k} e^{\lambda s} [\lambda V(\tilde{x}(s), s, i_m) + LV(x(s), x(s-t), s, i_m)] ds. \end{aligned}$$

因为 $\mu_i > 1$, 通过数学归纳法可得到对于 $t \in [t_n, t_{n+1})$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, 有:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} e^{\lambda(t \wedge \tau_k)} V(\tilde{x}_{\tau_k}, t \wedge \tau_k, i_{\tau_k}) \\ & \leq \mu_i^{N_i(t, t_0)} \left[\mathbb{E} e^{\lambda t_0} V(\tilde{x}_{t_0}, t_0, i_0) + \mathbb{E} \int_{t_0}^{t \wedge \tau_k} e^{\lambda s} \left[\lambda V(\tilde{x}_s, s, i_s) + LV(x_s, x(s-\iota), s, i_s) \right] ds \right]. \end{aligned}$$

将(2-17)和(2-24)代入上式，可以得到：

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} e^{\lambda(t \wedge \tau_k)} V(\tilde{x}_{\tau_k}, t \wedge \tau_k, i_{\tau_k}) \\ & \leq \mu_i^{N_i(t, t_0)} \mathbb{E} e^{\lambda t_0} V(\tilde{x}_{t_0}, t_0, i_0) \\ & \quad + \mu_i^{N_i(t, t_0)} \mathbb{E} \int_{t_0}^{t \wedge \tau_k} e^{\lambda(t \wedge \tau_k)} c_2 \lambda \left(|x(s) - G(s-\iota)|^p + |x(s) - G(s-\iota)|^q \right) ds \\ & \quad + \mu_i^{N_i(t, t_0)} \mathbb{E} \int_{t_0}^{t \wedge \tau_k} e^{\lambda(t \wedge \tau_k)} \left(-\hat{\eta}_1 |x|^p + \hat{\eta}_2 |y|^p - \hat{\eta}_3 |x|^q + \hat{\eta}_4 |x|^q \right) ds. \end{aligned}$$

由积分性质可知：

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \int_{t_0}^{t \wedge \tau_k} e^{\lambda(s-t_0)} |x(s-\tau)|^p ds \leq e^{\lambda \tau} \mathbb{E} \int_{t_0-\tau}^{t_0} |x|^p ds + e^{\lambda \tau} \mathbb{E} \int_{t_0}^{t \wedge \tau_k} e^{\lambda(s-t_0)} |x|^p ds, \\ & \mathbb{E} \int_{t_0}^{t \wedge \tau_k} e^{\lambda(s-t_0)} |x(s-\tau)|^q ds \leq e^{\lambda \tau} \mathbb{E} \int_{t_0-\tau}^{t_0} |x|^q ds + e^{\lambda \tau} \mathbb{E} \int_{t_0}^{t \wedge \tau_k} e^{\lambda(s-t_0)} |x|^q ds. \end{aligned}$$

以及引理 2.1.7，可以推出：

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} e^{\lambda(t \wedge \tau_k)} V(\tilde{x}_{\tau_k}, t \wedge \tau_k, i) \\ & \leq \mu_i^{N_i(t, t_0)} K_1 + \mu_i^{N_i(t, t_0)} \mathbb{E} \int_{t_0}^{t \wedge \tau_k} e^{\lambda(t \wedge \tau_k)} \left(-\hat{\eta}_1 + c_2 \lambda (1+\kappa)^p + \hat{\eta}_2 e^{\lambda \tau_k} \right) |x|^p ds \\ & \quad + \mu_i^{N_i(t, t_0)} \mathbb{E} \int_{t_0}^{t \wedge \tau_k} e^{\lambda(t \wedge \tau_k)} \left(-\hat{\eta}_3 + c_2 \lambda (1+\kappa)^q + \hat{\eta}_4 e^{\lambda \tau_k} \right) |x|^q ds, \end{aligned} \quad (2-25)$$

其中

$$K_1 = e^{\lambda t_0} V(\tilde{x}_{t_0}, t_0, i_0) + e^{\lambda \tau} \hat{\eta}_2 \mathbb{E} \int_{t_0-\tau}^{t_0} |x|^p ds + e^{\lambda \tau} \hat{\eta}_4 \mathbb{E} \int_{t_0-\tau}^{t_0} |x|^q ds.$$

根据条件(2-14)和(2-15)可以得到：

$$c_1 e^{\lambda(t \wedge \tau_k)} \mathbb{E} |\tilde{x}(t \wedge \tau_k)|^p \leq \mu_i^{N_i(t, t_0)} K_1. \quad (2-26)$$

根据引理 2.1.7 可以得到：

$$(1-\kappa)^{p-1} \mathbb{E} |x(t \wedge \tau_k)|^p \leq \mathbb{E} |\tilde{x}(t \wedge \tau_k)|^p + \kappa (1-\kappa)^{p-1} \mathbb{E} |x(t \wedge \tau_k - \iota)|^p. \quad (2-27)$$

将(2-14)代入(2-15)可得：

$$\begin{aligned}
 & (1-\kappa)^{p-1} \sup_{0 \leq s \leq t} E |x(t \wedge \tau_k)|^p \\
 & \leq \frac{K_1}{c_1} \mu_i^{N_i(t, t_0)} e^{-\lambda t} + \kappa (1-\kappa)^{p-1} E |x(t \wedge \tau_k - \iota)|^p \\
 & \leq K_2 + \frac{K_1 e^{N_{0i}}}{c_1} e^{-\left(\frac{\ln \mu_i}{\mathfrak{I}_{\alpha i}} - \lambda\right)t} + \kappa (1-\kappa)^{p-1} \sup_{0 \leq s \leq t} E |x(t \wedge \tau_k - \iota)|^p,
 \end{aligned} \tag{2-28}$$

其中 $K_2 = \kappa \sup_{-t \leq s \leq 0} E |x(s)|^p$ 。由条件(2-13)可知 $0 < \frac{\ln \mu_i}{\mathfrak{I}_{\alpha i}} - \lambda := \gamma$ ，则有：

$$(1-\kappa)^p \sup_{0 \leq s \leq t} E |x(t \wedge \tau_k)|^p \leq K_2 + \frac{K_1 e^{N_{0i}}}{c_1} e^{-\gamma t}. \tag{2-29}$$

由上式可推出：

$$(1-\kappa)^p \kappa^p P(\tau_k \leq t) \leq K_2 + \frac{K_1 e^{N_{0i}}}{c_1} e^{-\gamma t}. \tag{2-30}$$

当 $k \rightarrow \infty$ 时，可以看出对于 $\forall t \geq 0$ ，有 $\lim_{k \rightarrow \infty} P(\tau_k \leq t) = 0$ ，即得证 $\sigma_\infty = \infty$ a.s.。因此，

对于任意的初始值 $x(0)$ 和 $t \geq 0$ ，系统(2-1)存在唯一的全局解 $x(t)$ 。

(3)最后证明解的性质。

此外，通过广义伊藤公式可以得到，对于任意的 $t \geq 0$ 和 $k \geq k_0$ ，有

$$EV(\tilde{x}_{t \wedge \tau_k}, t \wedge \tau_k, \tilde{\omega}_{t \wedge \tau_k}) = V(\tilde{x}_0, 0, \tilde{\omega}_0) + E \int_{t_0}^{t \wedge \tau_k} LV(\tilde{x}_s, s, \tilde{\omega}_s) ds. \tag{2-31}$$

将(2-24)代入上式可得：

$$EV(\tilde{x}_{t \wedge \tau_k}, t \wedge \tau_k, i) \leq K_5 + E \int_{t_0}^{t \wedge \tau_k} \left(-\hat{\eta}_1 |x|^p + \hat{\eta}_2 |x(s-\iota)|^p - \hat{\eta}_3 |x|^q + \hat{\eta}_4 |x(s-\iota)|^q \right) ds.$$

将(2-18)代入以及积分性质可已推出：

$$c_1 E |\tilde{x}|^p \leq K_5 + E \int_{t_0}^{t \wedge \tau_k} \left(-(\hat{\eta}_1 - \hat{\eta}_2) |x|^p - (\hat{\eta}_3 - \hat{\eta}_4) |x|^q \right) ds,$$

其中，

$$K_5 = V(\tilde{x}_{t_0}, t_0, i_0) + \hat{\eta}_2 E \int_{t_0-t}^{t_0} |x|^p ds + \hat{\eta}_4 E \int_{t_0-t}^{t_0} |x|^q ds.$$

由(2-14)和(2-15)可得到：

$$E \int_0^t |x|^p ds \leq \frac{K_5}{\hat{\eta}_1 - \hat{\eta}_2}.$$

令 $t \rightarrow \infty$ 并使用 Fubini 定理，可以验证 $\int_0^\infty E |x(t)|^p dt < \infty$ 这一结论。

因此，定理 2.2.1 证明完毕。

定理 2.2.2 假设定理 2.2.1 中的所有条件都成立，并且对于任意的初始数据以及 $i \in \mathbf{S}$ ，系统的解满足：

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \left(E |x(t)|^p \right) \leq 0. \quad (2-32)$$

证明： 利用引理 2.1.7，令 $\aleph = \aleph_0 > \left(\kappa^{\frac{-p}{p-1}} - 1 \right)^{-1}$ ，可得：

$$\begin{aligned} E |x(t)|^p &\leq (1 + \aleph_0)^{p-1} E |\tilde{x}(t)|^p + (1 + \aleph_0^{-1})^{p-1} E |x(t-t)|^p \\ &\leq (1 + \aleph_0)^{p-1} \frac{K_1 \mu_i^{N_i(t, t_0)}}{c_1 e^{\lambda t}} + k^p (1 + \aleph_0^{-1})^{p-1} E |x(t-t)|^p. \end{aligned} \quad (2-33)$$

因此对于任意的 $t \geq 0$ ，有：

$$\begin{aligned} &\sup_{0 \leq s \leq t} E |x(t)|^p \\ &\leq (1 + \aleph_0)^{p-1} \frac{K_1 \mu_i^{N_i(t, t_0)}}{c_1 e^{\lambda t}} + \kappa^p (1 + \aleph_0^{-1})^{p-1} \left(\sup_{0 \leq s \leq t} E |x(t)|^p + \sup_{-t \leq s \leq 0} E |x(t)|^p \right) \\ &\leq (1 + \aleph_0)^{p-1} \frac{K_1 \mu_i^{N_i(t, t_0)}}{c_1 e^{\lambda t}} + \kappa^p (1 + \aleph_0^{-1})^{p-1} \sup_{0 \leq s \leq t} E |x(t)|^p. \end{aligned} \quad (2-34)$$

由上式可得：

$$\sup_{0 \leq s \leq t} E |x(t)|^p \leq \frac{(1 + \aleph_0)^{p-1} \frac{K_1 \mu_i^{N_i(t, t_0)}}{c_1 e^{\lambda t}}}{1 - \kappa^p (1 + \aleph_0^{-1})^{p-1}} \leq K_3 e^{-\left(\frac{\ln \mu_i}{\Im_{ai}} - \lambda \right) t}, \quad (2-35)$$

其中 $K_3 = \frac{e^{N_{0i}} (1 + \aleph_0)^{p-1} K_1}{c_1 (1 - \kappa^p (1 + \aleph_0^{-1})^{p-1})}$ 。再由条件(2-13)可得：

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \left(E |x(t)|^p \right) \leq 0. \quad (2-36)$$

根据定义 2.1.2 可得出系统(2-1)的解是 p 阶矩指数稳定的，

因此，定理 2.2.2 证明完毕。

2.3 数值例子

在本节中将给出一个数值例子来展示定理 2.2.1 的理论结果，主要考虑以下切换随机系统：

$$\begin{aligned} & d(x(t) - G(x(t-\iota))) \\ & = f_{\omega(t)}(x(t), x(t-\iota), t)dt + g_{\omega(t)}(x(t), x(t-\iota), t)dB(t), \end{aligned} \quad (2-37)$$

其中状态空间 $\mathbf{s} = \{1, 2\}$ ，将状态空间 $\mathbf{s}$ 分为： $\mathbf{s}_1 = \{1\}$ 和 $\mathbf{s}_2 = \{2\}$ 两个子空间。令 $\iota = 0.01$ ， $G(y) = 0.1y$ ，系数 f_i 和 g_i 分别为：

$$\begin{aligned} f_1(x, y, t) &= -2x + \frac{2}{5}y, & g_1(x, y, t) &= \frac{1}{3}y, \\ f_2(x, y, t) &= -2x + \frac{2}{5}y - 2x^3, & g_2(x, y, t) &= 0.1y^2. \end{aligned}$$

假设 $p = 2$ ， $q = 4$ 通过进一步计算可以得到：

$$\begin{aligned} & (x - G(y))^T f_1(x, y, t) + \frac{3}{2} |g_1(x, y, t)|^2 \leq -(x - 0.1y)^2 + 0.177y^2, \\ & (x - G(y))^T f_2(x, y, t) + \frac{1}{2} |g_2(x, y, t)|^2 \\ & \leq -(x - 0.1y)^2 + 0.177y^2 - 1.565(x - 0.1y)^4 + 0.145y^4. \end{aligned}$$

因此可以计算得出以下参数：

$$\begin{aligned} \theta_{1_1} &= 1, & \theta_{1_2} &= 0.177, & \theta_{2_1} &= 1, \\ \theta_{2_2} &= 1.565, & \theta_{2_3} &= 1.565, & \theta_{2_4} &= 0.145. \end{aligned}$$

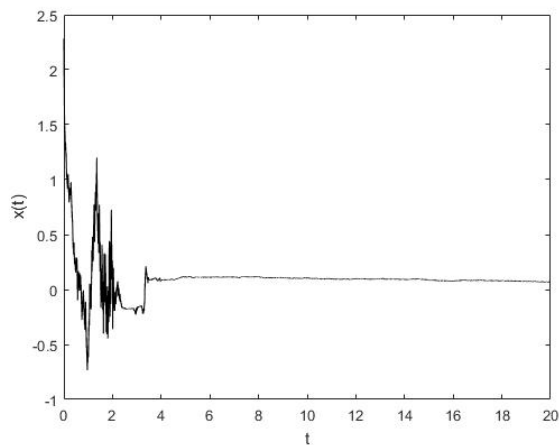
令 $\alpha_1 = 1.3$ ， $\beta_1 = 0.8$ ， $\alpha_2 = 0.9$ ，由定理 2.2.1 可以算出 $\eta_1 = 2.34$ ， $\eta_2 = 0.226$ ，

$\eta_3 = 2.126$ ， $\eta_4 = 0.071$ ， $\eta_5 = 2.054$ ， $\eta_6 = 0.056$ 。所以有：

$$LV(x, y, t, i) \leq -2.34|x|^2 + 0.226|y|^2 - 2.054|x|^4 + 0.071|y|^4.$$

令 $\mathfrak{I}_{\alpha_1} = \mathfrak{I}_{\alpha_2} = 1s$ ， $\lambda = 0.55$ ， $\mu_1 = 1.001$ ， $\mu_2 = 1.501$ ，则假设条件(2.12)至(2.15)得以验证。

因此，根据定理 2.2.2 可知系统(2-37)是 p 阶矩指数稳定的。图 2-1 是运用 Matlab 对初始条件为 $x(0) = 1.5$ ， $\iota = 0.01$ 的系统(2-37)进行模拟得到的状态轨迹图，从图中可以看出系统(2-37)是稳定的。

图 2-1: 系统(2-37)的状态 $x(t)$ 的路径图

2.4 本章小结

这一章研究了具有异构子系统的高度非线性中立型切换随机系统的稳定性问题, 其切换信号是确定性切换信号的。在局部 Lipschitz 条件的保证下, 针对不同结构的子系统, 通过建立了不同结构的 Khasminskii 型条件, 证明了具有异构子系统的高度非线性中立型切换随机系统解的存在唯一性和 p 阶矩指数稳定性的充分条件。最后, 我们给出了一个数值例子, 验证了理论结果的有效性。

第3章 基于时滞反馈控制的高度非线性中立型切换随机系统的镇定性

在第2章中,我们研究了具有异构结构的高度非线性中立型切换随机系统在确定性切换信号下的稳定性,并得出了系统解的存在唯一性和指数稳定性的理论条件。然而,实际系统往往在自然状态下并不满足这些稳定性条件,尤其在系统非线性强、干扰大或初始状态较差的情况下,系统的解可能会进入不稳定状态。因此,如何设计有效的控制器,使得原本不稳定的系统在外部输入控制作用下转变为稳定系统,是本章关注的核心问题。

在具有中立项和时滞的切换系统中,由于反馈信号的测量、传输及作用过程之间不可忽略的时滞,这种“滞后”效应会对系统的稳定性产生显著影响。为了解决这一问题,已有文献[50]提出了一种基于过去状态的反馈控制方法,使得受控系统得以稳定。通过设计合适的反馈控制函数,可以确保高度非线性混合随机微分时滞方程的指数稳定性。同时,与文献[56]中的研究相比,本章所探讨的系统(3-1)引入了中立项,并且具有两种不同的子系统结构。切换系统的异构性使得每个子系统的动态行为不同,因此,控制器的设计必须考虑模态依赖建模,以兼顾不同子系统结构下的控制性能。

在第2章的系统模型基础上,本章引入一种连续时间观测下的时滞反馈控制器,该控制器不仅考虑系统的时滞特性,还假设满足压缩映射条件,从而在理论上保证了控制器的收敛性。通过构造带控制项的 Lyapunov 泛函,并结合平均驻留时间法分析,推导出受控系统在确定性切换下的 p 阶矩指数稳定性的充分条件。

自2017年起,国内外多个研究团队已针对高度非线性系统开展了系列反馈镇定研究^[57]。稳定性通常指系统自身的内在特性,即在受到扰动后,系统是否能够保持或恢复到其平衡状态。稳定性通常通过 Lyapunov 函数法等方法进行分析,可以进一步细分为渐近稳定性、指数稳定性等类型。而镇定性则是通过设计和实施合适的控制策略,主动将本身不稳定或不满足稳定性条件的系统转变为一个稳定的系统。镇定性关注的是如何通过外部干预改变系统的行为,使其从不稳定的状态转向稳定状态。例如,飞行器的自稳性是指飞行器具备的内在稳定性,它能

够自动纠正姿态并恢复到稳定飞行状态；而镇定性则指的是在飞行器因故障进入不稳定状态时，必须依靠外部控制器来调整飞行模式，帮助其恢复稳定状态。

3.1 模型介绍

由定理 2.2.1 表明系统(2-1)在 $t \in [-l, \infty)$ 上有唯一解，且该解是有界的。但仅在假设 2.1.1 和假设 2.1.3 下，系统(2-1)可能不稳定。在这种情况下，需要设计一个反馈控制函数 $u_{\omega(t)}(x(t), x(t-\tau), t)$ 来保证系统(2-1)的稳定性。因此，考虑如下系统：

$$\begin{aligned} d[x(t) - G(x(t-l))] = & \left[f_{\omega(t)}(x(t), x(t-l), t) + u_{\omega(t)}(x(t), x(t-\tau), t) \right] dt \\ & + g_{\omega(t)}(x(t), x(t-l), t) dB(t), t \geq 0, \end{aligned} \quad (3-1)$$

初始条件为：

$$\{x(t) : -l \leq t \leq 0\} = \xi \in C([-l, 0]; \mathbb{R}^n). \quad (3-2)$$

切换信号 $\omega(t) : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{S} = \{1, 2, \dots, N\}$ 为一个非随机的分段常数函数，且满足右连续；当 $t \in [t_m, t_{m+1})$ 时， $\omega(t) = i_m \in \mathbf{S}$ ，其中 t_m 是第 m 次切换时间， $m \in \mathbb{N}$ 。且对于任意的 $i \in \mathbf{S}$ ，映射 $f_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ 和 $g_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ 是 Borel 可测函数， $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是中立项。系统时滞和反馈控制时滞项： $l \in \mathbb{R}$ ， $\tau \in \mathbb{R}_+$ 且 $\tau \leq l$ 。为了书写方便，在全文中令 $y(t) = x(t-l)$ 。

对于非负连续函数 $V \in C^{1,2}$ ，定义 LV 算子函数： $LV : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \times \mathbf{S} \rightarrow \mathbb{R}$ ：

$$\begin{aligned} LV(x, y, t, i) = & V_i(x - G(y), t, i) \\ & + V_x(x - G(y), t, i) [f_i(x, y, t) + u_i(x, t)] \\ & + \frac{1}{2} \text{trace}(g_i^T(x, y, t) V_{xx}(x, y, t, i) g_i(x, y, t)), \end{aligned} \quad (3-3)$$

其中

$$V_t(x, t, i) = \frac{\partial V(x, t, i)}{\partial t}; \quad V_x(x, t, i) = \frac{\partial V(x, t, i)}{\partial x}; \quad V_{xx}(x, t, i) = \left(\frac{\partial^2 V(x, t, i)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{d \times d}.$$

我们将系统(3-1)中切换系统的状态空间 $S = \{1, 2, \dots, N\}$ 分成了两个子系统 $S_1 = \{1, 2, \dots, N_1\}$ 和 $S_2 = \{N_1 + 1, N_1 + 2, \dots, N\}$ 。该切换随机系统在每个子系统中对应不同的结构，此外本章研究的系统(3-1)的切换信号是非随机切换信号，其不满足 Markov 性质，因此采用的是平均驻留时间法。

在介绍本章的主要结论之前，先给出下列假设条件和相关定义。

假设 3.1.1 对于任意的 $h > 0$, $t \geq 0$, $i \in S$, $x, y, \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$, 存在一个常数 $K_h > 0$, 使得 $|x| \vee |y| \vee |\bar{x}| \vee |\bar{y}| \leq h$ 时, 有:

$$|f_i(x, y, t) - f_i(\bar{x}, \bar{y}, t)| \vee |g_i(x, y, t) - g_i(\bar{x}, \bar{y}, t)| \leq K_h (|x - \bar{x}| + |y - \bar{y}|). \quad (3-4)$$

假设 3.1.2 存在常数 $K > 0$, $q_1 > 1$, $q_2 > 1$ 且 $q_1 \vee q_2 > 1$, 使得对于任意的 $(x, y, t, i) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \times S$, 有:

$$\begin{aligned} |f_i(x, y, t)| &\leq K (|x| + |y| + |x|^{q_1} + |y|^{q_1}), \\ |g_i(x, y, t)| &\leq K (|x| + |y| + |x|^{q_2} + |y|^{q_2}). \end{aligned} \quad (3-5)$$

假设 3.1.3 对于任意的 $x, y \in \mathbb{R}^n$, 存在一个常数 $\kappa \in (0, 1)$, 使得

$$|G(x) - G(y)| \leq \kappa |x - y|, \quad (3-6)$$

同时假设 $G(0) = 0$, 将得到 $|G(x)| \leq \kappa |x|$ 。

由假设 3.1.1 可以看出, 系统的系数并不满足线性增长条件, 而是多项式增长。由假设 3.1.1 和假设 3.1.2 我们知道系统(3-1)存在最大解, 为了得到解存在的唯一性, 我们需要如下的 Khasminskii 型条件。

假设 3.1.4 对于两个给定的常数 $p, q > 2$, 有:

$$2(q_1 \vee q_2) \leq p + q - 2, \quad (3-7)$$

当 $i \in S_1$ 时, 存在常数 $\mathfrak{I}_{i1}, \mathfrak{I}_{i2}, \mathfrak{I}_{i3}, \mathfrak{I}_{i4} \in \mathbb{R}_+$, 对于所有的 $x, y \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$ 满足

$$\begin{aligned} &(x - G(y))^T (f_i(x, y, t) + u_i(x, t)) + \frac{q-1}{2} |g_i(x, y, t)|^2 \\ &\leq -\mathfrak{I}_{i1} |x - G(y)|^2 + \mathfrak{I}_{i2} |y|^2 - \mathfrak{I}_{i3} |x - G(y)|^p + \mathfrak{I}_{i4} |y|^p. \end{aligned} \quad (3-8)$$

当 $i \in \mathbf{S}_2$ 时, 还存在常数 $\mathfrak{S}_{i5}, \mathfrak{S}_{i6}, \mathfrak{S}_{i7}, \mathfrak{S}_{i8} \in \mathbb{R}_+$, 对于所有的 $x, y \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$ 满足

$$\begin{aligned} & (x - G(y))^T (f_i(x, y, t) + u_i(x, t)) + \frac{1}{2} |g_i(x, y, t)|^2 \\ & \leq -\mathfrak{S}_{i1} |x - G(y)|^2 + \mathfrak{S}_{i2} |y|^2 - \mathfrak{S}_{i3} |x - G(y)|^p + \mathfrak{S}_{i4} |y|^p \\ & \quad - \mathfrak{S}_{i5} |x - G(y)|^q + \mathfrak{S}_{i6} |y|^q - \mathfrak{S}_{i7} |x - G(y)|^{p+q-2} + \mathfrak{S}_{i8} |y|^{p+q-2}, \end{aligned} \quad (3-9)$$

为了使控制系统(3-1)具有渐进稳定性, 需要给出反馈控制函数 u 的假设条件。

假设 3.1.5 对于任意的 $(x, y, t, i) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \times \mathbf{S}$, 存在常数 $\theta > 0$, 使得

$$|u_i(x, t) - u_i(y, t)| \leq \theta |x - y|, \quad (3-10)$$

且有 $u_i(x, 0) = 0$ 。所以对于任意的 $(x, t, i) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \times \mathbf{S}$, 有:

$$|u_i(x, t)| \leq \theta |x|. \quad (3-11)$$

假设 3.1.6 存在常数 $\lambda_n (1 \leq n \leq 8)$, 满足 $\lambda_4 > \lambda_5$, $\lambda_6 < 1$, 使得

$$\begin{aligned} & LU(x, y, t, i) + \lambda_1 |U_x(\hat{x}_t, t, i)|^2 + \lambda_2 |f_i(x, y, t)|^2 + \lambda_3 |g_i(x, y, t)|^2 \\ & \leq -\lambda_4 |x|^2 + \lambda_5 |y|^2 - W(x) + \lambda_6 W(y), \end{aligned} \quad (3-12)$$

其中, 函数 $W(x) \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$, 其定义为:

$$\begin{aligned} W(x) &:= \varpi_3 (1 - \kappa)^{p-1} |x|^p + \varpi_5 (1 - \kappa)^{q-1} |x|^q \\ & \quad + \left(\varpi_7 (1 - \kappa)^{p+q-3} - 2\lambda_1 \beta^2 (1 + \kappa)^{p+q-3} - 4K^2 (\lambda_2 + \lambda_3) \right) |x|^{p+q-2}, \end{aligned} \quad (3-13)$$

$$\lambda_7 |x|^{p+q-2} \leq W(x) \leq \lambda_8 (1 + |x|^{p+q-2}). \quad (3-14)$$

假设 3.1.7 存在常数 $\xi_n (1 \leq n \leq 10)$, 满足 $\xi_4 > \xi_5$, $\xi_6 > \xi_7$, $\xi_8 < 1$, 使得

$$\begin{aligned} & LU(x, y, t, i) + \xi_1 |U_x(\hat{x}_t, t, i)|^2 + \xi_2 |f_i(x, y, t)|^2 + \xi_3 |g_i(x, y, t)|^2 \\ & \leq -\xi_4 |x|^2 + \xi_5 |y|^2 - \xi_6 |x|^q + \xi_7 |y|^q - Y(x) + \xi_8 Y(y), \end{aligned} \quad (3-15)$$

其中, 函数 $Y(x) \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$, 其定义为:

$$\begin{aligned} Y(x) &:= \left(\varpi_7 (1 - \kappa)^{p+q-3} - 2\lambda_1 \beta^2 (1 + \kappa)^{p+q-3} - 4K^2 (\lambda_2 + \lambda_3) \right) |x|^{p+q-2} \\ & \quad + \varpi_3 (1 - \kappa)^{p-1} |x|^p, \end{aligned} \quad (3-16)$$

$$\xi_9 |x|^{p+q-2} \leq Y(x) \leq \xi_{10} (1 + |x|^{p+q-2}). \quad (3-17)$$

定义 3.1.8^[46] 当 $p > 2$ ，如果存在常数 $K > 0$ ，使得对于任意的初值 x_0 ，系统 (2-1) 的解满足以下条件，则称该系统的解在 H_∞ 意义下稳定的

$$\int_0^\infty E|x(t)|^p dt < \infty.$$

如果系统的解满足以下条件，则称该系统在 p 阶矩意义下指数稳定的

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln E|x(t)|^p < 0.$$

定义 3.1.9^[56] 对于给定切换信号 $\omega(t)$ 和任意的 $t \geq s > 0$ ，令 $T_i(t, s)$ 表示第 i 个子系统在区间 $[s, t)$ 内的总运行时间， $N_i(t, s)$ 表示在区间 $[s, t)$ 内的切换次数。令

$$N_i(t, s) \leq \frac{T_i(t, s)}{\mathfrak{T}_{ai}} + N_{0i}, \quad (3-18)$$

存在 $N_{0i} \geq 0$ 和 $\mathfrak{T}_{ai} > 0$ ， $\mathfrak{T}_{ai}$ 为切换信号 $\omega(t)$ 的平均驻留时间， N_{0i} 为模态依赖频跳界。

下面的引理给出本章中证明需要用到的基本不等式。

引理 3.1.10^[47] 当任意的 $a, b > 0$ ， $\phi \in (0, 1)$ 时，有：

$$(a+b)^2 \leq \phi^{-1} a^2 + (1-\phi)^{-1} b^2. \quad (3-19)$$

引理 3.1.11^[46] 当任意的 $a, b \geq 0$ ， $\mathfrak{N} > 0$ ， $p \geq 1$ 时，有：

$$(a+b)^p \leq (1+\mathfrak{N})^{p-1} a^p + (1+\mathfrak{N}^{-1})^{p-1} b^p. \quad (3-20)$$

当上式中 $\mathfrak{N} = \frac{\kappa}{1-\kappa}$ ， $a = x - G(y)$ ， $b = G(y)$ 时，或者当 $\mathfrak{N} = \kappa$ ， $a = x$ ， $b = -G(y)$ 时，下式不等号成立

$$(1-\kappa)^{p-1} (|x|^p - \kappa|y|^p) \leq |x - G(y)|^p \leq (1+\kappa)^{p-1} (|x|^p + \kappa|y|^p). \quad (3-21)$$

3.2 主要结果证明

这一节中将通过 Lyapunov 泛函方法来研究具有异构子系统高度非线性中立型时滞切换随机系统的稳定性，希望通过设计合适的时滞反馈控制函数使得系

统具有稳定性。

当 $t \in [0, +\infty)$ 时, 定义:

$$(\tilde{x}_t) = \{x(t+s) : -2l \leq s \leq 0\}, \quad (\tilde{\omega}_t) = \{\omega(t+s) : -2l \leq s \leq 0\}.$$

当 $t \in [-2l, -l)$ 时, 定义: $x(t) = \phi(-t)$, $\omega(t) = \omega_0$ 。在此章节, 记

$\hat{x}(t) = x(t) - G(x(t-l))$, 定义 Lyapunov 泛函为:

$$V(\tilde{x}_t, t, \tilde{\omega}_t) = U(\hat{x}(t), t, \omega(t)) + \gamma \int_{-\tau}^0 \int_{t+s}^t D(v) dv ds, \quad (3-22)$$

其中

$$U(\hat{x}(t), t, \omega(t)) = \begin{cases} \alpha_i |x|^2 + \beta_i |x|^q, & i \in S_1, \\ \alpha_i |x|^2, & i \in S_2, \end{cases} \quad (3-23)$$

$$\begin{aligned} D(v) = & \tau \left| f_{\omega(t)}(x(t), x(t-l(t)), t) + u_{\omega(t)}(x(t), x(t-\tau(t)), t) \right|^2 \\ & + \left| g_{\omega(t)}(x(t), x(t-l(t)), t) \right|^2. \end{aligned} \quad (3-24)$$

对 $U(\hat{x}(t), t, \omega(t))$ 使用广义伊藤公式, 可以得到:

$$\begin{aligned} & dU(\hat{x}(t), t, \omega(t)) \\ = & U_t(\hat{x}(t), t, \omega(t)) dt \\ & + U_x(\hat{x}(t), t, \omega(t)) \left[\left(f_{\omega(t)}(x(t), x(t-l), t) + u_{\omega(t)}(x(t-\tau), t) \right) \right] dt \\ & + \frac{1}{2} \text{trace} \left(g_i^T(x, y, t) U_{xx}(\hat{x}(t), t, \omega(t)) g_i(x, y, t) \right). \end{aligned} \quad (3-25)$$

将(3-3)式代入上式可推出:

$$\begin{aligned} & dU(\hat{x}(t), t, \omega(t)) \\ = & LU(x(t), x(t-l), t, \omega(t)) dt \\ & + U_x(\hat{x}(t), t, \omega(t)) \left[u_{\omega(t)}(x(t-\tau), t) - u_{\omega(t)}(x(t), t) \right] dt. \end{aligned} \quad (3-26)$$

由积分计算可得到:

$$\frac{d \left(\int_{-\tau}^0 \int_{t+s}^t D(v) dv ds \right)}{dt} = \tau D(t) - \int_{t-\tau}^t D(v) dv. \quad (3-27)$$

综上所述, 可得:

$$\begin{aligned}
 & LV(\hat{x}(t), t, \omega(t)) \\
 &= LU(x(t), x(t-\tau), t, \omega(t)) dt \\
 &+ U_x(\hat{x}(t), t, \omega(t)) [u_{\omega(t)}(x(t-\tau), t) - u_{\omega(t)}(x(t), t)] dt \\
 &+ \gamma \tau D(t) - \gamma \int_{t-\tau}^t D(v) dv.
 \end{aligned} \tag{3-28}$$

本章的主要结果如下：

定理 3.2.1 在假设 3.1.1-3.1.6 的保证下，如果满足以下条件：

$$V(x, t, i) \leq \mu_i V(x, t, j), \tag{3-29}$$

$$\tau \leq \frac{\sqrt{2\lambda_1\lambda_2}(1-\kappa)}{\theta} \wedge \frac{2\lambda_1\lambda_3(1-\kappa)^2}{\theta^2}, \tau \leq \frac{\sqrt{\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)}}{\theta^2}, \tag{3-30}$$

则对于任意初始值 $x(0)$ 和 $t \geq 0$ ，系统(3-1)的解具有以下性质：

$$\int_0^\infty E|x(t)|^{\bar{p}} dt < \infty, \quad \forall \bar{p} \in [2, p+q-2].$$

证明：先对 $LU(x, y, t, i)$ 进行估计

当 $i \in S_1$ 时，有：

$$\begin{aligned}
 & LU(x, y, t, i) \\
 &= 2\alpha_i (x - G(y))^T [f_i(x, y, t) + u_i(x, t)] + 2\alpha_i \times \frac{1}{2} |g_i(x, y, t)|^2 \\
 &+ q\beta |x - G(y)|^{q-2} (x - G(y))^T (f_i(x, y, t) + u_i(x, t)) \\
 &+ \frac{1}{2} q\beta |x - G(y)|^{q-2} |g_i(x, y, t)|^2 \\
 &+ \frac{1}{2} q(q-2)\beta |x - G(y)|^{q-4} \left| (x - G(y))^T g_i(x, y, t) \right|^2.
 \end{aligned}$$

上述等式，由不等式 $|x^T y|^2 \leq |x|^2 + |y|^2$ 可推出：

$$\begin{aligned}
 & LU(x, y, t, i) \\
 &\leq 2\alpha_i \left[(x - G(y))^T (f_i(x, y, t) + u_i(x, t)) + \frac{1}{2} |g_i(x, y, t)|^2 \right] \\
 &+ q\beta |x - G(y)|^{q-2} \left[(x - G(y))^T (f_i(x, y, t) + u_i(x, t)) + \frac{q-1}{2} |g_i(x, y, t)|^2 \right].
 \end{aligned}$$

根据假设条件 3.1.4 可推出：

$$\begin{aligned}
 & LU(x, y, t, i) \\
 & \leq -2\alpha_i \mathfrak{T}_{i1} |x - G(y)|^2 + 2\alpha_i \mathfrak{T}_{i2} |y|^2 - 2\alpha_i \mathfrak{T}_{i3} |x - G(y)|^p + 2\alpha_i \mathfrak{T}_{i4} |y|^p \\
 & \quad - q\beta \mathfrak{T}_{i1} |x - G(y)|^q + q\beta \mathfrak{T}_{i2} |x - G(y)|^{q-2} |y|^2 \\
 & \quad - q\beta \mathfrak{T}_{i3} |x - G(y)|^{p+q-2} + q\beta \mathfrak{T}_{i4} |x - G(y)|^{q-2} |y|^p.
 \end{aligned} \tag{3-31}$$

由 Young 不等式可得：

$$\begin{aligned}
 |x - G(y)|^{q-2} |y|^2 & \leq \frac{q-2}{q} |x - G(y)|^q + \frac{2}{q} |y|^q, \\
 |x - G(y)|^{q-2} |y|^p & \leq \frac{q-2}{p+q-2} |x - G(y)|^{p+q-2} + \frac{p}{p+q-2} |y|^{p+q-2}.
 \end{aligned}$$

因此，从(3-31)式可得：

$$\begin{aligned}
 & LU(x, y, t, i) \\
 & \leq -2\alpha_i \mathfrak{T}_{i1} |x - G(y)|^2 + 2\alpha_i \mathfrak{T}_{i2} |y|^2 - 2\alpha_i \mathfrak{T}_{i3} |x - G(y)|^p + 2\alpha_i \mathfrak{T}_{i4} |y|^p \\
 & \quad + \left(\frac{q-2}{q} \beta \mathfrak{T}_{i2} - q\beta \mathfrak{T}_{i1} \right) |x - G(y)|^q + \frac{2}{q} \beta \mathfrak{T}_{i2} |y|^q \\
 & \quad + \left(\frac{q-2}{p+q-2} \beta \mathfrak{T}_{i4} - q\beta \mathfrak{T}_{i3} \right) |x - G(y)|^{p+q-2} + \frac{p}{p+q-2} \beta \mathfrak{T}_{i4} |y|^{p+q-2}.
 \end{aligned} \tag{3-32}$$

同理可得，当 $i \in \mathbf{S}_2$ 时，有：

$$\begin{aligned}
 & LU(x, y, t, i) \\
 & \leq -2\alpha_i \mathfrak{T}_{i1} |x - G(y)|^2 + 2\alpha_i \mathfrak{T}_{i2} |y|^2 - 2\alpha_i \mathfrak{T}_{i3} |x - G(y)|^p + 2\alpha_i \mathfrak{T}_{i4} |y|^p \\
 & \quad - 2\alpha_i \mathfrak{T}_{i5} |x - G(y)|^q + 2\alpha_i \mathfrak{T}_{i6} |y|^q - 2\alpha_i \mathfrak{T}_{i7} |x - G(y)|^{p+q-2} + 2\alpha_i \mathfrak{T}_{i8} |y|^{p+q-2}.
 \end{aligned} \tag{3-33}$$

结合(3-32)和(3-33)，对于任意的 $i \in \mathbf{S}$ ，可以得到：

$$\begin{aligned}
 & LU(x, y, t, i) \\
 & \leq -\varpi_1 |x - G(y)|^2 + \varpi_2 |y|^2 - \varpi_3 |x - G(y)|^p + \varpi_4 |y|^p \\
 & \quad - \varpi_5 |x - G(y)|^q + \varpi_6 |y|^q - \varpi_7 |x - G(y)|^{p+q-2} + \varpi_8 |y|^{p+q-2},
 \end{aligned} \tag{3-34}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \varpi_1 &:= \min_{i \in \mathbf{S}} (2\alpha_i \mathfrak{T}_{i1}), & \varpi_2 &:= \max_{i \in \mathbf{S}} (2\alpha_i \mathfrak{T}_{i2}), \\
 \varpi_3 &:= \min_{i \in \mathbf{S}} (2\alpha_i \mathfrak{T}_{i3}), & \varpi_4 &:= \max_{i \in \mathbf{S}} (2\alpha_i \mathfrak{T}_{i4}), \\
 \varpi_5 &:= \left(\min_{i \in \mathbf{S}_1} \left(\frac{q-2}{q} \beta \mathfrak{T}_{i2} - q\beta \mathfrak{T}_{i1} \right) \right) \wedge \left(\min_{i \in \mathbf{S}_2} (2\alpha_i \mathfrak{T}_{i5}) \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varpi_6 &:= \left(\max_{i \in \mathcal{S}_1} \frac{2}{q} \beta \mathfrak{T}_{i2} \right) \vee \left(\max_{i \in \mathcal{S}_2} 2\alpha_i \mathfrak{T}_{i6} \right), \\ \varpi_7 &:= \left(\min_{i \in \mathcal{S}_1} \left(\frac{q-2}{p+q-2} \beta \mathfrak{T}_{i4} - q\beta_i \mathfrak{T}_{i3} \right) \right) \wedge \left(\min_{i \in \mathcal{S}_2} (2\alpha_i \mathfrak{T}_{i7}) \right), \\ \varpi_8 &:= \left(\max_{i \in \mathcal{S}_1} \frac{p}{p+q-2} \beta \mathfrak{T}_{i4} \right) \vee \left(\max_{i \in \mathcal{S}_2} 2\alpha_i \mathfrak{T}_{i8} \right).\end{aligned}$$

再根据引理 3.1.11, 我们可以得到:

$$\begin{aligned}& LU(x, y, t, i) \\ & \leq -\varpi_1(1-\kappa)|x|^2 + (\varpi_2 + \varpi_1\kappa(1-\kappa))|y|^2 \\ & \quad - \varpi_3(1-\kappa)^{p-1}|x|^p + (\varpi_4 + \varpi_3\kappa(1-\kappa)^{p-1})|y|^p \\ & \quad - \varpi_5(1-\kappa)^{q-1}|x|^q + (\varpi_6 + \varpi_5\kappa(1-\kappa)^{q-1})|y|^q \\ & \quad - \varpi_7(1-\kappa)^{p+q-3}|x|^{p+q-2} + (\varpi_8 + \varpi_7\kappa(1-\kappa)^{p+q-3})|y|^{p+q-2}.\end{aligned}\tag{3-35}$$

通过假设 3.1.1, 可以得到:

$$\begin{aligned}& \lambda_1 |U_x(\hat{x}_t, t, i)|^2 + \lambda_2 |f_i(x, y, t)|^2 + \lambda_3 |g_i(x, y, t)|^2 \\ & \leq \lambda_1 \left(2\alpha_i |x - G(y)| + q\beta |x - G(y)|^{q-1} \right)^2 \\ & \quad + \lambda_2 K^2 \left(|x| + |y| + |x|^{q_1} + |y|^{q_1} \right)^2 + \lambda_3 K^2 \left(|x| + |y| + |x|^{q_2} + |y|^{q_2} \right)^2 \\ & \leq 8\lambda_1 \alpha_i^2 |x - G(y)|^2 + 2\lambda_1 \beta^2 |x - G(y)|^{2q-2} \\ & \quad + 4\lambda_2 K^2 |x|^2 + 4\lambda_2 K^2 |y|^2 + 4\lambda_2 K^2 |x|^{2q_1} + 4\lambda_2 K^2 |y|^{2q_1} \\ & \quad + 4\lambda_3 K^2 |x|^2 + 4\lambda_3 K^2 |y|^2 + 4\lambda_3 K^2 |x|^{2q_2} + 4\lambda_3 K^2 |y|^{2q_2}.\end{aligned}\tag{3-36}$$

通过假设 3.1.3, 可知 $|x|^{2q_1} \vee |x|^{2q_2} \leq |x|^2 + |x|^{p+q-2}$, 结合引理 3.1.11 有:

$$\begin{aligned}& \lambda_1 |U_x(\hat{x}_t, t, i)|^2 + \lambda_2 |f_i(x, y, t)|^2 + \lambda_3 |g_i(x, y, t)|^2 \\ & \leq \left(8\lambda_1 \alpha_i^2 (1+\kappa) + 2\lambda_1 q^2 \beta^2 (1+\kappa)^{2q-3} + 4\lambda_2 K^2 + 4\lambda_3 K^2 \right) |x|^2 \\ & \quad + \left(8\lambda_1 \alpha_i^2 \kappa (1+\kappa) + 2\lambda_1 q^2 \beta^2 \kappa (1+\kappa)^{2q-3} + 4\lambda_2 K^2 + 4\lambda_3 K^2 \right) |y|^2 \\ & \quad + \left(2\lambda_1 q^2 \beta^2 (1+\kappa)^{2q-3} + 4\lambda_2 K^2 + 4\lambda_3 K^2 \right) |x|^{p+q-2} \\ & \quad + \left(2\lambda_1 q^2 \beta^2 \kappa (1+\kappa)^{2q-3} + 4\lambda_2 K^2 + 4\lambda_3 K^2 \right) |y|^{p+q-2}.\end{aligned}\tag{3-37}$$

为了简化表达, 取

$$\begin{aligned}\lambda_4 &:= \varpi_1(1+\kappa) - (8\lambda_1\alpha_i^2(1+\kappa) + 2\lambda_1q^2\beta_i^2(1+\kappa)^{2q-3} + 4\lambda_2K^2 + 4\lambda_3K^2), \\ \lambda_5 &:= \varpi_2 + \kappa(1-\kappa) + 8\lambda_1\alpha_i^2\kappa(1+\kappa) + 2\lambda_1q^2\beta_i^2\kappa(1+\kappa)^{2q-3} + 4\lambda_2K^2 + 4\lambda_3K^2, \\ \lambda_6 &:= \left(\frac{\varpi_3\kappa(1-\kappa)^{p-1} + \varpi_4}{\varpi_3(1-\kappa)^{p-1}} \right) \vee \left(\frac{\varpi_6 + \varpi_5\kappa(1-\kappa)^{q-1}}{\varpi_5\kappa(1-\kappa)^{q-1}} \right) \\ &\quad \vee \left(\frac{\varpi_8 + \varpi_7\kappa(1-\kappa)^{p+q-3} + 2\lambda_1\beta^2(1+\kappa)^{p+q-3} + 4\lambda_2K^2 + 4\lambda_3K^2}{\varpi_7\kappa(1-\kappa)^{p+q-3} + 2\lambda_1\beta^2(1+\kappa)^{p+q-3} + 4\lambda_2K^2 + 4\lambda_3K^2} \right).\end{aligned}$$

因为初始值 x_0 有界, 所以存在正常数 k_0 满足 $\|x_0\| \leq k_0$, 对任意的 $k \geq k_0$, 定义

停时序列 τ_k :

$$\tau_k := \inf \{t \geq 0 : |x(t)| \geq k\}.$$

当 $t \in [t_0, t_1)$ 时, 通过广义伊藤公式可以得到, 有:

$$EV(\tilde{x}_{t \wedge \tau_k}, t \wedge \tau_k, \tilde{\omega}_{t \wedge \tau_k}) = V(\tilde{x}_0, 0, \tilde{\omega}_0) + E \int_{t_0}^{t \wedge \tau_k} LV(\tilde{x}_s, s, \tilde{\omega}_s) ds.$$

当 $t \in [t_1, t_2)$ 时, 可以得到:

$$\begin{aligned}& EV(\tilde{x}_{t \wedge \tau_k}, t \wedge \tau_k, i_1) \\ &= EV(\tilde{x}(t_1), t_1, i_1) + E \int_{t_1}^{t \wedge \tau_k} LV(x(s), x(s-t), s, i_1) ds \\ &\leq \mu_{i_1} EV(\tilde{x}(t_0), t_0, i_0) + E \int_{t_1}^{t \wedge \tau_k} LV(x(s), x(s-t), s, i_1) ds \\ &\leq \mu_{i_1} EV(\tilde{x}(t_0), t_0, i_0) + \mu_{i_1} E \int_{t_0}^{t_1} LV(x(s), x(s-t), s, i_0) ds \\ &\quad + E \int_{t_1}^{t \wedge \tau_k} LV(x(s), x(s-t), s, i_1) ds.\end{aligned}$$

当 $t \in [t_{m-1}, t_m)$ 时, 可以得到:

$$\begin{aligned}& EV(\tilde{x}_{t \wedge \tau_k}, t \wedge \tau_k, i_{m-1}) \\ &\leq \mu_{i_1}^{N_i(t_m, t_0)} EV(\tilde{x}(t_0), t_0, i_0) + \sum_{m=1}^{N_i(t_m, t_0)-1} \mu_{i_m}^{N_i(t_m, t_0)-m} E \int_{t_{m-1}}^{t \wedge \tau_k} LV(x(s), x(s-t), s, i_{m-1}) ds.\end{aligned}$$

可以推导出, 当 $t \in [t_m, t_{m+1})$ 时, 有:

$$EV(\tilde{x}_{t \wedge \tau_k}, t \wedge \tau_k, i_m) = EV(\tilde{x}(t_m), t_m, i_m) + E \int_{t_m}^{t \wedge \tau_k} LV(x(s), x(s-t), s, i_m) ds.$$

上式由(3-29)可得:

$$\begin{aligned}
 & EV(\tilde{x}_{t \wedge \tau_k}, t \wedge \tau_k, i_m) \\
 & \leq \mu_i EV(\tilde{x}(t_m), t_m, i_{m-1}) + E \int_0^{t \wedge \tau_k} LV(x(s), x(s-\tau), s, i_m) ds \\
 & \leq \mu_i^{N_i(t_{m+1}, t_0)} EV(\tilde{x}(t_0), t_0, i_0) + \sum_{m=0}^{N_i(t_{m+1}, t_0)-1} \mu_i^{N_i(t_{m+1}, t_0)-m} E \int_0^{t \wedge \tau_k^{m+1}} LV(x(s), x(s-\tau), s, i_m) ds.
 \end{aligned}$$

因为 $\mu_i > 1$ ，通过数学归纳法可得到对于 $t \in [t_n, t_{n+1})$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ，有：

$$\begin{aligned}
 & EV(\tilde{x}_{\tau_k}, t \wedge \tau_k, i_{\tau_k}) \\
 & \leq \mu_i^{N_i(t, t_0)} \left[EV(\tilde{x}_{t_0}, t_0, i_0) + E \int_{t_0}^{t \wedge \tau_k} LV(x_s, x(s-\tau), s, i_s) ds \right].
 \end{aligned} \tag{3-38}$$

令 $\gamma = \frac{\theta^2}{2\lambda_1(1-\kappa)^2}$ ，由假设 3.1.4 可以得到：

$$\begin{aligned}
 & U_x(\hat{x}(t), t, \omega(t)) [u(x(t-\tau), t, \omega(t)) - u(x(t), t, \omega(t))] \\
 & \leq \lambda_1 |\hat{x}(t), t, \omega(t)|^2 + \frac{\theta^2}{4\lambda_1} |x(t) - x(t-\tau)|^2.
 \end{aligned} \tag{3-39}$$

根据(3-29)可以得到 $\gamma\tau^2 \leq \lambda_2$ ， $\gamma\tau \leq \lambda_3$ ，因此，可以从(3-26)得到：

$$\begin{aligned}
 & LV(\tilde{x}_s, s, \tilde{\omega}_s) \\
 & \leq LU(x(s), x(s-\tau), s, \omega(s)) ds \\
 & \quad + \lambda_1 |\hat{x}(t), t, \omega(t)|^2 + \lambda_2 |f_{\omega(s)}(x(s), x(s-\tau), s)|^2 \\
 & \quad + \lambda_3 |g_{\omega(t)}(x(s), x(s-\tau), s)|^2 + \frac{\theta^2}{4\lambda_1} |x(s) - x(s-\tau)|^2 \\
 & \quad + \frac{\theta^4 \tau^2}{\lambda_1(1-\kappa)^2} |x(s-\tau)|^2 - \frac{\theta^2}{2\lambda_1(1-\kappa)^2} \int_{t-\tau}^t D(v) dv.
 \end{aligned} \tag{3-40}$$

将(3-12)式代入，可以得到：

$$\begin{aligned}
 & LV(\tilde{x}_s, s, \tilde{\omega}_s) \\
 & \leq -\lambda_4 |x|^2 + \lambda_5 |x(s-\tau)|^2 - W(x(s)) + \lambda_6 W(x(s-\tau)) \\
 & \quad + \frac{\theta^2}{4\lambda_1} |x(s) - x(s-\tau)|^2 + \frac{\theta^4 \tau^2}{\lambda_1(1-\kappa)^2} |x(s-\tau)|^2 - \frac{\theta^2}{2\lambda_1(1-\kappa)^2} \int_{t-\tau}^t D(v) dv.
 \end{aligned} \tag{3-41}$$

将(3-41)代入(3-38)可以得到：

$$EV(\tilde{x}_{\tau_k}, t \wedge \tau_k, i_{\tau_k}) \leq \mu_i^{N_i(t, t_0)} \left[EV(\tilde{x}_{t_0}, t_0, i_0) + \Upsilon_1 + \Upsilon_2 + \Upsilon_3 \right], \tag{3-42}$$

其中

$$\begin{aligned} Y_1 &= E \int_{t_0}^{t \wedge \tau_k} \left(-\lambda_4 |x|^2 + \lambda_5 |x(s-\iota)|^2 + \frac{\theta^4 \tau^2}{\lambda_1 (1-\kappa)^2} |x(s-\tau)|^2 \right) ds, \\ Y_2 &= E \int_{t_0}^{t \wedge \tau_k} \left(-W(x(s)) + \lambda_6 W(x(s-\iota)) \right) ds, \\ Y_3 &= \frac{\theta^2}{4\lambda_1} E \int_{t_0}^{t \wedge \tau_k} |x(s) - x(s-\tau)|^2 ds - \frac{\theta^2}{2\lambda_1 (1-\kappa)^2} E \int_{t_0}^{t \wedge \tau_k} \int_{t-\tau}^t D(\nu) d\nu ds. \end{aligned}$$

而当 $\tau \leq \iota$ 时, 有:

$$\begin{aligned} E \int_{t_0}^{t \wedge \tau_k} |x(s-\iota)|^2 ds &\leq E \int_{-\iota}^{t \wedge \tau_k} |x(s)|^2 ds, \\ E \int_{t_0}^{t \wedge \tau_k} |x(s-\tau)|^2 ds &\leq E \int_{-\tau}^{t \wedge \tau_k} |x(s)|^2 ds \leq E \int_{-\iota}^{t \wedge \tau_k} |x(s)|^2 ds, \\ E \int_{t_0}^{t \wedge \tau_k} W(x(s-\iota)) ds &\leq E \int_{-\iota}^{t \wedge \tau_k} W(x(s)) ds. \end{aligned}$$

因此可以得到:

$$\begin{aligned} Y_1 &\leq \left(\lambda_5 + \frac{\theta^4 \tau^2}{\lambda_1 (1-\kappa)^2} \right) E \int_{-\iota}^{t_0} |x(s)|^2 ds \\ &\quad - \left(\lambda_4 - \lambda_5 - \frac{\theta^4 \tau^2}{\lambda_1 (1-\kappa)^2} \right) E \int_{t_0}^{t \wedge \tau_k} |x|^2 ds, \end{aligned} \quad (3-43)$$

$$Y_2 \leq \lambda_6 E \int_{-\tau}^{t_0} W(x(s)) ds - (1-\lambda_6) E \int_{t_0}^{t \wedge \tau_k} W(x(s)) ds. \quad (3-44)$$

由系统(3-14), 可以得到:

$$\begin{aligned} &|x(s) - x(s-\tau)| \\ &\leq |\hat{x}(s) - \hat{x}(s-\tau)| + |G(x(s-\iota)) - G(x(s-\iota-\tau))| \\ &\leq \kappa |x(s-\iota) - (x(s-\iota-\tau))| + \int_{s-\tau}^s \left[g_{\omega(t)}(x(t), x(t-\iota(t)), t) dB(t) \right] dt \\ &\quad + \int_{s-\tau}^s \left[f_{\omega(t)}(x(t), x(t-\iota(t)), t) + u_{\omega(t)}(x(t), x(t-\tau(t)), t) \right] dt. \end{aligned}$$

对于任意的 $\sigma \geq 0$, 有:

$$E |x(s) - x(s-\tau)|^2 \leq (1+\sigma) \kappa^2 E |\hat{x}(s) - \hat{x}(s-\tau)|^2 + 2 \left(1 + \frac{1}{\sigma} \right) E \int_{s-\tau}^s D(\nu) d\nu.$$

令 $\sigma = \frac{1}{\kappa} - 1$, 可得:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\tau}^t \mathbb{E} |x(s) - x(s-\tau)|^2 \\
 & \leq \kappa \int_{\tau}^t \mathbb{E} |x(s-t) - x(s-t-\tau)|^2 ds + \frac{2}{1-\kappa} \mathbb{E} \int_{\tau}^t \int_{s-\tau}^s D(v) dv ds \\
 & \leq \kappa \int_{\tau-t}^t \mathbb{E} |x(s) - x(s-\tau)|^2 ds + \frac{2}{1-\kappa} \mathbb{E} \int_{\tau}^t \int_{s-\tau}^s D(v) dv ds \\
 & \leq \frac{\kappa}{1-\kappa} \int_{\tau-t}^{\tau} \mathbb{E} |x(s) - x(s-\tau)|^2 ds + \frac{2}{(1-\kappa)^2} \mathbb{E} \int_{\tau}^t \int_{s-\tau}^s D(v) dv ds.
 \end{aligned} \tag{3-45}$$

因为

$$\begin{aligned}
 \int_{\tau-t}^{\tau} \mathbb{E} |x(s) - x(s-\tau)|^2 ds & \leq 2 \mathbb{E} \int_{\tau-t}^{\tau} \mathbb{E} \left[|x(s)|^2 + |x(s-\tau)|^2 \right] ds \\
 & \leq 4 \mathbb{E} \int_{-t}^t \mathbb{E} |x(s)|^2 ds \leq 8t \sup_{-t \leq s \leq t} \mathbb{E} |x(s)|^2.
 \end{aligned} \tag{3-46}$$

将上式代入(3-45)，可以得到：

$$\begin{aligned}
 Y_3 & \leq \frac{\theta^2}{4\lambda_1} \left(\frac{8\kappa t}{1-\kappa} \sup_{-t \leq s \leq t} \mathbb{E} |x(s)|^2 + \frac{2}{(1-\kappa)^2} \mathbb{E} \int_{\tau}^t \int_{s-\tau}^s D(v) dv ds \right) \\
 & \quad - \frac{\theta^2}{2\lambda_1(1-\kappa)^2} \mathbb{E} \int_{t_0}^{t \wedge \tau_k} \int_{t-\tau}^t D(v) dv ds \leq \frac{2\theta^2 \kappa t}{\lambda_1(1-\kappa)} \sup_{-t \leq s \leq t} \mathbb{E} |x(s)|^2.
 \end{aligned} \tag{3-47}$$

因此，将(3-47)结合(3-43)和(3-44)代入到(3-42)，可以得到：

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} V(\tilde{x}_{t \wedge \tau_m}, t \wedge \tau_m, \tilde{\omega}_{t \wedge \tau_m}) \\
 & = \mu_i^{N_i(t, t_0)} \left(N - \left(\lambda_4 - \lambda_5 - \frac{\theta^4 \tau^2}{\lambda_1(1-\kappa)^2} \right) \mathbb{E} \int_{t_0}^{t \wedge \tau_m} |x|^2 ds - (1-\lambda_6) \mathbb{E} \int_{t_0}^{t \wedge \tau_m} W(x(s)) ds \right),
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 N & = V(\tilde{x}_0, 0, \tilde{\omega}_0) + \left(\lambda_5 + \frac{\theta^4 \tau^2}{\lambda_1(1-\kappa)^2} \right) \mathbb{E} \int_{-t}^{t_0} |x|^2 ds \\
 & \quad + \lambda_6 \mathbb{E} \int_{-t}^{t_0} W(x(s)) ds + \frac{2\theta^2 \kappa t}{\lambda_1(1-\kappa)} \sup_{-t \leq s \leq t} \mathbb{E} |x(s)|^2.
 \end{aligned}$$

通过假设 3.1.5，可以得到 $\lambda_4 - \lambda_5 - \frac{\theta^4 \tau^2}{\lambda_1(1-\kappa)^2} > 0$ 和 $1 - \lambda_6 > 0$ 。然后令 $m \rightarrow \infty$ 和

$t_0 = 0$ ，可以得到：

$$\mathbb{E} \int_{t_0}^t |x|^2 ds \leq \frac{N}{\lambda_4 - \lambda_5 - \frac{\theta^4 \tau^2}{\lambda_1 (1-\kappa)^2}}, \quad (3-48)$$

$$\mathbb{E} \int_{t_0}^{\infty} W(x(s)) ds \leq \frac{N}{1-\lambda_6}. \quad (3-49)$$

令 $t \rightarrow \infty$ ，结合(3-14)可以得到：

$$\mathbb{E} \int_{t_0}^{\infty} |x|^2 ds \leq \infty, \mathbb{E} \int_{t_0}^{\infty} |x|^{p+q-2} ds \leq \infty. \quad (3-50)$$

因此，定理 3.2.1 证明完毕。

定理 3.2.2 在假设 3.1.1-3.1.5 和 3.1.7 的保证下，如果满足以下条件

$$V(\hat{x}_i, t, i) \leq \mu_i V(\hat{x}_i, t, j), \quad (3-51)$$

$$\mathfrak{I}_{ai} > \frac{\ln \mu_i}{\varepsilon}, \quad (3-52)$$

$$\tau \leq \frac{\sqrt{2\lambda_1 \lambda_2} (1-\kappa)}{\theta} \wedge \frac{2\lambda_1 \lambda_3 (1-\kappa)^2}{\theta^2}, \quad (3-53)$$

$$\xi_4 - \varepsilon c_4 (1+\kappa) - \left(\xi_5 + c_4 \kappa (1+\kappa) + \frac{\theta^4 \tau^2}{\xi_1 (1-\kappa)^2} \right) e^{\varepsilon \tau} \geq 0, \quad (3-54)$$

$$\xi_6 - \varepsilon c_4 (1+\kappa)^{q-1} - \left(\xi_7 + c_4 \kappa (1+\kappa)^{q-1} \right) e^{\varepsilon \tau} \geq 0, \quad (3-55)$$

$$1 - \xi_8 e^{\varepsilon \tau} \geq 0. \quad (3-56)$$

则对于任意初始值 $x(0)$ 和 $t \geq 0$ ，系统(3-1)是 p 阶矩指数稳定的。

证明：定义一个和(3-20)式一样的函数，并令 $\gamma = \frac{\theta^2}{2\xi_1 (1-\kappa)^2}$ ，可以得到：

$$\begin{aligned} & U_x(\hat{x}(t), t, \omega(t)) [u(x(t-\tau), t, \omega(t)) - u(x(t), t, \omega(t))] \\ & \leq \xi_1 |\hat{x}(t), t, \omega(t)|^2 + \frac{\theta^2}{4\xi_1} |x(t) - x(t-\tau)|^2. \end{aligned} \quad (3-57)$$

根据(3-53)可以得到 $\gamma \tau^2 \leq \lambda_2$ ， $\gamma \tau \leq \lambda_3$ ，因此，我们可以从(3-26)得到：

$$\begin{aligned}
 & LV(\tilde{x}_s, s, \tilde{\omega}_s) \\
 & \leq LU(x(s), x(s-\iota), s, \omega(s)) ds \\
 & \quad + \xi_1 |\hat{x}(t), t, \omega(t)|^2 + \xi_2 \left| f_{\omega(s)}(x(s), x(s-\iota), s) \right|^2 \\
 & \quad + \xi_3 \left| g_{\omega(t)}(x(s), x(s-\iota), s) \right|^2 + \frac{\theta^2}{4\xi_1} |x(s) - x(s-\tau)|^2 \\
 & \quad + \frac{\theta^4 \tau^2}{\xi_1 (1-\kappa)^2} |x(s-\tau)|^2 - \frac{\theta^2}{2\xi_1 (1-\kappa)^2} \int_{t-\tau}^t D(\nu) d\nu.
 \end{aligned} \tag{3-58}$$

将(3-16)式代入上式，可以得到：

$$\begin{aligned}
 & LV(\tilde{x}_s, s, \tilde{\omega}_s) \\
 & \leq -\xi_4 |x|^2 + \xi_5 |y|^2 - \xi_6 |x|^q + \xi_7 |y|^q - Y(x) + \xi_8 Y(y) \\
 & \quad + \frac{\theta^2}{4\xi_1} |x(s) - x(s-\tau)|^2 + \frac{\theta^4 \tau^2}{\xi_1 (1-\kappa)^2} |x(s-\tau)|^2 - \frac{\theta^2}{2\xi_1 (1-\kappa)^2} \int_{t-\tau}^t D(\nu) d\nu.
 \end{aligned} \tag{3-59}$$

由公式(3-22)可以得到：

$$c_3 |x|^2 \leq U(x, t, i) \leq c_4 (|x|^2 + |x|^q), \tag{3-60}$$

其中 $c_3 = \min_{i \in S} \alpha_i$, $c_4 = \left(\max_{i \in S} \alpha_i \right) \vee \left(\max_{i \in S} \beta_i \right)$ 。

对于任意的 $\varepsilon > 0$ ，可以从(3-22)到(3-24)中得到：

$$\begin{aligned}
 & E e^{\varepsilon(t-t_0)} V(\tilde{x}_{t \wedge \tau_m}, t \wedge \tau_m, \tilde{\omega}_{t \wedge \tau_m}) \\
 & = \mu_i^{N_i(t, t_0)} \left(V(\tilde{x}_0, 0, \tilde{\omega}_0) + E \int_{t_0}^t e^{\varepsilon s} (LV(\tilde{x}_s, s, \tilde{\omega}_s) + \varepsilon V(\tilde{x}_s, s, \tilde{\omega}_s)) ds \right) \\
 & \leq \mu_i^{N_i(t, t_0)} \left[V(\tilde{x}_0, 0, \tilde{\omega}_0) + E \int_{t_0}^t e^{\varepsilon s} LV(\tilde{x}_s, s, \tilde{\omega}_s) ds \right. \\
 & \quad \left. + E \int_{t_0}^t e^{\varepsilon s} \varepsilon \left[\alpha_i |x|^2 + \beta_i |x|^q \right] ds + E \int_{t_0}^t e^{\varepsilon s} \varepsilon \gamma \tau \int_{s+\tau}^s D(\nu) d\nu ds \right].
 \end{aligned} \tag{3-61}$$

将(3-58)式代入(3-60)式，可得：

$$\begin{aligned}
 & E e^{\varepsilon(t-t_0)} V(\tilde{x}_{t \wedge \tau_m}, t \wedge \tau_m, \tilde{\omega}_{t \wedge \tau_m}) \\
 & \leq \mu_i^{N_i(t, t_0)} \left[V(\tilde{x}_0, 0, \tilde{\omega}_0) + E \int_{t_0}^t e^{\varepsilon s} \left(-\xi_4 |x|^2 + \xi_5 |y|^2 - \xi_6 |x|^q + \xi_7 |y|^q - Y(x) + \xi_8 Y(y) \right) ds \right. \\
 & \quad + \frac{\theta^2}{4\xi_1} E \int_{t_0}^t e^{\varepsilon s} |x(s) - x(s-\tau)|^2 ds + \frac{\theta^4 \tau^2}{\xi_1 (1-\kappa)^2} E \int_{t_0}^t e^{\varepsilon s} |x(s-\tau)|^2 ds \\
 & \quad \left. + E \int_{t_0}^t e^{\varepsilon s} \varepsilon c_4 (|x|^2 + |x|^q) ds + \frac{\theta^2 (\varepsilon \tau - 1)}{2\xi_1 (1-\kappa)^2} E \int_{t_0}^t e^{\varepsilon s} \int_{s-\tau}^s D(\nu) d\nu ds \right].
 \end{aligned}$$

由(3-43)可以推出:

$$\frac{\theta^2}{4\xi_1} \int_{t_0}^t e^{\varepsilon s} |x(s) - x(s-\tau)|^2 \leq \frac{\theta^2}{2\xi_1(1-\kappa)^2} \int_{t_0}^t e^{\varepsilon \tau} \mathbb{E} \int_{s+\tau}^s D(v) dv ds.$$

由于:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t e^{\varepsilon s} |x(s-\tau)|^2 &\leq e^{\varepsilon \tau} \int_{t_0}^t e^{\varepsilon s} |x(s)|^2 ds + e^{\varepsilon \tau} \int_{t_0-\tau}^t |x(s)|^2 ds \\ \int_{t_0}^t e^{\varepsilon s} |x(s-\iota)|^2 &\leq e^{\varepsilon \tau} \int_{t_0}^t e^{\varepsilon s} |x(s)|^2 ds + e^{\varepsilon \tau} \int_{t_0-\iota}^t |x(s)|^2 ds. \end{aligned}$$

综合可得到:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} e^{\varepsilon(t-t_0)} V(\tilde{x}_{t \wedge \tau_m}, t \wedge \tau_m, \tilde{\omega}_{t \wedge \tau_m}) \\ &\leq \mu_i^{N_i(t, t_0)} \left[N_1 - \left(\xi_4 - \varepsilon c_4(1+\kappa) - \left(\xi_5 + c_4 \kappa(1+\kappa) + \frac{\theta^4 \tau^2}{\xi_1(1-\kappa)^2} \right) e^{\varepsilon \tau} \right) \mathbb{E} \int_{t_0}^t e^{\varepsilon s} |x|^2 ds \right. \\ &\quad - \left(\xi_6 - \varepsilon c_4(1+\kappa)^{q-1} - \left(\xi_7 + c_4 \kappa(1+\kappa)^{q-1} \right) e^{\varepsilon \tau} \right) \mathbb{E} \int_{t_0}^t e^{\varepsilon s} |x(s)|^q ds \\ &\quad \left. - (1 - \xi_8 e^{\varepsilon \tau}) \mathbb{E} \int_{t_0}^t e^{\varepsilon s} Y(x(s)) ds \right], \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} N_1 &= V(\tilde{x}_0, 0, \tilde{\omega}_0) + \frac{\theta^2 \varepsilon \tau}{2\xi_1(1-\kappa)^2} \mathbb{E} \int_{t_0}^t e^{\varepsilon s} \int_{s-\tau}^s D(v) dv ds + \xi_8 e^{\varepsilon \tau} \mathbb{E} \int_{t_0-\tau}^{t_0} Y(x(s)) ds \\ &\quad + \left(\xi_5 + \frac{\theta^4 \tau^2}{\xi_1(1-\kappa)^2} \right) e^{\varepsilon \tau} \mathbb{E} \int_{t_0-\tau}^{t_0} |x(s)|^2 ds + \xi_7 e^{\varepsilon \tau} \mathbb{E} \int_{t_0-\tau}^{t_0} |x(s)|^q ds. \end{aligned}$$

结合(3-59)式可以得到:

$$c_3 e^{\varepsilon(t-t_0)} \mathbb{E} |\tilde{x}(t)|^2 \leq N_1 \mu_i^{N_i(t, t_0)}. \quad (3-62)$$

根据引理 3.1.11, 令 $\aleph = \aleph_0 > \left(\kappa^{\frac{-p}{p-1}} - 1 \right)^{-1}$ 则:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} |x(t)|^p &\leq (1 + \aleph_0)^{p-1} \mathbb{E} |\tilde{x}(t)|^p + (1 + \aleph_0^{-1})^{p-1} \mathbb{E} |G(s-\tau)|^p \\ &\leq (1 + \aleph_0)^{p-1} \frac{c_1 e^{\lambda(t \wedge \tau_k)}}{N_1 \mu_i^{N_i(t, t_0)}} + k^p (1 + \aleph_0^{-1})^{p-1} \mathbb{E} |x(t-\tau)|^p. \end{aligned}$$

因此对于任意的 $t \geq 0$, 有:

$$\begin{aligned}
 \sup_{0 \leq s \leq t} E |x(t)|^p &\leq (1 + \aleph_0)^{p-1} \frac{c_1 e^{\lambda(t \wedge \tau_k)}}{N_1 \mu_i^{N_i(t, t_0)}} + k^p (1 + \aleph_0^{-1})^{p-1} \left(\sup_{0 \leq s \leq t} E |x(t)|^p + \sup_{-\tau \leq s \leq 0} E |x(t)|^p \right) \\
 &\leq \frac{(1 + \aleph_0)^{p-1} \frac{c_1 e^{\lambda(t \wedge \tau_k)}}{N_1 \mu_i^{N_i(t, t_0)}}}{1 - k^p (1 + \aleph_0^{-1})^{p-1}} \\
 &\leq \frac{(1 + \aleph_0)^{p-1} \frac{c_1}{N_1} \mu_i^{N_{0i}} e^{-\left(\frac{\ln \mu_i}{\aleph_{ai}} - \lambda\right)(t \wedge \tau_k)}}{1 - k^p (1 + \aleph_0^{-1})^{p-1}} \\
 &\leq N_2 e^{-\left(\frac{\ln \mu_i}{\aleph_{ai}} - \lambda\right)},
 \end{aligned}$$

其中

$$N_2 = \frac{c_1 (1 + \aleph_0)^{p-1} \mu_i^{N_{0i}} e^{(t \wedge \tau_k)}}{N_1 - k^p (1 + \aleph_0^{-1})^{p-1} N_1}.$$

再由条件(3-51)可得 $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log(E |x(t)|^p) < 0$ 。根据定义 3.1.8，系统(3-1)的解是 p 阶矩指数稳定的。

因此，定理 3.2.2 证明完毕。

3.3 数值例子

在本节中将给出一个数值例子来展示定理 3.2.1 的理论结果，主要考虑以下切换随机系统：

$$\begin{aligned}
 d[x(t) - G(x(t-\iota))] &= f_{\omega(t)}(x(t), x(t-\iota), t) dt \\
 &\quad + g_{\omega(t)}(x(t), x(t-\iota), t) dB(t),
 \end{aligned} \tag{3-63}$$

其中状态空间 $\mathbf{s} = \{1, 2\}$ ，将状态空间 $\mathbf{s}$ 分为： $\mathbf{s}_1 = \{1\}$ 和 $\mathbf{s}_2 = \{2\}$ 两个子空间。令 $\iota = 0.01$ ， $G(y) = 0.1y$ ， $x(0) = 0.2$ ， $p = q = 4$ ， $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.12$ ， $\beta = 0.15$ ，系数 f_i 和 g_i 分别为：

$$\begin{aligned}
 f_1(x, y, t) &= -x(2x^3 + 0.5y^2), & g_1(x, y, t) &= 0.2y + 0.3y^2, \\
 f_2(x, y, t) &= -x(2x^3 + 1.5y^4 + 0.8y^2), & g_2(x, y, t) &= 0.1x + 0.5y^2.
 \end{aligned}$$

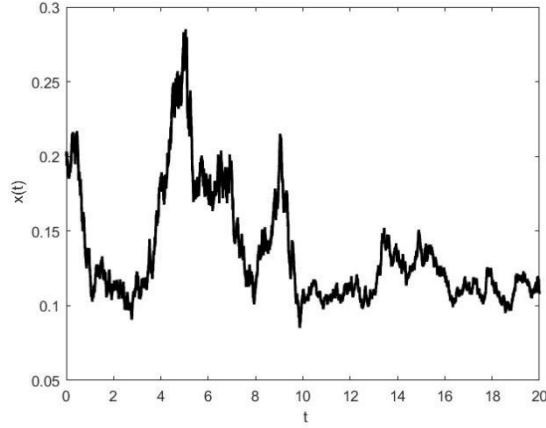


图 3-1 系统(3-63)的不稳定状态的路径图

由图 3-1 可知系统(3-63)并不稳定。在这种情况下，需要设计一个反馈控制函数

$u_{\omega(t)}(x(t), x(t-\tau), t)$ 使得系统(3-63)稳定：

$$\begin{aligned} d[x(t) - G(x(t-\tau))] &= [f_{\omega(t)}(x(t), x(t-\tau), t) + u_{\omega(t)}(x(t), x(t-\tau), t)] dt \\ &\quad + g_{\omega(t)}(x(t), x(t-\tau), t) dB(t), t \geq 0, \end{aligned} \quad (3-64)$$

其中，令 $\theta=1$ ，控制函数 u_i 分别为： $u_1(x, t) = -0.8x$, $u_2(x, t) = -0.4x$ 可以得到：

$$\begin{aligned} &(x - G(y)) [f_i(x, y, t) dt + u_i(x, y, t)] + \frac{3}{2} |g_i(x, y, t)|^2 \\ &\leq -|x - G(y)|^2 + 0.06|y|^2 - 3|x - G(y)|^4 + 0.135|y|^4, \\ &(x - G(y))^T (f_i(x, y, t) + u_i(x, t)) + \frac{1}{2} |g_i(x, y, t)|^2 \\ &\leq -0.5|x - G(y)|^2 + 0.15|y|^2 - 2|x - G(y)|^4 + 0.375|y|^4 - 1.5|x - G(y)|^6 + |y|^6. \end{aligned}$$

因此可以得出以下参数：

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_{11} &= 1, & \mathfrak{T}_{12} &= 0.06, & \mathfrak{T}_{13} &= 3, & \mathfrak{T}_{14} &= 0.135, \\ \mathfrak{T}_{21} &= 0.5, & \mathfrak{T}_{22} &= 0.15, & \mathfrak{T}_{23} &= 0, & \mathfrak{T}_{24} &= 0, \\ \mathfrak{T}_{25} &= 2, & \mathfrak{T}_{26} &= 0.375, & \mathfrak{T}_{27} &= 1.5, & \mathfrak{T}_{28} &= 1. \end{aligned}$$

通过进一步计算可以得到：

$$\begin{aligned} &LU(x, y, t, i) \\ &\leq -0.1125|x|^2 + 0.04875|y|^2 - 0.25726|x|^4 + 0.00135|y|^4 - 0.86076|x|^6 + 0.16392|y|^6, \\ &|U_x(\hat{x}_t, t, i)|^2 \leq 0.0625|\hat{x}|^2 + 0.0625|\hat{x}|^4 + 0.1024|\hat{x}|^6, \end{aligned}$$

$$|f_i(x, y, t)|^2 \leq 4|\hat{x}|^4 + 3|\hat{x}|^6, |g_i(x, y, t)|^2 \leq 0.04|y|^2 + 0.25|y|^4.$$

令 $\lambda_1 = 0.5$, $\lambda_2 = 0.001$, $\lambda_3 = 0.05$, 可以得到:

$$\begin{aligned} & LU(x, y, t, i) + \lambda_1 |U_x(\hat{x}_t, t, i)|^2 + \lambda_2 |f_i(x, y, t)|^2 + \lambda_3 |g_i(x, y, t)|^2 \\ & \leq -0.08125|x|^2 + 0.05075|y|^2 - W(x) + 0.1W(y), \end{aligned}$$

其中 $W(x) = 0.1385x^4 + 1.6392x^6$ 。

因此, 假设 3.1.6 在以下参数下成立: $\lambda_4 = -0.08125$, $\lambda_5 = 0.05075$, $\lambda_6 = 0.1$ 。

由此可得条件(3-30)变为 $\tau \leq 0.03$ 。我们可以令 $t = 0.02$, $\tau = 0.01$ 。从图 3-2 可以看出对于带有控制函数 $u_1(x, t) = -0.8x$, $u_2(x, t) = -0.4x$ 的随机切换系统(3-64)是稳定的。

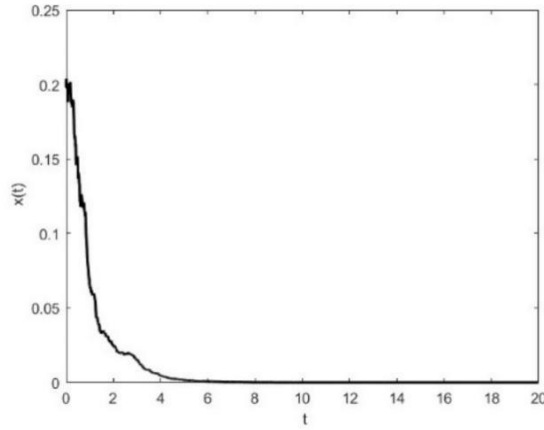


图 3-2 系统(3-64)的稳定状态的路径图

3.4 本章小结

这一章主要研究了带时滞反馈控制的具有异构子系统的高度非线性中立型时滞随机系统的镇定性。当一个具有异构子系统的高度非线性中立型时滞随机系统不稳定时, 我们通过在系统不稳定的系统中设置一个基于连续时间观测的反馈控制函数并考虑控制器与系统存在时滞的情况, 可使得添加控制之后的系统具有稳定性。本章主要使用 Lyapunov 泛函法、平均驻留时间法、广义伊藤公式等数学工具, 给出了时滞反馈控制函数的设计准则, 并讨论了时滞依赖的系统的稳定性。通过时滞反馈控制实现高度非线性中立型时滞随机系统的稳定。

第4章 结论与展望

由于确定切换信号下具有异构子系统的中立型切换随机系统的研究目前为止十分有限,所以本章关于确定切换信号下具有异构子系统的高度非线性中立型切换随机系统的反馈控制问题研究是有意义的。本论文的主要内容体现在如下两个方面:

1)研究了具有异构子系统的高度非线性中立型切换随机系统的稳定性问题,系统的切换信号为非随机性切换信号,并且子系统具有完全不同的结构。针对确定性切换信号下具有异构子系统的高度非线性中立性随机系统,在没有线性增长条件的保证下,建立了不同结构的 Khasminskii 型条件,通过运用模态相依的平均驻留时间法和 Lyapunov 泛函法证明了系统解的存在唯一性以及指数稳定性。

2)研究了带时滞反馈控制的具有异构子系统的高度非线性中立型切换随机系统的稳定性问题。当系统不稳定时,给出了满足 Lipschitz 条件的时滞反馈控制函数的设计准则,使得被控制之后的系统具有稳定性,且得到了其时滞依赖的 p 阶矩指数稳定性判定依据。

本文关于高度非线性混杂随机系统在具有异构子系统和确定性切换信号的条件下的稳定性研究仍有不足,还有一些可能的问题有待进一步研究,例如:

1)本文给定的随机微分方程中的时滞是常数。但是在实际系统的特性和运行机制,在网络传输、生物系统、经济领域等实际场景中,时滞受多种随时间变化的因素影响,很难用固定常数表示,它通常是时间的变量。

2)本文给定的反馈控制中的时滞是常数。在控制系统的设计中,时滞是一个关键因素,它对反馈控制的设计难度和成本有着显著影响。与在一定时间区间内取值的时滞相比,严格常数时滞在实际应用和理论分析方面都面临更多困难,从而导致设计成本更高,而如果时滞在一定时间区间内取值,则设计会容易得多且成本更低。

参考文献

- [1] Winstsenhausen H. A class of hybrid-state continuous-time dynamic systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1966, 11(2): 161-167.
- [2] Daafouz J, Riedinger P, Iung C. Stability analysis and control synthesis for switched systems: A switched Lyapunov function approach[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, 47(11): 1883-1887.
- [3] Zhu F, Antsaklis P. Optimal control of hybrid switched systems: A brief survey[J]. Discrete Event Dynamic Systems, 2015, 25: 345-364.
- [4] Zhao J, Hill D. On stability, L2-gain and H_∞ control for switched systems[J]. Automatica, 2008, 44(5): 1220-1232.
- [5] Sisbot E, Marin L, Alami R, et al. A human aware mobile robot motion planner[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2007, 23(5): 874-883.
- [6] Yazdi M, Jahed M. Stabilization of a CSTR with two arbitrarily switching modes using modal state feedback linearization[J]. Chemical Engineering Journal, 2009, 155(3): 838-843.
- [7] Liu L, Yin S, Zhang L, et al. Improved results on asymptotic stabilization for stochastic nonlinear time-delay systems with application to a chemical reactor system[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2016 47(1): 195-204.
- [8] Bitsouni V, Chaplain, Eftimie R. Mathematical modelling of cancer invasion: The multiple roles of TGF- β pathway on tumour proliferation and cell adhesion[J]. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 2017, 27(10): 1929-1962.
- [9] Xiang W, Xiao J. Stabilization of switched continuous-time systems with all modes unstable via dwell time switching[J]. Automatica, 2014, 50(3): 940-945.
- [10] Zhao X, Zhang L, Shi P, et al. Stability of switched positive linear systems with average dwell time switching[J]. Automatica, 2012, 48(6): 1132-1137.
- [11] Shen H, Huang Z, Cao J, et al. H. Exponential H_∞ filtering for continuous-time

- switched neural networks under persistent dwell-time switching regularity[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2019, 50(6): 2440-2449.
- [12] Wicks M, Peleties P, DeCarlo R. Switched controller synthesis for the quadratic stabilisation of a pair of unstable linear systems[J]. European Journal of Control, 1998, 4(2): 140-147.
- [13] Liu C, Yang Z, Liu X, Huang X. Stability of delayed switched systems with state-dependent switching[J]. IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica, 2020, 7(3): 872-881.
- [14] Kim C. Dynamic linear models with Markov-switching[J]. Journal of Econometrics, 1994, 60(1-2): 1-22.
- [15] Wang B, Zhu Q. Stability analysis of Markov switched stochastic differential equations with both stable and unstable subsystems[J]. Systems & Control Letters, 2017, 105: 55-61.
- [16] Su X, Shi P, Wu L. Fault detection filtering for nonlinear switched stochastic systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 61(5): 1310-1315.
- [17] 王子丰, 尤苏蓉. 中立型随机泛函微分方程截断 Euler-Maruyama 数值解的均方指数稳定分析[J]. 东华大学学报: 自然科学版, 2021, 47(1): 125-130.
- [18] Li X, Mao X. A note on almost sure asymptotic stability of neutral stochastic delay differential equations with Markovian switching[J]. Automatica, 2012, 48 (9): 2329-2334.
- [19] Song B, Park J, Wu Z, et al. New results on delay-dependent stability analysis for neutral stochastic delay systems[J]. Journal of the Franklin Institute, 2013, 50(4): 840-852.
- [20] Xu Y, He Z. Exponential stability of neutral stochastic delay differential equations with Markovian switching[J]. Applied Mathematics Letters, 2016, 52: 64-73.
- [21] Wang B, Xia X, Cheng Z, et al. An impulsive and switched system based maintenance plan optimization in building energy retrofitting project[J]. Applied Mathematical Modelling, 2023, 117: 479-493.
- [22] Oswaldo A, Luis A. A switched system approach for the direct solution of singular

- optimal control problems[J]. Computers Chemical Engineering, 2022, 168: 108058.
- [23] Lian J, Zhao J, Dimirovski G. Integral sliding mode control for a class of uncertain switched nonlinear systems[J]. European Journal of Control, 2010, 16(1):16-22.
- [24] Lin H, Antsaklis P. Stability and stabilizability of switched linear systems a survey of recent results[J]. IEEE Transactions On Automatic Control, 2009, 54 (2): 308-322.
- [25] Zhai D, Lu A, Li J, et al. Simultaneous fault detection and control for switched linear systems with mode-dependent average dwell-time[J]. Applied Mathematics and Computation, 2016, 273: 767-792.
- [26] Zhang J, Zhang S, Deng X, et al. Adaptive event-triggered dynamic distributed control of switched positive systems with switching faults[J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2023, 48: 101328.
- [27] Jiang S, Huang Z, Chandra V, Kumar R. A polynomial algorithm for testing diagnosability of discrete-event systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2001, 46(8): 1318-1321.
- [28] Contant O, Lafortune S, Teneketzis D. Diagnosability of discrete event systems with modular structure[J]. Discrete Event Dynamic Systems Theory and Application, 2006, 16(1): 9-37.
- [29] M Haque. Ratio-dependent predator-prey models of interacting populations[J]. Bulletin of mathematical biology, 2009, 71: 430-452.
- [30] B Eraker. MCMC analysis of diffusion models with application to finance[J]. Journal of Business & Economic Statistics, 2001, 19(2): 177-191.
- [31] Mao X. Stochastic differential equations and applications[M]. Chichester: Horwood press, 2007.
- [32] Obradović M, Milošević M. Stability of a class of neutral stochastic differential equations with unbounded delay and Markovian switching and the Euler-Maruyama method[J]. Journal of Computational & Applied Mathematics, 2017, 309: 244-266.
- [33] Zong X, Wu F, Huang C. The boundedness and exponential stability criterions for

- nonlinear hybrid neutral stochastic functional differential equations[J]. Abstract and Applied Analysis, 2013, 138031.
- [34] Milošević M. Almost sure exponential stability of solutions to highly nonlinear neutral stochastic differential equations with time-dependent delay and the Euler-Maruyama approximation[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2013, 57(3-4): 887-899.
- [35] Xie Y, Zhang C. Asymptotical boundedness and moment exponential stability for stochastic neutral differential equations with time-variable delay and markovian switching[J]. Applied Mathematics Letters, 2017, 70: 46-51.
- [36] Li M, Deng F. Almost sure stability with general decay rate of neutral stochastic delayed hybrid systems with Lévy noise[J]. Nonlinear Analysis Hybrid Systems, 2017, 24: 171-185.
- [37] Mao X. Razumikhin-type theorems on exponential stability of neutral stochastic functional differential equations[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 1997, 65: 233-250.
- [38] Hu G, Wang K. Stability in distribution of neutral stochastic functional differential equations with Markovian switching[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2012, 385(2): 757-769.
- [39] Hu L, Mao X, Zhang L, Robust stability and boundedness of nonlinear hybrid stochastic differential delay equations[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2013, 58: 2319-2332.
- [40] Fei W, Hu L, Mao X, et al, Delay dependent stability of highly nonlinear hybrid stochastic systems[J]. Automatica, 2017, 82: 165-170.
- [41] Shen M, Fei W, Mao X, et al, Stability of highly nonlinear neutral stochastic differential delay equations[J]. Systems Control Letters, 2018, 115: 1-8.
- [42] Zhao Y, Wu X, Cao J. Stability of highly nonlinear switched stochastic systems[J]. IET Control Theory and Applications, 2019, 13(12): 1940-1944.
- [43] Zhao Y, Zhu Q. Stabilization by delay feedback control for highly nonlinear switched stochastic systems with time delays[J]. International Journal of Robust

- and Nonlinear Control, 2021, 31(8): 3070-3089.
- [44] 吴艾卿, 尤苏蓉. 一类中立型混杂随机微分方程解的存在唯一性[J]. 纺织高校基础科学学报, 2019, 32(1): 50-56.
- [45] Fei W, Hu L, Mao X. Structured robust stability and boundedness of nonlinear hybrid delay systems[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2018, 56(4): 2662-2689.
- [46] Wu A, You S, Mao X. On exponential stability of hybrid neutral stochastic differential delay equations with different structures. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2021, 39: 100971.
- [47] Lu B, Song R, Zhu Q. Exponential stability of highly nonlinear hybrid NSDEs with multiple time-dependent delays and different structures and the Euler-Maruyama method[J]. Journal of the Franklin Institute, 2022, 59(5): 2283-2316.
- [48] Fan Q, Park J, Li Z, et al, Stabilization of highly nonlinear stochastic neutral Markovian jump systems with multiple delays[J]. IET Control Theory & Applications, 2022, 16(12): 1242-1258.
- [49] Shen M, Fei C, Fei W, et al, Stabilisation by delay feedback control for highly nonlinear neutral stochastic differential equations[J]. Systems & Control Letters, 2020, 137: 104645.
- [50] Li X, Mao X. Stabilisation of highly nonlinear hybrid stochastic differential delay equations by delay feedback control[J]. Automatica, 2019, 112: 108657.
- [51] Shi B, Mao X, Wu F, Stabilisation of hybrid system with different structures by feedback control based on discrete-time state observations[J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2022, 45: 101198.
- [52] Lu B, Zhu Q, Li S. Stabilization of differently structured hybrid neutral stochastic systems by delay feedback control under highly nonlinear condition[J]. Journal of the Franklin Institute, 2023, 360(3): 2089-2115.
- [53] Liu J, Zhu Q. Stabilization of highly nonlinear hybrid neutral stochastic differential equations with multiple time-varying delays and different structures[J]. Journal of the Franklin Institute, 2023, 360(15): 11220-11242.

- [54]Dong H, Mao X, Advances in stabilization of highly nonlinear hybrid delay equations[J]. Automatica, 2022, 136: 110086.
- [55]Hu J, Mao W, Mao X. Advances in nonlinear hybrid stochastic differential delay equations: Existence, boundedness and stability[J]. Automatica, 2023, 147: 110682.
- [56]Zhao Y, Zhu Q. Stabilization by delay feedback control for highly nonlinear switched stochastic systems with non-differentiable delay[J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2024, 101525.
- [57]Lu Z., Hu J., Mao X., Stabilisation by delay feedback control for highly nonlinear hybrid stochastic differential equations[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B, 2019, 24(8): 4099-4116.

硕士期间发表论文

- [1] 杨思亮, 赵颖, 吴小太. 具有异构子系统的高度非线性中立型切换随机系统的稳定性[J]. 安徽工程大学学报, 2025, 40(1): 87-94.

致谢

时光荏苒，硕士生涯的三年光阴即将落下帷幕。当我完成这最后一篇毕业论文时，内心的感慨如潮水般涌来。

我衷心感谢我的导师和课题组的老师们。在我撰写论文的过程中，老师给予了我无私的帮助和指导。从选题到写作，从修改到定稿，每一步都离不开老师们的悉心指导。老师们严谨的治学态度、深厚的学术造诣和丰富的实践经验都让我受益匪浅。老师们不仅教会我专业知识，同时在生活中也给予了我诸多关怀。在此，我向老师们表示最诚挚的感谢和最崇高的敬意。

感谢数理与金融学院为我们营造了优越的学习环境，使我们在这三年中能够安心专注于学业。感谢各位任课老师的悉心教诲，你们传授的专业知识将成为我人生中宝贵的财富，为未来的工作和生活指明方向。

最后，我要感谢我的家人和朋友们，给予我无尽的关爱与支持。

回首这段时光，心中充满感激与不舍。然而，人生就像一场旅程，我们总是在不断地告别与启程。愿我们在未来的岁月里，不忘初心，砥砺前行。