

单位代码: 10363

学号： 2221020122

Research on Balanced Pairs and Relative Tilting Objects in Recollements

研 究 方 向: 同调代数

论文答辩日期： 2025 年 5 月 14 日

二、安徽工程大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：我恪守学术道德，崇尚严谨学风。所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已明确注明和引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品及成果的内容。论文为本人亲自撰写，我对所写的内容负责，并完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

学位论文作者签名：刘梦慧

日期：2025 年 5 月 14 日

三、安徽工程大学学位论文版权使用授权书

学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅或借阅。本人授权安徽工程大学可以将本学位论文的全部内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保密 ☐，在 ____ 年解密后适用本版权书。

本学位论文属于

不保密 ☒。

学位论文作者签名：刘梦慧

指导教师签名：张培雨

日期：2025 年 5 月 14 日

日期：2025 年 5 月 14 日

粘合中平衡对和相对倾斜对象的若干研究

摘要

在代数学与同调代数的研究中,阿贝尔范畴及其衍生结构(如粘合(Recollements)、平衡对(Balanced Pairs)等)是刻画代数结构与模理论的核心工具.倾斜理论作为同调代数的重要分支,不仅在表示论、代数几何和数学物理中有着广泛应用,其与阿贝尔范畴结构的结合更是近年来的研究热点.粘合作为一种通过“两边”范畴刻画“中间”范畴的强有力工具,能够揭示不同范畴之间的深层联系,而平衡对与倾斜对象的保持性问题则是理解这种联系的关键切入点.本文主要讨论了相对倾斜对象(Relative Tilting Objects)的概念和性质,以及阿贝尔范畴的粘合中平衡对和相对倾斜对象之间的保持关系.主要从以下两个部分进行展开:

首先介绍了伴随对(Adjoint Pairs)、平衡对和粘合的基本概念和性质,给出了反变有限子范畴,可容许子范畴在函子作用下的保持关系.主要证明了阿贝尔范畴的粘合中 $R(\mathcal{A}', \mathcal{A}, \mathcal{A}'')$ 平衡对的保持关系.也就是说,在阿贝尔范畴的粘合中,两边范畴中的平衡对可以诱导出中间范畴的平衡对,反之,中间范畴的平衡对也可以诱导出两边阿贝尔范畴中的平衡对.

其次,利用相对同调的方法,借助可容许平衡对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$,引入了相对倾斜模(简称 $n-\mathcal{X}$ -倾斜模)的概念,类似于Bazzni关于 n -倾斜模的等价刻画,给出了 $n-\mathcal{X}$ -倾斜模的一个等价刻画.最后对比粘合中平衡对的保持关系,证明了 $n-\mathcal{X}$ -倾斜模在粘合中的保持关系.

关键词: 伴随对, 反变有限子范畴, 平衡对, 粘合, $n-\mathcal{X}$ -倾斜模

Research on Balanced Pairs and Relative Tilting Objects in Recollements

ABSTRACT

In the study of algebra and homological algebra, Abelian categories and their derived structures (such as recollements, balanced Pairs, etc.) are the core tools for characterizing algebraic structures and modular theory. Tilting theory, as an important branch of homological algebra, is not only widely applied in representation theory, algebraic geometry and mathematical physics, but also its combination with Abelian category structures has been a research hotspot in recent years. Recollements, as a powerful tool for depicting the "middle" category through the "two sides" category, can reveal the deep connections among different categories, and the issue of the retention of the balance pair and the inclined object is the key entry point for understanding this connection. This thesis mainly discusses the concept and properties of relative tilting objects, as well as the maintenance relationship between balanced pairs and relative tilting objects in the bonding of abelian categories. It is mainly carried out from the following two parts:

Firstly, the basic concepts and properties of adjoint pairs, balanced pairs and recollements are introduced, and the preservation relationship of the contravariant finite subcategory and the permissive subcategory under the action of functors is given. It mainly proves the maintenance

relationship of balanced pairs in the recollements of abelian categories. That is to say, in the recollements of abelian categories, the balanced pairs in the two categories can induce the balanced pairs in the middle category, and conversely, the balanced pairs in the middle category can also induce the balanced pairs in the two abelian categories.

Secondly, by using the method of relative homology and with the aid of admissible balanced pairs, the concept of the relative n -tilting modules (referred to as the n - $\mathcal{X}$ -tilting modules) was introduced, similar to Bazzni's equivalent characterization of the tilting modules, and an equivalent characterization of the n - $\mathcal{X}$ -tilting modules was given. Finally, by comparing the maintenance relationship of balance pairs in recollements, the maintenance relationship of the n - $\mathcal{X}$ -tilting modules in recollements was proved.

Menghui Liu (Mathematics)

Supervised by Peiyu Zhang

KEY WORDS: Adjoint pairs, Contravariantly finite subcategories, Balanced pairs, Recollements, n - $\mathcal{X}$ -tilting modules

目录

摘要.....	I
ABSTRACT.....	II
目录.....	III
第 1 章 绪论.....	1
1.1 研究背景.....	1
1.2 预备知识.....	2
1.3 研究内容与结构安排.....	5
第 2 章 平衡对和粘合.....	6
2.1 平衡对与粘合的同调性质.....	6
2.2 阿贝尔范畴中平衡对和粘合的保持关系.....	8
第 3 章 $n\text{-}\mathcal{X}$ -倾斜模和粘合.....	17
3.1 $n\text{-}\mathcal{X}$ -倾斜模定义和基本性质.....	17
3.2 阿贝尔范畴中相对倾斜模和粘合的保持关系.....	26
第 4 章 结论与展望.....	32
4.1 结论.....	32
4.2 展望.....	34
参考文献.....	35
攻读硕士期间取得的学术成果.....	38
致谢.....	39

第 1 章 绪论

1.1 研究背景

首先介绍一下同调代数的历史,同调代数最初是在拓扑学中出现的^[1],也就是同调群的构造.这种构造将拓扑空间的性质与他的同调群的性质联系起来,从而可以通过同调群的差别来说明拓扑空间的差别.后来,这种同调的结构在一些更加抽象的数学对象上也被发现了,比如模范畴,就具有了同调结构.而模范畴又是阿贝尔范畴的特例,于是,同调结构就推广到了阿贝尔范畴,然后就是更加抽象的层,一种特殊的函子范畴,同样具有同调结构.

粘合这一概念最早是由 Bernard Toën 和 Mikhail Kapranov 提出的,他们在 20 世纪 90 年代的研究中引入了这一术语.具体来说,他们在研究三角范畴以及它们在同调代数和代数几何中的应用时,形成了这一思想.阿贝尔范畴的粘合是由三个阿贝尔范畴和六个函子组成的特殊代数结构.粘合的框架允许数学家们在研究不同范畴之间的关系时获得新的视角,尤其是在处理同调理论、表示论和代数几何等领域中.这个概念强调了局部和全局结构之间的连接,成为现代范畴论和同调代数中的一个重要工具.阿贝尔范畴的粘合首先在[2]中进行了研究,最终在[3]中完善.近几年, Psaroudakis 和 Vitoria 在[4]中研究了阿贝尔范畴的粘合与某些具有特殊结构的 TTF-三元组之间的等价对应关系.2014 年, Psaroudakis^[5]研究了阿贝尔范畴的粘合的全局维数、有限维数猜想和表示维数.陈^[6]从三角范畴的粘合引入了阿贝尔范畴中加法子范畴的平衡对的概念.他还研究了子范畴中平衡对的各种性质.我们知道平衡对是由余挠三元组自然产生的.关于反变有限子范畴的相对同调维数理论起源于 Dugas^[7]的著作,目的是推广一些投射模的标准理论.他们证明了投射模具有经典同调维数的优良性质. Psaroudakis 明确地研究了各种同调不变量和范畴的维数是如何在粘合中相互关联的.特别是,他证明了的 $\mathcal{A}$ 同调维数可以被 $\mathcal{A}'$ 和 $\mathcal{A}''$ 的同调维数所影响.需要指出的是,阿贝尔范畴的粘合和三角范畴的粘合的概念是相似的.

平衡对是在范畴论和代数几何中的一个重要概念,通常用于描述一对结构元素之间的平衡关系.具体而言,一个平衡对由两个部分组成,它们在某种意义下是相互关联且能够互相抵消的.举例来说,在同调代数中,平衡对可以用来描述同调群之间的关系,通常涉及链复形和同调复形之间的对应.陈^[8]在研究两个同

伦范畴之间的三角等价时引入了平衡对的概念. 进一步证明了当 R 为左 Gorenstein 时, Gorenstein 投射模的同伦范畴与 Gorenstein 内射模的同伦范畴之间存在三角等价. 郑^[9]通过一个完全平衡对构造了一个三角范畴的粘合.

倾斜理论在其他代数领域也有广泛应用并产生重要影响, 如在代数群、李代数的表示、三角范畴和导出范畴等研究中. 在导出范畴中, 对倾斜理论的研究有助于更好地理解导出范畴的结构和性质, 为解决相关问题提供新的思路 and 工具. 此外, 在一般环上研究倾斜理论, 进一步拓展了其应用范围和领域, 使其在更广泛的代数结构研究中发挥作用. 对于一个比较复杂的代数 A , 可以通过构造一个倾斜模 ${}_A T$ 使得 $B = \text{End}({}_A T)$, 利用连接函子 $\text{Hom}_A(T, -)$ 与 $T \otimes_B -$ 来比较代数 A 和 B 上的模范畴, 由相对简单且具体的代数 B 的性质导出代数 A 的部分性质. 因此, 与倾斜模相关的子模范畴是表示论和同调代数以及相对同调代数研究的重要内容. 例如, 之前的学者 Angeleri-Hügel 和 Coelho^[10], Bazzoni^[11]和魏^[12]考虑了投射维数 $\leq n$ 的倾斜模, 即 n -倾斜模. 倾斜对象在研究导出等价方面具有重要的作用, 而导出等价又与代数几何, 拓扑李理论, 丛理论和代数表示论密切相关. Morita 通过引入投射生成子的概念提出了 Morita 定理, 即两个环上的模范畴等价当且仅当其中一个环同构于另一个环上投射生成子的自同态环. Brenner 和 Butler, Happel 和 Ringel 通过将投射生成子的概念推广到倾斜模, 提出著名的 Brenner-Butler 倾斜定理, 通过倾斜函子将一个代数上的模范畴与其上的倾斜模的自同态代数的模范畴联系起来, 建立了它们之间某些子范畴的等价关系, 尽管它们作为模范畴一般不等价, 但它们却总是导出等价的. 基于之前学者的研究, 作为可容许平衡对的一个应用, 我们思考是否能将这两部分联系到一起. 给出相对倾斜模的一个类似于 n -倾斜模的 Bazzoni 刻画, 并且研究粘合和相对倾斜模的保持关系.

1.2 预备知识

定义 1.2.1^[1] 我们把 $\mathcal{A}$ 称为一个范畴, 如果它由以下的三个要素构成:

(1) $\mathcal{A}$ 中包含一些对象, 我们常用大写的英文字母来表示这些对象. 对象的全体我们称为类, 可记为 $\text{Ob}\mathcal{A}$. 用 $A \in \text{Ob}\mathcal{A}$ 或 $A \in \mathcal{A}$, 表示 A 是 $\mathcal{A}$ 的对象, 范畴

中至少要包含一个对象；

(2) 对于任意对象的有序对 (A, B) ，存在集合 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$ ，我们把其中的 g 称作是 A 到 B 的态射，可记为 $g: A \longrightarrow B$ ， g 满足以下条件：如果 $A \neq A'$ 或 $B \neq B'$ ，那么 $\text{Hom}(A, B) \cap \text{Hom}(A', B') = \emptyset$ ，

(3) 对于任意对象的有序三元组 (A, B, C) ，我们可定义如下的集合之间的映射：

$$\begin{aligned} \text{Hom}(A, B) \times \text{Hom}(B, C) &\longrightarrow \text{Hom}(A, C) \\ (g, h) &\mapsto hg \end{aligned}$$

我们把其中的态射 hg 称作态射 g 与态射 h 的合成，合成运算符合下述两个条件：

(1) 态射的合成 hg 具有结合律；

(2) 每个对象都有恒等态射。

定义 1.2.2^[1] 范畴 $\mathcal{A}$ 称为加法范畴，如果 $\mathcal{A}$ 具有下述性质：

(1) $\mathcal{A}$ 具有零对象；

(2) 对于任意的对象 A 和 B ， $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$ 有 Abel 群的结构(其运算记为 $+$)，使得对于任意的态射：

$$g \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B), f, h \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(B, C) \text{ 和 } g' \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(C, D)$$

都存在：

$$(f + h)g = fg + hg \text{ 和 } g'(f + h) = g'f + g'h$$

对于任意的对象 A 和 B ， $\mathcal{A}$ 中存在余积 $A \oplus B$ 。

此时，Abel 群 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$ 的单位元 $0'_{A, B}$ ，就是零态射 $0_{A, B}$ 。

定义 1.2.3^[1] 加法范畴之间的函子 $F: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ 称为加法函子，如果对于 $\mathcal{A}$ 中任意对象 A 和 B ，有：

$$\begin{aligned} F: \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}}(FA, FB) \\ f &\mapsto Ff \end{aligned}$$

是群同态，即对于任意的 $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$ ，有： $F(f + g) = Ff + Fg$ 。

定义 1.2.4^[1] 加法范畴 $\mathcal{A}$ 称为阿贝尔范畴，如果满足下述条件：

(1) $\mathcal{A}$ 有核和余核；

(2) 对 $\mathcal{A}$ 中的每个态射 $f: A \longrightarrow B$ ，典范态射： $\text{can}: \text{Coim}(f) \longrightarrow \text{Im}(f)$ 是

同构.

定义 1.2.5^[8] 阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 中, 设 $C \in \mathcal{A}$ 且 $\mathcal{C}$ 是在直和下封闭的满子范畴, 令 $A \in \mathcal{A}$, 存在一个态射 $f: C \longrightarrow A$ 且 f 被称为 A 的一个右 $\mathcal{C}$ -逼近, 如果 $C \in \mathcal{C}$, 且从 $\mathcal{C}$ 中的任意对象到 A 的任何态射都通过 f 分解. 对偶地, 我们可以定义左 $\mathcal{C}$ -逼近.

定义 1.2.6^[8] 阿贝尔范畴中 M 的 $\mathcal{C}$ -分解是复形:

$$\cdots \longrightarrow C_2 \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

其中 $i \geq 0$, $C_i \in \mathcal{C}$, 使得对于每一个 $C \in \mathcal{C}$ 作用 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, -)$ 函子后正合. 我们定义 M 的 $\mathcal{C}$ -分解为 $C^\bullet \longrightarrow M$, 其中:

$$C^\bullet = \cdots \longrightarrow C_2 \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0 \longrightarrow 0,$$

$C^\bullet$ 是 M 的删项 $\mathcal{C}$ -分解. 对偶地, 我们可以定义 $\mathcal{C}$ -余分解.

定义 1.2.7^[8] M 的 $\mathcal{C}$ -维数, 记为 M 的 $\mathcal{C}\text{-dim}$, 定义为:

$$\inf \{n \mid \text{存在正合序列 } 0 \longrightarrow C_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,\$$

使得作用 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, -)$ 函子后保持正合, 且任意的 $C_i \in \mathcal{C}\}$.

如果不存在这样的正整数, 那么 $\mathcal{C}\text{-dim} = \infty$. 定义 $\mathcal{A}$ 的整体 $\mathcal{C}$ -维数 ($\mathcal{C}\text{-dim } \mathcal{A}$), 是对于 $\mathcal{A}$ 中的所有对象 $\mathcal{C}$ -分解维数的上确界.

定义 1.2.8^[8] $\mathcal{D}$ 的一个子范畴 $\mathcal{C}$ 被称为是反变有限的, 如果对于任意的 $D \in \mathcal{D}$, 均存在一个右 $\mathcal{C}$ -逼近^[3], 也就是说, 存在一个对象 $C \in \mathcal{C}$ 和态射 $f: C \longrightarrow D$ 使得对任意的 $C' \in \mathcal{C}$ 都有 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(C', f)$ 是一个满射. 即存在如下的交换图:

$$\begin{array}{ccc} & C' & \\ h \swarrow & \downarrow g & \\ C & \xrightarrow{f} & D \end{array}$$

图 1-1

对偶地, 我们可以定义共变有限子范畴.

定义 1.2.9^[8] 设 $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ 是阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 的两个加法子范畴, 范畴对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 被称为一个平衡对, 如果它满足下述条件:

- (1) $\mathcal{X}$ 是反变有限子范畴, $\mathcal{Y}$ 是共变有限子范畴;

- (2) 对于任意对象 M ，存在一个 $\mathcal{X}$ -分解 $X^* \rightarrow M$ 使得对于所有的 $Y \in \mathcal{Y}$ ，应用函子 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, Y)$ 作用后，该分解是正合的，即该 $\mathcal{X}$ -分解是 $\mathcal{Y}$ -余正合的；
- (3) 对于任意对象 N ，存在一个 $\mathcal{Y}$ -余分解 $N \rightarrow Y^*$ 使得对于所有的 $X \in \mathcal{X}$ ，应用函子 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, -)$ 作用后，该分解是正合的，即该 $\mathcal{Y}$ -分解是 $\mathcal{X}$ -余正合的。

1.3 研究内容与结构安排

在现代代数学领域，阿贝尔范畴作为一类具有良好性质的范畴，是同调代数、代数表示论等方向的核心研究对象。阿贝尔范畴的粘合理论通过构造范畴间的层叠关系，为研究不同范畴的结构关联提供了有力工具，在模论、三角范畴局部化等研究中发挥着关键作用。平衡对与倾斜对象作为描述阿贝尔范畴内特殊结构的重要概念，前者刻画了范畴内对象类的相互作用关系，后者则在同调维数控制、导出范畴结构分析中具有重要意义。近年来，学者们围绕这些概念的性质及相互关系展开深入探索，但在粘合框架下，平衡对与倾斜对象的内在联系及传递性质仍存在研究空白。

本文聚焦于相对倾斜对象的概念与性质，以及阿贝尔范畴粘合中平衡对与相对倾斜对象的保持关系。研究从两方面展开：首先，系统梳理伴随对、平衡对及重粘合的基础理论，揭示反变有限子范畴、可容许子范畴在函子作用下的保持规律，创新性地证明了阿贝尔范畴粘合中平衡对的双向保持关系，即两边范畴的平衡对可诱导中间范畴的平衡对，反之亦然，为研究范畴间结构的协同性提供了新视角。其次，基于相对同调理论与可容许平衡对，引入相对倾斜模的概念，并借鉴 Bazzni 关于倾斜模的等价刻画思路，给出相对倾斜模的新等价刻画。在此基础上，对比平衡对的保持规律，进一步证明了相对倾斜模在粘合体系中的保持性质，完善了阿贝尔范畴粘合理论下特殊对象类的关联研究体系。

第 2 章 平衡对和粘合

在本章主要研究了平衡对和粘合的保持关系，即对于阿贝尔范畴的粘合，如何从左右两边范畴的平衡对诱导出中间阿贝尔范畴中的平衡对，反之，如何从中间范畴的平衡对诱导出两边阿贝尔范畴中的平衡对。

设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是两个阿贝尔范畴， $F: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ 和 $G: \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ 分别是 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 中的加法函子。如果对于任意的 $X \in \mathcal{A}$ 和 $Y \in \mathcal{B}$ ，均存在同构：

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(FX, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, GY),$$

我们称函子对 (F, G) 是伴随对。众所周知，伴随对 (F, G) 诱导出两个自然变换，分别为：

$$\eta: \mathrm{Id}_{\mathcal{A}} \longrightarrow GF \quad \text{和} \quad \varepsilon: FG \longrightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{B}}.$$

对于任意的 $X \in \mathcal{A}$ 和 $Y \in \mathcal{B}$ ，我们设伴随对的单位和余单位分别为 η_X 和 ε_Y ，可以定义：

$$\eta_X := \sigma_{X, F(X)}(\mathrm{Id}_{F(X)}): X \longrightarrow GF(X) \quad \text{和} \quad \varepsilon_Y := \eta_{G(Y), Y}^{-1}(\mathrm{Id}_{G(Y)}): FG(Y) \longrightarrow Y.$$

对于任意的两个态射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(F(X), Y)$ ， $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(X, F(Y))$ ，我们都有：

$$\sigma_{X, Y}(f) = G(f)\eta_X \quad \text{和} \quad \sigma_{X, Y}^{-1}(g) = \varepsilon_Y F(g).$$

如果 (F, G) 和 (G, H) 都是伴随对，那么我们称 (F, G, H) 是伴随三元组。

2.1 平衡对与粘合的同调性质

下面是众所周知的结论。

引理 2.1.1 设函子对 (F, G) 是伴随对，我们有：

(1) 对于任意的 $X \in \mathcal{A}$ 和 $Y \in \mathcal{B}$ ，有：

$$\text{Id}_{F(X)} = \varepsilon_{F(X)} F(\eta_X) \quad \text{和} \quad \text{Id}_{G(Y)} = G(\varepsilon_Y) \eta_{G(Y)}$$

(2) F (或 G) 是满忠实的当且仅当 η (或 ε) 是同构.

定义 2.1.2^{[3][4]} 阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 通过阿贝尔范畴 $\mathcal{A}'$ 和 $\mathcal{A}''$ 的粘合是指如下的加法函子交换图, 用 $R(\mathcal{A}', \mathcal{A}, \mathcal{A}'')$ 表示:

$$\begin{array}{ccccc} & \xleftarrow{i^*} & & \xleftarrow{j^!} & \\ \mathcal{A}' & \xrightarrow{i_*} & \mathcal{A} & \xrightarrow{j^*} & \mathcal{A}'' \\ & \xleftarrow{i^!} & & \xleftarrow{j_*} & \end{array}$$

图 2-1

- (1) $(i^*, i_*, i^!)$ 和 $(j^!, j^*, j_*)$ 是伴随三元组;
- (2) 函子 i_* , $j_!$ 和 j_* 是满忠实的;
- (3) $\text{Im} i_* = \text{Ker} j^*$.

例 2.1.3^{[4][5]} (幂等元诱导的粘合) 设 A 是一个环, $e \in A$ 满足 $e^2 = e$. 则由幂等元 e 可以诱导出一个模范畴的粘合 $R(\text{Mod-}A/AeA, \text{Mod-}A, \text{Mod-}eAe)$, 具体如下:

$$\begin{array}{ccccc} & \xleftarrow{-\otimes_A A/AeA} & & \xleftarrow{-\otimes_{eAe} eA} & \\ \text{Mod-}A/AeA & \xrightarrow{\text{inc}} & \text{Mod-}A & \xrightarrow{\text{Hom}_A(eA, -)} & \text{Mod-}eAe \\ & \xleftarrow{\text{Hom}_A(A/AeA, -)} & & \xleftarrow{\text{Hom}_{eAe}(Ae, -)} & \end{array}$$

图 2-2

事实上, 关于粘合的例子有很多, 有兴趣的读者可以参见[5, 例 2.8-2.13].

命题 2.1.4 设 $R(\mathcal{A}', \mathcal{A}, \mathcal{A}'')$ 是阿贝尔范畴的一个粘合, 我们有以下命题:

- (1) $i^* j_! = 0$ 和 $i^! j_* = 0$;
- (2) i^* 和 $j_!$ 是右正合函子, $i^!$ 和 j_* 是左正合函子, i_* 和 j^* 是正合函子;
- (3) 自然变换: $i^* i_* \longrightarrow \text{Id}_{\mathcal{A}'}, \text{Id}_{\mathcal{A}'} \longrightarrow i^! i_*, j^* j_* \longrightarrow \text{Id}_{\mathcal{A}'}, \text{Id}_{\mathcal{A}'} \longrightarrow j^* j_!$ 是自然同构;
- (4) 如果函子 i^* 是正合的, 那么 $i^! j_! = 0$ 和 $j_!$ 是正合的; 如果函子 $i^!$ 是正合的, 那么 $i^* j_* = 0$ 和 j_* 是正合的.

注 2.1.5[5, Remark2.2] (1) 伴随对 (i^*, i_*) 的余单位 $i^* i_* \longrightarrow \text{Id}_{\mathcal{A}'}$ 是可逆的, 伴随对 $(i_*, i^!)$ 的单位 $\text{Id}_{\mathcal{A}'} \longrightarrow i^! i_*$ 是可逆的;

(2) 伴随对 (j^*, j_*) 的余单位 $j^* j_* \longrightarrow \text{Id}_{\mathcal{A}''}$ 是可逆的, 伴随对 $(j_!, j^*)$ 的单位 $\text{Id}_{\mathcal{A}''} \longrightarrow j^* j_!$ 是可逆的;

(3) 函子 i_* 推导出 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{A}'$ 的 Serre 子范畴 $\text{Ker} j^* = \text{Im} i_*$ 之间的等价;

(4) 由于正合函子 j^* 是一个完全忠实的左伴随子和一个完全忠实的右伴随子, 因此可以得出 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{A}'$ 的一个局部化和余局部化子范畴, 并且存在等价 $\mathcal{A}' / \mathcal{A} \simeq \mathcal{A}''$. 特别地, 任何的粘合 $R(\mathcal{A}', \mathcal{A}, \mathcal{A}'')$ 都能推导出一个阿贝尔范畴的短正合序列:

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}' \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'' \longrightarrow 0.$$

注 2.1.6[5, Remark2.5] 设 $R(\mathcal{A}', \mathcal{A}, \mathcal{A}'')$ 是阿贝尔范畴的粘合, 并假设 $\mathcal{A}$ 有足够的投射对象和内射对象. 则函子 $i^* : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ 保留投射对象, 因为我们有伴随对 (i^*, i_*) , 并且函子 $i_* : \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A}$ 是正合的. 类似地, 函子 $i^! : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ 保留内射对象. 设 A' 是 $\mathcal{A}'$ 的一个对象, 则 $i_*(A') \in \mathcal{A}$, 且 $P \in \text{proj } \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ 中存在一个 $P \longrightarrow i_*(A')$ 的满射, 应用函子 i^* , 可以得到了 $i^*(P) \longrightarrow A'$ 与 $i^*(P) \in \text{proj } \mathcal{A}'$ 的满射. 因此, 范畴 $\mathcal{A}'$ 有足够的投射对象.

2.2 阿贝尔范畴中平衡对和粘合的保持关系

令 $\mathcal{X}$ 是阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 中的一个子范畴, $Z^\bullet$ 是 $\mathcal{A}$ 中的复形. 倘若应用 Hom 函子作用在复形 $Z^\bullet$ 后, $\text{Hom}(X, Z^\bullet)$ 对于任意的 $X \in \mathcal{X}$ 是无环的, 我们称 $Z^\bullet$ 是右 $\mathcal{X}$ -无环复形. 对偶地, 我们可以得到左 $\mathcal{Y}$ -无环复形的定义.

如果 $\mathcal{C}$ 中任意对象的右 $\mathcal{C}$ -逼近是满射, 那我们称 $\mathcal{A}$ 中的反变有限子范畴 $\mathcal{C}$ 是可容许的^[8]. 等价于任意的右 $\mathcal{C}$ -复形是无环的. 事实上, 如果 $\mathcal{C}$ 是可容许的, 我们考虑任意一个右 $\mathcal{C}$ -无环序列:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0,$$

其中 f 是单射, g 是满射的.

设 $C_M^\bullet \longrightarrow M$ 和 $C_L^\bullet \longrightarrow L$ 分别是 M 和 L 的 $\mathcal{C}$ -分解, 我们很容易可以得到下面的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & N & \longrightarrow & L \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow \varepsilon_M & & \uparrow \varepsilon_N & & \uparrow \varepsilon_L \\ 0 & \longrightarrow & C_M^\bullet & \longrightarrow & C_N^\bullet & \longrightarrow & C_L^\bullet \longrightarrow 0 \end{array}$$

图 2-3

其中 $C_N^\bullet = C_M^\bullet \oplus C_L^\bullet$.

由于 $\mathcal{C}$ 是可容许的, ε_M 和 ε_L 是拟同构的, 所以, ε_N 是拟同构的. 因此, 由于第二行是无环的, 所以第一行是无环的. 相反, 对于任意 $M \in \mathcal{A}$, 存在一个 α 的右 $\mathcal{C}$ -逼近正合序列:

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow C \xrightarrow{\alpha} M.$$

由于复形:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(C', K) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(C', C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(C', M) \longrightarrow 0,$$

对于任意的 $C' \in \mathcal{C}$ 是正合的, 其中 α 是满射. 对偶地, 我们可以得到 $\mathcal{A}$ 的共变有限子范畴 $\mathcal{C}$ 是余可容许的.

如果 $\mathcal{X}$ 是可容许的, 那么平衡对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 在阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 中是可容许的^[8]. 由 [8, 推论 2.3] 知, 一个平衡对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 在阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 中是可容许的, 当且仅当 $\mathcal{Y}$ 是余可容许的. 如果 $\mathcal{X}\text{-dim } \mathcal{A}$ 是有限的, 那么我们称平衡对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 也是有限维的.

根据 [8, 命题 2.2] 知, 如果 $\mathcal{X}$ (或 $\mathcal{Y}$) 是反变有限的 (或共变有限) 子范畴, 则 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是平衡的当且仅当是右 $\mathcal{X}$ -无环复形的类与左 $\mathcal{Y}$ -无环复形的类重合.

我们定义:

$$\mathcal{X}^\perp = \{M \in \mathcal{A} \mid \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^1(\mathcal{X}, M) = 0\}$$

和

$${}^\perp \mathcal{X} = \{N \in \mathcal{A} \mid \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^1(N, \mathcal{X}) = 0\}.$$

如果 $\mathcal{X} = {}^\perp \mathcal{Y}$ 和 $\mathcal{Y} = \mathcal{X}^\perp$, 则 $\mathcal{A}$ 的子范畴中的 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 被称为余挠对^[13]. 在阿贝

尔范畴 $\mathcal{A}$ 中, 余挠对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 被称为是完全的, 若任意的 $M \in \mathcal{A}$, $X, X' \in \mathcal{X}$ 和 $Y, Y' \in \mathcal{Y}$, 均存在着两个短正合序列:

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow X \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

和

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow Y' \longrightarrow X' \longrightarrow 0.$$

如果 $\mathcal{X}$ 是可解的, 即它包含了所有的投射对象, 扩张下封闭和满核下封闭, 则余挠对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 被称为遗传的. 根据[8, 命题 2.6], 如果余挠对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 和 $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ 是完全遗传的, 那么 $(\mathcal{X}, \mathcal{Z})$ 是可容许的平衡对.

例 2.2.1 (1) 设 R 是一个环, $(\text{Proj}R, \text{Inj}R)$ 是 $\text{Mod}-R$ 中的平衡对, 其中 $\text{Mod}-R$ 是右 R 模范畴, $\text{Proj}R$ (或 $\text{Inj}R$) 是 $\text{Mod}-R$ 中的所有投射模 (或内射模) 构成的子范畴.

(2) 根据[14, 15]可知, 在有限 Krull 维数的交换 noetherian 环上, $(\mathcal{GP}, \mathcal{GP}^\perp)$ 和 $({}^\perp\mathcal{GI}, \mathcal{GI})$ 是完全遗传的余挠对, 其中 $\mathcal{GP}$ (或 $\mathcal{GI}$) 是所有的 Gorenstein 投射模 (或 Gorenstein 内射模) 的子范畴^[16]. 如果它满足有限 Krull 维数和 $\mathcal{GP}^\perp = {}^\perp\mathcal{GI}$, 那么交换 noetherian 环 R 被称为 virtually Gorenstein^[17]. 因此, 若在满足上述的情况下, $(\mathcal{GP}, \mathcal{GP}^\perp = {}^\perp\mathcal{GI}, \mathcal{GI})$ 是完全遗传的余挠三元组. 由[8, 命题 2.6]很容易得到 $(\mathcal{GP}, \mathcal{GI})$ 是平衡对.

(3) (参见[13, 例子 8.3.2]) 设 R 是一个环, $\mathcal{PP}(R)$ 和 $\mathcal{PI}(R)$ 分别是由纯投射模和纯内射模组成的 $\text{Mod}-R$ 子范畴. 则 $(\mathcal{PP}(R), \mathcal{PI}(R))$ 是 $\text{Mod}-R$ 中的平衡对.

下面的引理是对阿贝尔范畴[18, 引理 3.1]的推广, 参见[19].

引理 2.2.2 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是两个阿贝尔范畴, $F: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, $G: \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ 是其中的两个函子, 函子对 (F, G) 是一个伴随对. 如果 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的反变有限子范畴, 那么 $F(\mathcal{C})$ 是 $\mathcal{B}$ 中的反变有限子范畴. 若 G 是忠实的且 $\mathcal{C}$ 是可容许的, 则 $F(\mathcal{C})$ 也是可容许的.

证明：由于 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的反变有限子范畴，对于任意 $B \in \mathcal{B}$ ，存在一个 $G(B)$ 的右 $\mathcal{C}$ -逼近 $f: C \longrightarrow G(B)$ 。

我们需证明： $\varepsilon_B \circ F(f): F(C) \longrightarrow FG(B) \longrightarrow B$ 是右 $F(\mathcal{C})$ -逼近，即 $F(\mathcal{C})$ 是 $\mathcal{B}$ 的反变有限子范畴。实际上，对于任意的 g 和 $X \in \mathcal{C}$ ，我们只需要找到一个态射，使得下图可交换：

$$\begin{array}{ccc} & & F(X) \\ & \swarrow \varepsilon_B \circ F(f) & \downarrow g \\ F(C) & \xrightarrow{\quad} & B \end{array}$$

图 2-4

由于 f 是 $G(B)$ 的右 $\mathcal{C}$ -逼近，我们有以下交换图：

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & GF(X) \\ \downarrow h & & \downarrow G(g) \\ C & \xrightarrow{f} & G(B) \end{array}$$

图 2-5

即 $fh = G(g)\eta_X$ 。

我们考虑下面的交换图：

$$\begin{array}{ccc} FGF(X) & \xrightarrow{\varepsilon_{F(X)}} & F(X) \\ \downarrow FG(g) & & \downarrow g \\ FG(B) & \xrightarrow{\varepsilon_B} & B \end{array}$$

图 2-6

即 $g\varepsilon_{F(X)} = \varepsilon_B FG(g)$ 。由引理 2.1.1，得到：

$$g = g\varepsilon_{F(X)}F(\eta_X) = \varepsilon_B FG(g)F(\eta_X) = \varepsilon_B F(G(g)\eta_X) = \varepsilon_B F(fh) = \varepsilon_B F(f)F(h)。$$

因此存在态射： $F(h): F(X) \longrightarrow F(C)$ ，使得 $g = \varepsilon_B \circ F(f)F(h)$ ，即 $F(\mathcal{C})$ 是 $\mathcal{B}$ 的反变有限子范畴。

因为 $\mathcal{C}$ 是可容许的， f 是满射。注意到 G 是忠实的当且仅当对于任意 $B \in \mathcal{B}$ ，

有余单位: $\varepsilon_B = FG(B) \longrightarrow B$, 是满射. 通过上面的讨论, 因为 F 保持满射, 所以 $\varepsilon_B F(f)$ 是满射. 也就是说, $F(C)$ 也是可容许的. $\square$

我们不知道引理 2.1.2 的逆是否为真, 但我们有以下结论.

引理 2.2.3 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是两个阿贝尔范畴, $F: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ 是一个加法函子, $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个子范畴, 使得 $F(\mathcal{C})$ 是 $\mathcal{B}$ 的共变(或反变)有限子范畴. 如果 F 是满忠实的, 那么 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{A}$ 的共变(或反变)有限子范畴.

证明: 对于任意 $A \in \mathcal{A}$, 由于 $F(\mathcal{C})$ 是 $\mathcal{B}$ 的共变有限子范畴, 因此存在一个左 $F(\mathcal{C})$ -逼近: $\bar{f}: F(A) \longrightarrow F(C)$, 因为 F 是满忠实的, 所以存在同构:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A), F(C)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, C),$$

我们称 $f: A \longrightarrow C$ 是一个左 $\mathcal{C}$ -逼近, 即它是 $\bar{f}$ 的原像. 因为 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\bar{f}, F(C'))$ 对于任意的 $C' \in \mathcal{C}$ 是满射, 所以 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(f, C')$ 也是满射, 即 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{A}$ 的共变有限子范畴.

对偶地, 可以得到 $F(\mathcal{C})$ 是 $\mathcal{B}$ 的反变有限子范畴. 如果 F 是满忠实的, 那么 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{A}$ 的反变有限子范畴. $\square$

为了证明本节的主要结果, 我们还需要进行以下讨论.

命题 2.2.4 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是两个阿贝尔范畴, 设:

$$F: \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}, G: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}, H: \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$$

是加法函子, 使得 (F, G, H) 是伴随三元组. 如果阿贝尔范畴 $\mathcal{B}$ 中的 $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 是平衡对, 则 $(F(\mathcal{U}), H(\mathcal{V}))$ 是阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 中的平衡对. 另外, 如果函子 G 是忠实的且阿贝尔范畴 $\mathcal{B}$ 中的平衡对 $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 是可容许的, 则阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 中的 $(F(\mathcal{U}), H(\mathcal{V}))$ 也是可容许的.

证明: 根据引理 2.2.2 知, $F(\mathcal{U})$ 是阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 中的反变有限子范畴. 设 $M^\bullet$ 为 $\mathcal{A}$ 中的复形.

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(F(\mathcal{U}), M^\bullet)$ 是无环的 $\Leftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{U}, G(M^\bullet))$ 是无环的(因为 (F, G) 是伴随对)

$\Leftrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(G(M^\bullet), \mathcal{V})$ 是无环的(因为 $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 是平衡对)

$\Leftrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M^\bullet, H(\mathcal{V}))$ 是无环的(因为 (G, H) 是伴随对)

因此, 由[8, 命题 2.2]知, $(F(\mathcal{U}), H(\mathcal{V}))$ 是阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 中平衡对.

另外, 如果 G 是忠实的且平衡对 $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 是可容许的, 由引理 2.2.2 知, 我们得到 $F(\mathcal{U})$ 是可容许的. 即 $(F(\mathcal{U}), H(\mathcal{V}))$ 在阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 中是可容许的. $\square$

定理 2.2.5 设 $R(\mathcal{A}', \mathcal{A}, \mathcal{A}'')$ 是阿贝尔范畴中的一个粘合. 设范畴对 $(\mathcal{X}', \mathcal{Y}')$ 和范畴对 $(\mathcal{X}'', \mathcal{Y}'')$ 分别是 $\mathcal{A}'$ 和 $\mathcal{A}''$ 中的平衡对, 令:

$$\mathcal{X} = \{X \in \mathcal{A} \mid i^*X \in \mathcal{X}', j^*X \in \mathcal{X}''\}, \quad \mathcal{Y} = \{Y \in \mathcal{A} \mid i^!Y \in \mathcal{Y}', j^*Y \in \mathcal{Y}''\}$$

则下列陈述命题成立:

(1) $i^*\mathcal{X} = \mathcal{X}', i^!\mathcal{Y} = \mathcal{Y}', j^*\mathcal{X} = \mathcal{X}''$ 和 $j^*\mathcal{Y} = \mathcal{Y}''$;

(2) $(j_!j^*\mathcal{X}, j_*j^*\mathcal{Y})$ 是一个平衡对. 如果范畴对 $(\mathcal{X}'', \mathcal{Y}'')$ 是可容许的, 且 j^* 是忠实的, 那么 $(j_!j^*\mathcal{X}, j_*j^*\mathcal{Y})$ 也是可容许的;

(3) 如果 $(\mathcal{X}'', \mathcal{Y}'')$ 是有限维的且 j^* 是忠实的, 那么 $(j_!j^*\mathcal{X}, j_*j^*\mathcal{Y})$ 是有限维的.

证明: (1) 要证 $i^*\mathcal{X} = \mathcal{X}'$, 即证 $i^*\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}'$ 和 $\mathcal{X}' \subseteq i^*\mathcal{X}$ 成立即可.

显然, $i^*\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}'$. 根据命题 2.1.4, 我们有: $\mathcal{X}' \cong i^*i_*\mathcal{X}'$ 和 $i_*\mathcal{X}' \subseteq \mathcal{X}$, 即 $\mathcal{X}' \subseteq i^*\mathcal{X}$.

所以 $\mathcal{X}' = i^*i_*\mathcal{X}'$. 同理, 我们可以证明其他三个等式也成立.

(2) 我们注意到: $(j_!j^*\mathcal{X}, j_*j^*\mathcal{Y}) = (j_!\mathcal{X}'', j_*\mathcal{Y}'')$, 根据命题 2.2.4, 我们可以很容易地证明出结果.

(3) 设 $\mathcal{X}'' - \dim \mathcal{A}'' = n$. 对于任意的 $A \in \mathcal{A}$, 由于 $j_!j^*\mathcal{X}$ 是反变有限子范畴, 因此存在一个 $\text{Hom}(j_!j^*\mathcal{X}, -)$ -环复形:

$$\cdots \longrightarrow j_!j^*X_n \xrightarrow{d_n} \cdots \longrightarrow j_!j^*X_1 \longrightarrow j_!j^*X_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

其中每个 $X_i \in \mathcal{X}$. 即得到以下正合序列:

$$\cdots \rightarrow \text{Hom}(j_!j^*\mathcal{X}, j_!j^*X_n) \rightarrow \cdots \rightarrow \text{Hom}(j_!j^*\mathcal{X}, j_!j^*X_0) \rightarrow \text{Hom}(j_!j^*\mathcal{X}, A) \rightarrow 0,$$

因为函子对 $(j_!, j^*)$ 是一对伴随对，我们可以得到以下正合序列：

$$\cdots \rightarrow \text{Hom}(j^* \mathcal{X}, j^* X_n) \rightarrow \cdots \rightarrow \text{Hom}(j^* \mathcal{X}, j^* X_0) \rightarrow \text{Hom}(j^* \mathcal{X}, j^* A) \rightarrow 0,$$

由命题 2.1.4 知 $\text{Id}_{\mathcal{A}''} \cong j^* j_!$. 因此，可以给出 $j^* A$ 的一个 $j^* \mathcal{X} = \mathcal{X}''$ -分解，如下所示：

$$\cdots \longrightarrow j^* X_n \xrightarrow{j^* d_n} \cdots \longrightarrow j^* X_1 \longrightarrow j^* X_0 \longrightarrow j^* A \longrightarrow 0,$$

通过[8, 引理 2.4]知，当 $\mathcal{X}'' - \dim \mathcal{A}'' = n$ 时，

$$j^* \text{Ker}(d_{n-1}) = \text{Ker}(j^* d_{n-1}) \in \mathcal{X}'' = j^* \mathcal{X} = j^* j_! j^* \mathcal{X},$$

注意到函子 j^* 是正合且忠实的. 因此， $\text{Ker}(d_{n-1}) \in j_! j^* \mathcal{X}$.

从第一个正合序列中，我们可以知道 $j_! j^* \mathcal{X} - \dim \mathcal{A}$ 是有限的，从而我们可以得到平衡对 $(j_! j^* \mathcal{X}, j_* j^* \mathcal{Y})$ 是有限维的. $\square$

证明定理 2.2.5 中定义的范畴对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是平衡对是非常有意思的. 遗憾的是，我们不知道这个结论是否正确.

引理 2.2.6 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是两个阿贝尔范畴，令

$$L^\bullet =: \cdots \longrightarrow L_{-1} \xrightarrow{d_{-1}} L_0 \xrightarrow{d_0} L_1 \longrightarrow \cdots$$

是阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 中的一个复形. 如果函子 $F: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ 是正合且忠实的，那么 $L^\bullet$ 是无环的当且仅当 $F(L^\bullet)$ 是无环的.

证明： 由于函子 F 是正合的，其必要性是显而易见的.

下面证明其充分性，由于： $F(L^\bullet) =: \cdots \longrightarrow FL_{-1} \xrightarrow{Fd_{-1}} FL_0 \xrightarrow{Fd_0} FL_1 \longrightarrow \cdots$ ，是无环的，且函子 F 是正合的，则上述正合序列的第 i 处同调为：

$$0 = H_i(F(L^\bullet)) = \text{Ker} Fd_i / \text{Im} Fd_{i-1} \cong F(\text{Ker} d_i / \text{Im} d_{i-1}),$$

注意到函子 F 是正合且忠实的，所以： $\text{Ker} d_i / \text{Im} d_{i-1} = 0$ ，即复形 $L^\bullet$ 是无环的. $\square$

定理 2.2.7 设范畴对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 中的一个平衡对，且函子 j^* 是忠实的.

(1) $(i^* \mathcal{X}, i^* \mathcal{Y})$ 和 $(j^* \mathcal{X}, j^* \mathcal{Y})$ 分别是阿贝尔范畴 $\mathcal{A}'$ 和 $\mathcal{A}''$ 中的平衡对；

(2) 如果平衡对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是可容许的, 那么分别诱导出的阿贝尔范畴 $\mathcal{A}'$ 和 $\mathcal{A}''$ 中平衡对 $(i^*\mathcal{X}, i^!\mathcal{Y})$ 和 $(j^*\mathcal{X}, j^*\mathcal{Y})$ 也是可容许的;

(3) 设范畴对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是有限维的. 如果 $j_!j^*\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}$, 那么平衡对 $(j^*\mathcal{X}, j^*\mathcal{Y})$ 是有限维的. 另外, 若 $\mathcal{X} = i_*i^*\mathcal{X}$, 则 $(i^*\mathcal{X}, i^!\mathcal{Y})$ 也是有限维的.

证明: (1) 由命题 2.2.4 知, $(i^*\mathcal{X}, i^!\mathcal{Y})$ 是阿贝尔范畴 $\mathcal{A}'$ 中的平衡对. 根据引理 2.2.2 知, $j^*\mathcal{X}$ 是阿贝尔范畴 $\mathcal{A}''$ 的一个反变有限子范畴. 设 $N^\bullet$ 是 $\mathcal{A}''$ 中的复形.

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{A}'}(j^*\mathcal{X}, N^\bullet) \text{ 是无环的} &\Leftrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}'}(\mathcal{X}, j_*N^\bullet) \text{ 是无环的(因为 } (j^*, j_*) \text{ 是伴随对)} \\ &\Leftrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}'}(j_*N^\bullet, \mathcal{Y}) \text{ 是无环的(因为 } (\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \text{ 是平衡对)} \\ &\Leftrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}'}(j^*j_*N^\bullet, j^*\mathcal{Y}) \text{ 是无环的(因为 } j^* \text{ 是忠实且正合的和引理 2.2.6)} \\ &\Leftrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}'}(N^\bullet, j^*\mathcal{Y}) \text{ 是无环的(因为 } j^*j_* \cong \text{Id}_{\mathcal{A}''}) \end{aligned}$$

因此 $(j^*\mathcal{X}, j^*\mathcal{Y})$ 是平衡对.

(2) 通过命题 2.2.4 知, $(i^*\mathcal{X}, i^!\mathcal{Y})$ 是可容许的. 设 $Q^\bullet$ 是阿贝尔范畴 $\mathcal{A}''$ 中的复形. 然后我们有:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{A}'}(j^*\mathcal{X}, Q^\bullet) \text{ 是无环的} &\Rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}'}(\mathcal{X}, j_*Q^\bullet) \text{ 是无环的(因为 } (j^*, j_*) \text{ 是伴随对)} \\ &\Rightarrow j_*Q^\bullet \text{ 是无环的(因为 } (\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \text{ 是可容许的)} \\ &\Rightarrow j^*j_*Q^\bullet \text{ 是无环的(因为 } j^* \text{ 是正合的)} \\ &\Rightarrow Q^\bullet \text{ 是无环的(因为 } j^*j_* \cong \text{Id}_{\mathcal{A}''}) \end{aligned}$$

所以 $(j^*\mathcal{X}, j^*\mathcal{Y})$ 是可容许的.

(3) 对于任意的 $A'' \in \mathcal{A}''$, 当 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是有限维时, 存在 $j_!A''$ 的一个 $\mathcal{X}$ -分解:

$$0 \longrightarrow X_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_0 \longrightarrow j_!A'' \longrightarrow 0,$$

对于任意 i , 有 $X_i \in \mathcal{X}$. 即, 可以得到下面的正合序列:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, X_n) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, X_0) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, j_!A'') \longrightarrow 0,$$

注意到 $j^* j_! \cong \text{Id}_{\mathcal{A}''}$ 和 $(j_!, j^*)$ 是伴随对. 我们有下面的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}'''}(j^* \mathcal{X}, j^* X_n) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}'''}(j^* \mathcal{X}, j^* X_0) & \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}'''}(j^* \mathcal{X}, j^* j_! A'') \longrightarrow 0 \\ & \downarrow \cong & & & & \downarrow \cong & \downarrow \cong \\ 0 \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}'''}(j_! j^* \mathcal{X}, X_n) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}'''}(j_! j^* \mathcal{X}, X_0) & \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}'''}(j_! j^* \mathcal{X}, j_! A'') \longrightarrow 0 \end{array}$$

图 2-7

由于 $j_! j^* \mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}$, 上面交换图的第二行是正合的, 因此第一行也是正合的. 于是有:

$$0 \longrightarrow j^* X_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow j^* X_1 \longrightarrow j^* X_0 \longrightarrow j^* j_! A'' \cong A'' \longrightarrow 0,$$

是 A'' 的一个 $j^* \mathcal{X}$ -分解. 所以平衡对 $(j^* \mathcal{X}, j^* \mathcal{Y})$ 是有限维的.

对于任意 $A' \in \mathcal{A}'$, 由于 $i^* \mathcal{X}$ 是反变有限子范畴, 因此存在一个 A' 的 $i^* \mathcal{X}$ -分解:

$$\cdots \longrightarrow i^* X_n \xrightarrow{\partial_n} \cdots \longrightarrow i^* X_1 \longrightarrow i^* X_0 \longrightarrow A' \longrightarrow 0,$$

对于任意的 i , 有 $X_i \in \mathcal{X}$, 因此, 有下面的正合序列:

$$\cdots \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}'}(i^* \mathcal{X}, i^* X_n) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}'}(i^* \mathcal{X}, i^* X_0) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}'}(i^* \mathcal{X}, A') \longrightarrow 0$$

由于函子对 (i^*, i_*) 是伴随对, 则有下列的正合序列:

$$\cdots \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, i_* i^* X_n) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, i_* i^* X_0) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, i_* A') \longrightarrow 0$$

这意味着:

$$\cdots \longrightarrow i_* i^* X_n \xrightarrow{i_* \partial_n} \cdots \longrightarrow i_* i^* X_0 \longrightarrow i_* A' \longrightarrow 0,$$

是 $i_* A'$ 的一个 $\mathcal{X}$ -分解.

由[8, 引理 2.4]我们可以得到下面的同构成立, 因为 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是有限维的, 所以 $i_* \text{Ker}(\partial_{n-1}) \cong \text{Ker}(i_* \partial_{n-1}) \in \mathcal{X} = i_* i^* \mathcal{X}$, 注意到函子 i_* 是忠实且正合的, 因此我们有 $\text{Ker}(\partial_{n-1}) \in i^* \mathcal{X}$, 所以 $i^* \mathcal{X} - \dim A' \leq n$, 即 $(i^* X, i^* Y)$ 也是有限维的. $\square$

事实上, 上述定理的证明可以得到下面两个不等式, 分别是:

$$j^* \mathcal{X} - \dim \mathcal{A}'' \leq \mathcal{X} - \dim \mathcal{A} \quad \text{和} \quad i^* \mathcal{X} - \dim \mathcal{A}'' \leq \mathcal{X} - \dim \mathcal{A}.$$

第3章 $n-\mathcal{X}$ -倾斜模和粘合

在本章中, 我们假设范畴对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 中的可容许平衡对. 每当子范畴 $\mathcal{X}$ (或 $\mathcal{Y}$) 出现时, 我们假设它是可容许平衡对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 的一部分. 这里我们将给出关于 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 中的 $n-\mathcal{X}$ -倾斜模的概念, 并得到 $n-\mathcal{X}$ -倾斜模的类似于 n -倾斜模的 Bazzoni 刻画^[11].

3.1 $n-\mathcal{X}$ -倾斜模定义和基本性质

注意到函子 $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(-, -)$ 是由第一个位置取投射分解后, 使用反变函子 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(*, -)$ 作用其删项复形, 所得复形每个位置的同调群即为所得, 也等价于取第二个位置的内射分解, 使用共变函子进行作用. 事实上, 函子 $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(-, -)$ 是由可容许的平衡对 (P, I) 诱导产生的, 根据这个观点, 我们用一般的可容许的平衡对 (X, Y) 替换平衡对 (P, I) , 可得到一个相对的函子 $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(-, -)$, 根据[8, 引理 2.1]知, 该函子的定义是良好的. 首先, 我们给出下面的常见记号, 在接下来的内容中右 $\mathcal{X}$ -零调复形, 我们也称 $\mathcal{X}$ -正合序列.

$$\text{Gen}_{\mathcal{X}}T := \{K \mid \text{对于指标集 } X, \text{ 存在 } \mathcal{X}\text{-正合序列: } T^{(X)} \longrightarrow K \longrightarrow 0\},$$

$$\text{Add}T := \{K \mid \text{对于指标集 } I, \text{ 存在对象 } J, \text{ 使得 } K \oplus J \cong T^{(I)}\},$$

$$\widehat{\text{Add}_{\mathcal{X}}T} := \left\{ L \mid \text{对于某些 } n, \text{ 当 } 1 \leq i \leq n \text{ 时, 存在 } \mathcal{X}\text{-正合序列: } \right. \\ \left. 0 \longrightarrow T_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow T_1 \longrightarrow L \longrightarrow 0, \text{ 其中 } T_i \in \text{Add}T \right\},$$

$$(\widehat{\text{Add}_{\mathcal{X}}T})_n := \left\{ L \mid \text{当 } 1 \leq i \leq n \text{ 时, 其中 } T_i \in \text{Add}T, \text{ 存在 } \mathcal{X}\text{-正合列: } \right. \\ \left. 0 \longrightarrow T_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow T_1 \longrightarrow L \longrightarrow 0 \right\},$$

$$\text{Pres}_{\mathcal{X}}^n T := \left\{ L \mid \text{当 } 1 \leq i \leq n \text{ 时, 其中 } T_i \in \text{Add}T, \text{ 存在 } \mathcal{X}\text{-正合序列: } \right. \\ \left. T_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow T_1 \longrightarrow L \longrightarrow 0 \right\},$$

$$T^{\mathcal{X}\perp} := \{M \mid \text{Ext}_{\mathcal{X}}^{i \geq 1}(T, M) = 0\},$$

$${}_T\mathcal{X} := \left\{ M \mid \text{对于所有的 } i, \text{ 其中 } T_i \in \text{Add}T \text{ 和 } \text{Im } f_i \in T^{\mathcal{X}\perp}, \text{ 存在 } \mathcal{X}\text{-正合序列: } \right. \\ \left. \cdots \longrightarrow T_n \xrightarrow{f_n} \cdots \longrightarrow T_1 \xrightarrow{f_1} T_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0 \right\}.$$

对偶地，我们可以定义它们的对偶概念分别为： $\widetilde{\text{Add}}_{\mathcal{X}}T$ ， $(\widetilde{\text{Add}}_{\mathcal{X}}T)_n$ ， ${}^{\mathcal{X}\perp}T$ 和 $\mathcal{X}_T$ 。

定义 3.1.1 设 $\mathcal{A}$ 是一个阿贝尔范畴，且 $T \in \mathcal{A}$ 。那么称 T 为 $n-\mathcal{X}$ -倾斜模(相对于 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$)，如果满足以下条件：

- (1) $\mathcal{X}-\dim T \leq n$;
- (2) T 是 $\mathcal{X}$ -自正交，即 $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^i(T, T^{(l)}) = 0$ ，所有的 $i > 0$ 和所有指标集；
- (3) 对于任意的 $X \in \mathcal{X}$ ，存在一个 $\mathcal{X}$ -正合序列：

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow T_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow T_n \longrightarrow 0$$

其中对于任意 i ，有 $T_i \in \text{Add}T$ 。

如果 T 满足上述条件(1)和(2)，则称 T 是部分 $n-\mathcal{X}$ -倾斜模。

例 3.1.2 (1) 很容易验证 $(\text{Proj}R, \text{Inj}R)$ 是 $\text{Mod}-R$ 中的可容许的平衡对。那么 n -倾斜模^[12]是相对于平衡对 $(\text{Proj}R, \text{Inj}R)$ 的 $n-\text{Proj}$ -倾斜模。

(2) 由[8, 命题 2.6]知，我们可以得到例 2.2.1 中的 $(\mathcal{GP}, \mathcal{GI})$ 是可容许的平衡对。那么 n -Gorenstein 倾斜模^[20]是相对于平衡对 $(\mathcal{GP}, \mathcal{GI})$ 的 $n-\mathcal{GP}$ -倾斜模。

引理 3.1.3 设 $\mathcal{A}$ 是一个阿贝尔范畴，其中 $T \in \mathcal{A}$ 。

- (1) 如果 $U \in \text{Gen}_{\mathcal{X}}T$ ，那么存在一个 $\mathcal{X}$ -正合序列：

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow T_U \longrightarrow U \longrightarrow 0,$$

其中 $T_U \in \text{Add}T$ ，应用函子 $\text{Hom}(T, -)$ 后保持正合；

- (2) 如果 T 是 $\mathcal{X}$ -自正交，且 $T^{\mathcal{X}\perp} \subseteq \text{Gen}_{\mathcal{X}}T (= \text{Pres}_{\mathcal{X}}^1 T)$ ，那么 $T^{\mathcal{X}\perp} = {}_T\mathcal{X}$ ；
- (3) 如果 T 是 $n-\mathcal{X}$ -倾斜模，那么 $T^{\mathcal{X}\perp} \subseteq \text{Gen}_{\mathcal{X}}T$ ，特别地， $T^{\mathcal{X}\perp} = {}_T\mathcal{X}$ 。

证明：(1) 由于 $U \in \text{Gen}_{\mathcal{X}}T$ ，因此存在 $\mathcal{X}$ -正合序列：

$$0 \longrightarrow V' \longrightarrow T'_U \longrightarrow U \longrightarrow 0,$$

其中 $T_U \in \text{Add}T$ ，所以赋值态射： $f: T_U \longrightarrow U$ 是满射，我们可以得到以下交换

图：

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & V' & \longrightarrow & T'_U & \longrightarrow & U & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \\
 0 & \longrightarrow & V & \longrightarrow & T_U & \xrightarrow{f} & U & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

图 3-1

很容易看出上面这个图是一个推出. 通过[21, 第一部分]知, 每个 $\mathcal{X}$ -正合序列的推出或拉回都是 $\mathcal{X}$ -正合的. 因此, 上图中的第二行是我们所需要的结果.

(2) 显然, 我们可以得到 ${}_T\mathcal{X} \subseteq T^{\mathcal{X}\perp}$. 对于任意的 $U \in T^{\mathcal{X}\perp} \subseteq \mathbf{Gen}_{\mathcal{X}}T$, 都存在一个 $\mathcal{X}$ -正合序列:

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow T_U \longrightarrow U \longrightarrow 0,$$

其中 $T_U \in \mathbf{Add}T$, 并且由(1)知, 应用函子 $\mathbf{Hom}(T, -)$ 后保持正合. 要证明 $V \in T^{\mathcal{X}\perp}$ 并不困难. 只需要利用维数转移, 将此过程重复到 V , 我们就可以证明 $U \in {}_T\mathcal{X}$, 即 ${}_T\mathcal{X} = T^{\mathcal{X}\perp}$.

(4) 对于任意 $U \in T^{\mathcal{X}\perp}$, 因为 $\mathcal{X}$ 是反变有限且可容许的, 我们取一个 $\mathcal{X}$ -正合序列:

$$0 \longrightarrow U_1 \longrightarrow X_U \longrightarrow U \longrightarrow 0,$$

其中 $X_U \in \mathcal{X}$. 由于 T 是 n - $\mathcal{X}$ -倾斜模, 因此存在一个 $\mathcal{X}$ -正合序列:

$$0 \longrightarrow X_U \longrightarrow T_0 \longrightarrow X'_U \longrightarrow 0,$$

其中 $T_0 \in \mathbf{Add}T$ 和 $X'_U \in \widehat{\mathbf{Add}_{\mathcal{X}}T}$.

因此, 我们得到了下面的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & U_1 & \longrightarrow & X_U & \longrightarrow & U \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & U_1 & \longrightarrow & T_0 & \longrightarrow & V \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & X'_U & = & X'_U \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

图 3-2

很容易验证第三序列是可裂的. 即 $V = U \oplus X'_U$, 注意到, 上面所有的序列都是 $\mathcal{X}$ -正合的. 从第二行中, 得到 $V \in \text{Gen}_{\mathcal{X}} T$, 即 $U \in \text{Gen}_{\mathcal{X}} T$, 因此 $T^{\mathcal{X}^\perp} \subseteq \text{Gen}_{\mathcal{X}} T$, 特别地, 由(2)知 $T^{\mathcal{X}^\perp} = {}_T \mathcal{X}$. $\square$

引理 3.1.4 设 T 为 $\mathcal{X}$ -自正交的. 可以得到:

- (1) ${}_T \mathcal{X}$ 在 $\mathcal{X}$ -扩张和直和下是封闭的;
- (2) $\widehat{\text{Add}_{\mathcal{X}} T} = {}_T \mathcal{X} \cap T^{\mathcal{X}^\perp}$. 特别地, $\widehat{\text{Add}_{\mathcal{X}} T}$ 在直和下是封闭的.

证明: (1) 第一个命题的证明类似于马蹄引理. 我们假设 $U = M \oplus N \in {}_T \mathcal{X}$, 因此存在一个 $\mathcal{X}$ -正合序列:

$$0 \longrightarrow U' \longrightarrow T_U \longrightarrow U \longrightarrow 0,$$

其中 $U' \in {}_T \mathcal{X}$, $T_U \in \text{Add} T$.

我们考虑下面的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & U' & = & U' & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & T_U & \longrightarrow & N \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & U & \longrightarrow & N \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

图 3-3

我们得到: $X \oplus N \in {}_T\mathcal{X}$, 事实上, 序列:

$$0 \longrightarrow U' \longrightarrow X \oplus N \longrightarrow M \oplus N = U \longrightarrow 0,$$

是 $\mathcal{X}$ -正合的. 由第一个命题知: $X \oplus N \in {}_T\mathcal{X}$,

因此我们可以通过递归推导出, ${}_T\mathcal{X}$ 在直和下是闭合的.

(2) 这个命题的证明是容易解决的. □

引理 3.1.5 设 T 为 $\mathcal{X}$ -正交的. 序列:

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow M_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_1 \longrightarrow U \longrightarrow 0,$$

是 $\mathcal{X}$ -正合的, 其中 $M_i \in {}_T\mathcal{X}$, 则:

(1) 存在 $\mathcal{X}$ -正合序列:

$$0 \longrightarrow A_n \longrightarrow B_n \longrightarrow V \longrightarrow 0$$

和

$$0 \longrightarrow B_n \longrightarrow T_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow T_1 \longrightarrow U \longrightarrow 0,$$

其中 $A_n \in {}_T\mathcal{X}$ 和对任意 i 有 $T_i \in \text{Add}T$;

(2) 如果 $U \in {}_T\mathcal{X}$, 则存在一个 $\mathcal{X}$ -正合序列:

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow V \longrightarrow 0,$$

其中 $A \in {}_T\mathcal{X}$ 和 $B \in (\widetilde{\text{Add}_\mathcal{X}T})_n$.

证明: (1) 我们对 n 使用数学归纳法.

由于 $M_1 \in {}_T\mathcal{X}$, 存在 $\mathcal{X}$ -正合序列:

$$0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow T_1 \longrightarrow M_1 \longrightarrow 0,$$

其中 $A_1 \in {}_T\mathcal{X}$ 和 $T_1 \in \text{Add}T$.

我们考虑下面的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & A_1 & \xlongequal{\quad} & A_1 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & T_1 & \longrightarrow & U \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & V & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & U \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

图 3-4

那么第一列和第二行是需要证明的.

假设命题对 $n-1$ 成立. 设: $\text{Coker}(V \longrightarrow M_n) = V'$, 通过假设, 我们有 $\mathcal{X}$ -正合序列:

$$0 \longrightarrow A'_{n-1} \longrightarrow B'_{n-1} \longrightarrow V' \longrightarrow 0 ,$$

其中 $A'_{n-1} \in {}_T\mathcal{X}$.

我们考虑下面的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & A'_{n-1} & \xlongequal{\quad} & A'_{n-1} & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & V & \longrightarrow & X & \longrightarrow & B'_{n-1} \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & V & \longrightarrow & M_n & \longrightarrow & V' \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

图 3-5

很容易看出上面所有的序列都是 $\mathcal{X}$ -正合的.

根据引理 3.1.4, $X \in {}_T\mathcal{X}$. 因此存在 $\mathcal{X}$ -正合序列:

$$0 \longrightarrow A_n \longrightarrow T_n \longrightarrow X \longrightarrow 0 ,$$

其中 $A_n \in {}_T\mathcal{X}$ 和 $T_n \in \text{Add}T$.

我们考虑图 3-6 的交换图：

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & A_n & \xlongequal{\quad} & A_n & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & B_n & \longrightarrow & T_n & \longrightarrow & B'_{n-1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & V & \longrightarrow & X & \longrightarrow & B'_{n-1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

图 3-6

那么第一列和第二行就是我们想要的结果.

(2) 由于 $U \in {}_T\mathcal{X}$ ，则存在 $\mathcal{X}$ -正合序列：

$$0 \longrightarrow U_1 \longrightarrow T_U \longrightarrow U \longrightarrow 0 ,$$

其中 $U_1 \in {}_T\mathcal{X}$ 和 $T_U \in \text{Add}T$.

设： $\text{Ker}(M_1 \longrightarrow U) = V_1$ ，我们考虑图 3-7 交换图：

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & U_1 & \xlongequal{\quad} & U_1 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & V_1 & \longrightarrow & N_1 & \longrightarrow & T_U \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & V_1 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & U \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

图 3-7

很容易看出上面的所有序列都是 $\mathcal{X}$ -正合的. 根据引理 3.1.4, $N_1 \in {}_T\mathcal{X}$. 由此我们可以得到 $\mathcal{X}$ -正合序列：

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow M_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_2 \longrightarrow N_1 \longrightarrow T_U \longrightarrow 0 ,$$

通过(1)，我们完成了这个证明. □

根据上述引理，我们可以给出如下结果.

命题 3.1.6 设 T 为 $\mathcal{X}$ -自正交. 那么 $\text{Pres}_{\mathcal{X}}^n({}_T\mathcal{X}) = \text{Pres}_{\mathcal{X}}^n(T)$.

证明: 我们只需要证明: $\text{Pres}_{\mathcal{X}}^n({}_T\mathcal{X}) \subseteq \text{Pres}_{\mathcal{X}}^n(T)$.

对于任意的 $M \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^n({}_T\mathcal{X})$, 存在 $\mathcal{X}$ -正合序列:

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow N_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow N_1 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

其中 $N_i \in {}_T\mathcal{X}$.

根据引理 3.1.5, 存在 $\mathcal{X}$ -正合序列:

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow T_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow T_1 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

其中 $T_i \in \text{Add}T$. 即: $M \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^n(T)$. □

接下来, 我们给出 n - $\mathcal{X}$ -倾斜模的一个性质, 这对证明本节的主要结果很有用(见定理 3.1.9).

命题 3.1.7 如果 T 是 n - $\mathcal{X}$ -倾斜模, 则下列命题是等价的:

- (1) $U \in T^{\mathcal{X}^\perp}$;
- (2) $U \in {}_T\mathcal{X}$;
- (3) $U \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^n(T)$.

证明: (1) $\Leftrightarrow$ (2) 由引理 3.1.3(3) 证明.

(2) $\Rightarrow$ (3) 是显然的.

(3) $\Rightarrow$ (1) 由于 $U \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^n(T)$, 存在 $\mathcal{X}$ -正合序列:

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow T^n \longrightarrow \cdots \longrightarrow T^1 \longrightarrow U \longrightarrow 0,$$

其中对于任意的 i , 有 $T^i \in \text{Add}T$.

通过维数转移, 我们可以得到: $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^{i+n}(T, V) \cong \text{Ext}_{\mathcal{X}}^i(T, U)$,

由[8, 命题 2.4]知, 因为 $\mathcal{X}\text{-dim}T \leq n$, 对于任意的 $i \geq 1$, 我们有:

$$0 = \text{Ext}_{\mathcal{X}}^{i+n}(T, V) \cong \text{Ext}_{\mathcal{X}}^i(T, U),$$

即 $U \in T^{\mathcal{X}^\perp}$. □

如果对于任意 $\mathcal{X}$ -正合序列:

$$0 \longrightarrow C_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_2 \longrightarrow C_1 \longrightarrow X \longrightarrow 0,$$

其中对于所有 i , 有 $C_i \in \mathcal{C}$, 则 $X \in \mathcal{C}$, 则称类 $\mathcal{C}$ 在 $n-\mathcal{X}$ -像下是封闭的. 与 $\text{Pres}_{\mathcal{X}}^n \mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}$ 是等价的. 显然, 类 $\text{Pres}_{\mathcal{X}}^1 T$ 在 $1-\mathcal{X}$ -像下是封闭的. 一般来说, 我们不知道 $\text{Pres}_{\mathcal{X}}^n T$ 在 $n-\mathcal{X}$ -像下是否封闭. 但是如果 $\text{Pres}_{\mathcal{X}}^n T = T^{\mathcal{X}^\perp}$, 那么根据引理 3.1.8, $\text{Pres}_{\mathcal{X}}^n T$ 在 $n-\mathcal{X}$ -像下是封闭的. 特别地, 如果 T 是 $n-\mathcal{X}$ -倾斜模, 则根据命题 3.1.7, $\text{Pres}_{\mathcal{X}}^n T$ 在 $n-\mathcal{X}$ -像下封闭.

引理 3.1.8 设 $\mathcal{A}$ 是一个阿贝尔范畴, 且 $T \in \mathcal{A}$.

- (1) 如果 $\text{Pres}_{\mathcal{X}}^n T = T^{\mathcal{X}^\perp}$, 那么 ${}_T \mathcal{X} = T^{\mathcal{X}^\perp}$ 在 $n-\mathcal{X}$ -像下是封闭的;
- (2) $\mathcal{X}-\dim T \leq n$ 当且仅当 $T^{\mathcal{X}^\perp}$ 在 $n-\mathcal{X}$ -像下是封闭的.

证明: (1) 由引理 3.1.3 (2), ${}_T \mathcal{X} = T^{\mathcal{X}^\perp}$, 由于:

$$\text{Pres}_{\mathcal{X}}^n(T^{\mathcal{X}^\perp}) = \text{Pres}_{\mathcal{X}}^n({}_T \mathcal{X}) = \text{Pres}_{\mathcal{X}}^n(T) \quad (\text{由命题 3.1.6 知}) = T^{\mathcal{X}^\perp},$$

$T^{\mathcal{X}^\perp}$ 在 $n-\mathcal{X}$ -像下是封闭的.

(2) 假设存在 $\mathcal{X}$ -正合序列:

$$M_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_1 \longrightarrow N \longrightarrow 0,$$

其中 $M_i \in T^{\mathcal{X}^\perp}$, 其中 $1 \leq i \leq n$, 设 $N_i = \ker(M_i \longrightarrow M_{i-1})$, 其中 $M_0 = N$.

通过维数转移, 我们可以得到对于任意的 i , 有: $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^{i+n}(T, N_n) \cong \text{Ext}_{\mathcal{X}}^i(T, N)$,

由于 $\mathcal{X}-\dim T \leq n$, $N \in T^{\mathcal{X}^\perp}$, 即 $T^{\mathcal{X}^\perp}$ 在 $n-\mathcal{X}$ -像下是封闭的.

反之, 对于任意的 $L \in \mathcal{A}$. 注意到范畴对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是可容许的平衡对, 我们有 L 的 $\mathcal{Y}$ -余分解:

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow Y_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow Y_{n-1} \longrightarrow L_n \longrightarrow 0,$$

其中, $Y_i \in \mathcal{Y}$, 并且它是 $\mathcal{X}$ -正合的. 由于 $\mathcal{Y} \subseteq T^{\mathcal{X}^\perp}$ 在 $n-\mathcal{X}$ -像下是封闭的, 我们可以得到 $L_n \in T^{\mathcal{X}^\perp}$. 通过维数转移, 我们得到对于任意 i , 有

$$0 = \text{Ext}_{\mathcal{X}}^{i+n}(T, L) \cong \text{Ext}_{\mathcal{X}}^i(T, L_n),$$

所以由[8, 引理 2.4]知: $\mathcal{X}\text{-dim } T \leq n$. □

最后, 我们给出本章的重要定理.

定理 3.1.9 (Bazzoni 型表示) 下列命题是等价的:

- (1) T 是 $n\text{-}\mathcal{X}$ -倾斜模;
- (2) $\text{Pres}_{\mathcal{X}}^n T = T^{\mathcal{X}^\perp}$.

证明: (1) $\Rightarrow$ (2) 由命题 3.1.7 知.

(2) $\Rightarrow$ (1) (i) 由引理 3.1.8 知, $\mathcal{X}\text{-dim } T \leq n$.

(ii) 显然, T 是 $\mathcal{X}$ -自正交的.

(iii) 对于任意 $X \in \mathcal{X}$, 存在 $\mathcal{X}$ -正合序列:

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow Y_{n-1} \longrightarrow Z \longrightarrow 0,$$

其中 $Y_i \in \mathcal{Y}$, 因为 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是可容许的平衡对. 所以可以得到: $\mathcal{Y} \subseteq T^{\mathcal{X}^\perp} = {}_T\mathcal{X}$,

根据命题 3.1.8, 我们有 $Z \in {}_T\mathcal{X}$.

因此, 根据引理 3.1.5, 存在 $\mathcal{X}$ -正合序列:

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow X \longrightarrow 0,$$

其中 $A \in {}_T\mathcal{X}$ 和 $B \in (\widetilde{\text{Add}_{\mathcal{X}} T})_n$. 很明显, 因为它是个 $\mathcal{X}$ -正合序列, 并且 $X \in \mathcal{X}$,

所以它是可裂的. 也就是: $B = A \oplus X$. 那么根据引理 3.1.4 的对偶, 我们得到了

$X \in \widetilde{\text{Add}_{\mathcal{X}} T}$. 因此, 根据 $n\text{-}\mathcal{X}$ -倾斜模的定义, 得到了 T 是 $n\text{-}\mathcal{X}$ -倾斜模. □

在本篇论文聚焦的领域中, 相对倾斜对象以及阿贝尔范畴的粘合是极为关键的研究要点. 其相关理论深邃复杂, 为深入探索, 诸多前沿成果可资借鉴, 感兴趣的读者具体可详细参阅参考文献[22-34], 这些文献从不同视角对二者展开剖析.

3.2 阿贝尔范畴中相对倾斜模和粘合的保持关系

设 $R(\mathcal{A}', \mathcal{A}, \mathcal{A}'')$ 是阿贝尔范畴的一个粘合, 即满足交换图:

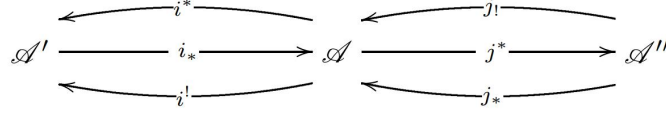


图 3-8

在本节中, 我们主要研究粘合中三个阿贝尔范畴之间的 $n-\mathcal{X}$ -倾斜模的保持关系. 在粘合 $R(\mathcal{A}', \mathcal{A}, \mathcal{A}'')$ 中, 我们可以从 $\mathcal{A}'$ 和 $\mathcal{A}''$ 中 $n-\mathcal{X}$ -倾斜模中得到 $\mathcal{A}$ 中 $n-\mathcal{X}$ -倾斜模. 相反, 从 $\mathcal{A}$ 中 $n-\mathcal{X}$ -倾斜模, 我们也可以分别得到 $\mathcal{A}'$ 和 $\mathcal{A}''$ 中 $n-\mathcal{X}$ -倾斜模. 下文出现的阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ (或 $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}''$), 我们假设它是 $R(\mathcal{A}', \mathcal{A}, \mathcal{A}'')$ 的一部分.

定理 3.2.1 (粘合中的倾斜对象诱导) 设 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是可容许的平衡对, 且 T 是 $\mathcal{A}$ 中 $n-\mathcal{X}$ -倾斜模.

- (1) 若 i^* 是正合函子, 且 $i_* i^*(T^{\mathcal{X}^\perp}) \subseteq T^{\mathcal{X}^\perp}$, 则 $i^* T$ 为 $\mathcal{A}'$ 中 $n-i^* \mathcal{X}$ -倾斜模.
- (2) 若 j^* 是忠实的, 且 $j_* j^*(T^{\mathcal{X}^\perp}) \subseteq T^{\mathcal{X}^\perp}$, 则 $j^* T$ 为 $\mathcal{A}''$ 中 $n-j^* \mathcal{X}$ -倾斜模.

证明: (1) 根据定理 2.2.7, 我们知道 $(i^* \mathcal{X}, i^* \mathcal{Y}) = (\mathcal{X}', \mathcal{Y}')$ 是可容许的平衡对. 注意到 T 是 $n-\mathcal{X}$ -倾斜模, 根据 $n-\mathcal{X}$ -倾斜模的定义, 我们得到对于任意的 $X_i \in \mathcal{X}$, 存在一个 $\mathcal{X}$ -正合序列:

$$0 \longrightarrow X_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_0 \longrightarrow T \longrightarrow 0,$$

由于 i^* 是正合函子, 因此存在下面的正合序列:

$$0 \longrightarrow i^* X_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow i^* X_1 \longrightarrow i^* X_0 \longrightarrow i^* T \longrightarrow 0,$$

所以上述正合序列是 $i^* T$ 的一个 $\mathcal{X}'$ -分解. 也就是说: $\mathcal{X}'\text{-dim } i^* T \leq n$.

因为 i^* 是正合函子, $i^* \mathcal{X} = \mathcal{X}'$, 所以对于任意的指标集 I , 我们都有:

$$\text{Ext}_{\mathcal{X}'}^{i \geq 1}(i^* T, i^* T^{(I)}) \cong \text{Ext}_{\mathcal{X}}^{i \geq 1}(T, i_* i^* T^{(I)}),$$

设复形 $A^\bullet$ 是 T 的一个 $\mathcal{X}$ -分解, 则 $i^* A^\bullet$ 是 $i^* T$ 的一个 $\mathcal{X}'$ -分解. 根据 $\text{Ext}_{\mathcal{X}'}^{i \geq 1}(-, -)$ 的定义, 上述同构成立.

因为 $i_* i^*(T^{\mathcal{X}^\perp}) \subseteq T^{\mathcal{X}^\perp}$ 和 $\text{Ext}_{\mathcal{X}'}^{i \geq 1}(i^* T, i^* T^{(I)}) \cong \text{Ext}_{\mathcal{X}}^{i \geq 1}(T, i_* i^* T^{(I)}) = 0$. 所以 $i^* T$ 是

$\mathcal{X}'$ – 自正交的.

对于任意的 $X \in \mathcal{X}$, 因为 T 是 $n - \mathcal{X}$ – 倾斜模, 所以存在一个 $\mathcal{X}$ – 正合序列:

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow T_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow T_n \longrightarrow 0,$$

其中 $T_i \in \text{Add} T$. 由于 i^* 是正合函子, 则序列:

$$0 \longrightarrow i^* X \longrightarrow i^* T_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow i^* T_n \longrightarrow 0,$$

是 $\mathcal{X}'$ – 正合的. 其中 $i^* T_0 \in \text{Add} i^* T$.

综上所述, $i^* T$ 是 $\mathcal{A}'$ 中 $n - i^* \mathcal{X}$ – 倾斜模.

(2) 证明与(1)相似. □

在上文中, 我们不知道定理 2.2.7 中定义的范畴对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是否是平衡对. 但如果这是平衡对, 那么我们有以下结论:

命题 3.2.2 设范畴对 $(\mathcal{X}', \mathcal{Y}')$ 和 $(\mathcal{X}'', \mathcal{Y}'')$ 分别是阿贝尔范畴 $\mathcal{A}'$ 和 $\mathcal{A}''$ 中的两个可容许的平衡对, 满足定理 2.2.7 中范畴对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是可容许的平衡对的定义. 如果 T' (或 T'') 是 $\mathcal{A}'$ (或 $\mathcal{A}''$) 中的部分 $n - \mathcal{X}'$ – 倾斜模 (或部分 $n - \mathcal{X}''$ – 倾斜模), 并且 i^* 是正合函子, 那么 $i_* T' \oplus j_! T''$ 是 $\mathcal{A}$ 中部分 $n - \mathcal{X}$ – 倾斜模.

证明: (1) 由于 T' 是部分 $n - \mathcal{X}'$ – 倾斜模, 对于任意的 $X'_i \in \mathcal{X}'$, 我们有以下 $\mathcal{X}'$ – 正合序列:

$$0 \longrightarrow X'_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow X'_0 \longrightarrow T' \longrightarrow 0, \quad (3.1)$$

将函子 i^* 应用于(3.1), 我们得到:

$$0 \longrightarrow i_* X'_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow i_* X'_0 \longrightarrow i_* T' \longrightarrow 0, \quad (3.2)$$

对于任意的 $X \in \mathcal{X}$, 将函子 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, -)$ 应用于(3.2), 我们得到:

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, i_* X'_n) \rightarrow \cdots \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, i_* X'_0) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, i_* T') \rightarrow 0, \quad (3.3)$$

因为 (i^*, i_*) 是伴随对, 所以我们有下面的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, i_* X'_n) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, i_* X'_0) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, i_* T') \longrightarrow 0 \\
 \downarrow \cong \qquad \qquad \qquad \downarrow \cong \qquad \qquad \qquad \downarrow \cong \\
 0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}'}(i^* X, X'_n) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}'}(i^* X, X'_0) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}'}(i^* X, T') \longrightarrow 0
 \end{array}, \quad (3.4)$$

图 3-9

注意到由定理 2.2.7 知 $i^* \mathcal{X} = \mathcal{X}'$. 在图 3-9 中, 因为(3.1)是 $\mathcal{X}'$ -正合序列, 所以第一行是正合的. 很容易通过 $\mathcal{X}$ 的定义来验证: $i_* \mathcal{X}' \subseteq \mathcal{X}$, 因此, (3.2)是 $i_* T'$ 的 $\mathcal{X}$ -分解, 即 $\mathcal{X}\text{-dim } i_* T' \leq n$. 因为 T'' 是部分 $n - \mathcal{X}''$ -倾斜模, 对于任意的 $X_i'' \in \mathcal{X}''$, 存在下面 $\mathcal{X}''$ -正合序列:

$$0 \longrightarrow X_n'' \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_0'' \longrightarrow T'' \longrightarrow 0, \quad (3.5)$$

对于(3.5)应用函子 $j_!$, 我们得到:

$$0 \longrightarrow j_! X_n'' \longrightarrow \cdots \longrightarrow j_! X_0'' \longrightarrow j_! T'' \longrightarrow 0, \quad (3.6)$$

进一步, 对于任意的 $Y \in \mathcal{Y}$, 我们可以得到:

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(j_! T'', Y) \rightarrow \cdots \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(j_! X_0'', Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(j_! X_n'', Y) \rightarrow 0, \quad (3.7)$$

由于 $(j_!, j^*)$ 是伴随对, 我们可以得到以下交换图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(j_! T'', Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(j_! X_0'', Y) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(j_! X_n'', Y) \longrightarrow 0 \\
 \downarrow \cong \qquad \qquad \qquad \downarrow \cong \qquad \qquad \qquad \downarrow \cong \\
 0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}''}(T'', j^* Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}''}(X_0'', j^* Y) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}''}(X_n'', j^* Y) \longrightarrow 0
 \end{array}, \quad (3.8)$$

图 3-10

通过 $\mathcal{X}$ 的定义和命题 2.1.4(4)知: $j_! \mathcal{X}'' \subseteq \mathcal{X}$. 通过定理 2.2.5 知: $j^* \mathcal{Y} = \mathcal{Y}''$.

因此图 3-10 中的第二行是正合的, 因为 $(\mathcal{X}'', \mathcal{Y}'')$ 是一个可容许的平衡对. 因此(3.6)是 $j_! T''$ 的一个 $\mathcal{X}$ -分解, 即 $\mathcal{X}\text{-dim } j_! T'' \leq n$. 因此, $\mathcal{X}\text{-dim } j_! T'' \oplus i_* T' \leq n$.

(2) 首先, 下述同构成立:

$$\text{Ext}_{\mathcal{X}}^{i \geq 1}(i_* T', (i_* T')^{(I)}) \cong \text{Ext}_{\mathcal{X}'}^{i \geq 1}(i^* i_* T', T'^{(I)}) \cong \text{Ext}_{\mathcal{X}'}^{i \geq 1}(T', T'^{(I)}) = 0,$$

第一个同构成立, 因为 (i^*, i_*) 是伴随对, 它们是正合函子并且 $i^* \mathcal{X} = \mathcal{X}'$. 根据命题

2.1.4 和 $i^* i_* \cong 1_{\mathcal{A}'}$ 知第二个同构成立.

其次，下述同构成立：

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{X}}^{i \geq 1}(j_! T'', (j_! T'')^{(I)}) \cong \mathrm{Ext}_{\mathcal{X}''}^{i \geq 1}(T'', j^* j_! T''^{(I)}) \cong \mathrm{Ext}_{\mathcal{X}''}^{i \geq 1}(T'', T''^{(I)}) = 0.$$

根据命题 2.1.4(4)知函子 $j_!$ 也是正合的. 因此, 第一个同构成立. 由命题 2.1.4(4)知, 下述同构成立: $\mathrm{Ext}_{\mathcal{X}}^{i \geq 1}(i_* T', (j_! T'')^{(I)}) \cong \mathrm{Ext}_{\mathcal{X}''}^{i \geq 1}(T', i^! j_! T''^{(I)}) = 0.$

最后, 下述同构成立: $\mathrm{Ext}_{\mathcal{X}}^{i \geq 1}(j_! T'', (i_* T')^{(I)}) \cong \mathrm{Ext}_{\mathcal{X}''}^{i \geq 1}(T'', j^* i_* T'^{(I)}) = 0.$ 因此 $i_* T' \oplus j_! T''$ 是 $\mathcal{X}$ -自正交的.

综上所述, $i_* T' \oplus j_! T''$ 是 $\mathcal{A}$ 中部分 n - $\mathcal{X}$ -倾斜模. □

事实上, 从上面的证明中, 我们可以得到 $i_* T'$ 和 $j_! T''$ 是 $\mathcal{A}$ 中部分 n - $\mathcal{X}$ -倾斜模.

定理 3.2.3 在定理 2.2.5 的条件下, 如果 T'' 是 $\mathcal{A}''$ 中 n - $\mathcal{X}''$ -倾斜模和 $j_!$ 是正合的, 那么 $j_! T''$ 是 $\mathcal{A}$ 中 n - $\mathcal{U}$ -倾斜模, 其中 $(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = (j_! j^* \mathcal{X}, j_* j^* \mathcal{Y}).$

证明: 由定理 2.2.5 可知, $(j_! j^* \mathcal{X}, j_* j^* \mathcal{Y})$ 是可容许的平衡对.

(1) 由于 T'' 是 $\mathcal{A}''$ 中 n - $\mathcal{X}''$ -倾斜模, 因此存在如下 $\mathcal{X}''$ -正合序列:

$$0 \longrightarrow X''_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow X''_0 \longrightarrow T'' \longrightarrow 0, \quad (3.9)$$

其中任意 $X''_i \in \mathcal{X}''$. 对于(3.9)应用函子 $j_!$, 我们可以得到:

$$0 \longrightarrow j_! X''_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow j_! X''_0 \longrightarrow j_! T'' \longrightarrow 0, \quad (3.10)$$

对于任意 $X \in \mathcal{X}$, 由于 $j_!$ 是满忠实的, 我们可以得到以下的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}'}(j_! j^* X, j_! X''_n) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}'}(j_! j^* X, j_! X''_0) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}'}(j_! j^* X, j_! T'') \longrightarrow 0 \\ \downarrow \cong \qquad \qquad \qquad \downarrow \cong \qquad \qquad \qquad \downarrow \cong \\ 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}'}(j^* X, X''_n) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}'}(j^* X, X''_0) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}'}(j^* X, T'') \longrightarrow 0 \end{array}, \quad (3.11)$$

图 3-11

其中 $j^* \mathcal{X} = \mathcal{X}''$. 从(3.9)中, 我们知道图 3-11 中的第二行是正合的, 因此, 第一行也是正合的. 因此, 从(3.10) 知: $\mathcal{U}\text{-dim } j_! T'' \leq n.$

(2) 类似于命题 3.2.2 的证明, $j_! T''$ 是 $\mathcal{U}$ -自正交的.

(3) 因为 T'' 是 $n-\mathcal{X}''$ -倾斜模, 对于任意 $X \in \mathcal{X}$, $j^*X \in \mathcal{X}''$. 则存在一个 $\mathcal{X}''$ -正合序列:

$$0 \longrightarrow j^*X \longrightarrow T_0'' \longrightarrow \cdots \longrightarrow T_n'' \longrightarrow 0,$$

其中 $T_i'' \in \text{Add} T''$. 对于上面的正合序列应用函子 $j_!$, 我们可以得到:

$$0 \longrightarrow j_!j^*X \longrightarrow j_!T_0'' \longrightarrow \cdots \longrightarrow j_!T_n'' \longrightarrow 0, \quad (3.12)$$

类似于(1)的讨论, (3.12)是我们想要的.

综上所述, 我们称 $j_!T''$ 是 $n-\mathcal{U}$ -倾斜模. □

第 4 章 结论与展望

4.1 结论

在第二章主要给出共（反）变有限自子范畴、平衡对在阿贝尔范畴粘合中的保持关系，具体如下：

1. 设 $R(\mathcal{A}', \mathcal{A}, \mathcal{A}'')$ 是阿贝尔范畴的一个粘合，我们有以下命题：

$$(1) \quad i^* j_! = 0 \text{ 和 } i^! j_* = 0;$$

(2) i^* 和 $j_!$ 是右正合函子， $i^!$ 和 j_* 是左正合函子， i_* 和 j^* 是正合函子；

(3) 自然变换：

$$i^* i_* \longrightarrow \text{Id}_{\mathcal{A}'}, \text{Id}_{\mathcal{A}'} \longrightarrow i^! i_*, j^* j_* \longrightarrow \text{Id}_{\mathcal{A}'}, \text{Id}_{\mathcal{A}'} \longrightarrow j^* j_!$$

是自然同构；

(4) 如果函子 i^* 是正合的，那么 $i^! j_! = 0$ 和 $j_!$ 是正合的；如果函子 $i^!$ 是正合的，那么 $i^* j_* = 0$ 和 j_* 是正合的。

2. 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是两个阿贝尔范畴，设：

$$F: \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}, G: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}, H: \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$$

是加法函子，使得 (F, G, H) 是伴随三元组。

3. 如果阿贝尔范畴 $\mathcal{B}$ 中的 $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 是平衡对，则范畴对 $(F(\mathcal{U}), H(\mathcal{V}))$ 是阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 中的平衡对。另外，如果函子 G 是忠实的且阿贝尔范畴 $\mathcal{B}$ 中的 $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 是可容许的，那么阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 中的范畴对 $(F(\mathcal{U}), H(\mathcal{V}))$ 也是可容许的。

4. 设 $R(\mathcal{A}', \mathcal{A}, \mathcal{A}'')$ 是阿贝尔范畴中的一个粘合。设范畴对 $(\mathcal{X}', \mathcal{Y}')$ 和范畴对 $(\mathcal{X}'', \mathcal{Y}'')$ 分别是 $\mathcal{A}'$ 和 $\mathcal{A}''$ 中的平衡对，令：

$$\mathcal{X} = \{X \in \mathcal{A} \mid i^* X \in \mathcal{X}', j^* X \in \mathcal{X}''\},$$

$$\mathcal{Y} = \{Y \in \mathcal{A} \mid i^! Y \in \mathcal{Y}', j^! Y \in \mathcal{Y}''\}$$

则下列陈述命题成立：

$$(1) \quad i^* \mathcal{X} = \mathcal{X}', i^! \mathcal{Y} = \mathcal{Y}', j^* \mathcal{X} = \mathcal{X}'' \text{ 和 } j^! \mathcal{Y} = \mathcal{Y}'';$$

(2) $(j_! j^* \mathcal{X}, j_* j^* \mathcal{Y})$ 是一个平衡对。如果范畴对 $(\mathcal{X}'', \mathcal{Y}'')$ 是可容许的，且 j^* 是忠实的，那么 $(j_! j^* \mathcal{X}, j_* j^* \mathcal{Y})$ 也是可容许的；

- (3) 如果 $(\mathcal{X}', \mathcal{Y}')$ 是有限维的且 j^* 是忠实的, 那么 $(j_! j^* \mathcal{X}, j_* j^* \mathcal{Y})$ 是有限维的.
5. 设范畴对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 中的一个平衡对, 且函子 j^* 是忠实的.
- (1) $(i^* \mathcal{X}, i^! \mathcal{Y})$ 和 $(j^* \mathcal{X}, j^* \mathcal{Y})$ 分别是阿贝尔范畴 $\mathcal{A}'$ 和阿贝尔范畴 $\mathcal{A}''$ 中的平衡对;
- (2) 如果范畴对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是可容许的, 那么分别诱导出的阿贝尔范畴 $\mathcal{A}'$ 和 $\mathcal{A}''$ 中平衡对 $(i^* \mathcal{X}, i^! \mathcal{Y})$ 和 $(j^* \mathcal{X}, j^* \mathcal{Y})$ 也是可容许的;
- (3) 设范畴对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是有限维的. 如果 $j_! j^* \mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}$, 那么平衡对 $(j^* \mathcal{X}, j^* \mathcal{Y})$ 是有限维的. 另外, 若 $\mathcal{X} = i_* i^* \mathcal{X}$, 则 $(i^* \mathcal{X}, i^! \mathcal{Y})$ 也是有限维的.

在第三章中, 利用相对同调的方法首先介绍 $n-\mathcal{X}$ -倾斜模和部分 $n-\mathcal{X}$ -倾斜模的定义, 类似于 Bazzni 关于 n -倾斜模的等价刻画, 给出了 $n-\mathcal{X}$ -倾斜模的等价刻画, 具体结论如下:

1. 给出了 $n-\mathcal{X}$ -倾斜模和部分 $n-\mathcal{X}$ -倾斜模的定义.
2. 设 T 为 $\mathcal{X}$ -自正交的. 可以得到:
 - (1) ${}_T \mathcal{X}$ 在 $\mathcal{X}$ -扩张和直和下是封闭的;
 - (2) $\widehat{\text{Add}}_{\mathcal{X}} T = {}_T \mathcal{X} \cap T^{\mathcal{X}^\perp}$. 特别地, $\widehat{\text{Add}}_{\mathcal{X}} T$ 在直和下是封闭的.
3. 设 T 为 $\mathcal{X}$ -自正交, 那么 $\text{Pres}_{\mathcal{X}}^n({}_T \mathcal{X}) = \text{Pres}_{\mathcal{X}}^n(T)$.
4. 如果 T 是 $n-\mathcal{X}$ -倾斜模, 则下列命题是等价的:
 - (1) $U \in T^{\mathcal{X}^\perp}$;
 - (2) $U \in {}_T \mathcal{X}$;
 - (3) $U \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^n(T)$.
5. 下列命题是等价的:
 - (1) T 是 $n-\mathcal{X}$ -倾斜模;
 - (2) $\text{Pres}_{\mathcal{X}}^n T = T^{\mathcal{X}^\perp}$.
6. 设范畴对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是可容许的平衡对, 且 T 是 $\mathcal{A}$ 中 $n-\mathcal{X}$ -倾斜模.
 - (1) i^* 是正合函子, 且 $i_* i^*(T^{\mathcal{X}^\perp}) \subseteq T^{\mathcal{X}^\perp}$, 则 $i^* T$ 为 $\mathcal{A}'$ 中 $n-i^* \mathcal{X}$ -倾斜模.
 - (2) 若 j^* 是忠实的, 且 $j_* j^*(T^{\mathcal{X}^\perp}) \subseteq T^{\mathcal{X}^\perp}$, 则 $j^* T$ 为 $\mathcal{A}''$ 中 $n-j^* \mathcal{X}$ -倾斜模.

7. 设范畴对 $(\mathcal{X}', \mathcal{Y}')$ 和 $(\mathcal{X}'', \mathcal{Y}'')$ 分别是阿贝尔范畴 $\mathcal{A}'$ 和 $\mathcal{A}''$ 中的两个可容许的平衡对, 满足第二章中定理 2.2.5 的范畴对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是可容许的平衡对的定义. 如果 T' (或 T'') 是 $\mathcal{A}'$ (或 $\mathcal{A}''$) 中的部分 $n - \mathcal{X}' -$ 倾斜模 (或部分 $n - \mathcal{X}'' -$ 倾斜模), 并且 i^* 是正合函子, 那么 $i_* T' \oplus j_* T''$ 是 $\mathcal{A}$ 中部分 $n - \mathcal{X} -$ 倾斜模.

4.2 展望

本文首次系统研究阿贝尔范畴粘合中平衡对的保持关系, 突破传统单一范畴内的研究局限, 建立了不同范畴间平衡对结构的双向诱导机制, 为分析范畴间的结构传递与协同演化提供了新的理论框架. 结合相对同调理论与可容许平衡对, 提出相对倾斜模的新概念, 并给出相对倾斜模的等价刻画, 相较于经典倾斜模理论, 该定义更适配于粘合场景, 丰富了倾斜对象的研究维度. 在已有平衡对保持关系研究的基础上, 进一步揭示相对倾斜模在阿贝尔范畴粘合中的保持规律. 本文围绕阿贝尔范畴粘合中的平衡对与相对倾斜对象展开研究, 取得了一系列成果. 然而, 该领域仍存在诸多有待深入探索的方向, 蕴含着丰富的研究潜力.

在平衡对方面, 尽管已对其在粘合中的关系进行了研究, 但仍有未解决的关键问题. 目前仅考虑了给定平衡对构造新平衡对的部分情形, 未来可尝试探索更多的构造方法, 从不同角度出发, 挖掘粘合中平衡对之间更丰富、更深入的联系, 比如研究在特定条件下, 如何通过对已有平衡对进行更复杂的操作得到新的平衡对, 以及这些新平衡对所具有的独特性质.

相对倾斜对象是本文基于 Bazzni 关于 $n -$ 倾斜模引入的重要概念, 其研究也有广阔的拓展空间. 虽然已给出相对倾斜对象的刻画及在粘合中的一些关系, 但对于不同类型的范畴, 相对倾斜对象的具体结构和性质可能存在差异. 后续可针对外三角范畴, 逗号范畴等进行详细的探究.

参考文献

- [1] 佟文廷. 同调代数引论[M]. 高等教育出版社, 1998.
- [2] MacPherson R, Vilonen K. Elementary construction of perverse sheaves. *Inventiones Mathematicae*, 1986, 84: 403-436.
- [3] Franjou V, Pirashvili T. Comparison of abelian categories recollements. *Documenta Mathematicae*, 2004, 9: 41-56.
- [4] Psaroudakis C, Vitoria J. Recollements of module categories. *Applied Categorical Structures*, 2014, 22: 579-593.
- [5] Psaroudakis C. Homological theory of recollements of abelian categories. *Journal of Algebra*, 2014, 398: 63-110.
- [6] Chen J M. Cotorsion pairs in a recollement of triangulated categories. *Communications in Algebra*, 2013, 41: 2903-2915.
- [7] Dugas A S. Representation dimension as a relative homological invariant of stable equivalence, *Algebra. Represent. Theory* 10, 223-240.
- [8] Chen X W. Homotopy equivalences induced by balanced pairs[J]. *Journal of Algebra*, 2010, 324(10): 2718-2731.
- [9] Zheng Y F. Balanced pairs induce recollements. *Communications in Algebra*, 2017, 45: 4238-4245.
- [10] Angeleri-Hügel L, Coelho F U. Infinitely generated tilting modules of finite projective dimension. *Forum Mathematics*, 2001, 13: 239-250.
- [11] Bazzoni S. A characterization of n -cotilting and n -tilting modules. *Journal of Algebra*, 2004, 273: 359-372.
- [12] Wei J Q: n -Star modules and n -tilting modules. *Journal of Algebra*, 2005, 283: 711-722.
- [13] Enochs E E, Jenda O M G. *Relative Homological Algebra*, de Gruyter Expositions in Mathematics, 2000, Vol. 30 (Walter de Gruyter, Berlin).
- [14] Gillespie J. Gorenstein complexes and recollements from cotorsion pairs. *Advances in Mathematics*, 2016, 291, 859-911.
- [15] Krause H. The stable derived category of a Noetherian scheme. *Compositio*

Mathematica, 2005, 141: 1128-1162.

[16] Holm H. Gorenstein homological dimensions. Journal of Pure and Applied Algebra, 2004, 189, 167-193.

[17] Zareh-Khoshchreh F, Asgharzadeh M, Divaani-Aazar K. Gorenstein homology, relative pure homology and virtually Gorenstein rings. Journal of Pure and Applied Algebra, 2014, 218: 2356-2366.

[18] Lin Y N, Wang M X. From recollement of triangulated categories to recollement of abelian categories. Science China Mathematics, 2010, 53(4): 1111-1116.

[19] Auslander M, Reiten I. Homologically finite subcategories. Representations of algebras and related topics (Kyoto, 1990), 1-42, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 1992, 168, Cambridge Univ. Press, Cambridge .

[20] Yan L, Li W, Ouyang B Y. Gorenstein cotilting and tilting modules. Communications in Algebra, 2016, 44: 591-603.

[21] Auslander M, Solberg Ø. Relative homology and representation theory I. Relative homology and homologically finite subcategories. Communications in Algebra, 1993, 21: 2995-3031.

[22] Auslander M, Reiten I. Applications of contravariantly finite subcategories. Advances in Mathematics, 1991, 86: 111-152.

[23] Ma X, Huang Z Y. Torsion pairs in recollements of abelian categories. Frontiers of Mathematics in China, 2018, 13(4): 875-892.

[24] Ma X, Huang Z Y. On gluing tilting modules (Chinese). Science China Mathematics, 2018, 11: 1729-1738.

[25] Psaroudakis C, Skartsæterhagen Ø, Solberg Ø. Gorenstein categories, singular equivalences and finite generation of cohomology rings in recollements. Transactions of the American Mathematical Society, Series B, 2014, 1: 45-95.

[26] Psaroudakis C, Vitória J. Recollements of module categories, Applied Categorical Structures, 2014, 579-593.

[27] Parshall B, Scott L. Derived categories, quasi-hereditary algebras, and algebraic groups, Department of Mathematics and Statistics, 1989, Notes 3, 1-111.

[28] Hochschild G. Relative homological algebra[J]. Transactions of the American

Mathematical Society, 1956, 82(1): 246-269.

[29] L Angeleri Hügel, S Koenig, Q Liu. Recollements and tilting objects, Journal of Pure and Applied Algebra 215, 2011, 420-438.

[30] L Happel. Partial tilting modules and recollement, in Proceedings of the International Conference on Algebra, 1989, Part 2, Novosibirsk.

[31] E E Enochs, O M G. Jenda. Gorenstein injective and projective modules, Mathematische Zeitschrift. 220, 1995, 611-633.

[32] Li H H, Wang J F, Huang Z Y. Applications of balanced pairs[J]. Science China Mathematics, 2016, 59: 861-874.

[33] P Gabriel. Des Catégorieslié Abennes, Bulletin of the Société de Mathématiques. France 90, 1962, 323-448.

[34] Liu, Yu, Panyue Zhou. Gluing n -tilting and n -cotilting subcategories. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society 46.1, 2023.

攻读硕士期间取得的学术成果

- [1] Zhang P , Liu M , Liu D ,et al. Balanced Pairs and Relative Tilting Objects in Recollements of Abelian Categories[J]. Acta Mathematica Sinica, English Series:1-17. DOI:10.1007/s10114-025-3331-2.

致谢

当我回首这段充满挑战与成长的研究生旅程，满心的感恩之情如潮水般翻涌，千言万语都难以道尽那些珍贵的人和事对我的滋养与助力。

我要将最诚挚、最深切的谢意敬献给我的导师张培雨老师。若不是当年导师的引荐，我或许从未想过自己会踏上读研这条逐梦之路。那看似偶然的一次交流，导师眼中闪烁的学术光芒和对专业前景的热忱描绘，点燃了我内心深处潜藏的求知火焰，让我毅然决然地选择投身学术的怀抱，开启这一场意义非凡的修行。

入学伊始，面对高深晦涩的专业知识，我时常感到迷茫无措，犹如置身迷雾森林。是导师，一次次耐心地为我拨开迷雾，指明方向。每一次课题研讨，导师总能以其深厚的学术造诣，精准剖析问题关键，引导我从不同视角去探索代数的奥秘。不仅如此，您严谨的治学态度也无时无刻不在影响着我。那些为了论证一个定理的严谨性，反复推敲每一个步骤的日夜；那些为了确保论文中每一个数学符号、每一句阐述都精准无误，与我一起字斟句酌的时刻，都让我深刻领悟到做学问容不得半点马虎。在您的言传身教下，我逐渐养成了严谨、细致的科研习惯，这将伴随我一生，成为我在学术道路上不断攀登的基石。

还要感谢数理与金融学院，宛如一座知识的港湾，为我提供了优越的学习条件与全方位的支持，让我这叶学术扁舟得以安稳航行。学院还精心组织各类学术讲座与交流活动，国内外专家学者纷至沓来，拓宽了我的学术视野，让我得以站在巨人的肩膀上眺望远方。而每当我遇到学业、生活上的难题，学院的辅导员、学生秘书、行政老师们总是第一时间伸出援手，帮我协调资源、排忧解难，让我能心无旁骛地专注于学业精进。最后要感谢我的父母对我的支持和生活上的帮助。

纸短情长，这一程山水走来，我将带着这份感恩，铭记每一份善意与帮助，未来无论身处何方、所事何业，都以不懈的努力回馈所有厚爱，让这份温暖在岁月长河中绵延流淌，熠熠生辉。

刘梦慧

2025年3月