

分类号: F840.67

单位代码: 10363

密 级: 公开

学 号: 2221020102

题目: 基于 CEV 模型考虑随机消费和随机利率的  
最优投资策略

英文并列

题目: Optimal Investment Strategy with Random  
Consumption and Random Interest Rate under the CEV  
Model

学生姓名: 卢康威

指导教师: 夏登峰 教授

专 业: 数学

研究方向: 最优投资策略

答辩时间: 2025 年 5 月 14 日

## 安徽工程大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：我恪守学术道德，崇尚严谨学风。所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已明确注明和引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品及成果的内容。论文为本人亲自撰写，我对所写的内容负责，并完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

学位论文作者签名：书康威

日期：2025 年 5 月 14 日

## 安徽工程大学学位论文版权使用授权书

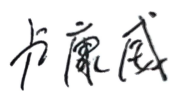
学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅或借阅。本人授权可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保密☐，在 \_\_\_\_ 年解密后适用本版权书。

本学位论文属于

不保密☒。

学位论文作者签名：



指导教师签名：



日期： 2025 年 5 月 14 日

日期： 2025 年 5 月 14 日

## 基于 CEV 模型考虑随机消费和随机利率的最优投资策略

### 摘 要

随着全球金融市场和社会经济的快速发展,人们财富意识的不断增强,投资者对于投资的需求也日益多样化.不同投资者有着不同的风险偏好、投资目标和投资期限.因此需要针对不同类型的投资者,提供相应的最优投资策略,使得最优投资策略方向的研究愈发重要.本文聚焦随机利率与随机消费双重不确定性下的动态资产配置问题,强化对现实复杂金融环境的刻画.二者协同作用加剧投资组合的风险交织,传统模型难以捕捉其非线性关联效应.

首先,为了研究在随机消费和随机利率情形下,不同因素对最优投资策略的影响,选择基于 CEV ( Constant Elasticity of Variance ) 模型,并在 CARA ( Constant Absolute Risk Aversion ) 效用函数下,利用对偶方法、Legendre 变换和动态规划原理,得到终端财富期望效用最大化问题的最优投资策略.同时,通过数值模拟说明随机利率、随机消费等参数对最优投资策略的影响.

其次,为了进一步研究在随机消费和随机利率情形下,通胀因素对最优策略的影响,引入通胀因素以反映实际经济环境中的不确定性,构建了一个综合考虑三种关键因素的新数学模型.通过运用动态规划和随机控制理论,我们求解了投资者在面临随机消费、利率波动以及

通胀压力下的最优投资策略. 同时, 通过数值模拟说明通胀因素等参数对最优投资策略的影响.

最后, 我们对全文进行总结, 以及对以后问题研究的展望.

**关键词:** 随机利率, 随机消费, HJB 方程, CEV 过程, CARA 效用, 通胀风险

# Optimal Investment Strategy with Random Consumption and Random Interest Rate under the CEV Model

## ABSTRACT

With the rapid development of global financial markets and socio-economic conditions, there is a continuous increase in people's awareness of wealth, leading to a growing diversification of investment needs among investors. Different investors have varying risk preferences, investment objectives, and investment horizons. Therefore, it is essential to provide corresponding optimal investment strategies for different types of investors, which makes the research on the direction of optimal investment strategies increasingly important. This paper focuses on the dynamic asset allocation problem under the dual uncertainties of stochastic interest rates and stochastic consumption, enhancing the depiction of the complex real-world financial environment. The synergistic effect of these two factors intensifies the risk interplay within investment portfolios, while traditional models struggle to capture due to their nonlinear correlation effects.

Firstly, to study the impact of different factors on the optimal investment strategy under the circumstances of stochastic consumption

and stochastic interest rates, we choose the CEV ( Constant Elasticity of Variance ) model and utilize the CARA ( Constant Absolute Risk Aversion ) utility function. By employing the duality method, Legendre transformation, and principles of dynamic programming, we derive the optimal investment strategy that maximizes the expected utility of terminal wealth. Additionally, numerical simulations are used to illustrate the influence of parameters such as stochastic interest rates and stochastic consumption on the optimal investment strategy.

Secondly, to further investigate the impact of inflation on the optimal strategy under the conditions of stochastic consumption and stochastic interest rates, we introduce the inflation factor to reflect the uncertainties in the actual economic environment. This leads to the construction of a new mathematical model that comprehensively considers these three key factors. By applying dynamic programming and stochastic control theory, we solve for the optimal investment strategy of investors facing stochastic consumption, interest rate fluctuations, and inflationary pressures. Numerical simulations are also provided to demonstrate the influence of inflation and other parameters on the optimal investment strategy.

Lastly, we summarize the entire paper and offer prospects for future research directions.

KEY WORDS: Random Interest Rates, Random Consumption, HJB Equation, CEV Process, CARA Utility, Inflation Risk

# 目录

|                                              |     |
|----------------------------------------------|-----|
| 摘 要 .....                                    | I   |
| ABSTRACT .....                               | III |
| 目录 .....                                     | VI  |
| 第 1 章 绪 论 .....                              | 1   |
| 1.1 选题背景及其意义 .....                           | 1   |
| 1.2 国内外研究现状 .....                            | 2   |
| 1.3 论文创新点 .....                              | 5   |
| 1.4 论文内容和安排 .....                            | 6   |
| 第 2 章 基础知识介绍 .....                           | 7   |
| 2.1 随机利率模型 .....                             | 7   |
| 2.2 通胀风险 .....                               | 8   |
| 2.3 风险资产模型 .....                             | 8   |
| 2.4 效用函数 .....                               | 9   |
| 第 3 章 基于 CEV 模型考虑随机消费和随机利率的最优投资策略 .....      | 10  |
| 3.1 建立模型 .....                               | 10  |
| 3.2 HJB 方程和最优投资策略 .....                      | 11  |
| 3.3 数值分析 .....                               | 21  |
| 3.4 结论 .....                                 | 23  |
| 第 4 章 基于 CEV 模型考虑随机消费、随机利率和通胀风险的最优投资策略 ..... | 24  |
| 4.1 模型建立 .....                               | 24  |
| 4.2 HJB 方程和最优投资策略 .....                      | 26  |

|                 |    |
|-----------------|----|
| 4.3 数值分析 .....  | 33 |
| 4.4 结论 .....    | 35 |
| 第5章 总结和展望 ..... | 36 |
| 参考文献 .....      | 37 |
| 硕士期间发表的论文 ..... | 41 |
| 致 谢 .....       | 42 |

## 第 1 章 绪 论

### 1.1 选题背景及其意义

随着全球金融市场和社会经济的快速发展,人们财富意识的不断增强,投资者对于投资的需求也日益多样化.不同投资者有着不同的风险偏好、投资目标和投资期限.因此需要针对不同类型的投资者,提供相应的最优投资策略,使得最优投资策略方向的研究愈发重要.随着金融理论的不完善和发展,为研究最优投资策略提供了理论基础和方法支持.同时,随着信息技术的发展和金融工程的兴起,投资技术和工具不断更新和革新.高频交易、量化投资、人工智能等新技术的应用,为投资者提供了更多的投资选择和工具,也为研究最优投资策略提供了新的研究方向和挑战.在这个背景下,研究最优投资策略方向成为了一个重要议题.投资者希望通过科学的方法和有效的策略来获取更高的投资收益,降低投资风险,实现财富增值.

在金融领域中,随机利率是一个重要的研究方向.由于市场风险和经济变化等因素的存在,利率的波动具有随机性.研究随机利率对投资策略的影响,可以帮助投资者更好地制定风险管理策略,提高投资效益.同时,随机消费是另一个与金融相关的重要因素.消费决策对个人和家庭的财富积累以及宏观经济的稳定性都具有重要影响.因此,将随机消费因素考虑进投资策略中,可以更准确地评估风险和收益,从而制定出更为合理和优化的投资决策.综合考虑随机消费和随机利率的影响因素,可以建立基于 CEV 模型的最优投资策略.CEV 模型是金融领域中常用的对资产价格和收益进行建模的方法之一,可以较好地描述价格波动的特征.通过结合随机消费和随机利率,可以更准确地建立投资组合,提高投资者的财富增长速度,降低风险敞口.因此,本论文的研究背景和意义在于探讨基于 CEV 模型考虑随机消费和随机利率的最优投资策略,从而提供一种更准确和有效的投资决策方法,并为金融领域相关研究提供新的思路和方法.

## 1.2 国内外研究现状

最优投资策略问题是投资组合管理中的一个重要问题,在过去的几十年里,研究者们已经对随机消费和随机利率下的最优投资策略进行了广泛的探索.以经典的 Merton 模型为基础,许多学者引入了随机消费和随机利率,以研究个人投资行为与经济环境之间的联系. Merton<sup>[1]</sup>利用随机控制方法研究了这一问题,并给出了一些解析解.紧接着在 Merton<sup>[2]</sup>的模型中,假设投资者在风险资产和无风险资产之间分配财富,并进一步寻找一个最优消费率,以最大化对消费的贴现效用的总期望.受前人文章启发,许多学者对最优投资问题的推广和应用作了大量的研究. Kwak<sup>[3]</sup>研究了家庭在投资组合与消费选择中的最优决策问题,通过采用鞅方法,成功推导出了值函数的具体形式以及最优投资策略的解析解. Arregui 和 Vázquez<sup>[4]</sup>关注具有比例交易费用的最优投资问题,并给出了最优投资问题的数值解. 盛积良<sup>[5]</sup>研究了最低财富约束条件下,构建了一个包含隐性激励机制的动态投资组合模型,旨在分析最低财富约束与隐性激励对机构投资策略的联合影响.通过模型推导与数值分析,揭示了这两类约束条件对投资决策行为的交互作用及其经济意义. 林祥<sup>[6]</sup>在连续时间框架下,以相对收益为考量,研究了两家风险厌恶型机构投资者之间的最优投资选择博弈问题.通过构建博弈模型并求解均衡策略,分析了双方在竞争环境下的投资决策行为及其交互影响.

上述的这些模型中大多数只涉及常数利率.然而,在真实的市场中,利率不是一个常数,而是一个有波动的过程.利率波动也是市场风险的重要来源.此外,利率是影响各种金融资产价格的关键宏观因素.因此,如果在最优投资问题中仅仅将利率简化为常数,可能会低估投资组合管理中的某些风险,导致资产配置的巨大误差.因此,我们有必要在投资问题模型中引入随机利率.

关于随机利率方面的研究,1977 年 Vasicek<sup>[7]</sup>提出了一个随机利率模型 O-U (Ornstein-Uhlenbeck) 过程来描述利率动态变化过程.紧接着,在 1999 年 Sørensen<sup>[8]</sup>在 Vasicek 期限结构模型适用的完整市场环境中投资股票和债券,提供了一个跨期投资问题的解决方案.李晋枝<sup>[9]</sup>在经典破产模型的基础上,引入随机利率因素,构建了一种更为一般化的破产概率模型.该模型能够更准确地反映现实金融环境中的不确定性,从而使得破产概率的计算结果更具实际参考价值.南江霞和董立刚<sup>[10]</sup>对随机利率环境下的消费选择问题,构建了相应的消费模型,并

采用随机模拟与遗传算法相结合的数值方法进行求解. 通过仿真分析, 得到了消费者在随机利率条件下的最优消费路径及其对应的最优消费效应, 为理解消费者行为提供了新的量化视角. 刘富兵和刘海龙<sup>[11]</sup>则在随机利率环境和随机收益保证的双重约束下, 研究了基金经理的最优投资组合决策问题. 通过引入鞅方法, 成功推导出最优投资策略的显式解析解. 夏迪和顾孟迪<sup>[12]</sup>在引入交易成本的基础上, 分别研究了固定利率与随机利率两种市场环境下的最优投资比例问题. 通过构建相应的优化模型并求解, 得到了不同利率假设下的最优资产配置策略. 郭文旌和李潇俊<sup>[13]</sup>采用 Vasicek 模型刻画随机利率的动态变化, 并在此基础上研究了最优投资消费与寿险购买的综合决策问题. 通过运用 Legendre 变换方法, 成功推导出最优投资消费策略与寿险购买策略的显式解析解. He 和 Chen<sup>[14]</sup>基于 CEV 过程与随机利率模型, 研究了最优投资策略的构建问题. 通过理论分析与数值模拟, 深入探讨了随机利率对投资决策行为的影响机制, 揭示了利率随机性在资产配置中的重要作用. 李倩<sup>[15]</sup>在随机利率环境下, 通过引入远期测度变换、傅里叶逆变换以及 Feynman-Kac 定理, 推导出了欧式期权定价的级数展开公式. 韩笑<sup>[16]</sup>研究了随机利率下的期权定价. 寇梦柯<sup>[17]</sup>研究了在利率风险和通胀风险环境下带有最低担保的均值-方差养老金计划问题.

在早期的投资组合研究文献中, 学者们通常假设风险资产的价格服从几何布朗运动, 并将价格波动率设定为常数. 然而, 在实际的金融市场中, 风险资产的价格波动率并非固定不变, 而是表现出随机波动的特性. 基于这一现实情况, 近年来, 一些研究者开始探索在随机波动模型框架下的最优投资策略, 如 Gao<sup>[18]</sup>探讨了在 CEV 模型框架下, 具有随机波动率特征的 DC ( Defined Contribution ) 养老金最优投资策略问题. 通过构建相应的随机优化模型, 并运用动态规划方法, 研究了养老金在随机波动市场环境下的资产配置决策. 其风险资产为 CEV 模型, 并推导出了 CRRA ( Constant Relative Risk Aversion ) 和 CARA 效用函数的显式解. 张初兵<sup>[19]</sup>研究了基于 Heston 随机波动模型, 针对确定缴费型养老金计划, 以最大化期望幂效用为目标函数, 研究了其最优投资决策问题, 并通过理论推导获得了最优投资策略的显式解析解. 杨鹏<sup>[20]</sup>研究了经典 Cramer-Lundberg 风险模型的均值-方差策略选择问题, 风险资产的价格通过 CEV 模型来描述. 阿春香<sup>[21]</sup>考虑了 CEV 模型下保险公司延迟的最优投资再保险问题. 刘小涛<sup>[22]</sup>在均值方差准

则下研究了保险组合的时间一致投资策略. 假定风险资产价格服从 CEV 模型, 保险盈余过程为扩散近似模型. 周香英<sup>[23]</sup>研究了基于 CEV 模型的一类资产负债管理问题. 张雨萌<sup>[24]</sup>探讨了在稀疏相依风险条件下, 模糊厌恶型保险公司的最优再保险与投资决策问题. 在该研究中, 假设股票价格动态遵循 CEV 模型, 并在此基础上分析了保险公司的最优策略. 李国庆<sup>[25]</sup>研究了 CEV 模型下保险公司的最优不动产投资及再保险问题. 李国柱<sup>[26]</sup>研究了在 CEV 模型下带跳的非零和再保险投资博弈问题. 此外也有学者同时研究了随机利率和随机波动率, Grzelak 和 Oosterlee<sup>[27]-[28]</sup>指出, Heston 模型无法根据市场要求提供足够的隐含波动率偏差, 而影响隐含波动率偏差的主要因素是相关性. 然而, 在纯 Heston<sup>[29]</sup>模型中, 以及在大多数扩展的 Heston 模型中, 仅使用常数相关系数. 因此, 通过引入随机利率 Hull-White 模型扩展了 Heston 模型, 其中假设所有基础过程之间的相关性为非零, 提出了 Heston-Hull-White 混合模型的确定性近似值及相应的封闭式的解. 随后, Kim<sup>[30]</sup>研究了一个结合 Hull-White 利率模型与随机波动率模型的混合模型, 用于分析期权价格对利率变动的敏感性. 研究表明, 相较于恒定利率假设下的随机波动率模型, 引入随机利率的随机波动率模型在期权定价方面具有更高的准确性和优越性.

关于随机消费方面的研究, 戴俭华<sup>[31]</sup>针对保险基金投资问题, 引入随机消费变量, 以期望终端资产效用最大化为目标, 研究了其最优投资决策问题, Yuan 和 Lai<sup>[32]</sup>基于 CEV 模型, 研究了随机家庭支出条件下的家庭最优投资策略问题. 以家庭终端财富的期望效用最大化为目标, 针对指数效用函数, 通过应用勒让德变换和对偶理论, 将随机控制问题转化为线性偏微分方程, 并进一步求解得到了最优投资策略的近似解析解. 姜奎<sup>[33]</sup>在随机波动模型框架下, 研究了投资者在劳动收入影响下的最优消费与投资决策问题. 首先, 通过建立数学模型并运用随机最优控制理论, 推导出相应的 HJB (Hamilton-Jacobi-Bellman) 方程; 其次, 针对幂效用函数, 采用分离变量法求解 HJB 方程, 获得了最优消费策略与最优投资策略的显式解析解. 田德建<sup>[34]</sup>研究了 Knight 不确定性条件下持续业绩模型中的最优消费与投资策略问题. 通过构建考虑模型不确定性的优化框架, 分析了投资者在面对模糊性与不确定性时的决策行为, 并推导出最优消费与投资策略的解析解. 吕会影<sup>[35]</sup>探讨了在持续约束条件下, 基于模糊性假设的最优消费与投资组合决策

问题. 通过构建考虑模糊性的优化模型, 分析了投资者在不确定性环境下的消费与资产配置行为, 并推导出最优消费策略与投资组合的解析解. Kato<sup>[36]</sup>研究了从结构性信用风险模型中的 Merton 模型的资产过程扩展到 CEV 模型的资产过程后, 从股票的市场价值中推断出 CEV 模型的参数. Anel<sup>[37]</sup>研究了一种新型的恒定波动率弹性模型, 该模型允许在预期效用理论的背景下为对终端财富和消费具有双曲线绝对风险厌恶效用的投资者提供封闭式解决方案.

综上所述, 国内外已经有一批学者对基于 CEV 模型考虑随机消费和随机利率的最优投资策略进行了研究. 然而, 仍然有很多方面有待深入探讨, 比如考虑不完全市场条件下的最优投资策略、随机利率和随机消费之间的相互影响等. 未来的研究可以进一步丰富和完善这一领域的理论体系, 为实际投资决策提供更有价值的参考.

### 1.3 论文创新点

1. 综合考虑多种随机因素: 传统的金融模型通常只考虑单一的随机因素, 如股价的波动率. 然而, 该课题将 CEV 模型、随机消费和随机利率等多种随机因素综合考虑在内. CEV 模型是一种考虑波动率随时间变化的模型, 随机消费和随机利率则分别代表了消费行为和市场利率的不确定性. 将这些因素综合考虑在内, 可以更全面地理解金融市场的复杂性和不确定性.

2. 为实际投资决策提供理论指导: 通过研究最优投资策略, 可以为实际的投资决策提供理论指导. 考虑到随机消费和随机利率的影响, 可以更好地理解实际投资环境中的不确定性, 为投资者制定更为稳健和有效的投资策略提供参考. 这种综合考虑多种随机因素的方法, 有助于提高投资决策的风险管理能力和长期收益的稳健性.

3. 涉及复杂的数学建模和分析: 该课题涉及到对多种随机因素的建模和分析, 需要运用动态规划、随机控制理论等复杂的数学工具进行研究. 动态规划是一种处理随机优化问题的重要数学方法, 而随机控制理论则是研究随机系统的控制问题的数学理论. 通过这些数学工具的运用, 可以对最优投资策略进行深入的分析和求解, 为金融领域的投资决策提供更为科学的支持.

综合来看,该课题的特色与创新之处在于多因素的研究内容,对金融领域的投资决策具有理论和实践意义.通过综合考虑多种随机因素,并运用复杂的数学工具进行分析,可以更好地理解金融市场的复杂性和不确定性,为投资决策提供更为科学的理论支持.

## 1.4 论文内容和安排

本文分为五章.

第 1 章为绪论,简单介绍本文的研究背景和意义,国内外研究现状.

第 2 章为基础知识介绍.

第 3 章基于 CEV 模型,研究了在随机消费与随机利率双重不确定性下的最优投资策略问题.通过结合对偶方法、Legendre 变换以及动态规划原理,求解了以终端财富期望效用最大化为目标的优化问题,并得到了最优投资策略的解析解.最后,通过数值模拟分析了随机利率、随机消费等关键参数对最优投资策略的影响.

第 4 章在第 3 章的基础上,进一步引入通胀因素,研究了通胀风险对最优投资策略的影响.通过结合对偶方法、Legendre 变换以及动态规划原理,求解了以终端财富期望效用最大化为目标的优化问题,并得到了考虑通胀风险的最优投资策略解析解.最后,利用数值模拟方法,分析了通胀风险及其他相关参数对最优投资策略的影响.

第 5 章为总结展望.

## 第 2 章 基础知识介绍

### 2.1 随机利率模型

随机利率是指利率在时间上的变化具有不确定性. 与固定利率不同, 随机利率会随着市场条件、经济环境以及其他随机因素的变化而波动. 这种波动性使得我们无法完全预测未来的利率水平, 只能通过概率分布来描述其可能的取值范围. 随机利率的这种特性使得它在金融建模中变得尤为重要. 我们通常用随机微分方程来描述利率的动态变化, 比如 Vasicek 模型、CIR (Cox-Ingersoll-Ross) 模型、Hull-White 模型等. 这些模型的核心思想是通过引入随机项来捕捉利率的不确定性.

#### (1) Vasicek 模型

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma dW(t).$$

Vasicek 模型是最早的随机利率模型之一, 模型假设利率  $r(t)$  具有均值回归特性, 这与实际市场中利率的行为相符. 利率不会无限上升或下降, 而是围绕一个长期均值波动, 适用于短期利率建模、债券定价和利率衍生品定价. 它的主要优点包括解析解的存在、均值回归特性和简单易用性. 然而, Vasicek 模型也存在一些缺点, 如允许利率为负、波动率恒定和对极端市场条件的适应性差. 其中,  $a$  表示利率向长期均衡水平  $b$  回归的速度.  $a$  越大, 利率回归的速度越快.  $b$  表示长期均衡利率水平. 利率会围绕这个水平波动, 也常被称为长期均值.  $r(t)$  表示在时间  $t$  的瞬时利率.  $\sigma$  表示利率波动的波动率.  $dW(t)$  表示标准布朗运动.

#### (2) CIR 模型

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t).$$

CIR 模型是对 Vasicek 模型的改进, 确保利率始终为非负值这与实际市场中利率的行为相符, 特别是在低利率环境中. 其中,  $r(t)$  表示时间  $t$  时的短期利率.  $a$  表示利率回归到长期均值的速度.  $b$  表示长期均值水平.  $\sigma$  为波动率参数, 表示利

率的随机波动程度.  $\sqrt{r(t)}$  表示利率的平方根项, 确保利率非负.  $dW(t)$  表示标准布朗运动.

### (3) Hull-White 模型

$$dr(t) = (\theta(t) - ar(t))dt + \sigma dW(t).$$

Hull-White 模型是 Vasicek 模型的扩展, 模型允许时间依赖的参数  $\theta(t)$ , 这使得模型能够更好地拟合市场数据, 特别是在利率曲线形状复杂的情况下. 但同样的, Hull-White 模型允许利率为负, 这与实际市场中利率的行为不符, 特别是在低利率环境中. 其中,  $r(t)$  表示时间  $t$  时的短期利率.  $\theta(t)$  表示时间依赖的长期均值水平, 用于拟合市场利率曲线.  $a$  为均值回归速度, 表示利率回归到长期均值的速度.  $\sigma$  为波动率参数, 表示利率的随机波动程度.  $dW(t)$  表示标准布朗运动.

在本研究中, 选用 CIR 模型表示随机利率.

## 2.2 通胀风险

由于投资过程中会受到通货膨胀的影响, 为了描述通货膨胀风险, 定义随机价格水平满足以下微分方程

$$\frac{dI(t)}{I(t)} = \mu_1 dt + \sigma_1 dW(t).$$

其中,  $\mu_1 > 0$  是一个常数, 表示平均通胀率,  $\sigma_1 > 0$  表示通货膨胀率的波动率.

## 2.3 风险资产模型

风险资产模型是金融学中的核心工具, 用于描述和预测风险资产 (如股票、债券、衍生品等) 的价格行为、收益分布以及风险特征. 这些模型帮助投资者和金融机构理解资产的风险-收益关系, 并为资产定价、投资组合优化和风险管理提供理论支持. 金融市场投资遵循高风险, 高收益原则, 对于最主要的风险资产模型, 其价格模型一般有以下几种模型进行刻画.

### (1) GBM ( Geometric Brownian Motion ) 模型

$$dS(t) = r_1 S(t)dt + \sigma S(t)dW(t).$$

其中， $r_1$  为预期收益率， $\sigma$  为瞬时波动率。

## (2) CEV 模型

$$dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma S^\theta(t) dW(t)).$$

其中， $\mu$  是预期瞬时收益率； $\sigma$  是瞬时波动率； $\theta$  是弹性参数。

## (3) Heston 模型

$$\begin{cases} dS(t) = S(t)[(r + vL(t))dt + \sqrt{L(t)}dW_1(t)], \\ dL(t) = \alpha(\delta - L(t))dt + \sigma\sqrt{L(t)}dW_2(t). \end{cases}$$

其中， $v_i$ 、 $\alpha$ 、 $\delta$ 、 $\sigma$  是正常数，为了保证  $L(t)$  是非负的，那么要求  $2\alpha\delta \geq \sigma^2$ ， $\sigma$  为  $L(t)$  的波动率， $\sigma$  表示相对于金融市场的波动率，常数  $v$  为波动溢价， $\alpha$  为  $L(t)$  的均值回归率， $\delta$  为  $L(t)$  的长期均值。

在本研究中，选用 CEV 模型。

## 2.4 效用函数

在解决最优投资问题当中，一般选取以下三个效用函数。

### (1) CARA 效用函数

$$U(x) = -\frac{e^{-qx}}{q}.$$

其中， $q$  为常数。

### (2) CRRA 效用函数

$$U(x) = -\frac{1}{\gamma}x^{-\gamma}, \quad x > 0.$$

### (3) S 型效用函数

$$U(x) = \begin{cases} -A(\theta - x)^{\gamma_1}, \\ -B(x - \theta)^{\gamma_2}. \end{cases}$$

其中， $A > B > 0$ ， $\gamma_i \in (0, 1)$ ， $i = 1, 2$ ，参考点  $\theta > 0$ 。

在本研究中，选用 CARA 效用函数。

## 第 3 章 基于 CEV 模型考虑随机消费和随机利率的最优投资策略

本章研究基于 CEV 模型, 研究了在随机消费与随机利率双重不确定性下的最优投资策略问题. 通过结合对偶方法、Legendre 变换以及动态规划原理, 求解了以终端财富期望效用最大化为目标的优化问题, 并得到了最优投资策略的解析解. 最后, 通过数值模拟分析了随机利率、随机消费等关键参数对最优投资策略的影响.

### 3.1 建立模型

令  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$  为完备概率空间,  $P$  是概率测度,  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$  表示  $t$  时刻的信息流. 本研究考虑一个简单的投资组合, 它是由两种金融资产组成. 一种是无风险资产, 另一种是风险资产. 假设风险资产允许卖空和存在以无风险资产借贷的事件. 设  $S_0(t)$  表示无风险资产在时刻  $t$  的价格, 其表示为:

$$dS_0(t) = r(t)S_0(t)dt, S_0(0) = S_0 > 0,$$

式中  $r(t)$  是利率, 遵循 CIR 过程, 即

$$dr(t) = (k_1 - k_2 r(t))dt + \delta \sqrt{r(t)}dW_1(t), r(0) = r_0 > 0, \quad (3.1)$$

式中:  $k_1$  是利率向均衡水平回归的速度参数;  $k_2$  是利率均衡水平附近波动的参数;  $\delta$  是随机波动的强度参数.  $k_1, k_2$  和  $\delta$  是正常数, 并且假设满足费勒条件, 即  $2k_1 > \delta^2$  成立.

假设风险资产的价格  $S(t)$  遵循 CEV 过程, 即

$$dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma S^\theta(t)dW_2(t)), \quad (3.2)$$

式中:  $\mu$  是预期瞬时收益率;  $\sigma$  是瞬时波动率;  $\theta$  是弹性参数.

假设家庭支出包括家庭消费支出. 因此, 家庭支出具有随机性. 将时刻  $t$  的家庭支出表示为  $w_t$ , 且

$$dw_t = \alpha dt + \beta dW_3(t), w_0 > 0, \quad (3.3)$$

式中： $\alpha$  是漂移项，即随机消费过程的平均增长率； $\beta$  是波动率项，用于描述随机消费过程的波动性； $\alpha$  和  $\beta$  为常数。 $W_1(t)$ 、 $W_2(t)$  和  $W_3(t)$  是标准布朗运动，且满足  $dW_1(t)dW_2(t) = \rho_1 dt$ ， $dW_2(t)dW_3(t) = \rho_2 dt$ ， $dW_1(t)dW_3(t) = 0$ ， $\rho_1 \rho_2 = 0$ 。

设  $V(t)$  表示  $t$  时刻的个人财富， $\pi(t)$  表示投资于风险资产的财富比例。那么投资于无风险资产的财富比例为  $1 - \pi(t)$ 。财富过程  $V(t)$  满足以下随机过程，即

$$dV(t) = [V(t)(\pi(t)(\mu - r(t)) + r(t)) - w(t)]dt + \pi(t)\sigma S^\theta(t)V(t)dW_2(t),$$

式中：初始财富  $V_0 > 0$ 。

设所有容许策略的集合记为  $A = \{\pi(t), 0 \leq t \leq T\}$ 。个人目标是在有限的时间范围内最大化终端财富的预期效用，即

$$\max_{\pi(t) \in A} E[U(V(T))],$$

式中： $U(\bullet)$  是效用函数。本章考虑 CARA 效用函数，其表达式为：

$$U(x) = -\frac{e^{-qx}}{q}. \quad (3.4)$$

### 3.2 HJB 方程和最优投资策略

首先，定义一个价值函数  $H(t, s, r, w, v)$  为：

$$H(t, s, r, w, v) = \sup_{\pi(t) \in A} E[U(V(T)) | S(t) = s, V(t) = v, r(t) = r, w(t) = w], 0 \leq t \leq T,$$

边界条件  $H(T, s, r, w, v) = U(v)$ ，价值函数  $H(t, s, r, w, v)$  的 HJB 方程为：

$$\begin{aligned} & H_t + \mu s H_s + (rv - w)H_v + (k_1 - k_2 r)H_r + \alpha H_w + \frac{1}{2} \sigma^2 s^{2\theta+2} H_{ss} + \\ & \rho_1 \sigma \delta \sqrt{r} s^{\theta+1} H_{sr} + \rho_2 \beta \sigma s^{\theta+1} H_{sw} + \frac{1}{2} r \delta^2 H_{rr} + \frac{1}{2} \beta^2 H_{ww} + \\ & \sup_{\pi} \left\{ \frac{1}{2} \pi^2 \sigma^2 s^{2\theta} v^2 H_{vv} + \pi [(\mu - r)v H_v + \sigma^2 s^{2\theta+1} v H_{vs}] \right. \\ & \left. + \beta \sigma \rho_2 s^\theta v H_{vw} + \rho_1 s^\theta v \sigma \delta \sqrt{r} H_{vr} \right\} = 0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

式中： $H_t$ 、 $H_s$ 、 $H_v$ 、 $H_r$ 、 $H_w$ 、 $H_{ss}$ 、 $H_{vv}$ 、 $H_{rr}$ 、 $H_{ww}$ 、 $H_{vs}$ 、 $H_{vr}$ 、 $H_{vw}$  和  $H_{sw}$  表示关于参数  $t$ 、 $s$ 、 $v$ 、 $r$  和  $w$  的不同偏导数。

由方程 (3.5) 的一阶极大值条件，可得：

$$\pi^* = -\frac{(\mu-r)H_v + \sigma^2 s^{2\theta+1} H_{vs} + \beta\sigma\rho_2 s^\theta H_{vw} + \rho_1 s^\theta \sigma\delta\sqrt{r} H_{vr}}{v\sigma^2 s^{2\theta} H_{vv}}. \quad (3.6)$$

将方程 (3.6) 代入方程 (3.5), 可得:

$$\begin{aligned} & H_t + \mu s H_s + (rv - w)H_v + (k_1 - k_2 r)H_r + \alpha H_w + \\ & \frac{1}{2}\sigma^2 s^{2\theta+2} H_{ss} + \rho_1 \sigma\delta\sqrt{r} s^{\theta+1} H_{sw} + \frac{1}{2}r\delta^2 H_{rr} + \frac{1}{2}\beta^2 H_{ww} - \\ & \left[ (\mu-r)H_v + \sigma^2 s^{2\theta+1} H_{vs} + \beta\sigma\rho_2 s^\theta H_{vw} + \rho_1 s^\theta \sigma\delta\sqrt{r} H_{vr} \right]^2 \frac{1}{2\sigma^2 s^{2\theta} H_{vv}} = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

对于方程 (3.7), 很难直接得到其解析解. 在 Jonsson<sup>[38]</sup>研究的基础上, 利用 Legendre 变换和对偶方法, 首先, 可以找到方程 (3.7) 的一个对偶问题. 定义  $H$  的 Legendre 变换定义为:

$$\widehat{H}(t, s, r, w, v) = \sup_{v>0} \{H(t, s, r, w, v) - zv \mid 0 < t < T\},$$

式中:  $z > 0$  表示  $v$  的对偶变量.

$v$  的最优值由  $g(t, s, r, w, z)$  表示为:

$$g(t, s, r, w, z) = \inf_{v>0} \{v \mid H(t, s, r, w, z) \geq zv + \widehat{H}(t, s, r, w, z), 0 \leq t \leq T\},$$

于是有

$$\widehat{H}(t, s, r, w, z) = \widehat{H}(t, s, r, w, g) - zg, g(t, s, r, w, g) = v,$$

因此, 值函数  $H$  和对偶函数  $\widehat{H}$  的导数的关系为:

$$\begin{aligned} H_v &= z, H_t = \widehat{H}_t, H_s = \widehat{H}_s, H_w = \widehat{H}_w, g = -\widehat{H}_z, H_{vv} = -\frac{1}{\widehat{H}_{zz}}, \\ H_{ss} &= \widehat{H}_{ss} - \frac{\widehat{H}_{sz}^2}{\widehat{H}_{zz}}, H_{rr} = \widehat{H}_{rr} - \frac{\widehat{H}_{rz}^2}{\widehat{H}_{zz}}, H_{ww} = \widehat{H}_{ww} - \frac{\widehat{H}_{wz}^2}{\widehat{H}_{zz}}, \\ H_{vs} &= -\frac{\widehat{H}_{sz}^2}{\widehat{H}_{zz}}, H_{vw} = -\frac{\widehat{H}_{wz}^2}{\widehat{H}_{zz}}, H_{sr} = \widehat{H}_{sr} - \frac{\widehat{H}_{sz}\widehat{H}_{rz}}{\widehat{H}_{zz}}, \\ H_{sw} &= \widehat{H}_{sw} - \frac{\widehat{H}_{sz}\widehat{H}_{wz}}{\widehat{H}_{zz}}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

本章用函数  $g$  作为  $H$  的对偶函数, 它将提供一个简单的方法来计算最优策略.

边界条件  $H(T, s, x, y, v) = U(v)$ , 定义

$$\begin{aligned} g(t, s, r, w, z) &= \inf_{v>0} \{v \mid H(t, s, r, w, z) \geq zv + \widehat{H}(t, s, r, w, z)\}, \\ \widehat{H}(t, s, r, w, z) &= \sup_{v>0} \{U(v) - zv \mid v > 0\}, \end{aligned}$$

由上可得：

$$g(T, s, r, w, z) = (U')^{-1}(z). \quad (3.9)$$

将方程 (3.8) 代入方程 (3.7)，我们可以得到函数  $\widehat{H}$  的以下等式

$$\begin{aligned} & \widehat{H}_t + \mu s \widehat{H}_s + (rg - w)z + \alpha \widehat{H}_w + (k_1 - k_2) \widehat{H}_r + \frac{1}{2} \delta^2 r \widehat{H}_{rr} + \\ & \frac{1}{2} \sigma^2 s^{2\theta+2} \widehat{H}_{ss} - \frac{1}{2} \delta^2 r (1 - \rho_1^2) \frac{\widehat{H}_{rz}^2}{\widehat{H}_{zz}} + \rho_1 \sigma \delta \sqrt{r} s^{\theta+1} \widehat{H}_{sr} - \\ & (\mu - r) s z \widehat{H}_{sz} - \frac{1}{2} \beta^2 (1 - \rho_2^2) \frac{\widehat{H}_{wz}^2}{\widehat{H}_{zz}} + \frac{(\mu - r)^2 z^2}{2 \sigma^2 s^{2\theta}} \widehat{H}_{zz} - \\ & \frac{(\mu - r) \rho_1 \delta \sqrt{r} z}{\sigma s^\theta} \widehat{H}_{rz} + \rho_2 \beta \sigma s^{\theta+1} \widehat{H}_{sw} + \frac{1}{2} \beta^2 \widehat{H}_{ww} - \frac{(\mu - r) \rho_2 \beta z}{\sigma s^\theta} \widehat{H}_{wz} = 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

对于等式  $g(t, s, r, w, z) = -\widehat{H}$ ，两侧关于变量  $t$ ， $s$ ， $r$ ， $w$  和  $z$  微分，得到一阶和二阶偏导数，然后代入方程 (3.10) 两边关于  $z$  进行微分后的方程，可以得到：

$$\begin{aligned} & g_t + r s g_s + \frac{1}{2} \sigma^2 s^{2\theta+2} g_{ss} - r g + w + \left( \frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2 s^{2\theta}} r \right) g_z + \frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2 s^{2\theta}} z^2 g_{zz} - \\ & (\mu - r) s z g_{sz} + \rho_1 \sigma \delta \sqrt{r} s^{\theta+1} g_{sr} + (k_1 - k_2 r) g_r + \frac{1}{2} \delta^2 r g_{rr} - \frac{\rho_1 \delta \sqrt{r} (\mu - r)}{\sigma s^\theta} (g_r + z g_{rz}) - \\ & \frac{1}{2} r \delta^2 (1 - \rho_1^2) \left( \frac{2 g_r g_{rz}}{g_z} - \frac{g_r^2 g_{zz}}{g_z^2} \right) + \frac{1}{2} \beta^2 g_{ww} + \beta \sigma \rho_2 s^{\theta+1} g_{sw} + \alpha g_w - \\ & \frac{(\mu - r) \beta \rho_2}{\sigma s^\theta} (g_w + z g_{wz}) - \frac{1}{2} \beta^2 (1 - \rho_2^2) \left( \frac{2 g_w g_{wz}}{g_z} - \frac{g_w^2 g_{zz}}{g_z^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

考虑由方程 (3.4) 描述的 CARA 效用函数. 联立方程 (3.9) 和 (3.4)，有

$$g(T, s, r, w, z) = -\frac{1}{q} \ln z.$$

假设方程 (3.11) 的解可表示为：

$$\begin{cases} g(t, s, r, w, z) = -\frac{1}{q} [h(t)(\ln z + m(t, y, r) + k(t, y, w))] + n(t), \\ y = s^{-2\theta}, \end{cases} \quad (3.12)$$

边界条件为  $h(T) = 1, n(T) = 0, m(T, y, r) = 0$  和  $k(T, y, w) = 0$ .

将方程 (3.12) 代入方程 (3.11) 可得：

$$\begin{aligned} & [h_t - rh(t)] \ln z + [h_t - rh(t)](m+k) + [rn(t) - n_t]q + \\ & h(t) \left[ (l_0 + l_1 + l_2)m + (f_0 + f_1 + f_2)k - \frac{1}{2} \delta^2 r (1 - \rho_1^2) m_r^2 - \frac{1}{2} \beta^2 (1 - \rho_2^2) k_w^2 \right] = 0, \end{aligned}$$

其中

$$l_0 m = (k_1 - k_2 r) m_r + \frac{1}{2} \delta^2 r m_{rr}, \quad (3.13)$$

$$l_1 m = m_t + \theta[(2\theta + 1)\sigma^2 - 2ry]m_y + 2\theta^2 \sigma^2 y m_{yy} + \frac{(\mu - r)^2}{4\sigma^2} y - \frac{r}{2}, \quad (3.14)$$

$$l_2 m = -2\rho_1 \sigma s \sqrt{r} \sqrt{y} m_{yr} - \frac{\rho_1 \delta \sqrt{r} (\mu - r)}{\sigma} \sqrt{y} m_r, \quad (3.15)$$

$$f_0 k = \alpha k_w + \frac{1}{2} \beta^2 k_{ww}, \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} f_1 k &= k_t + \theta[\sigma^2(2\theta + 1) - 2ry]k_y + \\ & 2\sigma^2 \theta^2 y k_{yy} - qe^{r(T-t)} w - \frac{(\mu - r)^2}{4\sigma^2} y - \frac{r}{2}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$f_2 k = -2\beta \sigma \theta \rho_2 \sqrt{y} k_{yw} - \frac{(\mu - r) \beta \rho_2}{\sigma} \sqrt{y} k_w. \quad (3.18)$$

此外，通过分离变量联立边界条件我们可以解得：

$$h(t) = e^{r(t-T)}, \quad n(t) = 0.$$

$$(l_0 + l_1 + l_2)m + (f_0 + f_1 + f_2)k - \frac{1}{2} \delta^2 r (1 - \rho_1^2) m_r^2 - \frac{1}{2} \beta^2 (1 - \rho_2^2) k_w^2 = 0. \quad (3.19)$$

但方程 (3.13) 是一个非线性偏微分方程，很难得到解析解. 我们可以参考 Takahashi<sup>[39]</sup>和 Widdicks<sup>[40]</sup>研究中，推导不同随机波动率模型下期权定价的渐近公式. 类似地，可以通过令  $r^{\varepsilon_0}(t)$  来代替方程 (3.1) 中的  $r(t)$ ， $w^{\varepsilon_1}(t)$  来代替方程 (3.3) 中的  $w(t)$ ，来找到方程 (3.13) 的渐近解

$$\begin{aligned} dr^{\varepsilon_0}(t) &= \varepsilon_0(k_1 - k_2 r(t))dt + \sqrt{\varepsilon_0} \sqrt{r(t)} dW_1(t), \\ dw^{\varepsilon_1}(t) &= \varepsilon_1 \alpha dt + \sqrt{\varepsilon_1} \beta dW_3(t), \end{aligned} \quad (3.20)$$

式中  $0 < \varepsilon_0 \ll 1$ ， $0 < \varepsilon_1 \ll 1$  是两个小的正参数.

将方程 (3.14) 代入方程 (3.13) 可得：

$$\begin{aligned}
 (\varepsilon_0 l_0 + l_1 + \sqrt{\varepsilon_0} l_2) m^{\varepsilon_0} - \frac{1}{2} \delta^2 r (1 - \rho_1^2) (m_r^{\varepsilon_0})^2 &= 0, \\
 (\varepsilon_1 f_0 + f_1 + \sqrt{\varepsilon_1} f_2) k^{\varepsilon_1} - \frac{1}{2} \beta^2 (1 - \rho_2^2) (k_w^{\varepsilon_1})^2 &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

假设方程 (3.15) 的解遵循以下形式, 即

$$\begin{aligned}
 m^{\varepsilon_0} &= m^{(0)}(t, y, r) + \sqrt{\varepsilon_0} m^{(1)}(t, y, r) + \varepsilon_0 m^{(2)}(t, y, r), \\
 k^{\varepsilon_0} &= k^{(0)}(t, y, w) + \sqrt{\varepsilon_1} k^{(1)}(t, y, w) + \varepsilon_1 k^{(2)}(t, y, w).
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

将方程 (3.16) 代入方程 (3.15) 得:

$$\begin{aligned}
 l_1 m^{(0)} + \sqrt{\varepsilon_0} (l_1 m^{(1)} + l_2 m^{(0)}) + \varepsilon_0 (l_0 m^{(0)} + l_1 m^{(2)} + \\
 l_2 m^{(1)} - \frac{1}{2} \delta^2 r (1 - \rho_1^2) (m_r^{(0)})^2) &= 0, \\
 f_1 k^{(0)} + \sqrt{\varepsilon_1} (f_1 k^{(1)} + f_2 k^{(0)}) + \varepsilon_0 (f_0 k^{(0)} + f_1 k^{(2)} + \\
 f_2 k^{(1)} - \frac{1}{2} \beta^2 (1 - \rho_2^2) (k_w^{(0)})^2) &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

根据 (3.23) 里  $\varepsilon_0$ 、 $\varepsilon_1$  不同阶数, 可以得到如下六个方程

$$l_1 m^{(0)} = 0, \quad m^{(0)}(T, y, r) = 0. \tag{3.24}$$

$$l_1 m^{(1)} + l_2 m^{(0)} = 0, \quad m^{(1)}(T, y, r) = 0. \tag{3.25}$$

$$l_0 m^{(0)} + l_1 m^{(2)} + l_2 m^{(1)} - \frac{1}{2} \delta^2 r (1 - \rho_1^2) (m_r^{(0)})^2 = 0, \quad m^{(2)}(T, y, r) = 0. \tag{3.26}$$

$$f_1 k^{(0)} = 0, \quad k^{(0)}(T, y, w) = 0. \tag{3.27}$$

$$f_1 k^{(1)} + f_2 k^{(0)} = 0, \quad k^{(1)}(T, y, w) = 0. \tag{3.28}$$

$$f_0 k^{(0)} + f_1 k^{(2)} + f_2 k^{(1)} - \frac{1}{2} \beta^2 (1 - \rho_2^2) (k_w^{(0)})^2 = 0, \quad k^{(2)}(T, y, w) = 0. \tag{3.29}$$

下面我们对  $m^{(0)}$ 、 $m^{(1)}$ 、 $m^{(2)}$  和  $k^{(0)}$ 、 $k^{(1)}$ 、 $k^{(2)}$  进行分别求解.

对  $m^{(0)}$  进行求解, 将式 (3.24) 代入 (3.14) 可得:

$$m_t^{(0)} + \theta \left[ (2\theta + 1) \sigma^2 - 2ry \right] m_y^{(0)} + 2\theta^2 \sigma^2 y m_{yy}^{(0)} + \frac{(\mu - r)^2}{4\sigma^2} y - \frac{r}{2} = 0. \tag{3.30}$$

设

$$m^{(0)}(t, y, r) = A(t, r) + B(t, r)y, \quad A(T, r) = B(T, r) = 0, \tag{3.31}$$

将 (3.31) 式代入 (3.30)

$$A_t + \theta(2\theta + 1) \sigma^2 B(t, r) - \frac{r}{2} + y \left[ B_t - 2r\theta B(t, r) + \frac{(\mu - r)^2}{4\sigma^2} \right] = 0, \tag{3.32}$$

将 (3.32) 式按  $y$  不同阶数分类可得:

$$\begin{cases} A_t + \theta(2\theta+1)\sigma^2 B(t,r) - \frac{r}{2} = 0, \\ B_t - 2r\theta B(t,r) + \frac{(\mu-r)^2}{4\sigma^2} = 0, \end{cases} \quad (3.33)$$

求解 (3.33) 可得:

$$\begin{cases} A(t,r) = \left[ \frac{(2\theta+1)(\mu-r)^2}{8r} - \frac{r}{2} \right] (T-t) - \frac{(2\theta+1)(\mu-r)^2}{16r^2\theta} [1 - e^{2r\theta(t-T)}], \\ B(t,r) = \frac{(\mu-r)^2}{8r\theta\sigma^2} [1 - e^{2r\theta(t-T)}], \end{cases} \quad (3.34)$$

即  $m^{(0)}(t,y,r)$  得证.

对  $m^{(1)}$  进行求解, 将式 (3.25) 代入 (3.15) 可得:

$$\begin{aligned} m_t^{(1)} + \theta[(2\theta+1)\sigma^2 - 2ry]m_y^{(1)} + 2\theta^2\sigma^2 y m_{yy}^{(1)} + \frac{(\mu-r)^2}{4\sigma^2} y - \\ \frac{r}{2} - 2\rho_1\sigma\theta\delta\sqrt{r}\sqrt{y}m_{yr}^{(0)} - \frac{\rho_1\delta\sqrt{r}(\mu-r)}{\sigma}\sqrt{y}m_r^{(0)} = 0. \end{aligned} \quad (3.35)$$

设

$$\begin{aligned} m^{(1)}(t,y,r) &= A_1(t,r) + B_1(t,r)y^{\frac{1}{2}} + C_1(t,r)y + D_1(t,r)y^{\frac{3}{2}}, \\ A_1(T,r) &= B_1(T,r) = C_1(T,r) = D_1(T,r) = 0, \end{aligned} \quad (3.36)$$

将 (3.36)、(3.31) 式代入 (3.35)

$$\begin{aligned} A_{1t} + B_{1t}y^{\frac{1}{2}} + C_{1t}y + D_{1t}y^{\frac{3}{2}} + \theta[(2\theta+1)\sigma^2 - 2ry]\left[\frac{1}{2}B_1y^{\frac{1}{2}} + C_1 + \frac{3}{2}D_1y^{\frac{1}{2}}\right] + \\ 2\theta^2\sigma^2 y \left[-\frac{1}{4}y^{\frac{3}{2}}B_1 + \frac{3}{4}D_1y^{\frac{1}{2}}\right] + \frac{(\mu-r)^2}{4\sigma^2} y - \frac{r}{2} - \\ 2\rho_1\sigma\theta\delta\sqrt{r}\sqrt{y}B_r - \frac{\rho_1(\mu-r)\delta\sqrt{r}}{6}\sqrt{y}(A_r + B_{ry}) = 0, \end{aligned} \quad (3.37)$$

将 (3.37) 式按  $y$  不同阶数分类可得:

$$\begin{cases} C_{1t} - 2\theta r C_1 + \frac{(\mu-r)^2}{4\sigma^2} = 0, \\ A_{1t} + \theta(2\theta+1)\sigma^2 C_1 - \frac{r}{2} = 0, \\ D_{1t} - 3\theta r D_1 + \frac{\rho_1\delta\sqrt{r}(\mu-r)}{\sigma} B_r = 0, \\ B_{1t} - r\theta B_1 + \frac{3}{2}\theta(3\theta+1)\sigma^2 D_1 - \frac{\sqrt{r}(\mu-r)\rho_1\delta A_r}{\sigma} - 2\sqrt{r}\theta\rho_1\delta\sigma B_r = 0, \end{cases} \quad (3.38)$$

求解 (3.38) 可得:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1(t, r) = \frac{(\mu - r)^2}{8r\theta\sigma^2} [1 - e^{2r\theta(t-T)}], \\ A_1(t, r) = \theta(2\theta + 1)\sigma^2 \int_t^T B(s, r) ds - \frac{r}{2}(T - t), \\ B_1(t, r) = \frac{3}{2}\theta(3\theta + 1)\sigma^2 e^{r\theta(t-T)} \int_t^T C_1(t, r) e^{r\theta(T-s)} ds - \\ \quad \frac{\rho_1 \delta \sqrt{r}(\mu - r)}{\sigma} e^{r\theta(t-T)} \int_t^T A_r e^{r\theta(T-s)} ds - \\ \quad 2\rho_1 \delta \sqrt{r} \theta \sigma e^{r\theta(t-T)} \int_t^T B_r e^{r\theta(T-s)} ds, \\ D_1(t, r) = -\frac{\rho_1 \delta \sqrt{r}(\mu - r)}{\sigma} e^{3r\theta(t-T)} \int_t^T B_r e^{3r\theta(T-s)} ds, \end{array} \right. \quad (3.39)$$

即  $m^{(1)}(t, y, r)$  得证.

对  $m^{(2)}$  进行求解, 将式 (3.29) 代入 (3.19) 可得:

$$\begin{aligned} m_t^{(2)} + \theta[(2\theta + 1)\sigma^2 - 2ry]m_y^{(2)} + 2\theta^2\sigma^2 y m_{yy}^{(2)} + \frac{(\mu - r)^2}{4\sigma^2} y - \frac{r}{2} + \\ (k_1 - k_2 r)m_r^{(0)} + \frac{1}{2}\delta^2 r m_{rr}^{(0)} - 2\rho_1 \delta \theta \sqrt{r} \sqrt{y} m_{yr}^{(1)} - \frac{\rho_1 \delta \sqrt{r}(\mu - r)}{8} \sqrt{y} m_r^{(1)} - \\ \frac{1}{2}\delta^2 r(1 - \rho_1^2)(m_r^{(0)})^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.40)$$

设

$$\begin{aligned} m^{(2)}(t, y, r) = A_2(t, r) + B_2(t, r)y^{\frac{1}{2}} + C_2(t, r)y + D_2(t, r)y^{\frac{3}{2}} + F_2(t, r)y^2, \\ A_2(T, r) = B_2(T, r) = C_2(T, r) = D_2(T, r) = F_2(T, r) = 0, \end{aligned} \quad (3.41)$$

将 (3.41)、(3.36)、(3.31) 式代入 (3.40)

$$\begin{aligned} A_{2t} + B_{2t}y^{\frac{1}{2}} + C_{2t}y + D_{2t}y^{\frac{3}{2}} + F_{2t}y^2 + \\ \theta[(2\theta + 1)\sigma^2 - 2ry](\frac{1}{2}B_2y^{\frac{1}{2}} + C_2 + \frac{3}{2}D_2y^{\frac{1}{2}} + 2F_2y) + \\ 2\theta^2\sigma^2 y(-\frac{1}{4}B_2y^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{4}D_2y^{\frac{1}{2}} + 2F_2) + (k_1 - k_2 r)(A_r + B_r y) + \\ \frac{1}{2}\delta^2 r(A_{rr} + B_{rr}y) - 2\rho_1 \sigma \theta \delta \sqrt{r} \sqrt{y}(\frac{1}{2}B_{1r}y^{\frac{1}{2}} + C_{1r} + \frac{3}{2}D_{1r}y^{\frac{1}{2}}) - \\ \frac{\rho_1 \delta \sqrt{r}(\mu - r)}{\sigma} \sqrt{y}(A_{1r} + B_{1r}y^{\frac{1}{2}} + C_{1r}y + D_{1r}y^{\frac{3}{2}}) - \\ \frac{1}{2}\delta^2 r(1 - \rho_1^2)(A_r + B_r y)^2 + \frac{(\mu - r)^2}{4\sigma^2} y - \frac{r}{2} = 0, \end{aligned} \quad (3.42)$$

将 (3.42) 式按  $y$  不同阶数分类可得:

$$\begin{cases}
 F_{2t} - 4r\theta F_2 - \frac{1}{2}r\delta^2(1-\rho_1^2)B_r^2 - \frac{\rho_1\delta\sqrt{r}(\mu-r)}{\sigma}D_{1r} = 0, \\
 D_{2t} - 3r\theta D_2 - \frac{\rho_1\delta\sqrt{r}(\mu-r)}{\sigma}D_{1r} = 0, \\
 C_{2t} - 2r\theta C_2 + 2\theta(4\theta+1)\sigma^2 F_2 + (k_1 - k_2 r)B_r - r(1-\rho_1^2)\delta^2 A_r B_r - \\
 \frac{\rho_1\delta\sqrt{r}(\mu-r)}{\sigma}B_{1r} - 3\rho_1\sigma\theta\delta\sqrt{r}D_{1r} + \frac{1}{2}r\delta^2 B_{rr} + \frac{(\mu-r)^2}{4\sigma^2} = 0, \\
 B_{2t} - r\theta B_2 + \frac{3}{2}\theta(3\theta+r)\sigma^2 D_2 - \frac{\rho_1\delta\sqrt{r}(\mu-r)}{\sigma}A_{1r} - 2\sqrt{r}\theta\rho_1\sigma\delta C_{1r} = 0, \\
 A_{2t} + \theta(2\theta+1)\sigma^2 C_2 - \frac{r}{2} + (k_1 - k_2 r)A_r - \frac{1}{2}r(1-\rho_1^2)\delta^2 A_r^2 - \\
 \sqrt{r}\theta\rho_1\sigma\delta B_{1r} + \frac{1}{2}r\delta^2 A_{rr} = 0,
 \end{cases} \quad (3.43)$$

求解 (3.43) 可得:

$$\begin{cases}
 A_2(t, r) = \theta(2\theta+1)\int_t^T C_2(s, r)ds + (k_1 - k_2 r)\int_t^T A_r ds - \frac{r}{2}(1-\rho_1^2)\delta^2\int_t^T A_r^2 ds - \\
 \rho_1\sigma\theta\delta\sqrt{r}\int_t^T B_{1r}ds + \frac{r}{2}\delta^2\int_t^T A_{rr}ds - \frac{r}{2}(T-t), \\
 B_2(t, r) = \frac{3}{2}\theta(3\theta+1)\sigma^2 e^{r\theta(t-T)}\int_t^T C_1(s, r)e^{r\theta(T-s)}ds - \\
 \frac{\rho_1\delta\sqrt{r}(\mu-r)}{\sigma}e^{r\theta(t-T)}\int_t^T A_{1r}e^{r\theta(T-s)}ds - \\
 2\rho_1\sigma\theta\delta\sqrt{r}e^{r\theta(T-s)}\int_t^T A_{1r}B^{r\theta(T-s)}ds, \\
 C_2(t, r) = 2\theta(4\theta+1)\sigma^2 e^{2r\theta(t-T)}\int_t^T D_2(s, r)e^{2r\theta(T-s)}ds + (k_1 - k_2 r)e^{2r\theta(t-T)}\int_t^T B_r e^{2r\theta(T-s)}ds - \\
 r(1-\rho_1^2)\delta^2 e^{2r\theta(t-T)}\int_t^T A_r B_r e^{2r\theta(T-s)}ds - \frac{\rho_1\delta\sqrt{r}(\mu-r)}{\sigma}e^{2r\theta(t-T)}\int_t^T B_{1r}e^{2r\theta(T-s)}ds - \\
 3\rho_1\sigma\theta\delta\sqrt{r}e^{2r\theta(T-s)}\int_t^T C_{1r}e^{2r\theta(T-s)}ds + \frac{r}{2}\delta^2 e^{2r\theta(t-T)}\int_t^T B_{rr}e^{2r\theta(T-s)}ds + \\
 \frac{(\mu-r)^2}{8r\theta\sigma^2}[1 - e^{2r\theta(t-T)}], \\
 F_2(t, r) = -\frac{r}{2}(1-\rho_1^2)\delta^2 e^{4r\theta(t-T)}\int_t^T B_r^2 e^{4r\theta(T-s)}ds - \frac{\rho_1\delta\sqrt{r}(\mu-r)}{\sigma}e^{4r\theta(t-T)}\int_t^T C_{1r}e^{4r\theta(T-s)}ds, \\
 D_2(t, r) = \frac{(\mu-r)^2}{8r\theta\sigma^2}[1 - e^{2r\theta(t-T)}],
 \end{cases} \quad (3.44)$$

即  $m^{(2)}(t, y, r)$  得证.

对  $k^{(0)}$  进行求解, 将式 (3.27) 代入 (3.17) 可得:

$$k_t^{(0)} + \theta[(2\theta+1)\sigma^2 - 2ry]k_y^{(0)} + 2\theta^2\sigma^2 y k_{yy}^{(0)} + \frac{(\mu-r)^2}{4\sigma^2} y - qwe^{r(T-t)} - \frac{r}{2} = 0. \quad (3.45)$$

设

$$k^{(0)}(t, y, w) = I(t, w) + J(t)y, I(T, w) = J(T) = 0, \quad (3.46)$$

将 (3.46) 式代入 (3.45)

$$I_t + q(2\theta+1)\sigma^2 J(t) - qwe^{r(T-t)} - \frac{r}{2} + y[J_t - 2r\theta J(t) + \frac{(\mu-r)^2}{4\sigma^2}] = 0, \quad (3.47)$$

将 (3.47) 式按  $y$  不同阶数分类可得:

$$\begin{cases} J_t - 2r\theta J(t) + \frac{(\mu-r)^2}{4\sigma^2} = 0, \\ I_t + \theta(2\theta+1)\sigma^2 J(t) - qwe^{r(T-t)} - \frac{r}{2} = 0, \end{cases} \quad (3.48)$$

求解 (3.48) 可得:

$$\begin{cases} J(t) = \frac{(\mu-r)^2}{8r\theta\sigma^2} [1 - e^{2r\theta(t-T)}], \\ I(t, w) = \frac{q}{r} w [1 - e^{r(T-t)}] + \left[ \frac{(2\theta+1)(\mu-r)^2}{8r} - \frac{r}{2} \right] (T-t) + \frac{(2\theta+1)(\mu-r)^2}{16r^2\theta} [1 - e^{2r\theta(t-T)}], \end{cases} \quad (3.49)$$

即  $k^{(0)}(t, y, w)$  得证.

对  $k^{(1)}$  进行求解, 将式 (3.28) 代入 (3.18) 可得:

$$k_t^{(1)} + \theta[(2\theta+1)\sigma^2 - 2ry]k_y^{(1)} + 2\theta^2\sigma^2 y k_{yy}^{(1)} - qe^{r(T-t)}w - \frac{(\mu-r)^2}{4\sigma^2} y - \frac{r}{2} - 2\rho_2\sigma\delta\sqrt{r}\sqrt{y}K_{yw}^{(0)} - \frac{(\mu-r)\beta\rho_2}{\sigma}\sqrt{y}k_w^{(0)}. \quad (3.50)$$

设

$$k^{(1)}(t, y, w) = I_1(t, w) + J_1(t)y^{\frac{1}{2}} + M_1(t)y, I_1(T, w) = J_1(T) = M_1(T) = 0, \quad (3.51)$$

将 (3.51)、(3.46) 式代入 (3.50)

$$\begin{aligned} I_{1t} + J_{1t}y^{\frac{1}{2}} + M_{1t}y + \theta[(2\theta+1)\sigma^2 - 2ry](\frac{1}{2}J_1y^{\frac{1}{2}} + M_1) + 2\sigma^2\theta^2 y(-\frac{1}{4}y^{\frac{3}{2}}) \\ + qe^{r(T-t)}w + \frac{(\mu-r)^2}{4\sigma^2} y - \frac{r}{2} - \frac{(\mu-r)\beta\rho_2}{\sigma}\sqrt{y}I_w = 0, \end{aligned} \quad (3.52)$$

将 (3.52) 式按  $y$  不同阶数分类可得:

$$\begin{cases} M_{1t} - 2\theta r M_1 + \frac{(\mu-r)^2}{4\sigma^2} = 0, \\ I_{1t} + \theta(2\theta+1)\sigma^2 M_1 - \frac{r}{2} - qe^{r(T-t)}w = 0, \\ J_{1t} - r\theta J_1 - \frac{(\mu-r)\beta\rho_2}{\sigma} I_w = 0, \end{cases} \quad (3.53)$$

求解 (3.53) 可得:

$$\begin{cases} M_1(t) = \frac{(\mu-r)^2}{8r\theta\sigma^2} [1 - e^{2r\theta(t-T)}], \\ I_1(t, w) = \theta(2\theta+1)\sigma^2 \int_s^T M_1(t) ds - \frac{r}{2}(T-t) - \frac{qw}{r} [e^{r(T-t)} - 1], \\ J_1(t) = -\frac{(\mu-r)\beta\rho_2}{\sigma} e^{r\theta(t-T)} \int_t^T I_w e^{r\theta(T-S)} ds, \end{cases} \quad (3.54)$$

即  $k^{(1)}(t, y, w)$  得证.

对  $k^{(2)}$  进行求解, 将式 (3.29) 代入 (3.19) 可得:

$$\begin{aligned} & k_t^{(2)} + \theta[(2\theta+1)\sigma^2 - 2ry]k_y^{(2)} + 2\theta^2\sigma^2 y k_{yy}^{(2)} + \frac{(\mu-r)^2}{4\sigma^2} y - \frac{r}{2} - \\ & qwe^{r(T-t)} + \alpha k_w^{(0)} + \frac{1}{2}\beta^2 k_{ww}^{(0)} - 2\rho_2\beta\sigma\theta\sqrt{y}k_{yw}^{(1)} - \frac{\rho_2\beta(\mu-r)}{\sigma}\sqrt{y}k_w^{(1)} \\ & - \frac{1}{2}\beta^2(1-\rho_2^2)(k_w^{(0)})^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.55)$$

设

$$k^{(2)}(t, y, w) = I_2(t, w) + J_2(t)y^{\frac{1}{2}} + M_2(t)y, I_2(T, w) = J_2(T) = M_2(T) = 0, \quad (3.56)$$

将 (3.56)、(3.51)、(3.46) 式代入 (3.55)

$$\begin{aligned} & I_{2t} + J_{2t}y^{\frac{1}{2}} + M_{2t}y + \theta[(2\theta+1)\sigma^2 - 2ry](\frac{1}{2}J_2y^{\frac{1}{2}} + M_2) + \\ & 2\theta^2\sigma^2 y(-\frac{1}{4}J_2y^{\frac{3}{2}}) - \frac{\rho_2\beta(\mu-r)}{\sigma}\sqrt{y}I_{1w} + \frac{(\mu-r)^2}{4\sigma^2}y - \\ & \frac{r}{2} - qwe^{r(T-t)} + \alpha I_w - \frac{1}{2}\beta^2(1-\rho_2^2)I_w^2 = 0, \end{aligned} \quad (3.57)$$

将 (3.57) 式按  $y$  不同阶数分类可得:

$$\begin{cases} M_{2t} - 2r\theta M_2 + \frac{(\mu-r)^2}{4\sigma^2} = 0, \\ I_{2t} + \theta(2\theta+1)\sigma^2 M_2 - \frac{r}{2} - qwe^{r(T-t)} + \alpha I_w - \frac{1}{2}\beta^2(1-\rho_2^2)I_w^2 = 0, \\ J_{2t} - r\theta J_2 - \frac{\rho_2\beta(\mu-r)}{\sigma} I_{1w} = 0, \end{cases} \quad (3.58)$$

求解 (3.58) 可得:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_2(t) = \frac{(\mu-r)^2}{8r\sigma^2\theta} [1 - e^{2r\theta(t-T)}], \\ I_2(t, w) = \theta(2\theta+1)\sigma^2 \int_t^T M_2(s) ds + \alpha \int_t^T I_w ds \\ \quad - \frac{q}{r} w(e^{r(T-t)} - 1) + \frac{r}{2}(t-T) \\ \quad - [\frac{1}{2}w^2(\beta^2 + \sigma_1^2) + \frac{1}{2}r\beta^2(1-\rho_2^2)] \int_t^T I_w^2 ds, \\ J_2(t) = -\frac{\rho_2\beta(\mu-r)}{\sigma} e^{r\theta(t-T)} \int_t^T I_{1w} e^{r\theta(T-s)} ds, \end{array} \right. \quad (3.59)$$

即  $k^{(2)}(t, y, w)$  得证.

综上所述, 有以下定理, 即

**定理 3.1** 在 CARA 效用函数下, 使得终端财富的期望效用最大化的最优投资策略为:

$$\pi^* = \frac{e^{r(t-T)}}{qv\sigma^2 s^{2\theta}} \left[ \begin{array}{l} 1 + 2\theta\sigma^2(m_y^{(0)} + \sqrt{\varepsilon_0}m_y^{(1)} + \varepsilon_0m_y^{(2)}) - \rho_1\sigma\delta\sqrt{r}s^\theta(m_r^{(0)} + \sqrt{\varepsilon_0}m_r^{(1)} + \varepsilon_0m_r^{(2)}) + \\ 2\theta\sigma^2(k_y^{(0)} + \sqrt{\varepsilon_1}k_y^{(1)} + \varepsilon_1k_y^{(2)}) - \beta\sigma\rho_2s^\theta(k_w^{(0)} + \sqrt{\varepsilon_1}k_w^{(1)} + \varepsilon_1k_w^{(2)}) \end{array} \right]. \quad (3.60)$$

式中  $m^{(0)}$ 、 $m^{(1)}$ 、 $m^{(2)}$  分别由方程 (3.31) 和 (3.34)、(3.36) 和 (3.39)、(3.41) 和 (3.44) 给出,  $k^{(0)}$ 、 $k^{(1)}$ 、 $k^{(2)}$  分别由方程 (3.46) 和 (3.49)、(3.51) 和 (3.54)、(3.56) 和 (3.59) 给出.

### 3.3 数值分析

在本节中, 将通过数值模拟来分析主要参数对最优策略的影响并解释模拟结果的经济意义. 在数值分析中, 基本参数由表 3-1 给出.

表 3-1 基本参数值

| 参数 | $\varepsilon_0$ | $\varepsilon_1$ | $r$  | $\theta$ | $v$ | $\sigma$ | $t$ | $T$ | $\rho_1$ | $\rho_2$ | $q$  | $\mu$ | $s$ | $\beta$ | $\delta$ | $k_1$ | $k_2$ |
|----|-----------------|-----------------|------|----------|-----|----------|-----|-----|----------|----------|------|-------|-----|---------|----------|-------|-------|
| 取值 | 0.1             | 0.1             | 0.05 | -1       | 300 | 1        | 0   | 3   | 0        | 1        | 0.05 | 0.3   | 3   | 0.2     | 1        | 1.4   | 0.3   |

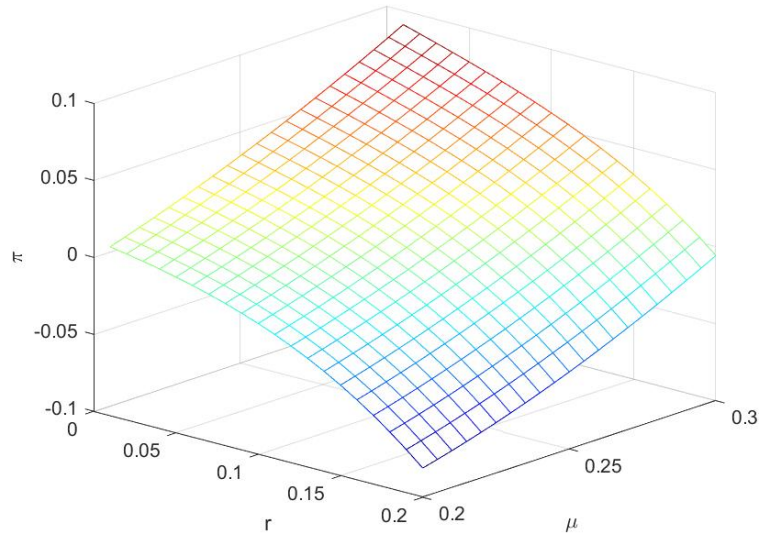


图 3-1  $r$ 和 $\mu$ 对最优投资策略的影响

图 3-1 表明, 最优投资策略  $\pi^*$  随着无风险利率  $r$  的增大而减小, 这意味着当无风险利率增加时, 投资于无风险资产的收益更大. 因此, 家庭减少了股票的投资金额, 以避免投资风险, 这与实际的金融市场情况一致.  $\pi^*$  随参数  $\mu$  变大而增大, 说明随着股票的预期瞬时回报增加, 家庭为了获得财富而在股票上投入更多的钱.

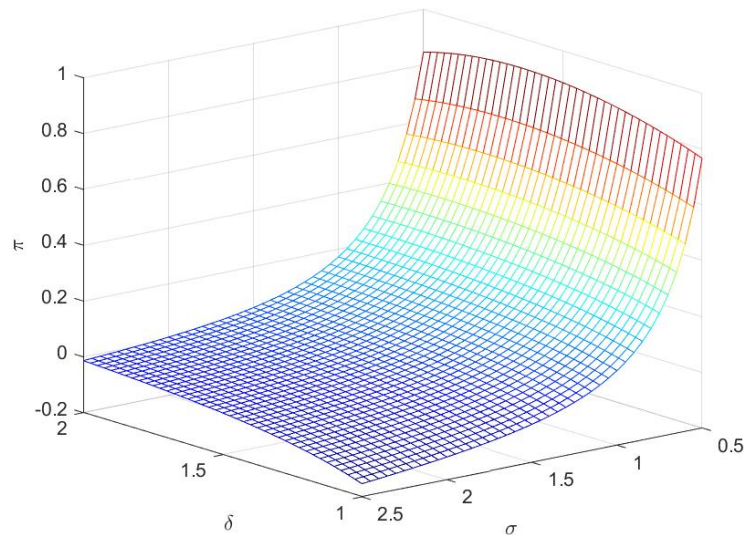


图 3-2  $\delta$ 和 $\sigma$ 对最优投资策略的影响

图 3-2 表明, 最优投资比例是参数  $\delta$  的递增函数. 这意味着, 如果现金收入的波动率  $\delta$  增加, 则投资于风险资产的金额也相应增加.  $\pi^*$  与  $\sigma$  的值具有相反的趋势. 事实上,  $\sigma$  参数越大, 股票的瞬时波动率就越大, 导致投资风险越大. 相应地, 投资者会减少对股票的投资.

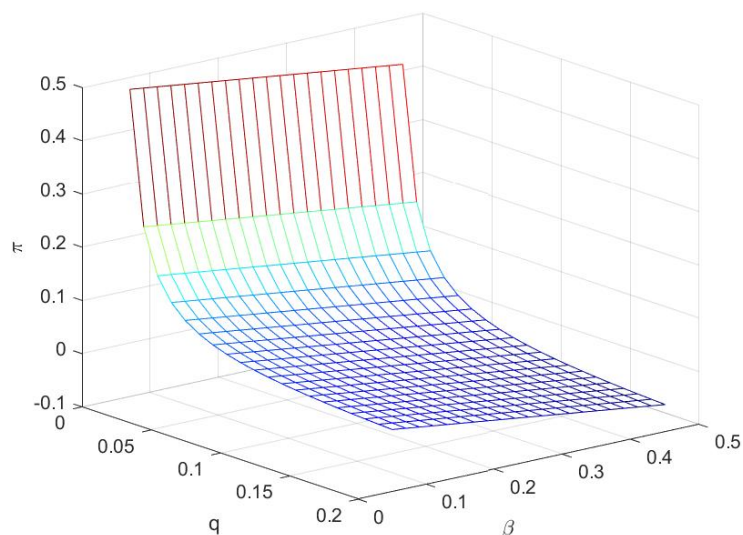


图 3-3  $q$  和  $\beta$  对最优投资策略的影响

图 3-3 表明, 随着风险厌恶系数  $q$  的增加, 投资者对股票的投资比例降低. 这主要是因为更高的风险厌恶系数会使得投资者想要规避更多的风险, 因此投资者会倾向于降低股票的投资比例, 转而增加无风险资产的投资比例.  $\beta$  变大, 投资者在风险资产上投入的资金就会减少, 这说明当消费的波动率变大时, 投资者为了确保自身消费, 更倾向于无风险资产的投资.

### 3.4 结论

本章研究了在随机消费和随机利率情形下, 不同因素对最优投资策略的影响. 根据数值模拟结果, 得到以下结论

- (1) 当风险资产波动率、风险厌恶系数以及利率增加时, 投资者会减少股票投资比例.
- (2) 当股票的平均回报率和现金收入的波动率增加时, 投资者会增加股票的投资比例.

本章研究得到的考虑随机消费和随机利率的最优投资策略, 可以给予投资者更好的投资指导和建议, 帮助投资者进行投资规划.

## 第 4 章 基于 CEV 模型考虑随机消费、随机利率和通胀风险的最优投资策略

本章在第 3 章的基础上, 进一步引入通胀因素, 研究了通胀风险对最优投资策略的影响. 通过结合对偶方法、Legendre 变换以及动态规划原理, 求解了以终端财富期望效用最大化为目标的优化问题, 并得到了考虑通胀风险的最优投资策略解析解. 最后, 利用数值模拟方法, 分析了通胀风险及其他相关参数对最优投资策略的影响.

### 4.1 模型建立

令  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$  为完备概率空间,  $P$  是概率测度,  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$  表示  $t$  时刻的信息流. 本研究考虑一个简单的投资组合, 它是由两种金融资产组成. 一种是无风险资产, 另一种是风险资产. 假设风险资产允许卖空和存在以无风险资产借贷的事件. 设  $S_0(t)$  表示无风险资产在时刻  $t$  的价格, 其表示为:

$$dS_0(t) = r(t)S_0(t)dt, S(0) = S_0 > 0,$$

式中  $r(t)$  是利率, 遵循 CIR 过程, 即

$$dr(t) = (k_1 - k_2 r(t))dt + \delta \sqrt{r(t)}dW_1(t), r(0) = r_0 > 0, \quad (4.1)$$

式中:  $k_1$  是利率向均衡水平回归的速度参数;  $k_2$  是利率均衡水平附近波动的参数;  $\delta$  是随机波动的强度参数.  $k_1, k_2$  和  $\delta$  是正常数, 并且假设满足费勒条件, 即  $2k_1 > \delta^2$  成立.

假设风险资产的价格  $S(t)$  遵循 CEV 过程, 即

$$dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma S^\theta(t)dW_2(t)), \quad (4.2)$$

式中:  $\mu$  是预期瞬时收益率;  $\sigma$  是瞬时波动率;  $\theta$  是弹性参数.

假设家庭支出包括家庭消费支出. 因此, 家庭支出具有随机性. 将时刻  $t$  的家庭支出表示为  $w_t$ , 为区别第 3 章家庭消费支出, 在第 4 章我们把家庭消费支出表示为:

$$\frac{dw(t)}{w(t)} = \alpha dt + \beta dW_3(t), \quad (4.3)$$

式中  $\alpha$  是漂移项，即随机消费过程的平均增长率； $\beta$  是波动率项，用于描述随机消费过程的波动性； $\alpha$  和  $\beta$  为常数。金融市场中各种资产价值受通货膨胀影响较大，为了排除通胀的影响，本章用价格指数表示市场通胀水平，价格  $P(t)$  指数满足如下随机微分方程：

$$\begin{cases} \frac{dP(t)}{P(t)} = \mu_1 dt + \sigma_1 dW_4(t), \\ P(0) = P_0, \end{cases}$$

常数  $\mu_1$  为平均通胀率，常数  $\sigma_1$  为预期通货膨胀率的波动率， $W_1(t)$ 、 $W_2(t)$ 、 $W_3(t)$  和  $W_4(t)$  是标准布朗运动，且满足  $dW_1(t)dW_2(t) = \rho_1 dt$ ， $dW_2(t)dW_3(t) = \rho_2 dt$ ， $\rho_1\rho_2 = 0$ ， $dW_1(t)dW_3(t) = 0$ ， $W_4(t)$  与  $W_1(t)$ 、 $W_2(t)$ 、 $W_3(t)$  无关。

受通胀影响后的实际风险资产的价格过程为：

$$d\hat{S}(t) = \frac{S(t)}{p(t)}[(u + \sigma_1^2 - \mu_1)dt + \sigma S^\theta dw_2(t) - \sigma_1 dW_4(t)],$$

受通胀影响后实际无风险价格过程为：

$$d\hat{S}_0(t) = \frac{S_0(t)}{p(t)}[(r + \sigma_1^2 - \mu_1)dt - \sigma_1 dW_4(t)],$$

受通胀影响后实际家庭消费支出过程为：

$$d\hat{w}(t) = \hat{w}[(\alpha + \sigma_1^2 - \mu_1)dt + \beta dW_3(t) - \sigma_1 dW_4(t)].$$

设  $\hat{V}(t)$  表示  $t$  时刻的实际个人财富， $\pi(t)$  表示投资于风险资产的财富比例。

那么投资于无风险资产的财富比例为  $1 - \pi(t)$ 。财富过程  $\hat{V}(t)$  满足以下随机过程，即

$$d\hat{V} = [\hat{V}(\pi(u - \hat{V}) + r + \sigma_1^2 - \mu_1) - \hat{w}]dt + \hat{V}\pi\sigma S^\theta dW_2(t) - \hat{V}\sigma_1 dW_4(t),$$

式中：初始财富  $\hat{V}_0 > 0$ 。

设所有容许策略的集合记为  $A = \{\pi(t), 0 \leq t \leq T\}$ 。个人目标是在有限的时间范围内最大化终端财富的预期效用，即

$$\max_{\pi(t) \in A} E[U(\hat{V}(T))],$$

式中：\$U(\bullet)\$ 是效用函数. 本章考虑 CARA 效用函数，其表达式为：

$$U(x) = -\frac{e^{-qx}}{q}. \quad (4.4)$$

## 4.2 HJB 方程和最优投资策略

在本节中，我们主要讨论如何找到第 4.1 节中目标函数的最优解. 首先，定义一个价值函数 \$H(t, s, r, \hat{w}, v)\$ 为：

$$H(t, s, r, \hat{w}, v) = \sup_{\pi(t) \in \mathcal{A}} E[U(V(T)) | \hat{S}(t) = s, \hat{V}(t) = v, r(t) = r, \hat{w}(t) = \hat{w}], 0 \leq t \leq T,$$

边界条件 \$H(T, s, r, \hat{w}, v) = U(v)\$，价值函数 \$H(t, s, r, \hat{w}, v)\$ 的 HJB 方程为：

$$\begin{aligned} & H_t + \mu s H_s + [v(r + \sigma_1^2 - \mu_1) - \hat{w}] H_v + (k_1 - k_2 r) H_r + \\ & \hat{w}(\alpha + \sigma_1^2 - \mu_1) H_{\hat{w}} + \frac{1}{2} \sigma^2 s^{2\theta+2} H_{ss} + \rho_1 \sigma \delta \sqrt{r} s^{\theta+1} H_{sr} + \\ & \rho_2 \beta \sigma s^{\theta+1} H_{s\hat{w}} + \frac{1}{2} r \delta^2 H_{rr} + \frac{1}{2} \hat{w}^2 (\beta^2 + \sigma_1^2) H_{\hat{w}\hat{w}} + \\ & \sup_{\pi} \left\{ \frac{1}{2} \pi^2 \sigma^2 s^{2\theta} v^2 H_{vv} + \pi [(\mu - r) v H_v + \sigma^2 s^{2\theta+1} v H_{vs}] \right. \\ & \left. + \beta \sigma \rho_2 s^{\theta} v H_{v\hat{w}} + \rho_1 s^{\theta} v \sigma \delta \sqrt{r} H_{vr} \right\} = 0, \end{aligned} \quad (4.5)$$

式中：\$H\_t\$、\$H\_s\$、\$H\_v\$、\$H\_r\$、\$H\_{\hat{w}}\$、\$H\_{ss}\$、\$H\_{vv}\$、\$H\_{rr}\$、\$H\_{\hat{w}\hat{w}}\$、\$H\_{vs}\$、\$H\_{vr}\$、\$H\_{v\hat{w}}\$ 和 \$H\_{s\hat{w}}\$ 表示关于参数 \$t\$、\$s\$、\$v\$、\$r\$ 和 \$\hat{w}\$ 的不同偏导数.

由方程 (4.5) 的一阶极大值条件，可得：

$$\pi^* = -\frac{(\mu - r) H_v + \sigma^2 s^{2\theta+1} H_{vs} + \beta \sigma \rho_2 s^{\theta} H_{v\hat{w}} + \rho_1 s^{\theta} \sigma \delta \sqrt{r} H_{vr}}{v \sigma^2 s^{2\theta} H_{vv}}. \quad (4.6)$$

将方程 (4.6) 代入方程 (4.5)，可得：

$$\begin{aligned} & H_t + \mu s H_s + [v(r + \sigma_1^2 - \mu_1) - \hat{w}] H_v + (k_1 - k_2 r) H_r + \\ & + \hat{w}(\alpha + \sigma_1^2 - \mu_1) H_{\hat{w}} + \frac{1}{2} \sigma^2 s^{2\theta+2} H_{ss} + \frac{1}{2} r \delta^2 H_{rr} + \\ & + \rho_1 \sigma \delta \sqrt{r} s^{\theta+1} H_{sr} + \rho_2 \beta \delta s^{\theta+1} H_{s\hat{w}} + \frac{1}{2} \hat{w}^2 (\beta^2 + \sigma_1^2) H_{\hat{w}\hat{w}} \\ & - [(\mu - r) H_v + \sigma^2 s^{2\theta+1} H_{vs} + \beta \sigma \rho_2 s^{\theta} H_{v\hat{w}} + \rho_1 \sigma \delta \sqrt{r} s^{\theta} H_{vr}]^2 \frac{1}{2 \sigma^2 s^{2\theta} H_{vv}} = 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

与第 3 章相同，对于方程 (4.7) 利用 Legendre 变换和对偶方法，定义 \$H\$ 的 Legendre 变换定义为：

$$\hat{H}(t, s, r, \hat{w}, v) = \sup_{v>0} \{H(t, s, r, \hat{w}, v) - zv | 0 < t < T\},$$

式中：  $z > 0$  表示  $v$  的对偶变量。

$v$  的最优值由  $g(t, s, r, \hat{w}, z)$  表示为：

$$g(t, s, r, \hat{w}, z) = \inf_{v > 0} \{v \mid H(t, s, r, \hat{w}, z) \geq zv + \hat{H}(t, s, r, \hat{w}, z), 0 \leq t \leq T\},$$

于是有

$$\hat{H}(t, s, r, \hat{w}, z) = \hat{H}(t, s, r, \hat{w}, g) - zg, g(t, s, r, \hat{w}, g) = v,$$

因此，值函数  $H$  和对偶函数  $\hat{H}$  的导数的关系为：

$$\begin{aligned} H_v = z, H_t = \hat{H}_t, H_s = \hat{H}_s, H_{\hat{w}} = \hat{H}_{\hat{w}}, g = -\hat{H}_z, H_{vv} = -\frac{1}{\hat{H}_{zz}}, \\ H_{ss} = \hat{H}_{ss} - \frac{\hat{H}_{sz}^2}{\hat{H}_{zz}}, H_{rr} = \hat{H}_{rr} - \frac{\hat{H}_{rz}^2}{\hat{H}_{zz}}, H_{\hat{w}\hat{w}} = \hat{H}_{\hat{w}\hat{w}} - \frac{\hat{H}_{z\hat{w}}^2}{\hat{H}_{zz}}, \\ H_{vs} = -\frac{\hat{H}_{sz}^2}{\hat{H}_{zz}}, H_{v\hat{w}} = -\frac{\hat{H}_{z\hat{w}}^2}{\hat{H}_{zz}}, H_{sr} = \hat{H}_{sr} - \frac{\hat{H}_{sz}\hat{H}_{rz}}{\hat{H}_{zz}}, H_{s\hat{w}} = \hat{H}_{s\hat{w}} - \frac{\hat{H}_{s\hat{w}}\hat{H}_{z\hat{w}}}{\hat{H}_{zz}}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

本章用函数  $g$  作为  $H$  的对偶函数，它将提供一个简单的方法来计算最优策略。

边界条件  $H(T, s, x, y, v) = U(v)$ ，定义

$$\begin{aligned} g(t, s, r, \hat{w}, z) &= \inf_{v > 0} \{v \mid H(t, s, r, \hat{w}, z) \geq zv + \hat{H}(t, s, r, \hat{w}, z)\}, \\ \hat{H}(t, s, r, \hat{w}, z) &= \sup_{v > 0} \{U(v) - zv \mid v > 0\}, \end{aligned}$$

由上可得：

$$g(T, s, r, \hat{w}, z) = (U')^{-1}(z). \quad (4.9)$$

将方程 (4.8) 代入方程 (4.7)，我们可以得到函数  $\hat{H}$  的以下等式

$$\begin{aligned} &\hat{H}_t + \mu s \hat{H}_s + [(r + \sigma^2 - \mu)g - \hat{w}]z + \hat{w}(\alpha + \sigma_1^2 - \mu)\hat{H}_{\hat{w}} + \\ &(k_1 - k_2 r)\hat{H}_r + \frac{1}{2}\delta^2 r \hat{H}_{rr} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^{2\theta+2} \hat{H}_{ss} - \frac{1}{2}\delta^2 r(1 - \rho_1^2) \frac{\hat{H}_{rz}^2}{\hat{H}_{zz}} + \\ &\rho_1 \sigma \delta \sqrt{r} s^{\theta+1} \hat{H}_{sr} + \frac{1}{2}\beta^2 \rho_2^2 \frac{\hat{H}_{\hat{w}z}^2}{\hat{H}_{zz}} - (\mu - r)sz \hat{H}_{sz} - \\ &\frac{1}{2}\hat{w}^2(\beta^2 + \sigma_1^2)(\hat{H}_{\hat{w}\hat{w}} - \frac{\hat{H}_{\hat{w}z}^2}{\hat{H}_{zz}}) + \frac{(\mu - r)^2 z^2}{2\sigma^2 s^{2\theta}} \hat{H}_{zz} - \\ &\frac{(\mu - r)\rho_1 \delta \sqrt{r} z}{\sigma s^\theta} \hat{H}_{rz} + \rho_2 \beta \sigma s^{\theta+1} \hat{H}_{s\hat{w}} - \frac{(\mu - r)\rho_2 \beta z}{\sigma s^\theta} \hat{H}_{\hat{w}z} = 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

对于等式  $g(t, s, r, \hat{w}, z) = -\hat{H}$ ，两侧关于变量  $t, s, r, \hat{w}$  和  $z$  微分，得到一阶和二阶偏导数，然后代入方程 (4.10) 两边关于  $z$  进行微分后的方程，可以得到：

$$\begin{aligned}
 & g_t + rs g_s + [\hat{w} - g(r + \sigma_1^2 - \mu_1)] + \left[ \frac{(u-r)^2}{\sigma^2 s^{2\theta}} (r + \sigma_1^2 - \mu_1) \right] z g_z + \\
 & \hat{w}(\alpha + \sigma_1^2 - \mu_1) g_{\hat{w}} + (k_1 - k_2 r) g_r + \frac{1}{2} \sigma^2 s^{2\theta+2} g_{ss} + \frac{1}{2} r \delta^2 g_{rr} + \\
 & \frac{1}{2} r \delta^2 (1 - \rho_1^2) \frac{g_r^2 g_{zz}}{g_z^2} + \rho_1 \sigma \delta \sqrt{r} s^{\theta+1} g_{sr} + \rho_2 \beta s^{\theta+1} g_{s\hat{w}} + \\
 & \frac{(u-1)^2 z^2}{2 \sigma^2 s^{2\theta}} g_{zz} + \frac{1}{2} \hat{w}^2 (\beta^2 + \sigma^2) (g_{\hat{w}\hat{w}} + \frac{g_{\hat{w}}^2 g_{zz}}{g_z^2}) + \\
 & \frac{1}{2} \beta^2 \rho_2^2 \frac{g_{\hat{w}}^2 g_{zz}}{g_z^2} - \frac{\rho_1 \delta \sqrt{r} (\mu - r)}{\sigma s^\theta} g_r - \frac{(\mu - r) \beta \rho_2}{\delta s^\theta} g_{\hat{w}} = 0.
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

考虑由方程 (4.4) 描述的 CARA 效用函数. 联立方程 (4.9) 和 (4.4), 有

$$g(T, s, r, \hat{w}, z) = -\frac{1}{q} \ln z.$$

假设方程 (4.11) 的解可表示为:

$$\begin{cases} g(t, s, r, \hat{w}, z) = -\frac{1}{q} \left[ h_1(t)(\ln z + \hat{m}(t, y, r) + \hat{k}(t, y, \hat{w})) \right] + n(t), \\ y = s^{-2\theta}, \end{cases} \tag{4.12}$$

边界条件为  $h_1(T) = 1, n(T) = 0, \hat{m}(T, y, r) = 0$  和  $\hat{k}(T, y, \hat{w}) = 0$ .

将方程 (4.12) 代入方程 (4.11) 可得:

$$\begin{aligned}
 & [h_t + (r + \sigma_1^2 - \mu_1) h_1(t)] (\ln z + \hat{m} + \hat{k}) + [(r + \sigma_1^2 - \mu_1) n(t) - n_t] q \\
 & + h_1(t) [(L_1 + L_2 + L_3) \hat{m} + (F_1 + F_2 + F_3) \hat{k} - \frac{1}{2} r \delta^2 (1 - \rho_1^2) (\hat{m}_r)^2 \\
 & - \frac{1}{2} \hat{w}^2 (\beta^2 + \sigma_1^2) (\hat{k}_{\hat{w}})^2 - \frac{1}{2} \beta^2 \rho_2^2 (\hat{k}_{\hat{w}})^2] = 0,
 \end{aligned}$$

其中

$$L_0 \hat{m} = (k_1 - k_2 r) \hat{m}_r + \frac{1}{2} \delta^2 r \hat{m}_{rr}, \tag{4.13}$$

$$L_1 \hat{m} = \hat{m}_t + \theta [(2\theta + 1) \sigma^2 - 2ry] \hat{m}_y + 2\theta^2 \sigma^2 y \hat{m}_{yy} + \frac{(\mu - r)^2}{4\sigma^2} y - \frac{r}{2}, \tag{4.14}$$

$$L_2 \hat{m} = -2\rho_1 \sigma s \sqrt{r} \sqrt{y} \hat{m}_{yr} - \frac{\rho_1 \delta \sqrt{r} (\mu - r)}{\sigma} \sqrt{y} \hat{m}_r, \tag{4.15}$$

$$F_0 \hat{k} = \hat{w}(\alpha + \sigma_1^2 - \mu_1) \hat{k}_{\hat{w}} + \frac{1}{2} \hat{w}^2 (\beta^2 + \sigma_1^2) \hat{k}_{\hat{w}\hat{w}}, \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}
 F_1 \hat{k} &= \hat{k}_t + \theta [(2\theta + 1) \sigma^2 - 2ry] \hat{k}_y + 2\sigma^2 \theta^2 y \hat{k}_{yy} + \\
 & \frac{(4-r)^2}{4\sigma^2} y - \frac{r}{2} - \sigma_1^2 + \mu_1 - q e^{(r+\sigma_1^2-\mu_1)(T-t)} \hat{w},
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

$$F_2 \hat{k} = -2\beta\sigma\theta\rho_2 \sqrt{y} \hat{k}_{y\hat{w}} - \frac{(\mu-r)\beta\rho_2}{\sigma} \sqrt{y} \hat{k}_{\hat{w}}. \quad (4.18)$$

此外，通过分离变量联立边界条件我们可以解得：

$$\begin{aligned} h_1(t) &= e^{(r+\sigma_1^2-u_1)(t-T)}, \quad n(t) = 0. \\ (L_0 + L_1 + L_2)\hat{m} + (F_0 + F_1 + F_2)\hat{k} - \frac{1}{2}\delta^2 r(1-\rho_1^2)\hat{m}_r^2 - \\ \frac{1}{2}[\hat{w}^2(\beta^2 + \sigma_1^2) - \beta^2 \rho_2^2]\hat{k}_{\hat{w}}^2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

类似地，通过令  $r^{\varepsilon_0}(t)$  来代替方程 (4.1) 中的  $r(t)$ ， $w^{\varepsilon_1}(t)$  来代替方程 (4.3) 中的  $w(t)$ ，来找到方程 (4.13) 的渐近解

$$\begin{aligned} dr^{\varepsilon_0}(t) &= \varepsilon_0(k_1 - k_2 r(t))dt + \sqrt{\varepsilon_0} \sqrt{r(t)} dW_1(t), \\ dw^{\varepsilon_1}(t) &= \varepsilon_1 \alpha dt + \sqrt{\varepsilon_1} \beta dW_3(t), \end{aligned} \quad (4.20)$$

式中  $0 < \varepsilon_0 \ll 1$ ， $0 < \varepsilon_1 \ll 1$  是两个小的正参数。

将方程 (4.20) 代入方程 (4.19) 可得：

$$\begin{aligned} (\varepsilon_0 L_0 + L_1 + \sqrt{\varepsilon_0} L_2)\hat{m}^{\varepsilon_0} - \frac{1}{2}\delta^2 r(1-\rho_1^2)(\hat{m}_r^{\varepsilon_0})^2 &= 0, \\ (\varepsilon_1 F_0 + F_1 + \sqrt{\varepsilon_1} F_2)\hat{k}^{\varepsilon_1} - \frac{1}{2}[\hat{w}^2(\beta^2 + \sigma_1^2) - \beta^2 \rho_2^2](\hat{k}_{\hat{w}}^{\varepsilon_1})^2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

假设方程 (4.21) 的解遵循以下形式，即

$$\begin{aligned} \hat{m}^{\varepsilon_0} &= \hat{m}^{(0)}(t, y, r) + \sqrt{\varepsilon_0} \hat{m}^{(1)}(t, y, r) + \varepsilon_0 \hat{m}^{(2)}(t, y, r), \\ \hat{k}^{\varepsilon_1} &= \hat{k}^{(0)}(t, y, \hat{w}) + \sqrt{\varepsilon_1} \hat{k}^{(1)}(t, y, \hat{w}) + \varepsilon_1 \hat{k}^{(2)}(t, y, \hat{w}). \end{aligned} \quad (4.22)$$

将方程 (4.22) 代入方程 (4.21) 得：

$$\begin{aligned} L_1 \hat{m}^{(0)} + \sqrt{\varepsilon_0} (L_1 \hat{m}^{(1)} + L_2 \hat{m}^{(0)}) + \varepsilon_0 (L_0 \hat{m}^{(0)} + L_1 \hat{m}^{(2)} + L_2 \hat{m}^{(1)} \\ - \frac{1}{2} \delta^2 r(1-\rho_1^2)(\hat{m}_r^{(0)})^2) &= 0, \\ F_1 \hat{k}^{(0)} + \sqrt{\varepsilon_1} (F_1 \hat{k}^{(1)} + F_2 \hat{k}^{(0)}) + \varepsilon_1 (F_0 \hat{k}^{(0)} + F_1 \hat{k}^{(2)} + F_2 \hat{k}^{(1)} - \\ \frac{1}{2} [\hat{w}^2(\beta^2 + \sigma_1^2) - \beta^2 \rho_2^2](\hat{k}_{\hat{w}}^{(0)})^2) &= 0. \end{aligned} \quad (4.23)$$

根据 (4.23) 里  $\varepsilon_0$ 、 $\varepsilon_1$  不同阶数，可以得到如下六个方程

$$L_1 \hat{m}^{(0)} = 0, \quad \hat{m}^{(0)}(T, y, r) = 0. \quad (4.24)$$

$$L_1 \hat{m}^{(1)} + L_2 \hat{m}^{(0)} = 0, \quad \hat{m}^{(1)}(T, y, r) = 0. \quad (4.25)$$

$$L_0 \hat{m}^{(0)} + L_1 \hat{m}^{(2)} + L_2 \hat{m}^{(1)} - \frac{1}{2} \delta^2 r(1-\rho_1^2)(\hat{m}_r^{(0)})^2 = 0, \quad \hat{m}^{(2)}(T, y, r) = 0. \quad (4.26)$$

$$F_1 \hat{k}^{(0)} = 0, \quad \hat{k}^{(0)}(T, y, \hat{w}) = 0. \quad (4.27)$$

$$F_1 \hat{k}^{(1)} + F_2 \hat{k}^{(0)} = 0, \quad \hat{k}^{(1)}(T, y, \hat{w}) = 0. \quad (4.28)$$

$$F_0 \hat{k}^{(0)} + F_1 \hat{k}^{(2)} + F_2 \hat{k}^{(1)} - \frac{1}{2} [\hat{w}^2 (\beta^2 + \sigma_1^2) - \beta^2 \rho_2^2] (\hat{k}_w^{(0)})^2 = 0, \quad \hat{k}^{(2)}(T, y, \hat{w}) = 0. \quad (4.29)$$

式 (4.24)- (4.26) 关于  $\hat{m}^{(0)}$ 、 $\hat{m}^{(1)}$ 、 $\hat{m}^{(2)}$  的解与第 3 章  $m^{(0)}$ 、 $m^{(1)}$ 、 $m^{(2)}$  的解一致, 下面我们对  $\hat{k}^{(0)}$ 、 $\hat{k}^{(1)}$ 、 $\hat{k}^{(2)}$  进行分别求解.

对  $\hat{k}^{(0)}$  进行求解, 将式 (4.27) 代入 (4.17) 可得:

$$\begin{aligned} & \hat{k}_t^{(0)} + \theta[(2\theta+1)\sigma^2 - 2ry] \hat{k}_y^{(0)} + 2\theta^2 \sigma^2 y \hat{k}_{yy}^{(0)} + \\ & \frac{(\mu-r)^2}{4\sigma^2} y - q\hat{w}e^{(r-\sigma_1^2+\mu_1)(T-t)} - \frac{r}{2} - \sigma_1^2 + \mu_1 = 0. \end{aligned} \quad (4.30)$$

设

$$\hat{k}^{(0)}(t, y, \hat{w}) = \hat{I}(t, \hat{w}) + \hat{J}(t)y, \quad \hat{I}(T, \hat{w}) = \hat{J}(T) = 0, \quad (4.31)$$

将 (4.31) 式代入 (4.30)

$$\begin{aligned} & \hat{I}_t + q(2\theta+1)\sigma^2 \hat{J}(t) - q\hat{w}e^{(r+\sigma_1^2-\mu_1)(T-t)} - \frac{r}{2} - \\ & \sigma_1^2 + \mu_1 + y[\hat{J}_t - 2r\theta \hat{J}(t) + \frac{(\mu-r)^2}{4\sigma^2}] = 0, \end{aligned} \quad (4.32)$$

将 (4.32) 式按  $y$  不同阶数分类可得:

$$\begin{cases} \hat{J}_t - 2r\theta \hat{J}(t) + \frac{(\mu-r)^2}{4\sigma^2} = 0, \\ \hat{I}_t + \theta(2\theta+1)\sigma^2 \hat{J}(t) - q\hat{w}e^{(r+\sigma_1^2-\mu_1)(T-t)} - \frac{r}{2} - \sigma_1^2 + \mu_1 = 0, \end{cases} \quad (4.33)$$

求解 (4.33) 可得:

$$\begin{cases} \hat{J}(t) = \frac{(\mu-r)^2}{8r\theta\sigma^2} [1 - e^{2r\theta(t-T)}], \\ \hat{I}(t, \hat{w}) = \frac{q}{r+\sigma_1^2-\mu_1} \hat{w} \left[ 1 - e^{(r+\sigma_1^2-\mu_1)(T-t)} \right] + \\ \left[ \frac{(2\theta+1)(\mu-r)^2}{8r} - \frac{r}{2} - \sigma_1^2 + \mu_1 \right] (T-t) + \\ \frac{(2\theta+1)(\mu-r)^2}{16r^2\theta} \cdot [1 - e^{2r\theta(t-T)}], \end{cases} \quad (4.34)$$

即  $\hat{k}^{(0)}(t, y, \hat{w})$  得证.

对  $\hat{k}^{(1)}$  进行求解, 将式 (4.28) 代入 (4.18) 可得:

$$\begin{aligned} & \hat{k}_t^{(1)} + \theta[(2\theta+1)\sigma^2 - 2ry] \hat{k}_y^{(1)} + 2\theta^2 \sigma^2 y \hat{k}_{yy}^{(1)} - qe^{(r+\sigma_1^2-\mu_1)(T-t)} \hat{w} \\ & - \frac{(\mu-r)^2}{4\sigma^2} y - \frac{r}{2} - \sigma_1^2 + \mu_1 - 2\rho_2 \sigma \delta \sqrt{r} \sqrt{y} \hat{k}_{y\hat{w}}^{(0)} - \frac{(\mu-r)\beta\rho_2}{\sigma} \sqrt{y} \hat{k}_{\hat{w}}^{(0)}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

设

$$\hat{k}^{(1)}(t, y, \hat{w}) = \hat{I}_1(t, \hat{w}) + \hat{J}_1(t, y^{\frac{1}{2}} + \hat{M}_1(t)y) \quad \hat{I}_1(T, \hat{w}) = \hat{J}_1(T) = \hat{M}_1(T) = 0, \quad (4.36)$$

将 (4.36)、(4.31) 式代入 (4.35)

$$\begin{aligned} & \hat{I}_{1t} + \hat{J}_{1t}y^{\frac{1}{2}} + \hat{M}_{1t}y + \theta[(2\theta+1)\sigma^2 - 2ry](\frac{1}{2}\hat{J}_1y^{\frac{1}{2}} + \hat{M}_1) + 2\sigma^2\theta^2y(-\frac{1}{4}y^{\frac{3}{2}}) \\ & + qe^{(r+\sigma_1^2-\mu_1)(T-t)}\hat{w} + \frac{(\mu-r)^2}{4\sigma^2}y - \frac{r}{2} - \sigma_1^2 + u_1 - \frac{(\mu-r)\beta\rho_2}{\sigma}\sqrt{y}\hat{I}_{\hat{w}} = 0, \end{aligned} \quad (4.37)$$

将 (4.37) 式按  $y$  不同阶数分类可得：

$$\begin{cases} \hat{M}_{1t} - 2\theta r\hat{M}_1 + \frac{(\mu-r)^2}{4\sigma^2} = 0, \\ \hat{I}_{1t} + \theta(2\theta+1)\sigma^2\hat{M}_1 - \frac{r}{2} - \sigma_1^2 + u_1 - qe^{(r+\sigma_1^2-\mu_1)(T-t)}\hat{w} = 0, \\ \hat{J}_{1t} - r\theta\hat{J}_1 - \frac{(\mu-r)\beta\rho_2}{\sigma}\hat{I}_{\hat{w}} = 0, \end{cases} \quad (4.38)$$

求解 (4.38) 可得：

$$\begin{cases} \hat{M}_1(t) = \frac{(\mu-r)^2}{8r\theta\sigma^2}[1 - e^{2r\theta(t-T)}], \\ \hat{I}_1(t, \hat{w}) = \theta(2\theta+1)\sigma^2 \int_s^T \hat{M}_1(t)ds - \left(\frac{r}{2} + \sigma_1^2 - \mu\right)(T-t) - \\ \quad \frac{q\hat{w}}{r + \sigma_1^2 - \mu_1}[e^{(r+\sigma_1^2-\mu_1)(T-t)} - 1], \\ \hat{J}_1(t) = -\frac{(\mu-r)\beta\rho_2}{\sigma}e^{r\theta(t-T)} \int_t^T \hat{I}_{\hat{w}}e^{r\theta(T-s)}ds, \end{cases} \quad (4.39)$$

即  $\hat{k}^{(1)}(t, y, \hat{w})$  得证。

对  $\hat{k}^{(2)}$  进行求解，将式 (4.29) 代入 (4.19) 可得：

$$\begin{aligned} & \hat{k}_t^{(2)} + \theta[(2\theta+1)\sigma^2 - 2ry]\hat{k}_y^{(2)} + 2\theta^2\sigma^2y\hat{k}_{yy}^{(2)} + \frac{(\mu-r)^2}{4\sigma^2}y \\ & - \left(\frac{r}{2} - \sigma_1^2 + \mu_1\right) - q\hat{w}e^{(r-\sigma_1^2+\mu_1)(T-t)} + \hat{w}(\alpha + \sigma_1^2 - \mu_1)\hat{k}_{\hat{w}}^{(0)} \\ & + \frac{1}{2}\hat{w}^2(\beta^2 + \sigma_1^2)\hat{k}_{\hat{w}\hat{w}}^{(0)} - 2\rho_2\beta\sigma\theta\sqrt{y}\hat{k}_{y\hat{w}}^{(1)} - \frac{\rho_2\beta(\mu-r)}{\sigma}\sqrt{y}\hat{k}_{\hat{w}}^{(1)} \\ & - \frac{1}{2}\hat{w}^2(\beta + \sigma_1^2)(\hat{k}_{\hat{w}}^{(0)})^2 - \frac{1}{2}\beta^2\rho_2^2\left(\hat{k}_{\hat{w}}^{(0)}\right)^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.40)$$

设

$$\hat{k}^{(2)}(t, y, \hat{w}) = \hat{I}_2(t, \hat{w}) + \hat{J}_2(t)y^{\frac{1}{2}} + \hat{M}_2(t)y, \quad \hat{I}_2(T, \hat{w}) = \hat{J}_2(T) = \hat{M}_2(T) = 0, \quad (4.41)$$

将 (4.41)、(4.36)、(4.31) 式代入 (4.40)

$$\begin{aligned}
 & \hat{I}_{2t} + \hat{J}_{2t} y^{\frac{1}{2}} + \hat{M}_{2t} y + \theta[(2\theta+1)\sigma^2 - 2ry](\frac{1}{2}\hat{J}_{2t} y^{-\frac{1}{2}} + \hat{M}_{2t}) + \\
 & 2\theta^2\sigma^2 y(-\frac{1}{4}\hat{J}_{2t} y^{-\frac{3}{2}}) - \frac{\rho_2\beta(\alpha-r)}{\sigma}\sqrt{y}\hat{I}_{1\hat{w}} + \frac{(\mu-r)^2}{4\sigma^2}y - \\
 & (\frac{r}{2} - \sigma_1^2 + \mu_1) - q\hat{w}e^{r(T-t)} + \hat{w}(\alpha + \sigma_1^2 - \mu_1)\hat{I}_{\hat{w}} - \\
 & \frac{1}{2}\hat{w}^2(\beta + \sigma_1^2)\hat{I}_{\hat{w}}^2 - \frac{1}{2}\beta^2\rho_2^2\hat{I}_{\hat{w}}^2 = 0,
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

将 (4.42) 式按  $y$  不同阶数分类可得:

$$\begin{cases}
 \hat{M}_{2t} - 2r\theta\hat{M}_{2t} + \frac{(\mu-r)^2}{4\sigma^2} = 0, \\
 \hat{I}_{2t} + \theta(2\theta+1)\sigma^2\hat{M}_{2t} - (\frac{r}{2} - \sigma_1^2 + \mu_1) - q\hat{w}e^{(r-\sigma_1^2+\mu_1)(T-t)} \\
 + \hat{w}(\alpha + \sigma_1^2 - \mu_1)\hat{I}_{\hat{w}} - \left[\frac{1}{2}\hat{w}^2(\beta^2 + \sigma_1^2) + \frac{1}{2}\beta^2\rho_2^2\right]\hat{I}_{\hat{w}}^2 = 0, \\
 \hat{J}_{2t} - r\theta\hat{J}_{2t} - \frac{\rho_2\beta(\mu-r)}{\sigma}\hat{I}_{1\hat{w}} = 0,
 \end{cases} \tag{4.43}$$

求解 (4.43) 可得:

$$\begin{cases}
 \hat{M}_2(t) = \frac{(\mu-r)^2}{8r\sigma^2\theta} [1 - e^{2r\theta(t-T)}], \\
 \hat{I}_2(t, \hat{w}) = \theta(2\theta+1)\sigma^2 \int_t^T \hat{M}_2(s) ds + \hat{w}(\alpha + \sigma_1^2 - \mu_1) \int_t^T \hat{I}_{\hat{w}} ds \\
 - \frac{q\hat{w}}{r + \sigma_1^2 - \mu_1} (e^{(r+\sigma_1^2-\mu_1)(T-t)} - 1) + (\frac{r}{2} - \sigma_1^2 + \mu_1)(t-T) \\
 - [\frac{1}{2}\hat{w}^2(\beta^2 + \sigma_1^2) + \frac{1}{2}\beta^2\rho_2^2] \int_t^T \hat{I}_{\hat{w}}^2 ds, \\
 \hat{J}_2(t) = -\frac{\rho_2\beta(\mu-r)}{\sigma} e^{r\theta(t-T)} \int_t^T \hat{I}_{1\hat{w}} e^{r\theta(T-s)} ds,
 \end{cases} \tag{4.44}$$

即  $\hat{k}^{(2)}(t, y, \hat{w})$  得证.

综上所述, 有以下定理, 即

**定理 4.1** 在 CARA 效用函数下, 使得终端财富的期望效用最大化的最优投资策略为:

$$\pi^* = \frac{e^{(r+\sigma_1^2-\mu_1)(t-T)}}{qv\sigma^2s^{2\theta}} \left[ \frac{1 + 2\theta\sigma^2(m_y^{(0)} + \sqrt{\varepsilon_0}m_y^{(1)} + \varepsilon_0m_y^{(2)}) - \rho_1\sigma\delta\sqrt{r}s^\theta(m_r^{(0)} + \sqrt{\varepsilon_0}m_r^{(1)} + \varepsilon_0m_r^{(2)}) +}{2\theta\sigma^2(\hat{k}_y^{(0)} + \sqrt{\varepsilon_1}\hat{k}_y^{(1)} + \varepsilon_1\hat{k}_y^{(2)}) - \beta\sigma\rho_2s^\theta(\hat{k}_{\hat{w}}^{(0)} + \sqrt{\varepsilon_1}\hat{k}_{\hat{w}}^{(1)} + \varepsilon_1\hat{k}_{\hat{w}}^{(2)})} \right]. \tag{4.45}$$

式中:  $m^{(0)}$ 、 $m^{(1)}$ 、 $m^{(2)}$  分别由方程 (3.31) 和 (3.34)、(3.36) 和 (3.39)、(3.41) 和 (3.44) 给出,  $\hat{k}^{(0)}$ 、 $\hat{k}^{(1)}$ 、 $\hat{k}^{(2)}$  分别由方程 (4.31) 和 (4.34)、(4.36) 和 (3.39)、(4.41) 和 (4.44) 给出.

### 4.3 数值分析

在本节中,将通过数值模拟来分析主要参数对最优策略的影响并解释模拟结果的经济意义.在数值分析中,基本参数由表 4-1 给出.

表 4-1 基本参数值

| 参数 | $\varepsilon_0$ | $\varepsilon_1$ | $r$  | $\theta$ | $v$      | $\sigma$ | $t$   | $T$        | $\rho_1$ | $\rho_2$ |
|----|-----------------|-----------------|------|----------|----------|----------|-------|------------|----------|----------|
| 取值 | 0.1             | 0.1             | 0.05 | -1       | 300      | 1.2      | 0     | 3          | 0        | 1        |
| 参数 | $q$             | $\mu$           | $s$  | $\beta$  | $\delta$ | $k_1$    | $k_2$ | $\sigma_1$ | $\mu_1$  |          |
| 取值 | 0.05            | 0.3             | 3    | 0.2      | 1        | 1.4      | 0.3   | 0.1        | 0.02     |          |

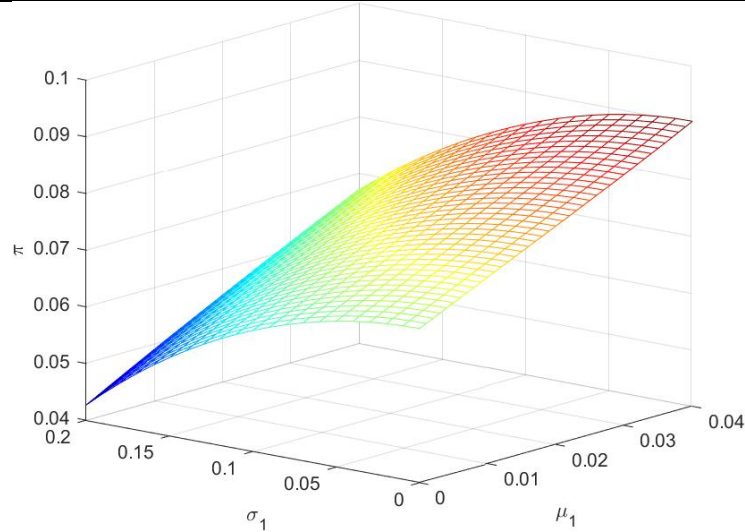


图 4-1  $\sigma_1$  和  $\mu_1$  对最优投资策略的影响

图 4-1 表明,通货膨胀预期率  $\sigma_1$  增大,家庭投资在风险资产的钱减少.这是因为物价上涨会降低钱的购买力,家庭更愿意把钱放在更安全的地方,比如银行存款、国债,而不是冒险投资股市.同时,担心未来生活成本提高,家庭也会多存钱、少投资.通货膨胀波动率  $\mu_1$  增大,家庭投资在风险资产的钱增加.当通货膨胀波动变大时,家庭反而可能增加风险投资.因为物价时高时低不稳定,存钱反而更容易贬值,这时候家庭会选择投资股票、黄金等,希望能抵消通胀.虽然风险高,但长期来看,这些资产更能抵抗通胀的影响.

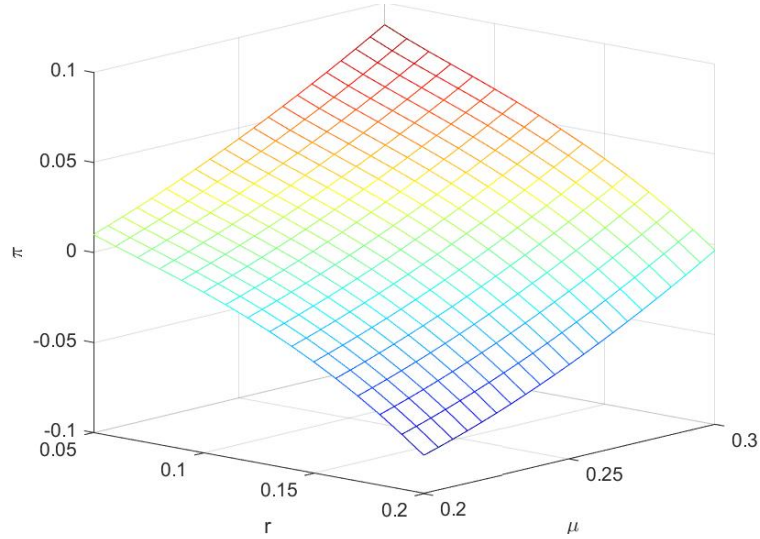


图 4-2  $r$  和  $\mu$  对最优投资策略的影响

图 4-2 表明, 最优投资策略  $\pi^*$  随着无风险利率  $r$  的增大而减小, 这意味着, 随着无风险利率的上升, 无风险资产的收益率显著提高. 因此, 家庭倾向于减少对股票等风险资产的投资比例, 以规避潜在的市场风险. 这一结论与金融市场的实际表现相吻合, 反映了投资者在利率变动时的风险规避行为.  $\pi^*$  随参数  $\mu$  变大而增大, 说明, 当股票的预期瞬时回报增加, 家庭为了追求更高的财富增长, 倾向于增加对股票等风险资产的投资以获取潜在的高回报.

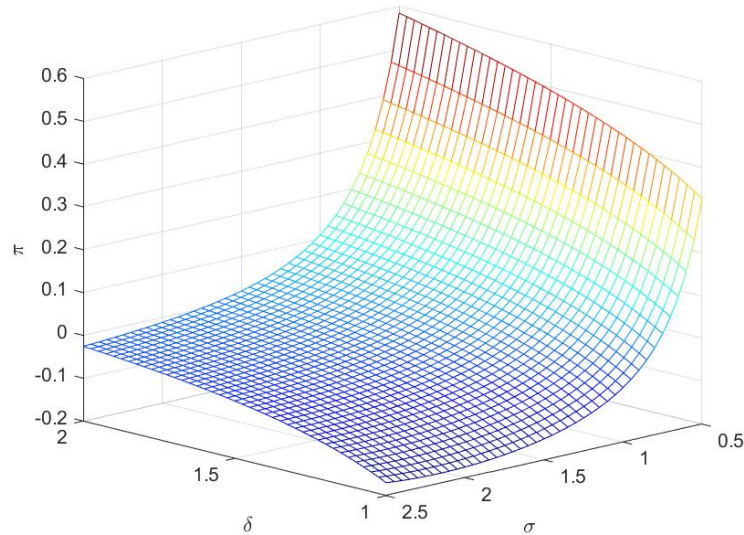


图 4-3  $\delta$  和  $\sigma$  对最优投资策略的影响

图 4-3 表明, 风险资产投资比例随着参数  $\delta$  的增大而增大. 这意味着, 如果现金收入的波动率  $\delta$  增加, 家庭倾向于增加对风险资产的投资比例. 这种行为可能源于家庭试图通过风险资产的高收益来对冲现金收入的不确定性, 从而在整体

上平衡风险与收益.  $\pi^*$  与  $\sigma$  的值具有相反的趋势. 事实上,  $\sigma$  参数越大, 股票的瞬时波动率就越大, 导致投资风险越大. 相应地, 投资者会减少对股票的投资.

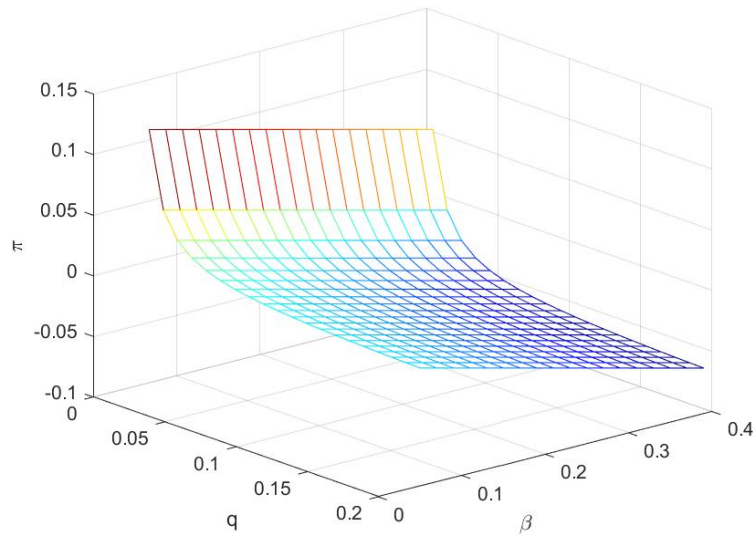


图 4-4  $q$  和  $\beta$  对最优投资策略的影响

图 4-4 表明, 随着风险厌恶系数  $q$  的增大, 投资者对股票的投资比例显著下降. 这主要是由于更高的风险厌恶系数反映了投资者对风险的规避倾向增强, 因此他们会减少对高风险资产的配置, 转而增加对无风险资产的投资比例. 此外, 当消费波动率  $\beta$  增大时, 投资者为了确保消费的稳定性, 也会倾向于减少风险资产的配置, 转而更多地投资于无风险资产. 这种行为表明, 投资者在面对更高的风险或不确定性时, 会优先考虑资产的稳健性和消费的可持续性.

#### 4.4 结论

在本章研究中可以看出, 家庭投资决策主要受通胀水平、市场收益率和风险偏好等因素影响. 当通胀预期上升时, 人们倾向于减少股票等风险资产投资, 转而选择银行存款、国债等安全资产以规避购买力下降风险. 但当通胀波动加大时, 为对抗货币贬值, 反而会增加股票、黄金等抗通胀资产配置. 在市场收益率方面, 无风险利率上升会降低风险资产吸引力, 而股票预期回报提高则会刺激投资. 股票波动率上升、风险厌恶程度提高或消费波动加大时, 都会促使减少风险资产配置. 而收入不稳定时, 为对冲不确定性, 反而可能增加风险投资. 总体而言, 家庭投资者会根据市场环境变化, 在追求收益和规避风险之间进行动态平衡调整.

## 第 5 章 总结和展望

本文研究在随机利率、随机消费和通胀因素的框架下,对最优投资问题进行了深入探讨,为理解投资者在复杂市场环境中的决策行为提供了理论支持.然而,金融市场是一个动态演变的复杂系统,随着全球经济格局的变化和金融科技快速发展,最优投资问题的研究仍有许多值得探索的新方向.未来的研究可以进一步扩展模型的应用场景,例如在多资产投资组合的背景下,研究不同资产类别,如股票、债券、大宗商品和另类投资在随机利率和通胀环境下的动态配置问题.这种扩展不仅能够更全面地反映现实市场的多样性,还能为投资者提供更为灵活和稳健的投资策略.此外,考虑市场摩擦因素,如交易成本、税收和流动性约束对投资决策的影响,将使模型更加贴近实际,从而为投资者提供更具操作性的指导.

另一方面,未来的研究可以将环境、社会和治理(ESG)因素纳入最优投资策略的研究框架中.随着可持续发展理念的深入人心,越来越多的投资者开始关注投资的社会责任和长期影响.未来的研究可以探索如何将 ESG 指标与传统的风险收益模型相结合,从而为投资者提供兼顾财务回报和社会价值的投资方案.

最后,投资者行为的异质性和市场参与者的互动也是未来研究的重要课题.传统的投资模型通常假设投资者是同质的,但现实中投资者的风险偏好、信息获取能力和决策方式存在显著差异.未来的研究可以引入异质性投资者假设,并探索市场参与者之间的博弈行为如何影响资产价格和投资策略.例如,研究机构投资者与散户投资者之间的互动如何导致市场波动,或者信息不对称如何影响不同投资者的最优策略选择.

综上所述,最优投资问题的研究远未止步.未来的探索可以在模型扩展、现实因素纳入、技术创新和跨学科融合以及投资者行为异质性等方面进一步深化,从而为投资者提供更加全面和精准的决策工具,同时也为金融市场的稳定与效率提升贡献更多的理论洞见和实践价值.这一领域的研究不仅具有重要的学术意义,也将对金融市场的实际运作产生深远影响.

## 参考文献

- [1] Merton R C. Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case[J]. The review of Economics and Statistics, 1969, 51(3): 247-257.
- [2] Merton R C. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model[J]. Journal of Economic Theory 3, 1971(4): 373-413.
- [3] Kwak M, Shin Y H, Choi U J. Optimal investment and consumption decision of a family with life insurance[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2011, 48(2): 176-188.
- [4] Arregui I, Vázquez C. Numerical solution of an optimal investment problem with proportional transaction costs[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2012, 236(12): 2923-2937.
- [5] 盛积良, 杨雁雁. 最低财富约束下隐性激励对机构投资策略的影响[J]. 系统工程学报, 2023, 38(4): 520-539.
- [6] 林祥, 钱艺平, 李成才. 对数收益下机构投资者之间的最优投资选择博弈[J]. 应用概率统计, 2023, 39(5): 682-700.
- [7] Vasicek O. An equilibrium characterization of the term structure[J]. Journal of Financial Economics, 1977, 5(2): 177-188.
- [8] Sorensen C. Dynamic asset allocation and fixed income management[J]. The Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1999, 34(4): 513-531.
- [9] 李晋枝, 乔克林, 何树红. 随机利率因素的破产模型[J]. 云南大学学报(自然科学版), 2003, 25(1): 9-12.
- [10] 南江霞, 董立刚. 随机利率下的消费模型[J]. 大连大学学报, 2005, 26(4): 12-14.
- [11] 刘富兵, 刘海龙. 随机利率及随机收益保证下的投资策略[J]. 运筹学学报, 2010, 14(4): 92-100.
- [12] 夏迪, 顾孟迪. 考虑交易成本的最优CEV投资模型[J]. 系统管理学报, 2012,

- 21(3): 428-431.
- [13] 郭文旌, 李潇俊. 随机利率条件下最优投资消费与寿险购买策略[J]. 运筹学学报, 2018, 22(4): 31-44.
- [14] He Y, Chen P. Optimal investment strategy under the cev model with stochastic interest rate[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2020, 2020(1): 1-11.
- [15] 李倩, 王利. CIR 利率环境下标的资产带跳的期权定价[J]. 北京化工大学学报 (自然科学版), 2023, 50(6): 112-118.
- [16] 韩笑, 张敏行. 随机利率下的期权定价[J]. 吉林大学学报(理学版), 2021, 59(6): 1405-1410.
- [17] 寇梦柯, 常浩. 随机利率与通胀风险下带有最低担保的均值 - 方差养老金计划[J]. 工程数学学报, 2025, 42(1): 97-113.
- [18] Gao J W. Optimal portfolios for DC pension plans under a CEV model[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2009, 44(3): 479-490.
- [19] 张初兵, 荣喜民, 侯如靖, 赵慧. Heston 模型下确定缴费型养老金的投资组合优化[J]. 系统工程, 2012, 30(12): 39-44.
- [20] 杨鹏. 均值-方差准则下 CEV 模型的最优投资和再保险[J]. 系统科学与数学, 2014 (9): 1100-1107.
- [21] 阿春香, 邵仪. CEV 模型下时滞最优投资与再保险问题[J]. 运筹学学报, 2020, 24(1): 73-87.
- [22] 刘小涛, 刘海龙. CEV 模型下考虑风险相关性的保险组合时间一致性投资策略[J]. 系统管理学报, 2022, 31(1): 53.
- [23] 周香英. 基于 CEV 模型的一类资产负债管理问题[J]. 赣南师范大学学报 2022, 43(3): 25-30.
- [24] 张雨萌, 马世霞, 张欣茹. CEV 模型和违约风险下具有稀疏相依风险的鲁棒最优再保险和投资策略[J]. Advances in Applied Mathematics, 2023, 12: 1022.
- [25] 李国庆, 田琳琳. CEV 模型下保险公司的最优不动产投资及再保险问题[J]. 东华大学学报(自然科学版), 2024, 50(1): 178-185.
- [26] 李国柱, 马世霞, 黄晴. 在 CEV 模型下带跳的非零和再保险投资博弈[J]. 数学的实践认识, 2023, 53(7): 29-39.

- [27] Grzelak L A, Oosterlee C W. On the Heston model with stochastic interest rates[J]. SIAM Journal on Financial Mathematics, 2011, 2(1): 255-286.
- [28] Grzelak L A, Oosterlee C W. Extension of stochastic volatility equity models with the Hull-White interest rate process[J]. Quantitative Finance, 2012, 12(1): 89-105.
- [29] Heston S L. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options[J]. The Review of Financial Studies, 1993, 6(2): 327-343.
- [30] Kim J H, Yoon J H, Yu S H. Multiscale stochastic volatility with the Hull-White rate of interest[J]. Journal of Futures Markets, 2014, 34(9): 819-837.
- [31] 戴俭华, 耿显民. 带随机消费的经济模型[J]. 运筹与管理, 1995, 4(2): 34-36.
- [32] Yuan W, Lai S. Family optimal investment strategy for a random household expenditure under the CEV model[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2019, 354: 1-14.
- [33] 姜奎. 基于随机波动模型下考虑劳动收入的最优消费投资问题研究[J]. 江汉大学学报(自然科学版), 2021, 49(2): 35-42.
- [34] 田德建, 方洁. Knight 不确定下持续业绩模型的最优消费 - 投资策略[J]. 应用概率统计, 2022, 38(3): 402-412.
- [35] 吕会影, 李钰. 持续约束下基于模糊性的最优消费和投资组合研究[J]. 兰州文理学院学报(自然科学版), 2023, 37 (5): 23-29.
- [36] Kato K, Nakamura N. PDE-based bayesian inference of CEV dynamics for credit risk in stock prices[J]. Asia-Pacific Financial Markets, 2024, 31(2): 389-421.
- [37] Anel M E, Fan W L. A new type of cev model: Properties, comparison, and application to portfolio optimization[J]. Stochastic Models, 2025, 41(1): 85-119.
- [38] Jonsson M, Sircar R. Optimal Investment Problems and Volatility Homogenization Approximations[M]. Modern methods in scientific computing and applications. Dordrecht: Springer Netherlands, 2002: 255-281
- [39] Takahashi A. An asymptotic expansion approach to pricing financial contingent claims [J]. Asia-Pacific Financial Markets, 1999, 6: 115-151.

- [40] Widdicks M, Duck P W, Andricopoulos A D, et al. The Black-Scholes equation revisited: asymptotic expansions and singular perturbations [J]. Mathematical finance: An International Journal of Mathematics, Statistics and Financial Economics, 2005, 15(2): 373-391.

## 硕士期间发表的论文

- [1] 基于 CEV 模型考虑随机消费和随机利率的最优投资策略[J]. 本人第一作者, 导师第二作者, 宁波工程学院学报, 2024, 36(04): 18-25. (已发表)
- [2] 考虑不动产投资和随机工资的 DC 养老金最优投资策略[J]. 本人第四作者, 导师第二作者, 湖南工程学院学报(自然科学版), 2024, 34(03): 50-56. (已发表)

## 致 谢

风华染指，岁月如沙。研究生三年的学习生涯即将画上句号。在此论文完稿之际，我心中充满了感激之情。回首这段时光，师长们的谆谆教诲、亲友们的无私支持，都是我前行路上不可或缺的力量。此刻，千言万语难以表达我内心的感恩与敬意。

首先，我要衷心感谢我的导师夏登峰老师。感谢您在学术上的悉心指导和生活中的无私关怀。您严谨的治学态度、授课时的耐心深刻，以及修改我学术文章时的认真细致，都深深印刻在我的脑海中，成为我终身受益的宝贵财富。您不仅传授了我专业知识，更教会了我许多人生的道理，这些都将伴随我未来的每一步成长。

其次，我要感谢数理与金融学院的各位授课老师。何俊老师的《泛函分析》为我打下了坚实的数学基础；姜培华老师的《随机过程论》让我对随机模型有了更深的理解；费为银老师与张伟老师的《金融风险分析技术》让我掌握了金融领域的核心分析方法；方永胜老师的《金融衍生品定价理论与实务》开阔了我的研究视野；邓寿年老师的《区块链与数字货币》让我对新兴技术有了全新的认识；李志民老师的《随机微分方程》让我对金融数学的结合产生了浓厚的兴趣；张雪康老师的《测度论》为我提供了严谨的理论工具。感谢你们在课堂内外的辛勤付出，为我的学术研究奠定了坚实的基础。

此外，我还要感谢实验室的师兄师姐和同学们。感谢你们在实验设计、数据分析以及论文写作过程中提供的宝贵意见和帮助。你们的陪伴和鼓励是我科研路上的宝贵财富。

最后，我要特别感谢我的父母。感谢你们多年来的默默支持、理解和信任，你们的期盼是我前行的动力。这篇论文的完成，不仅是我学术生涯的一个里程碑，更是对你们无私付出的回报。我知道，人生的旅程还很漫长，但你们的爱将永远是我坚实的后盾。

再次感谢所有关心和帮助我的人。愿你们生活幸福，万事如意！

2025 年 5 月