
分类号: O151.2

单位代码: 10363

密 级: 公开

学 号: 2221020108

题 目 余图的特征值问题研究

题 目 Research on the Eigenvalue Problems of
Cographs

学 生 姓 名 : 牛和明

指 导 教 师 : 王伟 教授

专 业 : 0701 数学

研 究 方 向 : 图论及其应用

论文答辩日期: 2025 年 5 月 14 日

安徽工程大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：我恪守学术道德，崇尚严谨学风。所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已明确注明和引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品及成果的内容。论文为本人亲自撰写，我对所写的内容负责，并完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

学位论文作者签名：牛和明

日期：2025 年 5 月 14 日

安徽工程大学学位论文版权使用授权书

学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅或借阅。本人授权安徽工程大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保密 ☐，在 _____ 年解密后适用本版权书。

本学位论文属于

不保密 ☒。

学位论文作者签名：牛和明

指导教师签名：王伟

日期：2025 年 5 月 14 日

日期：2025 年 5 月 14 日

余图的特征值问题研究

摘 要

图谱理论是图论中非常重要的领域之一,它在图论,计算机科学,量子化学,通信网络和统计力学等方面具有极其广泛的应用。图谱理论的研究主要是根据矩阵论和组合矩阵论中的经典结论和方法,通过图的矩阵表示,建立起图的代数性质与图结构之间的紧密联系。本文主要考虑了余图的几类矩阵(赛德尔矩阵,邻接矩阵,距离矩阵),进而研究了无特征值区间的分布情况以及区间的最优性质。

首先,本文确定了余图的赛德尔矩阵的无特征值区间,并进一步证明了其区间的最优性。其次,证明了顶点加权余图的赛德尔矩阵秩和本质不同行行数之间的关系。此外,根据目前已有结果,进一步证明了余图邻接矩阵,连通余图距离矩阵的无特征值区间的最优性。具体结果如下:

1. 不存在至少有两个顶点的余图在区间 $(-1,1)$ 内具有赛德尔特特征值。对于任何 $\varepsilon > 0$, $(1,1+\varepsilon)$ 和 $(-1-\varepsilon,-1)$ 中的任何一个区间都包含一个足够大阶的余图的赛德尔特特征值。
2. 设 (G,w) 是任何至少有两个顶点的顶点加权余图, 得出 $\text{rank } S(G,w) = \text{edr } S(G,w)$ 。
3. 对任意 $\varepsilon > 0$, 总存在一个余图, 其在 $(-1-\varepsilon,-1)$ 内至少有一个邻接矩阵特征值。

对于任意 $\varepsilon > 0$, 总存在一个余图, 其在 $(0,\varepsilon)$ 内至少有一个邻接矩阵特征值。

4. 对任意 $\varepsilon > 0$ ，总存在一个连通余图，其在 $(-2-\varepsilon, -2)$ 内至少有一个距离矩阵特征值。

对于任意 $\varepsilon > 0$ ，总存在一个连通余图，其在 $(-1, -1+\varepsilon)$ 内至少有一个距离矩阵特征。

关键词：余图，赛德尔矩阵，距离矩阵，邻接矩阵，无特征值区间，极限点

Research on the Eigenvalue Problems of Cographs

ABSTRACT

The theory of graph spectra is one of the most important fields in graph theory. It has extremely wide applications in graph theory, computer science, quantum chemistry, communication networks and statistical mechanics. The research of the theory of graph spectra mainly establishes the close connection between the algebraic properties of graphs and their structures through the matrix representation of graphs based on the classical conclusions and methods in matrix theory and combinatorial matrix theory. This paper mainly considers several types of matrices of cograph (Seidel matrix, adjacency matrix, distance matrix), and then studies the distribution of eigenvalue-free intervals and the optimal properties of the intervals.

First, this article determines the eigenvalue - free interval of the Seidel matrix of cograph and further proves the optimality of this interval. Second, it proves the relationship between the rank of the Seidel matrix of the vertex - weighted cograph and the number of essentially different rows. Moreover, based on the existing results, it further proves the optimality of the eigenvalue-free intervals of the adjacency matrix of cograph and the distance matrix of the connected cograph. The specific results are as follows:

1. No cographs with at least two vertices have Seidel eigenvalues in the interval $(-1,1)$.

For any $\varepsilon > 0$, either of the intervals $(-1-\varepsilon, -1)$ and $(1, 1+\varepsilon)$ contains

a Seidel eigenvalue of some cograph of sufficiently large order.

2. Let (G, w) be any vertex-weighted cograph with at least two vertices. Then $\text{rank } S(G, w) = \text{edr } S(G, w)$.

3. For any $\varepsilon > 0$, either of the intervals $(-1-\varepsilon, -1)$ and $(0, \varepsilon)$ contains a adjacent eigenvalue of some cograph of sufficiently large order.

4. For any $\varepsilon > 0$, either of the intervals $(-2-\varepsilon, -2)$ and $(-1, 1+\varepsilon)$ contains a distance eigenvalue of some connected cograph of sufficiently large order.

Niu Heming (Applied Mathematics)

Supervised by Prof. Wang Wei

KEY WORDS: cograph, Seidel matrices, distance matrices, adjacency matrices, eigenvalue-free interval, limit point

目 录

摘 要.....	III
ABSTRACT.....	V
第 1 章 绪论.....	1
1.1 课题研究背景及意义.....	1
1.2 课题研究现状.....	2
1.3 研究内容和主要结果.....	4
第 2 章 预备知识.....	4
2.1 主要符号.....	5
2.2 基本概念.....	5
2.3 相关公式.....	6
第 3 章 余图赛德尔矩阵无特征值区间问题.....	8
3.1 准备知识.....	8
3.2 引理运用及其证明.....	10
3.3 主要结果的证明.....	10
3.4 主要结论.....	19
第 4 章 余图邻接与距离矩阵无特征值区间的最优性.....	20
4.1 准备知识.....	20
4.2 主要结果及其证明.....	20
4.3 主要结论.....	27

第 5 章 回顾与展望.....	28
5.1 回顾.....	28
5.2 展望.....	28
参考文献.....	29
攻读硕士期间取得的学术成果.....	33
致 谢.....	34

第 1 章 绪论

1.1 课题研究背景及意义

图论的起源可追溯至柯尼斯堡七桥问题。1738 年，瑞士数学家欧拉成功解决了这一问题，并撰写了相关论文，这标志着图论的诞生，因此欧拉被认为是该领域的奠基人。

自从 Collatz^[1] 的文章以后，图谱就经常出现在数学文献中，关于此方面的经典著作参考^[2]。作为代数图论的重要组成部分，图谱理论与矩阵论、组合数学、多项式理论及线性代数等学科紧密相关，并推动了一系列经典结论、问题和猜想的提出，如四色猜想、最大匹配算法、匈牙利算法、双圈覆盖猜想、哈密顿定理和图的染色定理等。

图谱理论主要借助矩阵理论的手段开展研究。它聚焦于图所对应的各类矩阵，像邻接矩阵、无符号拉普拉斯矩阵、距离矩阵以及距离无符号拉普拉斯矩阵等，着重对这些矩阵的特征值和特征向量进行深入分析。

通过对上述矩阵特征的研究，图谱理论致力于探寻谱参数和图结构之间的内在联系。并且，它会综合运用代数方法和组合方法，进一步剖析图的结构性质，以更全面、深入地理解图的特征和规律。若一个图不含 4 阶路作为诱导子图，则称其为余图。余图是图论中的一个重要图类^{[3-6][32]}。余图另一个常用的递归定义如下：

- (1) 平凡图是余图；
- (2) 若 G 和 H 是点不交的余图，则 $G \cup H$ 也是余图。

若在上述定义中限定(2)中的图只能是平凡图，则得到的图类是余图的一个重要子类——门槛图。1979 年，Manca^[7]提出了通过图的关联矩阵来识别图是否是门槛图，Harary^[8]更进一步通过收缩和同态的组合以及使用二部邻接矩阵，明确地展示门槛图的结构。1985 年，Corneil^[9]提出了一个线性算法用于识别余图。

本文对余图的无特征值区间进行了研究，余图的特征值问题一直以来都是图谱理论的一个重要的课题，近年来广受关注。2021 年 Lou^[37]证明了没有连通的

余图的距离特征值落在区间 $(-2, -1)$ 内, 2022 年 Hou^[31]证明了没有余图的赛德尔特征值落在区间 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 内。本文在他们的基础上证明了余图无特征值区间的相关问题。

1.2 课题研究现状

最近几年, 余图特征值的研究成为研究余图的性质的一个重要的方法。2003 年, Royle^[10]中提出了余图的秩和矩阵不同非零行行数之间的关系, 证明了余图的秩等于矩阵不同非零行行数。2008 年, Chang 等人^[11]给出了一种更一般情况下 *cograph* 秩性质的简单短证明。这不仅验证 Royle 的结论, 还提供了一种更简洁的方法来理解这一性质。

2010 年, Aneli^[13]研究门槛图的一些不变量, 这些不变量可能在估计或限制图谱的最大特征值时有用。通过分析这些不变量可以更好地理解门槛图的结构, 并且可能找到有效的方法来计算或估计其最大特征值。2011 年, Sciriha 等人^[14]通过研究反正则连通图的邻接矩阵谱, 展示了与连通门槛图的共同性质。

2013 年, Vinagre 等人^[16]对门槛图的谱施加了一些限制, 从而可以计算其拉普拉斯能量。接着, 证明了所有具有 n 个顶点的菠萝图以及满足这些条件的所有图中, 团数为 $1 + \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor$ 的菠萝图具有最大的拉普拉斯能量。2014 年, Bapat^[17]证明了门槛图的拉普拉斯特征值。更进一步, 2015 年, Jacobs 等人^[18]证明了几乎所有连通的门槛图都有比正特征值更多的负特征值。同时, 还证明了没有任何门槛图的特征值落在区间 $(-1, 0)$ 内。2016 年, Barrus^[19]定义一个弱门槛序列 $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$, 弱门槛图通过弱门槛序列实现。弱门槛图恰当地包含了门槛图, 并展示了弱门槛序列的主成分特性以及弱门槛图的迭代构造算法。

同时, 在 2016 年, Mohammadian^[20]进一步将门槛图推广到了余图。提出了不含有长度为三的路径作为诱导子图的图称为余图。在这篇文献中, 通过使用顶点复制和余复制操作, 给出了关于余图的递归定义。然后, 证明了余图没有特征值位于区间 $(-1, 0)$ 内, 这推广了已知的关于门槛图的相关结果。

2018 年, Ture^[26]提供了从门槛图的二进制序列计算其特征多项式的显式公式。应用包括获得门槛图的邻接矩阵行列式的公式, 并证明没有任何两个不同构的门槛图具有相同的谱。2019 年, Ghorbani^[28-29]在顶点数固定, 同时 -1 和 0 被视为平凡特征值的情况下, 证明了唯一连通的反则图具有最小的正特征值和最大的非平凡负特征值。并由此得出, 门槛图的非平凡特征值不会落在区间 $\left[\left(-1-\sqrt{2}\right)/2,\left(-1+\sqrt{2}\right)/2\right]$ 内。并且, 证明了对于任何余图, 除了特征值 0 和 -1 之外, 任何特征值的重数都不超过图的 Dilworth 数, 并且这个界限是最佳的。

特征值在图论中通常与图的邻接矩阵或拉普拉斯矩阵相关, 它们提供了关于图的结构的重要信息。2019 年, Lou^[30]考虑所有连通的门槛图的邻接矩阵的特征值分布。2020 年, Vinagre^[31]证明了 $n \geq 3$ 门槛图的主无符号拉普拉斯特征值数量 k 被控制在 $n-2$ 以内, 并且还确定了具有 k 个主无符号拉普拉斯特征值的 n 阶门槛图的数量。

2021 年, Del-Vecchio 等人^[37]证明了门槛图的赛德尔谱, 提出并分析了一些特定类型的图, 称为赛德尔整谱图, 即赛德尔矩阵的所有特征值都是整数的图。2022 年, Qiu^[38]研究了门槛图的离心率特征值的性质, 并确定了离心率特征值在区间 $[-2,0]$ 内互不相同的门槛图; Xiong 等人^[39]研究了门槛图的赛德尔矩阵的特征值分布。证明了除了 $-1,1$ 之外, 门槛图的赛德尔矩阵在区间 $(-2,2)$ 内没有其他特征值; Allem^[41]提出了两种生成无特定特征值的门槛图的算法。2024 年, Macharete 等人^[45]证明了星图的拉普拉斯矩阵的特征向量基也是 G 的特征向量基当且仅当 G 是一个门槛图; Chen^[46]等人提出了一种算法, 用于获得余图的拉普拉斯特征值。这种方法无需直接计算与这类余图相关的拉普拉斯矩阵的特征值。使用此算法作为工具, 得到了余图生成树数量的封闭公式。

与此同时, 距离特征值^{[38-39][41]}在图谱理论中也是一个热点问题。2013 年, Lin^[15]刻画了所有满足距离特征值等于 -2 的连通图。2017 年, Zhou 等人^[23]定义删除某些顶点后可以变成树的图为准树。研究在具有固定阶数的准树中具有最小距离谱半径的唯一图, 以及在包含环的准树中, 寻找具有最大距离谱半径的唯一图。2018 年, Lu 等人^[24]证明了连通门槛图在区间 $(-2,-1)$ 上无距离特征值。2021 年, Alazemi 等人^[32]证明对于门槛图和链图, 它们的距离矩阵在某些区间内没有特征值。更进一步, Lou 等人^[33]证明了没有连通的余图在区间 $(-2,-1)$ 内具有距

离特征值。

综上，现有许多研究多聚焦于门槛图，而对一般余图的特征值最优性证明仍然存在缺口，本文填补了这一空白。

1.3 研究内容和主要结果

本文主要内容安排如下：

本文第二章着重介绍所需的基础知识，涵盖基础概念、基本定理以及基本公式。第三章作为核心内容，聚焦于余图的赛德尔特特征值问题，通过运用主角、初等变换等方法，并结合相关证明来得出相应结果。第四章证明了余图无特征值区间最优性的一个注记。本文主要的证明结果如下：

定理 1

不存在至少有两个顶点的余图在区间 $(-1,1)$ 内具有赛德尔特特征值。

定理 2

设 (G,w) 是任何至少有两个顶点的顶点加权余图，得出 $rank S(G,w) = edr S(G,w)$ 。

定理 3

对于任意 $\varepsilon > 0$ ， $(1,1+\varepsilon)$ 和 $(-1-\varepsilon,-1)$ 中的任何一个区间都包含一个足够大阶的余图的赛德尔特特征值。

定理 4

对任意 $\varepsilon > 0$ ，总存在一个余图在 $(-1-\varepsilon,-1)$ 和 $(0,\varepsilon)$ 内至少有一个邻接矩阵特征值。

定理 5

对任意 $\varepsilon > 0$ ，总存在一个连通余图在 $(-2-\varepsilon,-2)$ 和 $(-1,-1+\varepsilon)$ 内至少有一个距离矩阵特征值。

第2章 预备知识

这部分内容主要对本文涉及的主要符号、基本概念、基本定理以及相关公式展开介绍。在此说明，若一个图既不存在自环，也没有两条连杆连接同一对顶点，我们就将其称作简单图，而本文的研究对象主要就是简单图。

2.1 主要符号

本部分主要总结介绍本文中出现的符号，方便阅读。

v	图的顶点
$V(G)$	图 G 的顶点集
e	全一向量
$D(G)$	图 G 的距离矩阵
β_i	主角
$\overline{G}$	图 G 的补图
$P_{D(G)}(x)$	图 G 的距离特征多项式
w	权重函数
λ_i	邻接特征值

本文中未标明的符号和术语可参考文献^[48]。

2.2 基本概念

设 $G = (V(G), E(G))$ 是一个简单图， $V(G)$ 是 G 的顶点集， $E(G)$ 是 G 的边集。用 G 中的任意一个顶点 v ， $N_G(v)$ 表示 v 在 G 中的开邻域， $N_G[v]$ 表示 v 在 G 中的闭邻域。若图 G 中的两个顶点 u 和 v 满足 $N_G(u) = N_G(v)$ ，则称他们为重复点；若图 G 中的两个顶点 u 和 v 满足 $N_G[u] = N_G[v]$ ，则称他们为余重复点。

下面是本文所用到的定义：

定义 2.1^[48] 设图 $G = (V, E)$ 的顶点集为 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 并且边集为 $E = \{(v_i, v_j) \mid i, j = 1, 2, \dots, n; i \neq j\}$ 则它的邻接矩阵 $A(G) = (a_{ij})_{n \times n}$ 是一个

$n \times n$ (0,1)-矩阵, 其中:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{如果 } (v_i, v_j) \text{ 是图 } G \text{ 的一条边} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}.$$

设 $S(G) = (s_{ij})_{n \times n}$ 表示图 G 的赛德尔矩阵。由 $S(G) = J - I - 2A$ 得:

$$s_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{如果 } (v_i, v_j) \text{ 是图 } G \text{ 的一条边} \\ 1 & \text{如果 } (v_i, v_j) \text{ 不是图 } G \text{ 的一条边, 且 } i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$$

定义 2.2 设图 G 的邻接矩阵为 $A(G)$, 则图 G 的特征多项式 $P_G(x)$ 为:

$$P_G(x) = \det(xI - A(G)).$$

定义 2.3 设图 G 的距离矩阵为 $D(G)$, 则图 G 的距离特征多项式 $P_{D(G)}(x)$ 为:

$$P_{D(G)}(x) = \det(xI - D(G))$$

2.3 相关公式

为了计算图的主特征值问题, 本章运用了很多的公式, 主要运用的公式为下面几种:

引理 2.1^[12] 对于任意 n 阶图 G , 其补图 $\bar{G}$ 的特征多项式为

$$P_{\bar{G}}(x) = (-1)^n P_G(-1-x) \left(1 - n \sum_{i=1}^r \frac{\beta_i^2}{x+1+\lambda_i} \right)$$

引理 2.2 对于任意 n 个顶点的连通余图 G :

$$P_D(G; x) = P_{\bar{G}}(1+x) \left(1 - n \sum_{i=1}^m \frac{\beta_i^2}{x+1-\lambda_i} \right)$$

其中 $P_{\bar{G}}(x)$ 代表 $\bar{G}$ 的邻接特征多项式。

证明： G 的邻接矩阵为 $A(G)$ ，那么 $A(\overline{G}) = J - I - A(G)$ 。

由于 G 的诱导子图不可以包含 P_4 ，因此 G 任意两个顶点之间的最短路径长度不超过 2。即 $\text{diam}(G) = 2$ 。根据[36]有 $D(G) = 2J - 2I - A(G)$ ，可得到：

$$A(\overline{G}) = I - J + D(G)$$

由此得出 G 的距离特征多项式与补图邻接特征多项式的关系如下：

$$\begin{aligned} P_{D(G)}(x) &= \det(xI - J - A(\overline{G}) + I) \\ &= \det((x+1)I - A(\overline{G}) - J) \\ &= \det((x+1)I - A(\overline{G})) - j^T \text{adj}((x+1)I - A(\overline{G}))j \\ &= P_{\overline{G}}(1+x)(1 - j^T((x+1)I - A(\overline{G}))^{-1}j) \\ &= P_{\overline{G}}(1+x)(1 - n \sum_{i=1}^m \frac{\beta_i^2}{x+1-u_i}). \end{aligned}$$

引理 2.3 ^[12] 对于任意 n 个顶点的图 G 的赛德尔邻接矩阵特征值表达式为：

$$S_G(x) = (-2)^n P_G(-\frac{x+1}{2})(1 - n \sum_{i=1}^r \frac{\beta_i^2}{x+1+2\lambda_i}).$$

引理 2.4 ^[21] 用 ∇ 表示图的联，设 $G = K_1 \nabla (\ell K_2 \cup s K_1)$ ，即一个中心点 K_1 连接 ℓ 个 K_2 和 s 个孤立点所构成的图，得下式：

$$\begin{aligned} P_{D(G)}(x) &= [x^3 + (5-4\ell-2s)x^2 \\ &\quad + (6-10\ell-7s)x - (4\ell+3s)](x+1)^{\ell}(x+3)^{\ell-1}(x+2)^{s-1} \end{aligned}$$

联图 $G \nabla K_1$ 也称为图 G 的锥，即在图 G 上添加一个顶点并将该顶点与图 G 的所有点相连所得到。

引理 2.5 ^[12] 对于任意 n 阶图 G ，其锥图 $G \nabla K_1$ 的特征多项式为

$$P_{G \nabla K_1}(x) = P_G(x) \left(x - n \sum_{i=1}^r \frac{\beta_i^2}{x - \lambda_i} \right).$$

第3章 余图赛德尔矩阵无特征值区间问题

本章聚焦于解决余图的赛德尔无特征值区间相关问题,同时证明了顶点加权余图的秩和本质不同行行数之间的关系。具体而言,采用构造矩阵的方式,结合主角的定义、邻接矩阵赛德尔特特征多项式以及零点定理等手段,对余图的赛德尔无特征值区间展开深入研究,最终得出相应结论。

3.1 准备知识

3.1.1 余图赛德尔矩阵的定义

余图是一个不包含 P_4 作为诱导子图的图。余图的一个显著的子类是门槛图,它是不包含 $\{2K_2; P_4; C_4\}$ 作为诱导子图的图。

设 G 是一个有 n 个顶点的简单图。我们使用 $A(G)$ 和 $S(G) = J - I - 2A(G)$ 分别表示 G 的邻接矩阵和赛德尔矩阵,其中 J 是全一矩阵, I 是 n 阶单位矩阵。 $A(G)(S(G))$ 的特征值将被称为图 G 特征值(赛德尔特特征值)。

3.1.2 一个顶点加权余图的秩概念

定义 3.1 一个顶点加权图 (G, w) 是一个简单的图 G , 具有一个 $[-1, 1]$ 的权重函数 w 。自然, 如果 G 是一个余图, 我们称 (G, w) 为顶点加权余图。顶点加权图 (G, w) 的赛德尔矩阵, 即 $S((G, w))$ 或简称 $S(G, w)$, 定义为 $S(G)$ 和对角矩阵 $\text{diag}(w(v_1), w(v_2), \dots, w(v_n))$ 的和。换句话说, 如果 $s_{i,j}$ 是 $S(G, w)$ 的第 (i, j) 的元素, 那么

$$s_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{if } v_i \sim v_j, \\ 1 & \text{if } v_i \not\sim v_j, i \neq j, \\ w(v_i) & \text{if } i = j. \end{cases}$$

对于顶点加权图 (G, w) 的补, 记为 $\overline{(G, w)}$, 定义为 $(\overline{G}, -w)$, 其中 $\overline{G}$ 是 G 的

补图, $-w$ 是相反的加权函数, 即 $(-w)(v) = -w(v)$ 对于 $v \in V(\overline{G}) = V(G)$ 。很明显, $S(\overline{(G, w)}) = -S(G, w)$ 。

设 M 是一个矩阵, α, β 是 M 的两行向量。如果 $\alpha = \pm\beta$, α 和 β 本质上是相同的; 如果 $\alpha \neq \beta$, 则本质上是不同的。设 $edrM$ 表示 M 本质上不同的行数。显然, 对于任何矩阵 M , 有 $edrM \geq rankM$ 。

举例来说, 考虑下面的矩阵 M :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

设 ξ_i 表示矩阵 M 的第 i 行。容易看出, $edrM = 3$, 因为对于任意不同的 $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, 都有 $\xi_i = \pm\xi_j$, 除非 $\{i, j\} = \{1, 2\}$ 。

我们注意到, 上述矩阵 M 是带有某种明显权重函数的 C_4 的赛德尔矩阵。直接计算可知, $rankM = 3$, 因此在这种情况下 $edrM = rankM$ 。本节的关键结果是要证明这并非偶然。

在本章中, 首先运用构造矩阵的方法。让 $S(G, w)$ 表示余图的顶点加权赛德尔矩阵。并且根据引理 3.2, 可以安全地假设 u 和 v 是余重复的, 并在必要时取 (G, w) 的补。进一步假设 $w(u) \leq w(v)$ 。设 u 和 v 对应于 (G, w) 的赛德尔矩阵的最后两行。则 $S(G, w)$ 具有以下形式:

$$S(G, w) = \left(\begin{array}{c|cc} T & \xi & \xi \\ \hline \xi^T & w(u) & -1 \\ \xi^T & -1 & w(v) \end{array} \right)_{(k+1)(k+1)}$$

其中 T 是一个 $k-1$ 阶的矩阵, 而 ξ 是一个元素取值在 $\{-1, 1\}$ 的 $(k-1)$ 维的列向量。

由此介绍完主要运用到的研究方法, 下面开始介绍本章相关的引理证明及定理证明。

3.2 引理运用及其证明

在前面我们介绍了关于余图的相关概念及定理，同时对解决余图的赛德尔矩阵的无特征值区间及最优性问题给出了方法和思路，下面我们开始计算和证明问题。

引理 3.1^[48] 设 $a, b \in [-1, 1]$ ，且不同时等于 -1 。那么，当且仅当 $a = -1$ 或 $b = -1$ 时， $-1 \leq (ab-1)/(a+b+2) \leq 1$ 。

证明：显然，如果一个 $a = -1$ 或 $b = -1$ ，则 $(ab-1)/(a+b+2) = -1$ 。接下来我们假设 $a, b \in (-1, 1]$ ，因此 $(ab-1)/(a+b+2) = (1+a)(1+b)/((1+a)(1+b)+a+b+2) > 0$ 和 $(ab-1)/(a+b+2) = (1-a)(1-b)/((1-a)(1-b)+a+b+2) < 0$ 。这意味着 $-(a+b+2) < ab-1 < a+b+2$ ，即 $-1 < (ab-1)/(a+b+2) < 1$ 。这个引理证明完毕。

对于任意矩阵 M ，我们显然有 $\text{rank}(-M) = \text{rank} M$ 和 $\text{edr}(-M) = \text{edr} M$ 。由于 $S(\overline{(G, w)}) = -S(G, w)$ ，下面的引理是直接的。

引理 3.2^[48] 对于任何顶点加权图 (G, w) ，我们有

$$\text{rank } S(\overline{(G, w)}) = \text{rank } S(G, w) \text{ 和 } \text{edr } S(\overline{(G, w)}) = \text{edr } S(G, w)。$$

3.3 主要结果的证明

3.3.1 顶点加权余图的无赛德尔特特征值区间

通过第一部分概念、方法的介绍，第二部分引理的运用及证明，接下来的部分我们开始证明我们主要的结果。

定理 1 的证明：设 G 是 n 阶且 $n \geq 2$ 的余图。选择任意一个 $x_0 \in (-1, 1)$ ，并定义 $w(\cdot) = -x_0$ 为 G 的常数权值函数。那么我们有 $S(G, w) = S(G) - x_0 I$ 。注意， $S(G, w)$ 的每个非对角元素都是 ± 1 ，而每个对角元素既不是 $+1$ 也不是 -1 。因此， $S(G, w)$ 的所有行本质上都是不同的，即 $\text{edr } S(G, w) = n$ 。根据定理 2 可知，

$\text{rank } S(G, w) = n$ 。这意味着 x_0 不是 $S(G)$ 的一个特征值。因此, 由于 x_0 的任意性, G 在 $(-1, 1)$ 中没有特征值。

现在我们转向**定理 2** 的证明。

命题 3.1^[40] 一个图 G 是一个余图当且仅当 G 的每个诱导子图至少有两个顶点是孪生的。

定理 2 的证明: 让 $n = |V(G)|$, 通过归纳法对 n 进行证明。如果 $n = 2$, 那么 G 是完全图 K_2 或空图 $2K_1$ 。根据引理 3.2, 可以假设 $G = K_2$, 因为否则我们可以处理 (G, w) 的补图。得出:

$$S(K_2, w) = \begin{pmatrix} a & -1 \\ -1 & b \end{pmatrix},$$

其中 $a, b \in [-1, 1]$ 。可以明显的看出:

$$\text{rank } S(K_2, w) = \text{edr } S(K_2, w) = \begin{cases} 1 & \text{if } a = b = 1 \text{ or } a = b = -1, \\ 2 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

这表明定理 2 对 $n = 2$ 成立。现在假设定理 2 对 $n = k$ 成立, 其中 $k \geq 2$, 我们继续验证 $n = k + 1$ 的情况。根据命题 3.1, G 有一对孪生点, 比如说 u 和 v 。根据引理 3.2, 可以安全地假设 u 和 v 是余重复, 并在必要时取 (G, w) 的补。我们进一步假设 $w(u) \leq w(v)$ 。设 u 和 v 对应于 (G, w) 的赛德尔矩阵的最后两行。则 $S(G, w)$ 具有以下形式:

$$S(G, w) = \left(\begin{array}{c|cc} T & \xi & \xi \\ \hline \xi^T & w(u) & -1 \\ \xi^T & -1 & w(v) \end{array} \right)_{(k+1)(k+1)}$$

其中 T 是一个 $k-1$ 阶的矩阵, 而 ξ 是一个元素取值在 $\{-1, 1\}$ 的 $(k-1)$ 维的列向量。

我们考虑以下两种情况:

情况 1: $w(u) = w(v) = -1$.

在这种情况下，我们发现 $S(G, w)$ 的最后两行（以及因此而来的最后两列）是相等的。让

$$M = \left(\begin{array}{c|c} T & \xi \\ \hline \xi^T & w(u) \end{array} \right)_{k \times k}$$

为 $S(G, w)$ 通过移除最后一行和最后一列得到的矩阵。很容易看出 $\text{rank } S(G, w) = \text{rank } M$ 和 $\text{edr } S(G, w) = \text{edr } M$ 。设 G_v 是通过删除顶点 v 得到的图， w_v 是 w 对 $V(G_v)$ 的限制。注意， $S(G_v, w_v) = M$ 。通过归纳假设，我们有 $\text{rank } S(G_v, w_v) = \text{edr } S(G_v, w_v)$ 。因此， $\text{rank } S(G, w) = \text{edr } S(G, w)$ 。

情况 2: $w(u) \neq -1$ 或者 $w(v) \neq -1$

回想一下 $w(u), w(v) \in [-1, 1]$ 。注意到已经假设 $w(u) \leq w(v)$ ，必须有 $w(v) \neq -1$ ，否则就会有 $w(u) = w(v) = -1$ ，这是一个矛盾。由于 $w(v) \neq -1$ ，很容易看出：

$$\text{edr} \left(\begin{array}{c|cc} T & \xi & \xi \\ \hline \xi^T & w(u) & -1 \\ \xi^T & -1 & w(v) \end{array} \right) = \text{edr} \left(\begin{array}{c|cc} T & \xi & \xi \\ \hline \xi^T & w(u) & -1 \end{array} \right) + 1. \quad (3-1)$$

对于 $x \in [-1, 1]$ ，定义矩阵

$$N_1 = (T | \xi), N_2 = (T | \xi \quad \xi), M_x = \left(\begin{array}{c|c} T & \xi \\ \hline \xi^T & x \end{array} \right), \widetilde{M}_x = \left(\begin{array}{c|cc} T & \xi & \xi \\ \hline \xi^T & x & -1 \end{array} \right).$$

进一步得到：

$$\text{edr} \widetilde{M}_x = \begin{cases} \text{edr} M_{-1} & \text{if } x = -1, \\ \text{edr} N_1 + 1 & \text{if } x \neq -1. \end{cases} \quad (3-2)$$

事实上，如果 $x = -1$ ，那么 $\widetilde{M}_x$ 的最后两列是相同的，因此 $\text{edr} \widetilde{M}_x = \text{edr} M_x$ 。

如果 $x \neq -1$ ，那么很容易看到在 $\widetilde{M}_x$ 中最后一行与其他行本质上不同，因此

$$\text{edr} \widetilde{M}_x = \text{edr } N_1 + 1 = \text{edr } N_2 + 1.$$

这就证明了(3-2)。为了找到 $S(G, w)$ 的秩，使用了一系列的初等变换：

$$\begin{aligned}
 S(G, w) &= \left(\begin{array}{c|cc} T & \xi & \xi \\ \hline \xi^T & w(u) & -1 \\ \xi^T & -1 & w(v) \end{array} \right) \xrightarrow{r_n - r_{n-1}} \left(\begin{array}{c|cc} T & \xi & \xi \\ \hline \xi^T & w(u) & -1 \\ 0 & -w(u)-1 & w(v)+1 \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow{c_n - c_{n-1}} \left(\begin{array}{c|cc} T & \xi & 0 \\ \hline \xi^T & w(u) & -w(u)-1 \\ 0 & -w(u)-1 & w(u)+w(v)+2 \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow{c_{n-1} + \frac{w(u)+1}{w(u)+w(v)+2} c_n} \left(\begin{array}{c|cc} T & \xi & 0 \\ \hline \xi^T & \frac{w(u)w(v)-1}{w(u)+w(v)+2} & -w(u)-1 \\ 0 & 0 & w(u)+w(v)+2 \end{array} \right).
 \end{aligned} \tag{3-3}$$

设：

$$c = \frac{w(u)w(v)-1}{w(u)+w(v)+2}$$

根据引理 3.1，有 $c \in [-1, 1)$ 。因为 $w(u)+w(v)+2$ 是等式(3-3)中最后一个矩阵的最后一行中唯一的非零元素，因此得到了

$$\text{rank } S(G, w) = \text{rank } M_c + 1. \tag{3-4}$$

注意， M_c 是某个 k 阶顶点加权余图的赛德尔矩阵。因此，通过归纳假设，有 $\text{rank} M_c = \text{edr} M_c$ ，因此可以重写等式（3-4）作为

$$\text{rank } S(G, w) = \text{edr } M_c + 1. \tag{3-5}$$

比较等式(3-1)与等式(3-5)，为了证明 $\text{rank } S(G, w) = \text{edr } S(G, w)$ ，只需证明 $\text{edr } \widetilde{M}_{w(u)} = \text{edr } M_c$ 。由等式(3-2)，若我们可以证明：

$$\text{edr} M_c = \begin{cases} \text{edr} M_{-1} & \text{if } w(u) = -1, \\ \text{edr} N_1 + 1 & \text{if } w(u) \neq -1. \end{cases} \tag{3-6}$$

事实上，如果 $w(u) = -1$ ，那么 $c = -1$ ，因此对等式(3-6)这种情况完全适用。

现在假设 $w(u) \neq -1$ 。回想一下 $w(v) \neq -1$ 。因此，通过引理 3.1，得到了 $c \in (-1, 1)$ 。

注意到 ξ 的每个元素都是 ± 1 ，这很容易在矩阵中看到：

$$M_c = \left(\begin{array}{c|c} T & \xi \\ \hline \xi^T & c \end{array} \right)$$

最后一行与其他任何行基本不同。由此可见 $\text{edr } M_c = \text{edr } N_1 + 1$ 。

这证明了等式(3-6)

由于在任何一种情况下，我们都建立了等式 $\text{rank } S(G, w) = \text{edr } S(G, w)$ ，因此定理 2 的证明通过归纳法是完备的。

3.3.2 区间最优性

前面已经对顶点加权余图的赛德尔矩阵无特征值区间进行了证明，下面开始着手证明区间的最优性。

设 $n \geq 3$ ，定义了一类余图族 H_n ：

$$H_n = \begin{cases} \ell P_2 \cup P_1 & \text{if } n = 2\ell + 1, \\ P_3 \cup (\ell - 1)P_2 \cup P_1 & \text{if } n = 2\ell + 2. \end{cases}$$

对于余图 G ，我们使用 $\mu_{\max}^-(G)$ 表示 G 在区间 $(-\infty, -1)$ 内的最大负赛德尔特特征值。类似地，我们使用 $\mu_{\min}^+(G)$ 来表示 $(1, +\infty)$ 中 G 的最小正赛德尔特特征值。我们约定如果 G 在 $(-\infty, -1)$ (或者 $(1, +\infty)$) 中没有赛德尔特特征值，那么 $\mu_{\max}^-(G) = -\infty$ (或者 $\mu_{\min}^+(G) = +\infty$)。本节的主要结果是显示以下内容

命题 3.1 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{\max}^-(H_n) = -1$

设 G 是一个 n 阶的图， $A = A(G)$ 是它的邻接矩阵。假设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ 是 A 的所有不同特征值，其重数分别为 $m_1, m_2, \dots, m_r$ 。让

$$P_i = (\eta_1^{(i)})(\eta_1^{(i)})^T + \dots + (\eta_{m_i}^{(i)})(\eta_{m_i}^{(i)})^T, \quad i=1, 2, \dots, r,$$

其中 $\eta_1^{(i)}, \dots, \eta_{m_i}^{(i)}$ 构成了与 λ_i 对应的特征空间的一个标准正交基。 G 与 λ_i 相关的主角 $\beta_i^{[12]}$ ：

$$\beta_i = \frac{\|P_i e\|}{\sqrt{n}} \quad (3-7)$$

其中 e 是 $\mathbb{R}^n$ 中的全 1 向量。对于任何方阵 M ，我们写出 $\chi(M; x) = \det(xI - M)$ 代表 M 的特征多项式。以下是赛德尔特特征多项式 $\chi(S(G); x)$ 和普通特征多项式 $\chi(A(G); x)$ 之间的关系是有用的。

引理 3.3^[12] 对于任意 n 个顶点的图,

$$\chi(S(G); x) = (-2)^n \chi(A(G); -\frac{x+1}{2}) (1 - n \sum_{i=1}^r \frac{\beta_i^2}{x+1+2\lambda_i}) .$$

我们将展示命题 3.1。我们首先考虑奇数情况，我们重写为一个新的命题。

命题 3.2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{\max}^-(\ell P_2 \cup P_1) = -1$

证明：让 $A_{2\ell+1} = A(\ell P_2 \cup P_1)$ 。显然， $A_{2\ell+1}$ 是分块对角矩阵：

$$A_{2\ell+1} = \text{diag} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, 0 \right)$$

因此， $A_{2\ell+1} = (x^2 - 1)^\ell x$ 。通过常规计算，我们得到了所有的特征值和相应的特征向量，如表 3-1 所示。对表 3-1 中的每个向量进行归一化，我们得到了每个特征值 λ_i 的标准正交基。然后，使用等式(3-7)可以很容易地计算出主角，并记录在表 3-2 中。

表 3-1: $A(\ell P_2 \cup P_1)$ 的特征系统

i	特征值 λ_i	重数 m_i	特征子空间的基
1	1	ℓ	$(\underbrace{0, \dots, 0}_{2k-2}, 1, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{2\ell-2k+1})^T, k = 1, 2, \dots, \ell$
2	-1	ℓ	$(\underbrace{0, \dots, 0}_{2k-2}, 1, -1, \underbrace{0, \dots, 0}_{2\ell-2k+1})^T, k = 1, 2, \dots, \ell$
3	0	1	$(\underbrace{0, \dots, 0}_{2\ell}, 1)^T$

表 3-2: $\ell P_2 \cup P_1$ 的主角

特征值 λ_i	特征空间的正交基	主角 β_i
-----------------	----------	--------------

1	$\left(\underbrace{0, \dots, 0}_{2k-2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \underbrace{0, \dots, 0}_{2\ell-2k+1} \right)^T, k=1, 2, \dots$	$\frac{\sqrt{2\ell}}{\sqrt{2\ell+1}}$
-1	$\left(\underbrace{0, \dots, 0}_{2k-2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \underbrace{0, \dots, 0}_{2\ell-2k+1} \right)^T, k=1, 2, \dots$	0
0	$\left(\underbrace{0, \dots, 0}_{2\ell}, 1 \right)^T$	$\frac{1}{\sqrt{2\ell+1}}$

让 $S_{2\ell+1} = S(\ell P_2 \cup P_1)$ 。然后从引理 3.3 中就可以得出结论

$$\begin{aligned}
 \chi(S_{2\ell+1}; x) &= (-2)^{2\ell+1} \chi\left(A_{2\ell+1}; -\frac{x+1}{2}\right) \left(1 - (2\ell+1) \sum_{i=1}^3 \frac{\beta_i^2}{x+1+2\lambda_i}\right) \\
 &= (-2)^{2\ell+1} \left(\left(-\frac{x+1}{2}\right)^2 - 1\right)^\ell \left(-\frac{x+1}{2}\right) \left(1 - (2\ell+1) \left(\frac{2\ell}{x+3} + \frac{1}{x+1}\right)\right) \\
 &= (x+3)^{\ell-1} (x-1)^\ell (x^2 - (2\ell-3)x - 2\ell).
 \end{aligned} \tag{3-8}$$

根据等式(3-8), 我们可以精确的写出 $S_{2\ell+1}$ 的全部不同的特征值:

$$\mu_1 = -3, \quad \mu_2 = 1, \quad \mu_3 = \frac{(2\ell-3) + \sqrt{(2\ell-3)^2 + 8\ell}}{2}, \quad \mu_4 = \frac{(2\ell-3) - \sqrt{(2\ell-3)^2 + 8\ell}}{2}.$$

让 $\phi(x) = x^2 - (2\ell-3)x - 2\ell$ 。注意到 $\phi(-1) = -2 < 0$ 和 $\phi(-3) = 4\ell > 0$, 我们知

$\phi(x)$ 在 $(-3, -1)$ 中有一个根。这意味着 $\mu_4 \in (-3, -1)$, 因此 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{\max}^-(\ell P_2 \cup P_1) = \mu_4$ 。

由此可以得出:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\ell \rightarrow \infty} \mu_{\max}^-(\ell P_2 \cup P_1) &= \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{(2\ell-3) - \sqrt{(2\ell-3)^2 + 8\ell}}{2} \\
 &= \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{(2\ell-3)^2 - ((2\ell-3)^2 + 8\ell)}{2((2\ell-3) + \sqrt{(2\ell-3)^2 + 8\ell})} \\
 &= \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{-4\ell}{(2\ell-3) + \sqrt{(2\ell-3)^2 + 8\ell}} \\
 &= \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{-4}{\left(2 - \frac{3}{\ell}\right) + \sqrt{4 - \frac{4}{\ell} + \frac{9}{\ell^2}}} \\
 &= -1.
 \end{aligned}$$

证明完毕。

接下来我们考虑命题 3.1 的偶数情况。

命题 3.3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{\max}^-(P_3 \cup (\ell-1)P_2 \cup P_1) = -1$

证明: 让 $A_{2\ell+2} = A(P_3 \cup (\ell-1)P_2 \cup P_1)$ 。可得到

$$A_{2\ell+2} = \text{diag} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 0 \right)$$

因此, $\chi(A_{2\ell+2}; x) = x^2(x^2-1)^{\ell-1}(x^2-2)$ 。使用与命题 3.2 的证明类似的计算方法, 我们可以确定所有特征值的主角度; 见表 3-3。

表 3-3: $P_3 \cup (\ell-1)P_2 \cup P$ 的主角

i	特征 值 λ_i	特征空间的标准正交基	主角 β_i
1	1	$\left(\underbrace{0, \dots, 0}_{2k+1}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \underbrace{0, \dots, 0}_{2\ell-2k-1}\right)^T, k=1, 2, \dots, \ell-1$	$\frac{\sqrt{2\ell-2}}{\sqrt{2\ell+2}}$
2	-1	$\left(\underbrace{0, \dots, 0}_{2k+1}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \underbrace{0, \dots, 0}_{2\ell-2k-1}\right)^T, k=1, 2, \dots, \ell-1$	0

3	0	$(\underbrace{0, \dots, 0}_{2\ell+1}, 1)^T, (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \underbrace{0, \dots, 0}_{2\ell-1})^T$	$\frac{1}{\sqrt{2\ell+2}}$
4	$\sqrt{2}$	$(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \underbrace{0, \dots, 0}_{2\ell-1})^T$	$\frac{\sqrt{1.5-\sqrt{2}}}{\sqrt{2\ell+2}}$
5	$-\sqrt{2}$	$(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \underbrace{0, \dots, 0}_{2\ell-1})^T$	$\frac{\sqrt{1.5+\sqrt{2}}}{\sqrt{2\ell+2}}$

设 $S_{2\ell+2}$ 是 $P_3 \cup (\ell-1)P_2 \cup P_1$ 的赛德尔矩阵。通过引理 3.3 和常规计算得出：

$$\chi(S_{2\ell+2}; x) = (x+1)(x-1)^{\ell-1}(x+3)^{\ell-2} \left(x^4 + (4-2\ell)x^3 - (6\ell+2)x^2 + (10\ell-20)x + 14\ell+1 \right).$$

让 $\phi(x) = x^4 + (4-2\ell)x^3 - (6\ell+2)x^2 + (10\ell-20)x + 14\ell+1$. 当 $\ell \geq 2$ 时，我们称

$\phi(x)$ 在 $\left(-1 - \frac{1}{\sqrt{\ell}}, -1\right)$ 中有根. 注意 $\phi(-1) = 16 > 0$ 和

$$\phi\left(-1 - \frac{1}{\sqrt{\ell}}\right) = 16 + \frac{1}{\ell^2} - \frac{8}{\ell} + \frac{10}{\sqrt{\ell}} - 16\sqrt{\ell}.$$

如果 $\ell = 2$ ，那么 $\phi\left(-1 - \frac{1}{\sqrt{\ell}}\right) = -3.306 \dots < 0$. 如果 $\ell \geq 3$ 那么

$$\phi\left(-1 - \frac{1}{\sqrt{\ell}}\right) < 16 + \frac{1}{\ell^2} + \frac{10}{\sqrt{\ell}} - 16\sqrt{\ell} \leq 16 + \frac{1}{3^2} + \frac{10}{\sqrt{3}} - 16\sqrt{3} = -5.828 \dots < 0.$$

这意味着当 $\ell \geq 2$ 时， $\phi\left(-1 - \frac{1}{\sqrt{\ell}}\right) < 0$ 。因此， $\phi(x)\left(-1 - \frac{1}{\sqrt{\ell}}, -1\right)$ 在 $\left(-1 - \frac{1}{\sqrt{\ell}}, -1\right)$

中有一个根，因此

$$-1 - \frac{1}{\sqrt{\ell}} < \mu_{\max}^-(P_3 \cup (\ell-1)P_2 \cup P_1) < -1, \quad \ell \geq 2.$$

注意 $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \left(-1 - \frac{1}{\sqrt{\ell}}\right) = -1$ ，命题 3.3 通过夹逼定理可得。

定理 3 的证明：通过命题 3.1，我们知道对于足够大的 n ， H_n 在 $(-1-\varepsilon, -1)$ 内有一个特征值。注意，任何图 G 及其补图 $\overline{G}$ 的赛德尔特特征值互为相反数。我们可以看到，对于足够大的 n ，图 $\overline{H_n}$ 在 $(1, 1+\varepsilon)$ 中有一个特征值。这就完成了对定理 3 的证明。

3.4 主要结论

通过上述对余图赛德尔矩阵的研究与证明，我们可以得到以下的结论：

不存在至少有两个顶点的余图在区间 $(-1, 1)$ 内具有赛德尔特特征值。对任何至少有两个顶点的顶点加权余图，有 $\text{rank } S(G, w) = \text{edr } S(G, w)$ 。同时，对于任何 $\varepsilon > 0$ ， $(1, 1+\varepsilon)$ 和 $(-1-\varepsilon, -1)$ 中的任何一个区间都包含一个足够大阶的余图的赛德尔特特征值。

第4章 余图邻接与距离矩阵无特征值区间的最优性

我们本章主要是对余图的邻接矩阵和距离矩阵的无特征值区间的最优性进行简单证明。Mohammadian 和 Trevisan 证明了任意余图在区间 $(-1, 0)$ 上均无邻接矩阵特征值；Lou 等人证明了任意连通的余图在区间 $(-2, -1)$ 上均无距离矩阵特征值。本文通过构造几类特殊的余图，证明了 -1 和 0 是所有余图邻接矩阵特征值的两个极限点。同理，证明了 -1 和 -2 是所有连通余图距离矩阵特征值的两个极限点。

4.1 准备知识

同样我们首先介绍下距离矩阵的相关概念。针对有 n 个顶点的图 $G = (V, E)$ ， V 为顶点集， E 为边集。顶点 v_i 与 v_j 间距离 $d(v_i, v_j)$ 是连接二者最短路径的边数，无路径则 $d(v_i, v_j) = \infty$ 。距离矩阵 $D = (d_{ij})$ 是 n 阶矩阵， $d_{ij} = d(v_i, v_j)$ 。前文对于余图的概念及相关公式已经有过说明，在此不再赘述。

介绍完基础的概念之后下面开始证明主要的结果。

4.2 主要结果及其证明

4.2.1 余图区间 $(-1, 0)$ 最优性

设图 G 在区间 $(-\infty, -1)$ 及 $(0, +\infty)$ 均有特征值，用 $\lambda_{\max}^-(G)$ 表示 G 在 $(-\infty, -1)$ 上的最大特征值， $\lambda_{\min}^+(G)$ 表示 G 的最小正特征值。对于任意正整数 ℓ ，用 ℓG 表示 $\bigcup_{i=1}^{\ell} G_i$ ，其中 $G_1, \dots, G_{\ell}$ 是 G 的 ℓ 个点不交的拷贝。

命题 4.1 $\lim_{\ell \rightarrow +\infty} \lambda_{\max}^-(\ell K_2 \cup K_1) = -1$ 。

证明： 记 $Y_{\ell} = \ell K_2 \cup K_1, \ell \geq 1$ 。其邻接矩阵为

$$A(Y_{\ell}) = \text{diag} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 0 \right).$$

易见 $P_{Y_\ell}(x) = (x^2 - 1)^\ell x$. 故 Y_ℓ 共有三个不同特征值 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ 和 $\lambda_3 = 0$. 不难算出相应的三个特征子空间的三组基分别为:

$$\begin{aligned} \xi_1^{(1)} &= (1, 1, 0, 0, \dots, 0)^\top, \xi_2^{(1)} = (0, 0, 1, 1, \dots, 0)^\top, \dots, \xi_\ell^{(1)} = (0, 0, \dots, 1, 1, 0)^\top; \\ \xi_1^{(2)} &= (1, -1, 0, 0, \dots, 0)^\top, \xi_2^{(2)} = (0, 0, 1, -1, \dots, 0)^\top, \dots, \xi_\ell^{(2)} = (0, 0, \dots, 1, -1, 0)^\top; \text{ 以及} \\ \xi_1^{(3)} &= (0, 0, 0, 0, \dots, 1)^\top. \end{aligned}$$

分别做施密特正交化, 再利用等式(3-7), 可得 Y_ℓ 的各个主角, 如下表 4-1 所示.

表 4-1 $\ell K_2 \cup K_1$ 的主角

i	互异特征值 λ_i	特征子空间的标准正交基	β_i
1	1	$(\underbrace{0, \dots, 0}_{2k-2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \underbrace{0, \dots, 0}_{2\ell-2k+1})^\top, k=1, 2, \dots, \ell$	$\sqrt{\frac{2\ell}{2\ell+1}}$
2	-1	$(\underbrace{0, \dots, 0}_{2k-2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \underbrace{0, \dots, 0}_{2\ell-2k+1})^\top, k=1, 2, \dots, \ell$	0
3	0	$(\underbrace{0, \dots, 0}_{2\ell}, 1)^\top$	$\sqrt{\frac{1}{2\ell+1}}$

根据引理 2.1 可得:

$$\begin{aligned} P_{\overline{Y}_\ell}(x) &= (-1)^{2\ell+1}(-1-x)x^\ell(x+2)^\ell \left(1 - (2\ell+1) \left(\frac{2\ell}{x+2} + \frac{1}{x+1} \right) \right) \\ &= (-1)^{2\ell+1}(-1-x)x^\ell(x+2)^\ell \left(1 - \frac{2\ell}{x+2} - \frac{1}{x+1} \right) \\ &= x^\ell(x+2)^{\ell-1}(x^2 + (2-2\ell)x - 2\ell). \end{aligned}$$

设 $g_\ell(x) = x^2 + (2-2\ell)x - 2\ell$, 则 $g_\ell(x) = 0$ 的两个根为 $\ell-1 \pm \sqrt{\ell^2+1}$. 由此可知 $\overline{Y}_\ell$ (即 $\ell K_2 \cup K_1$) 的所有不同负特征值为 -2 和 $\ell-1-\sqrt{\ell^2+1}$. 由于

$\ell - 1 - \sqrt{\ell^2 + 1} \in (-\infty, -1)$, 从而有

$$\lambda_{\max}^-(\overline{\ell K_2 \cup K_1}) = \max\{-2, \ell - 1 - \sqrt{\ell^2 + 1}\}.$$

注意到

$$\lim_{\ell \rightarrow +\infty} \ell - 1 - \sqrt{\ell^2 + 1} = \lim_{\ell \rightarrow +\infty} \frac{-2\ell}{(\ell - 1) + \sqrt{\ell^2 + 1}} = \lim_{\ell \rightarrow +\infty} \frac{-2}{1 - \frac{1}{\ell} + \sqrt{1 + \frac{1}{\ell}}} = -1,$$

故 $\lim_{\ell \rightarrow +\infty} \lambda_{\max}^-(\overline{\ell K_2 \cup K_1}) = -1$.

命题 4.2 $\lim_{\ell \rightarrow +\infty} \lambda_{\min}^+((\ell K_2 \cup K_1) \nabla K_1) = 0$.

证明: 记 $Y_\ell = \ell K_2 \cup K_1, \ell \geq 1$. 根据引理 2.5 和表 4-1 得:

$$P_{Y_\ell \nabla K_1}(x) = x(x^2 - 1)^\ell \left(x - \frac{1}{x} - \frac{2\ell}{x-1} \right) = (x-1)^{\ell-1} (x+1)^\ell (x^3 - x^2 - (2\ell+1)x + 1).$$

定义函数 $g_\ell(x) = x^3 - x^2 - (2\ell+1)x + 1$. 注意到 $g_\ell(0) = 1 > 0$ 而

$$g_\ell\left(\frac{1}{\ell}\right) = \frac{1}{\ell^3} - \frac{1}{\ell^2} - \frac{2\ell+1}{\ell} + 1 = \frac{1}{\ell^3} - \frac{1}{\ell^2} - \frac{1}{\ell} - 1 < 0,$$

由连续函数的零点定理知 $g_\ell(x) = 0$ 在 $\left(0, \frac{1}{\ell}\right)$ 至少存在一个根. 这表明 $Y_\ell \nabla K_1$ 的最

小正特征值不超过 $\frac{1}{\ell}$, 故 $\lim_{\ell \rightarrow +\infty} \lambda_{\min}^+((\ell K_2 \cup K_1) \nabla K_1) = 0$. 证毕.

定义一族图 $X_n (n \geq 3)$ 如下:

$$X_n = \begin{cases} (\ell K_2 \cup K_1) \nabla K_1 & n = 2\ell + 2 \\ \overline{\ell K_2 \cup K_1} & n = 2\ell + 1. \end{cases}$$

不难看出 X_n 均为余图. 由命题 4.1 知, $\lim_{\ell \rightarrow +\infty} \lambda_{\max}^-(X_{2\ell+1}) = -1$. 故对于任意 $\varepsilon > 0$, 当

ℓ 充分大时, 余图 $X_{2\ell+1}$ 在区间 $(-1-\varepsilon, -1)$ 上有一个特征值, 故定理 4 成立. 同理

由命题 4.2 知定理 4 成立. 证毕。

4.2.2 连通余图区间 $(-2, -1)$ 最优性

设连通余图 G 在区间 $(-\infty, -2)$ 及 $(-1, +\infty)$ 均有距离特征值, 用 $\lambda_{\max}^-(G)$ 表示 G 在 $(-\infty, -2)$ 上的最大负特征值, $\lambda_{\min}^-(G)$ 表示 G 在 $(-1, +\infty)$ 的最小负特征值. 对于任意正整数 ℓ , 用 ℓG 表示 $\bigcup_{i=1}^{\ell} G_i$, 其中 $G_1, \dots, G_{\ell}$ 是 G 的 ℓ 个点不交的拷贝.

命题 4.3 $\lim_{\ell \rightarrow +\infty} u_{\max}^-((\ell K_2 \cup K_1) \nabla K_1) = -2$

证明: 记 $Y_{\ell} = (\ell K_2 \cup K_1) \nabla K_1$, $\ell > 1$. 根据引理 2.4, 当 $s=1$ 时, 可得:

$$P_{D(Y_{\ell})}(x) = [x^3 - (4\ell - 3)x^2 - (10\ell + 1)x - (4\ell + 3)](x+1)^{\ell}(x+3)^{\ell-1}$$

$$\text{设 } h_{\ell}(x) = x^3 - (4\ell - 3)x^2 - (10\ell + 1)x - (4\ell + 3),$$

假设区间为 $(-2 - \varepsilon, -2)$, 取 $\varepsilon = \frac{1}{\ell}$, 当 $\ell \rightarrow \infty$ 时,

$$\begin{aligned} h_{\ell}(-2 - \varepsilon) &= (-2 - \frac{1}{\ell})^3 - (4\ell - 3)(-2 - \frac{1}{\ell})^2 - (10\ell + 1)(-2 - \frac{1}{\ell}) - 4\ell - 3 \\ &= -3 - \frac{1}{\ell^3} - \frac{1}{\ell^2} - \frac{3}{\ell} < 0. \end{aligned}$$

$$h_{\ell}(-2) = 3 > 0.$$

由零点定理可知, 至少有一个零点 $x_0 \in (-2 - \varepsilon, -2)$, 且

$-2 - \frac{1}{\ell} = -2 - \varepsilon < x_0 < -2$. 根据夹逼准则可知, 当 $\ell \rightarrow \infty$ 时, $x_0 \rightarrow -2$, 得证。

命题 4.4 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\min}^-((\ell - 1)K_2 \cup K_3 \cup K_1) = -1$

证明: 记 $Y_{\ell} = \overline{(\ell - 1)K_2 \cup K_3 \cup K_1}$, Y_{ℓ} 的补图结构为:

$$(\ell - 1)K_2 \cup K_3 \cup K_1, \ell > 1$$

容易得到图 $\overline{Y_{\ell}}$ 的邻接矩阵如下:

$$A_{\overline{Y_{\ell}}} = \text{diag} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 0 \right).$$

由 $P_{Y_{2\ell}}(x) = (x-1)^{\ell-1}(x-2)(x+1)^{\ell+1}x$ 知根为: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = 2$.

由等式(3-7)得:

表 4-2 $(\ell-1)K_2 \cup K_3 \cup K_1$ 的主角

特征值 λ_i	特征空间的标准正交基	β_i^2
1	$(\underbrace{0, \dots, 0}_{2k+1}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \underbrace{0, \dots, 0}_{2\ell-2k-1})^T, k=1, 2, \dots, \ell-1$	$\frac{2\ell-2}{2\ell+2}$
-1	$(\underbrace{0, \dots, 0}_{2k+1}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \underbrace{0, \dots, 0}_{2\ell-2k-1})^T, k=1, 2, \dots, \ell-1$ $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \underbrace{0, \dots, 0}_{2k-1})^T$ $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{2k})^T$	0
0	$(\underbrace{0, 0, 0, 0, \dots, 0}_{2k+1}, 1)^T$	$\frac{1}{2\ell+1}$
2	$(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{2k-1})^T$	$\frac{3}{2\ell+1}$

根据引理 2.2 可得:

$$\begin{aligned}
 P_{D(Y_\ell)}(x) &= (1+x)x^{\ell-1}(x-1)(x+2)^{\ell+1}(1-(2\ell+2)) \left(\frac{3}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{2\ell-2}{x} \right) \\
 &= x^{\ell-2}(x+2)^{\ell+1}(x+1)(x-1) \left(1 - \frac{3}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2\ell-2}{x} \right) \\
 &= x^{\ell-2}(x+2)^{\ell+1}[x^3 - (2+2\ell)x^2 - 3x + 2\ell - 2].
 \end{aligned}$$

设 $h_\ell(x) = x^3 - (2\ell+2)x^2 - 3x + 2\ell - 2$, 取区间 $(-1, -1+\varepsilon)$, $h_\ell(-1) = -2$

取 $\varepsilon = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\ell}}$ 代入原式可得:

$$\begin{aligned} h_\ell(-1 + \varepsilon) &= h\left(-\sqrt{1 - \frac{1}{\ell}}\right) = -\left(1 - \frac{1}{\ell}\right)\sqrt{1 - \frac{1}{\ell}} - (2\ell + 2)\left(1 - \frac{1}{\ell}\right) + 3\sqrt{1 - \frac{1}{\ell}} + 2\ell - 2 \\ &= \left(\frac{1}{\ell} + 2\right)\sqrt{1 - \frac{1}{\ell}} + 2 \cdot \left(\frac{1}{\ell} - 1\right) = \sqrt{1 - \frac{1}{\ell}} \cdot \left(\frac{1}{\ell} + 2 - 2\sqrt{1 - \frac{1}{\ell}}\right). \end{aligned}$$

由 $\ell \geq 1$ 可得, $1 - \frac{1}{\ell} \geq 0$. 只需证, 即 $1 + 2\ell > 2\ell \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{\ell}}$.

两边同时取平方可得: $4\ell^2 + 4\ell + 1 > 4\ell^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{\ell}\right) = 4\ell^2 - 4\ell$.

由于 $\ell \geq 1$, 得证. 因此 $h_\ell(-1 + \varepsilon) > 0$.

根据零点定理可知, 至少有一个零点 $x_0 \in (-1, -1 + \varepsilon)$, 且

$$-1 < x_0 < -1 + \varepsilon = -\sqrt{1 - \frac{1}{\ell}},$$

根据夹逼准则可知, 当 $\ell \rightarrow \infty$ 时, $x_0 \rightarrow -1$, 得证。

命题 4.5 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\max}^-(\ell K_2 \cup K_1 \cup K_1) \nabla K_1 = -2$

证明: 记 $Y_\ell = (\ell K_2 \cup K_1 \cup K_1) \nabla K_1$.

根据引理 2.4, 当 $s = 2, k > 1$ 时, 可得到 $Y_{3\ell}$ 的距离特征多项式为:

$$P_{D(Y_\ell)}(x) = [x^3 + (1 - 4\ell)x^2 - (10\ell + 8)x - (4\ell + 6)](x + 1)^\ell (x + 2)(x + 3)^{\ell-1}$$

设 $h_\ell(x) = x^3 + (1 - 4\ell)x^2 - (10\ell + 8)x - (4\ell + 6)$, $h_\ell(-2) = 6 > 0$

假设区间为 $(-2 - \varepsilon, -2)$, 取 $\varepsilon = \frac{6}{\ell}$, 当 $\ell \rightarrow \infty$ 时,

$$h_\ell(-2 - \varepsilon) = -30 - \frac{216}{\ell^3} - \frac{180}{\ell^2} - \frac{144}{\ell} < 0$$

根据零点定理可知, 至少有一个零点 $x_0 \in (-2 - \varepsilon, -2)$, 且

$$-2 - \frac{6}{\ell} = -2 - \varepsilon < x_0 < -2,$$

根据夹逼准则可知, 当 $\ell \rightarrow \infty$ 时, $x_0 \rightarrow -2$, 得证。

命题 4.6 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\min}^-(\overline{\ell K_2 \cup K_1}) = -1$

证明：记 $Y_\ell = \overline{\ell K_2 \cup K_1} \cdot Y_{4\ell}$ 的补图结构为：

$$\overline{Y_\ell} = \ell K_2 \cup K_1$$

容易得到 $\overline{Y_\ell}$ 的邻接矩阵如下：

$$A_{\overline{Y_{4\ell}}} = \text{diag} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 0 \right)$$

由 $P_{\overline{Y_\ell}}(x) = (x^2 - 1)^\ell x$ 可以得出特征多项式的特征值为： $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 0$.

由等式(3-7)得：

表 4-6 $\ell K_2 \cup K_1$ 的主角

特征值 λ_i	特征空间的标准正交基	β_i^2
1	$(\underbrace{0, \dots, 0}_{2k-2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \underbrace{0, \dots, 0}_{2\ell-2k+1})^\top, k=1, 2, \dots, \ell$	$\frac{2\ell}{2\ell+1}$
-1	$(\underbrace{0, \dots, 0}_{2k-2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \underbrace{0, \dots, 0}_{2\ell-2k+1})^\top, k=1, 2, \dots, \ell$	0
0	$(\underbrace{0, \dots, 0}_{2k}, 1)^\top$	$\frac{1}{2\ell+1}$

根据引理 2.2 可得：

$$\begin{aligned}
 P_{D(Y_\ell)}(x) &= (1+x)[(x+1)^2 - 1]^\ell (1 - (2\ell+1) \left(\frac{1}{x+1} + \frac{2\ell}{x} \right)) \\
 &= x^\ell (x+2)^\ell (x+1) \left(1 - \frac{1}{x+1} - \frac{2\ell}{x} \right) \\
 &= x^{\ell-1} (x+2)^\ell (x^2 - 2\ell x - 2\ell).
 \end{aligned}$$

可以明显看出有四个根，分别为：

$$\mu_1 = -2, \mu_2 = 0, \mu_3 = \frac{2\ell + \sqrt{4\ell^2 + 8\ell}}{2}, \mu_4 = \frac{2\ell - \sqrt{4\ell^2 + 8\ell}}{2}$$

取 μ_4 ，当 $\ell \rightarrow \infty$ 时：

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\ell \rightarrow +\infty} \frac{2\ell - \sqrt{4\ell^2 + 8\ell}}{2} \\
 &= \lim_{\ell \rightarrow +\infty} \frac{-8\ell}{2(2\ell + \sqrt{4\ell^2 + 8\ell})} \\
 &= \lim_{\ell \rightarrow +\infty} \frac{-8}{2\left(2 + \sqrt{4 + \frac{8}{\ell}}\right)} \\
 &= -1.
 \end{aligned}$$

综上，定理 5 证明完毕.

4.3 主要结论

通过对上述余图无特征值区间的研究和证明，我们得到以下结论：

对任意 $\varepsilon > 0$ ，总存在一个余图在 $(-1-\varepsilon, -1)$ 和 $(0, \varepsilon)$ 内至少有一个邻接矩阵特征值.

对任意 $\varepsilon > 0$ ，总存在一个连通余图在 $(-2-\varepsilon, -2)$ 和 $(-1, -1+\varepsilon)$ 内至少有一个距离矩阵特征值.

第5章 回顾与展望

5.1 回顾

本文主要在余图的基础上考虑一些相关的特征值分布问题。主要考虑顶点加权余图的无特征值区间以及区间的最优性，同时也得出了顶点加权余图本质不同行行数与秩之间的等量关系性质。除此之外，还考虑了余图和连通的距离余图的无特征值区间的最优性。全篇共计分为五个章节，主要工作如下：

在第一章中，我们分为三节来介绍我们将要讨论的问题的背景、国内外的一些学者之前相关研究的进展以及已经取得的重要研究成果和目前学者们聚焦的尚未解决的一些难题。

在第二章中，我们首先介绍了预备知识和一些基础且重要的、并在后文会反复应用的结论。

在第三章中，我们证明了不存在至少有两个顶点的余图在区间 $(-1,1)$ 内具有赛德尔特特征值。对于任何 $\varepsilon > 0$ ， $(1,1+\varepsilon)$ 和 $(-1-\varepsilon,-1)$ 中的任何一个区间都包含一个足够大阶的余图的赛德尔特特征值。同时，设 (G,w) 是任何至少有两个顶点的顶点加权余图，得出 $\text{rank } S(G,w) = \text{edr } S(G,w)$ 。

在第四章中，我们根据目前已有的结果，考虑并证明了对任意 $\varepsilon > 0$ ，总存在一个余图在 $(-1-\varepsilon,-1)$ 和 $(0,\varepsilon)$ 内至少有一个邻接矩阵特征值。对任意 $\varepsilon > 0$ ，总存在一个连通余图在 $(-2-\varepsilon,-2)$ 和 $(-1,-1+\varepsilon)$ 内至少有一个距离矩阵特征值。

5.2 展望

虽然这一阶段工作已经取得一定的研究结论，但是未来还有还多问题值得我们去探求与思考。在未来的探索工作中希望着力于研究以下问题：(1) 设 $n \geq 3$ ，对于任意的 n 阶余图 G ，有 $\mu_{\max}^-(H_n) \geq \mu_{\max}^-(G)$ (或等价的 $\mu_{\min}^+(H_n) \leq \mu_{\min}^+(G)$)；(2) 考虑集合 $S = \{\lambda : \lambda \text{ 是某个余图的特征值}\}$ ，如何描述这个集合或这个集合的导集。

参考文献

- [1] L. Collatz, U. Sinowinz. Spektren endlicher Graphen [M]. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg, 1957, 21: 63-77.
- [2] D. M. Cvetković, M. Doob, I. Gutman, etc. Recent Results in the Theory of Graph Spectra [M]. North-Holland, 1988.
- [3] D. G. Corneil, H. Lerchs, L. S. Burlingham. Complement reducible graphs [J]. Discrete Applied Mathematics, 1981, 3 (3): 163-174.
- [4] H. A. Jung. On a class of posets and the corresponding comparability graphs [J]. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 1978, 24 (2): 125-133.
- [5] D. Seinsche. On a property of the class of n -colorable graphs [J]. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 1974, 16 (2): 191-193.
- [6] D. P. Sumner. Dacey graphs [J]. Journal of the Australian Mathematical Society, 1974, 18 (4): 492-502.
- [7] P. Manca. On a simple characterisation of threshold graphs [J]. Decision Economics and Finance, 1979, 2 (1):3-8.
- [8] F. Harary. The structure of threshold graphs [J]. Rivista di Matematica per le Scienze Economiche e Sociali, 1979, 2 (2):169-172.
- [9] D. G. Corneil, Y. Perl, L. K. Stewart. A linear Recognition algorithm for cographs [J]. SIAM Journal on Computing, 1985, 14 (4): 926-934.
- [10] G. F. Royle. The rank of a cograph [J]. Electronic Journal of Combinatorics, 2003, 10: 495-500.
- [11] G. J. Chang, L. H. Huang, H. G. Yeh. On the rank of a cograph [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2008, 429: 601-605.
- [12] D. Cvetković, P. Rowlinson, S. Simić. An Introduction to the Theory of Graph Spectra [M]. Cambridge, Cambridge University Press, UK, 2010.
- [13] M. Aneli, S. K. Simi. Some notes on the threshold graphs [J]. Discrete Mathematics, 2010, 310 (17-18): 2241-2248.
- [14] I. Sciriha, S. Farrugia. On the spectrum of threshold graphs [J]. International

Scholarly Research Notices, 2011, 2011 (1): 108509.

[15] H. Lin, Y. Hong, J. Wang, etc. On the distance spectrum of graphs [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2013, 439 (6): 1662-1669.

[16] C. T. M. Vinagre, R. R. Del-Vecchio, D. A. R. Justo, etc. Maximum Laplacian energy among threshold graphs [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2013, 439: 1479-1495.

[17] R. B. Bapat. Laplacian eigenvalues of threshold graphs [J]. Graphs and Matrices, 2014, 145-155.

[18] D. P. Jacobs, V. Trevisan, F. Tura. Eigenvalues and energy in threshold graphs [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2015, 465: 412-425.

[19] M. D. Barrus. Weakly threshold graphs [J]. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 2016, 20 (1).

[20] Mohammadian, V. Trevisan. Some spectral properties of cographs [J]. Discrete Mathematics, 2016, 339: 1261-1264.

[21] 杨若松, 王力工。五类特殊图的三种距离矩阵的特征多项式 [J]. 数学的实践与认识, 2016, 46 (23): 137-142。

[22] R. Vrabel. A note on the matrix determinant lemma [J]. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 2016, 111 (4): 643-646.

[23] H. Lin, B. Zhou. Distance spectral radius of quasi-trees [J]. Ars Combinatoria, 2017, 134:209-213.

[24] L. Lu, Q. Huang, Z. Lou. On the distance spectra of threshold graphs [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2018, 553: 223-237.

[25] O. Aguilar, J.-Y. Lee, E. Piato, B. J. Schweitzer. Spectral characterizations of anti-regular graphs. Generating I-eigenvalue free threshold graphs [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2018, 557: 84-104.

[26] F. Tura, J. Lazzarin, O. F. Márquez. No threshold graphs are cospectral [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2019, 560: 133-145.

[27] E. Ghorbani. Eigenvalue-free interval for threshold graphs [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2019, 583: 300-305.

-
- [28] M. Ghorbani, M. Hakimi-Nezhaad. Co-spectrality distance of graphs [J]. Journal of Information and Optimization Sciences, 2019, 40: 1221-1235.
 - [29] E. Ghorbani. Cographs: Eigenvalues and Dilworth Number [J]. Discrete Applied Mathematics, 2019, 342 (10): 2797-2803.
 - [30] Z. Lou, J. Wang, Q. Huang. On the eigenvalues distribution in threshold graphs [J]. Graphs and Combinatorics, 2019, 35: 867-880.
 - [31] C. T. M. Vinagre, V. Trevisan, J. Bolckau, etc. Characterizing threshold graphs with k main signless Laplacian eigenvalues [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2020, 602: 33-45.
 - [32] L. E. Allem, F. Tura. Integral cographs [J]. Discrete Applied Mathematics, 2020, 283: 153-167.
 - [33] A. Alhevaz, M. Baghipur, Y. Alizadeh, etc. On eigenvalues of the reciprocal distance signless laplacian matrix of graphs [J]. Asian-European Journal of Mathematics, 2021, 14 (10): 2150176.
 - [34] A. Alazemi, M. Anđelić, T. Koledin, etc. Eigenvalue-free intervals of distance matrices of threshold and chain graphs [J]. Linear and Multilinear Algebra, 2021, 69 (16): 2959-2975.
 - [35] S. Mirafzal. On the distance eigenvalues of design graphs [J]. Ricerche di Matematica, 2021.
 - [36] Z. Lou, H. Lin. Distance eigenvalues of a cograph and their multiplicities [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2021, 608: 1-12.
 - [37] R. R. Del-Vecchio, M. AbdaóN. Seidel spectrum of threshold graphs [J]. Computational and Applied Mathematics, 2022, 41:132.
 - [38] Z. Qiu, Z. Tang. On the eccentricity spectra of threshold graphs [J]. Discrete Applied Mathematics, 2022, 310: 75-85.
 - [39] Z. Xiong, Y. Hou. Eigenvalue-free interval for Seidel matrices of threshold graphs [J]. Applied Mathematics and Computation, 2022, 427: 127177.
 - [40]C. Hoppen, D.P. Jacobs, V.Trevisan. Locating Eigenvalues in Graphs: Algorithms and Applications [M]. Springer Briefs. Springer, Cham, 2022.

- [41] L. E. Allem, F. Tura, E. R. Oliveira. Generating I-eigenvalue free threshold graphs [J]. *Electronic Journal of Combinatorics*, 2023, P2. 30-P2. 30.
- [42] S. Hayat, A. Khan, M. J. F. Alenazi. On some distance spectral characteristics of trees [J]. *Axioms*, 2024, 13 (8): 494.
- [43] Y. Zhang, H. Lin. Graphs with three distinct distance eigenvalues [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2023, 445: 127848.
- [44] 糟玉英, 朱银芬, 王国平. 三圈图的最小距离特征值 [J]. *数学的实践与认识*, 2024, 54 (10): 186-193.
- [45] R. R. Macharete, R. R. Del-Vecchio, H. Teixeira, etc. A Laplacian eigenbasis for threshold graphs [J]. *Special Matrices*, 2024, 12 (1): 86-119.
- [46] G. Chen, F. C. Tura. A linear algorithm for obtaining the Laplacian eigenvalues of a cograph [J]. *Special Matrices*, 2024, 12 (1): 68-81.
- [47] L. Li, J. Wang, M. Brunetti. Seidel matrices, Dilworth number and an eigenvalue-free interval for cographs [J]. *Linear Algebra and Its Applications*, 2024, 698: 56-72.
- [48] H. Niu, W. Wang. Eigenvalue-free interval for seidel matrices of cographs [J]. *Journal of Mathematical Research with Applications*, 2025, 45 (01): 1-10.

攻读硕士期间取得的学术成果

已发表的学术论文:

- [1] NIU H, WANG W. Eigenvalue-Free Interval for Seidel Matrices of Cographs[J].
Journal of Mathematical Research with Applications, 2025, 45(01): 1-10.

致 谢

白驹过隙，研究生生涯如一幅绚丽多彩的画卷，在岁月的长河中缓缓展开又即将合上。在这即将告别校园之际，内心满是感慨与感恩，有太多的人值得我致以最诚挚的谢意。

我要将最衷心的感谢献给我尊敬的导师王伟教授。您是我学术道路上的引路人，是照亮我前行的明灯。还记得论文选题时，面对众多的研究方向，我迷茫无措，是您凭借深厚的学术造诣和敏锐的洞察力，帮我选定了既有研究价值又贴合我兴趣的方向，让我在科研的海洋中有了明确的航向。

在论文撰写过程中，您的悉心指导更是如影随形。每一次与您讨论论文进展，您总是耐心倾听我的想法，然后给出精准且富有建设性的意见。从论文的整体框架搭建到每一个章节的内容填充，从观点的论证到语句的雕琢，您都严谨把关，精益求精。当我遇到困难想要放弃时，您总是用鼓励的话语激励我，让我重新振作起来。您严谨的治学态度、对学术的执着追求和无私的奉献精神，深深地感染着我，让我明白了做学问不仅要有扎实的知识储备，更要有勇于探索、追求真理的精神。

感谢数理与金融学院的各位授课老师，是你们在课堂上的精彩讲授，让我接触到了前沿的学术理论和研究方法，拓宽了我的学术视野，提升了我的专业素养。你们以渊博的知识、独特的教学风格和敬业的精神，为我们打开了一扇通往知识殿堂的大门。

同窗共读的同学们，我也满怀感激。在研究生生涯，我们围绕学术问题展开热烈的讨论，彼此分享学习过程中的感悟与体会，携手度过了无数充实而美好的时光。当我在撰写论文中遇到困境时，你们的一句鼓励话语、一条宝贵建议，都如同照亮黑暗明灯。那些携手为梦想拼搏的日子，已然成为我人生中最珍贵的片段。

在这里，我还要对我的家人表示深深的感激，你们就像那温暖又安稳的港湾，让我无论何时都能感受到安稳与依靠。当我在学习上遇到挫折时，你们的安慰和鼓励让我重新找回信心；当我取得成绩时，你们的喜悦和自豪让我倍感温暖。

毕业是一段旅程的结束，更是新征程的开始。我将带着在研究生阶段所学到

的知识和收获的宝贵经验，踏上新的人生道路。我会铭记这段难忘的经历，感恩所有帮助过我的人，努力成为一个对社会有用的人，不辜负大家的期望。