
分类号 O174.2
密 级：公开

学校代码：10363
学 号：2221020116

题 目 极大变指数函数空间中几类算子的
有界性研究

英文并列

题 目 Boundedness of Several Kinds of Operators
on Grand Variable Function Spaces

学生姓名： 李晓燕

指导教师： 王立伟 教授

专 业： 0701 数学

研究方向： 调和分析

论文答辩日期： 2025 年 5 月 14 日

安徽工程大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：我恪守学术道德，崇尚严谨学风。所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已明确注明和引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品及成果的内容。论文为本人亲自撰写，我对所写的内容负责，并完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

学位论文作者签名：李晚燕

日期：2025 年 5 月 14 日

安徽工程大学学位论文授权使用授权书

学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅或借阅。本人授权安徽工程大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保密 ☐，在 _____ 年解密后适用本版权书。

本学位论文属于

不保密 ☒。

学位论文作者签名：李婉燕

指导教师签名：王立伟

日期：2025 年 5 月 14 日

日期：2025 年 5 月 14 日

极大变指数函数空间中几类算子的有界性研究

摘 要

自然科学和工程技术的很多实际问题如非线性弹性力学、流体动力学及图像恢复等问题具有变指数增长的特征。由于这些实际问题所提出的数学模型一般是具变指数增长的偏微分方程，而对这类偏微分方程解的存在性与正则性等问题的研究需要在变指数函数空间的框架下进行。变指数函数空间与经典函数空间有着本质的区别，它为研究具有变指数增长的非线性偏微分方程解的性质提供了合适的框架。

基于近年来大量学者对变指数函数空间的研究，本文研究了几类算子及其交换子在变指数函数空间的有界性，主要成果如下：

第一章，概述了变指数函数空间的发展历史和国内外相关研究的现状，并介绍了本学位论文的主要研究内容。

第二章，证明了参数型 Marcinkiewicz 积分算子在极大变指数 Herz 空间中的有界性。

第三章，研究了参数型 Marcinkiewicz 积分算子的高阶交换子在极大变指数 Herz 空间中的有界性，证明了 $b \in \text{BMO}$ 时，高阶交换子 $[b^m, \mu_\Omega^\rho]$ 满足

$$\| [b^m, \mu_\Omega^\rho](f) \|_{\dot{K}_{q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p(\cdot), \theta}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \| b \|_*^m \| f \|_{\dot{K}_{q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p(\cdot), \theta}(\mathbb{R}^n)}.$$

第四章，研究了 Marcinkiewicz 积分算子的多线性交换子在极大变指数 Herz-Morrey 空间中的有界性，证明了 $b \in \text{BMO}$ 时，多线性交

换子 $[\vec{b}, \mu_\Omega]$ 满足

$$\|[\vec{b}, \mu_\Omega](f)\|_{MK_{\lambda,q(\cdot)}^{\alpha(\cdot),p(\cdot),\theta}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \prod_{i=1}^m \|b_i\|_* \|f\|_{MK_{\lambda,q(\cdot)}^{\alpha(\cdot),p(\cdot),\theta}(\mathbb{R}^n)}.$$

本文主要对经典函数空间中几类算子及交换子的有界性进行了拓展, 将这些算子的有界性推广至极大变指数函数空间, 进一步丰富了变指数函数空间理论。

关键词: 参数型 Marcinkiewicz 积分算子, 高阶交换子, 多线性交换子, 变指数 Herz 空间, 变指数 Herz-Morrey 空间

Boundedness of Several Kinds of Operators on Grand Variable Function Spaces

ABSTRACT

Many practical problems in natural science and engineering technology, such as nonlinear elastic mechanics, fluid dynamics and image restoration, are characterized by exponent variable growth. Since the mathematical models proposed for these practical problems are generally partial differential equations with variable exponent growth, the study of the existence and regularity of the solutions of such partial differential equations needs to be carried out within the framework of the variable exponent function space. The variable exponent function space is fundamentally different from the classical function space, which provides a suitable framework for studying the properties of the solutions of nonlinear partial differential equations with variable exponent growth.

Based on the research of a large number of scholars on the variable exponent function space in recent years, this paper studies the boundedness of several types of operators and their commutators in the variable exponent function space, and the main results are as follows:

In Chapter 1, the development process of variable exponent function

space and the current status of related research at home and abroad are summarized, and the main research contents of this dissertation are introduced.

In Chapter 2, the boundedness of the parametric Marcinkiewicz integral operator in the grand variable exponent Herz space is demonstrated.

In Chapter 3, the boundedness of the higher-order commutators of the parametric Marcinkiewicz integral operator in the grand variable exponent Herz space is studied, and it has been proved that when $b \in \text{BMO}$, the higher-order commutator $[b^m, \mu_\Omega^\rho]$ satisfies

$$\| [b^m, \mu_\Omega^\rho](f) \|_{\dot{K}_{q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p(\cdot), \theta}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|b\|_*^m \|f\|_{\dot{K}_{q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p(\cdot), \theta}(\mathbb{R}^n)}.$$

In Chapter 4, the boundedness of the multilinear commutators of the Marcinkiewicz integral operator in the grand variable exponent Herz-Morrey space is studied, and it is proved that when $b \in \text{BMO}$, the multilinear commutator $[\vec{b}, \mu_\Omega]$ satisfies

$$\| [\vec{b}, \mu_\Omega](f) \|_{\dot{MK}_{\lambda, q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p(\cdot), \theta}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \prod_{i=1}^m \|b_i\|_* \|f\|_{\dot{MK}_{\lambda, q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p(\cdot), \theta}(\mathbb{R}^n)}.$$

This article mainly expands the boundedness of several types of operators and commutators in classical function spaces, and extends the boundedness of these operators to variable exponent function spaces, further enriching the theory of variable exponent function spaces.

Li Xiaoyan (Applied Mathematics)

Supervised by Wang Liwei

KEY WORDS: parametric Marcinkiewicz integral operator, higher-order commutator, multilinear commutator, variable exponent Herz space, variable exponent Herz-Morrey space

目录

摘 要	I
ABSTRACT	III
第 1 章 绪论	1
1.1 研究背景	1
1.2 国内外研究现状	2
1.3 主要研究内容	3
第 2 章 参数型 Marcinkiewicz 积分算子在极大变指数 Herz 空间中的有界性	5
2.1 引言及主要结果	5
2.2 主要引理	8
2.3 主要定理的证明	8
第 3 章 参数型 Marcinkiewicz 积分算子的高阶交换子在极大变指数 Herz 空间上的有界性	18
3.1 引言及主要结果	18
3.2 主要引理	19
3.3 主要结果的证明	19
第 4 章 Marcinkiewicz 积分算子的多线性交换子在极大变指数 Herz-Morrey 空间中的有界性	28
4.1 引言及主要结果	28
4.2 主要引理	29
4.3 主要结果的证明	30
结论与展望	40
参考文献	41
硕士期间发表论文	45
致谢	46

第 1 章 绪论

1.1 研究背景

调和分析的起源可以追溯到 18 世纪和 19 世纪的傅里叶分析。Fourier 发现,任何周期函数都可以表示为正弦函数和余弦函数的线性组合,这一发现为调和分析奠定了基础。自从二十世纪五六十年代,由 Calderón 和 Zygmund 建立奇异积分算子理论开始,调和分析便进入了一个快速发展的时代,最典型的问题就是各种算子在不同的函数空间上的有界性。其中有关 Hardy-Littlewood 极大算子理论的研究尤为突出,学者们证明了 Hardy-Littlewood 极大算子在各类空间中的有界性,因此 Hardy-Littlewood 极大算子理论也逐渐发展为较为完善的算子理论。在经典调和分析的研究中出现了许多重要的函数空间,例如经典的 L^p 空间,经过很多学者的研究,已经有了比较完备的理论体系。

近年来,对于变指数函数空间的研究取得了很大的进展。这些空间理论之所以引起人们的研究兴趣,主要原因有以下两个方面:首先,在非线性弹性力学、流体动力学以及与之相关的偏微分方程研究中,往往需要考虑一些具有非标准局部增长条件的问题。具有变指数的函数空间是这些空间恰当的表达形式,如变指数 Lebesgue 空间、变指数 Sobolev 型空间等。其次,变指数函数空间理论本身有很多有趣的现象,从形式上看,它们是经典函数空间的自然推广,但人们发现二者有很多本质的区别,在经典函数空间成立的一些基本结论在变指数函数空间中可能不再成立。因此这就启发人们思考如何探索寻找一些合适的条件将经典函数空间里的一些基本结论推广到变指数函数空间中去。变指数 Lebesgue 空间 $L^{p(\cdot)}$ 最早是由 Orlicz^[1]引入的,但是首次系统的研究是由 Kováčik 和 Rákosník^[2]完成的。此后,各种各样的变指数函数空间及调和分析中的一些经典算子在这些空间中的有界性也被广泛地研究,见[3]-[6]等。

此外,对经典算子的交换子在变指数函数空间中的有界性的探讨也十分活跃。在 1965 年,Calderón 等人首次提出了奇异积分算子交换子理论。设 T 为经典的奇异积分算子,一个局部可积函数 $b \in \text{BMO}$, T 和 $\mathbb{R}^n$ 上的交换子定义为

$$[T, b]f = bT(f) - Tb(f).$$

1976 年, Coifman 等人^[7]证明了当 $1 < p < \infty$ 时, 交换子 T_b 在函数空间 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中是有界的。1998 年, 陆善镇和唐林^[8]对 Herz 空间上 Calderón-Zygmund 奇异积分算子及其交换子的有界性进行了研究。根据上述研究成果, 本文将进一步研究算子及其交换子在极大变指数函数空间中的有界性。

1.2 国内外研究现状

关于变指数 Lebesgue 空间的研究始于 1931 年波兰数学家 Orlicz 的工作。Morrey 空间的概念是在 1938 年由 Morrey^[9]在研究二阶椭圆偏微分方程解的性质时提出的。这类函数空间不仅可以视为 Lebesgue 空间的推广, 而且在偏微分方程等领域有着重要的作用。与此同时, 为了进一步研究 Fourier 变换的绝对收敛性, Herz^[10]于 1968 年引入了 Herz 空间的概念。众所周知, 经典的 Herz 空间 $\dot{K}_q^{\alpha, p}(\mathbb{R}^n)$ 及 $K_q^{\alpha, p}(\mathbb{R}^n)$ 在调和分析和偏微分方程中起着重要的作用。例如它们被应用于傅里叶变换的可和性及散度型椭圆方程的正则性理论中, 见文献 [11]-[12]。

Hardy-Littlewood 极大算子的有界性是由 Chiarenza^[13]等人最先研究的。Milman 与 Schonbek^[14]对交换子 $[M, b]$ 在经典的 Lebesgue 空间上的有界性进行了研究其中 $b \in \text{BMO}$, M 是 Hardy-Littlewood 极大算子。基于这一结果, Basero, Milman 和 Ruiz^[15]对 Hardy-Littlewood 极大函数的交换子 $[M, b]$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中有界性进行了等价刻画。之后, 丁勇等^[16]将该结论推广到 Morrey 空间。

2009 年, Izuki 在 [17] 中首先引入了变指数的 Herz 空间 $\dot{K}_{q(\cdot)}^{\alpha, p}(\mathbb{R}^n)$ 及 $K_{q(\cdot)}^{\alpha, p}(\mathbb{R}^n)$ 。并在此基础上利用 Haar 函数对变指数 Herz 空间的波动特征进行研究。在文献 [17] 中, Izuki 将次线性算子在经典 Herz 空间中的有界性推广到了变指数情形。2012 年, Almeida 和 Direhem^[3]研究了指数 α 也是可变的 Herz 空间 $\dot{K}_{q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p}(\mathbb{R}^n)$ 及 $K_{q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p}(\mathbb{R}^n)$, 并得到了这些空间上的一类次线性算子的有界性, 其中包括 Calderón-Zygmund 算子, Hardy-Littlewood 极大算子及 Riesz 位势算子等。

Nafis, Rafeiro 和 Zaighum^[18]定义了一类极大变指数 Herz 空间 $\dot{K}_{q(\cdot)}^{\alpha(\cdot),p),\theta}(\mathbb{R}^n)$ 及 $K_{q(\cdot)}^{\alpha(\cdot),p),\theta}(\mathbb{R}^n)$, 并证明了它们是变指数 Herz 空间 $\dot{K}_{q(\cdot)}^{\alpha(\cdot),p}(\mathbb{R}^n)$ 的自然推广。在[18]中, 作者还证明了 Marcinkiewicz 积分算子 μ_Ω 在空间 $\dot{K}_{q(\cdot)}^{\alpha(\cdot),p),\theta}(\mathbb{R}^n)$ 上的有界性。

随着研究的不断深入, Morrey 空间及 Herz 空间不断向前发展, 杨大春等人^[19]在研究奇异积分算子的过程中, 引入了更为一般的 Herz-Morrey 空间。

2005 年, 周伟军等人^[20]研究了多线性分数次极大交换子在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 空间中的有界性, 继而又证明了分数次多线性交换子在 Herz 空间上的有界性。基于上述结论, 武江龙^[21]得到分数次极大算子与 BMO 函数生成的多线性交换子在齐次 Herz-Morrey 空间上有界性, 同时还证明了一类分数次多线性交换子在 $M\dot{K}_{q,p}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ 上的有界性。

2018 年, 王立伟^[22]定义了一类新的变指数加权变量 Herz-Morrey 空间, 证明了次线性算子 T 在此空间上是有界的, 且对于分数阶奇异积分, 次线性算子 T_γ 在此空间是也是有界的。2023 年, 张万静等人^[23]引入了极大加权 Herz-Morrey 空间, 并研究了极大加权 Herz-Morrey 空间和加权 Herz-Morrey 空间的关系, 证明了极大加权 Herz-Morrey 空间上具有一定弱尺寸条件的次线性算子的有界估计。最后, 基于变指数理论和 BMO 范数的推广, 证明了次线性算子在极大加权 Herz-Morrey 空间上的多线性交换子的有界性。

1.3 主要研究内容

受上述工作启发, 本学位论文主要研究了参数型 Marcinkiewicz 积分算子 μ_Ω^ρ 在极大变指数 Herz 空间 $\dot{K}_{q(\cdot)}^{\alpha(\cdot),p),\theta}(\mathbb{R}^n)$ 中的有界性, 参数型 Marcinkiewicz 积分算子的高阶交换子 $[b^m, \mu_\Omega^\rho]$ 在极大变指数 Herz 空间 $\dot{K}_{q(\cdot)}^{\alpha(\cdot),p),\theta}(\mathbb{R}^n)$ 中的有界性, Marcinkiewicz 积分算子的多线性交换子 $[\vec{b}, \mu_\Omega]$ 在极大变指数 Herz-Morrey 空间 $M\dot{K}_{\lambda,q(\cdot)}^{\alpha(\cdot),p),\theta}(\mathbb{R}^n)$ 中的有界性。这些结果进一步的丰富了 Marcinkiewicz 积分算子及其有关交换子在极大变指数函数空间中的有界性。

我们通常用 Q 来表示 $\mathbb{R}^n$ 中的方体, $|Q|$ 是 Q 的 Lebesgue 测度。

$B_k = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 2^k\}$, $R_k = B_k / B_{k-1}$, $\chi_k = \chi_{R_k}$ 表示 R_k 的特征函数, 其中 $k \in \mathbb{Z}$ 。

$p'(\cdot)$ 是 $p(\cdot)$ 的共轭指数, 即满足 $\frac{1}{p(\cdot)} + \frac{1}{p'(\cdot)} = 1$ 。字母 C 表示一个与主要变量无关的正常数, 但是在每一行中取值可能不同。表达式 $f \leq Cg$ 简写为 $f \lesssim g$, $f \approx g$ 意思为 $f \lesssim g \lesssim f$ 。

第 2 章 参数型 Marcinkiewicz 积分算子在极大变指数 Herz 空间中的有界性

2.1 引言及主要结果

假设 $\mathbb{S}^{n-1}$ 表示 $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) 中具有标准 Lebesgue 测度 $d\sigma = d\sigma(x')$ 的单位球面。

$\Omega \in L^1(\mathbb{S}^{n-1})$ 为零次齐次函数且满足

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega(x') d\sigma(x') = 0. \quad (2.1)$$

其中对于任意的 $x \neq 0, x' = \frac{x}{|x|}$ 。

Stein^[24]引入了 n 维 Marcinkiewicz 积分算子, 定义为

$$\mu_{\Omega}(f)(x) = \left(\int_0^{\infty} |F_{\Omega,t}(f)(x)|^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{\frac{1}{2}},$$

其中

$$F_{\Omega,t}(f)(x) = \int_{|x-y| \leq t} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}} f(y) dy.$$

此外, 他还证明了如果 $\Omega \in Lip_{\alpha}(\mathbb{S}^{n-1})$ ($0 < \alpha \leq 1$), 那么对于 $1 < p \leq 2$, μ_{Ω} 是 (p, p) 型算子, 且当 $p=1$ 时, Ω 是弱 $(1,1)$ 型算子。Benedek, Calderón 和 Panzone 在[25]中表明, 当 $\Omega \in C^1(\mathbb{S}^{n-1})$ 时, 对于 $1 < p < \infty$, μ_{Ω} 是 (p, p) 型算子。

另一方面, Hörmander 在[26]中考虑了参数型 Marcinkiewicz 积分算子 μ_{Ω}^{ρ} , 其定义为

$$\mu_{\Omega}^{\rho}(f)(x) = \left(\int_0^{\infty} \left| \frac{1}{t^{\rho}} \int_{|x-y| \leq t} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-\rho}} f(y) dy \right|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}},$$

其中 $0 < \rho < n$ 。易得到, 如果 $\rho = 1$, 那么 μ_{Ω}^{ρ} 就是 Stein 在[24]中引入的 μ_{Ω} 。

Hörmander 在[26]中证明了若 $\Omega \in Lip_{\alpha}(\mathbb{S}^{n-1})$ ($0 < \alpha \leq 1$), 则 μ_{Ω}^{ρ} 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$

$(1 < p < \infty)$ 上是有界的。丁勇, 陆善镇和 Yabuta 在[27]中改进了 Hörmander 在 $p = 2$ 时的结果, 使之适用于 $\Omega \in L \log^+(\mathbb{S}^{n-1})$ 。此外, Al-Salman 在[28]中还证明了当 $\Omega \in H^1(\mathbb{S}^{n-1})$ 时, μ_Ω^p 对任意的 $1 < p < \infty$ 在空间 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上都是有界的

设 $p(\cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow [1, \infty)$ 为可测函数。假设

$$1 \leq p_- \leq p(x) \leq p_+ < \infty,$$

其中 $p_- := \operatorname{ess\,inf}_{x \in \mathbb{R}^n} p(x)$, $p_+ := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} p(x)$ 变指数 Lebesgue 空间 $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 定义为

$$L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \text{ 为 } \mathbb{R}^n \text{ 上的可测函数: } \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right)^{p(x)} dx < \infty, \lambda > 0 \right\}.$$

若赋予下面的 Luxemburg 范数

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right)^{p(x)} dx \leq 1 \right\},$$

则 $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 成为 Banach 空间。容易看出, 当 $p(x) \equiv p$ 为常数时, $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$ 即为经典的 Lebesgue 空间。

给定一个开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $L_{loc}^{p(\cdot)}(\Omega)$ 定义为

$$L_{loc}^{p(\cdot)}(\Omega) = \{ f : f \in L^{p(\cdot)}(K) \text{ 对所有紧支集 } K \subset \Omega \}.$$

集合 $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 由满足 $p_- > 1$ 和 $p_+ < \infty$ 的所有可测函数 $p(\cdot)$ 组成。设 $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, 那么对于任意的 $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, 常数 $r_p = 1 + 1/p_- - 1/p_+$, 广义的 Hölder 不等式为

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)| dx \leq r_p \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}. \quad (2.2)$$

给定一个函数 $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$, Hardy-Littlewood 极大算子 M 定义为

$$Mf(x) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} r^{-n} \int_{B(x, r)} |f(y)| dy.$$

集合 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 是由 $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 且满足 M 在 $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 上有界的所有可测函数 $p(\cdot)$ 组成。

若函数 $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是局部 log-Hölder 连续的, 存在一个常数 $C = C_{\log} > 0$ 使得

$$|g(x) - g(y)| \leq \frac{C}{-\log|x-y|}, \quad |x-y| \leq \frac{1}{2}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (2.3)$$

如果对于某个 $g_\infty \in \mathbb{R}$, 有

$$|g(x) - g_\infty| \leq \frac{C}{\log(e+|x|)}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.4)$$

那么称 $g(\cdot)$ 在无穷远处是 log-Hölder 连续的。

集合 $\mathcal{P}_\infty^{\log}(\mathbb{R}^n)$ 是由满足 $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, 条件(2.3)和(2.4)的所有可测函数 $p(\cdot)$ 组成, 其中 $p_\infty := \lim_{|x| \rightarrow \infty} p(x)$ 。注意到 $p(\cdot) \in \mathcal{P}_\infty^{\log}(\mathbb{R}^n)$ 当且仅当 $p'(\cdot) \in \mathcal{P}_\infty^{\log}(\mathbb{R}^n)$, 以及若 $p(\cdot) \in \mathcal{P}_\infty^{\log}(\mathbb{R}^n)$, 那么 Hardy-Littlewood 极大算子 M 在 $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 上有界, 因此我们有 $p(\cdot) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 。

定义 2.1.1 设 $0 < p \leq \infty$, $q(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha(\cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 且 $\alpha(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 。齐次变指数 Herz 空间的定义为

$$\dot{K}_{q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in L_{\text{loc}}^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) : \|f\|_{\dot{K}_{q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p}(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\},$$

其中

$$\|f\|_{\dot{K}_{q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p}(\mathbb{R}^n)} := \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|2^{k\alpha(\cdot)} f \chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^p \right)^{1/p} < \infty.$$

$p = \infty$ 时上述定义可作通常的修改。

定义 2.1.2 设 $\theta > 0$, $1 \leq p < \infty$, $q(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha(\cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 且 $\alpha(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 。

齐次极大变指数 Herz 空间的定义为

$$\dot{K}_{q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p, \theta}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in L_{\text{loc}}^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) : \|f\|_{\dot{K}_{q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p, \theta}(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\},$$

其中

$$\|f\|_{\dot{K}_{q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p, \theta}(\mathbb{R}^n)} := \sup_{\varepsilon > 0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|2^{k\alpha(\cdot)} f \chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} < \infty.$$

定理 2.1.1 设 $\rho > n/2$, $\theta > 0$, $1 < p < \infty$, $\alpha(\cdot), q(\cdot) \in \mathcal{P}_\infty^{\log}(\mathbb{R}^n)$ 且 $\Omega \in L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ 。

若 α 满足

$$(1) \quad -\frac{n}{q(0)} < \alpha(0) < \frac{n}{q'(0)},$$

$$(2) \quad -\frac{n}{q_\infty} < \alpha_\infty < \frac{n}{q'_\infty},$$

则参数型 Marcinkiewicz 积分算子 μ_Ω^ρ 在 $\dot{K}_{q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p, \theta}(\mathbb{R}^n)$ 上是有界的, 且对任意的 $f \in \dot{K}_{q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p, \theta}(\mathbb{R}^n)$, 有

$$\|\mu_\Omega^\rho(f)\|_{\dot{K}_{q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p, \theta}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{\dot{K}_{q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p, \theta}(\mathbb{R}^n)}.$$

2.2 主要引理

引理 2.2.1^[29] 设 $D > 1$ 且 $q(\cdot) \in \mathcal{P}_\infty^{\log}(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\frac{1}{c_0} r^{\frac{n}{q(0)}} \leq \|\chi_{B(0, Dr) \setminus B(0, r)}\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq c_0 r^{\frac{n}{q(0)}}, \quad 0 < r \leq 1,$$

及

$$\frac{1}{c_\infty} r^{\frac{n}{q_\infty}} \leq \|\chi_{B(0, Dr) \setminus B(0, r)}\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq c_\infty r^{\frac{n}{q_\infty}}, \quad r \geq 1,$$

其中 $c_0, c_\infty \geq 1$ 依赖于 D , 但是不依赖于 r 。

引理 2.2.2^[30] 设 X 为 Banach 函数空间, 若 $f \in X$ 且 $g \in X'$ (X' 是 X 的对偶空间), 则有以下广义 Hölder 不等式成立

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_X \|g\|_{X'}.$$

引理 2.2.3^[31] 若 $q(\cdot) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, 则对于任意可测子集 $S \subset B$ 有

$$\frac{\|\chi_B\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}}{\|\chi_S\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}} \leq C \frac{|S|}{|B|}, \quad \frac{\|\chi_S\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}}{\|\chi_B\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}} \leq C \left(\frac{|S|}{|B|} \right)^\delta,$$

其中 δ 为常数, 且 $0 < \delta < 1$ 。

2.3 主要定理的证明

定理 2.1.1 的证明: 设 $f \in \dot{K}_{q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p, \theta}(\mathbb{R}^n)$, 我们将其分解为

$$f(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f(x) \chi_l(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_l(x).$$

由 Minkowski 不等式得

$$\begin{aligned} & \left\| \mu_{\Omega}^{\rho}(f) \right\|_{\dot{K}_{q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p, \theta}(\mathbb{R}^n)} \\ &= \sup_{\varepsilon > 0} \left(\varepsilon^{\theta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\| 2^{k\alpha(\cdot)} \mu_{\Omega}^{\rho}(f) \chi_k \right\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &\lesssim \sup_{\varepsilon > 0} \left(\varepsilon^{\theta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{l=-\infty}^{k-1} \left\| 2^{k\alpha(\cdot)} \mu_{\Omega}^{\rho}(f \chi_l) \chi_k \right\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &\quad + \sup_{\varepsilon > 0} \left(\varepsilon^{\theta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\| 2^{k\alpha(\cdot)} \mu_{\Omega}^{\rho}(f \chi_k) \chi_k \right\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &\quad + \sup_{\varepsilon > 0} \left(\varepsilon^{\theta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{l=k+2}^{\infty} \left\| 2^{k\alpha(\cdot)} \mu_{\Omega}^{\rho}(f \chi_l) \chi_k \right\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &=: I + II + III. \end{aligned}$$

对于 I ，利用 Minkowski 不等式，我们有

$$\begin{aligned} \left| \mu_{\Omega}^{\rho}(f \chi_l)(x) \right| &\leq \left(\int_0^{|x|} \left| \frac{1}{t^{\rho}} \int_{|x-y| \leq t} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-\rho}} f_l(y) dy \right|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left(\int_{|x|}^{\infty} \left| \frac{1}{t^{\rho}} \int_{|x-y| \leq t} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-\rho}} f_l(y) dy \right|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &=: U_1 + U_2. \end{aligned}$$

注意到 $l \leq k-1$ ， $x \in R_k$ ， $y \in R_l$ ，那么 $|x-y| \sim |x| \sim 2^k$ ，且

$$\left| \frac{1}{|x-y|^{2\rho}} - \frac{1}{|x|^{2\rho}} \right| \leq \frac{|y|}{|x-y|^{2\rho+1}},$$

注意到 $\rho > \frac{2}{n}$ 且 $\Omega \in L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ ，利用广义的 Hölder 不等式，我们有

$$\begin{aligned} U_1 &\lesssim \int_{R_l} \frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^{n-\rho}} |f(y)| \left(\int_{|x-y| \leq |x|, |x| \geq t} \frac{dt}{t^{2\rho+1}} \right)^{\frac{1}{2}} dy \\ &\lesssim \int_{R_l} \frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^{n-\rho}} |f(y)| \left| \frac{1}{|x-y|^{2\rho}} - \frac{1}{|x|^{2\rho}} \right|^{\frac{1}{2}} dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\lesssim \int_{R_l} \frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^{n-\rho}} |f(y)| \frac{|y|^{\frac{1}{2}}}{|x-y|^{\rho+\frac{1}{2}}} dy \\
 &\lesssim 2^{\frac{l-k}{2}} 2^{-kn} \|\Omega\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})} \int_{R_l} |f(y)| dy \\
 &\lesssim 2^{\frac{l-k}{2}} 2^{-kn} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\chi_l\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.
 \end{aligned}$$

类似地, 我们有

$$\begin{aligned}
 U_2 &\lesssim \int_{R_l} \frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^{n-\rho}} |f(y)| \left(\int_{|x-y|}^{\infty} \frac{dt}{t^{2\rho+1}} \right)^{\frac{1}{2}} dy \\
 &\lesssim \int_{R_l} \frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^n} |f(y)| dy \\
 &\lesssim 2^{-kn} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\chi_l\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.
 \end{aligned}$$

因此我们有

$$|\mu_\Omega^\rho(f\chi_l)(x)| \lesssim 2^{-kn} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\chi_l\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}. \quad (2.5)$$

由 Minkowski 不等式得

$$\begin{aligned}
 I &\lesssim \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\sum_{l=-\infty}^{k-1} \|2^{k\alpha(\cdot)} \mu_\Omega^\rho(f\chi_l)\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 &\lesssim \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=-\infty}^{k-1} \|2^{k\alpha(\cdot)} \mu_\Omega^\rho(f\chi_l)\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 &=: I_1 + I_2.
 \end{aligned}$$

对于 I_1 , 由引理 2.2.1 得

$$2^{-kn} \|\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\chi_l\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \lesssim 2^{-kn} 2^{\frac{kn}{q'(0)}} 2^{\frac{ln}{q'(0)}} \lesssim 2^{\frac{(l-k)n}{q'(0)}}. \quad (2.6)$$

由式(2.5), 式(2.6)及 $2^{k\alpha(x)} \approx 2^{k\alpha(0)}$, $k < 0$, $x \in R_k$, 可以得到

$$\begin{aligned}
 I_1 &\lesssim \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\sum_{l=-\infty}^{k-1} 2^{k\alpha(0)} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times 2^{-kn} \|\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\chi_l\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 &\lesssim \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\sum_{l=-\infty}^{k-1} 2^{l\alpha(0)} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\times 2^{\left((k-l)\left[\alpha(0) - \frac{n}{q'(0)}\right] \right)^{p(1+\varepsilon)}} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}}.$$

令 $\alpha(0) - \frac{n}{q'(0)} < 0$, 由 $2^{-p(1+\varepsilon)} < 2^{-p}$ 及 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned} I_1 &\lesssim \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\sum_{l=-\infty}^{k-1} 2^{l\alpha(0)p(1+\varepsilon)} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} 2^{(k-l)\sigma p(1+\varepsilon)/2} \right) \right. \\ &\quad \times \left. \left(\sum_{l=-\infty}^{k-1} 2^{\left((k-l)\left[\alpha(0) - \frac{n}{q'(0)}\right](p(1+\varepsilon))'/2 \right)^{p(1+\varepsilon)/(p(1+\varepsilon))'}} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \right) \\ &\lesssim \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{l=-\infty}^{-2} 2^{l\alpha(0)p(1+\varepsilon)} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \sum_{k=l+1}^{-1} 2^{\left((k-l)\left[\alpha(0) - \frac{n}{q'(0)}\right]p(1+\varepsilon)/2 \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}}} \right) \\ &\lesssim \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{l=-\infty}^{-2} 2^{l\alpha(0)p(1+\varepsilon)} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \sum_{k=l+1}^{-1} 2^{\left((k-l)\left[\alpha(0) - \frac{n}{q'(0)}\right]p/2 \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}}} \right) \\ &\lesssim \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{l=-\infty}^{\infty} \|2^{l\alpha(\cdot)} f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &\lesssim \|f\|_{\dot{K}_{q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p, \theta}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

对于 I_2 , 由 Minkowski 不等式可表示为

$$\begin{aligned} I_2 &\lesssim \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=-\infty}^{-1} \|2^{k\alpha(\cdot)} \mu_\Omega^\rho(f\chi_l)\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &\quad + \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{k-1} \|2^{k\alpha(\cdot)} \mu_\Omega^\rho(f\chi_l)\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &=: I_{21} + I_{22}. \end{aligned}$$

对于 I_{21} , 由引理 2.2.1 得

$$2^{-kn} \|\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\chi_l\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \lesssim 2^{-kn} 2^{\frac{kn}{q_\infty}} 2^{\frac{ln}{q'(0)}} \lesssim 2^{\frac{-kn}{q'_\infty}} 2^{\frac{ln}{q'(0)}}. \quad (2.7)$$

由式(2.5), 式(2.7)及 $2^{k\alpha(x)} \approx 2^{k\alpha_\infty}$, $k \geq 0$, $x \in R_k$, 可以得到

$$I_{21} \lesssim \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=-\infty}^{-1} 2^{k\alpha_\infty} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
 & \times 2^{-kn} \left\| \chi_k \right\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \left\| \chi_l \right\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{p(1+\varepsilon)} \Big)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 & \lesssim \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(\alpha_\infty - \frac{n}{q_\infty})p(1+\varepsilon)} \right. \\
 & \quad \times \left. \left(\sum_{l=-\infty}^{-1} 2^{l\alpha(0)} \left\| f \chi_l \right\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} 2^{l[\frac{n}{q'(0)} - \alpha(0)]} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}}.
 \end{aligned}$$

注意到 $\alpha_\infty - \frac{n}{q'_\infty} < 0$, $\alpha(0) - \frac{n}{q'(0)} < 0$ 及 $2^{-p(1+\varepsilon)} < 2^{-p}$, 由 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned}
 I_{21} & \lesssim \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(\alpha_\infty - \frac{n}{q_\infty})p} \right. \\
 & \quad \times \left. \left(\sum_{l=-\infty}^{-1} 2^{l\alpha(0)} \left\| f \chi_l \right\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} 2^{l[\frac{n}{q'(0)} - \alpha(0)]} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 & \lesssim \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \left(\sum_{l=-\infty}^{-1} 2^{l\alpha(0)} \left\| f \chi_l \right\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} 2^{l[\frac{n}{q'(0)} - \alpha(0)]} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 & \lesssim \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \left(\sum_{l=-\infty}^{-1} 2^{l\alpha(0)p(1+\varepsilon)} \left\| f \chi_l \right\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \right) \right. \\
 & \quad \times \left. \left(\sum_{l=-\infty}^{-1} 2^{l[\frac{n}{q'(0)} - \alpha(0)](p(1+\varepsilon))'} \right)^{p(1+\varepsilon)/(p(1+\varepsilon))'} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 & \lesssim \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{l=-\infty}^{-1} 2^{l\alpha(0)p(1+\varepsilon)} \left\| f \chi_l \right\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 & \lesssim \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left\| 2^{l\alpha(\cdot)} f \chi_l \right\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 & \lesssim \left\| f \right\|_{\dot{K}_{q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p, \theta}(\mathbb{R}^n)}.
 \end{aligned}$$

对于 I_{22} , 由引理 2.2.1 得

$$2^{-kn} \left\| \chi_k \right\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \left\| \chi_l \right\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \lesssim 2^{-kn} 2^{\frac{kn}{q_\infty}} 2^{\frac{ln}{q'_\infty}} \lesssim 2^{\frac{(l-k)n}{q'_\infty}}. \quad (2.8)$$

从而, 由式(2.5), 式(2.8)及 $2^{k\alpha(x)} \approx 2^{k\alpha_\infty}$, $k \geq 0$, $x \in R_k$ 得

$$I_{22} \lesssim \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{k-1} 2^{k\alpha_\infty} \left\| f \chi_l \right\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right) \right)$$

$$\begin{aligned} & \times 2^{-kn} \left\| \chi_k \right\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \left\| \chi_l \right\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{p(1+\varepsilon)} \Big)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ & \lesssim \sup_{\varepsilon > 0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{k-1} 2^{l\alpha_\infty} \left\| f \chi_l \right\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} 2^{(k-l)(\alpha_\infty - \frac{n}{q'_\infty})} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}}. \end{aligned}$$

因为 $\alpha_\infty - \frac{n}{q'_\infty} < 0$, 且 $2^{-p(1+\varepsilon)} < 2^{-p}$, 由 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned} I_{22} & \lesssim \sup_{\varepsilon > 0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{k-1} 2^{l\alpha_\infty p(1+\varepsilon)} \left\| f \chi_l \right\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} 2^{(k-l)(\alpha_\infty - \frac{n}{q'_\infty})p(1+\varepsilon)/2} \right) \right. \\ & \quad \times \left. \left(\sum_{l=0}^{k-1} 2^{(k-l)(\alpha_\infty - \frac{n}{q'_\infty})(p(1+\varepsilon))'/2} \right)^{p(1+\varepsilon)/(p(1+\varepsilon))'} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ & \lesssim \sup_{\varepsilon > 0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{l=0}^{\infty} 2^{l\alpha_\infty p(1+\varepsilon)} \left\| f \chi_l \right\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \right. \\ & \quad \times \left. \sum_{k=l+1}^{\infty} 2^{(k-l)(\alpha_\infty - \frac{n}{q'_\infty})p(1+\varepsilon)/2} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ & \lesssim \sup_{\varepsilon > 0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{l=0}^{\infty} 2^{l\alpha_\infty p(1+\varepsilon)} \left\| f \chi_l \right\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \sum_{k=l+1}^{\infty} 2^{(k-l)(\alpha_\infty - \frac{n}{q'_\infty})p/2} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ & \lesssim \sup_{\varepsilon > 0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left\| 2^{l\alpha(\cdot)} f \chi_l \right\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ & \lesssim \|f\|_{\dot{K}_{q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p, \theta}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

对于 II , 由 Minkowski 不等式得

$$\begin{aligned} II & \lesssim \sup_{\varepsilon > 0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} \left\| 2^{k\alpha(\cdot)} \mu_\Omega^\rho(f \chi_k) \chi_k \right\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ & \quad + \sup_{\varepsilon > 0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=0}^{\infty} \left\| 2^{k\alpha(\cdot)} \mu_\Omega^\rho(f \chi_k) \chi_k \right\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ & =: II_1 + II_2. \end{aligned}$$

对于 II_1 , 由于 μ_Ω^ρ 在 $L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 上是有界的^[32], 及 $2^{k\alpha(x)} \approx 2^{k\alpha(0)}$, $k < 0$, $x \in R_k$, 得

$$II_1 \lesssim \sup_{\varepsilon > 0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} 2^{k\alpha(0)p(1+\varepsilon)} \left\| \mu_\Omega^\rho(f \chi_k) \chi_k \right\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}}$$

$$\begin{aligned}
 &\lesssim \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} 2^{k\alpha(0)p(1+\varepsilon)} \|f \chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 &\lesssim \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=-\infty}^{\infty} \|2^{k\alpha(\cdot)} f \chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 &\lesssim \|f\|_{\dot{K}_{q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p, \theta}(\mathbb{R}^n)}.
 \end{aligned}$$

对于 II_2 ，由 $2^{k\alpha(x)} \approx 2^{k\alpha_\infty}$ ， $k \geq 0$ ， $x \in R_k$ 得

$$\begin{aligned}
 II_2 &\lesssim \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k\alpha_\infty p(1+\varepsilon)} \|\mu_\Omega^\rho(f \chi_k) \chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 &\lesssim \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k\alpha_\infty p(1+\varepsilon)} \|f \chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 &\lesssim \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=-\infty}^{\infty} \|2^{k\alpha(\cdot)} f \chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 &\lesssim \|f\|_{\dot{K}_{q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p, \theta}(\mathbb{R}^n)}.
 \end{aligned}$$

结合上面的估计，可以得到

$$II \lesssim \|f\|_{\dot{K}_{q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p, \theta}(\mathbb{R}^n)}.$$

下面估计 III ，注意到如果 $l \geq k+1$ ， $x \in R_k$ ， $y \in R_l$ ，那么 $|x-y| \sim |y| \sim 2^l$ 。类似 I 中的证明，我们有

$$\begin{aligned}
 |\mu_\Omega^\rho(f \chi_l)(x)| &\lesssim \left(\int_0^{|y|} \left| \frac{1}{t^\rho} \int_{|x-y| \leq t} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-\rho}} f_l(y) dy \right|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad + \left(\int_{|y|}^\infty \left| \frac{1}{t^\rho} \int_{|x-y| \leq t} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-\rho}} f_l(y) dy \right|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\lesssim \int_{R_l} \frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^{n-\rho}} |f_l(y)| \frac{|x|^{\frac{1}{2}}}{|x-y|^{\rho+\frac{1}{2}}} dy + \int_{R_l} \frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^n} |f_l(y)| dy \tag{2.9} \\
 &\lesssim 2^{\frac{k-l}{2}} 2^{-ln} \int_{R_l} |\Omega(x-y)| |f_l(y)| dy + 2^{-ln} \int_{R_l} |\Omega(x-y)| |f_l(y)| dy \\
 &\lesssim 2^{-ln} \|\Omega\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})} \int_{R_l} |f_l(y)| dy \\
 &\lesssim 2^{-ln} \|f \chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\chi_l\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.
 \end{aligned}$$

由 Minkowski 不等式得

$$\begin{aligned}
 III &\lesssim \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\sum_{l=k+1}^{\infty} \|2^{k\alpha(\cdot)} \mu_{\Omega}^{\rho}(f\chi_l)\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 &\quad + \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=k+1}^{\infty} \|2^{k\alpha(\cdot)} \mu_{\Omega}^{\rho}(f\chi_l)\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 &=: III_1 + III_2.
 \end{aligned}$$

对于 III_2 , 由引理 2.2.1 得

$$2^{-ln} \|\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\chi_l\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \lesssim 2^{-ln} 2^{\frac{kn}{q_{\infty}}} 2^{\frac{ln}{q'_{\infty}}} \lesssim 2^{\frac{(k-l)n}{q_{\infty}}}. \quad (2.10)$$

由式(2.9), (2.10)得

$$\begin{aligned}
 III_2 &\lesssim \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=k+1}^{\infty} 2^{k\alpha_{\infty}} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times 2^{-ln} \|\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\chi_l\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 &\lesssim \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=k+1}^{\infty} 2^{l\alpha_{\infty}} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} 2^{(k-l)(\alpha_{\infty} + \frac{n}{q_{\infty}})} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}}. \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

由 $\alpha_{\infty} + \frac{n}{q_{\infty}} > 0$ 且 $2^{-p(1+\varepsilon)} < 2^{-p}$, 利用 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned}
 III_2 &\lesssim \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=k+1}^{\infty} 2^{l\alpha_{\infty}p(1+\varepsilon)} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} 2^{(k-l)(\alpha_{\infty} + \frac{n}{q_{\infty}})p(1+\varepsilon)/2} \right) \right. \\
 &\quad \left. \times \left(\sum_{l=k+1}^{\infty} 2^{(k-l)(\alpha_{\infty} + \frac{n}{q_{\infty}})(p(1+\varepsilon))'/2} \right)^{p(1+\varepsilon)/(p(1+\varepsilon))'} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 &\lesssim \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{l=2}^{\infty} 2^{l\alpha_{\infty}p(1+\varepsilon)} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \times \sum_{k=0}^{l-1} 2^{(k-l)(\alpha_{\infty} + \frac{n}{q_{\infty}})p(1+\varepsilon)/2} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 &\lesssim \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{l=0}^{\infty} 2^{l\alpha_{\infty}p(1+\varepsilon)} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \sum_{k=0}^{l-1} 2^{(k-l)(\alpha_{\infty} + \frac{n}{q_{\infty}})p/2} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 &\lesssim \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{l=-\infty}^{\infty} \|2^{l\alpha(\cdot)} f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 &\lesssim \|f\|_{\dot{K}_{q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p, \theta}(\mathbb{R}^n)}.
 \end{aligned}$$

对于 III_1 ，由 Minkowski 不等式得

$$\begin{aligned} III_1 &\lesssim \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\sum_{l=k+1}^{-1} \|2^{k\alpha(\cdot)} \mu_\Omega^\rho(f\chi_l)\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &\quad + \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \|2^{k\alpha(\cdot)} \mu_\Omega^\rho(f\chi_l)\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &=: III_{11} + III_{12}. \end{aligned}$$

III_{11} 与 III_2 的估计方法类似，用 $q(0)$ 代替 q_∞ ，并利用条件 $\alpha(0) + \frac{n}{q(0)} > 0$ 即可。

对于 III_{12} ，由引理 2.2.1 得

$$2^{-ln} \|\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\chi_l\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \lesssim 2^{-ln} 2^{\frac{kn}{q(0)}} 2^{\frac{ln}{q'_\infty}} \lesssim 2^{\frac{kn}{q(0)}} 2^{\frac{-ln}{q_\infty}}. \quad (2.12)$$

由式(2.9)，式(2.12)得

$$\begin{aligned} III_{12} &\lesssim \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\sum_{l=0}^{\infty} 2^{k\alpha(0)} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times 2^{-ln} \|\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\chi_l\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &\lesssim \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\sum_{l=0}^{\infty} 2^{l\alpha_\infty} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times 2^{k[\alpha(0) + \frac{n}{q(0)}]} 2^{-l(\alpha_\infty + \frac{n}{q_\infty})} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}}. \end{aligned}$$

因为 $\alpha(0) + \frac{n}{q(0)} > 0$ 且 $2^{-p(1+\varepsilon)} < 2^{-p}$ ，由 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned} III_{12} &\lesssim \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} 2^{k[\alpha(0) + \frac{n}{q(0)}]p} \right. \\ &\quad \left. \times \left(\sum_{l=0}^{\infty} 2^{l\alpha_\infty} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} 2^{-l(\frac{n}{q_\infty} + \alpha_\infty)} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &\lesssim \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \left(\sum_{l=0}^{\infty} 2^{l\alpha_\infty} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} 2^{-l(\frac{n}{q_\infty} + \alpha_\infty)} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\lesssim \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \left(\sum_{l=0}^{\infty} 2^{l\alpha_\infty p(1+\varepsilon)} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \right) \right. \\
 &\quad \left. \times \left(\sum_{l=0}^{\infty} 2^{-l(\frac{n}{q_\infty} + \alpha_\infty)(p(1+\varepsilon))'} \right)^{p(1+\varepsilon)/(p(1+\varepsilon))'} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 &\lesssim \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{l=0}^{\infty} 2^{l\alpha_\infty p(1+\varepsilon)} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 &\lesssim \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{l=-\infty}^{\infty} \|2^{l\alpha(\cdot)} f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 &\lesssim \|f\|_{\dot{K}_{q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p, \theta}(\mathbb{R}^n)}.
 \end{aligned}$$

从而定理 2.1.1 得证。

第 3 章 参数型 Marcinkiewicz 积分算子的高阶交换子在极大变指数 Herz 空间上的有界性

3.1 引言及主要结果

我们称一个局部可积函数 b 为 BMO 函数, 若它满足

$$\|b\|_* := \sup_B \frac{1}{|B|} \int_B |b(y) - b_B| dy < \infty,$$

其中 B 是以 x 为圆心, r 为半径的球, $b_B := \frac{1}{|B|} \int_B b(t) dt$ 。对于 $b \in \text{BMO}(\mathbb{R}^n)$, 参

数型 Marcinkiewicz 积分算子的高阶交换子 $[b^m, \mu_\Omega^\rho]$ 定义为

$$[b^m, \mu_\Omega^\rho](f)(x) = \left(\int_0^\infty \left| \frac{1}{t^\rho} \int_{|x-y| \leq t} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-\rho}} [b(x) - b(y)]^m f(y) dy \right|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2012 年, 王洪彬等^[33]研究了变指数 Lebesgue 空间中 Marcinkiewicz 积分高阶交换子的有界性。2018 年, 辛银萍等人^[34]研究了变量核 Marcinkiewicz 积分算子在变指数 Herz-Hardy 空间的有界性。邵旭馗^[35]于 2019 年证明了变量核 Marcinkiewicz 积分交换子在变指数 Herz-Hardy 空间的有界性。同年, 陶双平等^[36]证明了变指数 Herz-Morrey 空间上的变量核 Marcinkiewicz 积分算子的加权有界性。受以上学者的研究结果的启发, 本章主要研究参数型 Marcinkiewicz 积分算子的高阶交换子在极大变指数 Herz 空间上的有界性。

定理 3.1.1 设 $b \in \text{BMO}(\mathbb{R}^n)$, $\rho > n/2$, $\theta > 0$, $1 < p < \infty$, $\alpha(\cdot), q(\cdot) \in \mathcal{P}_\infty^{\log}(\mathbb{R}^n)$

且 $\Omega \in L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ 。若 α 满足

$$(1) \quad -\frac{n}{q(0)} < \alpha(0) < \frac{n}{q'(0)},$$

$$(2) \quad -\frac{n}{q_\infty} < \alpha_\infty < \frac{n}{q'_\infty},$$

则参数型 Marcinkiewicz 积分算子的高阶交换子 $[b^m, \mu_\Omega^\rho]$ 在 $\dot{K}_{q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p, \theta}(\mathbb{R}^n)$ 上是有界

的, 且对任意的 $f \in \dot{K}_{q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p, \theta}(\mathbb{R}^n)$, 有

$$\| [b^m, \mu_\Omega^\rho](f) \|_{\dot{K}_{q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p, \theta}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|b\|_*^m \|f\|_{\dot{K}_{q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p, \theta}(\mathbb{R}^n)}.$$

3.2 主要引理

引理 3.2.1^[31] 设 $b \in \text{BMO}(\mathbb{R}^n)$, $k > j$ 且 $k, j, m \in \mathbb{N}$ 。若 $q(\cdot) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, 则有

$$\sup_{B \subset \mathbb{R}^n} \frac{1}{\|\chi_B\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}} \|(b - b_B)^m \chi_B\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \approx \|b\|_*^m,$$

且

$$\|(b - b_{B_j})^m \chi_{B_k}\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq C(k - j)^m \|b\|_*^m \|\chi_{B_k}\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.$$

3.3 主要结果的证明

定理 3.1.1 的证明: 设 $f \in \dot{K}_{q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p, \theta}(\mathbb{R}^n)$, 我们将其分解为

$$f(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f(x) \chi_l(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_l(x).$$

由 Minkowski 不等式得

$$\begin{aligned} & \| [b^m, \mu_\Omega^\rho](f) \|_{\dot{K}_{q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p, \theta}(\mathbb{R}^n)} \\ &= \sup_{\varepsilon > 0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=-\infty}^{\infty} \| 2^{k\alpha(\cdot)} [b^m, \mu_\Omega^\rho](f) \chi_k \|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &\lesssim \sup_{\varepsilon > 0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{l=-\infty}^{k-1} \| 2^{k\alpha(\cdot)} [b^m, \mu_\Omega^\rho](f \chi_l) \chi_k \|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &\quad + \sup_{\varepsilon > 0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=-\infty}^{\infty} \| 2^{k\alpha(\cdot)} [b^m, \mu_\Omega^\rho](f \chi_k) \chi_k \|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &\quad + \sup_{\varepsilon > 0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{l=k+1}^{\infty} \| 2^{k\alpha(\cdot)} [b^m, \mu_\Omega^\rho](f \chi_l) \chi_k \|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &=: J + JJ + JJJ. \end{aligned}$$

对于 J , 利用 Minkowski 不等式我们有

$$\begin{aligned}
 |[b^m, \mu_\Omega^\rho](f\chi_l)(x)| &\leq \left(\int_0^{|x|} \left| \frac{1}{t^\rho} \int_{|x-y|\leq t} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-\rho}} [b(x)-b(y)]^m f_l(y) dy \right|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad + \left(\int_{|x|}^\infty \left| \frac{1}{t^\rho} \int_{|x-y|\leq t} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-\rho}} [b(x)-b(y)]^m f_l(y) dy \right|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &=: V_1 + V_2.
 \end{aligned}$$

注意到 $l \leq k-1$, $x \in R_k$, $y \in R_l$, 那么 $|x-y| \sim |x| \sim 2^k$, 得

$$\left| \frac{1}{|x-y|^{2\rho}} - \frac{1}{|x|^{2\rho}} \right|^{\frac{1}{2}} \leq \frac{|y|^{\frac{1}{2}}}{|x-y|^{\rho+\frac{1}{2}}}.$$

注意到 $\rho > \frac{n}{2}$ 且 $\Omega \in L^2(\mathbb{S}^{n-1})$, 由广义的 Hölder 不等式, 得

$$\begin{aligned}
 V_1 &\lesssim \int_{R_l} \frac{|b(x)-b(y)|^m |\Omega(x-y)|}{|x-y|^{n-\rho}} |f(y)| \left(\int_{|x-y|\leq t, |x|\geq t} \frac{dt}{t^{2\rho+1}} \right)^{\frac{1}{2}} dy \\
 &\lesssim \int_{R_l} \frac{|b(x)-b(y)|^m |\Omega(x-y)|}{|x-y|^{n-\rho}} |f(y)| \left| \frac{1}{|x-y|^{2\rho}} - \frac{1}{|x|^{2\rho}} \right|^{\frac{1}{2}} dy \\
 &\lesssim \int_{R_l} \frac{|b(x)-b(y)|^m |\Omega(x-y)|}{|x-y|^{n-\rho}} |f(y)| \frac{|y|^{\frac{1}{2}}}{|x-y|^{\rho+\frac{1}{2}}} dy \\
 &\lesssim \|\Omega\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})} 2^{-kn} \int_{R_l} |b(x)-b(y)|^m |f(y)| dy \\
 &\lesssim 2^{-kn} \sum_{i=0}^m C_m^i |b(x)-b_{B_l}|^{m-i} \int_{R_l} |b_{B_l}-b(y)|^i |f(y)| dy \\
 &\lesssim 2^{-kn} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \sum_{i=0}^m C_m^i |b(x)-b_{B_l}|^{m-i} \|(b-b_{B_l})^i \chi_l\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.
 \end{aligned}$$

类似地, 我们有

$$\begin{aligned}
 V_2 &\lesssim \int_{R_l} \frac{|b(x)-b(y)|^m |\Omega(x-y)|}{|x-y|^{n-\rho}} |f(y)| \left(\int_{|x|\leq t} \frac{dt}{t^{2\rho+1}} \right)^{\frac{1}{2}} dy \\
 &\lesssim \int_{R_l} \frac{|b(x)-b(y)|^m |\Omega(x-y)|}{|x-y|^n} |f(y)| dy \\
 &\lesssim \|\Omega\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})} 2^{-kn} \int_{R_l} |b(x)-b(y)|^m |f(y)| dy
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}
 &\lesssim 2^{-kn} \sum_{i=0}^m C_m^i |b(x) - b_{B_l}|^{m-i} \int_{R_l} |b_{B_l} - b(y)|^i |f(y)| dy \\
 &\lesssim 2^{-kn} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \sum_{i=0}^m C_m^i |b(x) - b_{B_l}|^{m-i} \|(b - b_{B_l})^i \chi_l\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.
 \end{aligned}$$

因此，我们得到不等式

$$\begin{aligned}
 &|[b^m, \mu_\Omega^\rho](f\chi_l)(x)| \\
 &\lesssim 2^{-kn} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \sum_{i=0}^m C_m^i |b(x) - b_{B_l}|^{m-i} \|(b - b_{B_l})^i \chi_l\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

因此，利用(3.2)，引理 2.2.3 和引理 3.2.1 可得

$$\begin{aligned}
 &\|[b^m, \mu_\Omega^\rho](f\chi_l)\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \\
 &\lesssim 2^{-kn} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \sum_{i=0}^m C_m^i \|(b(x) - b_{B_l})^{m-i} \chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|(b - b_{B_l})^i \chi_l\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \\
 &\lesssim 2^{-kn} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \sum_{i=0}^m C_m^i (k-l)^{m-i} \|b\|_*^{m-i} \|\chi_{B_k}\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|b\|_*^i \|\chi_{B_l}\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \\
 &\lesssim (k-l)^m \|b\|_*^m \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} 2^{-kn} \|\chi_{B_k}\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\chi_{B_l}\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \\
 &\lesssim (k-l)^m \|b\|_*^m \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} 2^{-kn} \frac{|B_k|}{|R_k|} \|\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \frac{|B_l|}{|R_l|} \|\chi_l\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \\
 &\lesssim (k-l)^m \|b\|_*^m \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} 2^{-kn} \|\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\chi_l\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

通过 Minkowski 不等式分离 J ，得到

$$\begin{aligned}
 J &\lesssim \sup_{\varepsilon > 0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\sum_{l=-\infty}^{k-1} \|2^{k\alpha(\cdot)} [b^m, \mu_\Omega^\rho](f\chi_l)\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 &\quad + \sup_{\varepsilon > 0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=-\infty}^{k-1} \|2^{k\alpha(\cdot)} [b^m, \mu_\Omega^\rho](f\chi_l)\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 &=: J_1 + J_2.
 \end{aligned}$$

对于 J_1 ，由式(2.6)，式(3.3)及 $2^{k\alpha(x)} \approx 2^{k\alpha(0)}$ ， $k < 0$ ， $x \in R_k$ ，我们得到

$$\begin{aligned}
 J_1 &\lesssim \|b\|_*^m \sup_{\varepsilon > 0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\sum_{l=-\infty}^{k-1} 2^{k\alpha(0)} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times (k-l)^m 2^{-kn} \|\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\chi_l\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 &\lesssim \sup_{\varepsilon > 0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\sum_{l=-\infty}^{k-1} 2^{l\alpha(0)} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\times (k-l)^m 2^{(l-k)[\frac{n}{q'(0)} - \alpha(0)]} \Big)^{p(1+\varepsilon)} \Big)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}}.$$

因为 $\frac{n}{q'(0)} - \alpha(0) > 0$ 且 $2^{-p(1+\varepsilon)} < 2^{-p}$, 由 Hölder 不等式得到

$$\begin{aligned} J_1 &\lesssim \|b\|_*^m \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\sum_{l=-\infty}^{k-1} 2^{l\alpha(0)p(1+\varepsilon)} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} 2^{(k-l)[\frac{n}{q'(0)} - \alpha(0)]p(1+\varepsilon)/2} \right) \right. \\ &\quad \times \left. \left(\sum_{l=-\infty}^{k-1} (k-l)^{m(p(1+\varepsilon))'} 2^{(k-l)[\frac{n}{q'(0)} - \alpha(0)](p(1+\varepsilon))'/2} \right)^{p(1+\varepsilon)/(p(1+\varepsilon))'} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &\lesssim \|b\|_*^m \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{l=-\infty}^{-2} 2^{l\alpha(0)p(1+\varepsilon)} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \sum_{k=l+1}^{-1} 2^{(l-k)[\frac{n}{q'(0)} - \alpha(0)]p(1+\varepsilon)/2} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &\lesssim \|b\|_*^m \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{l=-\infty}^{-2} 2^{l\alpha(0)p(1+\varepsilon)} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \sum_{k=l+1}^{-1} 2^{(l-k)[\frac{n}{q'(0)} - \alpha(0)]p/2} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &\lesssim \|b\|_*^m \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{l=-\infty}^{\infty} \|2^{l\alpha(\cdot)} f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &\lesssim \|b\|_*^m \|f\|_{\dot{K}_{q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p, \theta}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

对于 J_2 , 由 Minkowski 不等式表示为

$$\begin{aligned} J_2 &\lesssim \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=-\infty}^{-1} \|2^{k\alpha(\cdot)} [b^m, \mu_\Omega^\rho](f\chi_l)\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &\quad + \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{k-1} \|2^{k\alpha(\cdot)} [b^m, \mu_\Omega^\rho](f\chi_l)\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &=: J_{21} + J_{22}. \end{aligned}$$

对于 J_{21} , 由式(2.7), 及若 $k \geq 0$, $x \in R_k$, 则 $2^{k\alpha(x)} \approx 2^{k\alpha_\infty}$, 可以得到

$$\begin{aligned} J_{21} &\lesssim \|b\|_*^m \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=-\infty}^{-1} 2^{k\alpha_\infty} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right. \right. \\ &\quad \times \left. \left. (k-l)^m 2^{-kn} \|\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &\lesssim \|b\|_*^m \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(\alpha_\infty - \frac{1}{q_\infty})p(1+\varepsilon)} \right) \end{aligned}$$

$$\times \left(\sum_{l=-\infty}^{-1} 2^{l\alpha(0)} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} (k-l)^m 2^{l[\frac{1}{q'(0)}-\alpha(0)]} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}}.$$

由于 $\alpha_\infty - \frac{n}{q'_\infty} < 0$ 且 $\frac{n}{q'(0)} - \alpha(0) > 0$ ，通过 Hölder 不等式得到

$$\begin{aligned} J_{21} &\lesssim \|b\|_*^m \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(\alpha_\infty - \frac{n}{q'_\infty})p} \right. \\ &\quad \times \left. \left(\sum_{l=-\infty}^{-1} 2^{l\alpha(0)} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} (k-l)^m 2^{l[\frac{n}{q'(0)}-\alpha(0)]} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &\lesssim \|b\|_*^m \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \left(\sum_{l=-\infty}^{-1} 2^{l\alpha(0)} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right. \right. \\ &\quad \times \left. \left. (k-l)^m 2^{l[\frac{n}{q'(0)}-\alpha(0)]} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &\lesssim \|b\|_*^m \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \left(\sum_{l=-\infty}^{-1} 2^{l\alpha(0)p(1+\varepsilon)} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \right) \right. \\ &\quad \times \left. \left(\sum_{l=-\infty}^{-1} (k-l)^{m(p(1+\varepsilon))'} 2^{l[\frac{n}{q'(0)}-\alpha(0)](p(1+\varepsilon))'} \right)^{p(1+\varepsilon)/(p(1+\varepsilon))'} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &\lesssim \|b\|_*^m \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{l=-\infty}^{-1} 2^{l\alpha(0)p(1+\varepsilon)} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &\lesssim \|b\|_*^m \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{l=-\infty}^{\infty} \|2^{l\alpha(\cdot)} f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &\lesssim \|b\|_*^m \|f\|_{\dot{K}_{q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p, \theta}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

对于 J_{22} ，由式(2.8)，及若 $k \geq 0$ ， $x \in R_k$ ，则 $2^{k\alpha(x)} \approx 2^{k\alpha_\infty}$ ，可以得到

$$\begin{aligned} J_{22} &\lesssim \|b\|_*^m \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{k-1} 2^{k\alpha_\infty} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right. \right. \\ &\quad \times \left. \left. (k-l)^m 2^{-kn} \|\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\chi_l\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &\lesssim \|b\|_*^m \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{k-1} 2^{l\alpha_\infty} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right) \right. \end{aligned}$$

$$\times (k-l)^m 2^{\left((k-l)(\alpha_\infty - \frac{n}{q'_\infty}) \right)^{p(1+\varepsilon)}} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}}.$$

因为 $\alpha_\infty - \frac{n}{q'_\infty} < 0$ ，通过 Hölder 不等式可以得到

$$\begin{aligned} J_{22} &\lesssim \|b\|_*^m \sup_{\varepsilon > 0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{k-1} 2^{l\alpha_\infty p(1+\varepsilon)} \|f \chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} 2^{\left((k-l)(\alpha_\infty - \frac{n}{q'_\infty}) p(1+\varepsilon)/2 \right)} \right) \right. \\ &\quad \times \left. \left(\sum_{l=0}^{k-1} (k-l)^{m(p(1+\varepsilon))'} 2^{\left((k-l)(\alpha_\infty - \frac{n}{q'_\infty}) (p(1+\varepsilon))'/2 \right)} \right)^{p(1+\varepsilon)/(p(1+\varepsilon))'} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &\lesssim \|b\|_*^m \sup_{\varepsilon > 0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{l=0}^{\infty} 2^{l\alpha_\infty p(1+\varepsilon)} \|f \chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \right. \\ &\quad \times \left. \sum_{k=l+1}^{k_0} 2^{\left((k-l)(\alpha_\infty - \frac{n}{q'_\infty}) p(1+\varepsilon)/2 \right)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &\lesssim \|b\|_*^m \sup_{\varepsilon > 0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{l=0}^{\infty} 2^{l\alpha_\infty p(1+\varepsilon)} \|f \chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \sum_{k=l+1}^{\infty} 2^{\left((k-l)(\alpha_\infty - \frac{n}{q'_\infty}) p/2 \right)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &\lesssim \|b\|_*^m \sup_{\varepsilon > 0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left\| 2^{l\alpha(\cdot)} f \chi_l \right\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &\lesssim \|b\|_*^m \|f\|_{\dot{K}_{q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p, \theta}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

正如在 II 的估计中所论述的，由于 $[b^m, \mu_\Omega^\rho]$ 在 $L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 的有界性^[32]，可以很容易地得到

$$JJ \lesssim \|b\|_*^m \|f\|_{\dot{K}_{q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p, \theta}(\mathbb{R}^n)}.$$

下面估计 JJJ ，注意到如果 $l \geq k+1$ ， $x \in R_k$ ， $y \in R_l$ ，那么 $|x-y| \sim |y| \sim 2^l$ 。

类 I 中的证明，我们有

$$\begin{aligned} |[b^m, \mu_\Omega^\rho](f \chi_l)(x)| &\lesssim \left(\int_0^{|y|} \left| \frac{1}{t^\rho} \int_{|x-y| \leq t} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-\rho}} [b(x) - b(y)]^m f_l(y) dy \right|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left(\int_{|y|}^\infty \left| \frac{1}{t^\rho} \int_{|x-y| \leq t} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-\rho}} [b(x) - b(y)]^m f_l(y) dy \right|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim \|\Omega\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})} 2^{-ln} \int_{R_l} |b(x) - b(y)|^m |f(y)| dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\lesssim 2^{-ln} \sum_{i=0}^m C_m^i |b(x) - b_{B_k}|^{m-i} \int_{R_l} |b_{B_k} - b(y)|^p |f(y)| dy \\
 &\lesssim 2^{-ln} \|f \chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \sum_{i=0}^m C_m^i |b(x) - b_{B_k}|^{m-i} \|(b - b_{B_k})^i \chi_l\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

从而, 由式(3.4), , 引理 2.2.3 和引理 3.2.1 得

$$\begin{aligned}
 &\|[b^m, \mu_\Omega^\rho](f \chi_l) \chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \\
 &\lesssim 2^{-ln} \|f \chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \sum_{i=0}^m C_m^i \|(b(x) - b_{B_k})^{m-i} \chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|(b - b_{B_k})^i \chi_l\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \\
 &\lesssim 2^{-ln} \|f \chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \sum_{i=0}^m C_m^i (l-k)^i \|b\|_*^{m-i} \|\chi_{B_k}\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|b\|_*^i \|\chi_{B_l}\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \\
 &\lesssim (l-k)^m \|b\|_*^m \|f \chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} 2^{-ln} \|\chi_{B_k}\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\chi_{B_l}\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \\
 &\lesssim (l-k)^m \|b\|_*^m \|f \chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} 2^{-ln} \frac{|B_k|}{|R_k|} \|\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \frac{|B_l|}{|R_l|} \|\chi_l\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \\
 &\lesssim (l-k)^m \|b\|_*^m \|f \chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} 2^{-ln} \|\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\chi_l\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

由 Minkowski 不等式得

$$\begin{aligned}
 JJJ &\lesssim \sup_{\varepsilon > 0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\sum_{l=k+1}^{\infty} \|2^{k\alpha(\cdot)} [b^m, \mu_\Omega^\rho](f \chi_l) \chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 &\quad + \sup_{\varepsilon > 0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=k+1}^{\infty} \|2^{k\alpha(\cdot)} [b^m, \mu_\Omega^\rho](f \chi_l) \chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 &=: JJJ_1 + JJJ_2.
 \end{aligned}$$

对于 JJJ_2 , 由式(2.10), 式(3.5)可以得到

$$\begin{aligned}
 JJJ_2 &\lesssim \|b\|_*^m \sup_{\varepsilon > 0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=k+1}^{\infty} 2^{k\alpha_\infty} \|f \chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times (l-k)^m 2^{-ln} \|\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\chi_l\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 &\lesssim \|b\|_*^m \sup_{\varepsilon > 0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=k+1}^{\infty} 2^{l\alpha_\infty} \|f \chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times (l-k)^m 2^{(k-l)(\alpha_\infty + \frac{n}{q_\infty})} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}}.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

因为 $\alpha_\infty + \frac{n}{q_\infty} > 0$ 且 $2^{-p(1+\varepsilon)} < 2^{-p}$, 由 Hölder 不等式我们可以得到

$$\begin{aligned}
 JJJ_2 &\lesssim \|b\|_*^m \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=k+1}^{\infty} 2^{l\alpha_\infty p(1+\varepsilon)} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} 2^{(k-l)(\alpha_\infty + \frac{n}{q_\infty})p(1+\varepsilon)/2} \right) \right. \\
 &\quad \times \left. \left(\sum_{l=k+1}^{\infty} (l-k)^{m(p(1+\varepsilon))'} 2^{(k-l)(\alpha_\infty + \frac{n}{q_\infty})(p(1+\varepsilon))'/2} \right)^{p(1+\varepsilon)/(p(1+\varepsilon))'} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 &\lesssim \|b\|_*^m \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{l=2}^{\infty} 2^{l\alpha_\infty p(1+\varepsilon)} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \right. \\
 &\quad \times \left. \sum_{k=0}^{l-3} 2^{(k-l)(\alpha_\infty + \frac{n}{q_\infty})p(1+\varepsilon)/2} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 &\lesssim \|b\|_*^m \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{l=1}^{\infty} 2^{l\alpha_\infty p(1+\varepsilon)} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \sum_{k=2}^{l-1} 2^{(k-l)(\alpha_\infty + \frac{n}{q_\infty})p/2} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 &\lesssim \|b\|_*^m \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{l=1}^{\infty} \|2^{l\alpha(\cdot)} f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 &\lesssim \|b\|_*^m \|f\|_{\dot{K}_{q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p)\theta}(\mathbb{R}^n)}.
 \end{aligned}$$

对于 JJJ_1 , 利用 Minkowski 不等式可以表示为

$$\begin{aligned}
 JJJ_1 &\lesssim \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\sum_{l=k+1}^{-1} \|2^{k\alpha(\cdot)} [b^m, \mu_\Omega^\rho](f\chi_l)\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 &\quad + \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \|2^{k\alpha(\cdot)} [b^m, \mu_\Omega^\rho](f\chi_l)\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 &=: JJJ_{11} + JJJ_{12}.
 \end{aligned}$$

JJJ_{11} 与 JJJ_2 的估计方法类似, 用 $q(0)$ 代替 q_∞ , 并利用条件 $\alpha(0) + \frac{n}{q(0)} > 0$ 即可。

对于 JJJ_{12} , 由式(2.12), 式(3.5), 可得

$$\begin{aligned}
 JJJ_{12} &\lesssim \|b\|_*^m \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\sum_{l=0}^{\infty} 2^{k\alpha(0)} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right. \right. \\
 &\quad \times \left. \left. (l-k)^m 2^{-ln} \|\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}}
 \end{aligned}$$

$$\lesssim \|b\|_*^m \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} 2^{k[\alpha(0)+\frac{n}{q(0)}]p(1+\varepsilon)} \left(\sum_{l=0}^{\infty} 2^{l\alpha_\infty} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right. \right. \\ \left. \left. \times (l-k)^m 2^{-l(\alpha_\infty+\frac{n}{q_\infty})} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}}.$$

因为 $\alpha(0) + \frac{n}{q(0)} > 0$ 且 $2^{-p(1+\varepsilon)} < 2^{-p}$, 由 Hölder 不等式可以得到

$$\begin{aligned} JJJ_{12} &\lesssim \|b\|_*^m \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} 2^{k[\alpha(0)+\frac{n}{q(0)}]p(1+\varepsilon)} \left(\sum_{l=0}^{\infty} 2^{l\alpha_\infty} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times (l-k)^m 2^{-l(\alpha_\infty+\frac{n}{q_\infty})} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &\lesssim \|b\|_*^m \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \left(\sum_{l=0}^{\infty} 2^{l\alpha_\infty} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} (l-k)^m 2^{-l(\alpha_\infty+\frac{n}{q_\infty})} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &\lesssim \|b\|_*^m \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \left(\sum_{l=0}^{\infty} 2^{l\alpha_\infty p(1+\varepsilon)} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \right. \\ &\quad \left. \times \left(\sum_{l=0}^{\infty} (l-k)^{m(p(1+\varepsilon))'} 2^{-l(\alpha_\infty+\frac{n}{q_\infty})(p(1+\varepsilon))'} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &\lesssim \|b\|_*^m \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{l=0}^{\infty} 2^{l\alpha_\infty p(1+\varepsilon)} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &\lesssim \|b\|_*^m \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{l=-\infty}^{\infty} \|2^{l\alpha(\cdot)} f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &\lesssim \|b\|_*^m \|f\|_{\dot{K}_{q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p, \theta}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

从而定理 3.1.1 得证。

第 4 章 Marcinkiewicz 积分算子的多线性交换子在极大变指数 Herz-Morrey 空间中的有界性

4.1 引言及主要结果

我们称一个局部可积函数 b 为 BMO 函数, 若它满足

$$\|b\|_* := \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{1}{|B|} \int_B |b(y) - b_B| dy < \infty,$$

其中 B 是以 x 为圆心, r 为半径的球, $b_B = \int_B b(t) dt$, 对于 $b \in \text{BMO}(\mathbb{R}^n)$,

Marcinkiewicz 积分算子的交换子 $[b, \mu_\Omega]$ 定义为

$$[b, \mu_\Omega]f := b\mu_\Omega(f) - \mu_\Omega(bf).$$

给定一个向量 $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$, 其中 b_i 's 是一些局部可积函数。受 Pérez 和 Trujillo-González^[37]关于 Calderón-Zygmund 多线性交换子研究的启发, 类似地, Marcinkiewicz 积分算子的多线性交换子定义如下:

$$[\vec{b}, \mu_\Omega](f)(x) = \left(\int_0^\infty \left| \int_{|x-y| \leq t} \prod_{i=1}^m (b_i(x) - b_i(y)) \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}} f(y) dy \right|^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{\frac{1}{2}},$$

其中 $m \in \mathbb{N}$, 显然, 多线性交换子 $[\vec{b}, \mu_\Omega]$ 是交换子 $[b, \mu_\Omega]$ 的自然推广, 若 $m=1$ 且 $b_i = b$, 则 $[\vec{b}, \mu_\Omega] = [b, \mu_\Omega]$ 。最近, Sultan 等在[38]中将极大变指数 Herz 空间 $\dot{K}_{q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p, \theta}(\mathbb{R}^n)$ 推广到了极大变指数 Herz-Morrey 空间 $\dot{MK}_{\lambda, q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p, \theta}(\mathbb{R}^n)$, 并分别证明了 Marcinkiewicz 积分算子的交换子 $[b, \mu_\Omega]$ 及 Hardy 算子的高阶交换子在该空间上的有界性。受上述研究结果的启发, 本章将进一步证明 Marcinkiewicz 积分算子的多线性交换子 $[\vec{b}, \mu_\Omega]$ 在极大变指数 Herz-Morrey 空间 $\dot{MK}_{\lambda, q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p, \theta}(\mathbb{R}^n)$ 中的有界性。

定义 4.1.1 设 $0 \leq \lambda < \infty$, $\theta > 0$, $1 \leq p < \infty$, $q(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha(\cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 且

$\alpha(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 。齐次极大变指数 Herz-Morrey 空间定义为

$$MK_{\lambda, q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p, \theta}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in L_{loc}^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) : \|f\|_{MK_{\lambda, q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p, \theta}(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\},$$

其中

$$\|f\|_{MK_{\lambda, q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p, \theta}(\mathbb{R}^n)} := \sup_{\varepsilon > 0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=-\infty}^{k_0} \|2^{k\alpha(\cdot)} f \chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} < \infty.$$

显然，如果 α 和 q 都是常数，那么 $\dot{K}_{q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p}(\mathbb{R}^n) = \dot{K}_q^{\alpha, p}(\mathbb{R}^n)$ 即为经典的 Herz 空间。由 [18] 中的命题 2.4 可知 $\dot{K}_{q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p}(\mathbb{R}^n) \subset \dot{K}_{q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p, \theta}(\mathbb{R}^n)$ 。当 $\lambda = 0$ 时， $M\dot{K}_{0, q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p, \theta}(\mathbb{R}^n) = \dot{K}_{q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p, \theta}(\mathbb{R}^n)$ 。

定理 4.1.1 设 $\Omega \in Lip_\gamma(\mathbb{S}^{n-1})$, $b_i \in BMO(\mathbb{R}^n)$, $i = 1, 2, \dots, m$, $\theta > 0$, $0 < \lambda < \infty$,

$1 < p < \infty$, $\alpha(\cdot), q(\cdot) \in \mathcal{P}_\infty^{log}(\mathbb{R}^n)$ 。若 α 满足

$$(1) \quad \lambda - \frac{n}{q(0)} < \alpha(0) < \frac{n}{q'(0)},$$

$$(2) \quad \lambda - \frac{n}{q_\infty} < \alpha_\infty < \frac{n}{q'_\infty},$$

则多线性交换子 $[\vec{b}, \mu_\Omega]$ 在 $M\dot{K}_{\lambda, q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p, \theta}(\mathbb{R}^n)$ 上是有界的，且对任意的

$f \in M\dot{K}_{\lambda, q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p, \theta}(\mathbb{R}^n)$ ，有

$$\|[\vec{b}, \mu_\Omega](f)\|_{M\dot{K}_{\lambda, q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p, \theta}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \prod_{i=1}^m \|b_i\|_* \|f\|_{M\dot{K}_{\lambda, q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p, \theta}(\mathbb{R}^n)}.$$

4.2 主要引理

引理 4.2.1^[17] 若 $p(\cdot) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ，则

$$\frac{1}{|B|} \|\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\chi_B\|_{L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq C.$$

引理 4.2.2^[40] 若 $p(\cdot) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $b_i \in BMO(\mathbb{R}^n)$, $i = 1, 2, \dots, m$, $k > j(k, j \in \mathbb{N})$,

则

$$\sup_{B \subset \mathbb{R}^n} \frac{1}{\|\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}} \left\| \prod_{i=1}^m (b_i - (b_i)_B) \chi_B \right\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \approx \prod_{i=1}^m \|b_i\|_*,$$

$$\left\| \prod_{i=1}^m (b_i - (b_i)_{B_j}) \chi_{B_k} \right\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq C(k-j)^m \prod_{i=1}^m \|b_i\|_* \|\chi_{B_k}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.$$

4.3 主要结果的证明

定理 4.1.1 的证明：设 $f \in \dot{MK}_{\lambda, q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p, \theta}(\mathbb{R}^n)$ ，我们将其分解为

$$f(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f(x) \chi_l(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_l(x).$$

由 Minkowski 不等式得

$$\begin{aligned} & \left\| [\vec{b}, \mu_\Omega](f) \right\|_{\dot{MK}_{\lambda, q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p, \theta}(\mathbb{R}^n)} \\ &= \sup_{\varepsilon > 0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=-\infty}^{k_0} \left\| 2^{k\alpha(\cdot)} [\vec{b}, \mu_\Omega](f) \chi_k \right\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &\lesssim \sup_{\varepsilon > 0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=-\infty}^{k_0} \left(\sum_{l=-\infty}^{k-1} \left\| 2^{k\alpha(\cdot)} [\vec{b}, \mu_\Omega](f \chi_l) \chi_k \right\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &\quad + \sup_{\varepsilon > 0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\varepsilon^\theta \left\| 2^{k\alpha(\cdot)} [\vec{b}, \mu_\Omega](f \chi_k) \chi_k \right\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &\quad + \sup_{\varepsilon > 0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=-\infty}^{k_0} \left(\sum_{l=k+1}^{\infty} \left\| 2^{k\alpha(\cdot)} [\vec{b}, \mu_\Omega](f \chi_l) \chi_k \right\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &=: U + V + W. \end{aligned}$$

对于 U ，利用 Minkowski 不等式，我们有

$$\begin{aligned} \left| [\vec{b}, \mu_\Omega](f \chi_l)(x) \right| &\leq \left(\int_0^{|x|} \left| \int_{|x-y| \leq t} \prod_{i=1}^m (b_i(x) - b_i(y)) \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}} f_l(y) dy \right|^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left(\int_{|x|}^{\infty} \left| \int_{|x-y| \leq t} \prod_{i=1}^m (b_i(x) - b_i(y)) \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}} f_l(y) dy \right|^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &=: Q_1 + Q_2. \end{aligned}$$

注意到 $l \leq k-1$ ， $x \in R_k$ ，那么 $|x-y| \sim |x| \sim 2^k$ 。因为 $\Omega \in Lip_\gamma(\mathbb{S}^{n-1}) \subset L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$ ，得

$$\begin{aligned}
 Q_1 &\lesssim \|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})} \int_{R_l} \frac{|f_l(y)| \prod_{i=1}^m |b_i(x) - b_i(y)|}{|x - y|^{n-1}} \left(\int_{|x-y|/3}^{|x-y|} \frac{dt}{t^3} \right)^{\frac{1}{2}} dy \\
 &\lesssim \int_{R_l} \frac{|f_l(y)| \prod_{i=1}^m |b_i(x) - b_i(y)|}{|x - y|^{n-1}} \frac{|y|^{\frac{1}{2}}}{|x - y|^{\frac{3}{2}}} dy \\
 &\lesssim 2^{\frac{l-k}{2}} 2^{-kn} \int_{R_l} |f_l(y)| \prod_{i=1}^m |b_i(x) - b_i(y)| dy.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

类似地，我们有

$$\begin{aligned}
 Q_2 &\lesssim \|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})} \int_{R_l} \frac{|f_l(y)| \prod_{i=1}^m |b_i(x) - b_i(y)|}{|x - y|^{n-1}} \left(\int_{|x|}^{\infty} \frac{dt}{t^3} \right)^{\frac{1}{2}} dy \\
 &\lesssim \int_{R_l} \frac{|f_l(y)| \prod_{i=1}^m |b_i(x) - b_i(y)|}{|x - y|^{n-1}} \frac{1}{|x|} dy \\
 &\lesssim 2^{-kn} \int_{R_l} |f_l(y)| \prod_{i=1}^m |b_i(x) - b_i(y)| dy.
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

设 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$, $\lambda_i = (b_i)_{B_i}$, $i = 1, 2, \dots, m$ 。由式(4.1), 式(4.2)和广义的 Hölder 不等式, 可得

$$\begin{aligned}
 |[\vec{b}, \mu_\Omega](f\chi_l)(x)| &\lesssim 2^{-kn} \int_{R_l} \prod_{i=1}^m |b_i(x) - b_i(y)| |f_l(y)| dy \\
 &\lesssim 2^{-kn} \sum_{i=0}^m \sum_{\sigma \in C_i^m} |(b(x) - \vec{\lambda})_\sigma| \left| \int_{R_l} |(b(y) - \vec{\lambda})_{\sigma'}| |f_l(y)| dy \right| \\
 &\lesssim 2^{-kn} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \sum_{i=0}^m \sum_{\sigma \in C_i^m} |(b(x) - \vec{\lambda})_\sigma| \|(b(\cdot) - \vec{\lambda})_{\sigma'}\chi_l\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.
 \end{aligned}$$

从而, 利用引理 2.2.3, 引理 4.2.1, 引理 4.2.2, 我们有

$$\begin{aligned}
 &\|[\vec{b}, \mu_\Omega](f\chi_l)\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \\
 &\lesssim 2^{-kn} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \sum_{i=0}^m \sum_{\sigma \in C_i^m} \|(b(\cdot) - \vec{\lambda})_\sigma\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|(b(\cdot) - \vec{\lambda})_{\sigma'}\chi_l\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \\
 &\lesssim (k-l)^m \prod_{i=1}^m \|b_i\|_* 2^{-kn} \|\chi_{B_k}\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\chi_{B_l}\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \\
 &\lesssim (k-l)^m \prod_{i=1}^m \|b_i\|_* 2^{-kn} \frac{|B_k|}{|R_k|} \|\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \frac{|B_l|}{|R_l|} \|\chi_l\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \\
 &\lesssim (k-l)^m \prod_{i=1}^m \|b_i\|_* \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} 2^{-kn} \|\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\chi_l\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

由 Minkowski 不等式得

$$\begin{aligned}
 U &\lesssim \sup_{\varepsilon>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\sum_{l=-\infty}^{k-1} \|2^{k\alpha(\cdot)} [\vec{b}, \mu_\Omega](f \chi_l) \chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 &\quad + \sup_{\varepsilon>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=0}^{k_0} \left(\sum_{l=-\infty}^{k-1} \|2^{k\alpha(\cdot)} [\vec{b}, \mu_\Omega](f \chi_l) \chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 &=: U_1 + U_2.
 \end{aligned}$$

对于 U_1 , 由式(2.6), 式(4.3)及 $2^{k\alpha(x)} \approx 2^{k\alpha(0)}, k < 0, x \in R_k$ 得

$$\begin{aligned}
 U_1 &\lesssim \prod_{i=1}^m \|b_i\|_* \sup_{\varepsilon>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\sum_{l=-\infty}^{k-1} 2^{k\alpha(0)} \|f \chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times (k-l)^m 2^{-kn} \|\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\chi_l\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 &\lesssim \prod_{i=1}^m \|b_i\|_* \sup_{\varepsilon>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\sum_{l=-\infty}^{k-1} 2^{k\alpha(0)} \|f \chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times (k-l)^m 2^{(k-l)[\alpha(0) - \frac{n}{q'(0)}]} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}}.
 \end{aligned}$$

注意到 $\alpha(0) - \frac{n}{q'(0)} < 0$ 及 $2^{-p(1+\varepsilon)} < 2^{-p}$, 由 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned}
 U_1 &\lesssim \prod_{i=1}^m \|b_i\|_* \sup_{\varepsilon>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\sum_{l=-\infty}^{k-1} 2^{l\alpha(0)p(1+\varepsilon)} \|f \chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} 2^{(k-l)[\alpha(0) - \frac{n}{q'(0)}]p(1+\varepsilon)/2} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times \left(\sum_{l=-\infty}^{k-1} (k-l)^{m(p(1+\varepsilon))'} 2^{(k-l)[\alpha(0) - \frac{n}{q'(0)}](p(1+\varepsilon))'/2} \right)^{p(1+\varepsilon)/(p(1+\varepsilon))'} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \right) \\
 &\lesssim \prod_{i=1}^m \|b_i\|_* \sup_{\varepsilon>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\sum_{l=-\infty}^{-2} 2^{l\alpha(0)p(1+\varepsilon)} \|f \chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \sum_{k=l+1}^{-1} 2^{(k-l)[\alpha(0) - \frac{n}{q'(0)}]p(1+\varepsilon)/2} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 &\lesssim \prod_{i=1}^m \|b_i\|_* \sup_{\varepsilon>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\sum_{l=-\infty}^{-2} 2^{l\alpha(0)p(1+\varepsilon)} \|f \chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \sum_{k=l+1}^{-1} 2^{(k-l)[\alpha(0) - \frac{n}{q'(0)}]p/2} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 &\lesssim \prod_{i=1}^m \|b_i\|_* \sup_{\varepsilon>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\sum_{l=-\infty}^{k_0} \|2^{l\alpha(\cdot)} f \chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 &\lesssim \prod_{i=1}^m \|b_i\|_* \|f\|_{MK_{\lambda, q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p, \theta}(\mathbb{R}^n)}.
 \end{aligned}$$

对于 U_2 , 利用 Minkowski 不等式得

$$\begin{aligned}
 U_2 &\lesssim \sup_{\varepsilon>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=0}^{k_0} \left(\sum_{l=-\infty}^{-1} \left\| 2^{k\alpha(\cdot)} [\vec{b}, \mu_\Omega] (f \chi_l) \chi_k \right\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 &\quad + \sup_{\varepsilon>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=0}^{k_0} \left(\sum_{l=0}^{k-1} \left\| 2^{k\alpha(\cdot)} [\vec{b}, \mu_\Omega] (f \chi_l) \chi_k \right\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 &=: U_{21} + U_{22}.
 \end{aligned}$$

对于 U_{21} , 由式(2.7), 式(4.3), 及 $2^{k\alpha(x)} \approx 2^{k\alpha_\infty}$, $k \geq 0$, $x \in R_k$ 得

$$\begin{aligned}
 U_{21} &\lesssim \prod_{i=1}^m \|b_i\|_* \sup_{\varepsilon>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=0}^{k_0} \left(\sum_{l=-\infty}^{-1} 2^{k\alpha_\infty} \|f \chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times (k-l)^m 2^{-kn} \|\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\chi_l\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 &\lesssim \prod_{i=1}^m \|b_i\|_* \sup_{\varepsilon>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=0}^{k_0} 2^{k(\alpha_\infty - \frac{n}{q'_\infty})p(1+\varepsilon)} \right. \\
 &\quad \left. \times \left(\sum_{l=-\infty}^{-1} 2^{l\alpha(0)} \|f \chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} 2^{-l[\frac{n}{q'(0)} - \alpha(0)]} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}}.
 \end{aligned}$$

注意到 $\alpha_\infty - \frac{n}{q'_\infty} < 0$ 及 $\alpha(0) - \frac{n}{q'(0)} < 0$, 由 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned}
 U_{21} &\lesssim \prod_{i=1}^m \|b_i\|_* \sup_{\varepsilon>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=0}^{k_0} 2^{k(\alpha_\infty - \frac{n}{q'_\infty})p} \right. \\
 &\quad \left. \times \left(\sum_{l=-\infty}^{-1} 2^{l\alpha(0)} \|f \chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} (k-l)^m 2^{l[\frac{n}{q'(0)} - \alpha(0)]} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 &\lesssim \prod_{i=1}^m \|b_i\|_* \sup_{\varepsilon>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\varepsilon^\theta \left(\sum_{k=0}^{k_0} 2^{l\alpha(0)} \|f \chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times (k-l)^m 2^{l[\frac{n}{q'(0)} - \alpha(0)]} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 &\lesssim \prod_{i=1}^m \|b_i\|_* \sup_{\varepsilon>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\varepsilon^\theta \left(\sum_{l=-\infty}^{k-1} 2^{l\alpha(0)p(1+\varepsilon)} \|f \chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \right) \right. \\
 &\quad \left. \times \left(\sum_{l=-\infty}^{-1} (k-l)^{m(p(1+\varepsilon))'} 2^{l[\frac{n}{q'(0)} - \alpha(0)](p(1+\varepsilon))'} \right)^{p(1+\varepsilon)/(p(1+\varepsilon))'} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\lesssim \prod_{i=1}^m \|b_i\|_* \sup_{\varepsilon>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\varepsilon^\theta \sum_{l=-\infty}^{-1} 2^{l\alpha(0)p(1+\varepsilon)} \|f \chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 &\lesssim \prod_{i=1}^m \|b_i\|_* \sup_{\varepsilon>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\varepsilon^\theta \sum_{l=-\infty}^{k_0} \|2^{l\alpha(\cdot)} f \chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 &\lesssim \prod_{i=1}^m \|b_i\|_* \|f\|_{MK_{\lambda, q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p, \theta}(\mathbb{R}^n)}.
 \end{aligned}$$

对于 U_{22} , 由式(2.8), 式(4.3)及 $2^{k\alpha(x)} \approx 2^{k\alpha_\infty}$, $k \geq 0$, $x \in R_k$ 得

$$\begin{aligned}
 U_{22} &\lesssim \prod_{i=1}^m \|b_i\|_* \sup_{\varepsilon>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=0}^{k_0} \left(\sum_{l=0}^{k-1} 2^{k\alpha_\infty} \|f \chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 &\quad \times (k-l)^m 2^{-kn} \|\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\chi_l\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \\
 &\lesssim \prod_{i=1}^m \|b_i\|_* \sup_{\varepsilon>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=0}^{k_0} \left(\sum_{l=0}^{k-1} 2^{l\alpha_\infty} \|f \chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 &\quad \times (k-l)^m 2^{(k-l)(\alpha_\infty - \frac{n}{q'_\infty})} \Bigg)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}}.
 \end{aligned}$$

因为 $\alpha_\infty - \frac{n}{q'_\infty} < 0$, 由 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned}
 U_{22} &\lesssim \prod_{i=1}^m \|b_i\|_* \sup_{\varepsilon>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=0}^{k_0} \left(\sum_{l=0}^{k-1} 2^{l\alpha_\infty p(1+\varepsilon)} \|f \chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} 2^{(k-l)(\alpha_\infty - \frac{n}{q'_\infty})p(1+\varepsilon)/2} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 &\quad \times \left(\sum_{l=0}^{k-1} (k-l)^{m(p(1+\varepsilon))'} 2^{(k-l)(\alpha_\infty - \frac{n}{q'_\infty})(p(1+\varepsilon))'/2} \right)^{p(1+\varepsilon)/(p(1+\varepsilon))'} \\
 &\lesssim \prod_{i=1}^m \|b_i\|_* \sup_{\varepsilon>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\varepsilon^\theta \sum_{l=0}^{k_0-1} 2^{l\alpha_\infty p(1+\varepsilon)} \|f \chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \right. \\
 &\quad \times \sum_{k=l+1}^{k_0} 2^{(k-l)(\alpha_\infty - \frac{n}{q'_\infty})p(1+\varepsilon)/2} \Bigg)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 &\lesssim \prod_{i=1}^m \|b_i\|_* \sup_{\varepsilon>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\varepsilon^\theta \sum_{l=0}^{k_0-1} 2^{l\alpha_\infty p(1+\varepsilon)} \|f \chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \sum_{k=l+1}^{k_0} 2^{(k-l)(\alpha_\infty - \frac{n}{q'_\infty})p/2} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 &\lesssim \prod_{i=1}^m \|b_i\|_* \sup_{\varepsilon>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\varepsilon^\theta \sum_{l=-\infty}^{k_0} \|2^{l\alpha(\cdot)} f \chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}}
 \end{aligned}$$

$$\lesssim \prod_{i=1}^m \|b_i\|_* \|f\|_{MK_{\lambda,q(\cdot)}^{\alpha(\cdot),p,\theta}(\mathbb{R}^n)}.$$

对于 V ，由 Minkowski 不等式得

$$\begin{aligned} V &\lesssim \sup_{\varepsilon>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} \left\| 2^{k\alpha(\cdot)} [\vec{b}, \mu_\Omega](f \chi_k) \chi_k \right\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &\quad + \sup_{\varepsilon>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=0}^{k_0} \left\| 2^{k\alpha(\cdot)} [\vec{b}, \mu_\Omega](f \chi_k) \chi_k \right\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &=: V_1 + V_2. \end{aligned}$$

对于 V_1 ，由于 $[\vec{b}, \mu_\Omega]$ 在 $L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 上是有界的^[40]，及 $2^{k\alpha(x)} \approx 2^{k\alpha(0)}$ ， $k < 0$ ， $x \in R_k$ ，得

$$\begin{aligned} V_1 &\lesssim \sup_{\varepsilon>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} 2^{k\alpha(0)p(1+\varepsilon)} \left\| [\vec{b}, \mu_\Omega](f \chi_k) \chi_k \right\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &\lesssim \prod_{i=1}^m \|b_i\|_* \sup_{\varepsilon>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} 2^{k\alpha(0)p(1+\varepsilon)} \|f \chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &\lesssim \prod_{i=1}^m \|b_i\|_* \sup_{\varepsilon>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} \left\| 2^{k\alpha(\cdot)} f \chi_k \right\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &\lesssim \prod_{i=1}^m \|b_i\|_* \|f\|_{MK_{\lambda,q(\cdot)}^{\alpha(\cdot),p,\theta}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

对于 V_2 ，由 $2^{k\alpha(x)} \approx 2^{k\alpha_\infty}$ ， $k \geq 0$ ， $x \in R_k$ 得

$$\begin{aligned} V_2 &\lesssim \sup_{\varepsilon>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=0}^{k_0} 2^{k\alpha_\infty p(1+\varepsilon)} \left\| [\vec{b}, \mu_\Omega](f \chi_k) \chi_k \right\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &\lesssim \prod_{i=1}^m \|b_i\|_* \sup_{\varepsilon>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=0}^{k_0} 2^{k\alpha_\infty p(1+\varepsilon)} \|f \chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &\lesssim \prod_{i=1}^m \|b_i\|_* \sup_{\varepsilon>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=0}^{k_0} \left\| 2^{k\alpha(\cdot)} f \chi_k \right\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &\lesssim \prod_{i=1}^m \|b_i\|_* \|f\|_{MK_{\lambda,q(\cdot)}^{\alpha(\cdot),p,\theta}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

结合上面的估计，我们可得

$$V \lesssim \prod_{i=1}^m \|b_i\|_* \|f\|_{MK_{\lambda,q(\cdot)}^{\alpha(\cdot),p,\theta}(\mathbb{R}^n)}.$$

下面估计 W ，注意到如果 $l \geq k+1$ ， $x \in R_k$ ， $y \in R_l$ ，那么 $|x-y| \sim |y| \sim 2^l$ 。类似 U 中的证明，我们有

$$\begin{aligned} |[\vec{b}, \mu_\Omega](f\chi_l)(x)| &\leq \left(\int_0^{|y|} \left| \int_{|x-y| \leq t} \prod_{i=1}^m (b_i(x) - b_i(y)) \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}} f_l(y) dy \right|^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left(\int_{|y|}^\infty \left| \int_{|x-y| \leq t} \prod_{i=1}^m (b_i(x) - b_i(y)) \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}} f_l(y) dy \right|^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim 2^{-ln} \int_{R_l} |f_l(y)| \prod_{i=1}^m |b_i(x) - b_i(y)| dy \\ &\lesssim 2^{-ln} \sum_{i=0}^m \sum_{\sigma \in C_i^m} |(b(x) - \vec{\lambda})_\sigma| \int_{R_l} |(b(y) - \vec{\lambda})_{\sigma'}| \cdot |f_l(y)| dy \\ &\lesssim 2^{-ln} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \sum_{i=0}^m \sum_{\sigma \in C_i^m} |(b(x) - \vec{\lambda})_\sigma| \|(b(\cdot) - \vec{\lambda})_{\sigma'}\chi_l\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

从而，由引理 2.2.3，引理 4.2.1，引理 4.2.2 得

$$\begin{aligned} &\|[\vec{b}, \mu_\Omega](f\chi_l)\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \\ &\lesssim 2^{-ln} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \sum_{i=0}^m \sum_{\sigma \in C_i^m} \|(b(\cdot) - \vec{\lambda})_\sigma\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|(b(\cdot) - \vec{\lambda})_{\sigma'}\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \\ &\lesssim (l-k)^m \prod_{i=1}^m \|b_i\|_* 2^{-ln} \|\chi_{B_k}\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\chi_{B_l}\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \\ &\lesssim (l-k)^m \prod_{i=1}^m \|b_i\|_* 2^{-ln} \frac{|B_k|}{|R_k|} \|\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \frac{|B_l|}{|R_l|} \|\chi_l\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \\ &\lesssim (l-k)^m \prod_{i=1}^m \|b_i\|_* \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} 2^{-ln} \|\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\chi_l\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

由 Minkowski 不等式得

$$W \lesssim \sup_{\varepsilon > 0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\sum_{l=k+1}^{\infty} \|2^{k\alpha(\cdot)} [\vec{b}, \mu_\Omega](f\chi_l)\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sup_{\varepsilon > 0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=0}^{k_0} \left(\sum_{l=k+1}^{\infty} \|2^{k\alpha(\cdot)} [\bar{b}, \mu_\Omega](f \chi_l) \chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 & =: W_1 + W_2.
 \end{aligned}$$

另一方面，我们有

$$\begin{aligned}
 \|f \chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} & = 2^{-l\alpha_\infty} \left(2^{l\alpha_\infty p(1+\varepsilon)} \|f \chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 & \lesssim 2^{-l\alpha_\infty} \left(\sum_{i=-\infty}^l 2^{i\alpha_\infty p(1+\varepsilon)} \|f \chi_i\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 & \lesssim 2^{-l\alpha_\infty} 2^{l\lambda} \varepsilon^{-\frac{\theta}{p(1+\varepsilon)}} 2^{-l\lambda} \left(\varepsilon^\theta \sum_{i=-\infty}^l 2^{i\alpha_\infty p(1+\varepsilon)} \|f \chi_i\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 & \lesssim 2^{-l\alpha_\infty} 2^{l\lambda} \varepsilon^{-\frac{\theta}{p(1+\varepsilon)}} \|f\|_{M\dot{K}_{\lambda, q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p, \theta}(\mathbb{R}^n)}.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

由式(2.10)，式(4.4)得

$$\begin{aligned}
 W_2 & \lesssim \prod_{i=1}^m \|b_i\|_* \sup_{\varepsilon > 0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=0}^{k_0} \left(\sum_{l=k+1}^{\infty} 2^{k\alpha_\infty} \|f \chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \times (l-k)^m 2^{-ln} \|\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\chi_l\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 & \lesssim \prod_{i=1}^m \|b_i\|_* \sup_{\varepsilon > 0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=0}^{k_0} \left(\sum_{l=k+1}^{\infty} 2^{l\alpha_\infty} \|f \chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \times (l-k)^m 2^{\left((k-l)(\alpha_\infty + \frac{n}{q_\infty}) \right)} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}}.
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

由于 $\alpha_\infty > -\frac{n}{q_\infty} + \lambda$ ，结合式(4.5)，式(4.6)，得

$$\begin{aligned}
 W_2 & \lesssim \prod_{i=1}^m \|b_i\|_* \|f\|_{M\dot{K}_{\lambda, q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p, \theta}(\mathbb{R}^n)} \sup_{\varepsilon > 0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=0}^{k_0} 2^{k\lambda p(1+\varepsilon)} \right. \\
 & \quad \left. \times \left(\sum_{l=k+1}^{\infty} (l-k)^m 2^{\left((k-l)(\alpha_\infty + \frac{n}{q_\infty} - \lambda) \right)} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 & \lesssim \prod_{i=1}^m \|b_i\|_* \|f\|_{M\dot{K}_{\lambda, q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), p, \theta}(\mathbb{R}^n)} \sup_{\varepsilon > 0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\sum_{k=0}^{k_0} 2^{k\lambda p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}}
 \end{aligned}$$

$$\lesssim \prod_{i=1}^m \|b_i\|_* \|f\|_{MK_{\lambda,q(\cdot)}^{\alpha(\cdot),p,\theta}(\mathbb{R}^n)}.$$

对于 W_1 ，由 Minkowski 不等式得

$$\begin{aligned} W_1 &\lesssim \sup_{\varepsilon>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\sum_{l=k+1}^{-1} \|2^{k\alpha(\cdot)} [\bar{b}, \mu_\Omega](f\chi_l)\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &\quad + \sup_{\varepsilon>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \|2^{k\alpha(\cdot)} [\bar{b}, \mu_\Omega](f\chi_l)\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &=: W_{11} + W_{12}. \end{aligned}$$

W_{11} 与 W_2 的估计方法类似，用 $q(0)$ 代替 q_∞ ，并利用条件 $\alpha(0) > -\frac{n}{q(0)} + \lambda$ 即可。

对于 W_{12} ，由式(2.12)，式(4.4)得

$$\begin{aligned} W_{12} &\lesssim \prod_{i=1}^m \|b_i\|_* \sup_{\varepsilon>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\sum_{l=0}^{\infty} 2^{k\alpha(0)} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times (l-k)^m 2^{-ln} \|\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\chi_l\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &\lesssim \prod_{i=1}^m \|b_i\|_* \sup_{\varepsilon>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\sum_{l=0}^{\infty} 2^{l\alpha_\infty} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} 2^{k[\alpha(0)+\frac{n}{q(0)}]} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times (l-k)^m 2^{-l(\alpha_\infty+\frac{n}{q_\infty})} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}}. \end{aligned}$$

因为 $\alpha(0) > -\frac{n}{q(0)} + \lambda$ 且 $\alpha_\infty > -\frac{n}{q_\infty} + \lambda$ ，由式(4.5)及 $2^{-p(1+\varepsilon)} < 2^{-p}$ 得

$$\begin{aligned} W_{12} &\lesssim \prod_{i=1}^m \|b_i\|_* \|f\|_{MK_{\lambda,q(\cdot)}^{\alpha(\cdot),p,\theta}(\mathbb{R}^n)} \sup_{\varepsilon>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} 2^{k[\alpha(0)+\frac{n}{q(0)}]p(1+\varepsilon)} \right. \\ &\quad \left. \times \left(\sum_{l=0}^{\infty} (l-k)^m 2^{-l(\alpha_\infty+\frac{n}{q_\infty})} \right)^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &\lesssim \prod_{i=1}^m \|b_i\|_* \|f\|_{MK_{\lambda,q(\cdot)}^{\alpha(\cdot),p,\theta}(\mathbb{R}^n)} \sup_{\varepsilon>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{-1} 2^{k[\alpha(0)+\frac{n}{q(0)}]p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\lesssim \prod_{i=1}^m \|b_i\|_* \|f\|_{MK_{\lambda,q(\cdot)}^{\alpha(\cdot),p(\cdot),\theta}(\mathbb{R}^n)} \sup_{\varepsilon>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{-1} 2^{k[\alpha(0)+\frac{n}{q(0)}-\lambda]p(1+\varepsilon)} 2^{k\lambda p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 &\lesssim \prod_{i=1}^m \|b_i\|_* \|f\|_{MK_{\lambda,q(\cdot)}^{\alpha(\cdot),p(\cdot),\theta}(\mathbb{R}^n)} \sup_{\varepsilon>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{-1} 2^{k[\alpha(0)+\frac{n}{q(0)}-\lambda]p} 2^{k\lambda p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 &\lesssim \prod_{i=1}^m \|b_i\|_* \|f\|_{MK_{\lambda,q(\cdot)}^{\alpha(\cdot),p(\cdot),\theta}(\mathbb{R}^n)} \sup_{\varepsilon>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\lambda p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\
 &\lesssim \prod_{i=1}^m \|b_i\|_* \|f\|_{MK_{\lambda,q(\cdot)}^{\alpha(\cdot),p(\cdot),\theta}(\mathbb{R}^n)} .
 \end{aligned}$$

从而定理 4.1.1 得证。

结论与展望

本学位论文对经典函数空间中几类算子及交换子的有界性进行了拓展,将这些算子的有界性推广至极大变指数函数空间,研究的主要成果包括:

(1) 证明了参数型 Marcinkiewicz 积分算子在极大变指数 Herz 空间 $\dot{K}_{q(\cdot)}^{\alpha(\cdot),p),\theta}(\mathbb{R}^n)$ 中的有界性;

(2) 证明了参数型 Marcinkiewicz 积分算子的高阶交换子 $[b^m, \mu_\Omega^\rho]$ 在极大变指数 Herz 空间 $\dot{K}_{q(\cdot)}^{\alpha(\cdot),p),\theta}(\mathbb{R}^n)$ 中的有界性;

(3) 证明了 Marcinkiewicz 积分算子的多线性交换子 $[\vec{b}, \mu_\Omega]$ 在极大变指数 Herz-Morrey 空间 $M\dot{K}_{\lambda,q(\cdot)}^{\alpha(\cdot),p),\theta}(\mathbb{R}^n)$ 中的有界性。

这些研究结果丰富了 Marcinkiewicz 积分算子及其交换子在极大变指数函数空间理论,也为未来的研究提供了新的方向。尽管本学位论文仅聚焦于 Marcinkiewicz 积分算子,但未来的研究可以进一步拓展到其他算子,探讨它们在极大变指数函数空间的有界性特征。

参考文献

- [1] Orlicz W. Über konjugierte exponentenfolgen[J]. *Studia Mathematica*, 1931, 3(1): 200-211.
- [2] Kováčik O, Rákosník J. On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$ [J]. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 1991, 41(4): 592-618.
- [3] Almeida A, Drihem D. Maximal potential and singular type operators on Herz spaces with variable exponents[J]. *Journal of Mathematical Analysis Applications*, 2012, 394(2): 781-795.
- [4] Wang H, Liu Z. The Herz-type Hardy spaces with variable exponent and their applications[J]. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 2012, 16(4): 1363-1389.
- [5] Lu Y, Zhu Y. Boundedness of multilinear Calderón-Zygmund singular operators on Morrey-Herz spaces with variable exponents[J]. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 2014, 30: 1180-1194.
- [6] Yang D, Zhuo C, Yuan W. Besov-type spaces with variable smoothness and integrability[J]. *Journal of Functional Analysis*, 2015, 269(6): 1840-1898.
- [7] Coifman R R, Rochberg R, Weiss R G. Factorization theorems for Hardy spaces in several variables[J]. *Annals of Mathematics*, 1976, 103(3): 611-635.
- [8] Lu S, Tang L, Yang D. Boundedness of commutators on Hardy type spaces [J]. *Science in China (Series A)*, 1998, 41(10): 1023-1033.
- [9] Morrey C B, Jr. On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations[J]. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1938, 43(1): 126-166.
- [10] Herz C S. Lipschitz spaces and Bernstein's theorem on absolutely convergent Fourier series[J]. *Indiana University Mathematics Journal*, 1968.
- [11] Han Y, Wu H. The commutators of Marcinkiewicz integral operators on weighted Hardy spaces[J]. *Frontiers of Mathematics*, 2023, 18(1): 167-183.
- [12] Ragusa M A. Homogeneous Herz spaces and regularity results[J]. *Nonlinear Analysis*, 2009, 71: 1909-1914.

-
- [13]Chiarenza F. Morrey spaces and Hardy-Littlewood maximal function[J]. Rendiconti Lincei-Matematica e Applicazioni, 1987, 7: 273-279.
 - [14]Milman M, Schonbek T. Second order estimates in interpolation theory and applications[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1990, 110(4): 961-969.
 - [15]Bastero J, Milman M, Ruiz F. Commutators for the maximal and sharp functions[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2000, 128(11): 3329-3334.
 - [16]陈艳萍, 丁勇. 广义 Morrey 空间上带变量核的 Littlewood-Paley 算子[J]. 数学物理学报, 2009(03): 104-116.
 - [17]Izuki M. Boundedness of sublinear operators on Herz spaces with variable exponent and application to wavelet characterization[J]. Analysis Mathematica, 2010, 36(1): 33-50.
 - [18]Nafis H, Rafeiro H, Zaighum M A. Boundedness of Marcinkiewicz integral on grand variable Herz spaces[J]. Journal of Mathematical Inequalities, 2021, 96: 739-753.
 - [19]Hu G, Lu S, Yang D. Boundedness of rough singular integral operators on homogeneous Herz space[J]. Journal of the Australian Mathematical Society, 1999, 66(2): 201-223.
 - [20]周伟军, 马柏林, 徐景实. 分数次多线性交换子在 Herz 空间上的有界性[J]. 系统科学与数学, 2005, 25(2): 160-169.
 - [21]武龙江. Morrey-Herz 空间上一些交换子的有界性[D]. 西北师范大学, 2007.
 - [22]Wang L, Shu L. Boundedness of some sublinear operators on weighted variable Herz-Morrey spaces[J]. Journal of Mathematical Inequalities, 2018, 12(1): 31-42.
 - [23]Zhang W, He S, Zhang J. Boundedness of sublinear operators on weighted grand Herz-Morrey spaces[J]. AIMS Mathematics, 2023, 8(8): 17381-17401.
 - [24]Stein E. Singular integrals and differentiability properties of functions[J]. Princeton University Press, 1970.

- [25]Benedek A, Calderón A, Panzone R. Convolution operators on Banach space valued functions[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 1962, 48: 356-365.
- [26]Hörmander L. Translation invariant operators[J]. Acta Mathematica, 1960, 104: 93-139.
- [27]Ding Y, Lu S, Yabuta K. A problem on rough parametric Marcinkiewicz function[J]. Australian Mathematical Society, 2002, 72(1):13-22.
- [28]Al-Salman A. Marcinkiewicz function along flat surfaces with Hardy space kernels[J]. Integral Equations and Applications, 2005, 17(4): 357-373.
- [29]Samko S. Variable exponent Herz spaces[J]. Mediterranean Journal of Mathematics, 2013, 10(4): 2007-2025.
- [30]Bennett C, Sharpley R. Interpolation of operators[M]. Academic Press Professional, 1988: 129.
- [31]Izuki M. Herz and amalgam spaces with variable exponent, the Haar wavelets and greediness of the wavelet system[J]. East Journal on Approximations, 2009, 15(1): 87-110.
- [32]Wang H, Yan D. Higher-order commutators of parametric Marcinkiewicz integrals on Herz spaces with variable exponent[J]. Function Spaces, 2018: 1-11.
- [33]王洪彬, 傅尊伟, 刘宗光. 变指标 Lebesgue 空间上的 Marcinkiewicz 积分高阶交换子[J]. 数学物理学报, 2012, 32(06): 1092-1101.
- [34]辛银萍, 陶双平. 带变量核的 Marcinkiewicz 积分算子在变指标 Herz 型 Hardy 空间上的有界性[J]. 山东大学学报(理学版), 2018, 53(06): 38-43.
- [35]邵旭馗. 带变量核的 Marcinkiewicz 积分交换子在变指标 Herz-Hardy 空间上的有界性[J]. 吉林大学, 2019, 57(04): 767-772.
- [36]陶双平, 师金利. 变量核 Marcinkiewicz 积分在变指标 Herz-Morrey 空间上的加权估计[J]. 吉林大学学报, 2019, 57(03): 459-464.
- [37]Pérez C, Trujillo-Goneález R. Sharp weighted estimates for multilinear commutators[J]. London Mathematical Society, 2002, 65(3): 672-692.

- [38]Sultan B, Sultan M, Gürbüz F. BMO estimate for the higher order commutators of Marcinkiewicz integral operator on grand variable Herz-Morrey spaces[J]. Communications Faculty of Sciences University of Ankara-Series A1 Mathematics and Statistics, 2023, 72(4): 1000-1018.
- [39]Sultan B, Sultan M. Boundedness of higher order commutators of Hardy operator on grand Herz-Morrey spaces[J]. Bulletin of Mathematical Sciences, 2024, 190: 103373.
- [40]Wang L, Shu L. On multilinear commutators of Marcinkiewicz integrals in variable exponent Lebesgue and Herz type spaces[J]. Mathematical Inequalities and Applications, 2019, 22: 77-96.

硕士期间发表论文

- [1] 李晓燕, 王立伟. Marcinkiewicz 积分算子的多线性交换子在极大变指数 Herz-Morrey 空间上的有界性[J]. 应用数学.

致谢

总觉得来日方长，却不知岁月清浅，时节如流。当我敲下致谢二字时，三年研究生生涯即将结束，到了说再见的时候。三年旅程，所有的相遇，所有的经历于我而言都是最好的礼物。

我衷心感谢我的导师王立伟教授。在我撰写论文的过程中，导师给予了我无私的帮助和指导。从选题到写作，从修改到定稿，每一步都离不开导师的悉心指导。导师严谨的治学态度、深厚的学术造诣和丰富的实践经验都让我受益匪浅。王老师不仅在学术上对我严格要求，教会我专业知识，指引我如何深入挖掘论文的创新点，同时在生活中也给予了我诸多关怀。在此，我向导师表示最诚挚的感谢和最崇高的敬意。

感谢安徽工程大学数理与金融学院为我们营造了优越的学习环境和浓厚的学术氛围，使我们在这三年中能够安心专注于学业。感谢各位任课老师的悉心教诲，你们传授的专业知识将成为我人生中宝贵的财富，为未来的工作和生活指明方向。

最后，我要感谢我的家人，是你们的一直陪伴在我身边，给予我无尽的关爱与支持，每当我遇到困难与挫折时，感谢你们对我的鼓励，让我勇敢面对。

回首这段时光，心中充满感激与不舍。然而，人生就像一场旅程，我们总是在不断地告别与启程。愿我们在未来的岁月里，不忘初心，砥砺前行，继续书写人生的华章。