

类号: (F224.0, O211.6)

单位代码: 10363

密 级: 公开

学 号: 2221010115

题 目 不确定环境下政府最优税收和  
债务问题研究

英文并列

题 目 Research on the Problem of Optimal  
Government Taxation and Debt under  
Uncertain Environment

学生姓名: 张桂银

指导教师: 费为银 教授

专 业: 金融

研究方向: 金融风险管理

论文答辩日期: 2025 年 5 月 14 日

# 安徽工程大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：我恪守学术道德，崇尚严谨学风。所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已明确注明和引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品及成果的内容。论文为本人亲自撰写，我对所写的内容负责，并完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

学位论文作者签名：张桂银

日期：2025年5月14日

## 安徽工程大学学位论文版权使用授权书

学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅或借阅。本人授权安徽工程大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保密 ☐，在 \_\_\_\_ 年解密后适用本版权书。

本学位论文属于

不保密 ☒。

学位论文作者签名：张桂银

日期：2025 年 5 月 14 日

指导教师签名：李强

日期：2025 年 5 月 14 日

# 不确定环境下政府最优税收和债务问题研究

## 摘 要

近年来，中国经济在高质量发展轨道上稳步前行，税制改革与债务工具成为宏观调控的关键抓手。一方面，增值税留抵退税、研发费用加计扣除等结构性减税政策持续深化，叠加个人所得税改革与社保降费措施，显著优化了市场主体活力，但税制调整的动态性与政策退出的不确定性加剧了税收环境复杂性；另一方面，地方政府专项债规模突破 25 万亿元，法定债务率虽低于国际警戒线，但隐性债务转化压力与项目收益平衡风险仍对财政可持续性构成挑战。由此来看，如何合理地调控政府债务水平并及时调整税收政策对我国经济的持续稳定发展具有重要的意义。

在探讨税收债务理论相关问题时，我们不得不面对现实世界中的各种不确定性。一方面，当下俄乌冲突、巴以冲突、新冠后遗症等都对全球经济体造成重创，全球货币面临贬值，黄金、原油、粮食等保值商品价格急剧攀升。在全球经济市场面临高通胀的大背景下，政府的税收和债务政策也会面临通货膨胀的冲击。另一方面，随着工业化进程的加速，温室气体排放急剧增加，对地球气候系统构成了前所未有的压力。气候变化的严峻形势不仅直接威胁到人类生存环境的稳定与安全，还通过复杂的经济链条，对全球债务和税收体系产生了深远的影响。

鉴于此，本文在不确定环境下，分别考虑了通胀不确定因素和气候灾难不确定因素，建立了最优税收和债务的模型。首先，本文利用通胀过程对名义 GDP 过程进行折现，在正常制度（不发生政府违约）下，利用鞅表示定理等随机分析理论推导通胀不确定环境下政府实际债务价值的演化的动力学方程，并利用动态规划原理和伊藤引理推导出通胀不确定环境下满足实际政府价值最大化的哈密尔顿-雅可比-贝尔曼(Hamilton-Jacobi-Bellman, HJB)方程，再对 HJB 方程取一阶条件，得到最优控制变量的表达式并代入到 HJB 方程中将其转化为常微分方程。接着，利用违约时与正常制度下实际政府价值的关系，推导出在违约情况下满足实际政府价值最大化的 HJB 方程。结合数值模拟分析通胀不确定对政府债务和税收的影响。

其次，本文将气候灾难以泊松跳的形式纳入 GDP 方程中，以此来刻画自然灾害对 GDP 的冲击。鉴于泊松跳的到达率与温度之间存在显著关联，本文构建气候灾难与温度之间的关联方程。此外，考虑到气候灾难对投资者风险偏好及市场预期的深远影响，本文构建了包含气候因素影响的随机贴现因子方程，以全面揭示气候灾难对资产定价及宏观经济决策的复杂作用机制。在此基础上，本文运用伊藤引理和动态规划原理，推导出了在气候灾难下家庭最优决策的价值函数。接着，本文利用 Wind 数据库提供的 2003 年 12 月 31 日至 2023 年 12 月 31 日年度一般政府总债务占 GDP 比重的样本数据，通过数值模拟方法，深入探讨了气候因素作用下政府最优税收与债务策略。最后，对全文进行了总结和研究展望。

**关键词：**通货膨胀，气候灾难，最优税收和债务，金融市场，动态规划，债务容量

# RESEARCH ON THE OPTIMAL TAXATION AND DEBT PROBLEMS OF GOVERNMENTS IN UNCERTAIN ENVIRONMENTS

## ABSTRACT

In recent years, China's economy has been steadily moving forward on the track of high-quality development, and tax reform and debt instruments have become the key levers for macroeconomic control. On the one hand, structural tax reduction policies such as value added tax refund and additional deduction of research and development expenses have continued to deepen, and the individual income tax reform and social security fee reduction measures have significantly optimized the vitality of market entities, but the dynamic nature of tax system adjustment and the uncertainty of policy withdrawal have also exacerbated the complexity of the tax environment. On the other hand, the scale of local government special bonds exceeded 25 trillion yuan, and although the statutory debt ratio was lower than the international warning line, the pressure of implicit debt conversion and the risk of project income balance still pose challenges to fiscal sustainability. From this point of view, how to rationally regulate the level of government debt and adjust the tax policy in a timely manner is of great significance

to the sustained and stable development of China's economy.

When discussing the issues related to tax debt theory, we have to face various uncertainties in the real world. On the one hand, the current Russia-Ukraine conflict, the Palestinian-Israeli conflict, and the sequelae of the new crown have all dealt a heavy blow to the global economy, with global currencies facing depreciation and the prices of gold, crude oil, grain and other value-preserving commodities rising sharply. Against the backdrop of high inflation in the global economic market, the government's tax and debt policies will also face inflationary shocks. On the other hand, with the acceleration of industrialization, greenhouse gas emissions have increased dramatically, posing unprecedented pressure on the Earth's climate system. The severe situation of climate change not only directly threatens the stability and security of the human living environment, but also has a profound impact on the global debt and tax system through complex economic chains.

In view of this, this paper considers the uncertainties of inflation and climate catastrophe in an uncertain environment, and establishes a model of optimal taxation and debt. Firstly, this paper uses the inflation process to discount the nominal GDP process, and under the normal system (no government default), the kinetic equation for the evolution of the real debt value of the government under the uncertain inflation environment is derived by using the stochastic analysis theory such as

the martingale representation theorem, and the HJB equation that satisfies the maximization of the real government value in the uncertain inflation environment is derived by using the dynamic programming principle and Ito's lemma, and then the first-order condition is taken for the HJB equation. The expressions of the optimal control variables are obtained and substituted into the HJB equation to transform them into ordinary differential equations. Then, using the relationship between the default and the actual government value under the normal system, the HJB equation that satisfies the maximization of the real government value in the case of default is derived. Combined with numerical simulation, the impact of inflation uncertainty on government debt and tax revenue is analyzed.

Secondly, this paper incorporates climate disasters into the GDP process in the form of Poisson jumps, so as to characterize the impact of natural disasters on GDP. In view of the significant correlation between the arrival rate of Poisson jump and temperature, this paper constructs a correlation model between climate catastrophe and temperature. In addition, considering the far-reaching impact of climate disasters on investors' risk appetite and market expectations, this paper constructs a stochastic discount factor model including the impact of climate factors to fully reveal the complex mechanism of climate disasters on asset pricing and macroeconomic decision-making. On this basis, Ito's lemma

and dynamic programming principles are used to derive the value function of family optimal decision-making under climate disaster environment. Then, this paper uses the sample data of total general government debt to GDP from December 31, 2003 to December 31, 2023 provided by the Wind database, and discusses the optimal government tax and debt strategies under the action of climate factors through numerical simulation methods. Finally, the full text is summarized and the research prospect is discussed.

Zhang guiyin (Applied finance)

Supervised by Fei Weiyin

KEY WORDS: Inflation, Climate catastrophes, Optimal tax and debt, Financial market, Dynamic programming, Debt capacity

## 目 录

|                                       |    |
|---------------------------------------|----|
| 摘 要 .....                             | I  |
| ABSTRACT .....                        | IV |
| 第 1 章 绪论 .....                        | 1  |
| 1.1 研究背景和意义 .....                     | 1  |
| 1.2 国内外研究现状 .....                     | 2  |
| 1.2.1 债务与税收的研究 .....                  | 2  |
| 1.2.2 通胀不确定问题的相关研究 .....              | 4  |
| 1.2.3 气候的相关研究 .....                   | 5  |
| 1.3 论文创新点 .....                       | 7  |
| 1.4 论文内容及安排 .....                     | 9  |
| 第 2 章 通胀不确定环境下政府最优税收和债务问题研究 .....     | 10 |
| 2.1 基本模型框架 .....                      | 10 |
| 2.1.1 基本假设 .....                      | 10 |
| 2.1.2 金融市场 .....                      | 13 |
| 2.2 最优政府计划 .....                      | 17 |
| 2.2.1 正常制度 .....                      | 17 |
| 2.2.2 违约制度( $\bar{B}_t < B_t$ ) ..... | 19 |
| 2.2.3 最优税收和债务计划 .....                 | 20 |
| 2.3 数值模拟和经济学解释 .....                  | 22 |
| 2.5 本章小结 .....                        | 32 |
| 第 3 章 气候不确定下政府最优税收和债务的问题研究 .....      | 33 |
| 3.1 基本模型框架 .....                      | 33 |
| 3.1.1 基本假设 .....                      | 33 |
| 3.1.2 金融市场 .....                      | 34 |
| 3.2 最优政府计划 .....                      | 35 |
| 3.2.1 正常制度 .....                      | 35 |
| 3.2.2 违约制度( $\bar{B}_t < B_t$ ) ..... | 37 |

|                       |    |
|-----------------------|----|
| 3.2.3 最优税收和债务计划 ..... | 38 |
| 3.3 数值模拟与经济学解释 .....  | 39 |
| 3.4 本章小结 .....        | 46 |
| 第 4 章 总结和展望 .....     | 47 |
| 4.1 研究结论 .....        | 47 |
| 4.2 研究展望 .....        | 49 |
| 参考文献 .....            | 51 |
| 附 录 .....             | 57 |
| 附录 A .....            | 57 |
| 附录 B .....            | 64 |
| 硕士期间发表的论文 .....       | 65 |
| 致 谢 .....             | 66 |

# 第 1 章 绪论

## 1.1 研究背景和意义

在当前全球经济一体化不断加深的背景下，中国经济正步入一个充满挑战与机遇并存的新时代。作为宏观经济调控的两大核心支柱，税收政策和政府债务管理不仅关乎经济的稳定增长与社会公平的实现，更在维护国家财政健康、促进可持续发展中发挥着至关重要的作用。然而，近年来，中国经济在保持稳健增长的同时，也面临着通胀压力持续加剧与极端高温天气频发的挑战，这对政府的财政调控能力与宏观调控能力提出了前所未有的考验。

具体来看，全球经济环境的不确定性进一步加剧了这些挑战。受俄乌冲突、巴以冲突等诸多地缘政治因素的影响，全球经济遭受重创，主要国际货币面临贬值压力，黄金、原油、粮食等保值商品的价格迅速攀升。与此同时，全球通胀率持续攀升，特别是自 2023 年以来，主要发达经济体的通胀率已飙升至四十年来的最高点。高通胀环境使得各国政府在民生保障和国防安全方面的支出大幅增加，进一步加重了财政负担和债务压力，导致全球政府债务规模不断扩张。以 2023 年第四季度为例，我国的一般政府总债务占 GDP 比重为 79.05%，而英国和美国则分别高达 100.5%和 98%。尽管中国债务水平在横向比较中仍具相对优势，但纵向观察已处于历史高位区间，债务可持续性风险不容忽视。值得关注的是，持续存在的通胀压力正通过双重机制削弱财政韧性：一方面消费者价格指数（CPI）攀升直接影响税收实际购买力，另一方面企业利润压缩导致所得税税基波动加剧征管不确定性。然而，现有研究对通胀不确定性如何影响税收和债务，尚未建立完整的理论解释体系。本文立足这一现实需求，尝试在通胀不确定性框架下重构政府税收与债务决策的理论分析框架，以期和政策制定者提供更具动态适应性的决策参考。

与此同时，极端高温天气作为全球气候变化的直观且显著的信号，正对农业、工业、能源等多个经济领域造成了深远影响。在财政层面，它带来双重压力：一方面，高温天气不仅增加了政府的灾害救助与公共卫生支出，加剧了财政压力。另一方面，通过影响劳动力市场与消费行为，改变税收结构与税源，

考验政府的债务管理能力与税收制度的适应性。例如，在高温天气下，农业产量下降、工业生产受限、能源消费增加，这些变化直接冲击了政府的财政收入。此外，高温还通过影响就业市场与消费者信心，间接削弱税收的征收能力与政府的偿债能力。在此背景下，对政府的政策制定与执行能力提出了更高的要求。

值得注意的是，现有研究对于通胀不确定性和气候不确定性如何共同影响税收和债务，尚未构建起完整的理论解释体系。本文立足这一现实需求，尝试将通胀与气候因素联系起来，在通胀不确定性和气候不确定性的双重框架下，重构政府税收与债务决策的理论分析框架。而且，在此背景下，研究债务与税收在通胀和气候影响下的作用机制与调控策略，不仅是对当前经济挑战的积极回应，更是推动中国经济高质量发展、实现长期繁荣稳定的战略考量。

## 1.2 国内外研究现状

### 1.2.1 债务与税收的研究

债务与税收理论一直是政府部门和学术界普遍关注的话题。在学术研究领域很多学者发表了他们自己的看法，其中很多讨论都集中在税收和债务的关系上。Green<sup>[1]</sup>认为税收与借债具有替代性，当地方政府面临税收不足时，不得不转而借债。Kopczewska 等<sup>[2]</sup>分析欧洲 34 个国家的各种税制对国债的影响，结果表明，随着税收水平的提高，政府负债水平也随之下降。Casalin 等<sup>[3]</sup>指出，如果政府难以实现新增税收的快速增长，债务可能变得不稳定。Wen 等<sup>[4]</sup>的实证分析表明，对地方政府实施税收限制（如限制税率、限额等），会加大政府财政负担，从而促使政府寻找新的税收来源，进而导致负债增多。相比下，Babina 等<sup>[5]</sup>利用美国地方债市场数据，实证分析了税收激励对地方债收益率的影响，结果表明，减税会导致地方债持有人对债务风险的敏感性增强，从而导致政府发行债券的成本上升。Creedy 和 Scobie<sup>[6]</sup>的实证结果显示，减税将导致政府违约的风险上升，进而对政府负债产生一定的冲击。

此外，国内学者关于政府税收和债务问题也做了大量研究。黄春元和毛捷<sup>[7]</sup>从转移支付的视角出发，对财政状况与地方政府债务之间的关系进行了深入的实证检验。研究结果显示，财政困难并未触发地方债务的迅猛增长，相反，它

在一定程度上对地方债务规模起到了抑制作用。郭庆旺<sup>[8]</sup>和叶青及陈铭<sup>[9]</sup>等研究表明,我国的税收减免政策可能会加大地方政府的财政负担,导致地方政府的赤字水平不断上升,进而对地方政府的负债水平产生巨大的冲击。此外,甘行琼和雷正等<sup>[10]</sup>的研究发现,减税对各区域的税收效应是不一样的,特别是在工业结构水平较高的区域,减税并不会导致其财务状况的恶化。另外,张牧扬等<sup>[11]</sup>以地方政府债券为研究对象,通过实证研究发现,降低增值税税率并未对地方政府的举债行为产生影响,相反还会对其产生一定的负面影响。

综上所述可以看出,上述学者的研究工作主要在分析税收与债务的关系,但没有考虑债务违约问题。事实上,各国为了防范经济衰退,经常超出“债务限额”发行政府债务,这种行为直接触发了主权债务危机,并通过金融网络迅速蔓延,最终演变为更为严重的国际金融危机。对此,国内外学者对政府债务违约理论进行了广泛研究。Eaton 和 Gersovitz<sup>[12]</sup>研究发现,主权国家一旦违约,将被永久地排除在资本市场之外,并且贷款人将设立一个信贷上限来限制借款人的违约,超过这个上限,贷款人将不愿意增加贷款。Aguilar 和 Gita<sup>[13]</sup>构建了一个小型开放经济中债务和违约的定量模型,并得出了关于新兴市场的四个经验规律:违约发生在均衡状态,利率是逆周期的,净出口是逆周期的,利率和经常账户是正相关的。江时学<sup>[14]</sup>分析了阿根廷的主权债务危机,并得出的结论:阿根廷在债务危机发生后的增长速度比债务危机前要慢得多。Stuzenegger<sup>[15]</sup>建立了一个跨国的经济增长模型,结果表明,当发生债务拖欠时,美国的经济增长率将降低约 0.6%。徐明棋<sup>[16]</sup>认为,在短期内,欧洲主权债务危机会给经济带来负面冲击。

此外,政府的情绪对债务也会产生重要影响。在静态模型的框架下,Bulow 和 Rogoff<sup>[17]</sup>原先主张政府永远不应该回购自己的债务。然而,当考虑到风险厌恶型债务投资者的存在时,这一结论不再适用。特别地,当信贷市场上的投资者对债券要求的风险溢价高到一定程度时,政府通过回购债券主动减少未偿债务反而成为最优的经济选择。潘爱玲等<sup>[18]</sup>基于中国上市公司的实际情况,考察了高管过度自信在公司并购溢价中的作用,并探讨了债务容量在这一过程中所起的中介作用。研究结果表明,高管过度自信倾向于带来较高的并购溢价;当公司债务容量较高时,高管的过度自信会对公司的并购溢价产生积极影响。虽

然潘爱玲等<sup>[18]</sup>的研究多是以公司为对象，但是政府情绪对于债务容量的影响却具有一定的参考价。Aguiar 和 Amador<sup>[19]</sup>以及 DeMarzo 等<sup>[20]</sup>引入了政府的不耐烦因素，分析了其对政府债务的影响。

通过梳理相关文献发现，目前关于地方政府债务和税收问题的研究较为丰富，但针对最优税收和债务的研究仍处于初步探索阶段。Barro<sup>[21]</sup>构建了一种公共债务理论框架，该框架将李嘉图等价定理作为核心命题，并指出税收的超额负担对征税时间的依赖是确定债务发行最优时间路径的关键因素。Lucas 和 Stokey<sup>[22]</sup>深入研究了两种多周期经济中的最优税收政策结构及其时间一致性的问题。这两种经济分别是纯易货经济和货币经济，二者均不涉及资本货物的交易。在这两种情境下，政府均须选择适当方式为政府支出进行融资。Abel 等<sup>[23]</sup>以及 Abel 和 Panageas<sup>[24]</sup>在基本预算盈余永远为零的代际重叠模型中分析了最大预算可行政府债务。Bohn<sup>[25]</sup>深入探讨了政府赤字对财政政策的影响，并巧妙地运用随机贴现因子来全面评估政府债务状况，为我们理解经济运行的复杂性和政府财政政策的制定提供了宝贵的视角和见解。Bolton 和 Huang<sup>[26]</sup>研究了在资本市场发生摩擦时的最优资本结构问题。并提出一国的最优资本结构需要在通胀稀释成本和外币债务的预期违约成本之间进行权衡。Jiang 等<sup>[27]</sup>研究出政府在保障债券持有者和保障纳税人免受产出风险之间存在权衡。如果政府通过发行无风险零  $\beta$  债务来保障债券持有者，则他们在经济衰退期间通过降低税率或增加政府支出来保障纳税人的能力是有限的。Jiang 等<sup>[28][29]</sup>和费为银等<sup>[30]</sup>研究了在税收扭曲的背景下，如何制定最优税收和政府借贷计划。

### 1.2.2 通胀不确定问题的相关研究

鉴于政府税收与债务水平深受通胀不确定性影响，这一经济现象已成为学术界的研究焦点。众多学者围绕通胀与财政政策的关系展开了深入研究，其成果为本文的探索提供了重要的理论支撑和实践启示。张雪莹等<sup>[31]</sup>在新凯恩斯 DSGE 模型框架中引入政府债务变量，进而探讨不同政府债务规模情况下，面对货币政策冲击产出与通货膨胀率的不同动力学响应路径。Bhattarai 等<sup>[32]</sup>揭示了在积极的货币政策和被动的财政政策制度下，通货膨胀密切遵循通货膨胀目标的路径，货币政策对通货膨胀的更强反应降低了通货膨胀对非政策冲击的均衡

反应。Brennan 和 Xia<sup>[33]</sup>研究了在通胀环境下投资者的资产配置问题，并且以一种简单封闭形式解的形式给出了投资者的最优投资策略。姚海祥等<sup>[34]</sup>考虑通货膨胀因素下，利用均值——方差模型研究了连续时间投资组合选择问题，并运用随机最优控制和动态规划原理得到了问题的解析解，进而求解出原均值——方差模型的有效投资策略及有效边界的解析表达式。Fei 和 Fei<sup>[35]</sup>分析通胀如何影响企业家最优消费和投资组合策略。费为银等<sup>[36]</sup>研究了在通胀等因素对于带激励费的对冲基金管理者最优投资策略的影响。费为银等<sup>[37]</sup>探讨了带有递归偏好的投资者在考虑通胀情形下的最优消费和投资组合，通过考虑模型误定和通胀的随机波动对消费和投资组合带来的影响。费晨等<sup>[38]</sup>深入研究了企业家在实业投资过程中的最优消费和组合投资策略选择问题，并利用随机分析方法，得出了通胀下的企业家执行实业投资项目期权投资前后的最优消费以及允许对冲情形下的最优投资组合选择策略。此外，分析通胀的不确定性对不同风险厌恶企业家的最优消费和投资组合产生的影响。费为银<sup>[39]</sup>研究在通胀下，代理人退休选择、最优消费和投资组合决策问题。费为银等<sup>[40]</sup>在通胀环境下通过动态规划原理构建了以最优工作努力策略和股权激励为控制变量的满足公司和高管利益最大化的 HJB 方程并进行了求解，分析了通胀风险对高管的股权激励和工作努力策略的影响。Fei 等<sup>[41]</sup>研究通货膨胀风险下的最优动态契约问题，并发现通货膨胀风险会影响代理的最优报酬，这取决于企业在市场中的地位。

### 1.2.3 气候的相关研究

在人类文明的长河中，气候一直是塑造地球环境和人类生活方式的基石。然而，随着工业化进程的迅猛推进和人类活动的无限制扩张，地球的气候系统正面临着史无前例的挑战。温室气体如二氧化碳等的大量排放，如同给地球穿上了一层厚厚的“保温服”，导致全球气温持续攀升，极端天气事件如洪水、干旱、飓风等频发，生态系统遭受前所未有的破坏，生物多样性面临严重威胁。龚瑶与严婷<sup>[42]</sup>的模拟研究更是预警，到 2050 年，全球大气温度较 2000 年可能攀升约 2 摄氏度，这一数据再次敲响了全球变暖的警钟。同时，众多权威科学研究，包括 Grinsted 等<sup>[43]</sup>、Emanuel<sup>[44]</sup>及 Kossin 等<sup>[45]</sup>的研究成果，均有力地证实了这些自然灾害与气温变暖之间的紧密联系。

在此背景下，气候灾难对政府财政，特别是税收和债务的影响日益显著。一方面，为了应对气候灾害，政府需要投入巨额资金用于防灾、减灾及灾后重建，这无疑加重了财政负担，导致债务规模不断扩大。另一方面，气候变化导致的经济波动和资产价值下降，又进一步削弱了政府的税收基础，加剧了财政困境。首先，从气候灾难对债务的影响来看，国内外学者对其进行了深入的研究。基于 1970-2002 年的跨国数据分析，Rasmussen<sup>[46]</sup>发现，自然灾害导致同年真实的 GDP 增长中位数下降 2.2%，并增加了经常账户赤字和公共债务。郭琨等<sup>[47]</sup>研究表明，气候风险能使我国国债发行规模大幅增加，进而导致其融资成本上升。气候变化不仅会对债务规模造成直接的冲击，还会通过多种复杂的途径，深刻地影响到各国的债务和金融系统的稳定。特别是，突然发生的天气灾害和持续时间长的天气，会给各种有形财产带来无法估量的损失。这种损失不但会使居民与公司的资产基数变得更小，也会使他们的抵押财产贬值，进而影响到整个金融系统的稳定。这一进程不但增加了对家庭和公司的贷款违约风险（Klomp<sup>[48]</sup>；Dafermos 等<sup>[49]</sup>），还通过影响银行的信贷决策机制，进一步抑制了市场流动性，并促使银行降低其风险偏好（吕勇斌等<sup>[50]</sup>）。根据 Berg 和 Schrader<sup>[51]</sup>以及 Hosono 等<sup>[52]</sup>的研究显示，面对气候灾难的冲击，银行倾向于采取更为保守的借贷策略，减少信贷供给，以规避潜在风险。这种调整不仅使得受灾家庭和企业面临更为严峻的融资挑战，还因信贷违约率的攀升而直接冲击了银行的经营稳健性，从而形成了一个恶性循环。值得注意的是，相较于发达国家，发展中国家在气候灾难后的银行借贷行为调整更为显著（David<sup>[53]</sup>）。这主要是由于发展中国家在保险覆盖、风险管理体系及灾后恢复能力等方面相对薄弱，导致未保险资产损失对经济的冲击更为剧烈。因此，在应对气候灾难的过程中，发展中国家面临着更为严峻的挑战。

其次，气候灾难对税收的影响同样不容忽视。随着极端气候事件的增多，随着全球极端气候事件的频发，如洪水、干旱、飓风等，政府不得不投入大量资金用于防灾、减灾及灾后重建工作，这一举措直接加重了政府的财政负担，进而对税收体系产生了显著影响。同时，气候灾难通过影响经济结构和产业布局（Addoum 等<sup>[54]</sup>），对税基和税源造成了间接而深远的冲击。农业、渔业等传统行业，作为税收的重要来源之一，其生产活动高度依赖于自然气候条件。然

而，在气候变化的背景下，这些行业频繁遭受极端天气事件的打击，导致产量下降、成本上升（李勇和童绍玉<sup>[55]</sup>；Wang 等<sup>[56]</sup>），进而削弱了其税收贡献能力。这种变化不仅影响了政府的税收收入，还可能引发一系列连锁反应，如公共资产损失、国有企业资产负债表恶化等，进一步加剧财政压力。

然而，挑战往往伴随着机遇。面对气候变化的严峻形势，全球范围内正加速推进绿色转型和可持续发展的进程（Cunha 等<sup>[57]</sup>；Filippini 等<sup>[58]</sup>），促使企业从棕色（碳密集型）向绿色（低碳）转型（De Angelis 等<sup>[59]</sup>），并通过提高碳密集型企业的资本成本来激励其减少碳排放。这一转型为清洁能源、环保产业等绿色经济领域带来了前所未有的发展机遇，成为新的税收增长点（Budolfson 等<sup>[60]</sup>）。我国“碳达峰、碳中和”目标的提出，更是激发了学术界对绿色税收体系构建的热情。王书平<sup>[61]</sup>的研究揭示了碳税税率冲击在中长期内对于提升环境质量的积极作用。陈国进等<sup>[62]</sup>则指出，碳税政策有助于减排并推动产业低碳转型，尽管短期内可能伴随“滞胀”风险，但碳税与绿色再贷款政策的协同作用更为显著。张景华<sup>[63]</sup>深入探讨了碳税的基本原则与实施限制，强调了其在促进节能减排、构建环境友好型社会中的关键作用。唐晓旺<sup>[64]</sup>提出应加快构建支持清洁能源建设的绿色税收体系，以减少二氧化碳排放并实现清洁能源对传统石化能源的替代。葛玉御<sup>[65]</sup>进一步将绿色税收细分为约束性与激励性两类政策工具，前者如消费税、资源税等旨在减少污染与开采的外部成本，后者则利用税收优惠措施激励环保行为和资源节约。然而，尽管现有研究已经为我们提供了关于气候对债务和税务的影响的重要洞见，但它们在探讨灾难发生或高温情境下，政府债务累积的动态过程、达到债务容量所需的时间，以及政府应采取的应对措施方面，仍存在研究空白。对此本文对其进行了研究，以期对政策制定和风险管理提供更全面的参考。

### 1.3 论文创新点

本文在 Jiang 等<sup>[28]</sup>构建的最优税收与债务模型基础上，创新性地引入通货膨胀因素以及气候灾难因素，由此构建出在通胀不确定性环境和气候灾难不确定下的政府最优税收与债务模型。基于该模型，本文深入剖析了通胀不确定性

以及气候灾难分别对政府最优税收策略和债务管理决策产生的具体影响，并据此提炼出一系列具有现实指导意义的经济学结论，旨在为政府制定科学合理的管理政策与决策方案提供有力参考依据。与 Jiang 等<sup>[28]</sup>以及其他参考文献相比，本文的创新之处主要体现在以下三个方面：

（1）就研究问题而言，尽管已经有大量文献从政府税收和债务的视角出发研究（参见 Barro<sup>[21]</sup>；Lucas 和 Stokey<sup>[22]</sup>；Abel 等<sup>[23]</sup>；Abel 和 Panageas<sup>[24]</sup>；Bohn<sup>[25]</sup>；Jiang 等<sup>[28]</sup>；Jiang 等<sup>[29]</sup>），但这些研究大多未充分考虑通胀不确定性与气候灾难的影响，尤其是在政府最优税收和债务设计领域仍存在显著空白。本文的创新之处在于，将通胀不确定性这一关键因素系统性地引入政府最优税收和债务设计的研究框架中，构建了一个全新的通胀不确定环境下的动力学和最优财政模型。通过这一模型，本文深入剖析了通胀不确定性如何影响政府的税收和债务决策机制，揭示了通胀对财政政策的复杂作用路径。此外，本文还开创性地将气候灾难纳入政府最优税收和债务设计的研究范畴，不仅丰富了财政政策的研究内容，还通过构建气候灾难与温度之间的关联模型，创新性地揭示了气候变化对政府税收和债务的深远影响。这一视角的转换，使得本文的研究更加贴近现实世界的复杂性和不确定性，为应对气候变化下的财政挑战提供了新的思路和方法。

（2）在研究方法方面，本文在模型构建上采用了跳扩散理论，这一理论在金融市场和风险管理领域有着广泛的应用，但在财政政策研究中尚属少见。通过跳扩散理论，本文对家庭价值动力学进行了更为精细的刻画，揭示了家庭在面对气候灾难等突发事件时的价值变化特征。同时，通过运用随机分析、动态规划原理等数学方法，推导出家庭实际价值的 HJB 方程并求解，从而进一步深化了对政府税收和债务相关机制的理解。

（3）从管理学意义上看，本文在理论研究的基础上，针对中国的实际情况进行了深入的实证研究。通过对中国债务和税收数据的分析，本文揭示了通胀和气候灾难对中国政府财政决策的具体影响，并提出了相应的政策建议。这些政策建议不仅具有理论上的合理性，还具有较强的实践指导意义，为中国政府应对气候变化下的财政挑战提供了有力的支持。

## 1.4 论文内容及安排

基于上述分析,本文考虑在 Jiang 等<sup>[28]</sup>的最优税收和债务模型中分别引入通货膨胀和气候灾难,得到通胀不确定环境和气候灾难下政府最优税收和债务模型,并在此基础上分析通胀不确定性对政府最优税收和债务的影响,以及气候灾难对政府最优税收和债务的影响,从而得出一些具有一定实际意义的经济学结论,以向政府提供合理的管理和决策建议。

本文结构安排如下:

第 1 章 绪论部分主要阐述了本课题的研究背景与意义,综述了国内外关于该课题的研究现状和进展,突出了文章的创新之处,并概述了论文的总体规划。

第 2 章 构建一个在通货膨胀背景下政府最优税收和债务模型,试图分析通胀对我国最优税收和债务的影响。首先利用随机分析理论推导通胀不确定环境下政府实际债务价值的演化动力学方程。接着,利用动态规划原理推导出通胀不确定环境下最优实际家庭价值的 HJB 方程。最后,对政府最优税收和债务进行数值模拟,并结合图像分析给出一定的经济学解释和研究结论。

第 3 章 纳入了气候灾害因素,构建 GDP 跳扩散模型和包含气候因素影响的随机贴现因子模型。为了更精确地揭示气候灾难与具体气候指标(如温度)之间的内在联系,我们进一步构建了气候与温度的关联模型。随后,运用动态规划原理,我们推导出了在气候灾难环境下家庭最优决策的价值函数(HJB 方程)。最后,我们利用 Wind 数据库提供的 2003 年 12 月 31 日至 2023 年 12 月 31 日年度一般政府总债务占 GDP 比重的样本数据,通过数值模拟方法,深入探讨了气候因素作用下政府最优税收与债务策略。

第 4 章 对全文进行总结和展望。

## 第 2 章 通胀不确定环境下政府最优税收和债务问题研究

本章基于现实经济环境中通货膨胀冲击的普遍性，构建了一个通胀背景下的政府最优税收和债务模型，旨在系统分析通胀对我国最优税收和债务政策的动态影响。首先，本文分别刻画了正常制度下 GDP 满足的随机微分方程。其次，利用随机分析理论，推导了通胀不确定环境下政府实际债务价值的演化动力学方程，揭示了通胀波动对债务实际价值的动态影响机制。

接着，基于动态规划原理，本文推导出通胀不确定环境下最优实际家庭价值的 HJB 方程，并进一步结合违约与正常制度的关系，推导出违约情况下的 HJB 方程。此外，通过一阶条件，本文推出了正常制度下最优实际家庭价值满足的方程。最后，通过对政府最优税收和债务进行数值模拟，生成相关图像，并结合图像分析给出经济学解释和研究结论。

### 2.1 基本模型框架

#### 2.1.1 基本假设

假设时间  $t \in [0, +\infty)$ ，政府在为一系列外生随机政府支出提供资金的同时，通过征税、发行和偿还债务，以及在预期 GDP 增长率中对冲风险，使家庭收益的实际净现值最大化。本文将在 Jiang 等<sup>[28]</sup>研究框架基础上拓展，根据费为银等<sup>[30][36]</sup>及其中的参考文献的通胀折现思路，将通胀因素引入我们模型中，分析其对最优税收和债务的影响。本文描述了两组相互关联的“制度”。在“正常”的体制下，政府偿还债务并选择征税多少。但政府随时都有可能拖欠债务，其后果是进入一个永远无法摆脱的“违约”机制。以下所有过程都定义在完备带流概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathbf{P})$  且  $\mathcal{F}_t = \sigma\{Z_s^m, Z_s^h, Z_s^L, 0 \leq s \leq t\}$ ， $Z_t^m$ 、 $Z_t^h$  和  $Z_t^L$  都是一维标准布朗运动。其中  $Z_t^m$  为系统冲击， $Z_t^h$  为特殊冲击， $Z_t^L$  为通胀的风险源。这里考虑三个风险源并假设它们之间相关系数都为零，即

$$dZ_t^m dZ_t^L = dZ_t^h dZ_t^L = dZ_t^m dZ_t^h = 0$$

假设在正常制度（不违约）下，名义 GDP  $\{\tilde{Y}_t, t \geq 0\}$  是外生变量，并服从几何 Brown 运动：

$$\frac{d\tilde{Y}_t}{\tilde{Y}_t} = \mu_Y dt + \sigma_Y dZ_t^Y$$

其中  $Z_t^Y$  在客观测度  $\mathbf{P}$  下是标准布朗运动， $\mu_Y$  是名义预期 GDP 增长率， $\sigma_Y > 0$  是名义波动率，并且  $Y_0 > 0$ 。

由于 GDP 将会受到没有风险溢价的特殊冲击，也受系统冲击的影响。所以在不失一般性的前提下，可以将产出冲击  $dZ_t^Y$  在客观测度  $\mathbf{P}$  下分解成下面形式： $dZ_t^Y = \sqrt{1-\rho_m^2} dZ_t^h + \rho_m dZ_t^m$ ，其中  $\rho_m$  是产出冲击  $dZ_t^Y$  与总的冲击（市场冲击） $dZ_t^m$  的相关系数。因此名义产出过程  $\{\tilde{Y}_t, t \geq 0\}$  如下：

$$\frac{d\tilde{Y}_t}{\tilde{Y}_t} = \mu_Y dt + \psi_m dZ_t^m + \psi_h dZ_t^h$$

其中  $\psi_m$  和  $\psi_h$  是系统和特殊波动系数： $\psi_m = \rho_m \sigma_Y$ ， $\psi_h = \sqrt{1-\rho_m^2} \sigma_Y$ 。

假设消费篮子价格  $\{L_t, t \geq 0\}$  遵循几何布朗运动：

$$\frac{dL_t}{L_t} = d_L dt + \sigma_L dZ_t^L$$

其中  $d_L$  是预期通胀率， $\sigma_L > 0$  是通胀波动率。

用价格水平  $L_t$  将名义价值或价格折算成真实的价格或价值。令  $Y_t = \tilde{Y}_t / L_t$  表示为实际 GDP，运用 Itô 公式，可得：

$$\frac{dY_t}{Y_t} = a_1 dt + \psi_m dZ_t^m + \psi_h dZ_t^h - \sigma_L dZ_t^L \quad (2.1)$$

其中  $a_1 = \mu_Y - d_L + \sigma_L^2$  为实际的预期 GDP 增长率。

设  $\{\Gamma_t, t \geq 0\}$  为实际政府支出过程，外生的而且不会给家庭带来收益。假设在正常制度下  $\Gamma_t$  依赖于同期实际产出  $Y_t$ ： $\Gamma_t = \gamma_t Y_t$ ，其中  $\gamma_t$  是外生的。为了表示简洁，设  $\gamma_t = \gamma \in [0, 1]$ ，因此，在正常机制下，政府实际支出与实际 GDP 成正比。政府可以通过税收和债务为其实际支出提供资金。设实际债务过程为  $\{B_t, t \geq 0\}$ ，

实际税收为  $\{T_t, t \geq 0\}$ ，且假设税收是扭曲的。设  $C_t = C(T_t, Y_t)$  表示为在正常制度政府征税时单位消费品的实际无谓损失。

假设实际无谓损失函数  $C(T_t, Y_t)$  在实际产出与实际税收下一阶齐次的，即：

$$C_t = C(T_t, Y_t) = c(\tau_t)Y_t$$

其中  $\tau_t = T_t / Y_t$  为税率，假设按照比例计算的实际无谓损失  $c(\tau)$  是递增的、凸的和光滑的。按照比例计算的实际无谓损失函数是关于税率的二次函数：

$$c(\tau) = \frac{\varphi}{2} \tau^2 \quad (2.2)$$

其中参数  $\varphi > 0$  是衡量由扭曲性税收引起的无谓成本。

因为在任何时间的税收不能超出同期实际净产出  $Y_t - \Gamma_t$ ，因此需要  $T_t \leq \bar{\tau} Y_t$ ，这相当于有关税率的约束：

$$\tau_t \leq \bar{\tau} \quad (2.3)$$

其中  $\bar{\tau}$  是在正常制度下最大可行税率。

其次，本文将对违约制度进行介绍。违约导致产出损失，这意味着经济活动的相关中断。设  $\hat{Y}_t$  表示违约制度下实际 GDP， $T^D$  表示政府违约的临界时间。根据 Aguiar 和 Gopinath<sup>[66]</sup>，假设一旦政府违约，将完全不履行其债务，实际 GDP 立即从违约前的实际 GDP 水平  $Y_{T^D-} = \lim_{s \uparrow T^D} Y_s$  下降到  $\hat{Y}_{T^D} = \alpha Y_{T^D-}$ ，从此经济将永久地进入了违约状态。在违约制度 ( $t \geq T^D$ ) 下，政府不能发行债务 ( $B_t = 0$ )，而且产出  $\hat{Y}_t$  也服从与正常制度下相同的几何布朗运动： $\hat{Y}_t = \alpha Y, t \geq T^D$ ，其中， $\alpha \in (0,1)$  是常数。因此在违约制度下的实际产出等于正常制度实际产出的  $\alpha$  倍。设  $\hat{T}_t$  为在违约下的实际税收。因为政府在违约下没有债务，所以税收为政府支出提供资金： $\hat{T}_t = \Gamma_t = \gamma_t Y_t, t \geq T^D$ 。不管是在违约状态下，还是在正常情况下，实际政府支出都是外生的，并且只取决于外生的实际 GDP 过程。

与正常制度一样，在违约制度下，税收也是扭曲的。假设  $\hat{C}_t = \hat{C}(\hat{T}_t, \hat{Y}_t)$  表示为在违约下实际无谓损失， $\hat{C}(\hat{T}_t, \hat{Y}_t)$  也是实际产出  $\hat{Y}_t$  与实际税收  $\hat{T}_t$  一阶齐次的：

$$\hat{C}_t = \hat{C}(\hat{T}_t, \hat{Y}_t) = \hat{c}(\hat{\tau}_t)\hat{Y}_t$$

其中  $\hat{\tau}_t = \hat{T}_t / \hat{Y}_t$  是在违约下的平均税率，假设在违约下按照比例计算的实际无谓损失  $\hat{c}(\hat{\tau})$  是递增的、凸的和平滑的。按照比例计算实际无谓损失函数在两个制度下的关系式子：

$$\hat{c}(\cdot) = kc(\cdot)$$

其中参数  $k > 1$  衡量违约制度下的实际税收成本比正常制度下高多少。与正常制度一样，在违约制度下需要  $\hat{T}_t \leq \bar{\tau} \hat{Y}_t$  相当于下面有关税率的约束：

$$\hat{\tau}_t \leq \bar{\tau}, t \geq T^D \quad (2.4)$$

### 2.1.2 金融市场

在正常制度下，政府有以下投资和融资机会：(i)它可以通过精算公允定价的对冲合约来对冲其特殊风险；(ii)可以投资于市场组合；(iii)可以在国际市场上发债。假设债务是即刻到期并不断展期的，然而，由于市场是动态完备的，如果发行长期政府债务，结果也不会改变。

首先，本节引入特殊风险对冲资产。假设存在一个完全竞争的金融资产市场，该市场与特殊的扩散冲击  $Z_t^h$  完全相关。在  $t$  时持有一单位该资产的投资者不会收到预付款，因为承担特殊风险没有风险溢价。将该对冲合约的波动率参数归一化为 1。政府持有以名义货币计价的特殊风险对冲资产为  $-\Xi_t^h$ ，政府持有以实际货币计价的特殊风险对冲资产为  $-\Theta_t^h = \Xi_t^h / L_t$ ，特殊风险敞口为  $-\Theta_t^h dZ_t^h$ 。

接着，本节再引入一下股票市场投资组合和等价的股票市场期货合约。投资者、家庭和政府可以通过投资收益完全由总体冲击驱动的金融资产，来管理对总体冲击的风险敞口。股市投资组合就是一个很好的例子。假设股票市场收益可以表示为  $dR_t$ ，并且它在客观概率测度  $\mathbf{P}$  下服从升值率（Appreciation rate） $\mu_m$  和波动率  $\sigma_m$  的随机微分方程： $dR_t = \mu_m dt + \sigma_m dZ_t^m$ 。这个收益过程也可以写成这样  $dR_t = rdt + \sigma_m d\tilde{Z}_t^m$ ， $\tilde{Z}_t^m$  表示在风险中性测度  $\tilde{P}$  下的系统冲击为

$$d\tilde{Z}_t^m = \eta dt + dZ_t^m \quad (2.5)$$

其中市场投资组合的夏普比率  $\eta = (\mu_m - r) / \sigma_m$ ，方程(2.5)可以解释为股票市场上

一单位期货合约的收益。该期货合约在股票市场上的收益为零(参见 Cox 等<sup>[67]</sup>)。因此,厌恶风险的投资者需要支付  $\eta dt$  来承受一个单位的总冲击  $dZ_t^m$ 。一旦我们将漂移收益  $\eta dt$  与总冲击敞口  $dZ_t^m$  相加,投资者在投资与不参加期货合约之间是无差别的,这意味着期货合约的价值为零。为了利用无套利风险中性定价理论,现引入随机贴现因子(SDF),并用  $M_t$  表示:

$$\frac{dM_t}{M_t} = -r dt - \eta dZ_t^m \quad (2.6)$$

对任意终端时刻  $T$  的未定权益  $\hat{\xi}$ , 有  $\mathbf{E}(M_T \hat{\xi}) = \tilde{E}(e^{-rT} \hat{\xi})$ , 这里  $\tilde{E}$  是风险中性概率测度(Risk neutral probability measure)下取数学期望<sup>1</sup>。

对于系统风险对冲头寸,我们用  $-\Xi_t^m$  表示政府在时刻  $t$  持有名义货币计价股票市场期货,政府持有以实际货币计价股票市场期货为  $-\Theta_t^m = -\Xi_t^m / L_t$ , 风险敞口为  $-\Theta_t^m (\eta dt + dZ_t^m)$ 。政府也可以使用股市投资组合而不是股票期货来管理总体冲击,因为金融市场风险是完全支撑的。

### 2.1.3 政府预算与目标

在  $t=0$ , 已知初始债务水平  $B_0$ , 政府预算约束<sup>2</sup>如下:

$$B_0 \leq \mathbf{E} \int_0^{T^D} M_t [(T_t - \Gamma_t) dt - dU_t] \quad (2.7)$$

其中  $\{U_t, t \geq 0\}$  为未贴现(累积)向家庭一次性转移支付过程。不等式(2.7)的右侧是政府基本盈余的现值。不等式(2.7)的左侧是初始债务水平  $B_0$ 。在计算现值时,我们使用随机贴现因子  $M_t$  来贴现风险和时间性的收益。这里,  $\mathbf{E}$  是在客观概率测度下取数学期望。不等式(2.7)表明,在违约时间  $T^D$  之前发行的债务价值  $B_0$  不能超过政府基本盈余的现值。

设  $\varsigma + r$  表示家庭未来支付的折现率。当  $\varsigma = 0$  时,家庭很耐心,政府和市场

<sup>1</sup> 风险中性概率测度的构造可见 Karatzas 和 Shreve <sup>[68]</sup>, Section 1.7; 风险中性定价可见严加安<sup>[69]</sup>, 第 5.1.2 节。

<sup>2</sup>注意到,  $\mathbf{E} \int_0^{T^D} M_t [(T_t - \Gamma_t) dt - dU_t] = \tilde{E} \int_0^{T^D} e^{-rt} [(T_t - \Gamma_t) dt - dU_t]$ 。

同样也有耐心。在这种情况下，家庭和投资者都使用相同的 SDF  $M_t$  来评估各自的收益。然而，当家庭不耐烦（ $\varsigma > 0$ ）时，政府会预先负担消费并推迟偿还债务。总之，对于跨期贴现和风险规范，本文使用  $e^{-\varsigma t} M_t$  作为家庭评估其风险收益的有效 SDF，这与投资者用于定价收益的 SDF  $M_t$  价格不同。

接下来，本章将详细阐述政府的目标。政府致力于在应对一系列外生随机政府支出的同时，通过征税、发行和偿还无风险债务，以及在预期 GDP 增长率中对冲风险，来最大化家庭支付的净现值。设  $1_t^D$  为示性函数，在违约制度  $t \geq T^D$  下等于 1，在正常制度  $t < T^D$  下等于 0。在违约制度 ( $1_t^D = 1$ ) 下，政府没有债务，家庭持续以  $\hat{Y}_t - (\hat{T}_t + \hat{C}_t)$  速率获得收益，其中  $\hat{T}_t = \Gamma_t$ 。在正常情况下 ( $1_t^D = 0$ )，家庭连续以  $Y_t - (T_t + C_t)$  的比率获得收益，这等于 GDP  $Y_t$  与总税收成本 ( $T_t + C_t$ ) 之差。当政府发行债务  $dU_t$  并分配收益时，家庭也会收到一次性转移支付  $dU_t$ 。结合流动收益和家庭有效 SDF 的假设，我们得到了在风险中性测度  $\tilde{P}$  下家庭收益的净现值。政府的目标是选择一次性转移支付  $dU_t$ 、税率（ $\tau_t$  和  $\hat{\tau}_t$ ）以及以货币计价的特殊和系统风险对冲需求（ $\Theta_t^h$  和  $\Theta_t^m$ ）使得社会福利（家庭收益）最大化，其价值函数为：

$$P(B_t, Y_t) = \sup_{T_t \leq \bar{T}_t, dU_t, \Theta_t^m, \Theta_t^h} \tilde{E}_t \int_t^\infty e^{-(\varsigma+r)(s-t)} [dU_s + (Y_s - (T_s + C_s))(1 - 1_s^D)dt + (\hat{Y}_s - (\hat{T}_s + \hat{C}_s))1_s^D ds] \quad (2.8)$$

其中  $\varsigma \geq 0$  表示家庭的不耐烦程度。 $\tilde{E}_t$  表示关于  $\mathcal{F}_t$  在风险中性概率测度下的条件期望。

显然  $P_t = P(B_t, Y_t)$  表示家庭在  $t$  时间的延续价值函数。并设  $V_t = V(B_t, Y_t)$  为政府实际债务  $B_t$  和实际家庭价值  $P(B_t, Y_t)$  之和： $V_t = V(B_t, Y_t) = P(B_t, Y_t) + B_t$ 。

为了获得正常制度下的最优政策，本文需要家庭在违约制度下的价值函数，因为违约后家庭的价值函数会影响家庭在违约前的价值和最优决策。由于政府债务在违约制度下总是为零，家庭的价值函数在该制度下只取决于同期 GDP  $\hat{Y}_t = \alpha Y_t$ ，我们把  $\hat{P}(\hat{Y}_t)$  表示违约下家庭价值函数。因为违约代价很高，政府希望管理其状态依存债务的动态行为，以避免违约，这就产生了以下参与约束： $P(B_t, Y_t) \geq \hat{P}(\hat{Y}_t)$ 。

接下来本文将介绍李嘉图等价的情形。

在李嘉图等价的情况中，存在三种假定：（1）假设家庭耐心( $\varsigma = 0$ )；（2）假设在  $T^D = \infty$ ，政府承诺偿还债务；（3）假设无所谓损失设置为零。简化式(2.8)，可得家庭实际价值：

$$P_0 = \mathbf{E}(\int_0^\infty M_t [(Y_t - T_t)dt + dU_t]) \quad (2.9)$$

此时政府预算约束为：

$$B_0 \leq \mathbf{E} \int_0^\infty M_t [(T_t - \Gamma_t)dt - dU_t] \quad (2.10)$$

结合(2.9)和(2.10)，可以推出政府债务和家庭价值的总和：

$$V_0^{FB} = P_0 + B_0 = \mathbf{E} \int_0^\infty M_t (Y_t - \Gamma_t)dt \quad (2.11)$$

考虑一种金融资产，其现金流等于净产出过程  $\{Y_t - \Gamma_t = 1 - (1 - \gamma)Y_t, t \geq 0\}$ ，该金融资产的价值等于(2.11)的右边  $\mathbf{E} \int_0^\infty M_t (Y_t - \Gamma_t)dt$ ，设  $r_v$  和  $\xi$  分别为资产的预期收益和风险溢价，结合 SDF(2.6)式子，可得：

$$r_v = r + \xi = r + \beta \times (\mu_m - r) \quad (2.12)$$

其中  $\beta = \rho_m \sigma_Y / \sigma_m$ ，即该资产在市场投资组合收益上的回归系数，根据夏普比率，结合(2.12)，可以将风险溢价写成下面形式：

$$\xi = \rho_m \sigma_Y \eta = \psi_m \eta \quad (2.13)$$

因为税收和债务政策在这里是无关紧要的。所以，在李嘉图等价条件下，总价值  $V_t^{FB} = P_t + B_t$  等于该金融资产的价值，可得：

$$V_0^{FB} = \mathbf{E} \int_0^\infty M_t (Y_t - \Gamma_t)dt = \frac{(1 - \gamma)Y_0}{r_v - a_1}$$

为使上述积分收敛，我们要求预期回报  $r_v$  大于 GDP 增长率  $a_1$ ：  $r_v > a_1$ 。

## 2.2 最优政府计划

### 2.2.1 正常制度

首先，本节将介绍了政府动态债务和风险管理问题。在此基础上，分析了政府在内部区域为  $(\underline{B}_t \leq B_t \leq \bar{B}_t)$  和一次性转移支付区域  $(0 \leq B_t < \underline{B}_t)$  的决策。

名义债务过程  $\{B_{Nt}, t \geq 0\}$ ，名义税收  $\{T_{Nt}, t \geq 0\}$ ，名义政府支出  $\{\Gamma_{Nt}, t \geq 0\}$ 。政府持有以名义货币计价的特殊风险对冲资产和股票市场期货为  $-\Xi_t^h$ 、 $-\Xi_t^m$ ，政府名义债务  $B_{Nt}$  的价值演变如下：

$$dB_{Nt} = (rB_{Nt} + \Gamma_{Nt} - T_{Nt})dt + dU_{Nt} - \Xi_t^h dZ_t^h - \Xi_t^m (\eta dt + dZ_t^m) \quad (2.14)$$

本文是考虑通胀下政府实际债务价值，所以采用费为银等<sup>[35]</sup>中的处理方式，给出通胀折现后实际债务价值动力学方程，它为以下分析提供基础，为此给出下面的引理 1，其证明详见附录 A。

**引理 1:** 实际税收是  $T_t$ ，实际政府支出是  $\Gamma_t$ ，政府持有以实际货币计价的特殊风险对冲资产和股票市场期货为  $-\Theta_t^h$ ， $-\Theta_t^m$ ，那么通胀调整后政府实际债务过程  $B_t$  满足：

$$dB_t = ((r - d_L + \sigma_L^2)B_t + \Gamma_t - T_t)dt + dU_t - B_t \sigma_L dZ_t^L - \Theta_t^h dZ_t^h - \Theta_t^m (\eta dt + dZ_t^m) \quad (2.15)$$

方程(2.15)右边第一项为通胀影响下的利息支付和基本赤字，第二项为通胀影响下的政府对家庭的一次性转移支付，第三项为通胀资产的收益或损失，第四项为政府持有以实际货币计价的特殊风险对冲资产的收益或损失，第五项为政府持有以实际货币计价的股市期货风险对冲资产的收益或损失。

在内部区域  $(\underline{B}_t \leq B_t \leq \bar{B}_t)$ ，政府完全依靠风险对冲策略和税收来管理其状态依存债务动态行为。它避免了对家庭的一次性支付，这些家庭的资金来自于一次性的债务发行，所以  $dU_t = 0$ 。接下来，我们根据动态规划原理可求出家庭实际价值函数  $P(B, Y)$  满足的 HJB 方程。

政府选择实际税收  $T$ 、以实际货币计价的特殊风险对冲需求  $-\Theta_t^h$  和以实际货币计价的系统性风险对冲需求  $-\Theta_t^m$ ，通过求解以下 HJB 方程，实际价值函数

$P(B, Y)$ :

$$\begin{aligned}
 (\zeta + r)P(B, Y) = & \max_{T \leq \bar{T}Y, \Theta^m, \Theta^h} (Y - T - C(T, Y)) + ((r - d_L + \sigma_L^2)B + \Gamma - T)P_B(B, Y) \\
 & + \frac{P_{BB}(B, Y)}{2} ((\Theta^m)^2 + (\Theta^h)^2 + (B\sigma_L)^2) \\
 & + (a_1 + \eta\sigma_L\rho_{mL} - \psi_m\eta)YP_Y(B, Y) + \frac{P_{YY}(B, Y)}{2} Y^2(\sigma_Y^2 + \sigma_L^2) \\
 & + (B\sigma_L^2 - \psi_m\Theta^m - \psi_h\Theta^h)YP_{BY}(B, Y)
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

HJB 方程(2.16)右边第一项为实际流向家庭的净支出，第二项和第三项实际债务  $B$  增加对家庭实际价值  $P(B, Y)$  的漂移和扩散波动效应，第四项和第五项反映了实际 GDP 与  $Y$  对家庭实际价值  $P(B, Y)$  的漂移和波动效应，第六项捕获了跨期特殊风险和系统风险对家庭实际价值  $P(B, Y)$  的影响。

税收满足下面一阶条件：

$$1 + C_T(T, Y) = -P_B(B, Y) \tag{2.17}$$

方程(2.17)左边为对家庭征税边际成本  $1 + C_T(T, Y)$ ，右边是偿还政府债务的边际收益  $-P_B(B, Y) \geq 0$ 。

系统风险对冲需求  $\Theta^m$  满足：

$$\Theta^m = \frac{YP_{BY}(B, Y)}{P_{BB}(B, Y)} \psi_m \tag{2.18}$$

同样地，特殊风险对冲  $\Theta^h$  需求：

$$\Theta^h = \frac{YP_{BY}(B, Y)}{P_{BB}(B, Y)} \psi_h \tag{2.19}$$

根据  $P(B_t, Y_t) = p(b_t)Y_t$  一阶齐次的条件，可求出：

$$P_{YY}(B, Y) = \frac{P_{BY}^2(B, Y)}{P_{BB}(B, Y)} \tag{2.20}$$

我们将(2.17)-(2.20)带入 HJB 方程(2.16)中，得：

$$\begin{aligned}
 (\zeta + r)P(B, Y) = & \max_{T \leq \bar{T}Y} (Y - T - C(T, Y)) + ((r - d_L + \sigma_L^2)B + \Gamma - T)P_B(B, Y) + \frac{P_{BB}(B, Y)}{2} B^2 \sigma_L^2 \\
 & + (a_1 - \psi_m\eta)YP_Y(B, Y) + \frac{P_{YY}(B, Y)}{2} Y^2 \sigma_L^2 + B\sigma_L^2 YP_{BY}(B, Y)
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

接下来，本文将介绍一次债务发行和支付区域  $(0 \leq B_t < \underline{B}_t)$ ，在这个区域中，

债务产出比  $b_t = B_t/Y_t$  非常低，以至于政府立即发行债务并将收益支付给家庭是最优的，对于给定  $B_t$ ，最优一次转移支付政策为：

$$dU_t = \max\{\underline{B}_t - B_t, 0\} \quad (2.22)$$

方程(2.22)意味着当  $B_t < \underline{B}_t$  时，以下值匹配条件成立：

$$P(B_t, Y_t) = P(\underline{B}_t, Y_t) + \underline{B}_t - B_t \quad (2.23)$$

将(2.23)代入  $V(\underline{B}_t, Y_t) = P(\underline{B}_t, Y_t) + \underline{B}_t$  中，我们发现  $V(B_t, Y_t) = V(\underline{B}_t, Y_t)$ ，家庭实际价值和实际债务价值的总和在新债务发行前后相等。

政府最佳选择新债务水平  $\underline{B}_t \geq 0$ （等价于新的债务发行  $dU_t$ ）：

$$\max_{\underline{B}_t \geq 0} V(\underline{B}_t, Y_t) = P(\underline{B}_t, Y_t) + \underline{B}_t \quad (2.24)$$

如果最优  $\underline{B}_t$  是内点（即  $\underline{B}_t > 0$ ），它满足的一阶条件： $P_B(\underline{B}_t, Y_t) = -1$  等价于  $V(\underline{B}_t, Y_t) = 0$ ，否则，政府不能发行债务且  $\underline{B}_t = 0$ 。

### 2.2.2 违约制度( $\bar{B}_t < B_t$ )

当政府实际债务  $B_t$  超过  $\bar{B}_t$ ，政府违约并且永久进入违约制度中。此时家庭实际价值函数  $P(B_t, Y_t)$  满足：

$$P(B_t, Y_t) = \hat{P}(\hat{Y}) \quad (2.25)$$

其中违约实际 GDP： $\hat{Y} = \alpha Y$ 。将(2.25)带入 HJB 方程(2.21)中，可求得违约下实际家庭价值  $\hat{P}(\hat{Y})$  为：

$$(\varsigma + r)\hat{P}(\hat{Y}) = (\hat{Y} - \Gamma - \hat{C}(\Gamma, \hat{Y})) + (a_1 - \psi_m \eta) \hat{Y} \hat{P}'(\hat{Y}) + \frac{\hat{P}''(\hat{Y})}{2} \hat{Y}^2 (\sigma_Y^2 + \sigma_L^2) \quad (2.26)$$

方程(2.26)右侧的第一项给出了违约制度下流向家庭的净支出。由于在违约制度下，政府既不能借，也不能贷，所以其支出等于税收收入： $T = \Gamma$ 。第二项和第三项分别反映了经风险调整后的产出对家庭实际价值的漂移和波动性影响。违约制度是一种吸收状态，在违约制度下实际产出为  $\hat{Y} = \alpha Y$ ，而且无债务（ $B = 0$ ），设  $\hat{p}_t = \hat{P}(\hat{Y})/\hat{Y}$ ， $\hat{p}_t = \hat{p}$  是一个常数，我们利用  $\hat{P}(\hat{Y}) = \hat{p}\hat{Y}$  一阶齐次

的性质，求出  $\hat{P}'(\hat{Y}) = \hat{p}$  和  $\hat{P}''(\hat{Y}) = 0$ ，将其带入(2.26)中，并根据(2.12)和(2.13)公式可得：

$$(\varsigma + r_v - a_1)\hat{p}\hat{Y} = (\hat{Y} - \Gamma - \hat{C}(\Gamma, \hat{Y})) \quad (2.27)$$

又因为  $\hat{Y} = \alpha Y$ 、 $r_v > a_1$  和在违约制度下家庭实际价值函数为非负的( $\hat{p} > 0$ )，结合(2.27)可得： $1 - \gamma/\alpha - kc(\gamma/\alpha) \geq 0$ 。

### 2.2.3 最优税收和债务计划

本文将债务产出比  $b_t = B_t/Y_t$  作为状态变量，设  $du_t = dU_t/Y_t$  为按比例计算的一次性转移支付。

首先，将  $P(B_t, Y_t) = p(b_t)Y_t$  带入一阶条件(2.17)中，可以获得税率  $\tau(b)$  满足条件：

$$1 + c'(\tau(b)) = -p'(b) \quad (2.28)$$

根据(2.2)和(2.28)可以求出  $\tau(b)$ 。

在内部区间 ( $b \in [\underline{b}, \bar{b}]$ ) 债务产出比不太低时，即  $b \geq \underline{b}$ ，其中  $\underline{b}$  是内生的，政府不向家庭一次性支付： $du_t = 0$ ，这是由于家庭立即支付融资的边际收益小于为债务融资的边际成本（包括无谓损失）。利用伊藤引理，可以求出  $b_t$  以确定的速率变化（其证明见附录 A）：

$$d(b_t)/dt = \mu_t^b = \mu^b(b_t) = (\gamma - \tau(b_t)) + rb_t - a_1b_t + \xi b_t + (\sigma_L^2 - d_L)b_t \quad (2.29)$$

方程(2.29)右边第一项是按照比例计算的基本财政赤字，第二项是偿债的利息成本，前面两项总和表示为按比例计算财政赤字，即利息支付总额。第三项为因 GDP 增长而减少债务产出比，第四项为由于风险溢价支付而产生对冲成本。第五项是因通胀产生债务产出比。

本文如何确定  $\bar{b}$ ？因为  $\bar{b}$  是债务容量， $b \leq \bar{b}$ ，所以  $\mu^b(\bar{b}) \leq 0$ 。由于  $r \leq \varsigma$ ，政府不太愿意在边际处推迟征税，且鉴于当前无风险利率较低，借贷成本低，政府更偏好通过借贷的方式筹集所需资金，所以  $\mu^b(\bar{b}) \geq 0$ ，综合上面两个条件可得： $\mu^b(\bar{b}) = 0$ ，根据(2.29)和  $\mu^b(\bar{b}) = 0$  可得  $\bar{b} = (\tau(\bar{b}) - \gamma)/A$ ，其中

$$A = r_v - d_L - a_1 + \sigma_L^2。$$

接下来，本文描述了政府的债务一次性发行和支付决策。用一阶齐次的性质简化(2.24)可得  $\underline{b}$  的解：

$$\max_{\underline{b} \geq 0} v(\underline{b}) = p(\underline{b}) + \underline{b} \quad (2.30)$$

如果  $\underline{b} > 0$ ，债务发行的成本在  $\underline{b}$  为零：  $v'(\underline{b}) = 0$ ，即  $p'(\underline{b}) = -1$ 。否则政府将不发行债务而且  $\underline{b} = 0$ ，即  $v'(\underline{b}) < 0$ 。因此最优一次性转移支付政策满足：

$$du_t = \max\{\underline{b} - b_t, 0\} \quad (2.31)$$

下面介绍最优税收和债务计划，定理 1 的证明在附录 A 中。

**定理 1:** 假设  $1 - \gamma/\alpha - kc(\gamma/\alpha) \geq 0$ ,  $k \geq 1$ ,  $\alpha \leq 1$ ,  $r_v > a_1$ 。在正常制度下的  $p(b)$  满足方程：

$$(\zeta + r_v - a_1)p(b) = (1 - \tau(b) - c(\tau(b))) + ((r_v - d_L + \sigma_L^2 - a_1)b + \gamma - \tau(b))p'(b) \quad (2.32)$$

而且满足下面按照比例计算的债务容量  $\bar{b}$  两个条件之一：

- (1)  $p(\bar{b}) = \alpha \hat{p}$ ，如果政府的违约动机很强，有限承诺约束在其债务容量上生效；
- (2)  $\tau(\bar{b}) = \bar{\tau}$ ，当政府对征税的权力有限时(即，当  $\bar{\tau}$  不高时)， $\tau \leq \bar{\tau}$  约束在债务容量处生效。

则，在违约制度下按照比例计算的家庭实际价值：

$$\hat{p} = \frac{1 - \frac{\gamma}{\alpha} - kc(\frac{\gamma}{\alpha})}{\zeta + r_v - a_1}$$

一次性债务的边界  $\underline{b}$  由式(2.30)给出，最优一次性转移支付政策  $du_t$  由式(2.31)给出。最优税率政策  $\tau(b)$  由式(2.2)和(2.28)给出，债务产出比的动力学  $\dot{b}_t$  由(2.29)给出。

根据定理 1 中，当税率约束  $\tau \leq \bar{\tau}$  不生效时，根据  $p(\bar{b}) = \alpha \hat{p}$  求出  $\bar{b} = p^{-1}(\alpha \hat{p})$ ，当税率约束  $\tau \leq \bar{\tau}$  生效时， $\bar{b} = (\bar{\tau} - \gamma)/A$ ，所以可以求出  $\bar{b}$  的取值（其证明见附录 A）：

$$\bar{b} = \min\left\{\frac{\sqrt{1+2\varphi(1-\alpha+\frac{k\varphi\gamma^2}{2\alpha}+\gamma)-\varphi\gamma-1}}{\varphi A}, \frac{\bar{\tau}-\gamma}{A}\right\} \quad (2.33)$$

其中  $A = r_v - d_L - a_1 + \sigma_L^2$ 。

### 2.3 数值模拟和经济学解释

本章通过 Matlab 软件进行数值模拟，探究通胀对政府最优税收和债务的影响，以及政府耐烦程度、无风险利率对达到债务容量时间的影响，并预测我国到达债务容量的时间。

本章设定通胀波动率  $\sigma_L$  为 0.1，预期通胀率  $d_L$  为 0.01，最大可行税率  $\bar{\tau}$  为 50%（参见 Jiang 等<sup>[28]</sup>）。其它参数的取值引用 Jiang 等<sup>[28]</sup>的参数取值，具体参数符号和含义详见表 1。结合结合(2.2)、(2.28)、(2.30)式、(2.32)和(2.33)式，利用 Matlab 数学软件进行数值模拟，结果如图 2-1-2-10 所示。

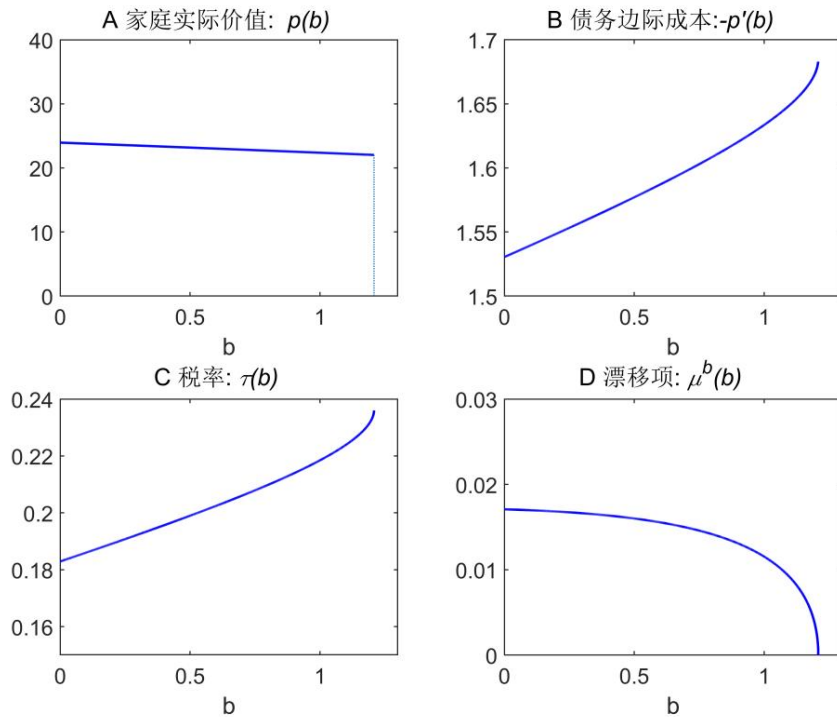


图 2-1 家庭实际价值  $p(b)$ ，债务的边际成本  $-p'(b)$ ，最优税率  $\tau(b)$ ，以及债务产出比的漂移项  $\mu^b(b)$

图 2-1 展示了家庭实际价值  $p(b)$ ，债务的边际成本  $-p'(b)$ ，最优税率  $\tau(b)$  以及债务产出比的漂移项  $\mu^b(b)$ 。在子图 A 中，政府债务  $b$  越高，政府受到的约束越大，因此导致  $p(b)$  下降。当前债务容量为  $\bar{b}=1.21$ ，这意味着政府的最大债务容量  $B$  是产出  $Y$  的 121%。家庭实际价值随着债务产出比  $b$  增加而减少，此时，在债务容量  $\bar{b}=1.21$  的家庭实际价值为 22.03。在子图 B 展示了债务的边际成本  $-p'(b)$  随着债务产出比  $b$  增加而增加，当达到债务容量  $\bar{b}$  时， $-p'(b)=1.68$ 。因此，在债务限额下，债务的净社会边际成本为 1.68 元。这个数字反映了税收扭曲成本和政府债务违约的选择。当前我国的债务产出比为 0.79<sup>3</sup>，偿还债务的边际成本约为  $-p'(0.79)=1.61$ 。在子图 C 中最优税率也随着  $b$  增加而增加，并且在债务容量时达到最大值  $\tau(\bar{b})=0.24$ 。在当前债务产出比  $b$  为 0.79，政府最优税率为  $\tau(0.79)=0.21$ 。

在子图 D 中， $\mu^b(b)$  为债务-GDP 比率的增长率，随着  $b$  的增加而下降。随着  $b$  的增加，偿债的边际成本  $-p'(b)$  和税率  $\tau(b)$  都增加。因此，债务-GDP 比率以较慢的速度增长（即  $\dot{b}_t$  下降），直到在债务容量下达到零： $\mu^b(\bar{b})=0$ ，这是因为政府不能超过其债务限额。

为了探究通胀对政府债务与税收的影响，本文将通胀参数设置不同的值来探究其对最优税收和债务的影响。

首先，其他参数不变，将预期通胀率  $d_L$  分别设为 0.01、0.02，如图 2-2 所示，当预期通胀率  $d_L$  越高，家庭实际价值下降，债务边际成本和税率都大幅度下降，但债务产出比的漂移项在增加，其原因是预期通胀率越高，债务负担和税收扭曲较小，因此政府更愿意借贷，导致  $\mu^b(b)$  增加。对于这两种情况，随着  $b$  的增加，税率  $\tau(b)$  和债务的边际成本增加，直到债务达到债务容量  $\bar{b}=1.21$ 。虽然债务负担的增加不会改变政府的债务容量，但它确实会大幅增加债务-GDP 比率的漂移，这反过来会改变政府达到其债务容量所需的时间。

图 2-3 所示，通胀波动率  $\sigma_L$  分别设为 0.1 和 0.05，通胀波动率越低，家庭实际价值，债务边际成本以及税率都在减少，但其债务容量不变，债务产出比

<sup>3</sup> 在 wind 数据库中，2023 年中国的一般债务产出比为 0.79

的漂移项在增加，这是因为通胀波动率低，导致政府偿债边际成本和税收较小，债务负担和税收扭曲较小，因此政府更愿意借贷，导致  $\mu^b(b)$  增加。

参数  $\varsigma$  表示家庭不耐烦程度， $\varsigma$  越高，家庭更不耐烦。图 2-4 比较了我们的基线（0.001）情况下的结果与家庭更不耐烦的  $\varsigma = 0.04$  情况下的结果。当  $\varsigma$  从 0.001 增加到 0.04 时，家庭更加不耐烦，债务边际成本和税率大幅度下降。随着家庭不耐烦程度增加，政府推迟征税的成本低，政府债务负担和税收较小，因此政府更愿意借贷，导致  $\mu^b(b)$  增加。虽然债务负担的增加不会改变政府的债务容量，但它确实会大幅增加债务-GDP 比率的漂移，进而会影响政府达到其债务容量所需的时间。

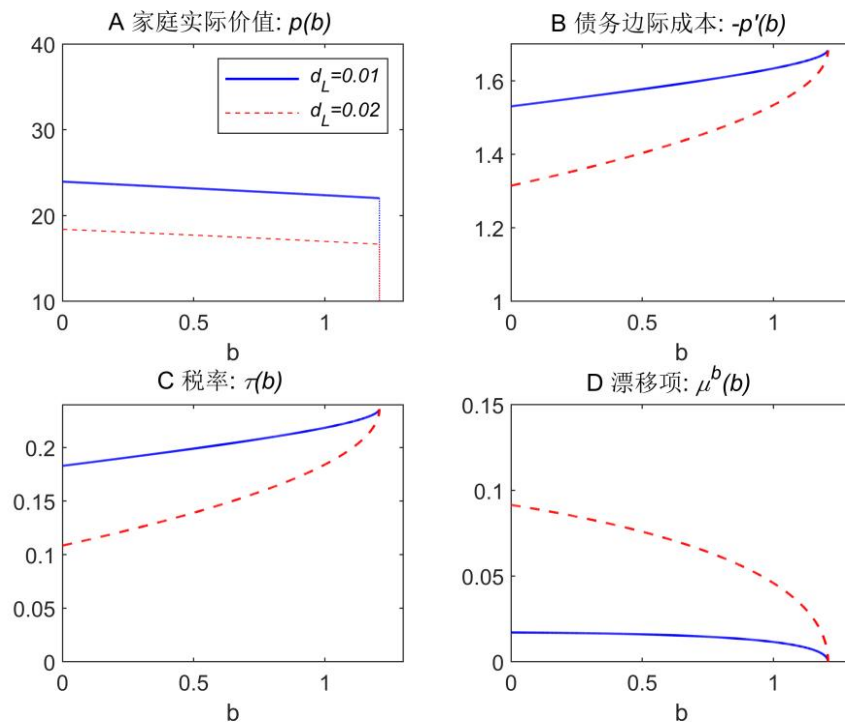


图 2-2 预期通胀率  $d_L$  对家庭实际价值  $p(b)$ ，债务的边际成本  $-p'(b)$ ，最优税率  $\tau(b)$  以及债务产出比的漂移项  $\mu^b(b)$  的影响

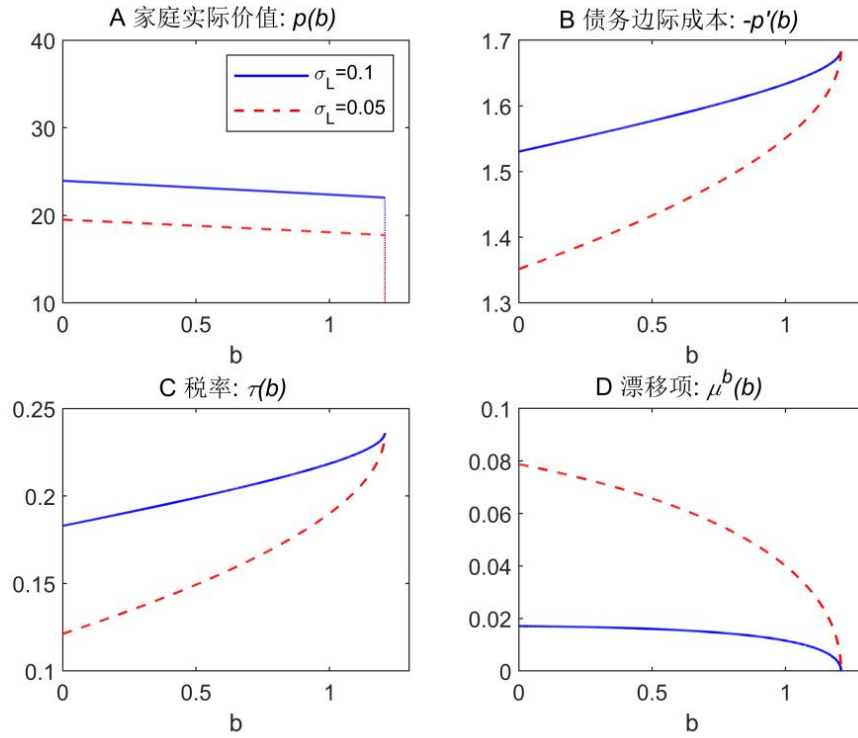


图 2-3 通胀波动率  $\sigma_L$  对家庭实际价值  $p(b)$ ，债务的边际成本  $-p'(b)$ ，最优税率  $\tau(b)$  以及债务产出比的漂移项  $\mu^b(b)$  的影响

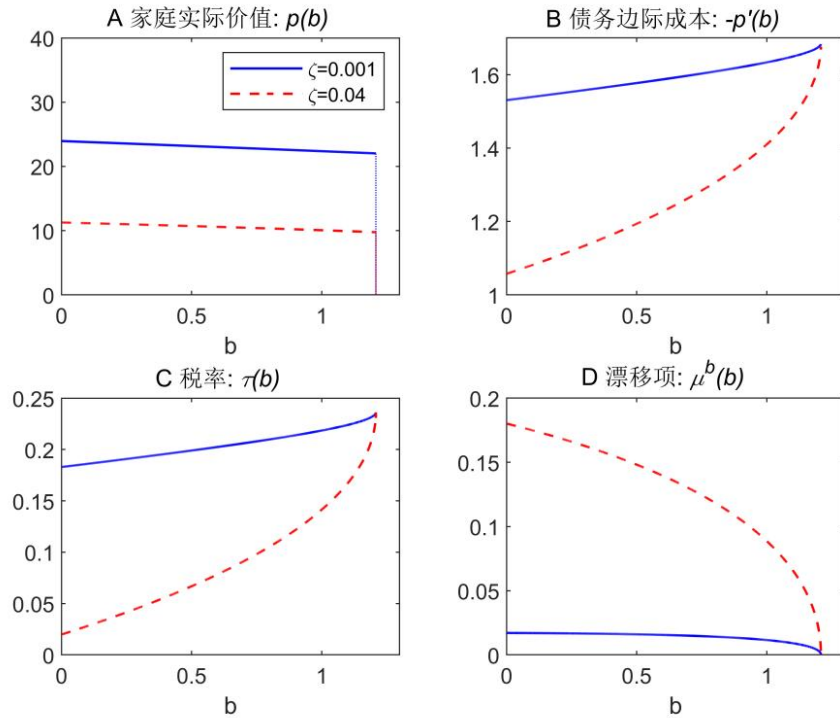


图 2-4 不耐烦程度  $\zeta$  对家庭实际价值  $p(b)$ ，债务的边际成本  $-p'(b)$ ，最优税率  $\tau(b)$  以及债务产出比的漂移项  $\mu^b(b)$  的影响

图 2-5 比较了我们的基线（ $r = 0.01$ ）情形与  $r = 0.05$  情形的结果。当  $r$  从 0.01 下降到 0.005，政府债务容量从 1.21 增加到 1.45。重要的是，债务边际成本与最优税率降低。其主要原因是当  $r$  较低，利息支付较少，债务负担和税收扭曲也更小，此时政府更愿意借贷，导致  $\mu^b(b)$  增加。

参数  $\varphi$  是衡量由扭曲性税收引起的无谓成本。图 2-6 比较了我们的基线（ $\varphi = 2.9$ ）情况下的结果与  $\varphi = 4$  情况下的结果。当  $\varphi$  从 2.9 增加到 4 时，政府的债务容量  $\bar{b}$  从 1.21 下降到 1.12，家庭实际价值函数下降。但债务的边际成本和税率都增加。当税收更具扭曲性时，政府就不太愿意以未来为抵押借款，从而导致债务-GDP 比率在  $b$  的所有水平上下降（子图 D）。

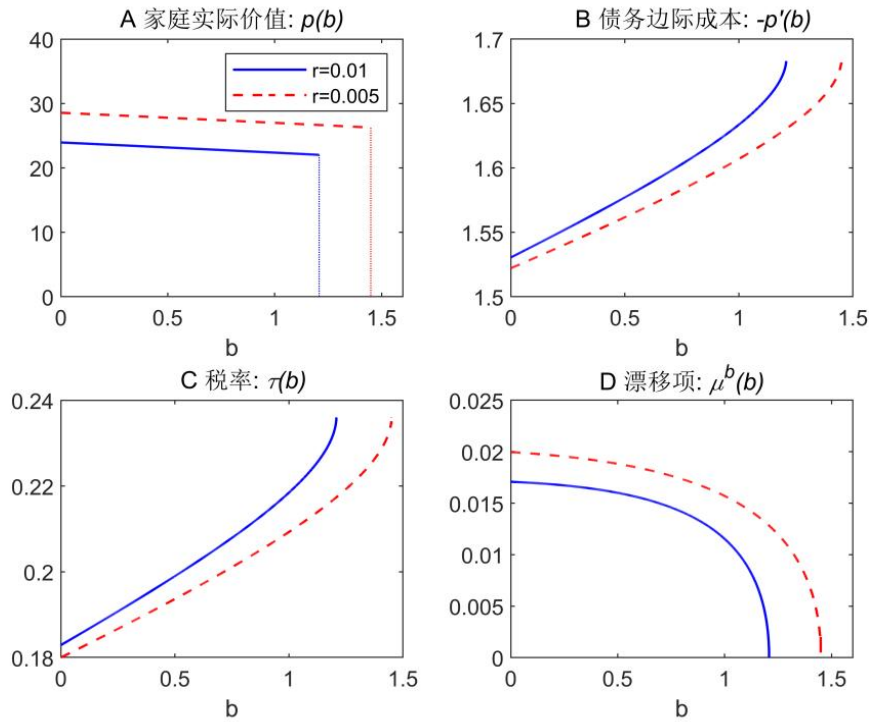


图 2-5 利率  $r$  对家庭实际价值  $p(b)$ ，债务的边际成本  $-p'(b)$ ，最优税率  $\tau(b)$  以及债务产出比的漂移项  $\mu^b(b)$  的影响

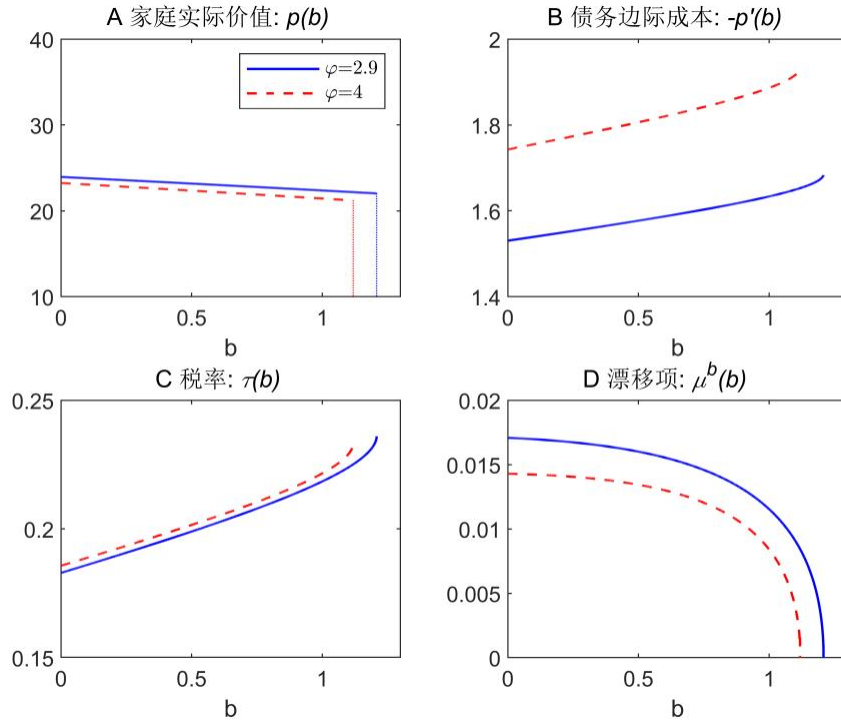


图 2-6 扭曲税收成本  $\varphi$  对家庭实际价值  $p(b)$ ，债务的边际成本  $-p'(b)$ ，

最优税率  $\tau(b)$  以及债务产出比的漂移项  $\mu^b(b)$  的影响

接下来研究违约情况，参数  $\alpha$  是衡量违约状态下产出的恢复率。图 2-7 比较了我们的基线（ $\alpha = 0.95$ ）情形与  $\alpha = 0.9$  情形下的结果。当各经济体的产出损失  $1-\alpha$  从 5% 增加到 10% 时，政府的债务容量  $\bar{b}$  从 1.21 显著增加到 2.24，但家庭实际价值函数  $p(b)$  仅略有增加。债务的边际成本  $-p'(b)$  和税率  $\tau(b)$  都下降了。这是因为随着违约成本增加，政府更愿意偿还债务，因此能够借到更多钱。最后，债务与 GDP 比率的漂移  $\mu^b(b)$  更大，因为我们增加了所有水平  $b$  的产出损失  $1-\alpha$ 。

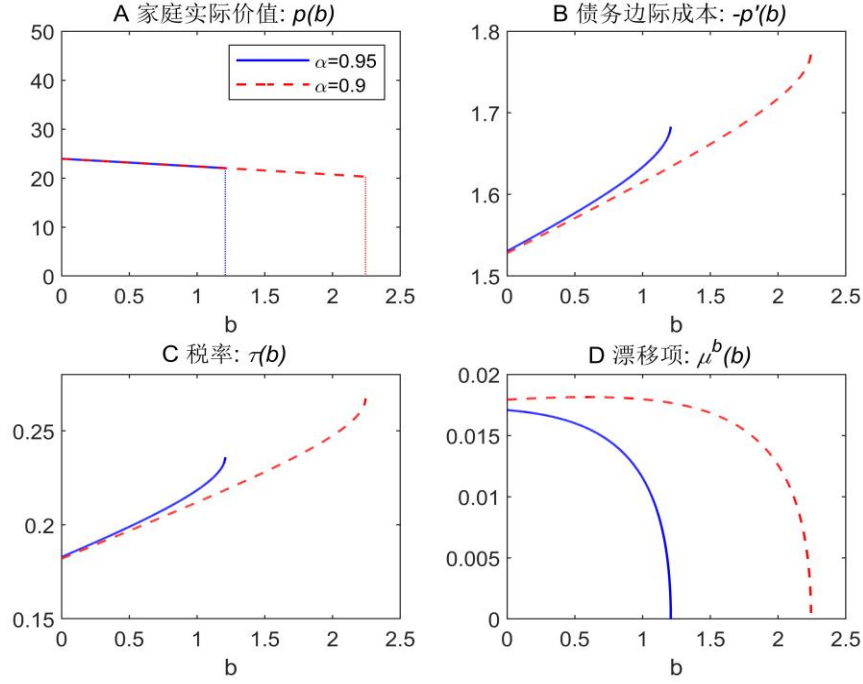


图 2-7 产出恢复率  $\alpha$  对家庭实际价值  $p(b)$ ，债务的边际成本  $-p'(b)$ ，最优税率  $\tau(b)$  以及债务产出比的漂移项  $\mu^b(b)$  的影响

本文研究了主要参数对政府最优债务与税收的影响，接下来，本文将研究到达债务容量所需要的时间。由(2.29)式可知债务产出比的漂移项  $\dot{b} = \mu^b(b_t)$ ，给定  $b_0$ ，政府达到其债务容量  $\bar{b}$  所需的时间为：

$$\int_{b_0}^{\bar{b}} \frac{db_t}{\dot{b}_t} = \int_{b_0}^{\bar{b}} \frac{db_t}{\gamma - \tau(b_t) + (r - a_1 + \xi)b_t + (\sigma_L^2 - d_L)b_t}$$

图 2-8 展示了随着家庭变得更加不耐烦（即，随着  $\varsigma$  的增加），政府耗尽其债务容量所需的时间减少。在我们的计算中，即使是看似很小的不耐烦的增加，不耐烦的影响也很大。从中国目前的一般债务水平 79% 开始，如果不耐烦增加到 0.1%，到 2072 年达到债务上限需要大约 49 年，但如果不耐烦增加到 1%，到 2039 年达到债务上限需要 16 年。

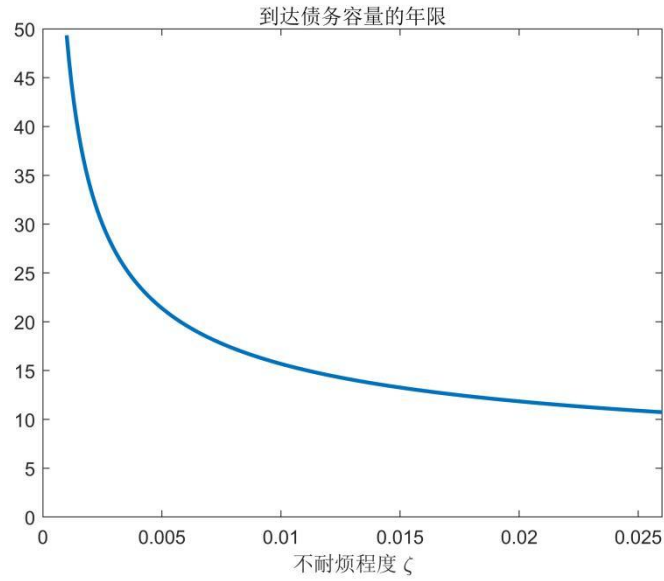


图 2-8 不耐烦程度对达到债务容量所需的时间的影响 ( $b_0 = 0.79$ ,  $\bar{b} = 1.21$ )

为了更加进一步探究其他因素对达到债务容量所需的时间的影响，接下来，我们将研究利率  $r$  对其影响。考虑到不耐烦程度对其影响，本文将其分成两种情形，一种是固定不耐烦程度 ( $\zeta = 0.001$ )，另一种是固定不耐烦程度与利率的总和不变 ( $\zeta + r = 0.011$ )，分别探讨这两种情形下利率  $r$  对达到债务容量所需的时间的影响。

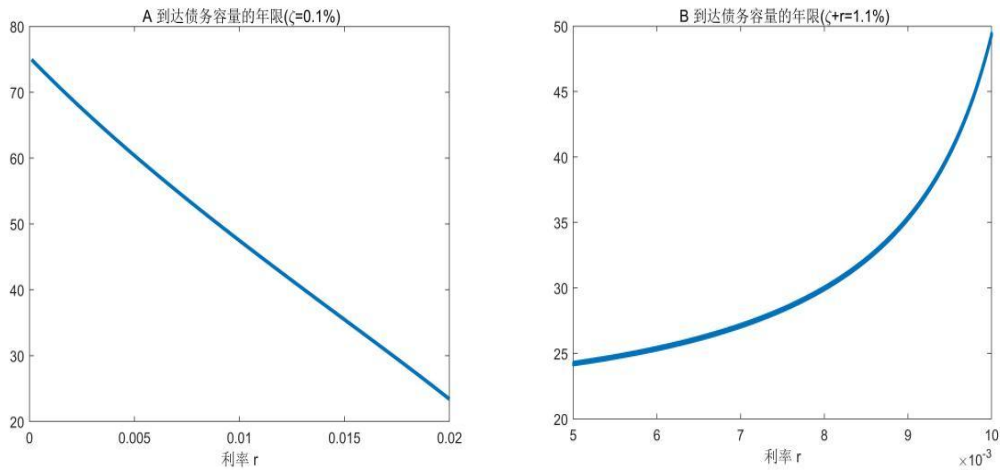


图 2-9 利率  $r$  对达到债务容量所需时间的影响 ( $b_0 = 0.79$ ,  $\bar{b} = 1.21$ )

首先，在图 2-9 中，子图 A 显示，在其他条件不变下，家庭的不耐烦程度固定，到达债务容量的时间随着利率  $r$  减少而增加，利率越低，政府的债务容量就越高。因此，在政府债务利率较低的经济体中，政府税收减少，借贷增加，使得债务-GDP 比率以更快的速度增长。

在这种情况下，直接的债务容量效应主导了间接（债务-GDP 比率）漂移效应，因此需要更长的时间才能达到其债务容量。从我国目前的债务水平  $b=0.79$  开始，如果  $r=0.005$ ，则需要大约 60 年才能在 2083 年达到债务上限，但如果  $r=0.01$ ，则需要大约 49 年才能在 2072 年达到债务上限。

接下来，本文研究第二种情形，如子图 B 所示，在这种情形下，到达债务容量的时间随着利率增加而增加。可见，如果利率较低，则达到稳态债务容量所需的时间较短。这是因为当一个家庭足够不耐烦时，间接漂移效应会比直接债务容量效应强。更便宜的债务（更低的利率）导致政府加速借贷，从而更快地耗尽其债务容量。对于一个固定值为 1.1%，从目前我国债务水平的 79% 开始，如果  $r=0.005$ ，则需要大约 24 年才能在 2047 年达到债务上限，但如果  $r=0.01$ ，则需要大约 49 年才能在 2072 年达到债务上限。

从图 2-9 的两个子图中得出的一个关键结论是，达到稳态债务容量的时间主要取决于家庭的不耐烦程度和利率水平。

最后我们从 Wind 数据库选取 2003 年 12 月 31 日到 2023 年 12 月 31 日的年度一般政府总债务占 GDP 比重的样本数据，对我们模型进行拟合，并描绘了从 2022 年开始，预测在不同参数（实际增长率  $a_1$ ，预期通胀率  $d_L$  以及通胀波动率  $\sigma_L$ ）下我国耗尽其债务容量并达到稳定状态债务产出比的动态特性。

首先，在图 2-10 中，子图 A 显示，使用我们基线校准的参数绘制了 2002 年至 2022 年的一般政府总债务-GDP 比率动态行为。我们的模型（蓝色实线）近似地模拟了我国这 20 年期间债务-GDP 比率动态的趋势（黑色虚线）。

接着，子图 B 显示，如果一国政府的实际增长率  $a_1$  永久性地从 3% 降至 2%，那么政府将在 2034 年达到其减少的债务容量（从 1.21 降至 0.91）。所以经济增长是偿还债务的关键来源。当经济增长放缓时，政府的财政收入会受到压力，债务偿还的负担也加重，这导致政府更快地达到其债务容量的上限，进而限制其未来的借贷能力。因此，保持稳定的经济增长对于政府维护债务可持续性至关重要。

其次，如子图 C 所示，当预期通胀率  $d_L$  从 1% 增加到 2% 时，政府在 2038 年左右预计会达到债务上限。尽管较高的预期通胀率不改变政府的债务容量上限，但会加速达到这一上限的时间。其原因是，在较高的预期通胀率的环境下，货

币的实际购买力随时间下降，因此政府未来的债务支付在实际价值上会相对较低，这导致即使债务名义金额在增加，其实际价值（即购买力）却在下降。同时，较高的预期通胀率也增加了政府财政政策的灵活性。在这些因素的共同作用下，政府债务累积的速度加快，从而更早地接近或达到债务上限。因此政府需要采取相应措施来加强债务管理、灵活运用财政政策、关注通胀对经济的长期影响、加强国际合作、提高政策透明度和公信力以及促进经济结构调整和转型升级等方面的努力，以确保经济的稳定增长和社会的可持续发展。

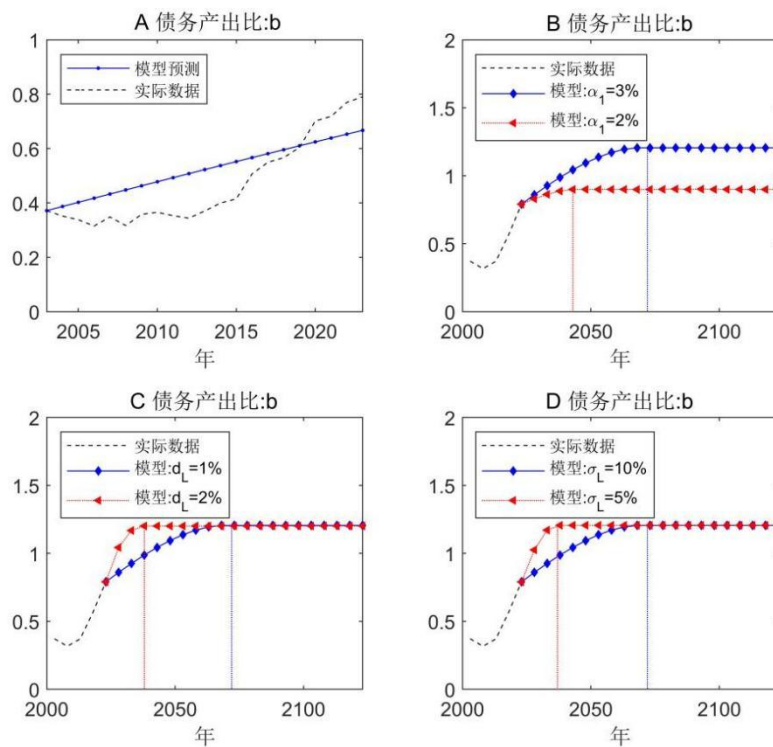


图 2-10 模型拟合并预测在三种情景下的债务-GDP 比率动态特征

子图 D 显示，如果通胀波动率  $\sigma_L$  从 10% 降至 5%，那么政府的债务容量不变，在 2037 年左右达到债务上限需要将近 14 年的时间，由图可知，较低通货膨胀波动率虽然不改变债务容量，但却会加速到达债务容量的时间。在通胀波动率较低的环境下，政府债务的实际成本降低，这使得政府更倾向于通过发行债务来筹集资金，以促进经济增长或实现其他政策目标。然而，这种策略可能促使债务迅速累积，从而缩短达到债务上限所需的时间。因此，政府需要采取一系列措施来加强债务管理，确保债务水平处于可控范围内，防范债务风险。

这包括加强债务监控、优化财政支出、提高税收效率、加强国际合作和提高债务透明度等方面。通过这些措施的实施，政府可以有效应对通胀和债务风险，确保经济的稳定增长。

## 2.5 本章小结

本文在通胀不确定下研究了最优债务与税收的问题，运用了随机微分方程来刻画政府实际价值动力学，通过随机分析、动态规划原理等推导出政府实际价值的 HJB 方程并求解，并分析了通胀等参数对政府最优税收和债务的影响，最后得出有价值的经济学结论。

研究结果表明：政府的不耐烦程度虽然不会改变债务容量本身，但会显著影响达到债务上限的时间。即使政府的不耐烦程度仅有小幅增加，也可能对债务累积速度产生显著影响。因此，政府在制定税收政策时应保持足够的耐心，以避免债务过快接近上限。此外，预期通胀率和通胀波动率都会影响政府达到其债务容量所需的时间。但是预期通胀率和通胀波动率不改变债务容量，但却会影响到达债务容量的时间。较高的预期通胀率会降低政府偿债边际成本和税收，加快到达债务容量的时间。这是由于较高的预期通胀率通过降低债务实际价值和增加财政政策的灵活性，减轻了政府偿债的边际成本和税收负担，进而加速政府债务累积达到债务上限。另一方面，较低通货膨胀波动率同样会降低政府偿债边际成本和税收，缩短到达债务容量的时间。在通胀波动率较低的环境下，政府债务的实际成本降低，这从而减少了偿债的边际成本和税收压力，这可能激励政府更多地依赖债务融资来促进经济增长或实现政策目标。然而，这种策略可能促使债务迅速累积，从而缩短达到债务上限所需的时间。

由此来看，通胀波动率和预期通胀率在其中扮演了关键角色。这两者不仅显著影响政府偿债的边际成本和税收收入，还直接影响到达政府债务容量的时间。因此，政府需要密切关注预期通胀率和通胀波动率的变化，并深入理解这些变量对债务容量影响。通过这些，政府能够更准确地把握债务状况的变化趋势，从而制定出更为精准和有效的政策措施。

### 第3章 气候不确定下政府最优税收和债务的问题研究

本章将构建一个气候灾难背景下的政府最优税收和债务模型，旨在分析气候变化对我国最优税收和债务政策的动态影响。首先，本章将气候灾难与温度之间的关联模型引入产出过程，构建了一个基于跳跃扩散过程的产出模型，以捕捉气候灾难对经济产出的突发性冲击。其次，利用随机分析理论，推导了气候灾难环境下政府债务价值的演化动力学方程，揭示了气候灾难对政府债务价值的动态影响机制。接着，基于动态规划原理，本章推导出气候灾难环境下最优家庭价值的 HJB 方程，并进一步结合违约与正常制度的关系，推导出违约情况下的 HJB 方程。此外，通过一阶条件，本章推出了正常制度下最优实际家庭价值满足的方程。最后，对政府最优税收和债务进行数值模拟，并结合图像分析给出一定的经济学解释和研究结论。

#### 3.1 基本模型框架

##### 3.1.1 基本假设

本章在 jiang 等<sup>[28]</sup>和费为银等<sup>[30]</sup>的基础上，借鉴 Rebelo 等<sup>[70]</sup>的气候灾难的思路，将气候因素引入我们模型中，分析其对最优税收和债务的影响。假设在正常制度（不违约）下，在面临气候灾难时，产出会发生大幅的变动。也就是说产出会因干旱、野火、飓风等天气灾害而发生整体跳跃。因此  $\{J_t\}$  是一个跳跃过程，它表示气候灾难的冲击。我们根据 Rebelo 等<sup>[70]</sup>关于跳跃扩散过程的产出的模型，可以将产出过程  $\{Y_t, t \geq 0\}$  写为：

$$\frac{dY_t}{Y_{t-}} = (\mu - \lambda(1 - \mathbf{E}(v)))dt + \sigma_Y dZ_t^Y - (1 - v)dJ_t$$

其中  $dZ_t^Y$  在客观测度  $\mathbf{P}$  下是标准布朗运动， $\mu - \lambda(1 - \mathbf{E}(v))$  是预期 GDP 增长率， $\sigma_Y > 0$  是波动率，并且  $Y_0 > 0$ ，跳跃过程  $\{J_t\}$  具有到达率为  $\lambda$ ，其中  $\lambda = \lambda(K)$  与当前温度  $K$  有关。设  $\tau^J$  表示跳跃到达时间，由于布朗运动是连续的，如果在  $t$  处不发生跳跃 ( $dJ_t = 0$ )，则  $Y_t = Y_{t-}$ 。如果在  $t$  处发生跳跃 ( $dJ_t = 1$ )，则产出从  $Y_{t-}$  下

降到  $Y_t = \nu Y_{t-}$ ，我们称  $\nu \in (0,1)$  为经历气候灾难后产出的恢复率。

根据 Loayza 等人<sup>[71]</sup>的方法，他们估计了与气候相关的灾害概率和震级，其模型涉及时变温度灾害风险，其中灾害强度遵循均值回归过程，其长期均值与温度呈线性关系，而我们不考虑均值回归，可设：

$$\lambda(K) = \lambda_0 + \lambda_1 K \quad (3.1)$$

其中参数  $\lambda_0$  为在温度为 0（或模型定义的最低温度点）时，灾害发生的概率或强度，参数  $\lambda_1$  为温度每增加 1 单位时，灾害发生的概率或强度的增加量。而且，恢复部分  $\nu \in (0,1)$  的累积分布函数为  $F(\nu) = \nu^\beta$ ，因此我们可以求出  $E(1-\nu) = 1/(1+\beta)$ 。

GDP 既会受到无风险溢价的特殊冲击，也会受到具有风险溢价的系统性冲击的影响。为了全面刻画产出冲击的动态特征，在不失一般性的前提下，可以将产出冲击  $dZ_t^Y$  在客观测度  $\mathbf{P}$  下分解成下面形  $dZ_t^Y = \sqrt{1-\rho_m^2} dZ_t^h + \rho_m dZ_t^m$ 。其中产出冲击  $dZ_t^Y$  与市场冲击  $dZ_t^m$  之间存在一定的相关性，相关系数为  $\rho_m$ 。因此产出过程  $\{Y_t, t \geq 0\}$  如下形式：

$$\frac{dY_t}{Y_{t-}} = a_1 dt + \psi_m dZ_t^m + \psi_h dZ_t^h - (1-\nu) dJ_t \quad (3.2)$$

其中  $a_1 = \mu - \lambda(1-E(\nu))$  为预期 GDP 增长率， $\psi_m$  和  $\psi_h$  是系统和特殊波动系数：

$$\psi_m = \rho_m \sigma_Y, \quad \psi_h = \sqrt{1-\rho_m^2} \sigma_Y。$$

### 3.1.2 金融市场

在正常制度下，政府拥有多样的投资和融资途径，具体包括：(i) 通过采用精算公允定价的对冲合约，政府能够有效地管理其面临的特殊风险；(ii) 投资于多元化的市场组合，以分散风险并寻求收益；(iii) 在国际资本市场上发行债券以筹集资金。

在此讨论中，预设政府发行的债务是即期到期并展期的。进一步地，为了深入分析特殊风险的对冲策略，本章引入了一种特殊风险对冲资产。假设存在

一个完全竞争的金融资产市场，该市场与特定的扩散性冲击（即特殊风险  $Z_t^h$ ）之间存在着完全的相关性。在这个市场中，持有每单位该对冲资产的投资者在持有期间内不会获得任何预付款，因为承担此类特殊风险并没有风险溢价的存在。为了简化分析，将这种对冲合约的波动率参数标准化为 1。在此基础上，设定政府持有以货币计价的特殊风险对冲资产为  $-\Pi_t^h$ ，特殊风险敞口为  $-\Pi_t^h dZ_t^h$ 。

对于系统风险对冲头寸，我们用  $-\Pi_t^m$  表示政府在时刻  $t$  持有货币计价股票市场期货，风险敞口为  $-\Pi_t^m (\eta dt + dZ_t^m)$ 。

接下来将引入随机贴现因子（SDF），结合 Jiang 等<sup>[28]</sup>和 Hong 等<sup>[72]</sup>在其研究中提出的随机贴现因子模型，可得随机贴现因子  $M_t$  的表达式如下

$$\frac{dM_t}{M_{t-}} = -rdt - \eta dZ_t^m + (v-1)(dJ_t - \lambda dt) \quad (3.3)$$

方程(3.3)的第一项是均衡约束条件，即  $dM_t/M_{t-}$  的漂移项为  $-rdt$ ，其中  $r$  为无风险利率，第二项为扩散项，因为  $\lambda dt = \mathbf{E}(dJ_t)$ ，第三项为客观测度下的跳鞅，这意味着当跳到达  $t$  时，SDF 从  $M_{t-}$  离散地变化到  $M_t^j$ ，变化的倍数是内生决定的跳风险市场价格  $v$ ： $M_t^j/M_{t-} = v$ 。

政府的目标是选择一次性转移支付  $dU_t$ 、税率( $\tau_t$  和  $\hat{\tau}_t$ )以及以货币计价的特殊和系统风险对冲需求( $\Pi_t^h$  和  $\Pi_t^m$ )使得家庭收益最大化，其价值函数为：

$$P(B_t, Y_t) = \sup_{T_t \leq \tau Y_t, dU_t, \Theta^m, \Theta^h} \tilde{E}_t \int_t^\infty e^{-(\zeta+r)(s-t)} [dU_s + (Y_s - (T_s + C_s))(1-l_s^D)dt + (\hat{Y}_s - (\hat{T}_s + \hat{C}_s))l_s^D ds]$$

其中  $\zeta \geq 0$  表示家庭的不耐烦程度。 $\tilde{E}_t$  表示关于  $\mathcal{F}_t$  在风险中性概率测度下的条件期望。

## 3.2 最优政府计划

### 3.2.1 正常制度

在现实中，当出现突发事件时，国债的发行通常不会立即响应突发事件，

而是需要经过一系列的评估、决策和准备过程。政府会根据实际情况和需要，综合考虑多种因素，并经过一定的程序和时间来决策和实施国债的发行。因此我们在政府债务过程不考虑气候灾难对其的影响。税收是  $T_t$ ，政府支出是  $\Gamma_t$ ，政府持有以货币计价的特殊风险对冲资产和股票市场期货为  $-\Pi_t^h$ ， $-\Pi_t^m$ ，那么政府债务过程  $B_t$  满足：

$$dB_t = (rB_t + \Gamma_t - T_t)dt + dU_t - \Pi_t^h dZ_t^h - \Pi_t^m (\eta dt + dZ_t^m) \quad (3.4)$$

方程(3.4)右边第一项为利息支付和基本赤字，第二项为政府对家庭的一次性转移支付，第三项为政府持有以货币计价的特殊风险对冲资产的收益或损失，第四项为政府持有以货币计价的股市期货风险对冲资产的收益或损失。

在内部区域 ( $\underline{B}_t \leq B_t \leq \bar{B}_t$ )，政府通过风险对冲策略和税收来管理其状态依存债务的动态行为，避免了对家庭进行一次性支付，这些家庭的资金来自于一次性的债务发行，所以  $dU_t = 0$ 。基于动态规划原理，家庭价值函数  $P(B, Y)$  满足的 HJB 方程可以表示为：

$$\begin{aligned} (\zeta + r)P(B, Y) = & \max_{T \leq \bar{T}Y, \Theta^m, \Theta^h} (Y - T - C(T, Y)) + (rB + \Gamma - T)P_B(B, Y) \\ & + \frac{P_{BB}(B, Y)}{2} ((\Pi^m)^2 + (\Pi^h)^2) + (a_1 - \psi_m \eta) Y P_Y(B, Y) \\ & + \frac{P_{YY}(B, Y)}{2} Y^2 \sigma_Y^2 - (\psi_m \Pi^m + \psi_h \Pi^h) Y P_{BY}(B, Y) \\ & - \lambda(K) \mathbf{E}(v - 1)P(B, Y) + \lambda(K) \mathbf{E}(v P(B, vY) - P(B, Y)) \end{aligned} \quad (3.5)$$

HJB 方程(3.5)右边第一项为流向家庭的净支出，第二项和第三项债务  $B$  增加对家庭价值  $P(B, Y)$  的漂移和扩散波动效应，第四项和第五项反映了 GDP 与  $Y$  对家庭价值  $P(B, Y)$  的漂移和波动效应，第六项捕获了跨期特殊风险和系统风险对家庭价值  $P(B, Y)$  的影响，最后两项为气候灾难对家庭价值的影响。其证明详见附录 A。

税收满足下面一阶条件：

$$1 + C_T(T, Y) = -P_B(B, Y) \quad (3.6)$$

方程(3.6)左边为对家庭征税边际成本  $1 + C_T(T, Y)$ ，右边是偿还政府债务的边际收益  $-P_B(B, Y) \geq 0$ 。

系统风险对冲需求  $\Pi_t^m$  满足：

$$\Pi^m = \frac{YP_{BY}(B, Y)}{P_{BB}(B, Y)}\psi_m \quad (3.7)$$

同样地，特殊风险对冲  $\Pi_t^h$  需求：

$$\Pi^h = \frac{YP_{BY}(B, Y)}{P_{BB}(B, Y)}\psi_h \quad (3.8)$$

根据  $P(B_t, Y_t) = p(b_t)Y_t$  一阶齐次的条件，可求出：

$$P_{YY}(B, Y) = \frac{P_{BY}^2(B, Y)}{P_{BB}(B, Y)} \quad (3.9)$$

我们将(3.6)-(3.9)带入 HJB 方程(3.5)中，得：

$$(\zeta + r)P(B, Y) = \max_{T \leq \bar{r}Y} (Y - T - C(T, Y)) + (rB + \Gamma - T)P_B(B, Y) + (a_1 - \psi_m \eta)YP_Y(B, Y) - \lambda(K)\mathbf{E}(\nu - 1)P(B, Y) + \lambda(K)\mathbf{E}(\nu P(B, \nu Y) - P(B, Y)) \quad (3.10)$$

### 3.2.2 违约制度( $\bar{B}_t < B_t$ )

当政府债务  $B_t$  超过  $\bar{B}_t$ ，政府违约并且永久进入违约制度中。将违约的家庭价值函数： $P(B_t, Y_t) = \hat{P}(\hat{Y}_t)$  和违约 GDP： $\hat{Y} = \alpha Y$  代入 HJB 方程(3.5)中，可求得违约下家庭价值  $\hat{P}(\hat{Y})$  为：

$$(\zeta + r)\hat{P}(\hat{Y}) = (\hat{Y} - \Gamma - \hat{C}(\Gamma, \hat{Y})) + (a_1 - \psi_m \eta)\hat{Y}\hat{P}'(\hat{Y}) + \frac{\hat{P}''(\hat{Y})}{2}\hat{Y}^2\sigma_Y^2 + \lambda(K)\mathbf{E}(\nu P(\nu \hat{Y}) - P(\hat{Y})) - \lambda(K)\mathbf{E}(\nu - 1)P(\hat{Y}) \quad (3.11)$$

方程(3.11)右侧的第一项给出了违约制度下流向家庭的净支出。第二项和第三项分别反映了经风险调整后的产出对家庭价值的漂移和波动性影响，第四项和第五项为违约制度下气候灾难对家庭价值的影响。违约制度是一种吸收状态，在违约制度下产出为  $\hat{Y} = \alpha Y$ ，而且无债务( $B = 0$ )，设  $\hat{p}_t = \hat{P}(\hat{Y})/\hat{Y}$ ， $\hat{p}_t = \hat{p}$  是一个常数，再利用  $\hat{P}(\hat{Y}) = \hat{p}\hat{Y}$  一阶齐次的性质，求出  $\hat{P}'(\hat{Y}) = \hat{p}$  和  $\hat{P}''(\hat{Y}) = 0$ ，将其代入(3.11)中，并根据(2.12)和(2.13)公式可得：

$$(\zeta + r_v - a_1 - \lambda(K)\mathbf{E}(\nu(\nu - 1)))\hat{p}\hat{Y} = (\hat{Y} - \Gamma - \hat{C}(\Gamma, \hat{Y})) \quad (3.12)$$

又因为  $\hat{Y} = \alpha Y$ 、 $r_v - a_1 > 0$  且  $E(v(v-1))$  小于零<sup>4</sup>，在违约制度下家庭价值函数为非负的( $\hat{p} \geq 0$ )，结合(3.12)可得：

$$1 - \frac{\gamma}{\alpha} - kc(\frac{\gamma}{\alpha}) \geq 0$$

### 3.2.3 最优税收和债务计划

首先，将  $P(B_t, Y_t) = p(b_t)Y_t$  带入一阶条件(3.6)中，我们将获得税率  $\tau(b)$  满足条件：

$$1 + c'(\tau(b)) = -p'(b) \quad (3.13)$$

在内部区间( $b \in [\underline{b}, \bar{b}]$ )债务产出比不太低时，即  $b \geq \underline{b}$ ，其中  $\underline{b}$  是内生的，政府不向家庭一次性支付： $du_t = 0$ ，这是由于家庭立即支付融资的边际收益小于为债务融资的边际成本（包括无谓损失）。利用伊藤引理，可以推导出债务产出比  $b_t$  以确定的速率变化（其证明见附录 A）：

$$d(b_t)/dt = \mu_t^b = \mu^b(b_t) = (\gamma - \tau(b_t)) + rb_t - a_1 b_t + \xi b_t \quad (3.14)$$

方程(3.14)右边第一项是按照比例计算的基本财政赤字，第二项是偿债的利息成本，前面两项总和表示为按比例计算财政赤字，即利息支付总额。第三项为因 GDP 增长而减少债务产出比，第四项则是由于风险溢价支付而增加的对冲成本。

因为  $\bar{b}$  是债务容量， $b \leq \bar{b}$ ，所以  $\mu^b(\bar{b}) \leq 0$ 。由于  $r \leq \varsigma$ ，政府不太愿意在边际处推迟征税，且鉴于当前无风险利率较低，借贷成本低，政府更偏好通过借贷的方式筹集所需资金，所以  $\mu^b(\bar{b}) \geq 0$ ，综合上面两个条件可得： $\mu^b(\bar{b}) = 0$ ，根据(3.14)和  $\mu^b(\bar{b}) = 0$  可得  $\bar{b} = (\tau(\bar{b}) - \gamma)/A$ ，其中  $A = r_v - \xi - a_1$ 。

接下来介绍在气候不确定下政府最优税收和债务计划，定理 2 的证明在附录 A 中。

**定理 2：** 假设  $1 - \gamma/\alpha - kc(\gamma/\alpha) \geq 0$ ， $k \geq 1$ ， $\alpha \leq 1$ ， $r_v > a_1$ 。在正常制度下的

<sup>4</sup>恢复部分  $v \in (0,1)$  的累积分布函数为  $F(v) = v^\beta$ ，则其概率密度函数为  $f(v) = \beta v^{\beta-1}$

$E(v(v-1)) = \int_0^1 (v^2 - v)f(v)dv = -\beta / ((1+\beta)(2+\beta))$

$p(b)$  满足方程:

$$(\varsigma + r - a_1 + \xi)p(b) = (1 - \tau(b) - c(\tau(b))) + ((r - a_1 + \xi)b + \gamma - \tau(b))p(b) + \lambda(K)p(b)\mathbf{E}(\nu(\nu-1)) \quad (3.15)$$

而且满足下面按照比例计算的债务容量  $\bar{b}$  两个条件之一:

(1)  $p(\bar{b}) = \alpha \hat{p}$ , 如果政府的违约动机很强, 有限承诺约束在其债务容量上生效;

(2)  $\tau(\bar{b}) = \bar{\tau}$ , 当政府对征税的权力有限时 (即, 当  $\bar{\tau}$  不高时),  $\tau \leq \bar{\tau}$  约束在债务容量处生效。

则, 在违约制度下按照比例计算的家庭实际价值:

$$\hat{p} = \frac{1 - \frac{\gamma}{\alpha} - kc(\frac{\gamma}{\alpha})}{\varsigma + r_v - a_1 - \lambda(K)\mathbf{E}(\nu(\nu-1))}$$

一次性债务的边界  $\underline{b}$  由式(2.30)给出, 最优一次性转移支付政策  $du_t$  由式(2.31)给出。最优税率政策  $\tau(b)$  由式(2.2)和(3.13)给出, 债务产出比的动力学  $\dot{b}_t$  由(3.14)给出, 跳跃到达率  $\lambda(K)$  由(3.1)给出。

根据定理 2 中, 当税率约束  $\tau \leq \bar{\tau}$  不生效时, 根据  $p(\bar{b}) = \alpha \hat{p}$  求出  $\bar{b} = p^{-1}(\alpha \hat{p})$ , 当税率约束  $\tau \leq \bar{\tau}$  生效时,  $\bar{b} = (\bar{\tau} - \gamma)/A$ , 所以可以求出  $\bar{b}$  的取值

$$\bar{b} = \min \left\{ \frac{\sqrt{1 + 2\varphi(1 - \alpha + \frac{k\varphi\gamma^2}{2\alpha} + \gamma) - \varphi\gamma - 1}}{\varphi A}, \frac{\bar{\tau} - \gamma}{A} \right\} \quad (3.16)$$

其中  $A = r - a_1 + \xi$ 。

### 3.3 数值模拟与经济学解释

本节利用 Matlab 软件进行数值模拟, 探究气候冲击对政府最优税收和债务的影响。

恢复部分  $\nu \in (0, 1)$  的累积分布函数为  $F(\nu) = \nu^\beta$ 。

首先给出参数设置, 具体参数符号和含义详见表 2。接着, 结合(2.2)、(3.13)-(3.16)式, 利用 Matlab 软件设计差分法对方程进行求解并绘图, 结果如图

3-1-3-5 所示。

为了探究气候冲击对政府债务与税收的影响，我们将把  $\beta$ 、 $K$ 、 $\lambda_1$  三个参数设置不同的值来探究其对最优税收和债务的影响。

首先，在其他经济参数保持不变的前提下，我们通过实验将幂律指数分别设定为 60 和 10，并观察其对一系列经济指标的影响，如图 3-1 所示。实验结果显示，当幂律指数从较高的 60 降低到较低的 10 时，家庭价值出现了显著的下降趋势。这一现象反映了经济资源或财富分配的不平等性加剧，导致大多数家庭在整体经济中的价值相对减少。同时，我们观察到债务边际成本和税率均大幅度下降。这是由于在幂律指数较低的情况下，经济体系中的债务负担相对较轻，税收制度对生产和消费活动的扭曲也较小。这种环境促使政府认为借贷成本较低且风险可控，因此更愿意通过增加借贷来刺激经济增长或满足其他政策目标。这种政府借贷的增加进而导致总债务规模的扩大。然而，尽管债务边际成本和税率初始时有所下降，但随着债务规模的持续增加（无论是由于政府借贷还是其他因素），我们注意到税率和债务的边际成本开始逐渐上升。这是因为随着债务累积，政府需要更多的财政收入来偿还债务本息，从而可能不得不提高税率或寻求其他财政资源。此外，债务规模的扩大也可能导致借贷成本的上升，如市场利率的上升或借贷条件的收紧，从而增加了债务的边际成本。

特别值得注意的是，债务产出比的漂移项在幂律指数降低时有所增加。其原因是幂律指数降低时，经济不平等加剧，政府借贷动机增强，但债务利用效率下降且经济脆弱性增加，这些因素共同作用导致债务产出比的漂移项增加。

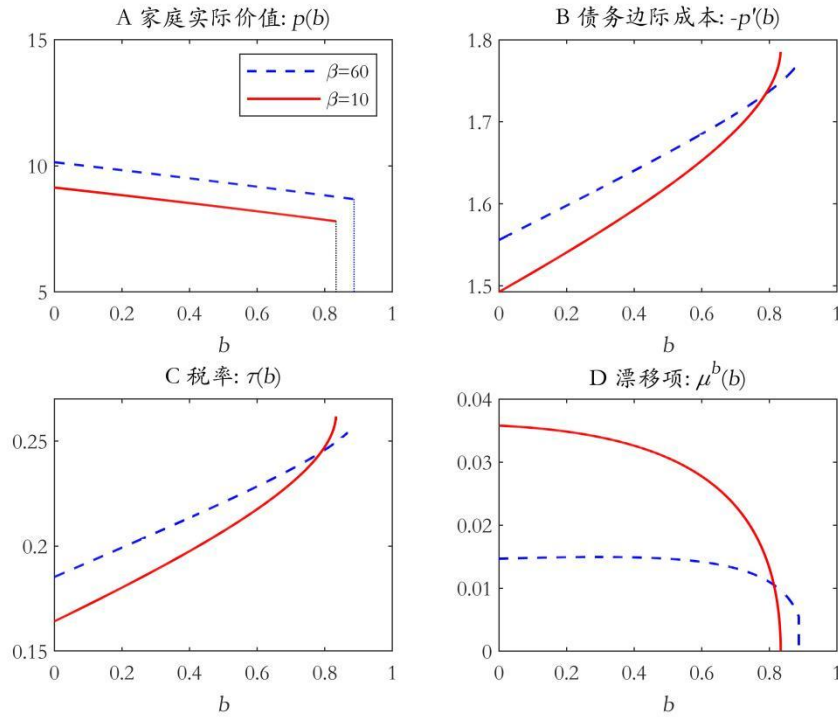


图 3-1 幂律指数  $\beta$  对家庭价值  $p(b)$ ，债务的边际成本  $-p'(b)$ ，  
最优税率  $\tau(b)$  以及债务产出比的漂移项  $\mu^b(b)$  的影响

参数  $K$  是温度。图 3-2 比较了我们的基线 ( $K=1$ ) 情况下的结果与  $K=6$  情况下的结果。当  $K$  从 1 摄氏度增加到 6 摄氏度时，我们观察到几个关键的经济指标发生了显著变化。首先，政府的债务容量从 0.89 下降至 0.83，这表明随着温度的上升，政府在面对潜在的经济风险时，其可承受的债务水平有所降低。这可能是由于高温环境带来的不确定性增加了政府的财政压力，限制了其借贷能力。同时，家庭价值函数也呈现出下降趋势，反映出高温对家庭经济状况的负面影响。这可能是由于高温导致的农作物减产、能源成本上升以及健康问题等，直接降低了家庭收入和福利水平。

值得注意的是，尽管面临这些挑战，债务的边际成本和税率却有所减少。这可能是因为随着温度的上升，经济体系中的某些因素（如生产效率、投资回报率等）发生了变化，使得借贷成本相对降低，而政府为了刺激经济或缓解高温带来的压力，也可能主动降低了税率。

然而，温度的上升，经济体系中的债务负担相对减轻，税收制度对生产和消费活动的扭曲效应也相应减弱。这种环境促使政府认为借贷成本较低且风险

可控，因此更倾向于通过增加借贷来应对经济挑战或实现政策目标，导致债务产出比的漂移项增加。子图 D 进一步证实了上述分析，展示了随着温度的增加，债务产出比漂移项逐渐增大的趋势。这提醒我们，在应对气候变化等全球性挑战时，需要更加全面地考虑其对经济体系的多维度影响，并制定相应的政策措施来减轻其负面影响。

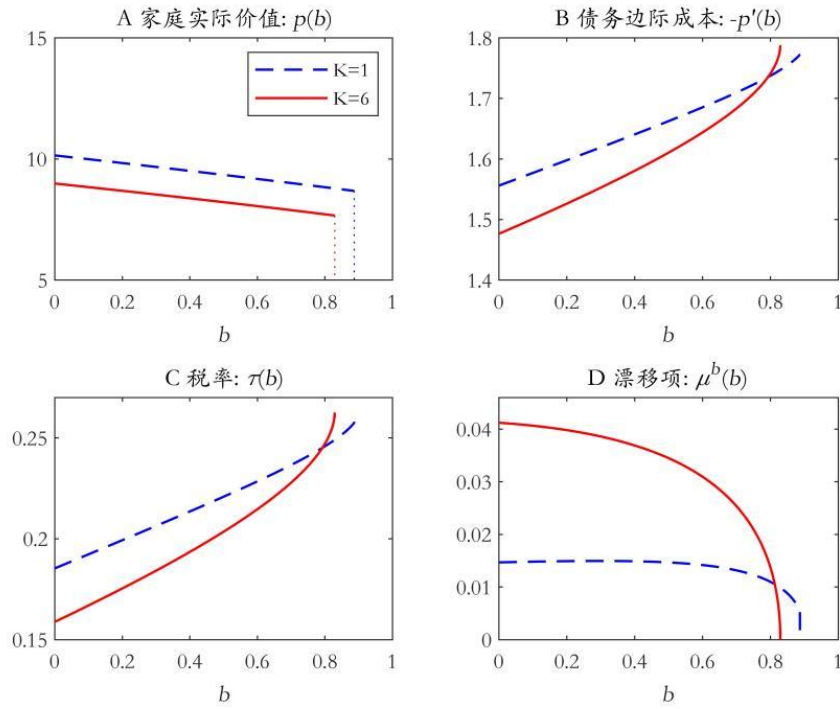


图 3-2 温度  $K$  对家庭价值  $p(b)$ ，债务的边际成本  $-p'(b)$ ，最优税率  $\tau(b)$  以及债务产出比的漂移项  $\mu^b(b)$  的影响

参数  $\lambda_1$  代表是温度每增加 1 单位时，灾害发生的概率或强度的增加量。图 3-3 比较了我们的基线（ $\lambda_1 = 0.06$ ）情况下的结果与  $\lambda_1 = 0.08$  情况下的结果。随着灾害风险的增加，政府债务容量从 0.89 降低到 0.88。这表明，面对更高的灾害风险，政府可能需要保留更多的财政资源以应对潜在的灾害损失，因此其可借贷的债务容量相应减少。值得注意的是，随着灾害风险的增加，债务边际成本和最优税率却降低了。其原因是，随着灾害风险的增加，政府更倾向于通过降低税率来刺激经济增长，同时降低债务成本以吸引更多的投资者，从而在一定程度上缓解财政压力。当灾害风险较大时，政府更倾向于通过借贷来平滑财政波动和应对未来不确定性。这种借贷行为不仅有助于缓解当前的财政压力，

还可能为政府提供必要的资金来投资于灾害预防和恢复项目，这也导致了债务产出比的漂移项  $\mu^b(b)$  增加，

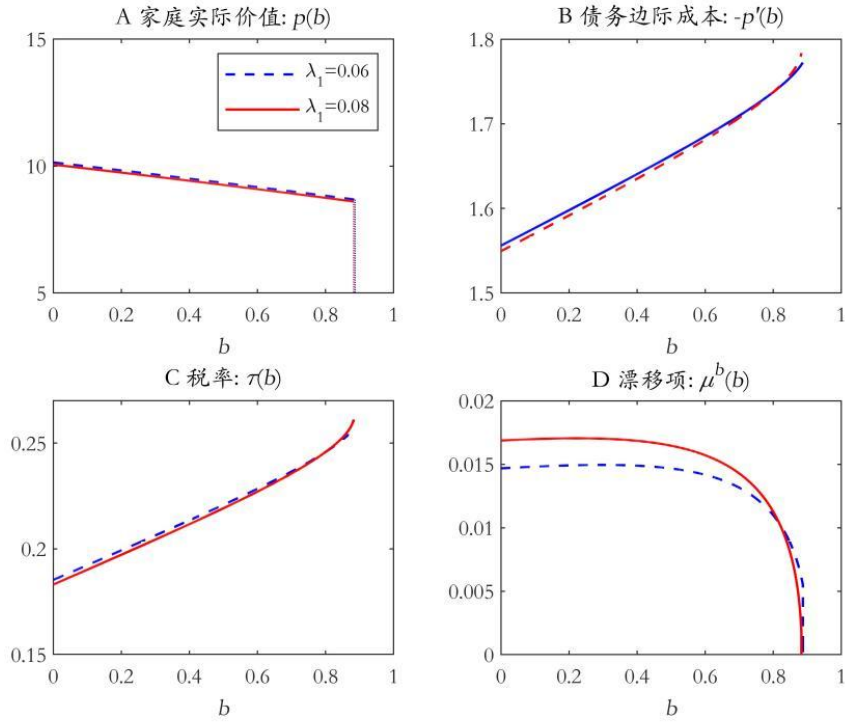


图 3-3 灾害发生的强度  $\lambda_1$  对家庭价值  $p(b)$ ，债务的边际成本  $-p'(b)$ ，最优税率  $\tau(b)$  以及债务产出比的漂移项  $\mu^b(b)$  的影响

接下来，我们进一步研究了温度对政府最优债务与税收的影响，接下来，我们将研究到达债务容量所需要的时间。

图 3-4 展示了随着温度（即，随着  $K$  的增加），政府耗尽其债务容量所需的时间减少。在我们的计算中，即使是看似很小的温度的增加，温度与的影响也很大。从中国目前的一般债务水平 79% 开始，如果温度增加到 1，到 2069 年达到债务上限需要大约 46 年，但如果温度增加到 6，到 2030 年达到债务上限需要 7 年。这一现象的背后，主要原因在于高温加剧了自然灾害的频发与严重程度，如洪水、干旱、飓风等，迫使政府投入巨额资金用于救援与重建工作。此外，气候变化还广泛影响了农业生产、水资源供应、人类健康等多个关键领域，进一步增加了政府的财政支出，从而加速了债务容量的消耗过程。

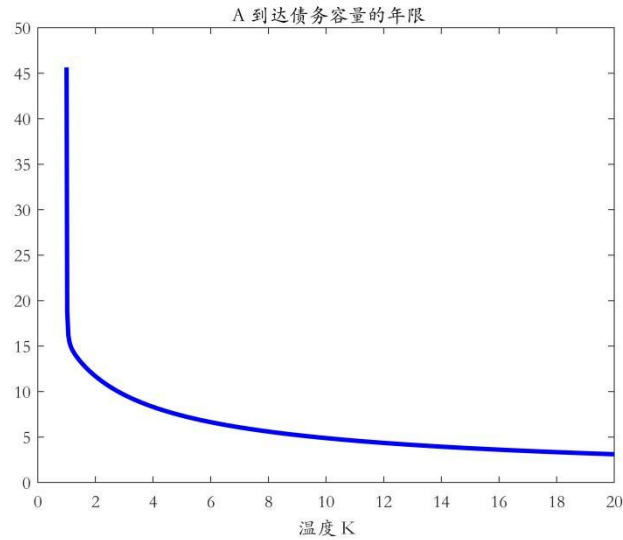


图 3-4 温度对达到债务容量所需的时间的影响 ( $b_0 = 0.79$  ,  $\bar{b} = 0.89$ )

最后我们从 Wind 数据库选取 2003 年 12 月 31 日到 2023 年 12 月 31 日的年度一般政府总债务占 GDP 比重的样本数据，对我们模型进行拟合，并描绘了从 2023 年开始，预测在不同参数 ( $\beta$ 、 $K$ 、 $\lambda_1$ ) 下我国耗尽其债务容量并达到稳定状态债务产出比的动态特性。

首先，在图 3-5 中，子图 A 显示，使用我们基线校准的参数绘制了 2003 年至 2023 年的一般政府总债务-GDP 比率动态行为。我们的模型（蓝色实线）近似地模拟了我国这 20 年期间债务-GDP 比率动态的趋势（黑色虚线）。

接着，如子图 B 所示，正如本文之前所述，当幂律指数  $\beta$  设定为 60 时，预计政府将在 2038 年达到其债务容量的上限 ( $\bar{b} = 0.89$ )。在此期间，债务与 GDP 的比率会逐渐上升，直至达到一个稳定状态，即  $\bar{b} = 0.89$ 。然而，如果幂律指数降至 10，那么债务与 GDP 的比率将展现出一种截然不同的增长模式——以更快的速度增长。这种加速的增长趋势导致政府在未来更早的时间点，即 2058 年，便达到了一个相对稳定的债务水平（如红色线所示）。这一现象的根源在于幂律指数的变化直接影响了经济体系中债务累积的动态过程。较低的幂律指数意味着经济系统对外部冲击（如自然灾害等）的敏感度增加，导致政府需要更快地增加债务以应对这些挑战。同时，较低的幂律指数可能意味着政府财政收入的波动性增加或支出需求的急剧上升，从而加速了债务积累的过程，使得政府更快地接近并达到其债务容量的上限。

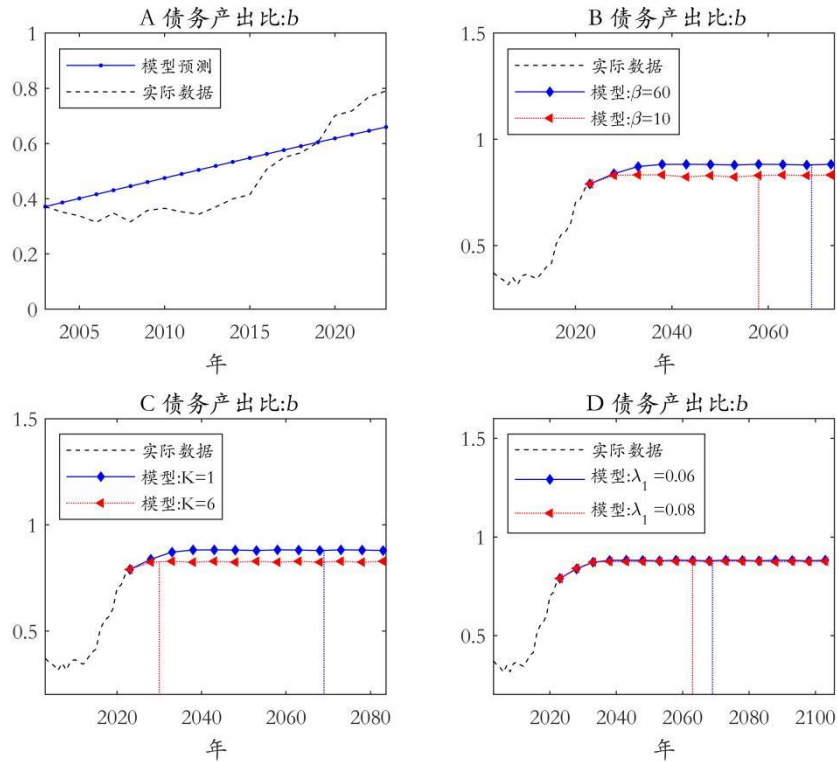


图 3-5 模型拟合并预测在三种情景下的债务-GDP 比率动态特征

其次，图 C 显示如果温度  $K$  从 1 增加至 6，那么，在 2030 年左右达到债务上限需要将近 7 年的时间，更快达到债务容量，这一现象的背后，是气候变化所引发的多重挑战共同作用的结果。首先，随着温度的显著上升，自然灾害如洪水、干旱、飓风等的发生频率和强度均大幅增加。这些灾害不仅直接造成了庞大的经济损失，还迫使政府迅速响应，投入巨额资金用于紧急救援和灾后重建工作。这一过程无疑加剧了政府财政的紧张状况，加速了债务的增长。其次，高温和极端天气条件对农业生产构成了严重威胁。农作物减产、品质下降成为常态，这不仅影响了农民的收入水平，也削弱了整个农业部门的经济活力。为了缓解农民的困境，政府往往需要提供补贴或其他形式的支持措施，这无疑进一步增加了政府的财政支出。再者，温度升高还可能导致水资源短缺和水质恶化问题日益严峻。为了确保水资源的可持续利用和满足居民的健康用水需求，政府不得不加大在水资源管理和保护方面的投入。这些额外的支出无疑也加重了政府的财政负担。最后，高温天气还带来了一系列健康问题，如热射病、传染病流行等。为了应对这些挑战，政府需要增加在医疗卫生领域的投入，以满

足不断增长的医疗需求。随着医疗成本的上升，政府的财政支出也随之增加。综上所述，温度  $K$  从 1 增加至 6 所带来的气候变化，通过加剧自然灾害、损害农业生产、影响水资源以及引发健康问题等多个方面，共同作用于政府财政，导致其支出急剧增加，从而在更短的时间内接近并达到债务容量的上限。

最后，当灾害风险  $\lambda_1$  从 0.06 增加到 0.08 时，政府在 2063 年左右预计会达到债务上限，并更快达到债务容量。其原因灾害风险的增加意味着自然灾害如洪水、干旱、飓风等的频率和强度可能会上升，这将导致更严重的经济损失。为了应对灾害风险的增加，政府需要增加在防灾减灾、应急救援、灾后恢复等方面的财政支出，这些因素共同作用使得政府更快达到债务容量。

### 3.4 本章小结

本文研究了气候冲击对最优债务与税收的影响，运用了随机微分方程来刻画政府价值动力学，通过随机分析、动态规划原理等推导出政府价值的 HJB 方程并求解，并分析了气候灾难对政府最优税收和债务的影响，最后得出有价值的经济学结论。

研究结果表明：温度作为气候变化的直接体现，温度的上升不仅影响农业生产、人类健康，还通过影响能源需求、消费模式等间接作用于经济系统。高温导致家庭价值受损，迫使政府采取减税降债的措施以缓解民众负担，但同样加速了债务累积的速度，要求政府更加谨慎地管理财政资源。此外，气候风险这一参数的引入，使得模型能够捕捉气候灾害发生概率及其潜在影响的不确定性。随着气候风险的攀升，家庭和企业面临的不确定性增加，投资和消费意愿下降，进一步削弱了经济活力。政府为应对这一局面，可能会采取更为激进的财政刺激措施，但这也预示着更高的财政风险，尤其是当政府债务迅速逼近其承受能力极限时。

## 第4章 总结和展望

### 4.1 研究结论

本文在 Jiang 等<sup>[28]</sup>的最优税收和债务模型中分别引入通货膨胀和气候灾难，构建了不确定环境下政府最优税收和债务模型并进行求解，利用数值模拟分析我国政府最优税收和债务，进一步总结出一系列丰富的经济学结论，以便向政府提供更加符合现实状况的管理和决策建议。

首先，本文根据费为银等<sup>[30][36]</sup>及其中的参考文献的通胀折现思路，将通胀因素引入本文的模型中，并利用随机分析理论推导通胀不确定环境下政府实际债务价值的演化动力学方程。接着，利用动态规划原理推导出通胀不确定环境下最优实际家庭价值的 HJB 方程。最后，对政府最优税收和债务进行数值模拟，分析通胀对政府最优税收和债务的影响，以及对达到债务容量的时间影响，并预测我国到达债务容量的时间，并结合图像分析给出一定的经济学解释和研究结论。研究结果表明：

（1）随着家庭不耐烦程度的增加，政府推迟征税的成本降低，政府债务负担和税收相对较小，因此政府更倾向于借贷。家庭不耐烦程度的增加不改变政府的债务容量，但它会显著增加债务-GDP 比率的漂移，进而影响到政府达到其债务容量所需的时间。

（2）当各经济体的产出损失增加时，政府的债务容量显著上升，但债务的边际成本和税率都有所下降，债务-GDP 比率的漂移增加。这是因为随着违约成本的增加，政府更有动力偿还债务，从而能够借到更多的资金。

（3）预期通胀率和通胀波动率不改变债务容量，但却会影响到达债务容量的时间。较高的预期通胀率会降低政府偿债边际成本和税收，加快到达债务容量的时间。这是由于较高的预期通胀率通过降低债务实际价值和增加财政政策的灵活性，减轻了政府偿债的边际成本和税收负担，进而加速政府债务累积达到债务上限。另一方面，较低通货膨胀波动率同样会降低政府偿债边际成本和税收，缩短到达债务容量的时间。在通胀波动率较低的环境下，政府债务的实际成本降低，这从而减少了偿债的边际成本和税收压力，这可能激励政府更多

地依赖债务融资来促进经济增长或实现政策目标。然而，这种策略可能促使债务迅速累积，从而缩短达到债务上限所需的时间。

其次，我们构建 GDP 跳扩散模型和包含气候因素影响的随机贴现因子模型，为进一步细化气候灾难与具体气候指标（如温度）的关系，我们构建了气候与温度的关联模型。随后，运用动态规划原理，我们推导出了在气候灾难环境下家庭最优决策的价值函数方程并求解，最后利用 Matlab 软件进行数值模拟，结合图像分析了气候灾难对政府最优税收和债务的影响。研究结果表明：

（1）作为衡量经济系统对资源分配敏感性的指标，幂律指数的减小反映了经济体系内不平等性的加剧或资源利用效率的下降。在此情境下，家庭的价值遭受侵蚀，导致政府为刺激经济而倾向于降低债务的边际成本和最优税率，以期通过增加流动性来缓冲经济压力。然而，这一举措也加速了政府接近其债务容量的进程，对财政长期稳定性构成挑战。

（2）温度作为气候变化的直接体现，温度的上升不仅影响农业生产、人类健康，还通过影响能源需求、消费模式等间接作用于经济系统。高温导致家庭价值受损，迫使政府采取减税降债的措施以缓解民众负担，但同样加速了债务累积的速度，要求政府更加谨慎地管理财政资源。

（3）气候风险这一参数的引入，使得模型能够捕捉气候灾害发生概率及其潜在影响的不确定性。随着气候风险的攀升，家庭和企业面临的不确定性增加，投资和消费意愿下降，进一步削弱了经济活力。政府为应对这一局面，可能会采取更为激进的财政刺激措施，但这也预示着更高的财政风险，尤其是当政府债务迅速逼近其承受能力极限时。

最后，基于上述研究结论，本文提出以下管理和政策建议：

（1）政府应认识到家庭的不耐烦程度对债务-GDP 比率漂移及到达债务容量时间的重要影响。因此，政府需通过增强家庭财务教育、完善社会保障体系、调整债务政策、强化金融监管、推动经济增长并建立风险预警机制，以减缓家庭的不耐烦情绪对债务积累及政府债务管理的负面影响，从而维护经济稳定和金融安全。违约成本对债务容量的影响。当违约成本增加时，政府更有动力偿还债务，这可以提高政府的债务容量。因此，政府应认识到违约成本对债务容量的影响，并通过加强债务风险管理、提高违约成本、优化债务结构、加强财政

纪律、促进经济增长、加强国际合作以及加强公众教育和宣传等管理政策来应对债务风险，提高债务容量，确保经济的稳定和可持续发展。政府需密切关注预期通胀率和通胀波动率的变化，建立健全的债务管理制度，定期评估债务状况，及时调整债务策略，以确保债务规模处于可控范围内。同时，政府应加强与国际社会的合作，共同应对全球性的债务风险挑战。此外，政府还应提高政策制定的透明度和公信力，以增强公众对政策的理解和信任，从而支持政府在经济管理和债务管理上的决策。

（2）随着气候风险的增加，最优税率有降低的趋势。政府可以考虑调整税收结构，比如引入或加强针对环境友好型活动的税收优惠，同时适度调整其他税种的税率，以平衡财政收入和环境保护的需求。此外，政府还可以考虑实施碳税等环境相关税种，以促进低碳经济转型。气候冲击导致政府更快地达到债务容量，因此政府需要审慎管理债务水平，确保债务可持续性。这包括制定合理的债务发行计划、优化债务结构、提高债务透明度以及加强债务风险管理等措施。政府应积极拓展多种融资渠道，以强化财政体系的稳定性和灵活性。并且提升公众对气候变化的认识与意识是至关重要的，这有助于构建全民参与、共同应对气候变化的良好社会氛围。政府应充分运用宣传教育、媒体传播等多元化手段，广泛普及气候变化的相关知识，增强公众的环保意识和责任担当。同时，政府应加大对绿色低碳产业的政策扶持和资金投入，鼓励企业和个人积极践行节能减排、低碳生活的理念和实践。

## 4.2 研究展望

基于本文的研究基础上，可以在未来拓展以下几个方面工作：

（1）本文也存在一些不足，将系统风险与通胀的相关系数和特殊风险与通胀的相关系数都设为零有其局限性。我们接下来的工作将考虑更一般的情形，结合本文模型的思想研究通胀下政府的最优债务与税收政策。

（2）将最优债务和税收模型推广到气候环境中，所得的结论更加符合现实，为政府制定政策提供了参考依据，使结论更加具有现实指导意义。展望未来，我们计划进一步丰富模型的维度，特别是将汇率这一国际经济关键变量纳入考

量。鉴于汇率作为国际经济联系的重要纽带，其波动不仅会影响一国的对外贸易和资本流动，还可能对国内经济稳定和政府财政状况产生深远影响。在气候灾难下，汇率的变动可能更为剧烈且难以预测，因气候冲击易引发全球市场的连锁反应，加剧经济不确定性和市场信心的动荡。因此，将汇率引入模型，深入分析气候灾难背景下政府如何通过调整最优税收与债务策略来有效应对汇率风险，将是一项极具前瞻性和实用价值的研究工作，有望为政府决策提供新的视角和有力的分析工具。

## 参考文献

- [1] Green C. From “Tax State” to “Debt State” [J]. Journal of Evolutionary Economics, 1993, 3: 23-42.
- [2] Kopczewska K, Kudła J, Walczyk K, et al. Spillover Effects of Taxes on Government Debt: A spatial panel approach[J]. Policy Studies, 2016, 37(3): 274-293.
- [3] Casalin F, Dia E, Hallett A H. Public Debt Dynamics with Tax Revenue Constraints[J]. Economic Modelling, 2020, (90): 501-515.
- [4] Wen C, Xu Y, Kim Y, et al. Starving Counties, Squeezing Cities: Tax and Expenditure Limits in the US[J]. Journal of Economic Policy Reform, 2020, 23(2): 101-119.
- [5] Babina T, Jotikasthira C, Lundblad C, et al. Heterogeneous Taxes and Limited Risk Sharing: Evidence from Municipal Bonds[J]. The Review of Financial Studies, 2021, 34(1): 509-568.
- [6] Creedy J, Scobie G. Debt Projections and Fiscal Sustainability with Feedback Effects[J]. New Zealand Economic Papers, 2017, 51(3): 237-261.
- [7] 黄春元, 毛捷. 财政状况与地方债务规模——基于转移支付视角的新发现[J]. 财贸经济, 2015, 6: 18-31.
- [8] 郭庆旺. 减税降费的潜在财政影响与风险防范[J]. 管理世界, 2019, 35(6): 1-10.
- [9] 叶青, 陈铭. 论减税降费背景下的地方财政对策[J]. 税务研究, 2019, 7: 8-11.
- [10] 甘行琼, 雷正. 减税降费对地方财政收入的影响研究——基于 2008—2019 年中国省际面板数据的分析[J]. 财政科学, 2022, (8): 76-93.
- [11] 张牧扬, 潘妍, 范莹莹. 减税政策与地方政府债务——来自增值税税率下调的证据[J]. 经济研究, 2022, 57(3): 118-135.
- [12] Eaton J, Gersovitz M. Debt with Potential Repudiation: Theoretical and Empirical Analysis[J]. The Review of Economic Studies, 1981, 48(2): 289-309.
- [13] Aguiar M, Gopinath G. Defaultable Debt, Interest Rates and the Current

- Account[J]. *Journal of International Economics*, 2006, 69(1): 64-83.
- [14]江时学. 阿根廷债务危机评析及其启示[J]. *国际金融研究*, 2002, (2): 18-22.
- [15]Sturzenegger F. Toolkit for the Analysis of Debt Problems[J]. *Journal of Restructuring Finance*, 2004, 1(1): 201-203.
- [16]徐明棋. 欧元区国家主权债务危机、欧元及欧盟经济[J]. *世界经济研究*, 2010, (9): 18-21+87.
- [17]Bulow J, Rogoff K. A Constant Recontracting Model of Sovereign Debt[J]. *Journal of Political Economy*, 1989, 97(1): 155-178.
- [18]潘爱玲, 刘文楷, 王雪. 管理者过度自信、债务容量与并购溢价[J]. *南开管理评论*, 2018, 21(3): 35-45.
- [19]Aguiar M, Amador M. *The Economics of Sovereign Debt and Default*[M]. Princeton University Press, 2023.
- [20]DeMarzo P, He Z, Tourre F. Sovereign Debt Ratchets and Welfare Destruction[J]. *Journal of Political Economy*, 2023, 131(10): 2825-2892.
- [21]Barro R J. On the Determination of the Public Debt[J]. *Journal of Political Economy*, 1979, 87(5, Part 1): 940-971.
- [22]Lucas R E, Stokey N L. Optimal Fiscal and Monetary Policy in An Economy without Capital[J]. *Journal of Monetary Economics*, 1983, 12(1): 55-93.
- [23]Abel A B, Mankiw N G, Summers L H, et al. Assessing Dynamic Efficiency: Theory and Evidence[J]. *The Review of Economic Studies*, 1989, 56(1): 1-19.
- [24]Abel A, Panageas S. Optimal Rollover of Government Debt in a Dynamically Efficient Economy[R]. University of Pennsylvania, Wharton School and UCLA, 2022.
- [25]Bohn H. The Sustainability of Budget Deficits in a Stochastic Economy[J]. *Journal of Money, Credit and Banking*, 1995, 27(1): 257-271.
- [26]Bolton P, Huang H. The Capital Structure of Nations[J]. *Review of Finance*, 2018, 22(1): 45-82.
- [27]Jiang Z, Lustig H, Van Nieuwerburgh S, et al. Manufacturing Risk-Free Government Debt[R]. National Bureau of Economic Research, 2020.

- [28]Jiang W, Sargent T J, Wang N, et al. A P Theory of Government Debt and Taxes[R]. National Bureau of Economic Research, 2022.
- [29]Jiang W, Sargent T J, Wang N, et al. A P Theory of Government Debt, Taxes, and Inflation[R]. National Bureau of Economic Research, 2023.
- [30]费为银, 张桂银, 费晨. 通胀不确定环境下政府最优税收和债务问题研究[J]. 计量经济学报, 2024, 4(4): 1064-1090.
- [31]张雪莹, 王聪聪, 向丽锦. 政府债务, 货币政策冲击与宏观经济波动——基于 DSGE 模型的分析[J]. 宏观经济研究, 2020, (10): 5-16+70.
- [32]Bhattarai S, Lee J W, Park W Y. Inflation Dynamics: The Role of Public Debt and Policy Regimes[J]. Journal of Monetary Economics, 2014, 67(10): 93-108.
- [33]Brennan M J, Xia Y. Dynamic Asset Allocation under Inflation[J]. The Journal of Finance, 2002, 57(3): 1201-1238.
- [34]姚海祥, 姜灵敏, 马庆华, 等. 考虑通货膨胀因素下的连续时间均值——方差投资组合选择[J]. 控制与决策, 2013, 28(1): 43-48.
- [35]Fei C, Fei W Y. Optimal Control of Markovian Switching Systems with Applications to Portfolio Decisions under Inflation[J]. Acta Mathematica Scientia, 2015, 35B(2): 439-458.
- [36]费为银, 李允贺, 夏登峰. 通胀下带激励的对冲基金最优投资[J]. 系统工程理论与实践, 2015, 35(11): 2740-2748.
- [37]费为银, 费晨, 夏登峰, 等. 模型不确定下带通胀的最优消费和投资组合问题研究[J]. 管理工程学报, 2017, 31(2): 177-184.
- [38]费晨, 杜宏俊, 费为银, 等. 通胀风险下的企业家投资——消费和对冲问题[J]. 系统工程学报, 2019, 34(3): 383-394.
- [39]费为银, 陈雅豪, 费晨. 通胀与生存约束下最优投资和自愿退休选择[J]. 系统工程学报, 2020, 35(1): 60-72.
- [40]费为银, 张繁红, 杨晓光. 通胀对高管的股权激励和工作努力策略的影响[J]. 中国管理科学, 2020, 28(11): 1-11.
- [41]Fei, C, Fei W Y, Zhang F H, et al. Agent's Optimal Compensation under Inflation Risk by Using Dynamic Contract Model[J]. Journal of Systems Science and

- Complexity, 2021, 34(6): 2291-2309.
- [42] 龚瑶, 严婷. 技术冲击、碳排放与气候环境——基于 DICE 模型框架的模拟[J]. 中国管理科学, 2014, 22(S1): 801-809.
- [43] Grinsted A, Ditlevsen P, Christensen J H. Normalized US Hurricane Damage Estimates Using Area of Total Destruction, 1900-2018[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 2019, 116(48): 23942-23946.
- [44] Emanuel K. Increasing Destructiveness of Tropical Cyclones over the Past 30 Years[J]. Nature, 2005, 436(7051): 686-688.
- [45] Kossin J P, Knapp K R, Olander T L, Velden C S. Global Increase in Major Tropical Cyclone Exceedance Probability over the Past Four Decades[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 2020, 117(22): 11975-11980.
- [46] Rasmussen T. Macroeconomic Implications of Natural Disasters in the Caribbean[M]. IMF Working Paper, 2004.
- [47] 郭琨, 边源, 张大永, 等. 气候风险对地方政府融资成本的影响[J]. 环境经济研究, 2023, 8(3): 108-131.
- [48] Klomp J. Financial Fragility and Natural Disasters: An Empirical Analysis[J]. Journal of Financial Stability, 2014, (13): 180-192.
- [49] Dafermos Y, Nikolaidi M, Galanis G. Climate change, Financial Stability and Monetary Policy[J]. Ecological Economics, 2018, (152): 219-234.
- [50] 吕勇斌, 李志生, 郭懿晨. 逆风前行: 台风灾害与银行风险行为[J]. 金融研究, 2024, (1): 19-37.
- [51] Berg G, Schrader J. Access to Credit, Natural Disasters, and Relationship Lending[J]. Journal of Financial Intermediation, 2012, 21(4): 549-568.
- [52] Hosono K, Miyakawa D, Uchino T, et al. Natural Disasters, Damage to Banks and Firm Investment[J]. International Economic Review, 2016, 57(4): 1335-1370.
- [53] David A C. How do International Financial Flows to Developing Countries Respond to Natural Disasters?[J]. Global Economy Journal, 2011, 11(4): 1-38.
- [54] Addoum J M, Ng D T, Ortiz-Bobea A. Temperature Shocks and Industry

- Earnings News[J]. *Journal of Financial Economics*, 2023, 150(1): 1-45.
- [55]李勇, 童绍玉. 气候变化对我国农业的影响及其适应研究[J]. *安徽农学通报*, 2023, 29(5): 151-157+175.
- [56]Wang J, Mendelsohn R, Dinar A, Huang J, et al. The Impact of Climate Change on China's Agriculture[J]. *Agricultural Economics*, 2009, 40(3): 323-337.
- [57]Cunha F A, de Oliveira E M, Orsato R J, et al. Can sustainable investments outperform traditional benchmarks?[J]. *Evidence from global stock markets. Business Strategy and the Environment*, 2020, 29(2): 682-697.
- [58]Filippini M, Leippold M, Wekhof T. Sustainable Finance Literacy and the Determinants of Sustainable Investing[J]. *Journal of Banking Finance*, 2024, 163: 107167.
- [59]De Angelis T, Tankov P, Zerbib O D. Climate Impact Investing[J]. *Management Science*, 2023, 69(12): 7669-7692.
- [60]Budolfson M, Dennig F, Errickson F, et al. Protecting the Poor with a Carbon Tax and Equal Per Capita Dividend[J]. *Nature Climate Change*, 2021, 11(12): 1025-1026.
- [61]王书平, 戚超, 李立委. 碳税政策、环境质量与经济发展——基于 DSGE 模型的数值模拟研究[J]. *中国管理科学*, 2016, 24(S1): 938-941.
- [62]陈国进, 陈凌凌, 金昊, 等. 气候转型风险与宏观经济政策调控[J]. *经济研究*, 2023, 58(5): 60-78.
- [63]张景华. 碳税的经济效应分析[J]. *现代经济探讨*, 2010, (2): 86-88.
- [64]唐晓旺. 促进低碳经济发展的企业所得税优惠政策研析[J]. *税务研究*, 2022, (4): 48-55.
- [65]葛玉御. 以绿色发展理念“绿化”我国税制[J]. *税务研究*, 2016, (10): 8-13.
- [66]Aguiar M, Gopinath G. Defaultable Debt, Interest Rates and the Current Account[J]. *Journal of International Economics*, 2006, 69(1): 64-83.
- [67]Cox J C, Ingersoll Jr J E, Ross S A. The Relation Between forward Prices and Futures Prices[J]. *Journal of Financial Economics*, 1981, 9(4): 321-346.
- [68]Karatzas I, Shreve S. *Methods of Mathematical Finance*[M]. New York: Springer,

1998.

- [69]严加安. 金融数学引论[M]. 北京: 科学出版社, 2023.
- [70]Rebelo S, Wang N, Yang J. Rare Disasters, Financial Development, and Sovereign Debt[J]. The Journal of Finance, 2022, 77(5): 2719-2764.
- [71]Loayza N V, Olaberria E, Rigolini J, et al. Natural Disasters and Growth: Going Beyond the Averages[J]. World Development, 2012, 40: 1317-1336.
- [72]Hong H, Wang N, Yang J. Mitigating Disaster Risks in the Age of Climate Change[J]. Econometrica, 2023, 91(5): 1763-1802.
- [73]Cont R, Tankov P. Financial Modelling with Jump Processes[M]. London: Chapman and Hall/CRC, 2004.

## 附录

### 附录 A

#### 引理 1 的证明

证明：

根据(2.14)可知名义债务的动力学为：

$$dB_{Nt} = (rB_{Nt} + \Gamma_{Nt} - T_{Nt})dt + dU_{Nt} - \Xi_t^h dZ_t^h - \Xi_t^m (\eta dt + dZ_t^m)$$

利用通胀折现的方法可求得实际债务过程  $B_t$  为：

$$\begin{aligned} dB_t &= d\left(\frac{B_{Nt}}{L_t}\right) = B_{Nt}d\left(\frac{1}{L_t}\right) + \frac{1}{L_t}dB_{Nt} + <d\left(\frac{1}{L_t}\right), dB_{Nt}> \\ &= -B_t((d_L - \sigma_L^2)dt + \sigma_L dZ_t^L) + \frac{1}{L_t}((rB_{Nt} + \Gamma_{Nt} - T_{Nt})dt + dU_{Nt} - \Xi_t^h dZ_t^h \\ &\quad - \Xi_t^m (\eta dt + dZ_t^m)) + \frac{\sigma_L \rho_{Lh} \Xi_t^h}{L_t}dt + \frac{\sigma_L \rho_{Lm} \Xi_t^m}{L_t}dt \\ &= ((r - d_L + \sigma_L^2)B_t + \Gamma_t - T_t)dt + dU_t - B_t \sigma_L dZ_t^L - \Theta_t^h (dZ_t^h - \sigma_L \rho_{hL} dt) \\ &\quad - \Theta_t^m (\eta dt - \sigma_L \rho_{mL} dt + dZ_t^m) \end{aligned}$$

至此，引理 1 证毕。

#### 在通胀下政府债务产出比的动力学的证明

证明：

证明 政府实际债务的动力学方程如下：

$$dB_t = ((r - d_L + \sigma_L^2)B_t + \Gamma_t - T_t)dt + dU_t - B_t \sigma_L dZ_t^L - \Theta_t^h dZ_t^h - \Theta_t^m (\eta dt + dZ_t^m)$$

$\theta^h$ ， $\theta^m$  的表达式如下：

$$\theta_t^m = \frac{\Theta_t^m}{Y_t} = \frac{P_{BY}(B_t, Y_t)}{P_{BB}(B_t, Y_t)} \psi_m = -\psi_m b_t$$

$$\theta_t^h = \frac{\Theta_t^h}{Y_t} = \frac{P_{BY}(B_t, Y_t)}{P_{BB}(B_t, Y_t)} \psi_h = -\psi_h b_t$$

根据(2.1)可以求得：

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{Y_t}\right) &= -\frac{1}{Y_t}(a_1 dt + \psi_m dZ_t^m + \psi_h dZ_t^h - \sigma_L dZ_t^L) + \frac{1}{Y_t}(\sigma_Y^2 + \sigma_L^2)dt \\ &= -\frac{1}{Y_t}[(a_1 - \sigma_Y^2 - \sigma_L^2)dt + \psi_m dZ_t^m + \psi_h dZ_t^h - \sigma_L dZ_t^L] \end{aligned}$$

将上述  $d\left(\frac{1}{Y_t}\right)$  的表达式代入下面方程中：

$$\begin{aligned} db_t &= d\left(\frac{B_t}{Y_t}\right) \\ &= \frac{1}{Y_t}dB_t + B_t d\left(\frac{1}{Y_t}\right) + \left\langle d\left(\frac{1}{Y_t}\right), dB_t \right\rangle \\ &= (((r - d_L + \sigma_L^2)b_t + \gamma - \tau(b_t))dt - b_t \sigma_L dZ_t^L - \theta_t^h dZ_t^h - \theta_t^m (\eta dt + dZ_t^m)) \\ &\quad - b_t ((a_1 - \sigma_L^2 - \sigma_Y^2)dt + \psi_h dZ_t^h + \psi_m dZ_t^m - \sigma_L dZ_t^L) \\ &\quad + (\theta_t^h \psi_h + \theta_t^m \psi_m - b_t \sigma_L^2)dt \\ &= [(r - d_L - a_1 + \sigma_L^2)b_t + \gamma - \tau(b_t) - \theta_t^m \eta + \sigma_Y^2 b_t + \theta_t^h \psi_h + \theta_t^m \psi_m]dt \\ &\quad - (\theta_t^h + \psi_h b_t)dZ_t^h - (\theta_t^m + \psi_m b_t)dZ_t^m + (\sigma_L b_t - b_t \sigma_L)dZ_t^L \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \mu_t^b &= (r - d_L - a_1 + \sigma_L^2)b_t + \gamma - \tau(b_t) - \theta_t^m \eta + \sigma_Y^2 b_t + \theta_t^h \psi_h + \theta_t^m \psi_m \\ \sigma_t^{b,h} &= -(\theta_t^h + \psi_h b_t) \\ \sigma_t^{b,m} &= -(\theta_t^m + \psi_m b_t) \\ \sigma_t^{b,L} &= 0 \end{aligned}$$

将  $\theta^h$ ， $\theta^m$  的表达式代入上式子，可得：

$$\begin{aligned} \mu_t^b &= (r - d_L - a_1 + \sigma_L^2)b_t + \gamma - \tau(b_t) - \theta_t^m \eta + \sigma_Y^2 b_t + \theta_t^h \psi_h + \theta_t^m \psi_m \\ &= (r - d_L - a_1 + \sigma_L^2 + \psi_m \eta)b_t + \gamma - \tau(b_t) \\ \sigma_t^{b,h} &= -(\theta_t^h + \psi_h b_t) = 0 \\ \sigma_t^{b,m} &= -(\theta_t^m + \psi_m b_t) = 0 \\ \sigma_t^{b,L} &= 0 \end{aligned}$$

又因为  $\xi = \psi_m \eta$ ，可得：

$$\mu_t^b = \mu^b(b_t) = (r - d_L - a_1 + \sigma_L^2 + \xi)b_t + \gamma - \tau(b_t)$$

整理可得(2.29)，证毕。

### 定理 1 的证明

证明：

证明：利用  $P(B, Y) = p(b)Y$  一阶齐次性质，可求得：

$$P_B = p'(b), P_{BB} = \frac{p''(b)}{Y}, P_Y = p(b) - p'(b)b, P_{YY} = \frac{p''(b)b^2}{Y}, P_{BY} = -\frac{p''(b)b}{Y}$$

将此代入(2.21)方程中，得到：

$$\begin{aligned} (\zeta + r)p(b) &= (1 - \tau(b) - c(\tau(b))) + ((r - d_L + \sigma_L^2)b + \gamma - \tau(b))p'(b) + \frac{p''(b)b^2}{2}\sigma_L^2 \\ &\quad + (a_1 - \psi_m\eta)(p(b) - p'(b)b) + \frac{p''(b)b^2}{2}\sigma_L^2 - p''(b)b^2\sigma_L^2 \end{aligned}$$

整理可得(2.34)，定理 1 证毕。

### 在通胀下 $\bar{b}$ 的取值的证明

证明：

按照比例计算的债务容量  $\bar{b}$  两个条件：

(1)  $p(\bar{b}) = \alpha \hat{p}$ ，即如果政府的违约动机很强，有限承诺约束在其债务容量上生效。

事实上，由于  $\mu(\bar{b}) = 0$ ，由(2.29)可得  $\tau(\bar{b}) = A\bar{b} + \gamma$ 。

又因为

$$c(\tau(b)) = \frac{\varphi}{2}\tau(b)^2,$$

可得：

$$c(\tau(\bar{b})) = \frac{\varphi}{2}\tau(\bar{b})^2 = \frac{\varphi}{2}[A\bar{b} + \gamma]^2 = \frac{\varphi}{2}A^2\bar{b}^2 + \frac{\varphi\gamma^2}{2} + \varphi A\bar{b}\gamma$$

当  $b = \bar{b}$ ，根据公式(2.32)可得：

$$(\zeta + r_v - a_1)p(\bar{b}) = (1 - \tau(\bar{b}) - c(\tau(\bar{b}))) + \mu(\bar{b})p'(\bar{b})$$

又因为  $\mu(\bar{b}) = 0$ ，所以

$$p(\bar{b}) = \frac{1 - \tau(\bar{b}) - c(\tau(\bar{b}))}{\varsigma + r_v - a_1}$$

又因为

$$p(\bar{b}) = \alpha \hat{p}, \quad \hat{p} = \frac{1 - \frac{\gamma}{\alpha} - kc(\frac{\gamma}{\alpha})}{\varsigma + r_v - a_1}$$

所以

$$1 - \tau(\bar{b}) - c(\tau(\bar{b})) = \alpha(1 - \frac{\gamma}{\alpha} - kc(\frac{\gamma}{\alpha}))$$

即

$$-\frac{\varphi}{2}A^2\bar{b}^2 - \bar{b}(A + \varphi A\gamma) + 1 - \alpha - \frac{\varphi\gamma^2}{2} + k\frac{\varphi\gamma^2}{2\alpha} = 0$$

于是

$$\begin{aligned} \bar{b} &= \frac{(\varphi\gamma + 1)A \pm A\sqrt{(\varphi\gamma + 1)^2 + \frac{4\varphi}{2}(1 - \frac{\varphi}{2}\gamma^2 - \alpha + k\frac{\varphi\gamma^2}{2\alpha})}}{-\varphi A^2} \\ &= \frac{(\varphi\gamma + 1) \pm \sqrt{1 + 2\varphi(1 - \alpha + k\frac{\varphi\gamma^2}{2\alpha} + \gamma)}}{-\varphi A} \end{aligned}$$

又因为  $\bar{b} > 0$ ，所以

$$\bar{b} = \frac{\sqrt{1 + 2\varphi(1 - \alpha + \frac{k\varphi\gamma^2}{2\alpha} + \gamma)} - \varphi\gamma - 1}{\varphi A}$$

(2)  $\tau(\bar{b}) = \bar{\tau}$ ，即当政府对征税的权力有限时(即，当  $\bar{\tau}$  不高时)， $\tau \leq \bar{\tau}$  约束在债务容量处生效。事实上，根据这个条件可以推出  $\bar{b}$ 。

当  $b$  达到债务容量  $\bar{b}$  时， $\tau(\bar{b}) = \bar{\tau}$ ， $\mu(\bar{b}) = 0$  可以推出  $\bar{b} = \frac{\bar{\tau} - \gamma}{A}$ 。结合以上两个  $\bar{b}$  的条件，可得：

$$\bar{b} = \min\left\{\frac{\sqrt{1+2\varphi(1-\alpha+\frac{k\varphi\gamma^2}{2\alpha}+\gamma)-\varphi\gamma-1}}{\varphi A}, \frac{\bar{\tau}-\gamma}{A}\right\}$$

整理可得(2.33)。证毕。

## 在气候灾难下家庭价值 HJB 的证明

证明：

基于 Hong 等<sup>[72]</sup>的研究以及 Cont 和 Tankov<sup>[73]</sup>关于跳扩散过程的理论，我们推导了家庭价值的 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 方程。

根据伊藤公式，可知家庭价值的动力学为：

$$\begin{aligned} dP(B_t, Y_t) = & P_B(B_t, Y_t)(rB_t + \Gamma_t - T_t - \Pi_t^m \eta)dt - P_B(B_t, Y_t)(\Pi_t^h dZ_t^h + \Pi_t^m dZ_t^m) \\ & + a_1 Y_t P_Y(B_t, Y_t)dt + Y_t P_Y(B_t, Y_t)(\psi_m dZ_t^m + \psi_h dZ_t^h) + \frac{P_{YY}(B_t, Y_t)}{2} Y_t^2 \sigma_Y^2 dt \\ & + \frac{P_{BB}(B_t, Y_t)}{2} ((\Pi_t^m)^2 + (\Pi_t^h)^2)dt - (\psi_m \Pi_t^m + \psi_h \Pi_t^h) Y_t P_{BY}(B_t, Y_t)dt \\ & + (P(B_t, \nu Y_t) - P(B_t, Y_t))dJ_t \end{aligned}$$

$$\text{又因为 } \frac{dM_t}{M_t} = -rdt - \eta dZ_t^m - \lambda E(\nu - 1)dt + (\nu - 1)dJ_t$$

继而，我们可以得到经过 SDF 调整的家庭价值函数的动力学：

$$\begin{aligned} d(M_t P(B_t, Y_t)) = & M_t [P_B(B_t, Y_t)(rB_t + \Gamma_t - T_t - \Pi_t^m \eta) + a_1 Y_t P_Y(B_t, Y_t)]dt \\ & + M_t \left[ \frac{P_{YY}(B_t, Y_t)}{2} Y_t^2 \sigma_Y^2 + \frac{P_{BB}(B_t, Y_t)}{2} ((\Pi_t^m)^2 + (\Pi_t^h)^2) \right] dt \\ & - M_t (\psi_m \Pi_t^m + \psi_h \Pi_t^h) Y_t P_{BY}(B_t, Y_t)dt - P_B(B_t, Y_t) M_t (\Pi_t^h dZ_t^h + \Pi_t^m dZ_t^m) \\ & + M_t Y_t P_Y(B_t, Y_t) (\psi_m dZ_t^m + \psi_h dZ_t^h) - M_t r P(B_t, Y_t)dt - M_t \eta P(B_t, Y_t) dZ_t^m \\ & - \lambda M_t E(\nu - 1) P(B_t, Y_t)dt - \eta \psi_m M_t Y_t P_Y(B_t, Y_t)dt + M_t P_B(B_t, Y_t) \Pi_t^m \eta dt \\ & + \lambda M_t (\nu P(B_t, \nu Y_t) - P(B_t, Y_t))dJ_t \end{aligned}$$

又因为  $\int_0^t e^{-\varsigma s} M_s (Y_s - T_s - C(T_s, Y_s))ds + e^{-\varsigma t} M_t dU_t + e^{-\varsigma t} M_t P(B_t, Y_t)$  是鞅，而

且  $dU_t = 0$ ，即

$$E(d(e^{-\varsigma t} M_t P(B_t, Y_t))) + e^{-\varsigma t} M_t (Y_t - T_t - C(T_t, Y_t))dt = 0$$

其中  $E(dZ_t^i) = 0, i = m, h$

将经过 SDF 调整的家庭价值函数的动力学代入上式中，即

$$\begin{aligned}
 (\zeta + r)P(B, Y) = & \max_{T \leq \bar{r}Y, \Theta^m, \Theta^h} (Y - T - C(T, Y)) + (rB + \Gamma - T)P_B(B, Y) \\
 & + \frac{P_{BB}(B, Y)}{2} ((\Pi^m)^2 + (\Pi^h)^2) + (a_1 - \psi_m \eta) Y P_Y(B, Y) \\
 & + \frac{P_{YY}(B, Y)}{2} Y^2 \sigma_Y^2 - (\psi_m \Pi^m + \psi_h \Pi^h) Y P_{BY}(B, Y) - \lambda E(\nu - 1) P(B, Y) \\
 & + \lambda E(\nu P(B, \nu Y) - P(B, Y))
 \end{aligned}$$

整理可得(3.5)，证毕。

### 在气候灾难下政府债务产出比的动力学的证明

证明：

证明 政府债务的动力学方程如下：

$$dB_t = (rB_t + \Gamma_t - T_t)dt + dU_t - \Pi_t^h dZ_t^h - \Pi_t^m (\eta dt + dZ_t^m)$$

将  $\pi^h$ ， $\pi^m$  的表达式代入上式子，可得：

$$\pi_t^m = \frac{\Pi_t^m}{Y_t} = \frac{P_{BY}(B_t, Y_t)}{P_{BB}(B_t, Y_t)} \psi_m = -\psi_m b_t$$

$$\pi_t^h = \frac{\Pi_t^h}{Y_t} = \frac{P_{BY}(B_t, Y_t)}{P_{BB}(B_t, Y_t)} \psi_h = -\psi_h b_t$$

根据(3.2)可以求得：

$$\begin{aligned}
 d\left(\frac{1}{Y_t}\right) &= -\frac{1}{Y_t} (a_1 dt + \psi_m dZ_t^m + \psi_h dZ_t^h - (1 - \nu) dJ_t) + \frac{1}{Y_t} \sigma_Y^2 dt \\
 &= -\frac{1}{Y_t} [(a_1 - \sigma_Y^2) dt + \psi_m dZ_t^m + \psi_h dZ_t^h - (1 - \nu) dJ_t]
 \end{aligned}$$

又因为  $dU_t = 0$ ，将上述  $d\left(\frac{1}{Y_t}\right)$  的表达式和  $dU_t = 0$  代入下面方程中

$$\begin{aligned}
 db_t &= d\left(\frac{B_t}{Y_t}\right) \\
 &= \frac{1}{Y_t}((rB_t + \Gamma_t - T_t)dt - \Pi_t^h dZ_t^h - \Pi_t^m(\eta dt + dZ_t^m)) \\
 &\quad - \frac{B_t}{Y_t}[(a_1 - \sigma_Y^2)dt + \psi_m dZ_t^m + \psi_h dZ_t^h - (1-\nu)dJ_t] + \left(\frac{\psi_m \Pi_t^m}{Y_t} + \frac{\psi_h \Pi_t^h}{Y_t}\right)dt \\
 &= (rb_t + \gamma - \tau(b_t))dt - \pi_t^h dZ_t^h - \pi_t^m(\eta dt + dZ_t^m) - b_t((a_1 - \sigma_Y^2)dt + \psi_h dZ_t^h \\
 &\quad + \psi_m dZ_t^m - (1-\nu)dJ_t) + (\pi_t^h \psi_h + \pi_t^m \psi_m)dt \\
 &= [(r - a_1)b_t + \gamma - \tau(b_t) - \pi_t^m \eta + \sigma_Y^2 b_t + \pi_t^h \psi_h + \pi_t^m \psi_m]dt - (\pi_t^h + \psi_h b_t)dZ_t^h \\
 &\quad - (\pi_t^m + \psi_m b_t)dZ_t^m + b_t(1-\nu)dJ_t
 \end{aligned}$$

其中

$$\mu_t^b = (r - a_1)b_t + \gamma - \tau(b_t) - \pi_t^m \eta + \sigma_Y^2 b_t + \pi_t^h \psi_h + \pi_t^m \psi_m$$

将  $\pi^h$ ,  $\pi^m$  的表达式代入上式子, 可得:

$$\begin{aligned}
 \mu_t^b &= (r - a_1)b_t + \gamma - \tau(b_t) - \pi_t^m \eta + \sigma_Y^2 b_t + \pi_t^h \psi_h + \pi_t^m \psi_m \\
 &= (r - a_1 + \psi_m \eta)b_t + \gamma - \tau(b_t)
 \end{aligned}$$

又因为  $\xi = \psi_m \eta$ , 可得:

$$\mu_t^b = \mu^b(b_t) = (r - a_1 + \xi)b_t + \gamma - \tau(b_t)$$

整理可得(3.14), 证毕。

## 定理 2 的证明

证明: 利用  $P(B, Y) = p(b)Y$  一阶齐次性质, 可求得

$$P_B = p'(b), P_{BB} = \frac{p''(b)}{Y}, P_Y = p(b) - p'(b)b, P_{YY} = \frac{p''(b)b^2}{Y}, P_{BY} = -\frac{p''(b)b}{Y}$$

将此代入(3.10)方程中, 得到:

$$\begin{aligned}
 (\varsigma + r)p(b) &= (1 - \tau(b) - c(\tau(b))) + (rb + \gamma - \tau(b))p'(b) + (a_1 - \xi)(p(b) - p'(b)b) \\
 &\quad + \lambda(K)E(p(b)(\nu^2 - 1)) - \lambda(K)E(\nu - 1)p(b)
 \end{aligned}$$

整理可得(3.15), 定理 2 证毕。

## 附录 B

## 各类表格

表 1 模型参数设置

| 参数符号        | 参数含义          | 参数取值  |
|-------------|---------------|-------|
| $r$         | 无风险利率         | 0.01  |
| $\gamma$    | 政府支出与产出比率     | 0.2   |
| $d_L$       | 预期通胀率         | 0.01  |
| $\sigma_L$  | 通胀波动率         | 0.1   |
| $\eta$      | 市场投资组合的夏普比率   | 0.05  |
| $\mu_Y$     | 名义的预期 GDP 增长率 | 0.03  |
| $\xi$       | 风险溢价          | 0.05  |
| $\alpha$    | 在违约制度下产出恢复率   | 0.95  |
| $\varphi$   | 扭曲性税收的无谓成本    | 2.9   |
| $k$         | 违约无谓损失        | 1.1   |
| $\varsigma$ | 不耐烦程度         | 0.001 |

表 2 基本参数设置

| 符号          | 参数                          | 数值    |
|-------------|-----------------------------|-------|
| $r$         | 无风险利率                       | 0.06  |
| $\gamma$    | 政府支出与产出比率                   | 0.2   |
| $\eta$      | 市场投资组合的夏普比率                 | 0.05  |
| $\mu$       | 预期 GDP 增长率                  | 0.03  |
| $\xi$       | 风险溢价                        | 0.04  |
| $\alpha$    | 在违约制度下产出恢复率                 | 0.9   |
| $\varphi$   | 扭曲性税收的无谓成本                  | 3     |
| $k$         | 违约无谓损失                      | 1     |
| $\varsigma$ | 不耐烦程度                       | 0.001 |
| $\beta$     | 幂律指数                        | 60    |
| $\lambda_0$ | 最低温度的灾害发生的概率                | 0.001 |
| $\lambda_1$ | 温度每增加 1 单位时, 灾害发生的概率或强度的增加量 | 0.06  |
| $K$         | 温度                          | 1     |

## 硕士期间发表的论文

- [1] 费为银, 张桂银, 费晨. 通胀不确定环境下政府最优税收和债务问题研究[J]. 计量经济学报, 2024, 4(4): 1064-1090.

## 致 谢

转眼间三年过去了，研究生的旅程已临近尾声。花开有时，学术之路亦亦有期。回首这段时光，仿佛昨日才刚刚踏入这片学术的沃土，而今已在无数个日夜的耕耘中收获了知识的果实与成长的喜悦。这段旅程并非一帆风顺，但正是那些在迷茫时为我指明方向、在困顿时为我加油鼓劲的人，让我得以坚定前行，最终在这片学术的花园中绽放出属于自己的光彩。在此，我要向所有帮助过我、关心过我的人表达我最真挚的感谢。

首先，我要特别感谢我的导师费为银教授。感谢他在我整个研究生涯中的悉心指导与无私支持。从研究方向的确定到论文的最终完成，费教授始终以严谨的治学态度和渊博的学识为我指明方向。每当我遇到学术难题时，他总是耐心解答，帮助我理清思路，突破瓶颈。在论文修改过程中，费教授更是倾注了大量心血，从框架结构到细节表述，他都提出了许多宝贵的建议，使我的论文得以不断完善。他的敬业精神与学术风范深深感染了我，不仅让我在学术研究上受益匪浅，也让我学会了如何以严谨的态度对待学问与生活。此外，我还要感谢费教授在学术资源上的支持。他为我提供了丰富的研究资料和学术交流机会，让我能够接触到领域内的前沿动态，拓宽了我的学术视野。他的鼓励与信任也让我在研究中充满信心，敢于探索未知领域。在此，我向费教授致以最诚挚的感谢与敬意。

其次，我还要特别感谢实验室的师兄师姐和同学们。感谢你们在公式推导、数据分析和论文写作中提供的宝贵建议与无私帮助。每当我遇到思路瓶颈时，你们总是耐心地与我讨论，分享自己的经验与见解，帮助我找到解决问题的突破口。那些在实验室里一起推导公式、在线上中激烈讨论问题的时光，不仅让我在学术上取得了很大的进步，也让我深刻体会到了团队合作的力量与温暖。特别感谢李亮师兄，在论文初期为我提供了详细的论文指导；感谢我的同门李学增和桂秀子，在数据分析阶段与我并肩作战，共同攻克了一个又一个难关。你们的陪伴与支持，让这段学术旅程充满了意义与感动。

同时，我要由衷地感谢我的家人和朋友。感谢你们在我最忙碌、最焦虑的时候，给予我无条件的支持与深切的理解。每当我因研究压力而感到疲惫时，是你们的关怀与鼓励让我重燃斗志；每当我因论文进展不顺而陷入迷茫时，是你们的开导与安慰让我重拾信心。特别感谢我的父母，你们始终默默支持我的选择，用无私的爱为我撑起了一片宁静的港湾；感谢我的朋友，你们在我最需要的时候陪伴在我身边，用欢声笑语驱散了我的焦虑与孤独。你们的支持不仅是我坚持下去的动力，也是我在这段旅程中最温暖的依靠。

谨以此文，献给所有曾给予我无私支持与帮助的人，再次表达我最真挚、最深切的感谢。

2025 年 5 月 14 日