

分类号: O231.3
密 级: 公开

单位代码: 10363
学 号: 2221020121

题 目 两类混杂系统的随机采样控制研究

英文并列

题 目 Research on Stochastic Sampling Control
for Two Types of Hybrid Systems

学生姓名 : 严 昊

指导老师 : 吴小太 教授

专 业 : 数 学

研究方向 : 随机系统稳定与控制

论文答辩日期: 2025 年 5 月 14 日

安徽工程大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：我恪守学术道德，崇尚严谨学风。所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已明确注明和引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品及成果的内容。论文为本人亲自撰写，我对所写的内容负责，并完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

学位论文作者签名： 

日期：2025 年 5 月 14 日

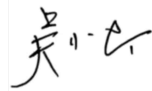
安徽工程大学学位论文版权使用授权书

学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅或借阅。本人授权安徽工程大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保密 ☐，在 _____ 年解密后适用本版权书。

本学位论文属于

不保密 ☒。

学位论文作者签名：  指导教师签名： 

日期：2025 年 5 月 14 日

日期：2025 年 5 月 14 日

两类混杂系统的随机采样控制研究

摘 要

混杂系统作为融合连续动态与离散事件的复杂系统，在航空航天、智能电网及工业自动化等领域具有重要应用价值。随机奇异系统可作为混杂系统的特例。因此，本文基于随机采样控制理论与有限时间稳定理论，系统探讨随机奇异系统的正则性、无脉冲性及耗散性能分析问题。通过输入延迟技术与伯努利分布，将确定性采样控制系统转化为含随机参数及时变时滞的线性随机奇异系统模型。针对广义耗散条件下的随机可容许性，创新性提出基于自由加权矩阵的分析框架；针对脉冲虚假数据注入攻击场景，结合平均脉冲区间方法与 Lyapunov 函数构造，建立随机奇异系统的有限时间稳定性判据。本研究为随机混杂系统在不确定性与攻击干扰下的鲁棒控制提供了理论支撑，拓展了混杂系统的控制理论体系，本文的主体研究工作涵盖以下具体方面：

首先，研究一类具有时变时滞和外部扰动的奇异系统的随机采样控制问题。针对外部扰动，本文制定了一种广义耗散控制策略来取代传统的 H_∞ 控制或无源框架，从而拓宽了潜在的应用范围。对具有时变时滞的奇异系统采用服从伯努利分布技术的随机采样控制，而不是现有工作使用的确定性采样。更重要的是，利用时滞相关的 Lyapunov-Krasovskii 泛函，通过 Jensen 不等式、自由加权矩阵方法和辅助向量函数方法建立了一个新的镇定准则。最后，给出了两个实际例子验证了所提方法的有效性。

其次，基于有限时间采样数据控制，研究一类具有脉冲虚假数据注入攻击的随机奇异系统的有限时间稳定性问题。利用平均脉冲区间方法建立了随机奇异系统的随机可容许性准则。本文设计了一个有限时间采样数据控制器，并通过线性矩阵不等式对计算结果进行了验证。此外，所分析的脉冲虚假数据注入攻击同时包括不稳定和稳定脉冲，与以前的工作相比，推导出的结果表现出较小的保守性。最后，通过两个数值实例验证了该方法的有效性和优点。

关键词：随机奇异系统；耗散性能；随机采样；时变时滞系统；随机稳定性

Research on Stochastic Sampling Control for Two Types of Hybrid Systems

ABSTRACT

Hybrid systems, as complex systems that integrate continuous dynamics and discrete events, have important application value in fields such as aerospace, smart grids, and industrial automation. Stochastic singular systems can serve as a special case of hybrid systems. Therefore, based on the theory of stochastic sampling control and finite time stability theory, this thesis systematically explores the analysis of regular, impulse-free, and dissipative performance of stochastic singular systems. By using input delay techniques and Bernoulli distributions technique, the deterministic sampling control system is transformed into a linear stochastic singular system model with stochastic parameters and time-varying delays. An innovative framework for stochastic tolerance analysis under generalized dissipation conditions based on free weighting matrices is presented. The finite time stability criterion of stochastic singular system is established based on the average pulse interval method and Lyapunov function structure for the scenario of impulsive false data injection attacks. This thesis provides theoretical support for robust control of stochastic hybrid systems under uncertainty and attack disturbances, and expands the control theory system of hybrid systems. The main research work of this thesis includes the following specific aspects:

Firstly, the stochastic sampling control problem for a class of singular systems with time-varying delay and external perturbations is explored. For external perturbations, an extended dissipative control strategy is proposed to replace the conventional H_∞ control or passive frameworks, thereby broadening the potential application scope. The Bernoulli distribution technique is employed to manage stochastic sampling for singular systems with time-varying delay, deviating from the deterministic sampling utilized in existing works. More importantly, using delay-dependent Lyapunov-Krasovskii functional, a novel stabilization criterion is

established via Jensen inequality, free weighting matrix method, and auxiliary vector function approach. Finally, two practical examples are provided to demonstrate the efficacy of the proposed methodology.

Secondly, based on finite time sampled-data control, the finite time stability problem of a class of stochastic singular systems subject to impulsive false data injection attacks is examined. Stochastic admissibility criteria for stochastic singular systems are developed using the average impulsive interval method. A finite time sampled-data controller is designed, and the results are validated through linear matrix inequalities. Additionally, the analyzed impulsive false data injection attacks encompass both destabilizing and stabilizing impulses, with the derived results exhibiting reduced conservatism compared to prior work. Finally, two numerical examples are presented to confirm the effectiveness and advantages of the proposed approach.

KEY WORDS: Stochastic singular system; Dissipative performance; Stochastic sampling; Time-varying delay systems; Stochastic stability.

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 研究背景与意义	1
1.2 国内外研究现状	2
1.3 主要研究内容	4
第 2 章 预备知识	6
2.1 基本符号	6
2.2 基本定义	6
2.3 相关引理	7
第 3 章 时变时滞奇异系统的广义耗散采样控制	8
3.1 引言	8
3.2 问题描述	9
3.3 时变时滞奇异系统的确定性采样控制	11
3.4 时变时滞奇异系统的随机采样控制	15
3.5 数值仿真	21
3.6 本章小结	25
第 4 章 脉冲攻击下随机奇异系统的有限时间采样数据控制	26
4.1 引言	26
4.2 系统描述	27
4.3 稳定性分析与控制器设计	29
4.4 数值仿真	34
4.5 本章小结	39
第 5 章 总结与展望	40
5.1 总结	40
5.2 未来工作展望	41
参考文献	42
攻读硕士学位期间的主要研究成果及获奖情况	48
致 谢	49

第 1 章 绪论

1.1 研究背景与意义

混杂系统广泛存在于日常生产生活与复杂工程实践中，因其特有的连续-离散耦合演化机制、丰富的多模态动力学特性，以及与实际工程问题的深度关联性，已成为国内外控制理论与应用领域的重要前沿研究方向。该类系统在航空航天控制、智能电网调度、工业过程优化等领域具有显著的工程应用价值，其研究成果为复杂系统建模、分析提供了关键理论支撑。

作为混杂系统的重要分支，奇异系统与脉冲系统在理论研究与工程实践中占据特殊地位^[1]。奇异系统通常采用广义状态空间模型描述，其动力学特性包含代数约束与微分方程的耦合关系，并可能伴随脉冲动态等复杂行为。而脉冲系统则由连续时间动态与离散时刻的瞬时脉冲扰动共同驱动，其状态演化过程呈现典型的连续-离散混合特征。相较于传统连续系统，奇异系统的代数约束与特殊动态增加了分析复杂度，脉冲系统的状态跳变也为稳定性研究带来独特挑战。围绕系统稳定性这一控制理论核心问题，对奇异系统与脉冲系统的分析需聚焦连续动态与离散特性的交互机制^[2]。不仅要分析奇异系统中代数约束与连续动态的关联、脉冲系统跳变前后的状态演变规律，更要深入挖掘二者相互影响关系（如含脉冲的奇异系统）中，离散跳变、连续动态及代数约束的耦合影响，为完善复杂系统稳定性理论体系、推动航空航天控制、网络控制系统等实际工程应用提供理论支持。

奇异系统在科学领域中已经发展了几十年，在建模现实世界系统方面应用广泛，包括机械工程^[3]、电力系统^[4]、经济系统^[5]等领域。奇异系统引起了大量关注，因为它们可以显著增强我们对自然和社会环境中复杂现象的理解。随机微分代数奇异系统^[6]得到了巨大的发展，因为随机建模在工程和科学的各个分支中变得越来越重要。现有文献[7-10]突出了该领域的重大贡献。奇异非线性随机混合系统^[7]研究随机稳定性问题中提出了线性和非线性状态反馈控制器设计方法。利用广义的二次 Lyapunov -Krasovskii 泛函探讨了 Takagi-Sugeno 模糊奇异系统^[5]背景下的均方可接受性问题。

采样数据控制系统已经获得了广泛的关注，因为现代控制系统^[11-12]通常使用

数字技术来实现控制器。最初，使用三种主要技术来管理采样数据系统：脉冲模型方法^[13]、离散时间方法^[14]和输入延迟方法^[15]。随后，采样控制系统转化成含有时变时滞的系统。在各类系统中，时常会涌现出不稳定现象和时间延迟现象，称为“时滞”便是其中较为典型的一种。时滞系统主要分为两类：一类是时变时滞系统，其时间延迟量会随时间动态变化；另一类是常时滞系统，系统中的时间延迟保持恒定。时滞系统具有极为广泛的应用背景，在生物系统、工程电路系统、神经网络、机械系统以及建筑结构等诸多领域均有大量体现。例如在生物系统中，细胞信号传导过程可能存在时滞，影响着生物反应进程；工程电路系统里，信号传输过程中的时滞会对电路性能产生作用。用合适的 Lyapunov 函数求解了时变时滞文献[16]中系统的稳定性问题。文献[17]提出了一种改进的输入延迟管理方法，用于解决最大允许采样间隔下的不确定采样和连续时间线性系统的问题。此外，采样控制系统作为现代控制理论的重要分支，其核心思想是通过周期性或非周期性采样将连续时间信号转化为离散时间序列，从而实现对物理系统的数字化控制。值得关注的是，采样控制系统的性能高度依赖采样周期选择；过慢的采样会导致系统响应滞后，过快的采样则增加计算负担并可能引发高频噪声放大。此外，量化误差、时滞补偿等问题也构成了经典研究课题。通过引入自适应采样策略、预测控制算法等，可有效提升系统鲁棒性与控制精度。这些理论成果在电机调速、过程控制等领域得到了广泛验证，为数字化控制技术发展奠定了坚实基础。

1.2 国内外研究现状

1.2.1 国外研究现状

在现代控制理论领域，奇异系统与脉冲系统作为两类典型的混杂系统，因其独特的动力学特性和广泛的工程应用背景，始终是国际学术界关注的热点。自 20 世纪 70 年代以来，奇异系统的研究在国际上逐步兴起，并成为现代控制理论的重要分支之一。最早提出奇异系统基本概念^[18]的是英国学者 Rosenbrock，他在研究一阶动力系统结构与性质的过程中，系统地分析了奇异系统所受的约束条件，并探讨了其可解性问题。这一研究奠定了奇异系统理论的基础，也引发了后续学者对其特性的深入探索。在此基础上，美国学者 Luenberger^[19-20]进一步拓展了

Rosenbrock 的研究, 重点关注线性奇异系统的可解性, 并围绕相关问题发表了多篇重要论文。随着研究的推进, 学者们逐步认识到, 奇异系统不仅能够用于刻画受约束的动力系统, 还能够有效描述许多复杂的工程与物理系统, 从而推动了该理论在更广泛领域的应用。随着理论的不完善, 奇异系统的研究逐渐从基本结构分析拓展到控制方法设计。Rosenbrock 等学者^[21]提出了一系列基于奇异系统的建模与分析方法, 使其在最优控制、鲁棒控制等领域展现出独特的优势。此外, 奇异系统还在机器人控制、信号处理、航空航天等高新技术应用中发挥了重要作用。

在实际问题中, 所考虑的系统会出现一些不确定因素, 耗散性理论可以更好地弥补这些不确定问题。耗散系统理论^[22]最早是由 Willems 在 1972 年提出并已成为控制理论和电路系统中的一个重要概念。耗散系统理论拓展了无源理论、Kalman-Jakobowicz 引理和圆判据定理^[23]。Fridman 在一项研究中提及到一种新的 H_∞ 控制问题, 其中采样控制系统被表示为连续时间系统^[24]。另一方面, 耗散理论能够对被控系统的诸多问题展开研究, 涵盖系统镇定、鲁棒 H_∞ 控制、最优控制等领域。Byrnes 等学者在文献[25]中, 针对一类非线性系统, 探讨了用于实现全局渐近镇定的方案。近年来, 国外有越来越多的学者, 对系统的耗散性能分析表现出浓厚兴趣。比如, Meisami-Azad 等人在文献[26]中, 针对状态空间对称系统, 开展了耗散分析以及相应的控制研究。Renquan 等人在文献[27]里, 针对具有时滞的随机描述系统, 深入探究了其耗散控制问题。

最近, 已经引入了许多创新的控制方法来开发有效的控制器, 包括: 采样控制、输出反馈控制和滑模控制等。各种控制方案具有不同的优点。信号从一个或多个位置获取, 并通过采样数据控制方法在指定时间区间表现为离散脉冲。与连续控制器相比, 有限时间采样数据控制器具有几个优点, 包括易于安装、可靠性强、维护成本低和提高效率。因此, 采样数据控制系统已成为跨多个学科研究领域的重要课题^[28]。Rakkiyappan 等人解决了在马尔可夫跳变混沌神经网络中使用采样数据控制器实现指数同步的问题。Sakthive 等学者在文献[29]中讨论了具有状态反馈采样数据控制的 T-S 模糊系统, 该系统包含增益变化和满足服从伯努利分布的随机变量建模的随机不确定性问题。

1.2.2 国内研究现状

近年来, 国内科研水平稳步提升, 随机系统相关理论研究蓬勃发展, 逐步形

成了以随机过程理论和微分方程理论为核心的随机系统理论。Mao 于 1994 年和 1997 年出版的著作^[30-31]堪称这一领域的开山之作，书中对随机微分方程算法进行了详尽阐释，为后续研究筑牢了根基。Liu 和 Deng^[32]率先投身随机系统的变结构控制研究，聚焦一般连续型 Itô 随机系统，通过构建滑动模型，经严谨推导出变结构控制律。随着研究持续深入，随机系统理论结出累累硕果。此后，Li 与 Xu^[33]深入探究随机系统的滤波问题，不仅完成稳定性分析，还设计出相应控制器，并将成果集结成《随机系统的滤波与控制》一书出版。Zhang 等学者^[34-35]专注于随机系统的均方稳定性分析，凭借 Lyapunov 型方程存在正定解这一充要条件，精准判定随机系统的稳定性。后续，他们进一步钻研随机线性受控系统，借助算子谱等前沿方法，成功推导出系统镇定条件，攻克镇定与精确能观测性难题，为随机系统理论发展添砖加瓦。

脉冲控制也广泛应用于各个领域，包括卫星轨道转移、药代动力学中的剂量管理和生态系统管理^[36-39]。脉冲控制的核心概念是在特定时刻实现瞬时状态变化。因此，脉冲控制可以大大减少传输信息量和控制成本。基于双级脉冲控制和鲁棒全局指数同步的混沌延迟神经网络问题^[40]是研究重点，提出了一种新的脉冲控制方案，不仅提供了指数收敛速度的估计，而且在指定的误差范围内实现了指数同步。在脉冲效应下，基因调控网络在有限时间框架内的稳定性在文献^[41]中得到了检验。在文献^[42]中首次介绍了非线性有限时间采样控制系统的混合控制器有限时间稳定性判据问题。

1.3 主要研究内容

基于以上分析，本学位论文将以随机混杂系统为研究对象，根据随机采样控制和有限时间稳定理论，主要讨论两类随机混杂系统的正则性、无脉冲性和耗散性能分析问题。利用输入延迟技术，通过伯努利分布将确定性采样控制系统有效地转化为具有随机参数和时变时滞的线性随机奇异系统。通过采用自由加权矩阵方法，设计了一个新的方法来证明广义耗散下奇异系统的随机可容许条件；通过采用平均脉冲区间方法和构造 Lyapunov 函数，提出了一种证明随机奇异系统在脉冲虚假数据注入攻击下的随机可接受性条件的新方法。本篇论文的主要研究内容由五部分章节组成：

第一章系统阐述了混杂系统、随机奇异系统及脉冲系统的研究背景与理论价值。重点分析了随机采样控制理论，明确了本文的研究目标与创新方向。

第二章统一规范了全文使用的符号体系，为后续章节的理论推导奠定了数学基础。

第三章研究一类具有时变时滞和外部扰动的奇异系统的随机采样控制问题。使用伯努利分布技术将奇异系统转化成随机采样控制，利用 Lyapunov-Krasovskii 泛函、Jensen 不等式、自由加权矩阵方法和辅助向量函数方法建立了一个新的镇定准则。最后，给出了两个实际例子来验证所提方法的有效性。

第四章基于有限时间采样数据控制，研究一类具有脉冲假数据注入攻击的随机奇异系统的有限时间稳定性问题。利用平均脉冲区间方法建立了随机奇异系统的随机可容许性准则，通过数值仿真验证了理论结果的有效性与工程实用性。

第五章对全文研究内容进行了总结，并对未来工作进行了展望。

第 2 章 预备知识

2.1 基本符号

$\mathbb{R}$	实数集
$\mathbb{R}_+$	非负实数集
I	维数适合的单位阵
P^T	矩阵 P 的转置
P^{-1}	矩阵 P 的逆
$P > 0$	矩阵 P 是对称正定
$\lambda_{\min/\max}(P)$	矩阵 $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 的最小/最大特征值
$\text{rank}(\mathcal{E})$	表示矩阵 $\mathcal{E}$ 的秩
$ x $	向量 x 的欧氏范数
$\ A\ $	矩阵 A 的导出范数
$\mathbb{R}^n$	n 维实数空间
$\mathbb{R}^{n \times m}$	$n \times m$ 维实数矩阵空间
$\mathbb{E}\{\cdot\}$	表示数学期望
$\begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ * & S_3 \end{bmatrix}$	$*$ 表示分块阵 S_2 的对称矩阵

2.2 基本定义

- (1) 若矩阵 A 满足条件 $A = A^T$ ，则称 A 为对称矩阵。
- (2) 设 A 是实对称矩阵，如果对任何非零矩阵 x ，都有 $x^T A x > 0$ ，其中 x^T 表示 x 的转置，则称 A 为正定矩阵。

(3) 设 A 是实对称矩阵, 如果对任何非零矩阵 x , 都有 $x^T A x < 0$, 其中 x^T 表示 x 的转置, 则称 A 为负定矩阵。

(4) 若 $P - Q$ 正定, 则称矩阵 $P > Q$ 。

(5) 若 $P - Q$ 负定, 则称矩阵 $P < Q$ 。

2.3 相关引理

引理 1^[48] (1) 对于给定的正标量 τ_0 和 $\tau(t)$ 满足 $0 \leq \tau(t) \leq \tau_0$, 如果 $(\mathcal{E}, \mathcal{A})$ 和 $(\mathcal{E}, \mathcal{A} + \mathcal{A}_d)$ 都是正则且无脉冲的。

(2) 对于任何 $\theta > 0$, 存在正 $\delta(\theta)$, 使得

$$\sup_{-\tau_0 \leq t \leq 0} \mathbb{E} \|\phi(t)\|^2 < \delta(\theta),$$

当 $\mathbb{E} \|x(t)\|^2 < \theta$ 时, 我们有, $u(t) = 0$ 和 $\omega(t) = 0$ 条件下的系统 (3.1) 是随机稳定的。

引理 2^[52] (Schur 补引理) 给定适当维数的常量矩阵 X_1, X_2, X_3 , 其中 $X_1 = X_1^T, X_3 = X_3^T$, 令如下分块阵

$$X = \begin{bmatrix} -X_1 & X_2 \\ * & -X_3 \end{bmatrix}.$$

则如下三个命题相互等价:

- (1) $X < 0$;
- (2) $X_3 > 0, \quad -X_1 + X_2 X_3^{-1} X_2^T < 0$;
- (3) $X_1 > 0, \quad -X_3 + X_2^T X_1^{-1} X_2 < 0$.

第3章 时变时滞奇异系统的广义耗散采样控制

本章将从三个不同的角度研究这些问题。定理 3.1 建立了系统 (3.1) 在确定性采样条件下的广义耗散性能。定理 3.2 对时变时滞奇异系统引入了一种基于伯努利分布的新型随机采样控制方法，有效地降低了保守性。定理 3.3 说明了所研究的系统可以实现稳定性、随机可容许性和严格的 (M, N, H) 耗散性。

3.1 引言

我们在第一章中已经说明随机奇异系统在建模真实世界方面特别有效，并且取得了一定的研究成果^[7-10]。在文献[43-47]对广义耗散系统中耗散分析的挑战和耗散控制的灵活性进行了深入的研究，然而，随机采样奇异系统的广义耗散控制，仍然知之甚少。本文主要讨论时变时滞随机奇异系统的广义耗散性能问题，其中主要挑战包括：1) 如何使用随机采样控制策略替代现有的确定性采样方法，得到具有时变时滞随机奇异系统中的正则性和无脉冲性。2) 如何利用确定性采样技术实现适用于奇异系统的线性不等式，从而解决广义耗散下的随机采样控制问题，而不是仅仅专注于解决 H_∞ 控制问题。

本章通过随机采样控制策略研究了具有时变时滞和外部扰动的奇异系统的广义耗散镇定问题。值得注意的是，广义耗散控制策略包括传统的 H_∞ 控制或无源框架，具有更广泛的应用范围。与确定性采样控制系统不同，针对具有时变时滞的奇异系统提出了一种新的随机采样控制方法。该方法保证随机采样的概率遵循特定的周期常数，从而更准确地捕捉到采样过程中的随机特性。其次，利用输入延迟技术，通过伯努利分布将概率采样系统有效地转化为具有随机参数和时变时滞的线性随机奇异系统。通过采用自由加权矩阵方法，开发了一个新的公式来证明广义耗散下奇异系统的随机可容许性条件，提出了比仅解决 H_∞ 控制问题更好更有优势的策略。最后，给出了两个实际例子来验证所提方法的有效性。

3.2 问题描述

考虑以下具有时变时滞的奇异系统：

$$\begin{aligned}\mathcal{E}dx(t) &= (Ax(t) + A_d x(t - \tau(t)) + Bu(t) + B_w \omega(t))dt, \\ y(t) &= Cx(t), \\ x(t) &= \eta(t), \quad t \in [-\tau_0, 0],\end{aligned}\tag{3.1}$$

其中 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 和 $u(t) \in \mathbb{R}^p$ 表示系统状态变量和控制输入。 $\omega(t) \in \mathbb{R}^l$ 表示扰动输入， $y(t) \in \mathbb{R}^q$ 表示控制输出。 $\mathcal{E} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是 $\text{rank}(\mathcal{E}) = r \leq n$ 的奇异矩阵。 A, B, C, A_d 和 B_w 是具有适当维度的常数矩阵。 $\eta(t)$ 是初始向量函数。 $\tau(t)$ 表示时变时滞满足 $0 \leq \tau(t) \leq \tau_0, \dot{\tau}(t) \leq \mu \leq 1$ 。

考虑到时变时滞，采样数据控制器可以构造为

$$u(t) = u_d(t_i) = Kx(t_i), \quad t_i \leq t < t_{i+1},\tag{3.2}$$

其中 u_d 是离散时间的控制信号， $t_i (i = 0, 1, 2, \dots)$ 表示采样瞬间， K 表示状态反馈增益矩阵，在控制器 (3.2) 下，系统 (3.1) 可以表示为

$$\begin{aligned}\mathcal{E}dx(t) &= (Ax(t) + A_d x(t - \tau(t)) + BKx(t_i) + B_w \omega(t))dt, \\ y(t) &= Cx(t), \quad t_i \leq t < t_{i+1}, \\ x(t) &= \eta(t), \quad t \in [-\tau_0, 0].\end{aligned}\tag{3.3}$$

接下来，为证明稳定性分析结果，介绍本章所需要的一些定义和引理。

定义 1^[10] 当采样数据控制系统 (3.1) 具有正则、无脉冲、随机稳定的性质，称为随机可容许性。

定义 2^[51] 当存在标量 κ 和 $t_f \in [0, \infty)$ ，时变时滞奇异系统 (3.3) 是具有广义耗散性，使得

$$\mathbb{E} \left\{ \int_0^{t_f} G(t) dt \right\} - \sup_{0 \leq t \leq t_f} \mathbb{E} \{ y^T(t) D y(t) \} \geq \kappa,\tag{3.4}$$

其中被积函数 $G(t)$ 设置如下

$$G(t) = y^T(t) M y(t) + 2y^T(t) N \omega(t) + \omega^T(t) H \omega(t),$$

并且对于给定的矩阵 M, N, H 和 D 满足：

- 1) $D = D^T \geq 0, M = M^T \leq 0, H = H^T$,
- 2) $(\|M\| + \|N\|)\|D\| = 0$.

引理 3^[49] 当 $\omega(t) = 0$ 时, 如果 $\text{rank}(\mathcal{E}) = r$, 则系统 (3.1) 满足

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} \\ \mathcal{A}_{21} & \mathcal{A}_{22} \end{bmatrix}, \mathcal{A}_d = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{d11} & \mathcal{A}_{d12} \\ \mathcal{A}_{d21} & \mathcal{A}_{d22} \end{bmatrix}, \mathcal{B} = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_1 \\ \mathcal{B}_2 \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

$x(t) = [x_1^T(t) \ x_2^T(t)]^T$, $x_1(t) \in \mathbb{R}^r$, $\mathcal{A}_{11} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $\mathcal{A}_{d11} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $\mathcal{B}_1 \in \mathbb{R}^{q \times q}$ 。从而有

$$\begin{aligned} dx_1(t) &= (\mathcal{A}_{11}x_1(t) + \mathcal{A}_{12}x_2(t) + \mathcal{A}_{d11}x_1(t - \tau(t)) + \mathcal{A}_{d12}x_2(t - \tau(t)) + \mathcal{B}_1u(t))dt, \\ 0 &= (\mathcal{A}_{21}x_1(t) + \mathcal{A}_{22}x_2(t) + \mathcal{A}_{d21}x_1(t - \tau(t)) + \mathcal{A}_{d22}x_2(t - \tau(t)) + \mathcal{B}_2u(t))dt, \\ y(t) &= \mathcal{C}_1x_1(t) + \mathcal{C}_2x_2(t), \end{aligned} \quad (3.6)$$

其中, $\eta(t) = [\eta_1^T(t) \ \eta_2^T(t)]^T$ 。

引理 4^[50] (Jensen 不等式) 对于任何正矩阵 $\hat{Z} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ 和标量 a_1, a_2 ($0 < a_1 < a_2$)。存在合适的向量函数 $x(t)$, 使得

$$\int_{a_1}^{a_2} x^T(t) \hat{Z} x(t) dt \geq \frac{1}{a_2 - a_1} \int_{a_1}^{a_2} x^T(t) dt \hat{Z} \int_{a_1}^{a_2} x(t) dt.$$

本章的主要目的是研究基于设计的采样控制输出下随机奇异时滞系统的随机可容许性和广义耗散性问题。根据已知的确定性采样控制方法, 将随机采样控制方法推广到更一般的情景, 并探索其稳定性和广义耗散性能。具体框架如图 3-1 所示。

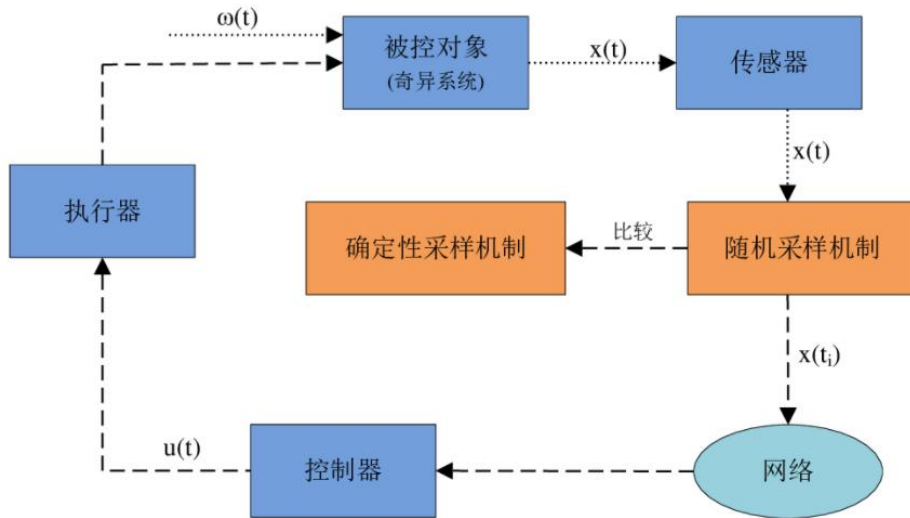


图 3-1 本章的结构图

3.3 时变时滞奇异系统的确定性采样控制

在本小节中，通过结合 Lyapunov 稳定性理论与随机微分方程分析方法，推导出随机奇异系统 (3.1) 的均方随机可容许性条件。

首先，提供以下辅助变量函数 $h_0(t)$

$$h_0(t) = \mathcal{A}x(t) + \mathcal{A}_d x(t - \tau(t)) + \mathcal{B}u(t) + \mathcal{B}_w \omega(t). \quad (3.7)$$

根据公式 (3.7)，系统 (3.1) 可以表示为

$$\begin{aligned} \mathcal{E}dx(t) &= h_0(t)dt, \\ \mathcal{E}x(t) - \mathcal{E}x(t - \tau(t)) &= \int_{t-\tau(t)}^t h_0(s)ds. \end{aligned} \quad (3.8)$$

定理 3.1 对于给定的正标量 γ 和 τ_0 ，如果存在矩阵 $P > 0$, $Z > 0$, $Q > 0$, S_1 , S_2 , S_3 , S_4 , S , S_d , 则采样控制系统 (3.1) 具有随机容许和广义耗散性能

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} \Omega_1 & X_{12} & X_{13} & X_{14} & X_{15} & C^T & X_{17} \\ * & \Omega_2 & X_{23} & X_{24} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Phi_1 & X_{34} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Phi_2 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Phi_3 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (3.9)$$

其中

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \mathcal{A}^T P + P^T \mathcal{A} + Q + SR^T \mathcal{A} + \mathcal{A}^T RS^T, \\ X_{12} &= P^T \mathcal{A}_d + SR^T \mathcal{A}_d + \mathcal{A}^T RS_d^T, \\ X_{13} &= \mathcal{A}^T RS_1^T - SR^T, \\ X_{14} &= P^T \mathcal{B}_w - \mathcal{A}^T RS_2^T + SR^T \mathcal{B}_w - C^T N, \\ X_{15} &= S_3 R^T, \quad X_{17} = C^T M^{1/2}, \\ \Omega_2 &= -(1 - \mu)Q + S_d R^T \mathcal{A}_d + \mathcal{A}_d^T RS_d^T, \\ X_{23} &= \mathcal{A}_d^T RS_1^T - S_d R^T, \\ X_{24} &= -\mathcal{A}_d^T RS_2^T + S_d R^T \mathcal{B}_w, \\ X_{34} &= S_1 R^T \mathcal{B}_w + RS_2^T, \\ \Phi_1 &= \tau_0^2 Z - S_1 R^T - RS_1^T, \\ \Phi_2 &= -\gamma^2 I - \mathcal{B}_w^T RS_2^T - S_2 R^T \mathcal{B}_w + H, \\ \Phi_3 &= -Z - RS_4^T - S_4 R^T, \end{aligned}$$

$R \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$ 是 $\mathcal{E}^T R = 0$ 的任何列全秩矩阵。

证明 首先, 证明 $u(t) = 0$ 和 $\omega(t) = 0$ 条件下的系统 (3.1) 既是正则的又是无脉冲的。基于引理 3 和 $\text{rank}(\mathcal{E}) = r \leq n$, 可以推断出两个可逆矩阵, 即 $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和 $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 从而有

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{E}} &= U\mathcal{E}V = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{\mathcal{A}} = U\mathcal{A}V = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} \\ \mathcal{A}_{21} & \mathcal{A}_{22} \end{bmatrix}, \bar{\mathcal{A}}_d = U\mathcal{A}_dV = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{d11} & \mathcal{A}_{d12} \\ \mathcal{A}_{d21} & \mathcal{A}_{d22} \end{bmatrix}, \\ \bar{\mathcal{B}} &= U\mathcal{B} = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_1 \\ \mathcal{B}_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{P} = U^{-T}PU^{-1} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, \bar{S} = V^TS = \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{12} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

得到 $(R^T\mathcal{E})^T \equiv 0$, 使 $\bar{R} \equiv U^TR \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ Y \end{bmatrix}$, 其中 $Y \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$ 是一个可逆矩阵。显然,

我们仍然有 $(\bar{R}^T\bar{\mathcal{E}})^T \equiv 0$ 。因此, 基于矩阵 (3.9), $\Omega_1 < 0$ 和 $Q > 0$, 如下所示

$$\Xi = \mathcal{A}^TP + P^T\mathcal{A} + \mathcal{A}^TR\bar{S}^T + \bar{S}R^T\mathcal{A} < 0. \quad (3.10)$$

对于公式 (3.10) 左乘 U 右乘 V , 可以得到

$$\bar{\Xi} = \bar{\mathcal{A}}^T\bar{P} + \bar{P}^T\bar{\mathcal{A}} + \bar{\mathcal{A}}^T\bar{R}\bar{S}^T + \bar{S}\bar{R}^T\bar{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \oplus & \tilde{\oplus} \\ * & \tilde{\mathfrak{J}} \end{bmatrix} < 0, \quad (3.11)$$

其中, $\tilde{\mathfrak{J}} = \mathcal{A}_{22}^TY S_{21}^T + S_{21}Y^T\mathcal{A}_{22}$ 。符号 $\oplus$ 和 $\tilde{\oplus}$ 都不影响我们的结果, 可以忽略不计。

根据公式 (3.11), 很容易验证 $\mathcal{A}_{22}^TY S_{21}^T + S_{21}Y^T\mathcal{A}_{22} < 0$, 这意味着 $\mathcal{A}_{22}$ 是可逆的。

因此

$$\begin{aligned}\det(k_0\mathcal{E} - \mathcal{A}) &= \det(M^{-1})\det(k_0\mathcal{E} - \mathcal{A})\det(N^{-1}) \\ &= \det(-\mathcal{A}_{22})\det(I_r - (\mathcal{A}_{11} - \mathcal{A}_{21}^{-1}\mathcal{A}_{21}))\det(M^{-1})\det(N^{-1}).\end{aligned} \quad (3.12)$$

从公式 (3.12) 中可得, 对于 $\deg(\det(k_0\mathcal{E} - \mathcal{A})) \triangleq \text{rank}(\mathcal{E})$, 同时 $(\mathcal{E}, \mathcal{A})$ 以及 $\det(k_0\mathcal{E} - \mathcal{A}) \neq 0$ 是具有正则性和无脉冲性的。此外, 基于公式 (3.9), 可以推导出后续矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 & X_{12} \\ * & \Omega_2 \end{bmatrix} < 0. \quad (3.13)$$

然后, 通过将公式 (3.13) 左边乘以 $[I, I]$ 并将其右边乘以 $[I, I]^T$, 我们将得到

$$\begin{bmatrix} \ominus & \tilde{\ominus} \\ * & \Delta \end{bmatrix} < 0. \quad (3.14)$$

和 $\Delta = (\mathcal{A}_{22}^T + \mathcal{A}_{d22}^T)Y S_{21}^T + S_{21}Y^T(\mathcal{A}_{22} + \mathcal{A}_{d22}) < 0$ 。那么, $(\mathcal{E}, \mathcal{A} + \mathcal{A}_d)$ 既是正则的且是无脉冲的。根据引理 1, 系统 (3.1) 是正则的且是无脉冲的。同时, 通过建立 Lyapunov-Krasovskii 泛函, 我们证明系统随机稳定性

$$\begin{aligned} V(t) &= V_1(t) + V_2(t) + V_3(t), \\ V_1(t) &= x^T(t) \mathcal{E}^T P x(t), \\ V_2(t) &= \int_{t-\tau_0(t)}^t x^T(s) Q x(s) ds, \\ V_3(t) &= \tau_0 \int_{-\tau_0}^0 \int_{t+\rho}^t h_0^T(s) Z h_0(s) ds d\rho. \end{aligned} \quad (3.15)$$

通过对函数 $V(t)$ 沿系统 (3.1) 轨迹的时间导数进行计算, 可得

$$\begin{aligned} D^+V(t) &= D^+V_1(t) + D^+V_2(t) + D^+V_3(t), \\ D^+V_1(t) &= x^T(t) (\mathcal{A}^T P + P^T \mathcal{A}) x(t) + x^T(t) P^T \mathcal{A}_d x(t - \tau(t)) + x^T(t - \tau(t)) \mathcal{A}_d^T P x(t), \\ D^+V_2(t) &= x^T(t) Q x(t) - (1 - \hat{\tau}(t)) x^T(t - \tau(t)) Q x(t - \tau(t)) \\ &\leq x^T(t) Q x(t) - (1 - \mu) x^T(t - \tau(t)) Q x(t - \tau(t)), \\ D^+V_3(t) &= \tau_0^2 h_0^T(t) Z h_0(t) - \tau_0 \int_{t-\tau(t)}^t h_0^T(s) Z h_0(s) ds \\ &\leq \tau_0^2 h_0^T(t) Z h_0(t) - \int_{t-\tau(t)}^t h_0^T(s) ds Z \int_{t-\tau(t)}^t h_0(s) ds. \end{aligned} \quad (3.16)$$

从公式 (3.7), 当 $u(t) = 0$ 时, 可以得出

$$2(\mathcal{A}x(t) + \mathcal{A}_d x(t - \tau(t)) + \mathcal{B}_w \omega(t) - h_0(t)) = 0.$$

因此, 可以选取 S, S_d, S_1, S_2 作为自由加权矩阵,

$$\begin{aligned} &2(\mathcal{A}x(t) + \mathcal{A}_d x(t - \tau(t)) + \mathcal{B}_w \omega(t) - h_0(t))^T R \\ &\times (S^T x(t) + S_d^T x(t - \tau(t)) + S_1^T h_0(t) - S_2^T \omega(t)) = 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

因为 $\mathcal{E}^T R = 0$, 根据公式 (3.8), 存在自由加权矩阵 S_3, S_4 , 我们有

$$\begin{aligned} &2x^T(t) \mathcal{E}^T R (S_3^T x(t) - S_4^T \int_{t-\tau(t)}^t h_0(s) ds) \\ &= 2 \int_{t-\tau(t)}^t h_0^T(s) ds R S_3^T x(t) - \int_{t-\tau(t)}^t h_0^T(s) ds (R S_4^T + S_4 R^T) \int_{t-\tau(t)}^t h_0(s) ds \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

由公式 (3.16)、(3.17) 和 (3.18), 可得到如下公式

$$\begin{aligned}
 & D^+ \bar{V}(t) \\
 &= D^+ V_1(t) + D^+ V_2(t) + D^+ V_3(t) \\
 &+ 2x^T(t) \mathcal{E}^T R \left(S_3^T x(t) - S_4^T \int_{t-\tau(t)}^t h_0(s) ds \right) \\
 &+ 2 \left(\mathcal{A}x(t) + \mathcal{A}_d x(t - \tau(t)) + \mathcal{B}_w \omega(t) - h_0(t) \right)^T \\
 &\times R \left(S^T x(t) + S_d^T x(t - \tau(t)) + S_1^T h_0(t) - S_2^T \omega(t) \right).
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

此外, 当 $\omega(t) = 0$ 时, 我们有

$$D^+ \bar{V}(t) < \zeta^T(t) \phi \zeta(t), \tag{3.20}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \zeta^T(t) &= \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t - \tau(t)) & h_0^T(t) & \int_{t-\tau(t)}^t h_0^T(s) ds \end{bmatrix}, \\
 \phi &= \begin{bmatrix} \tilde{\Omega} & X_{12} & X_{13} & X_{15} \\ * & \Omega_2 & X_{23} & 0 \\ * & * & \Phi_1 & 0 \\ * & * & * & \Phi_3 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

并且 $\tilde{\Omega} = \mathcal{A}^T P + P^T \mathcal{A} + Q + SR^T \mathcal{A} + \mathcal{A}^T RS^T$ 。

对公式 (3.16) 使用 Schur 引理, 可得 $\phi < 0$, 使得

$$\mathbb{E} \{ D^+ V(t) \} \leq \mathbb{E} \{ D^+ \bar{V}(t) \} \leq \varepsilon_{\max}(\phi) \mathbb{E} \|\zeta(t)\|^2 \leq \varepsilon_{\max}(\phi) \mathbb{E} \|x(t)\|^2.$$

因此, 参考引理 1, 可以得出系统 (3.1) 是均方随机稳定的。

接下来, 我们研究具有 H_∞ 性能指标 γ 的系统 (3.1)。我们设定

$$J(t) = \mathbb{E} \left\{ \int_0^\infty y^T(t) y(t) dt - \gamma^2 \omega^T(t) \omega(t) dt \right\}. \tag{3.21}$$

通过计算可以确定

$$J(t) \leq \bar{\zeta}^T(t) \bar{\phi} \bar{\zeta}(t), \tag{3.22}$$

其中

$$\bar{\phi} = \begin{bmatrix} \bar{\Omega}_1 & X_{12} & X_{13} & X_{14} & X_{15} \\ * & \Omega_2 & X_{23} & X_{24} & 0 \\ * & * & \Phi_1 & X_{34} & 0 \\ * & * & * & \Phi_2 & 0 \\ * & * & * & * & \Phi_3 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\zeta}^T(t) = [x^T(t) \quad x^T(t-\tau(t)) \quad h_0^T(t) \quad \omega^T(t) \quad \int_{t-\tau(t)}^t h_0^T(s)ds],$$

并且 $\bar{\Omega}_1 = \mathcal{A}^T P + P^T \mathcal{A} + Q + \mathcal{A}^T R S^T + S R^T \mathcal{A} + C^T C$ 。

利用公式 (3.9)，我们得出 $J(t) < 0$ 。

接下来，考虑广义耗散下的确定性采样数据系统。根据定义 2，当 $\|D\| = 0$ 时，我们可以确定一个足够小的正数 $\kappa > 0$ ，使得 $G_1 = \bar{\phi} + \text{diag}(0, 0, 0, \kappa I, 0) < 0$ 。然后我们得到

$$D^+ V_{x\omega}(t) = [x^T(t) \quad \omega^T(t)] \begin{bmatrix} \bar{\Omega}_1 & X_{14} \\ * & \Phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

然后，可以推导出

$$\begin{aligned} & D^+ V_{x\omega}(t) + \kappa \omega^T(t) \omega(t) - y^T(t) M y(t) - 2y^T(t) N \omega(t) - \omega^T(t) H \omega(t) \\ &= [x^T(t) \quad \omega^T(t)] \begin{bmatrix} \bar{\Omega}_1 - C^T M C & X_{14} - C^T N \\ * & \Phi_2 + \kappa I - H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

由此可得

$$D^+ V_{x\omega}(t) + \kappa \omega^T(t) \omega(t) \leq y^T(t) M y(t) + 2y^T(t) N \omega(t) + \omega^T(t) H \omega(t).$$

对公式 (3.24) 从 0 到 $T (T \geq 0)$ 进行积分，得到

$$\int_0^T G(y, \omega, T) \geq V_{x\omega}(t) - V_{x\omega}(0).$$

因此，在零初始状态和 $V(t)$ 非负的条件下，广义耗散下的确定性采样数据系统是严格 (M, N, H) 耗散的。证明完毕。

注 1 在定理 3.1 中，证明了系统 (3.1) 的随机容许准则。接下来，使用伯努利方法，将系统 (3.3) 中的确定性采样系统表示为系统 (3.25) 中的随机采样数据控制系统。

3.4 时变时滞奇异系统的随机采样控制

在本节中，通过引入一个服从伯努利分布的随机变量，将随机采样控制系统建模为具有随机参数的连续时滞系统，为后续基于随机微分方程理论的稳定性分析奠定了数学基础。对于 $t_i \leq t < t_{i+1}$ ，我们表示 $t_i = t - (t - t_i) \triangleq t - d_i(t)$ ，其中 $d_i(t)$

表示比采样周期短的时变时滞。因此，系统 (3.3) 可以重新表示为

$$\begin{aligned} \mathcal{E}dx(t) &= (\mathcal{A}x(t) + \mathcal{A}_d x(t - \tau(t)) + \mathcal{B}Kx(t - d_i(t)) + \mathcal{B}_w \omega(t))dt, \\ y(t) &= \mathcal{C}x(t), \quad t_i \leq t < t_{i+1}, \\ x(t) &= \eta(t), \quad t \in [-\tau_0, 0], \end{aligned} \quad (3.25)$$

在文献[52]的启发下，针对系统 (3.25) 的时间分段特性，建模两种采样率

$$\begin{aligned} \mathcal{E}dx(t) &= (\mathcal{A}x(t) + \mathcal{A}_d x(t - \tau(t)) + \mathcal{B}Kx(t - d(t)) + \mathcal{B}_w \omega(t))dt, \\ y(t) &= \mathcal{C}x(t), \\ x(t) &= \eta(t), \quad t \in [-\tau_0, 0], \end{aligned} \quad (3.26)$$

定义一个变量 k 来表示采样周期，假设 k_1 和 k_2 是两种可能的采样周期，其中 $0 < k_1 < k_2$ ，并且它们出现的概率是已知的，得到 $\mathbb{P}\{k = k_1\} = \beta$ ， $\mathbb{P}\{k = k_2\} = 1 - \beta$ 。

如果采样间隔是 k_1 （即 $k = k_1$ ），那么 $d(t)$ 属于区间 $[0, k_1)$ 的概率为

$$\mathbb{P}\{0 \leq d(t) < k_1 \mid k = k_1\} = 1.$$

并且当采样间隔是 k_2 （即 $k = k_2$ ）时， $d(t)$ 属于区间 $[0, k_1)$ 的概率为 $\frac{k_1}{k_2}$ ， $d(t)$ 属

于区间 $[k_1, k_2)$ 的概率为 $\frac{k_2 - k_1}{k_2}$ ，换句话说，

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{0 \leq d(t) < k_1 \mid k = k_2\} &= \frac{k_1}{k_2}, \\ \mathbb{P}\{k_1 \leq d(t) < k_2 \mid k = k_2\} &= \frac{k_2 - k_1}{k_2}. \end{aligned}$$

因此， $d(t)$ 的分布可以表示为

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\{0 \leq d(t) < k_1\} \\ &= \mathbb{P}\{0 \leq d(t) < k_1 \mid k = k_1\} \times \mathbb{P}\{k = k_1\} + \mathbb{P}\{0 \leq d(t) < k_1 \mid k = k_2\} \times \mathbb{P}\{k = k_2\} \\ &= \beta + \frac{k_1}{k_2}(1 - \beta), \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\mathbb{P}\{k_1 \leq d(t) < k_2\} = \mathbb{P}\{k_1 \leq d(t) < k_2 \mid k = k_2\} \times \mathbb{P}\{k = k_2\} = \frac{k_2 - k_1}{k_2}(1 - \beta).$$

这里，定义一个随机变量 $\alpha(t)$ ，如下

$$\alpha(t) = \begin{cases} 1, & d(t) \in [0, k_1), \\ 0, & d(t) \in [k_1, k_2), \end{cases}$$

由公式 (3.27) 可以推断出

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{\alpha(t)=1\} &= \mathbb{P}\{0 \leq d(t) < k_1\} = \beta + \frac{k_1}{k_2}(1-\beta) \equiv \alpha, \\ \mathbb{P}\{\alpha(t)=0\} &= \mathbb{P}\{k_1 \leq d(t) < k_2\} = \frac{k_2-k_1}{k_2}(1-\beta) \equiv 1-\alpha.\end{aligned}$$

因此, 可以得到 $\mathbb{E}\{\alpha(t)\}$ 恒等于 α 。此外, $\mathbb{E}\{(\alpha(t)-\alpha)^2\}$ 也等于 $\alpha(1-\alpha)$ 。由于 $d(t)$ 是一个随机变量, 在分析系统 (3.26) 的稳定性过程中会出现复杂情况。为了克服这个困难, 我们提出

$$\begin{aligned}\mathcal{E}dx(t) &= \left(\mathcal{A}x(t) + \mathcal{A}_d x(t - \tau(t)) + \alpha(t)\mathcal{B}Kx(t - \tau_1(t)) \right. \\ &\quad \left. + (1-\alpha(t))\mathcal{B}Kx(t - \tau_2(t)) + \mathcal{B}_w \omega(t) \right) dt, \\ y(t) &= \mathcal{C}x(t), \\ x(t) &= \eta(t), \quad t \in [-\tau_0, 0],\end{aligned}\tag{3.28}$$

其中, $0 \leq \tau_1(t) < k_1$, 且 $k_1 \leq \tau_2(t) < k_2$ 。需要注意的是, $\tau_1(t)$ 和 $\tau_2(t)$ 被视为时变且未知的参数, 并且它们不一定依赖于概率采样点。

注 2 系统 (3.28) 是服从伯努利分布的 $\alpha(t)$ 的重新表述, 目的是解决随机采样问题。因此, 与文献[51]和[53]中的确定性采样控制系统不同, 本文认为由系统 (3.28) 表示的这类系统比原始系统的范围更广, 并且所推导的结果也适用于系统 (3.26)。

在成熟的确定性采样框架下, 本研究将线性时变时滞特性引入系统 (3.28)。为简化分析, 采用分段常值时滞假设, 分别取 τ_0 , τ_1 和 τ_0 , τ_2 的时变时滞下限。因此, 定义 $\mathcal{G}_1(t) = \min\{\tau_0, \tau_1\}$, 和 $\mathcal{G}_2(t) = \min\{\tau_0, \tau_2\}$, 然后在 (3.28) 中进行随机采样分析。

当 $\alpha(t)=1$ 时, 选择 $\mathcal{G}_1(t) = \min\{\tau_0, \tau_1\}$, 可得

$$\begin{aligned}\mathcal{E}dx(t) &= \left(\mathcal{A}x(t) + \alpha(\mathcal{A}_d + \mathcal{B}K)x(t - \mathcal{G}_1(t)) + \mathcal{B}_w \omega(t) \right) dt, \\ y(t) &= \mathcal{C}x(t), \\ x(t) &= \eta(t), \quad t \in [-\mathcal{G}_1, 0].\end{aligned}\tag{3.29}$$

当 $\alpha(t)=0$ 时, 选择 $\mathcal{G}_2(t) = \min\{\tau_0, \tau_2\}$, 可得

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}dx(t) &= \left(\mathcal{A}x(t) + (1-\alpha)(\mathcal{A}_d + \mathcal{B}K)x(t - \mathcal{G}_2(t)) + \mathcal{B}_w\omega(t) \right) dt, \\
 y(t) &= \mathcal{C}x(t), \\
 x(t) &= \eta(t), \quad t \in [-\mathcal{G}_2, 0].
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

定理 3.2 对于给定的标量 $\mathcal{G}_{1,2} > 0$ 和 $\gamma > 0$, 随机采样数据控制系统 (3.29) 和 (3.30) 在均方意义下是随机可容许的, 当且仅当存在矩阵 $S, S_2, S_3, S_4, P > 0, Z > 0, Q > 0, X_1, Y_1, X_2, Y_2$, 使得

$$\phi_2 = \begin{bmatrix} \tilde{\Omega}_1 & \tilde{X}_{12} & \tilde{X}_{13} & X_{14} & X_{15} & \mathcal{C}^T \\ * & \tilde{\Omega}_2 & \tilde{X}_{23} & \tilde{X}_{24} & 0 & 0 \\ * & * & \tilde{\Phi}_1 & \tilde{X}_{34} & 0 & 0 \\ * & * & * & \Phi_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Phi_3 & 0 \\ * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \tag{3.31}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Omega}_1 &= \mathcal{A}^T P + P^T \mathcal{A} + Q + SR^T \mathcal{A} + \mathcal{A}^T RS^T + \alpha(\mathcal{A}_d + \tilde{K})^T RY_1^T + (1-\alpha)(\mathcal{A}_d + \tilde{K})^T RY_2^T, \\
 \tilde{X}_{12} &= \alpha \left(SR^T (\mathcal{A}_d + \tilde{K}) + P^T (\mathcal{A}_d + \tilde{K}) + \mathcal{A}^T RY_1^T \right) \\
 &\quad + (1-\alpha) \left(SR^T (\mathcal{A}_d + \tilde{K}) + P^T (\mathcal{A}_d + \tilde{K}) + \mathcal{A}^T RY_2^T \right), \\
 \tilde{X}_{13} &= \alpha (\mathcal{A}^T RY_1^T - SR^T) + (1-\alpha) (\mathcal{A}^T RY_2^T - SR^T), \\
 X_{14} &= P^T \mathcal{B}_w - \mathcal{A}^T RS_2^T + SR^T \mathcal{B}_w, X_{15} = S_3 R^T, \\
 \tilde{\Omega}_2 &= \alpha \left(-(1-\mu_1)Q + Y_1 R^T (\mathcal{A}_d + \tilde{K}) \right) + (1-\alpha) \left(-(1-\mu_2)Q + Y_2 R^T (\mathcal{A}_d + \tilde{K}) \right), \\
 \tilde{X}_{23} &= \alpha \left((\mathcal{A}_d + \tilde{K})^T RY_1^T - Y_1 R^T \right) + (1-\alpha) \left((\mathcal{A}_d + \tilde{K})^T RY_2^T - Y_2 R^T \right), \\
 \tilde{X}_{24} &= \alpha \left(-(\mathcal{A}_d + \tilde{K})^T RS_2^T + Y_1 R^T \mathcal{B}_w \right) + (1-\alpha) \left(-(\mathcal{A}_d + \tilde{K})^T RS_2^T + Y_2 R^T \mathcal{B}_w \right), \\
 \tilde{X}_{34} &= \alpha X_1 R^T \mathcal{B}_w + (1-\alpha) X_2 R^T \mathcal{B}_w + RS_2^T, \\
 \tilde{\Phi}_1 &= \alpha (\mathcal{G}_1^2 Z - X_1 R^T - RX_1^T) + (1-\alpha) (\mathcal{G}_2^2 Z - X_2 R^T - RX_2^T), \\
 \Phi_2 &= -\gamma^2 I - \mathcal{B}_w^T RS_2^T - S_2 R^T \mathcal{B}_w, \\
 \Phi_3 &= -Z - RS_4^T - S_4 R^T, \tilde{K} = \mathcal{B}K.
 \end{aligned}$$

证明: 构造如下新的 Lyapunov-Krasovskii 泛函:

$$\begin{aligned}
 \tilde{V}(t) &= \sum_{i=1}^3 \tilde{V}_i(t), \\
 \tilde{V}_1(t) &= x^T(t) \mathcal{E}^T P x(t), \\
 \tilde{V}_2(t) &= \int_{t-\mathcal{G}_1(t)}^t x^T(s) Q_1 x(s) ds + \int_{t-\mathcal{G}_2(t)}^t x^T(s) Q_2 x(s) ds, \\
 \tilde{V}_3(t) &= \mathcal{G}_1 \int_{-\mathcal{G}_1}^0 \int_{t+\rho}^t h_1^T(s) Z_1 h_1(s) ds d\rho + \mathcal{G}_2 \int_{-\mathcal{G}_2}^0 \int_{t+\rho}^t h_2^T(s) Z_2 h_2(s) ds d\rho.
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

由公式 (3.7) 可知,

$$\begin{aligned}
 &2\left(\mathcal{A}x(t) + \alpha(\mathcal{A}_d + \tilde{K})x(t - \mathcal{G}_1(t)) + \mathcal{B}_w \omega(t) - h_1(t)\right) \\
 &+ 2\left(\mathcal{A}x(t) + (1 - \alpha)(\mathcal{A}_d + \tilde{K})x(t - \mathcal{G}_2(t)) + \mathcal{B}_w \omega(t) - h_2(t)\right) = 0,
 \end{aligned}$$

使得

$$\begin{aligned}
 D^+ \tilde{V}(t) &= \sum_{i=1}^3 D^+ \tilde{V}_i(t) + 2\left(\mathcal{A}x(t) + \alpha(\mathcal{A}_d + \tilde{K})x(t - \mathcal{G}_1(t)) + \mathcal{B}_w \omega(t) - h_1(t)\right)^T \\
 &\quad \times R\left(S^T x(t) + Y_1^T x(t - \mathcal{G}_1(t)) + X_1^T h_1(t) - S_2^T \omega(t)\right) \\
 &\quad + 2\left(\mathcal{A}x(t) + (1 - \alpha)(\mathcal{A}_d + \tilde{K})x(t - \mathcal{G}_2(t)) + \mathcal{B}_w \omega(t) - h_2(t)\right)^T \\
 &\quad \times R\left(S^T x(t) + Y_2^T x(t - \mathcal{G}_2(t)) + X_2^T h_2(t) - S_2^T \omega(t)\right) \\
 &\quad + 2x^T(t) \mathcal{E}^T R\left(2S_3^T x(t) - S_4^T \int_{t-\mathcal{G}_1(t)}^t h_1(s) ds - S_4^T \int_{t-\mathcal{G}_2(t)}^t h_2(s) ds\right).
 \end{aligned}$$

通过与定理 3.1 中类似的步骤, 并做一些修改, 我们能够通过分析 (3.29) 和 (3.30) 推导出矩阵不等式 ϕ_2 。已知基于奇异系统的正则性、无脉冲性和随机稳定性, 系统 (3.28) 可以通过对偶方程表示。因此, 这里不给出证明过程。

注 3 采样控制系统 (3.3) 首先被转化为具有随机参数和时变时滞的连续时间系统 (3.28)。在本文中, 重新构造了 $\mathcal{G}_1(t) = \min\{\tau_0, \tau_1\}$, 和 $\mathcal{G}_2(t) = \min\{\tau_0, \tau_2\}$ 。这些被视为未知的时变参数, 不一定依赖于随机采样点。简而言之, 本文采用伯努利分布技术来解决随机采样问题, 而不是确定性采样控制, 这比文献[48]中具有时变延迟的奇异系统有更广泛的应用。

随后, 我们进一步完善定理 3.2 中得到的结果。在定义 2 的框架内, 我们将给出随机采样系统严格 (M, N, H) 耗散的充分必要条件。

定理 3.3 对于给定的矩阵 M , N 和 H , 它们是实矩阵, 且 M 和 H 是对称矩阵, 系统 (3.29) 和 (3.30) 是随机可容许的且严格 (M, N, H) 耗散的, 当且仅当存在矩阵 S , S_2 , S_3 , S_4 , $P > 0$, $Z > 0$, $Q > 0$, X_1 , Y_1 , X_2 , Y_2 , M , H , N , 使得

$$\phi_3 = \begin{bmatrix} \tilde{\Omega}_1 & \tilde{X}_{12} & \tilde{X}_{13} & \tilde{X}_{14} & X_{15} & \mathcal{C}^T & X_{17} \\ * & \tilde{\Omega}_2 & \tilde{X}_{23} & \tilde{X}_{24} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \tilde{\Phi}_1 & \tilde{X}_{34} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \tilde{\Phi}_2 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Phi_3 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (3.33)$$

其中,

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{14} &= P^T \mathcal{B}_w - \mathcal{A}^T R S_2^T + S R^T \mathcal{B}_w - \mathcal{C}^T N, \\ \tilde{\Phi}_2 &= -\gamma^2 I - \mathcal{B}_w R S_2^T - S_2 R^T \mathcal{B}_w + H, \\ X_{17} &= \mathcal{C}^T M^{1/2}. \end{aligned}$$

证明 根据定义 2, 如果 $\|D\|=0$, 则总是有一个足够小的正数 $\kappa > 0$, 使得

$G_1 = \phi_2 + \text{diag}(0, 0, 0, \kappa I, 0, 0, 0) < 0$ 。通过使用定理 3.2, 我们得到

$$D^+ V_{x\omega}(t) = [x^T(t) \quad \omega^T(t)] G_2 [x^T(t) \quad \omega^T(t)]^T. \quad (3.34)$$

其中,

$$G_2 = \begin{bmatrix} \mathcal{A}^T P + P^T \mathcal{A} + Q + S R^T \mathcal{A} + \mathcal{A}^T R S^T & P^T \mathcal{B}_w - \mathcal{A}^T R S_2^T + S R^T \mathcal{B}_w \\ * & -\gamma^2 I - \mathcal{B}_w R S_2^T - S_2 R^T \mathcal{B}_w \end{bmatrix}.$$

进一步, 通过应用 Schur 补引理, 可推导出系统稳定性的充分条件为:

$$\begin{aligned} D^+ V_{x\omega}(t) + \kappa \omega^T(t) \omega(t) - y^T(t) M y(t) - 2 y^T(t) N \omega(t) - \omega^T(t) H \omega(t) \\ = [x^T(t) \quad \omega^T(t)] G_3 [x^T(t) \quad \omega^T(t)]^T, \end{aligned} \quad (3.35)$$

其中,

$$G_3 = \begin{bmatrix} M_1 & P^T \mathcal{B}_w - \mathcal{A}^T R S_2^T + S R^T \mathcal{B}_w - \mathcal{C}^T N \\ * & -\gamma^2 I - \mathcal{B}_w R S_2^T - S_2 R^T \mathcal{B}_w + \kappa I - H \end{bmatrix},$$

$M_1 = \mathcal{A}^T P + P^T \mathcal{A} + Q + S R^T \mathcal{A} + \mathcal{A}^T R S^T - \mathcal{C}^T M \mathcal{C}$ 。很明显, $G_3 < 0$, 并且

$$D^+ \tilde{V}_{x\omega}(t) + \kappa \omega^T(t) \omega(t) \leq y^T(t) M y(t) + 2 y^T(t) N \omega(t) + \omega^T(t) H \omega(t)。$$

将公式 (3.24) 从 0 到 $T (T \geq 0)$ 的积分形式表示为

$$\int_0^T G(y, \omega, T) \geq \tilde{V}_{x\omega}(t) - \tilde{V}_{x\omega}(0).$$

通过考虑零初始状态和 $V(t)$ 的非负性, 系统 (3.3) 根据定义 2 严格为 (M, N, H)

耗散。我们完成了证明。

注 4 定理 3.3 提出了一种新颖的分析方法，通过融合自由加权矩阵技术与 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法，建立了随机奇异系统在广义耗散性能指标下的随机可容许性判据。相较于现有文献[53]中仅考虑传统 H_∞ 稳定性分析的控制问题研究，本方法通过引入广义耗散不等式，将系统的能量耗散特性与随机稳定性条件进行有机结合，不仅涵盖了传统控制目标，还能够量化系统在随机扰动下的能量传递关系，从而为复杂工程系统的鲁棒控制设计提供更全面的理论支撑。

3.5 数值仿真

在本节中，通过两个例子验证了所提出的随机稳定性判据在复杂时滞系统中的合理性与工程有效性。

例 3.1 考虑质量弹簧阻尼器模型^[3]

$$M\ddot{x}(s) + g(x(s), \dot{x}(s)) + f(x(s)) = \phi(\dot{x}(s))u(s) + \omega(s), \quad (3.36)$$

其中， M ， $x(s)$ ， $u(s)$ 和 $\omega(s)$ 分别表示质量、位置、力和扰动。这里非线性项 $f(x(s))$ ， $g(x(s), \dot{x}(s))$ 和 $\phi(\dot{x}(s))$ 对应于弹簧、阻尼器和输入，分别设 $g(x(s), \dot{x}(s)) \triangleq \dot{x}(s)$ ， $f(x(s)) \triangleq c(s)x(s)$ 并选择 $y(s) \triangleq [\dot{x}^T(s) \ x^T(s)]$ 作为系统状态。

通过应用相关变换，图 3-2 中的质量-弹簧-阻尼器模型可以通过系统 (3.36) 的形式建模，参数选择为

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{A} = \begin{bmatrix} -0.75 & 0 \\ 0.1 & -0.3 \end{bmatrix}, \mathcal{A}_d = \begin{bmatrix} -0.7 & 0.1 \\ 1.6 & 0.1 \end{bmatrix}, \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.5 \end{bmatrix}, \mathcal{C} = \begin{bmatrix} -0.2 & 1.4 \\ 0.8 & 1.2 \end{bmatrix}, \mathcal{B}_w = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

设置初始状态 $x_0 \equiv [-0.1 \ 0.2]^T$ 和扰动 $\omega(t) \equiv \begin{bmatrix} \frac{0.2 \sin(t)}{1+t} & \frac{0.2 \cos(t)}{1+t} \end{bmatrix}^T$ ，可以推断出图 3-3 中没有采样数据控制器系统的状态响应明显不稳定。采样间隔如图 3-4 所示。

设 $\alpha = 0.5$ ， $\mu_1 = 0.9$ ， $\mu_2 = 0.8$ ， $\vartheta_1 = 2.4$ ， $\vartheta_2 = 2.7$ ， $\gamma = 2.2$ 。利用定理 3.1，可

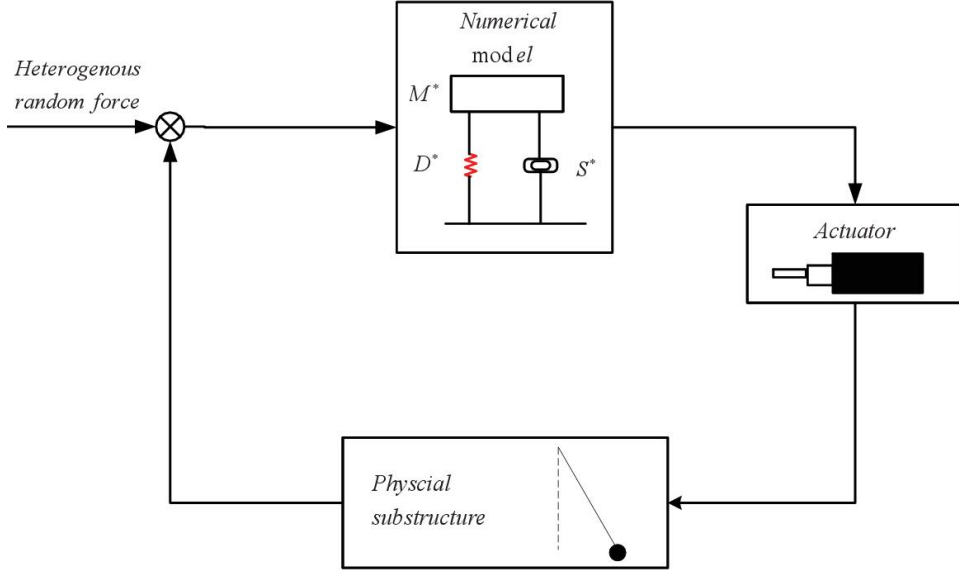


图 3-2 质量-弹簧-阻尼器模型

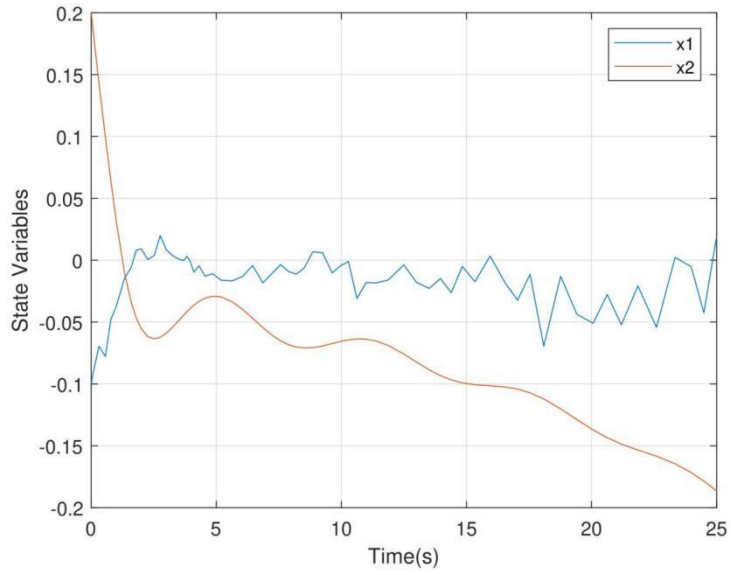


图 3-3 无控制输入的质量-弹簧-阻尼器系统 (3.36) 的状态轨迹

以求得

$$P = \begin{bmatrix} 16.68 & 0.72 \\ -3.20 & 29.88 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 2.96 & -0.08 \\ -0.08 & 7.52 \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} -29.72 & -3.97 \\ -7.66 & -77.67 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} 10.46 & -52.60 \\ 51.63 & 66.77 \end{bmatrix},$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} -115.85 & -93.74 \\ 68.45 & -292.07 \end{bmatrix}, S_2 = \begin{bmatrix} 18.77 & -11.90 \\ 10.35 & 13.22 \end{bmatrix}, S_4 = \begin{bmatrix} 65.11 & 5.23 \\ 3.27 & 70.66 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

图 3-5 描绘了状态响应 $x(t)$, 结果表明系统具有随机稳定性和严格 (M, N, H) 耗散性, 比文献[53]中的确定性采样控制更有效。

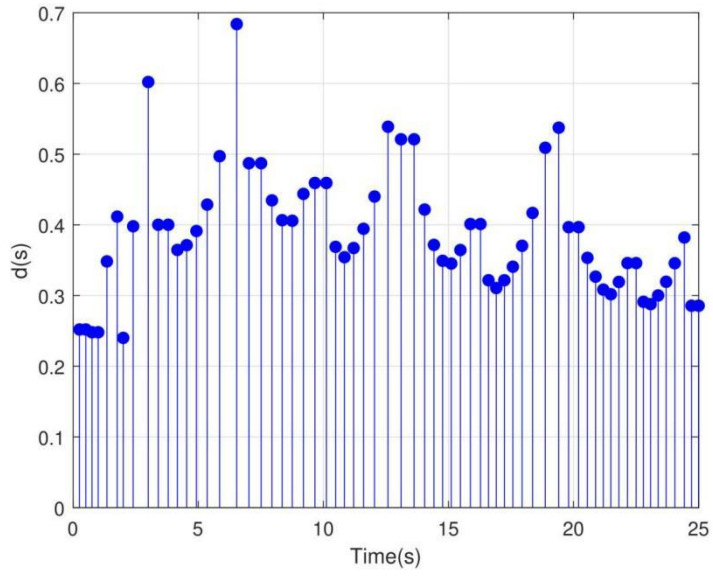


图 3-4 采样间隔

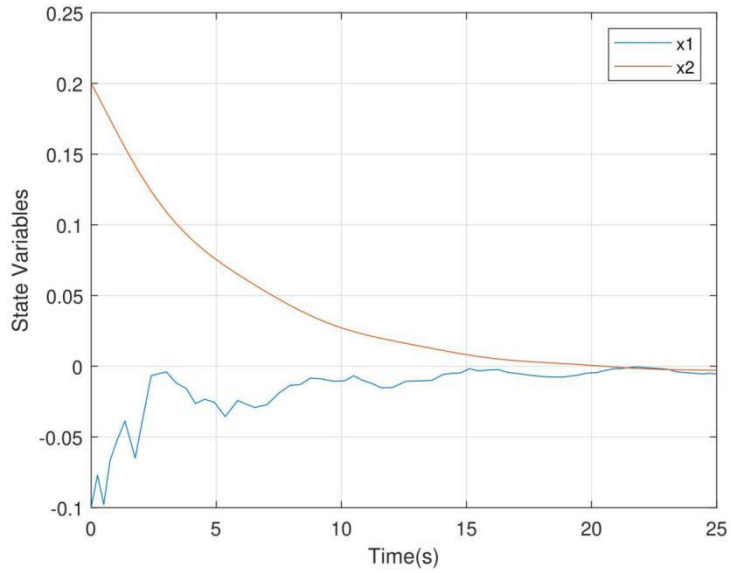


图 3-5 随机采样数据控制下质量-弹簧-阻尼器系统（3.36）的状态轨迹

例 3.2 考虑单连杆机械臂模型^[4]如下

$$\ddot{\alpha}(s) = -\frac{A(s)}{J}\dot{\alpha}(s) - \frac{MgL}{J}\sin(\alpha(s)) + \frac{1}{J}u(s), \quad (3.37)$$

其中， $\alpha(s)$ 表示手臂的角度，而 $u(s)$ 表示控制输入。 $A(s)$ 表示粘性摩擦系数。

M ， J ， g 和 L 指有效载荷的质量、惯性矩、重力加速度和手臂的长度。

如图 3-6 所示，单连杆机械臂模型可以用于系统（3.37）中，相关系数参数

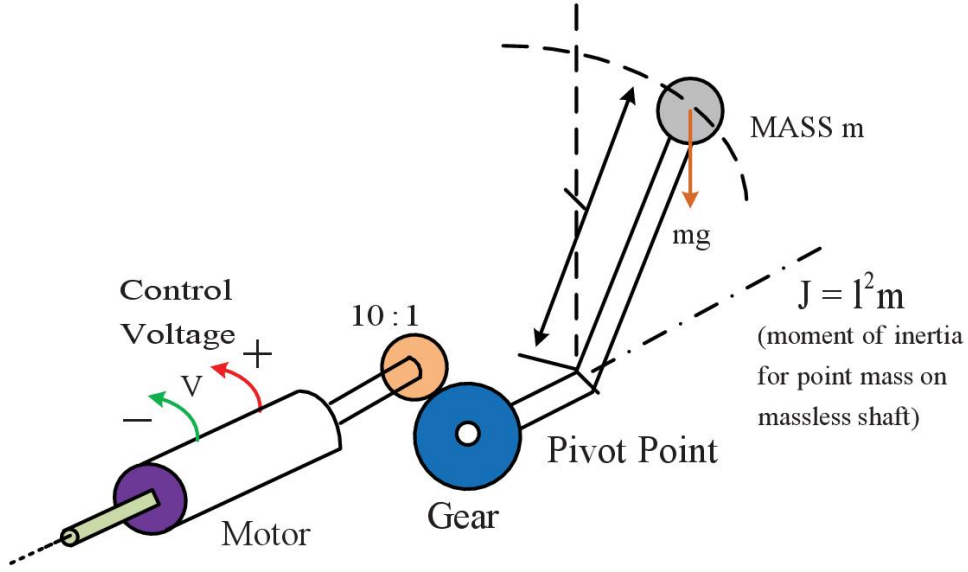


图 3-6 单连杆机械臂模型

设置如下：

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{A} = \begin{bmatrix} -9.75 & 0 \\ 1 & 0.1 \end{bmatrix}, \mathcal{A}_d = \begin{bmatrix} -9.51 & 0 \\ 1 & 0.1 \end{bmatrix}, \mathcal{B} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathcal{C} = \begin{bmatrix} -8.77 & 0 \\ 1 & 0.1 \end{bmatrix}, \mathcal{B}_w = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

图 3-7 中开环系统的状态曲线可以在初始状态下设定 $x_0 \equiv [-0.15 \quad 0.25]^T$ 和扰动

$$\omega(t) \equiv 0.1e^{-100t}.$$

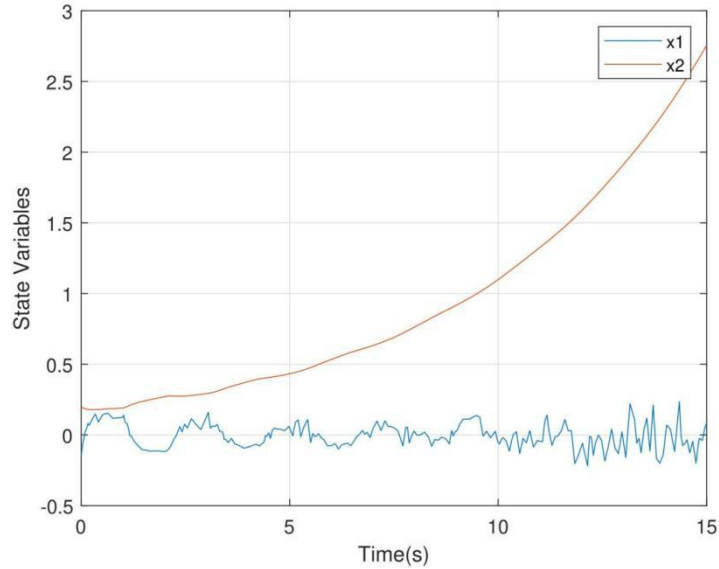


图 3-7 无任何控制输入的单连杆机械臂系统 (3.37) 状态轨迹

通过调节参数得到 $\alpha = 0.55$, $u_1 = 11.9$, $\vartheta_1 = 12.4$, $\vartheta_2 = 7.7$, $\gamma = 10.2$, 定理

3.3 中 LMI 的 $K = [-1.5 \quad 11.6]$, 其部分的解为

$$P = \begin{bmatrix} 317.46 & -56.10 \\ 67.07 & 445.16 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 141.12 & 15.5 \\ 15.5 & 8.48 \end{bmatrix}, S_2 = \begin{bmatrix} 27.45 & 96.28 \\ 43.72 & 180.89 \end{bmatrix}, S_4 = \begin{bmatrix} 450.70 & 5.2 & 8 \\ 3.30 & 301.71 \end{bmatrix}.$$

状态响应 $x(t)$ 如图 3-8 所示。结果表明，在所提出的随机采样数据控制器下，系统是随机稳定的，并且严格满足 (M, N, H) 耗散条件。这些仿真结果表明我们的系统适用于单连杆机械臂模型。

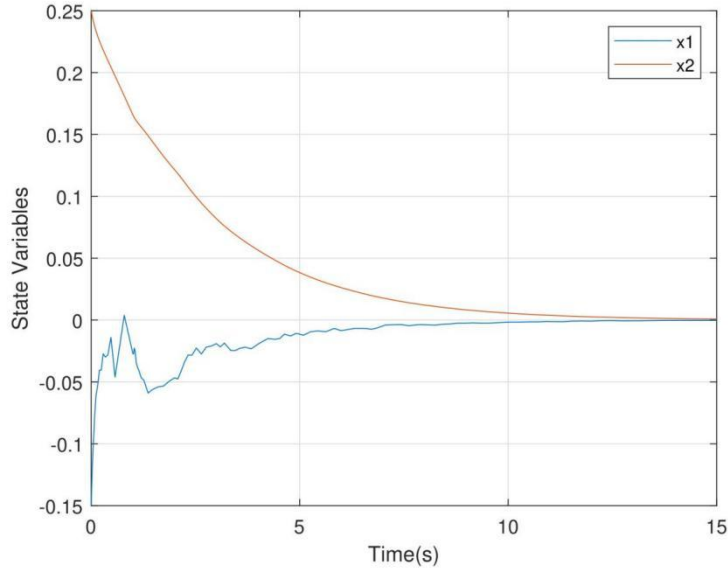


图 3-8 随机采样数据下单连杆机械臂系统 (3.37) 的状态轨迹控制

3.6 本章小结

本章探讨了随机采样控制奇异系统的广义耗散性能。首先，构建了融合随机参数不确定性与广义耗散不等式的理论框架，通过 Lyapunov 稳定性理论与随机微分方程，严格证明了系统的随机可容许性判据。其次，通过引入伯努利分布随机变量，将采样过程转化为具有概率特性的连续时间系统模型，建立了含随机参数及时变时滞的线性随机奇异系统。基于此，设计了自由加权矩阵技术的控制器参数化方法，通过对偶公式建立了均方意义下的随机可容许性条件，该条件同时保证了系统的正则性、无脉冲性及广义耗散性能。最后，通过数值仿真与实际工程案例验证了理论方法的有效性与工程实用性。

第 4 章 脉冲攻击下随机奇异系统的有限时间采样数据控制

本章主要讨论脉冲虚假数据注入攻击下随机奇异系统的有限时间稳定性问题。在 4.2 中给出了随机奇异系统的有限时间采样控制理论，并介绍了几个必要的假设、定义和引理。在 4.3 中给出稳定性分析与控制器设计方法，得到了保证随机可容许性的定理。最后，用两个实际数值例子验证了理论分析结果。

4.1 引言

由第一章可知随机奇异系统具有很强的实用价值，同时随机奇异系统在实际中也很容易受到随机扰动、脉冲攻击的影响，此时系统状态可能不稳定甚至发散，而为了使系统收敛到一个平衡点那必须采用一些控制手段^[13-15]。不同控制方案各有其明显的优势。信号从一个或多个位置获取，并通过采样数据控制方法以指定间隔表示为离散脉冲。与连续控制器相比，有限时间采样数据控制器具有多种优势，包括易于安装、可靠性高、维护成本低和效率更高。此外，脉冲控制已广泛应用于各个领域，包括卫星轨道转移、药代动力学中的剂量管理和生态系统管理，如文献[36-39]所述。脉冲控制的核心概念是在特定时刻实现瞬时状态变化。因此，脉冲控制可以大大减少传输信息量和控制成本。

欺骗和破坏攻击在微电网^[54-55]中很普遍，虚假数据注入攻击是改变关键信息的一个主要例子。虚假数据注入攻击可能导致性能下降，甚至可能导致系统不稳定和故障。检测作为一种主动防御机制，在评估系统状态的同时监控实际测量值和评估值之间的差异，以确保它们保持在可接受的阈值范围内。与传统的时间触发机制相比，虚假数据注入攻击下的非线性半马尔可夫切换网络物理系统^[56]可以有效避免网络资源的浪费。此外，在文献[57]中介绍了一种基于滑模观测器的虚假数据注入攻击检测方法。在文献[58]中开发了一种用于检测虚假数据注入攻击的分布式区间观测器。目前关于有限时间稳定性攻击的文献主要强调它们的检测和缓解策略。本章通过采用平均脉冲区间方法和构造适当的 Lyapunov 函数，提出了一种证明随机奇异系统在脉冲虚假数据注入攻击下的随机可容许性条件的新方法。最后，理论分析结果通过两个数值例子得到验证。

4.2 系统描述

考虑在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的一类线性随机奇异系统，如下所示：

$$\mathcal{E}dx(t) = (\mathcal{A}x(t) + \mathcal{B}u(t))dt + \mathcal{J}x(t)d\mathcal{W}(t), \quad (4.1)$$

其中， $\mathcal{E} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是一个奇异矩阵， $\text{rank}(\mathcal{E}) = r \leq n$ ， $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 和 $u(t) \in \mathbb{R}^m$ 分别表示状态向量和控制输入。 $\mathcal{W}(t)$ 表示布朗运动， $\mathcal{A}$ ， $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{J}$ 是给定的常值矩阵。满足 $\mathbb{E}\{d\mathcal{W}(t)^2\} \equiv dt$ ，且 $\mathbb{E}\{d\mathcal{W}(t)\} \equiv 0$ 。

我们考虑在脉冲虚假数据注入攻击下随机奇异系统的有限时间稳定控制器：

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t), \quad (4.2)$$

其中， $u_1(t) = K_1 x(t_i)$ 是采样数据控制， $u_2(t) = K_2 x(t) \delta(t - t_{i+1})$ 是在脉冲虚假数据注入攻击下的控制， $t \in [t_i, t_{i+1})$ ， $i \in \mathbb{Z}_+$ ，反馈控制器增益记为 K_1 ， $K_2 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ，Dirac- delta 函数记为 $\Delta(\cdot)$ ，以及一个序列 $\eta = \{t_1, t_2, \dots\}$ 满足

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_i < \dots, \lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \infty.$$

那么，系统 (4.1) 可以重新表示为

$$\begin{aligned} \mathcal{E}dx(t) &= (\mathcal{A}x(t) + \mathcal{B}K_1 x(t_i))dt + \mathcal{J}x(t)d\mathcal{W}(t), t \in [t_i, t_{i+1}), \\ \Delta x(t) &= K_2 x(t_i^-), i \in \mathbb{Z}_+, \\ x(0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (4.3)$$

其中， $x(t_i) = x(t_i^+)$ ， $\Delta x = x(t_i) - x(t_i^-)$ 和 $x(t_i^-)$ 由 $\lim_{t \rightarrow t_i^-} x(t)$ 给出。

接下来，我们引入一些基本假设、定义和引理，这些将为主要结果的建立提供支持。

假设 1 矩阵对 $(\mathcal{E}, \mathcal{A})$ 是正则的，并且满足 $\text{rank}(\mathcal{E} \quad \mathcal{J}) = \text{rank}(\mathcal{E})$ 。

在上述假设下，系统 (4.1) 中的随机项 $\mathcal{J}x(t)d\mathcal{W}(t)$ 不会引起系统结构的任何变化。也就是说，系统 (4.1) 中独立描述符变量的数量或系统的自由度数量为 $r = \text{rank}(\mathcal{E})$ ，相关变量的数量为 $n - \text{rank}(\mathcal{E}) = n - \text{rank}(\mathcal{E} \quad \mathcal{J})$ 。

定义 2^[59] 脉冲序列 $\eta = \{t_1, t_2, \dots\}$ 的平均脉冲间隔记为 τ_a 。如果存在 $\mathcal{N}_0 \in \mathbb{Z}_+$ 且 τ_a 为正数, 那么在区间 $[t, T)$ 内定义为

$$\frac{T-t}{\tau_a} - \mathcal{N}_0 \leq \mathcal{N}_\eta(T, t) \leq \frac{T-t}{\tau_a} + \mathcal{N}_0, 0 \leq t \leq T,$$

其中, $\mathcal{N}_\eta(T, t)$ 表示序列 η 中脉冲事件的数量。

定义 3^[60] 考虑三个正常数 $T, \mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2 (\mathcal{N}_2 > \mathcal{N}_1)$, 如果 $\mathcal{N}_1 \geq |x(0)| \Rightarrow \mathcal{N}_2 > |x(t)|$, 对于所有 $t \in [0, T]$ 都成立, 那么系统 (4.1) 被定义为在 $(T, \mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ 上有限时间稳定, 见图 4-1。

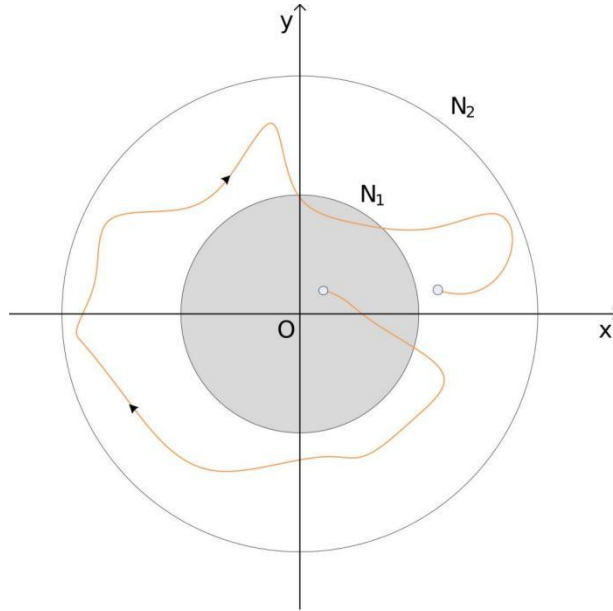


图 4-1 有限时间有界轨迹图

我们关注系统 (4.3) 在有限时间稳定区间 $[0, T]$ 上的行为。因此, 我们假设存在一个正整数 $\mathcal{N}_\eta(T, 0) \in \mathbb{Z}_+$, 使得 $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{\mathcal{N}_\eta(T, 0)} \leq T$ 。

引理 4 给定三个正常数 $T, \mathcal{N}_1$ 和 $\mathcal{N}_2 (\mathcal{N}_2 > \mathcal{N}_1)$, 如果存在五个常数 $c_1 > 0, c_2 > 0, c_3 \in \mathbb{R}, m > 0$ 和 $c_4 > 0$, 以及一个连续函数 $\mathcal{V}: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, 使得对于任何满足以下条件的脉冲序列 $\eta = \{t_i\}_{i=1}^{\mathcal{N}_\eta(T, 0)}$, 对于所有 $t \in [0, T]$ 都成立:

$$\begin{aligned} c_1 |x(t)|^2 &\leq \mathcal{V}(t, x(t)) \leq c_2 |x(t)|^2 + c_4 |x(t_i)|^2, t \in [t_i, t_{i+1}), \\ D^+ \mathcal{V}(t, x(t)) &\leq c_3 \mathcal{V}(t, x(t)), t \neq t_i, i \in \mathbb{Z}_+, \\ \mathcal{V}(t_i, x(t_i)) &\leq m \mathcal{V}(t_i^-, x(t_i^-)). \end{aligned}$$

那么, 系统 (4.3) 被称为关于 $(\mathcal{T}, \mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ 是随机可容许的, 使得

$$0 \leq \mathcal{T} \frac{\ln m}{\tau_a} + c_3 \mathcal{T} \leq \ln \gamma,$$

其中, τ_a 和 $\mathcal{N}_0$ 是正常数, $\gamma = \frac{\mathcal{N}_2^2 c_1}{\mathcal{N}_1^2 (c_2 + c_4) \Theta}$ 和 $\Theta = \max \{m^{\mathcal{N}_0}, 1, m^{-\mathcal{N}_0}\}$ 。这满足定义 1 中规定的不等式约束条件。

本章的主要目标是通过应用有限时间稳定控制输入来研究随机奇异系统的随机可容许性。针对脉冲虚假数据注入攻击, 利用平均脉冲间隔方法开发了一种新的 Lyapunov 函数。详细框架如图 4-2 所示。

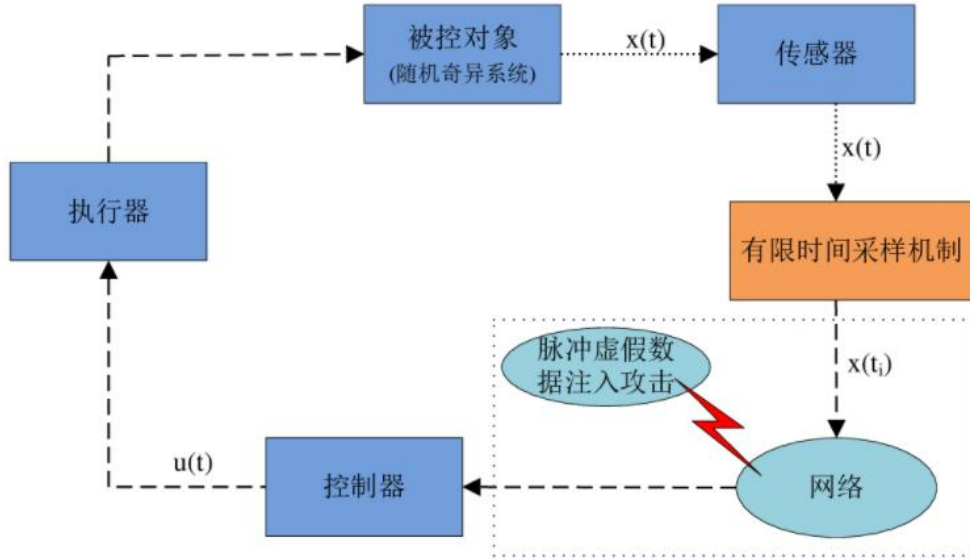


图 4-2 本章结构示意图

4.3 稳定性分析与控制器设计

在本节中, 我们通过沿着系统 (4.3) 的轨迹应用连续的 Lyapunov 函数 $\mathcal{V}(t, x(t))$, 概述了有限时间稳定控制的充分条件。此外, 我们根据线性矩阵不等式推导出了随机奇异系统的随机可容许性准则。

定理 4.1 对于给定的三个正常数 $\mathcal{T}, \mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2 (\mathcal{N}_2 > \mathcal{N}_1)$, 在假设 1 下, 系统 (4.3)

是随机可容许的，当且仅当存在两个正标量 m, α ，两个矩阵 $\mathcal{P} > 0, \mathcal{Q} > 0$ ，可以得到

$$\begin{pmatrix} -\alpha \mathcal{E}^T \mathcal{P} + \mathcal{P}^T \mathcal{A} + \mathcal{A}^T \mathcal{P} + & \mathcal{P}^T \mathcal{B} K_1 \\ \mathcal{J}^T (\mathcal{E}^+)^T \mathcal{E}^T \mathcal{P} \mathcal{E}^+ \mathcal{J} & \\ \star & -\alpha \mathcal{Q} \end{pmatrix} < 0, \quad (4.4)$$

$$\begin{pmatrix} -m \mathcal{E}^T \mathcal{P} & (\mathcal{E}^T \mathcal{P} + \mathcal{Q})^T (K_2 + I)^T \\ \star & -(\mathcal{E}^T \mathcal{P} + \mathcal{Q}) \end{pmatrix} \leq 0. \quad (4.5)$$

证明 首先，证明系统 (4.3) 的无脉冲性。在假设 1 下，矩阵对 $(\mathcal{E}, \mathcal{A})$ 是正则的。

因此，存在非奇异矩阵 U 和 V ，使得

$$U \mathcal{E} V = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, U \mathcal{A} V = \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{A}}_{11} & \bar{\mathcal{A}}_{12} \\ \bar{\mathcal{A}}_{21} & \bar{\mathcal{A}}_{22} \end{bmatrix}, U \mathcal{J} V = \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{J}}_{11} & \bar{\mathcal{J}}_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, V^{-1} x(t) = \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

由 $\mathcal{E}^T \mathcal{P} = \mathcal{P}^T \mathcal{E} \geq 0$ ，可得

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^{-T} \mathcal{P} V = V^T \mathcal{P}^T U^{-1} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0. \quad (4.7)$$

根据公式 (4.7)，可以得到 $\bar{\mathcal{P}}_{11} = \bar{\mathcal{P}}_{11}^T, \bar{\mathcal{P}}_{12} = 0$ ，并且

$$U^{-T} \mathcal{P} V = \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{P}}_{11} & 0 \\ \bar{\mathcal{P}}_{21} & \bar{\mathcal{P}}_{22} \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

$$V^T \mathcal{E}^T \mathcal{P} V = (V^T \mathcal{E}^T U^T) (U^{-T} \mathcal{P} V) = \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{P}}_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

鉴于 $\mathcal{A}^T \mathcal{P} + \mathcal{P}^T \mathcal{A} + \mathcal{J}^T (\mathcal{E}^+)^T \mathcal{E}^T \mathcal{P} \mathcal{E}^+ \mathcal{J} < 0$ ，我们有

$$\mathcal{A}^T \mathcal{P} + \mathcal{P}^T \mathcal{A} < 0, \quad (4.10)$$

这等价于

$$(U \mathcal{A} V)^T (U^{-T} \mathcal{P} V) + (U^{-T} \mathcal{P} V)^T (U \mathcal{A} V) < 0. \quad (4.11)$$

将 (4.6) 和 (4.8) 代入 (4.11)，可以推导出相应左边 2-2 的矩阵块，即 $\bar{\mathcal{A}}_{22}^T \bar{\mathcal{P}}_{22} + \bar{\mathcal{P}}_{22}^T \bar{\mathcal{A}}_{22}$ 是负定的，这表明 $\bar{\mathcal{A}}_{22}$ 是非奇异的。因此，从 (4.6) 中可以给出 (4.1) 的约束等价形式如下：

$$\begin{aligned} d\bar{x}_1(t) &= (\bar{\mathcal{A}}_{11} - \bar{\mathcal{A}}_{12}\bar{\mathcal{A}}_{22}^{-1}\bar{\mathcal{A}}_{21})\bar{x}_1(t)dt + (\bar{\mathcal{J}}_{11} - \bar{\mathcal{J}}_{12}\bar{\mathcal{A}}_{22}^{-1}\bar{\mathcal{A}}_{21})\bar{x}_1(t)d\mathcal{W}(t), \\ \bar{x}_2(t) &= -\bar{\mathcal{A}}_{22}^{-1}\bar{\mathcal{A}}_{21}\bar{x}_1(t). \end{aligned} \quad (4.12)$$

这意味着该随机系统是无脉冲的。

接下来, 讨论系统 (4.3) 关于 $(\mathcal{T}, \mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ 的随机可容许性。我们定义

$t_{\mathcal{N}_{\eta(\mathcal{T}, 0)+1}} = \mathcal{T}$ 。考虑以下新提出的 Lyapunov 函数, 在区间 $[t_i, t_{i+1})$ 上定义为

$$\mathcal{V}(t, x(t)) = x^T(t)\mathcal{E}^T\mathcal{P}x(t) + x^T(t_i)\mathcal{Q}x(t_i),$$

对于任意 $i \in \{0, 1, 2, \dots, t_{\mathcal{N}_{\eta(\mathcal{T}, 0)}\}$ 。系统 (4.3) 在 $t \in [t_i, t_{i+1})$ 上的 $D^+\mathcal{V}(t, x(t))$ 为

$$\begin{aligned} D^+\mathcal{V}(t, x(t)) &= x^T(t)(\mathcal{P}^T\mathcal{A} + \mathcal{A}^T\mathcal{P} + \mathcal{J}^T(\mathcal{E}^+)^T\mathcal{E}^T\mathcal{P}\mathcal{E}^+\mathcal{J})x(t) \\ &\quad + 2x^T(t)\mathcal{P}^T\mathcal{B}K_1x(t_i) + 2x^T(t)\mathcal{P}^T\mathcal{J}x(t)d\mathcal{W}(t) \\ &= \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t_i) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathcal{P}^T\mathcal{A} + \mathcal{A}^T\mathcal{P} + & \mathcal{P}^T\mathcal{B}K_1 \\ \mathcal{J}^T(\mathcal{E}^+)^T\mathcal{E}^T\mathcal{P}\mathcal{E}^+\mathcal{J} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t_i) \end{pmatrix} + 2x^T(t)\mathcal{P}^T\mathcal{J}x(t)d\mathcal{W}(t). \end{aligned}$$

对上述公式运用数学期望 $\mathbb{E}$ 可得

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\{D^+\mathcal{V}(t, x(t))\} \\ &= \mathbb{E}\left\{\begin{pmatrix} x(t) \\ x(t_i) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -\alpha\mathcal{E}^T\mathcal{P} + \mathcal{P}^T\mathcal{A} + \mathcal{A}^T\mathcal{P} & \mathcal{P}^T\mathcal{B}K_1 \\ +\mathcal{J}^T(\mathcal{E}^+)^T\mathcal{E}^T\mathcal{P}\mathcal{E}^+\mathcal{J} & -\alpha\mathcal{Q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t_i) \end{pmatrix}\right\} \\ &\quad + \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t_i) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \alpha\mathcal{E}^T\mathcal{P} & 0 \\ 0 & \alpha\mathcal{Q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t_i) \end{pmatrix} \\ &\leq \mathbb{E}\left\{\begin{pmatrix} x(t) \\ x(t_i) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \alpha\mathcal{E}^T\mathcal{P} & 0 \\ 0 & \alpha\mathcal{Q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t_i) \end{pmatrix}\right\} \\ &= \alpha\mathbb{E}\{\mathcal{V}(t, x(t))\}, t \in [t_i, t_{i+1}), \end{aligned}$$

这进一步意味着

$$\mathbb{E}\{\mathcal{V}(t, x(t))\} \leq e^{\alpha(t-t_i)}\mathbb{E}\{\mathcal{V}(t_i, x(t_i))\}, t \in [t_i, t_{i+1}).$$

因此, 由 (4.5) 可知

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} -m\mathcal{E}^T\mathcal{P} & U_2^T \\ \star & -(\mathcal{E}^T\mathcal{P} + \mathcal{Q}) \end{pmatrix} \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\begin{pmatrix} I & (I + K_2)^T \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -m\mathcal{E}^T\mathcal{P} & U_2^T \\ \star & -(\mathcal{E}^T\mathcal{P} + \mathcal{Q}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ I + K_2 & I \end{pmatrix} \leq 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} -m\mathcal{E}^T\mathcal{P} + (I + K_2)^T \\ \times(\mathcal{E}^T\mathcal{P} + \mathcal{Q})(I + K_2) & 0 \\ \star & -(\mathcal{E}^T\mathcal{P} + \mathcal{Q}) \end{pmatrix} \leq 0 \Leftrightarrow \\ (I + K_2)^T(\mathcal{E}^T\mathcal{P} + \mathcal{Q})(I + K_2) - m\mathcal{E}^T\mathcal{P} \leq 0.$$

这表明对于任意 $k \in \{1, 2, \dots, t_{\mathcal{N}_\eta(\mathcal{T}, 0)}\}$, 以下式子成立

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\mathcal{V}(t_i, x(t_i))\} &= \mathbb{E}\{x^T(t_i)(\mathcal{E}^T\mathcal{P} + \mathcal{Q})x(t_i)\} \\ &= \mathbb{E}\{x^T(t_i^-)(I + K_2)^T(\mathcal{E}^T\mathcal{P} + \mathcal{Q})(I + K_2)x(t_i^-)\} \\ &\leq \mathbb{E}\{mx^T(t_i^-)\mathcal{E}^T\mathcal{P}x(t_i^-)\} \leq m\mathbb{E}\{\mathcal{V}(t_i^-, x(t_i^-))\}. \end{aligned}$$

因此, 可得

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\mathcal{V}(t, x(t))\} &\leq e^{\alpha(t-t_i)}\mathbb{E}\{\mathcal{V}(t_i, x(t_i))\} \\ &\leq me^{\alpha(t-t_i)}\mathbb{E}\{\mathcal{V}(t_i^-, x(t_i^-))\} \\ &\leq \dots \\ &\leq m^k e^{\alpha t}\mathbb{E}\{\mathcal{V}(0, x(0))\}, t \in [t_i, t_{i+1}), \end{aligned}$$

并且对于 $t \in [t_{\mathcal{N}_\eta(\mathcal{T}, 0)}, \mathcal{T}]$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\mathcal{V}(t, x(t))\} &\leq e^{\alpha(t-t_{\mathcal{N}_\eta(\mathcal{T}, 0)})}\mathbb{E}\{\mathcal{V}(t_{\mathcal{N}_\eta(\mathcal{T}, 0)}, x(t_{\mathcal{N}_\eta(\mathcal{T}, 0)}))\} \\ &\leq me^{\alpha(t-t_{\mathcal{N}_\eta(\mathcal{T}, 0)})}\mathbb{E}\{\mathcal{V}(t_{\mathcal{N}_\eta(\mathcal{T}, 0)}^-, x(t_{\mathcal{N}_\eta(\mathcal{T}, 0)}^-))\} \\ &\leq \dots \\ &\leq m^{\mathcal{N}_\eta(t, 0)}e^{\alpha t}\mathbb{E}\{\mathcal{V}(0, x(0))\}. \end{aligned}$$

注 1 由引理 4 可知, 定理 3.1 中的平均脉冲间隔满足 $c_1 = \lambda_{\min}(\mathcal{P})$, $c_2 = \lambda_{\max}(\mathcal{P})$,

$c_3 = \alpha$, $c_4 = \lambda_{\max}(\mathcal{Q})$, $\Theta = \max\{m^{\mathcal{N}_0}, 1, m^{-\mathcal{N}_0}\}$, τ_α 和 $\mathcal{N}_0$ 如定义 2 所示。因此, 我们可以概述上述证明过程。

注 2 在 $D^+\mathcal{V}(t, x(t))$ 中, 当处理包含 $2x^T(t)\mathcal{P}^T\mathcal{J}x(t)d\mathcal{W}(t)$ 的 Lyapunov 函数时, 我们引入了数学期望 $\mathbb{E}$ 并巧妙地处理了布朗运动。与文献[61]中非线性脉冲系统的有限时间稳定性准则相比, 脉冲虚假数据注入攻击下的随机奇异系统具有更广泛的应用范围, 并进一步研究了其应用。

定理 4.2 对于给定的三个正常数 $\mathcal{T}$, $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2 (\mathcal{N}_2 > \mathcal{N}_1)$, 在假设 1 下, 系统 (4.3) 是随机可容许的, 当且仅当存在两个正标量 m , α , 两个矩阵 $\mathcal{P} > 0$, $\mathcal{Q} > 0$ 以及两个任意的维度兼容的矩阵 U_1 , U_2 , 使得

$$\begin{pmatrix} -\alpha \mathcal{E}^T \mathcal{P} + \mathcal{P}^T \mathcal{A} + \mathcal{A}^T \mathcal{P} & U_1 \\ + \mathcal{J}^T (\mathcal{E}^+)^T \mathcal{E}^T \mathcal{P} \mathcal{E}^+ \mathcal{J} & \\ \star & -\alpha \mathcal{Q} \end{pmatrix} < 0, \quad (4.13)$$

$$\begin{pmatrix} -m \mathcal{E}^T \mathcal{P} & U_2^T \\ \star & -(\mathcal{E}^T \mathcal{P} + \mathcal{Q}) \end{pmatrix} \leq 0, \quad (4.14)$$

那么, 我们可以得到 $K_1 = (\mathcal{P}\mathcal{B})^{-1}U_1$ 和 $K_2 = (\mathcal{E}^T \mathcal{P} + \mathcal{Q})^{-1}U_2 - I$ 。

证明 已知序列 $\eta = \{t_1, t_2, \dots, t_{\mathcal{N}_\eta(\mathcal{T}, 0)}\}$ 的平均脉冲间隔为 τ_a , 我们有

$$\frac{t-0}{\tau_a} - \mathcal{N}_0 \leq \mathcal{N}_\eta(t, 0) \leq \frac{t-0}{\tau_a} + \mathcal{N}_0, \forall t \in [0, \mathcal{T}].$$

在本定理中, 我们将分别研究三种不同类型的脉冲情况。

首先, 对于 $0 < m < 1$, 有以下结论成立

$$\mathbb{E}\{\mathcal{V}(t, x(t))\} \leq m^{(t-0)/\tau_a - \mathcal{N}_0} e^{\alpha t} \mathbb{E}\{\mathcal{V}(0, x(0))\} = m^{-\mathcal{N}_0} e^{(\ln m/\tau_a + \alpha)t} \mathbb{E}\{\mathcal{V}(0, x(0))\}.$$

其次, 当 $m = 1$ 时, 有

$$\mathbb{E}\{\mathcal{V}(t, x(t))\} \leq m^{(t-0)/\tau_a - \mathcal{N}_0} e^{\alpha t} \mathbb{E}\{\mathcal{V}(0, x(0))\} = e^{(\ln m/\tau_a + \alpha)t} \mathbb{E}\{\mathcal{V}(0, x(0))\}.$$

最后, 对于 $m > 1$, 可以很容易地观察到

$$\mathbb{E}\{\mathcal{V}(t, x(t))\} \leq m^{\mathcal{N}_0} e^{(\ln m/\tau_a + \alpha)t} \mathbb{E}\{\mathcal{V}(0, x(0))\}.$$

根据公式 (4.5) 中 Θ 的定义, 这意味着对于所有 $m > 0$, 可以得出

$$\mathbb{E}\{\mathcal{V}(t, x(t))\} \leq \Theta \cdot e^{(\ln m/\tau_a + \alpha)t} \mathbb{E}\{\mathcal{V}(0, x(0))\}.$$

从而有

$$\lambda_{\min}(\mathcal{P}) |x(t)|^2 \leq \mathbb{E}\{\mathcal{V}(t, x(t))\} \leq \lambda_{\max}(\mathcal{P}) |x(t)|^2 + \lambda_{\max}(\mathcal{Q}) |x(t)|^2,$$

这表明

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(\mathcal{P}) |x(t)|^2 &\leq \mathbb{E}\{\mathcal{V}(t, x(t))\} \leq \Theta \cdot e^{(\ln m/\tau_a + \alpha)T} \mathbb{E}\{\mathcal{V}(0, x(0))\} \\ &\leq (\lambda_{\max}(\mathcal{P}) + \lambda_{\max}(\mathcal{Q})) \cdot \Theta e^{(\ln m/\tau_a + \alpha)T} |x(0)|^2. \end{aligned}$$

值得注意的是，推导上述不等式时应用了引理 4 中的约束条件。因此，我们证明了系统 (4.3) 在 $K_1 = \mathcal{P}^{-1}U_1$ 和 $K_2 = (\mathcal{E}^T \mathcal{P} + \mathcal{Q})^{-1}U_2 - I$ 的情况下具有随机可容许性。至此，证明完毕。

注 3 平均脉冲间隔方法解决了随机奇异系统在脉冲虚假数据注入攻击下的问题。通过讨论定理 4.2 中的三种脉冲情况，得到了系统 (4.3) 的随机可容许性条件。利用线性矩阵不等式的随机可容许性准则，求解了有限时间稳定控制器下随机奇异系统的 K_1 和 K_2 。

4.4 数值仿真

在本节中，通过两个数值算例验证了存在脉冲虚假数据注入攻击时系统 (4.3) 的随机可容许性准则。

例 4.1 考虑系统 (4.3)，其中 $\alpha = 0.1$ ， $\mu = 1$ ，并且

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} 1.2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{A} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.02 & 0.7 \\ -0.71 & -0.33 & -0.65 \\ 1.1 & 0.5 & -0.77 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1.58 \\ 0 & 0 & 0.11 \end{bmatrix}, \mathcal{J} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.02 & 0.01 \\ 0.02 & 0.5 & 0.02 \\ 0.01 & 0.02 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

从图 4-3 可以看出，在没有有限时间稳定控制输入 ($u(t) = 0$) 的情况下，系统不具有随机可容许性。图 4-4 所示的三维相图直观地表明，无法保证随机奇异系统的随机可容许性。

基于本章的结果，现在我们通过有限时间稳定控制方法来研究存在脉冲虚假数据注入攻击的随机奇异系统 (4.3)。现在我们设计控制增益矩阵 K_1 和 K_2 ，使得系统 (4.3) 具有随机可容许性。然后，计算定理 4.1 中线性矩阵不等式的可行解为

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} 0.3507 & -0.5045 & -0.1136 \\ 0.5449 & 0.2464 & 0.0431 \\ 0.3345 & -0.1921 & 0.4284 \end{bmatrix}, \mathcal{Q} = \begin{bmatrix} 0.3294 & 1.0995 & 77.9964 \\ -1.0823 & 0.4616 & 53.8802 \\ -78.1466 & -53.7710 & 0.3587 \end{bmatrix},$$

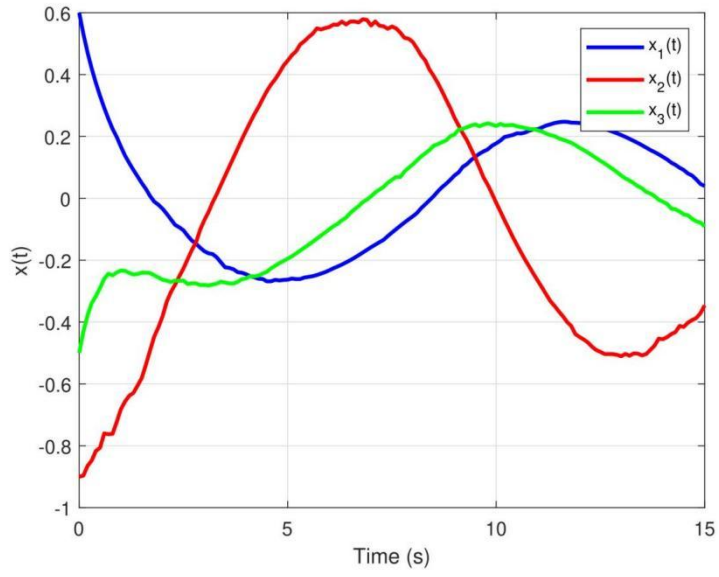


图 4-3 无控制输入的开环系统的状态轨迹

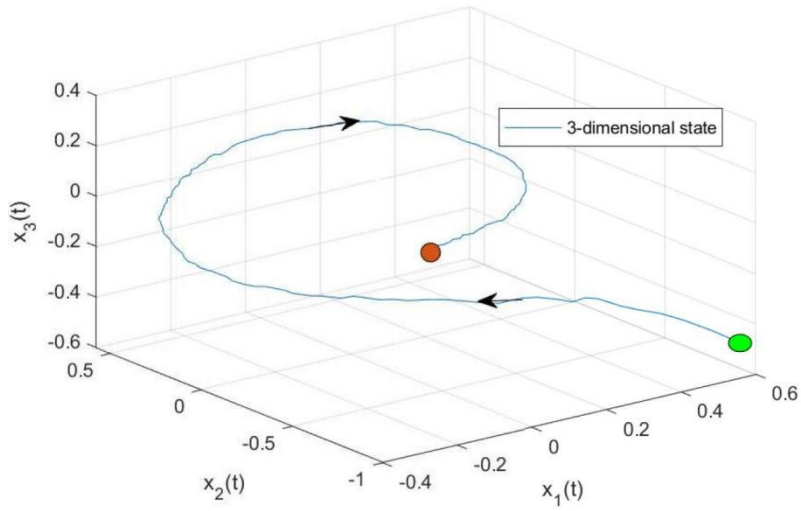


图 4-4 开环系统的三维状态空间轨迹

并且通过计算得到有限时间稳定控制增益矩阵 K_1 和 K_2 为

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1.7372 & 0.1137 & -4.1446 \\ -0.9648 & -0.2043 & 2.0385 \\ 1.2948 & 0.2152 & -2.5601 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} -1.0977 & 0.1218 & -0.0175 \\ 0.1412 & -1.1761 & 0.0295 \\ -0.0029 & -0.0003 & -1.0002 \end{bmatrix}.$$

根据定理 4.1，在有限时间稳定控制方法下，系统 (4.3) 是随机可容许的，如图 4-5 所示。数值仿真效果优于文献[42]中算例 1 的仿真结果。图 4-6 所示的三维相图直观地表明，随机奇异系统是收敛的，这证明了我们所提出准则的有效

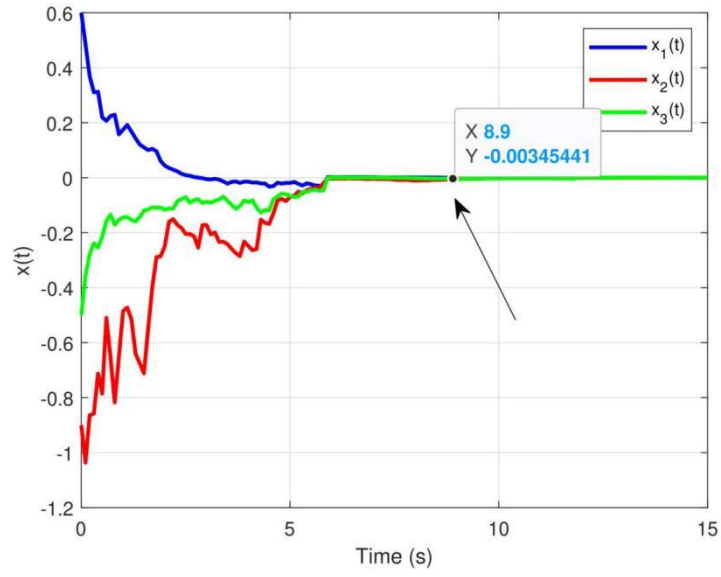


图 4-5 有限时间采样控制下的闭环系统的状态轨迹

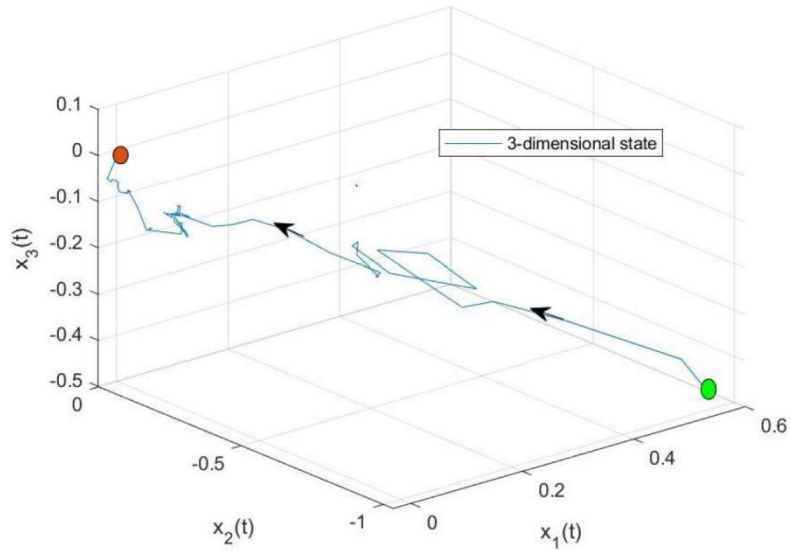


图 4-6 闭环系统的三维状态空间轨迹

性和优势。

注 4 例 4.1 对随机奇异系统的随机可容许性进行了数值验证。为了确保我们的结果适用于实际模型，下面给出一个实际模型。

例 4.2 考虑一个双旋转质量的实际模型^[62]，如下所示

$$S_{\theta} \dot{x}(t) = A_{\theta} x(t) + B_{\theta} v(t), \quad (4.15)$$

其中， $x(t) = [\omega_1 \ \omega_2 \ M_2 \ M_3]^T$ 且 $v(t) = [M_1 \ M_4]^T$ 。

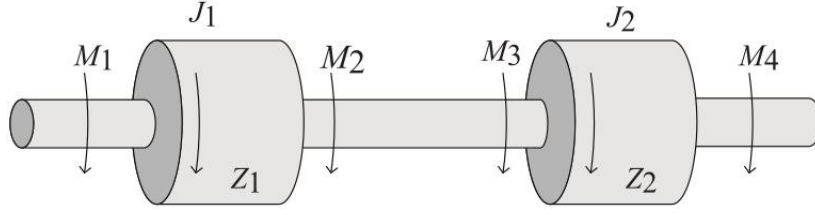


图 4-7 双旋转质量模型

通过对模型进行变换，图 4-7 中的双旋转质量模型可以建模为系统 (4.15) 的形式。在这个模型中，扭矩 M_1 和 M_4 由执行器表示，而内部扭矩表示为 M_2 和 M_3 。

J_1 和 J_2 表示质量的转动惯量，角速度为 Z_1 和 Z_2 。

设置三种模式的参数，三维初始状态为 $x_0 = [0.9 \quad -0.8 \quad -0.4]$ ，并且有 $[Z_1 \quad Z_2 \quad M_2 \quad M_3]^T$ ，控制输入为 $[M_1 \quad M_4]^T$ 。因此，涉及两个相互连接的旋转质量的模型可以用系统 (4.3) 来描述，选择的参数为

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.45 & 0 \\ 0 & 0.18 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix}, \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0.7 & 1 & 0.3 \\ 1 & 2 & 1.3 \\ 1.2 & 0.1 & 0.11 \end{bmatrix}, \mathcal{J} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

我们认识到，在没有有限时间稳定控制输入 ($u(t) = 0$) 的情况下，系统 (4.3) 不具有随机可容许性，如图 4-8 所示。这说明了在脉冲虚假数据注入攻击下有限时间稳定控制方法的有效性。

选择 $\alpha = 0.55$ ， $m = 0.7$ ，计算定理 4.1 中线性矩阵不等式的可行解为

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} 0.35 & -2.58 & 0.24 \\ 3.2 & 0.8 & -1.02 \\ -0.51 & 0.6 & 1.14 \end{bmatrix}, \mathcal{Q} = \begin{bmatrix} 1.11 & 12.93 & -1.5 \\ -13.09 & 0.98 & -10.81 \\ 1.57 & 10.9 & 0.86 \end{bmatrix},$$

$$U_1 = \begin{bmatrix} -0.23 & -0.08 & 0.01 \\ -0.09 & -0.28 & 0.01 \\ 0.01 & 0.02 & -0.22 \end{bmatrix}, U_2 = \begin{bmatrix} -0.31 & -0.09 & 0.03 \\ -0.08 & -0.42 & 0.04 \\ 0.02 & 0.05 & -0.49 \end{bmatrix},$$

并且通过计算得到有限时间稳定控制增益矩阵 K_1 和 K_2 为

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.0666 & -0.0451 & -0.1737 \\ -0.0966 & -0.1599 & 0.0668 \\ 0.2573 & 0.2916 & 0.0087 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} -1.1006 & -0.0063 & 0.1462 \\ -0.0044 & -1.0024 & -0.0335 \\ 0.0898 & 0.0405 & -1.1302 \end{bmatrix}.$$

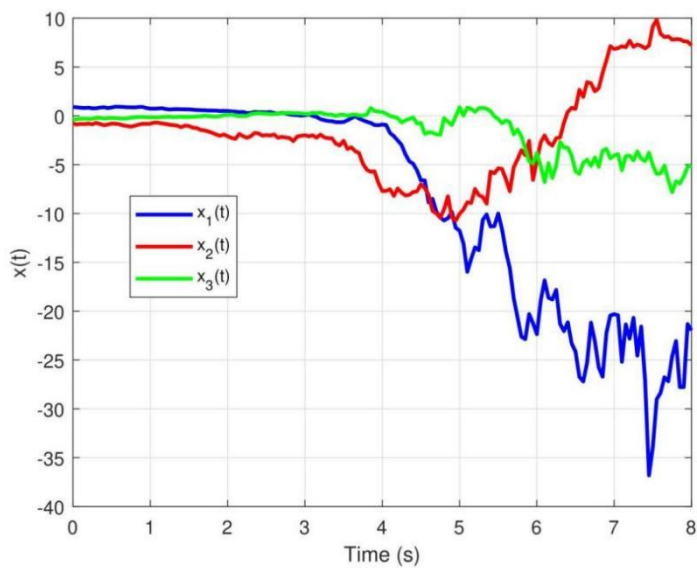


图 4-8 无控制输入的双旋转质量系统的状态轨迹

在这个例子中，基于有限时间稳定控制方法，系统（4.3）是随机容许的，如图 4-9 所示。与文献[62]中的离散时间马尔可夫跳跃线性奇异系统相比，双旋转质量模型的应用更为广泛。采样间隔如图 4-10 所示。

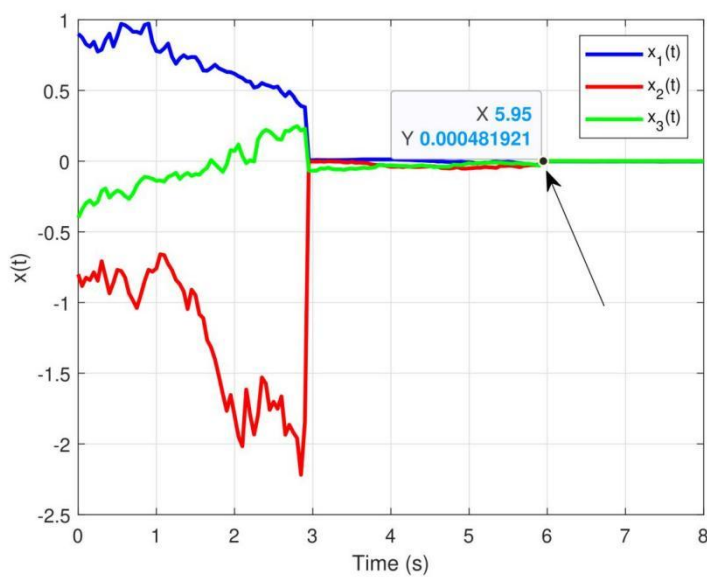


图 4-9 有限时间采样控制下的双旋转质量系统的状态轨迹

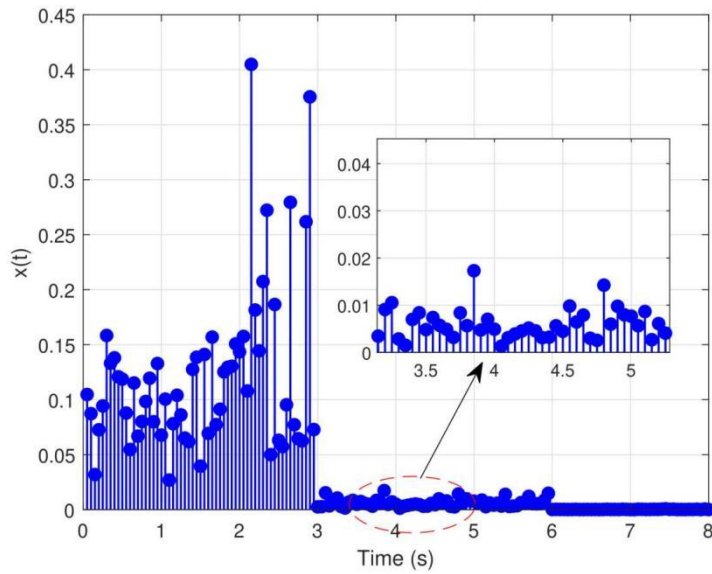


图 4-10 采样间隔

4.5 本章小结

本章研究了易受脉冲虚假数据注入攻击的随机奇异系统的有限时间稳定控制问题。首先，为了确保这些系统在脉冲虚假数据注入攻击机制下的随机可容许性，我们首先设计了一个有限时间采样数据控制器。此外，我们通过平均脉冲间隔方法建立了新的随机可容许性充分条件。采样数据控制器和脉冲控制器的有效性可以通过 **Matlab** 中的线性矩阵不等式控制工具箱直接进行验证。结果表明，通过限制脉冲虚假数据注入攻击的持续时间和频率，能够得到系统随机可容许的充分条件。最后，给出了两个数值算例，以说明所提出方法的优越性和实用性。

第 5 章 总结与展望

奇异系统这一概念，最早由英国学者 Rosenbork 提出。此后，众多学者不断深入研讨，将奇异系统的研究推向新的高潮，如今已构建起较为完备的理论体系。近年来，研究重心逐渐转向模型更具一般性、能广泛应用于各类实际领域的随机奇异系统。不过，随机奇异系统内部构造错综复杂，系统中存在脉冲问题，还受到随机扰动等多种因素影响，这些难题大幅提升了理论研究的难度。

5.1 总结

本文聚焦于两类混杂系统的随机采样控制研究以及广义耗散性能分析。在已有研究的基础上，本文所考虑的系统纳入了更多外部因素和不确定性，比如外部干扰和参数的不确定性。通过综合运用多种控制技术与手段，如静态输出反馈、平均驻留时间法、对偶方程等，对原有的确定性采样控制进行改进，并成功应用于随机系统的控制设计中。同时，借助切换时间依赖的 Lyapunov 函数或泛函，以及 Jensen 不等式、自由加权矩阵和辅助向量函数等工具，克服外部干扰、参数不确定性等因素对系统的影响，巧妙设计出随机采样控制器，以确保整个闭环系统达成控制目标。本文的主要工作现总结如下：

(1) 研究了一类具有时变时滞和外部扰动的奇异系统的随机采样数据控制和广义耗散性能分析问题。针对外部扰动，制定了一种广义耗散控制策略来取代传统的 H_∞ 控制或无源框架，从而拓宽了潜在的应用范围。与确定性采样不同，使用伯努利分布技术对具有时变时滞的奇异系统采用随机采样控制。更重要的是，利用时滞相关的 Lyapunov-Krasovskii 泛函，通过 Jensen 不等式、自由加权矩阵法和辅助向量函数法建立了新的镇定准则。最后，通过数值仿真验证了随机采样控制器的有效性和所提控制方案的实用性。

(2) 研究了一类具有脉冲虚假数据注入攻击的随机奇异系统的有限时间稳定性问题。通过设计基于均方意义下是随机容许性准则的状态反馈控制器，相应的闭环系统在均方中是正则、无脉冲的且在均方意义下随机稳定的。在设计状态反馈控制器的过程中，采用对偶方程简便计算，并推导出闭环系统在均方意义下随机可容许性的条件。利用平均脉冲区间法和随机分析技术，建立了较少保守的

条件来保证闭环系统的随机容许性准则。针对随机奇异系统，通过矩阵不等式理论的证明，设计了一种新的有限时间采样数据控制器。此外，分析的脉冲虚假数据注入攻击包括不稳定和稳定脉冲。仿真结果显示了所提供控制方法的合理性，并与相关工作做对比分析，体现了所提控制技术的优势。

5.2 未来工作展望

尽管本文构建了两类混杂系统的随机采样控制稳定性分析以及广义耗散性能分析方法，取得了一定有价值的研究成果，为后续研究奠定了基础。但本文提出的策略和所得结果尚处于初步阶段，有待完善。而且“随机世界”丰富多彩，众多具有研究意义和价值的随机系统亟待深入探索。为此，梳理出以下研究方向：

（1）奇异时滞系统的随机采样控制：本文已解决随机采样时滞系统的随机可容许性问题，但对于含有延迟的奇异系统/奇异摄动系统，因快状态的存在和系统的奇异性，切换时刻难以实现单调非增，致使稳定准则不易得出。因此，设计有效的慢间歇控制器，并选择合适的 Lyapunov 函数促使系统稳定，仍是待解难题。

（2）基于论文中稳定性分析成果，随机混杂系统的控制与滤波问题具备深入研究的价值。其控制与滤波方面还可进一步挖掘。比如，设计能受随机脉冲干扰系统稳定的控制器就是一个方向。当前，关于 semi-Markov 切换奇异随机系统的控制和滤波研究，大多聚焦于奇异矩阵模态独立的情况。而对于奇异矩阵模态依赖的 semi-Markov 切换奇异随机系统的控制和滤波问题，尚存在研究空间，是值得关注的研究课题。

参考文献

- [1] 吴锋, 刘文煌, 郑应平. 混杂系统研究综述[J]. 系统工程, 1997, (02):1-7+16.
- [2] 关治洪, 刘永清. 奇异脉冲系统解的构造和稳定性[J]. 华中师范大学学报(自然科学版), 1995, (03):276-280.
- [3] Ma Y and Kong C. Dissipative asynchronous T-S fuzzy control for singular semi-Markovian jump systems[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2020, 52(6): 5454-5463.
- [4] Liu Q, Li J, Ma S, Yin S, Jiang B, and Yang C. A stochastic-switch-surface based neural sliding mode framework against actuator attacks of delayed singular semi-Markov jump systems[J]. Information Sciences, 2024, 652: 119763.
- [5] Xing S, Zhang Q, and Zhu B. Mean-square admissibility for stochastic T-S fuzzy singular systems based on extended quadratic Lyapunov functional approach[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2017, 307: 99-114.
- [6] Schein O and Denk G. Numerical solution of stochastic differential-algebraic equations with applications to transient noise simulation of microelectronic circuits[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 1998, 100(1): 77-92.
- [7] Boukas E. Stabilization of stochastic singular nonlinear hybrid systems[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 2006, 64(2): 217-228.
- [8] Shu Y and Zhu Y. Optimal control for multi-stage and continuous-time linear singular systems[J]. International Journal of Systems Science, 2018, 49(7): 1419-1434.
- [9] Su P, Sheng Z, Lin C, and Chen B. An asymmetric Lyapunov-Krasovskii functional and its application to stochastic admissibility analysis of time-delay singular Markovian jump systems[J]. Applied Mathematics Letters, 2023, 145: 108761.
- [10] Gao Z and Shi X. Observer-based controller design for stochastic descriptor systems with Brownian motions[J]. Automatica, 2013, 49(7): 2229-2235.
- [11] Liu X, Deng F, Zeng P, Gao X, and Zhao X. Sampled-data resilient control for

- stochastic nonlinear CPSs under DoS attacks[J]. *International Journal of Systems Science*, 2023, 54(5): 1165-1171.
- [12] Li X, Cao J, and Ho D. Impulsive control of nonlinear systems with time-varying delay and applications[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2019, 50(6): 2661-2673.
- [13] Jiang B, Lu J, Zheng W, and Shi K. Stability of truncated sampled-data control systems with impulsive effects[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2022, 67(9): 4877-4884.
- [14] Chen G, Du G, Xia J, Xie X, and Wang Z. Aperiodic sampled-data H_∞ control of vehicle active suspension system: an uncertain discrete-time model approach[J]. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2024, 20(4): 6739-6750.
- [15] Zhang Y, Ma Y, Fu L, Zhao W, and Huang X. Finite-time non-fragile H_∞ sampled-data control for uncertain T-S fuzzy system with time-varying delay and nonlinear perturbation subject to Markovian jump[J]. *ISA transactions*, 2020, 99: 59-73.
- [16] He Y, Wang Q, Lin C, and Wu M. Delay-range-dependent stability for systems with time-varying delay[J]. *Automatica*, 2007, 43(2): 371-376.
- [17] Fridman E. A refined input delay approach to sampled-data control[J]. *Automatica*, 2010, 46(2): 421-427.
- [18] Rosenbrock H. Structural properties of linear dynamical systems[J]. *International Journal of Control*, 1974, 20(2): 191-202.
- [19] Luenberger D. Dynamic equation in descriptor form[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1977, 22(2): 312-321.
- [20] Luenberger D. Time-invariant descriptor systems[J]. *Automatica*, 1978, 14: 473-480.
- [21] Rosenbrock H and Pugh A. Contributions to a hierarchical theory of systems[J]. *International Journal of Control*, 1974, 19: 845-867.
- [22] Willems J. Dissipative dynamical systems part I: general theory[J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1972, 45(5): 321-351.

-
- [23] Hill D and Moylan P. Dissipative dynamical systems: basic input-output and state properties[J]. Journal of the Franklin Institute, 1980, 309(5): 327-357.
 - [24] Fridman E, Shaked U, and Suplin V. Input/output delay approach to robust sampled-data H_∞ control[J]. Systems and Control Letters, 2005, 54(3): 271-282.
 - [25] Byrnes C, Isidori A, and Willems J. Passivity, feedback equivalence and the global stabilization of minimumphase nonlinear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1991, 36: 1228-1234.
 - [26] Meisami-Azad M, Mohammadpour J, and Grigoriadis K. Dissipative analysis and control of state-space symmetric systems[J]. Automatica, 2009, 45: 1574-1579.
 - [27] Renquan L, Han F, and Xue A. Dissipative control for stochastic descriptor systems with time-delays. 2009 Chinese Control and Decision Conference, 2009, 2825-2829.
 - [28] Rakkiyappan R, Preethi Latha V, Zhu Q and Yao Z. Exponential synchronization of Markovian jumping chaotic neural networks with sampled-data and saturating actuators[J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2017, 24: 28-44.
 - [29] Sakthivel R, Saravanakumar T, Ma Y, and Marshal Anthoni S. Finite-time resilient reliable sampled-data control for fuzzy systems with stochastically occurring uncertainties[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2017, 329: 1-18.
 - [30] Mao X. Exponential stability of stochastic differential equations[M]. New York: Marcel Dekker, 1994.
 - [31] Mao X. Stochastic differential equations and their applications[M]. Horwood, Chichester, 1997.
 - [32] 刘永清, 邓飞其. 随机系统的变结构控制[M]. 广州: 华南理工大学出版社, 1998.
 - [33] 李树英, 许茂增. 随机系统的滤波与控制[M]. 北京: 国防工业出版社, 1991.
 - [34] Zhang W, Yuan F, and Wei Q. A Lyapunov-type equation on mean square stability of stochastic systems[J]. Journal of Engineering Mathematics, 1998, 15(4): 133-134.
 - [35] Zhang W and Chen B. On stabilizability and exact observability of stochastic

- systems with their applications[J]. Automatica, 2004, 40: 87-94.
- [36] Lu J, Jiang B, and Zheng W. Potential impacts of delay on stability of impulsive control systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2022, 67: 5179-5190.
- [37] Wei H, Zhang K, Zhang M, Li Q, and Wang J. Dissipative synchronization of semi-Markovian jumping delayed neural networks under stochastic deception attacks: An event-triggered impulsive control strategy[J]. Journal of the Franklin Institute, 2024, 361: 106835.
- [38] Yao F and Deng F. Stability of impulsive stochastic functional differential systems in terms of two measures via comparison approach[J]. Science China Information Sciences, 2012, 55: 1313-1322.
- [39] Wu X, Zheng W, Tang Y, and Jin X. Stability analysis for impulsive stochastic time-varying systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2023, 68: 2584-2591.
- [40] Zhang H, Ma T, Huang G, and Wang Z. Robust global exponential synchronization of uncertain chaotic delayed neural networks via dual-stage impulsive control[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics), 2010, 40: 831-844.
- [41] Qiu J, Sun K, Yang C, Chen X, Chen X, and Zhang A. Finite-time stability of genetic regulatory networks with impulsive effects[J]. Neurocomputing, 2017, 219: 9-14.
- [42] Lv X and Li X. Finite time stability and controller design for nonlinear impulsive sampled-data systems with applications[J]. ISA Transactions, 2017, 70: 30-36.
- [43] Zhao J and Hill D. Dissipativity theory for switched systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2008, 53(4): 941-953.
- [44] Shen H, Zhu Y, Zhang L, and Park J. Extended dissipative state estimation for Markov jump neural networks with unreliable links[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2016, 28(2): 346-358.
- [45] Xie W, Zhu H, Zhong S, Cheng J, and Shi K. Extended dissipative resilient estimator design for discrete-time switched neural networks with unreliable links[J].

Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2019, 32: 19-36.

[46] Wang T, Zhang B, Yuan D, and Zhang Y. Event-based extended dissipative state estimation for memristor-based Markovian neural networks with hybrid time-varying delay[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2021, 68(11): 4520-4533.

[47] Lin W, He Y, Zhang C, Wu M, and Shen J. Extended dissipativity analysis for Markovian jump neural networks with time-varying delay via delay-product-type functionals[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2019, 30(8): 2528-2537.

[48] Ma Y, Yang P, Yan Y, and Zhang Q. Robust observer-based passive control for uncertain singular time-delay systems subject to actuator saturation[J]. ISA Transactions, 2017, 67: 9-18.

[49] Shu Y and Zhu Y. Optimal control for multi-stage and continuous-time linear singular systems[J]. International Journal of Systems Science, 2018,49(7): 1419-1434.

[50] Gu K, Chen J, and Kharitonov V. Stability of time-delay systems[M]. Springer Science and Business Media, 2003.

[51] Zhu Q, Kumar S, Raja R, and Rihan F. Extended dissipative analysis for aircraft flight control systems with stochastic nonlinear actuator fault via non-fragile sampled-data control[J]. Journal of the Franklin Institute, 2019, 356(15): 8610-8624.

[52] Gao H, Wu J, and Shi P. Robust sampled-data H_∞ control with stochastic sampling[J]. Automatica, 2009, 45(7): 1729-1736.

[53] Xing S, Zheng W, Deng F, and Chang C. H_∞ control for stochastic singular systems with time-varying delay via sampled-data controller[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2022, 53(11): 7048-7057.

[54] Wu Y, Zhuang G, and Wang Y. Finite-time master-slave synchronization for implicit hybrid neural networks under event-triggered guaranteed cost control and stochastic deception attacks[J]. Journal of the Franklin Institute, 2024, 361: 106966.

[55] Deng C, Wang Y, Wen C, Xu Y, and Lin P. Distributed resilient control for energy storage systems in cyber-physical microgrids[J]. IEEE Transactions on

Industrial Informatics, 2021, 17: 1331-1341.

[56] Qi W, Hou Y, Zong G, and Ahn C. Finite-time event-triggered control for semi-Markovian switching cyber-physical systems with FDI attacks and applications[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2021, 68: 2665-2674.

[57] Ao W, Song Y, and Wen C. Adaptive cyber-physical system attack detection and reconstruction with application to power systems[J]. IET Control Theory & Applications, 2016, 10: 1458-1468.

[58] Luo X, Wang X, Zhang M, and Guan X. Distributed detection and isolation of bias injection attack in smart energy grid via interval observer[J]. Applied Energy, 2019, 256: 113703.

[59] Lu J, Ho D, and Cao J. A unified synchronization criterion for impulsive dynamical networks[J]. Automatica, 2010, 46: 1215-1221.

[60] Amato F, Ambrosino R, Ariola M, and Cosentino C. Finite-time stability of linear time-varying systems with jumps[J]. Automatica, 2009, 45: 1354-1358.

[61] Lee L, Liu Y, Liang J, and Cai X. Finite time stability of nonlinear impulsive systems and its applications in sampled-data systems[J]. ISA Transactions, 2015, 57: 172-178.

[62] Chávez-Fuentes J, Costa E, Terra M, and Rocha K. The linear quadratic optimal control problem for discrete-time Markov jump linear singular systems[J]. Automatica, 2021, 127: 109506.

攻读硕士学位期间的主要研究成果及获奖情况

- [1] **Hao Yan**, Kui Ding, Ying Zhao, Xiaotai Wu, and Tingwen Huang, Extended dissipative sampling control for singular systems with time-varying delay, International Journal of Systems Science. DOI:org/10.1080/00207721.2025.2467227.
- [2] **Hao Yan**, Kui Ding, Zhenhua Zhang, Xiaotai Wu, and Jinde Cao, Finite time sampled-data control for stochastic singular systems under impulsive FDI attacks. (under review)

获奖情况

1. 2022-2023 学年, 荣获安徽工程大学研究生入学二等奖学金.
2. 2023-2024 学年, 荣获安徽工程大学研究生一等奖学金、校优秀学生干部.
3. 2024-2025 学年, 荣获安徽工程大学研究生一等奖学金、校优秀毕业生、安徽省优秀毕业生.

致 谢

神山南麓，风行湖边，行文至此落笔之处，意味着硕士生涯也要画上句号。时光如同白驹过隙，开始于 2022 年的初秋，结束于 2025 年的盛夏，目光所及，皆为回忆；心之所想，皆是过往。青春逢盛世，奋斗正当时。很庆幸在安徽工程大学的这段日子里能够获取知识，学校的各位老师和同学们都给予我很多帮助，在此向各位表示诚挚的谢意。

首先，我要向我的导师吴小太教授，致以最崇高、最诚挚的敬意与感谢。从入学之初，吴老师便以其渊博的学识、严谨的治学态度和高度的责任心，引领我在学术的海洋中探索。在论文的选题、研究以及撰写过程中，吴老师给予了我悉心的指导。每当我在困境中迷茫，吴老师总能耐心为我拨云见日，指明方向，让我得以端正科研态度，跨越重重难关。吴老师对我的关怀，不仅体现在学业的倾囊相授，更延伸至生活的点点滴滴，言传身教间，教会我为人处世的道理。这份师恩，如山巍峨，如海浩瀚，必将让我受益终身。

同时，我要感谢数理与金融学院的各位领导和所有老师们。感谢各位老师的辛勤授课和指导，让我构建起了扎实的专业知识体系，我的每一步成长都离不开各位老师的帮助。

真挚感谢丁奎老师、赵颖老师、张振华老师，感谢你们对我学习上的帮助和指导，你们严谨构思的态度和对学术的潜心钻研让我终身难忘。

此外，我还要感谢同门的师兄师姐、师弟师妹们，在撰写论文时为我提供资料和帮助，与你们相处的日子，是我研究生生涯中最温暖的回忆。

我最要感恩的，是我亲爱的家人。多年来，你们默默付出，以包容和支持为我筑起温暖港湾，让我能够心无旁骛地追逐梦想。

再次感谢所有陪伴、关心、帮助过我的人，祝愿大家一切顺遂，平安喜乐！

最后我要感谢安徽工程大学的栽培！祝福母校人才济济，桃李满天下！



2025 年 5 月 14 日