

分类号：O154.2

密 级：公开

单位代码：10363

学 号：2221020101

题 目 半倾斜对象与星模的若干研究

英文并列

题 目

The Research of Silting Objects
and Star Modules

学生姓名：王新雨

指导教师：张培雨 副教授

专 业：数学

研究方向：同调代数

论文答辩日期：2025 年 5 月 14 日

二、安徽工程大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：我恪守学术道德，崇尚严谨学风。所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已明确注明和引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品及成果的内容。论文为本人亲自撰写，我对所写的内容负责，并完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

学位论文作者签名：

王新雨

日期：2025 年 5 月 14 日

三、安徽工程大学学位论文版权使用授权书

学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅或借阅。本人授权安徽工程大学可以将本学位论文的全部内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保密 ☐ ，在 ____ 年解密后适用本版权书。

本学位论文属于

不保密 ☒ 。

学位论文作者签名：王新雨

指导教师签名：张培雨

日期：2025 年 5 月 14 日

日期：2025 年 5 月 14 日

半倾斜对象与星模的若干研究

摘 要

同调代数作为代数学的一个重要分支,近年来已成为研究热点.本文主要研究逗号范畴中半倾斜对象和阿贝尔范畴中星模的相关性质.首先我们给出了逗号范畴 $(F, \text{Mod} S)$ 中半倾斜对象的刻画.设 U 是一个 (S, R) -双模,取 $F = U \otimes_R -$,此时逗号范畴 $(F, \text{Mod} S)$ 同构于范畴 $T\text{-Mod}$,其中 T 是三角矩阵环.设 $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$ 是左 R -模的两个子范畴, $\mathcal{D}_1$ 和 $\mathcal{D}_2$ 是左 S -模的两个子范畴,主要证明了 $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ 和 $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ 是挠对的充要条件是 $(\mathfrak{B}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}, \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2})$ 和 $(\mathfrak{U}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}, \mathfrak{J}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2})$ 在一定条件下是挠对.

最后借助平衡对引入了相对于平衡对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 的 n -星模(简称为 n - $\mathcal{X}$ -星模)概念,给出了它的等价刻画和一些简单性质,证明了 n - $\mathcal{X}$ -星模和 n - $\mathcal{X}$ -倾斜模之间的关系,并得到了 n - $\mathcal{X}$ -倾斜模的一个新的等价刻画.

关键词: 半倾斜对象, 挠对, 逗号范畴, 平衡对, n - $\mathcal{X}$ -星模, n - $\mathcal{X}$ -倾斜模

The Research of Silting Objects and Star Modules

ABSTRACT

Homological algebra, as an important branch of algebra, has become a research hotspot in recent years. In this thesis, we mainly study the related properties of silting objects in comma categories and star modules in Abelian categories. Firstly, we give a characterization of silting objects in the comma category $(F, \text{Mod} S)$. Let U be an (S, R) -bimodule, take $F = U \otimes_R -$, then the comma category is isomorphic to the category $T\text{-Mod}$, where T is a triangular matrix ring. Assume that $\mathcal{C}_1$ and $\mathcal{C}_2$ are two subcategories of left R -modules, $\mathcal{D}_1$ and $\mathcal{D}_2$ are two subcategories of left S -modules. We prove that $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ and $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ are torsion pairs if and only if $(\mathfrak{B}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}, \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2})$ and $(\mathfrak{U}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}, \mathfrak{J}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2})$ are torsion pairs under certain conditions.

Finally, we introduce the notion of star modules with respect to a balanced pair $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ (named, $n\text{-}\mathcal{X}$ -star modules) and obtain some properties of such modules, and give the relationship between $n\text{-}\mathcal{X}$ -star modules and $n\text{-}\mathcal{X}$ -tilting modules, and get a new characterization of $n\text{-}\mathcal{X}$ -tilting modules.

Wang Xinyu(Mathematics)

Supervised by Zhang Peiyu

KEY WORDS: silting objects, torsion pairs, comma categories, balanced pairs, $n\text{-}\mathcal{X}$ -star modules, $n\text{-}\mathcal{X}$ -tilting modules

目录

摘要	I
ABSTRACT	II
目录	III
第 1 章 绪论	1
1.1 研究背景	1
1.2 预备知识	2
1.3 研究内容与结构安排	3
第 2 章 逗号范畴中的半倾斜对象和挠对	5
2.1 半倾斜对象	5
2.2 挠对	15
第 3 章 n - $\mathcal{X}$ -星模与平衡对	26
3.1 平衡对	26
3.2 n - $\mathcal{X}$ -星模	27
3.3 n - $\mathcal{X}$ -倾斜模	34
第 4 章 结论与展望	40
4.1 结论	40
4.2 展望	41
参考文献	42
攻读硕士期间取得的学术成果	45
致谢	46

第 1 章 绪论

1.1 研究背景

同调代数^[1]作为代数学一个重要分支,它主要是利用范畴论中的方法和理论,以 Hom 、 $\otimes$ 和它们的导出函子 Ext 、 Tor 作为最基本的函子,来研究范畴中对象的分解、维数等同调性质. 倾斜理论在 Artin 代数的表示理论中起着重要作用. 倾斜模的经典概念是由 Brenner 和 Butler^[2]以及 Happel 和 Ringel^[3]在有限维代数的情况下考虑的. Angeleri-Hügel, Marks 和 Vitoria 介绍了倾斜模的推广: 任意环上的半倾斜模, 并且主要证明了半倾斜模和 2-项半倾斜复形以及导出模范畴中的 2-项半倾斜 t -结构和余 t -结构之间存在一个双射.

设 $\mathcal{A}$ 是一个阿贝尔范畴. 给定一个 $\mathcal{A}$ 的子范畴 $\mathcal{X}$, 记

$$\mathcal{X}^{\perp_0} = \{Y : \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) = 0 \text{ 对任意的 } X \in \mathcal{X}\},$$

$${}^{\perp_0}\mathcal{X} = \{Y : \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, X) = 0 \text{ 对任意的 } X \in \mathcal{X}\}.$$

子范畴对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 如果满足以下条件:

(1) $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = 0$;

(2) 对于任意的对象 $M \in \mathcal{A}$, 存在一个 $\mathcal{A}$ 中正合列:

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow M \longrightarrow Y \longrightarrow 0,$$

其中 $X \in \mathcal{X}$, $Y \in \mathcal{Y}$, 则称子范畴对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 为挠对^[4,5].

上述条件等价于 $\mathcal{X}^{\perp_0} = \mathcal{Y}$ 和 ${}^{\perp_0}\mathcal{Y} = \mathcal{X}$. 对于任意的半倾斜(或倾斜)模 T , 都可以诱导出挠对 $(\text{Gen} T, T^{\perp_0})$. 给定两个阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$, 我们可以定义左逗号范畴 $(F, \mathcal{B})$ ^[6], 也称作阿贝尔范畴. 逗号范畴的例子包括但不限于模范畴, 具体可参考文献[7,8,9,10]. 三角矩阵环上的复形, 阿贝尔范畴中的态射范畴等[6,11,12]. 关于逗号范畴的其他研究可以参考[13,14,15].

设 R 是一个环, 用 $R\text{-Mod}$ 表示所有左 R -模构成的范畴. 在本文中, 所有的模均指左 R -模. 假设 $\mathcal{C}$ 是 $R\text{-Mod}$ 的一个子范畴, 对于任意的 $M \in R\text{-Mod}$, 如果存在一个 $\mathcal{C}$ -复形:

$$C^{\bullet} := \cdots \longrightarrow C_2 \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

也就是说, 复形 $\text{Hom}_R(\mathcal{C}, C^\bullet)$ 是正合的, 其中 $C_i \in \mathcal{C}$, $i \geq 0$, 那么我们称该复形 $C^\bullet$ 为 M 的一个 $\mathcal{C}$ -分解. 如果 $\mathcal{C} = \{N\}$, 上述复形通过函子 $\text{Hom}_R(N, -)$ 作用后仍是正合的, 则该复形称为 N -正合的.

陈在文献[16]中首次提出了平衡对的概念, 主要证明了两个复形范畴的同伦范畴是三角等价的^[16], 特别地, 当 R 是左-Gorenstein 环时, Gorenstein 投射模的同伦范畴与 Gorenstein 内射模的同伦范畴是三角等价的. 在对平衡对的研究中, 郑通过一个完全平衡对构造了一个三角范畴的粘合, 见文献[17]中的定理 2.12. 李引入了有关平衡对的余挠对的概念^[18], 并证明了当 $\mathcal{Y}$ 的 $\mathcal{X}$ -分解维数和 $\mathcal{X}$ 的 $\mathcal{Y}$ -余分解维数都是有限时, 右 $\mathcal{X}$ -奇点范畴与左 $\mathcal{X}$ -奇点范畴是等价的, 关于余挠对的相关性质可参见文献[19,20,21]. 张在学习阿贝尔范畴的粘合时, 提出了相对倾斜对象的概念^[22], 并给出了相对倾斜对象在粘合中三个范畴之间的保持关系. 类似于 n -星模与 n -倾斜模之间的关系^[23], 我们提出了 n - $\mathcal{X}$ -星模的概念, 主要证明了 n - $\mathcal{X}$ -星模和 n - $\mathcal{X}$ -倾斜模之间的关系, 并得到了 n - $\mathcal{X}$ -倾斜模的一个新的等价刻画.

在本文中, 我们假设 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是 $R\text{-Mod}$ 中的容许平衡对, 文章中出现的子范畴 $\mathcal{X}$ (或 $\mathcal{Y}$) 总是来自于容许平衡对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. 众所周知, 函子 $\text{Ext}_A^i(-, -)$ 是基于经典平衡 $(\text{Proj}R, \text{Inj}R)$ 而得到的, 也就是说, 不论取第一个变量的投射分解还是取第二个变量的内射余分解, 它们诱导出的同调群均是同构的. 根据这个观点, 我们用任意一个容许平衡对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 去替换经典平衡对 $(\text{Proj}R, \text{Inj}R)$, 可以诱导出两个相对同调函子 $\text{Ext}_\mathcal{X}^i(-, -)$ 和 $\text{Ext}_\mathcal{Y}^j(-, -)$. 根据文献[16]中的引理 2.1, 诱导出的这两个同调函子是同构的.

1.2 预备知识

首先介绍一些在相对同调理论中广泛使用的符号. 设 Q 是一个 R -模, n 是一个正整数.

$\text{Add}Q := \{K \mid \text{存在一个 } R\text{-模 } J \text{ 使得 } K \oplus J \cong Q^{(J)}, \text{ 对于某个集合 } I\}.$

$\text{Pres}_\mathcal{X}^n Q := \{L \mid \text{存在一个 } \mathcal{X}\text{-正合列 } Q_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q_1 \longrightarrow L \longrightarrow 0, \text{ 其中 } Q_i \in \text{Add}Q \text{ 对任意的 } 1 \leq i \leq n\}.$

$$Q^{\perp_{\mathcal{X}}^{\geq 1}} := \{M \mid \text{Ext}_{\mathcal{X}}^{i \geq 1}(Q, M) = 0\}.$$

定义 1.2.1 称子范畴 $\mathcal{B}$ 是反变有限的, 如果对任何左 R -模 A , 均存在一个 A 的右 $\mathcal{B}$ -逼近^[24], 即存在态射 $f: B \longrightarrow A$ 使得 $\text{Hom}_R(\mathcal{B}, f)$ 都是满射. 对偶地, 可以定义 $\mathcal{C}$ -余正合, $\mathcal{C}$ -余分解和共变有限子范畴.

定义 1.2.1^[16] 设 $\mathcal{A}$ 是一个阿贝尔范畴, 称 $\mathcal{A}$ 的一个反变有限子范畴 $\mathcal{C}$ 是容许的, 如果每个右 $\mathcal{C}$ -逼近都是满的. 它等价于对任何 $\mathcal{X}$ -复形都是正合的.

对偶地, 可以定义余容许子范畴的概念. 如果 $\mathcal{X}$ 是容许的, 那么称平衡对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是容许的, 它也等价于 $\mathcal{Y}$ 是余容许的.

定义 1.2.2^[16] 设 $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ 是阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 中的两个子范畴. 称 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 为一个平衡对, 如果它满足以下三个条件:

- (1) $\mathcal{X}$ 是反变有限子范畴, $\mathcal{Y}$ 是共变有限子范畴;
- (2) 对于 $\mathcal{A}$ 中的每个对象 M , 存在 $\mathcal{X}$ -分解 $X^\bullet \longrightarrow M$, 使得它在函子 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{Y})$ 作用下是正合的, 即该 $\mathcal{X}$ -分解是 $\mathcal{Y}$ -余正合的;
- (3) 对于 $\mathcal{A}$ 中的每个对象 N , 存在 $\mathcal{Y}$ -余分解 $N^\bullet \longrightarrow Y$, 使得它在函子 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ 作用下是正合的, 即该 $\mathcal{Y}$ -余分解是 $\mathcal{X}$ -正合的.

定理 1.2.3^[16] 在阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 中, $\mathcal{X}$ 是反变有限子范畴(或 $\mathcal{Y}$ 是共变有限子范畴), 则 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是平衡对当且仅当所有 $\mathcal{X}$ -正合复形组成的类与所有 $\mathcal{Y}$ -余正合复形组成的类相同.

命题 1.2.4^[16] $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 中的平衡对, $\mathcal{X}$ 是容许的当且仅当 $\mathcal{Y}$ 是余容许的.

1.3 研究内容与结构安排

本文研究了逗号范畴中的半倾斜对象以及相对 n -星模的等价刻画以及其相关性质, 并对其进行推广, 文章具体组织如下.

作为倾斜的推广, 我们介绍了半倾斜的概念^[25]. 第二章首先给出逗号范畴中半倾斜对象的刻画, 利用在一定条件下逗号范畴同构于三角矩阵环范畴, 研究证明了一些半倾斜对象的等价刻画. 最后分别给出两个左模中的两个子范畴 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ 和 $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$, 并证明了 $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ 和 $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ 是挠对的充要条件是 $(\mathfrak{B}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}, \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2})$ 和

$(\mathfrak{U}_{\mathcal{D}_1}^{c_1}, \mathfrak{J}_{\mathcal{D}_2}^{c_2})$ 在一定条件下是挠对.

第三章首先给出 n - $\mathcal{X}$ -拟投射和 n - $\mathcal{X}$ -星模的定义及其等价刻画, 介绍了 n - $\mathcal{X}$ -星模的一些基本性质, 最后借助 n - $\mathcal{X}$ -星模得到了 n - $\mathcal{X}$ -倾斜模的两个新的等价刻画. 在这部分中, 无特别说明 $\mathcal{A}$ 总是一个阿贝尔范畴, $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 中的一个容许的平衡对, 文中的子范畴 $\mathcal{X}$ 与 $\mathcal{Y}$ 总是容许平衡对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 中的两个范畴.

第 2 章 逗号范畴中的半倾斜对象和挠对

本章节主要研究了逗号范畴中的半倾斜对象和挠对. 首先在第 1 节里回顾了半倾斜对象和逗号范畴的定义, 给出了逗号范畴中半倾斜对象的刻画, 并研究证明了一些相关性质. 然后在第 2 节首先介绍了三个函子. 在特定条件下, 逗号范畴同构于三角矩阵环范畴, 并且证明了两个左模的子范畴是挠对的等价条件.

2.1 半倾斜对象

在这一节中, 首先介绍一些定义和观点. 设 $\mathcal{A}$ 是一个阿贝尔范畴, 子范畴 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$, 如果 $\mathcal{C}$ 在像下封闭, 直和下封闭且扩张下封闭, 则称 $\mathcal{C}$ 为挠对^[4]. 给定一个子范畴 $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}$, 态射 $\phi: T \longrightarrow X$ 称作 $T \in \mathcal{A}$ 的一个左 $\mathcal{X}$ -逼近使得对于任意的 $X' \in \mathcal{X}$, $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\phi, X')$ 是满射.

对于由 $\mathcal{A}$ 中所有投射对象所组成的 $\text{Proj} \mathcal{A}$ 中的一个态射 f , 我们考虑以下对象类

$$\mathcal{D}_f = \{X \in \mathcal{A} \mid \text{Hom}_{\mathcal{A}}(f, X) \text{ 是满射} \}.$$

定义 2.1.1^[26] 设 $\mathcal{A}$ 是一个有足够多的投射对象的阿贝尔范畴且 T 是 $\mathcal{A}$ 中的一个对象.

- (1) 如果存在 T 的一个投射表现 σ , 使得 $\mathcal{D}_\sigma$ 是一个挠对且 $T \in \mathcal{D}_\sigma$, 那么称 T 为部分半倾斜对象;
- (2) 如果存在 T 的一个投射表现 σ , 使得 $\mathcal{D}_\sigma = \text{Gen} T$, 其中 $\text{Gen} T = \{X \mid \text{对任意的集合 } I, \text{ 存在一个满射 } T^{(I)} \longrightarrow X\}$, 那么称 T 为半倾斜对象.

一般地, 我们也称 T 是与 σ 相关的(部分)半倾斜对象.

根据文献[26]中的引理 3.6, $\mathcal{D}_\sigma$ 在扩张下封闭和像下封闭, 因此 $\mathcal{D}_\sigma$ 是挠对当且仅当它在直和下封闭.

定义 2.1.2^[6] 设 $\mathcal{A}$ 是阿贝尔范畴, $F: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ 是一个加法自函子, $\mathcal{A}$ 通过 F 的右平凡扩张记为 $\mathcal{A} \Delta F$, 其定义如下: $\mathcal{A} \Delta F$ 中的对象为态射 $\alpha: FA \longrightarrow A$, 其中 $A \in \mathcal{A}$, 且使得 $\alpha \cdot F(\alpha) = 0$; $\mathcal{A} \Delta F$ 中的态射为 $\mathcal{A}$ 中自然对 $(F\beta, \beta)$ 且使得下图交换.

$$\begin{array}{ccc}
 FA & \xrightarrow{\alpha} & A \\
 \downarrow F\beta & & \downarrow \beta \\
 FA' & \xrightarrow{\alpha'} & A'
 \end{array}$$

图 2-1

定义 2.1.3^[6] 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是两个阿贝尔范畴， $F: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ 是加法函子。逗号范畴

$(F, \mathcal{B})$ 定义如下：逗号范畴中的对象为 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}_\phi$ (有时， ϕ 可忽略)，其中 $A \in \mathcal{A}$ ， $B \in \mathcal{B}$ ，

且 $\phi \in \text{Hom}(FA, B)$ ；逗号范畴中的态射为 $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}: \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}_\phi \longrightarrow \begin{pmatrix} A' \\ B' \end{pmatrix}_{\phi'}$ ，其中

$\alpha \in \text{Hom}(A, A')$ ， $\beta \in \text{Hom}(B, B')$ 且使得下图交换。

$$\begin{array}{ccc}
 FA & \xrightarrow{\phi} & B \\
 \downarrow F\alpha & & \downarrow \beta \\
 FA' & \xrightarrow{\phi'} & B'
 \end{array}$$

图 2-2

同理，我们有右逗号范畴 $(G, \mathcal{A})$ ，其中 $G: \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ 是加法函子。其对象为三元组 $(X, Y)_\phi$ ，其中 $X \in \mathcal{A}$ ， $Y \in \mathcal{B}$ ， $\phi: GY \longrightarrow X$ ，态射为从 $(X_1, Y_1)_{\phi_1}$ 到 $(X_2, Y_2)_{\phi_2}$ 的自然对 (f, g) ，使得 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X_1, X_2)$ ， $g \in \text{Hom}_{\mathcal{B}}(Y_1, Y_2)$ 且 $\phi_2 Gg = f \phi_1$ 。在本文中，我们主要考虑左逗号范畴。

积范畴 $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ 的定义如下： $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ 的对象为 (A, B) ，其中 $A \in \mathcal{A}$ ， $B \in \mathcal{B}$ ，态射为从 (A, B) 到 (A', B') 的 (f, g) ，其中 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A')$ ， $g \in \text{Hom}_{\mathcal{B}}(B, B')$ 。

接下来我们给出一些关于逗号范畴的注释，有助于我们进一步了解逗号范畴。

注 2.1.4 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是阿贝尔范畴， $F: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ 是加法函子。

(1) 根据 $G(A, B) = (0, FA)$ ， $G(\alpha, \beta) = (0, F\alpha)$ ，函子 F 可以诱导出函子：

$$G: \mathcal{A} \times \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A} \times \mathcal{B}.$$

根据在 $(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \Delta G$ 中的对象 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}_\phi$ 到 $(0, \phi): G(A, B) \longrightarrow (A, B)$ 的态射 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}_\phi$ ，可以

证明 $(F, \mathcal{B}) \cong (\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \Delta G$ 。

(2) 设 F 是右正合函子，可以看出上述函子 G 也是右正合函子。根据文献[6]中的

命题 1.1, $(\mathcal{A} \times \mathcal{B})\Delta G$ 是阿贝尔范畴, 并且根据(1)可知逗号范畴 $(F, \mathcal{B})$ 也是阿贝尔范畴.

(3) 根据(1)和文献[6]中的推论 1.2, $(F, \mathcal{B})$ 中的序列

$$0 \longrightarrow \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}_{\phi_1} \longrightarrow \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}_{\phi_2} \longrightarrow \begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix}_{\phi_3} \longrightarrow 0$$

正合当且仅当 $(\mathcal{A} \times \mathcal{B})\Delta G$ 中序列

$$0 \longrightarrow (0, \phi_1) \longrightarrow (0, \phi_2) \longrightarrow (0, \phi_3) \longrightarrow 0$$

正合当且仅当 $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ 中序列

$$0 \longrightarrow (A_1, B_1) \longrightarrow (A_2, B_2) \longrightarrow (A_3, B_3) \longrightarrow 0$$

正合当且仅当 $\mathcal{A}$ 中序列

$$0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_2 \longrightarrow A_3 \longrightarrow 0$$

和 $\mathcal{B}$ 中序列

$$0 \longrightarrow B_1 \longrightarrow B_2 \longrightarrow B_3 \longrightarrow 0$$

都正合.

(4) $(F, \mathcal{B})$ 中的投射对象形式为 $\begin{pmatrix} 0 \\ Q \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} P \\ FP \end{pmatrix}$, 其中 P 是 $\mathcal{A}$ 中投射对象, Q 是 $\mathcal{B}$ 中投射对象^[27].

设 R 和 S 是环, 由所有左 R -模组成的范畴记为 $R\text{-Mod}$,

$F: R\text{-Mod} \longrightarrow S\text{-Mod}$ 是右正合共变函子. 在这一节中, 我们主要考虑左逗号范畴 $\mathcal{C} := (F, S\text{-Mod})$.

设 $A \in R\text{-Mod}$, $B \in S\text{-Mod}$, 序列

$$P_1 \xrightarrow{\sigma_A} P_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

和

$$Q_1 \xrightarrow{\sigma_B} Q_0 \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

分别 A 是 B 和的投射表现, 其中 P_0, P_1 是投射 R -模, Q_0, Q_1 是投射 S -模. 因为 F 是右正合共变函子, 所以序列 $FP_1 \xrightarrow{F\sigma_A} FP_0 \longrightarrow FA \longrightarrow 0$ 也正合. 因此,

根据 2.1.4(4), 我们可以得到 $\begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} A \\ FA \end{pmatrix}$ 的一个投射表现, 记作 $\sigma = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ Q_1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} P_1 \\ FP_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sigma} \begin{pmatrix} 0 \\ Q_0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} P_0 \\ FP_0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} A \\ FA \end{pmatrix} \longrightarrow 0,$$

其中 $a = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_B \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} \sigma_A \\ F\sigma_A \end{pmatrix}$.

接下来我们给出逗号范畴中 $\mathcal{D}_\sigma$ 的一个刻画.

引理 2.1.5 $\begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}_h \in \mathcal{D}_\sigma$ 当且仅当 $M \in \mathcal{D}_{\sigma_A}$, $N \in \mathcal{D}_{\sigma_B}$.

证明: $(\Rightarrow)$: 对任意态射 $f \in \text{Hom}_R(P_1, M)$, $m \in \text{Hom}_R(Q_1, N)$, 我们需要找出两个态射使得下图交换.

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ \uparrow f & \swarrow ? & \\ P_1 & \xrightarrow{\sigma_A} & P_0 \longrightarrow 0 \end{array}$$

图 2-3

$$\begin{array}{ccc} & N & \\ \uparrow m & \swarrow ? & \\ Q_1 & \xrightarrow{\sigma_B} & Q_0 \longrightarrow 0 \end{array}$$

图 2-4

设 $g = h \cdot Ff$, 那么下图交换.

$$\begin{array}{ccc} FP_1 & \xrightarrow{1} & FP_1 \\ \downarrow Ff & & \downarrow g \\ FM & \xrightarrow{h} & N \end{array}$$

图 2-5

也就是说, $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right) \in \text{Hom}_c \left(\begin{pmatrix} 0 \\ Q_1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} P_1 \\ FP_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix} \right)$. 根据假设, 存在态射

$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) : \begin{pmatrix} 0 \\ Q_0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} P_0 \\ FP_0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}$ 使得下图可交换.

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}_h & \\ \uparrow \begin{pmatrix} 0 \\ m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} & \swarrow \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \\ \begin{pmatrix} 0 \\ Q_1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} P_1 \\ FP_1 \end{pmatrix} & \xrightarrow{\sigma} & \begin{pmatrix} 0 \\ Q_0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} P_0 \\ FP_0 \end{pmatrix} \end{array}$$

图 2-6

根据逗号范畴中态射的定义, 可以证明 $y = h \cdot Fx$. 因为上述图是可交换的, 所以

得到以下等式 $\begin{pmatrix} 0 \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_B \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_A \\ F\sigma_A \end{pmatrix}$. 因此 $f = x\sigma_A$, $m = i\sigma_B$, 也

就是说, $M \in \mathcal{D}_{\sigma_A}$, $N \in \mathcal{D}_{\sigma_B}$.

($\Leftarrow$): 对于任意的 $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) \in \text{Hom}_c\left(\begin{pmatrix} 0 \\ Q_1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} P_1 \\ FP_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}_h\right)$, 根据逗号范畴

中态射的定义, 可以得到 $d = h \cdot Fc$. 接下来, 我们需要找到一个态射使得下图可交换.

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}_h & \\ & \uparrow & \swarrow ? \\ \begin{pmatrix} 0 \\ j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} & & \\ \begin{pmatrix} 0 \\ Q_1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} P_1 \\ FP_1 \end{pmatrix} & \xrightarrow{\sigma} & \begin{pmatrix} 0 \\ Q_0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} P_0 \\ FP_0 \end{pmatrix} \end{array}$$

图 2-7

因为 $M \in \mathcal{D}_{\sigma_A}$, $N \in \mathcal{D}_{\sigma_B}$, 所以存在两个态射 j_1 和 c_1 使得以下两个图是可交换的.

$$\begin{array}{ccc} M & & N \\ \uparrow c & \swarrow \exists c_1 & \uparrow j \\ P_1 & \xrightarrow{\sigma_A} & P_0 \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow j_1 \\ Q_1 & \xrightarrow{\sigma_B} & Q_0 \longrightarrow 0 \end{array}$$

图 2-8

图 2-9

设 $d_1 = h \cdot Fc_1$, 我们有以下交换图.

$$\begin{array}{ccc} FP_0 & \xrightarrow{Fc_1} & FM \\ \downarrow 1 & & \downarrow h \\ FP_0 & \xrightarrow{d_1} & N \end{array}$$

图 2-10

$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ j_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}\right) \in \text{Hom}_c\left(\begin{pmatrix} 0 \\ Q_0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} P_0 \\ FP_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}_h\right)$ 正是我们要找的态射. 因此我们要证

明以下等式成立:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ j_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_B \end{pmatrix} \text{ 和 } \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_A \\ F\sigma_A \end{pmatrix}.$$

第一个等式显然成立. 因为

$$d = h \cdot Fc = h \cdot F(c_1 \sigma_A) = (h \cdot F(c_1)) \cdot F(\sigma_A) = d_1 \cdot F(\sigma_A),$$

所以第二个等式成立. □

根据上述结论, 我们得到以下推论.

推论 2.1.6 设 $M \in R\text{-Mod}$, $N \in S\text{-Mod}$, 则下列结论成立.

- (1) 如果 $M \in \mathcal{D}_{\sigma_A}$, 那么 $\begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_\sigma$;
- (2) 如果 $N \in \mathcal{D}_{\sigma_B}$, 那么 $\begin{pmatrix} 0 \\ N \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_\sigma$;
- (3) 如果 $M \in \mathcal{D}_{\sigma_A}$ 且 $FM \in \mathcal{D}_{\sigma_B}$ $\begin{pmatrix} M \\ FM \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_\sigma$.

引理 2.1.7 设 $A \in R\text{-Mod}$, $B \in S\text{-Mod}$ 且函子 F 与直和可交换. 那么 $\mathcal{D}_\sigma$ 是挠类当且仅当 $\mathcal{D}_{\sigma_A}$ 和 $\mathcal{D}_{\sigma_B}$ 都是挠类.

证明: 根据文献[26]中的引理 3.6, $\mathcal{D}_\sigma$ 在像下和扩张下封闭, 因此 $\mathcal{D}_\sigma$ 是一个挠类当且仅当它在直和下也封闭.

($\Rightarrow$): 根据推论 2.1.6, 对于任意的 $M_i \in \mathcal{D}_{\sigma_A}$, 有 $\begin{pmatrix} M_i \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_\sigma$. 对于任意的集合 I , 因为 $\mathcal{D}_\sigma$ 是一个挠类且 F 与直和可交换, 所以 $\oplus_{i \in I} \begin{pmatrix} M_i \\ 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \oplus_{i \in I} M_i \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_\sigma$. 根据引理 2.1.5, 对于任意的集合 I , 有 $\oplus_{i \in I} M_i \in \mathcal{D}_{\sigma_A}$, 也就是说, $\mathcal{D}_{\sigma_A}$ 是一个挠类. 同理, 我们可以证明 $\mathcal{D}_{\sigma_B}$ 是一个挠类.

($\Leftarrow$): 根据引理 2.1.5, 对于任意的 $\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix}_{f_i} \in \mathcal{D}_\sigma$, 有 $X_i \in \mathcal{D}_{\sigma_A}$, $Y_i \in \mathcal{D}_{\sigma_B}$. 因为函子 F 与直和可交换, 所以我们有 $\oplus \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix}_{f_i} \cong \begin{pmatrix} \oplus X_i \\ \oplus Y_i \end{pmatrix}_{\oplus f_i}$. 因为 $\mathcal{D}_{\sigma_A}$ 和 $\mathcal{D}_{\sigma_B}$ 都是挠类, 所以 $\oplus X_i \in \mathcal{D}_{\sigma_A}$, $\oplus Y_i \in \mathcal{D}_{\sigma_B}$. 根据引理 2.1.5, $\oplus \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix}_{f_i} \cong \begin{pmatrix} \oplus X_i \\ \oplus Y_i \end{pmatrix}_{\oplus f_i} \in \mathcal{D}_\sigma$, 也就是说, $\mathcal{D}_\sigma$ 是一个挠类. □

命题 2.1.8 设 $A \in R\text{-Mod}$, $B \in S\text{-Mod}$ 且函子 F 与直和可交换. 那么

- $\begin{pmatrix} A \\ FA \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix}$ 是与 σ 相关的部分半倾斜对象当且仅当:
- (1) A 是与 σ_A 相关的部分半倾斜对象;
 - (2) B 是与 σ_B 相关的部分半倾斜对象;
 - (3) $FA \in \mathcal{D}_{\sigma_B}$.

证明：根据引理 2.1.5，推论 2.1.6 和引理 2.1.7 可以看出，结论显然成立。 $\square$

引理 2.1.9^[26] 设 $T \in R\text{-Mod}$ 且具有一个投射表现对象 σ_T ，那么 T 是关于 σ_T 的半倾斜对象当且仅当 T 是关于 σ_T 的部分半倾斜对象，且存在一个 $\text{Mod}-R$ 中的正合列

$$R \xrightarrow{\alpha} T_0 \longrightarrow T_1 \longrightarrow 0,$$

其中 $T_0, T_1 \in \text{Add}T$ ，且 α 是一个左 $\mathcal{D}_{\sigma_T}$ -逼近。

接下来给出本节的主要结论。

定理 2.1.10 设 $A \in R\text{-Mod}$ ， $B \in S\text{-Mod}$ ，且函子 F 与直和可交换，那么

$\begin{pmatrix} A \\ FA \oplus B \end{pmatrix}_{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$ 是关于 σ 的半倾斜对象当且仅当

- (1) A 是关于 σ_A 的半倾斜对象；
- (2) B 是关于 σ_B 的半倾斜对象；
- (3) $FA \in \text{Gen}B$ 。

证明：注意到 $\begin{pmatrix} A \\ FA \oplus B \end{pmatrix}_{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \cong \begin{pmatrix} A \\ FA \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix}$ 是显然成立的。

($\Rightarrow$): 因为 $\begin{pmatrix} A \\ FA \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix}$ 是半倾斜对象，所以

$$\mathcal{D}_\sigma = \text{Gen} \left(\begin{pmatrix} A \\ FA \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix} \right) = \text{Gen} \begin{pmatrix} A \\ FA \end{pmatrix} \oplus \text{Gen} \begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix}.$$

根据命题 2.1.8，因为 A 是部分半倾斜对象，所以 $\text{Gen}A \subseteq \mathcal{D}_{\sigma_A}$ 。接下来证明 $\mathcal{D}_{\sigma_A} \subseteq \text{Gen}A$ 。根据推论 2.1.6，对于任意的 $X \in \mathcal{D}_{\sigma_A}$ ，我们有

$$\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_\sigma = \text{Gen} \begin{pmatrix} A \\ FA \end{pmatrix} \oplus \text{Gen} \begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix}.$$

我们默认 $\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Gen} \begin{pmatrix} A \\ FA \end{pmatrix}$ 。根据注 2.1.4，如果 $\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}$ 有一个直和 $\begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Gen} \begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix}$ ，

那么存在一个正合列 $\begin{pmatrix} 0 \\ B^{(I)} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow 0$ ，也就是说， $0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow 0$ 是正

合的，那么 $X_1 = 0$ 。所以我们有 $\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Gen} \begin{pmatrix} A \\ FA \end{pmatrix}$ 。根据注 2.1.4 我们有 $X \in \text{Gen}A$ ，

因此 $\mathcal{D}_{\sigma_A} \subseteq \text{Gen}A$ 。所以， A 是关于 σ_A 的半倾斜对象。同理，我们可以证明 B 是关

于 σ_B 的半倾斜对象. 根据引理 2.1.5, 因为 $\begin{pmatrix} A \\ FA \end{pmatrix} \in \text{Gen}\left(\begin{pmatrix} A \\ FA \end{pmatrix} \oplus \text{Gen}\begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix}\right) = \mathcal{D}_\sigma$, 所以我们有 $FA \in \mathcal{D}_{\sigma_B} = \text{Gen}B$.

($\Leftarrow$): 根据命题 2.1.8, 有 $\begin{pmatrix} A \\ FA \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix}$ 是部分半倾斜对象, 根据文献[26]中注 3.8 有 $\text{Gen}\left(\begin{pmatrix} A \\ FA \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix}\right) \subseteq \mathcal{D}_\sigma$. 所以我们只需要证明 $\mathcal{D}_\sigma \subseteq \text{Gen}\left(\begin{pmatrix} A \\ FA \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix}\right)$.

因为 A 和 B 分别是 $R\text{-Mod}$ 和 $S\text{-Mod}$ 中的半倾斜对象, 因此存在两个正合列:

$$R \xrightarrow{\phi} A_0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow 0$$

和

$$S \xrightarrow{\varphi} B_0 \longrightarrow B_1 \longrightarrow 0.$$

其中当 $i=0,1$ 时, $A_i \in \text{Add}A$, $B_i \in \text{Add}B$, ϕ 和 φ 分别是左 $\mathcal{D}_{\sigma_A}$ -逼近和 $\mathcal{D}_{\sigma_B}$ -逼近. 因为 F 是右正合的, 所以存在逗号范畴中以下两个正合列

$$\begin{pmatrix} R \\ FR \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A_0 \\ FA_0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A_1 \\ FA_1 \end{pmatrix} \longrightarrow 0$$

和

$$\begin{pmatrix} 0 \\ S \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ B_0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ B_1 \end{pmatrix} \longrightarrow 0.$$

我们考虑逗号范畴中正合列

$$\begin{pmatrix} R \\ FR \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ S \end{pmatrix} \xrightarrow{a} \begin{pmatrix} A_0 \\ FA_0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ B_0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A_1 \\ FA_1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ B_1 \end{pmatrix} \longrightarrow 0,$$

其中 $a = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ F\phi \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, 态射 a 是左 $\mathcal{D}_\sigma$ -逼近. 对于任意的 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_h \in \mathcal{D}_\sigma$ 和态射

$\left(\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}\right) \in \text{Hom}\left(\begin{pmatrix} R \\ FR \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ S \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)$, 我们要找到使得下图交换的态射 ξ .

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} (X) \\ (Y) \end{array} \xleftarrow{\xi} \begin{array}{c} (f) \\ (g) \end{array}, \begin{array}{c} (0) \\ (x) \end{array} \\
 \uparrow \\
 \begin{array}{c} (R) \\ (FR) \end{array} \oplus \begin{array}{c} (0) \\ (S) \end{array} \xrightarrow{a} \begin{array}{c} (A_0) \\ (FA_0) \end{array} \oplus \begin{array}{c} (0) \\ (B_0) \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} (A_1) \\ (FA_1) \end{array} \oplus \begin{array}{c} (0) \\ (B_1) \end{array} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

图 2-11

根据引理 2.1.5, 有 $X \in \mathcal{D}_{\sigma_A}$, $Y \in \mathcal{D}_{\sigma_B}$, 并且存在态射 f_1 和 x_1 使得下列两图交换.

$$\begin{array}{c}
 X \\
 \uparrow f \\
 R \xrightarrow{\phi} A_0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \exists f_1 \\
 \nearrow \\
 \end{array}$$

图 2-12

$$\begin{array}{c}
 Y \\
 \uparrow x \\
 S \xrightarrow{\varphi} B_0 \longrightarrow B_1 \longrightarrow 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \exists x_1 \\
 \nearrow \\
 \end{array}$$

图 2-13

$\xi = \left(\begin{pmatrix} f_1 \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix} \right)$ 是我们要找的态射, 其中 $y = h \cdot Ff_1$. 因此, 我们只需要证明下面

两个图是交换的, 其中第一个图显然是交换的.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 0 & & \\
 & \nearrow & \downarrow & \searrow & \\
 0 & \xrightarrow{\quad} & FX & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 S & \xrightarrow{\quad} & Y & & \\
 & \nwarrow \psi & \nearrow x_1 & & \\
 & B_1 & & &
 \end{array}$$

图 2-14

$$\begin{array}{ccccc}
 & & FA_1 & & \\
 & \nearrow F\phi & \downarrow Ff & \searrow Ff_1 & \\
 FR & \xrightarrow{\quad} & FX & & \\
 \downarrow & & \downarrow h & & \\
 FR & \xrightarrow{\quad} & Y & & \\
 & \nwarrow F\phi & \nearrow y & & \\
 & FA_1 & & &
 \end{array}$$

图 2-15

根据 $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ 的定义有 $g = h \cdot Ff$. 因为

$$y \cdot F\phi = (h \cdot Ff_1) \cdot F\phi = h \cdot (Ff_1 \cdot F\phi) = h \cdot F(f_1 \cdot \phi) = h \cdot Ff = g,$$

所以第二个图也是可交换的, 对于任意的集合 X , 存在一个满射

$$b: \begin{pmatrix} R^{(X)} \\ FR^{(X)} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ S^{(X)} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_h.$$

根据上面的结论, 我们可以找到一个态射 c 使得 $b = ca^{(X)}$, 因此是 c 满射, 即,

$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_h \in \text{Gen} \left(\begin{pmatrix} A \\ FA \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix} \right)$. 因此 $\begin{pmatrix} A \\ FA \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix}$ 是与 σ 相关的半倾斜对象. $\square$

设 $G: \text{Mod-}S \longrightarrow \text{Mod-}R$ 是右正合共变函子. 同理, 在逗号范畴

$(G, \text{Mod-}R)$ 中有以下结论.

定理 2.1.11 设 $X \in \text{Mod-}R$, $Y \in \text{Mod-}S$ 且函子 G 与直和可交换, 那么 $(GY \oplus X, Y)_{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$ 是半倾斜对象当且仅当 X 是半倾斜对象, Y 是半倾斜对象且 $GY \in \text{Gen} X$.

根据命题 2.1.8, 定理 2.1.10, 我们可以直接得到以下推论.

推论 2.1.12 设 $A \in R\text{-Mod}$, $B \in S\text{-Mod}$ 且函子 F 与直和可交换, 我们有以下结论:

- (1) $\begin{pmatrix} A \\ FA \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ S \end{pmatrix}$ 是半倾斜对象(或, 部分半倾斜对象)当且仅当 A 是半倾斜对象(或, 部分半倾斜对象);
- (2) $\begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix}$ 是半倾斜对象(或, 部分半倾斜对象)当且仅当 B 是半倾斜对象(或, 部分半倾斜对象).

例 2.1.13 设 T 是以 $\alpha\beta = \gamma\delta$, $\varepsilon\delta = 0$ 为界的箭图.

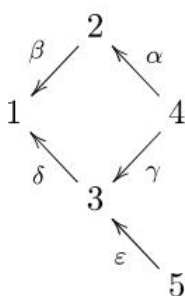
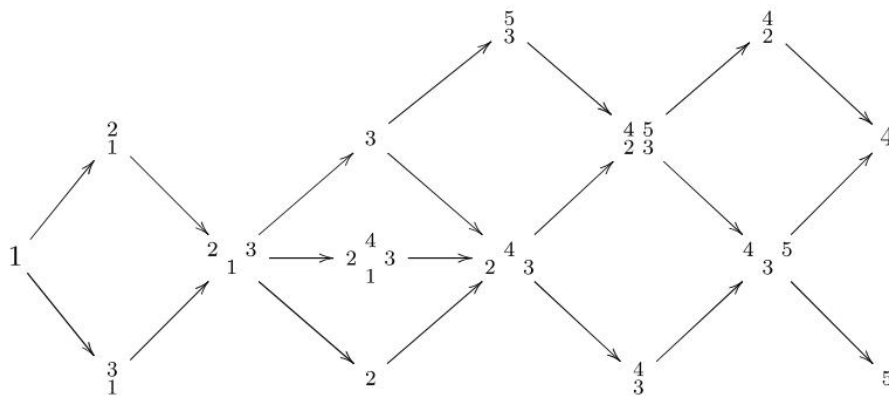


图 2-16

T 的 Auslander-Reiten 箭图如下.



$$T \cong \begin{pmatrix} eTe & 0 \\ (1-e)Te & (1-e)T(1-e) \end{pmatrix}.$$

令 $R := eTe (\cong k(5 \xrightarrow{\varepsilon} 3 \xrightarrow{\delta} 1))$ 其中 $\varepsilon\delta = 0$, $S := (1-e)T(1-e) (\cong k(4 \xrightarrow{\alpha} 2))$

和 ${}_S R_U := (1-e)Te$, 那么右逗号范畴 $(-\otimes_S U, \text{Mod}-R)$ 同构于 $\text{Mod}-T$ [28].

$M_R = 3 \oplus_1^5 3$ 和 $N_S = 4 \oplus_2^4 4$ 是 APR- 倾斜模[4]. 容易看出 $\frac{4}{2} \otimes_S U = \frac{3}{1}$, $2 \otimes_S U = 1$,

$4 \otimes_S U = 3$, 那么 $N \otimes_S U = 3 \oplus_1^3 \in \text{Gen} M$. 根据文献[26]中的命题 3.13, M_R 和 N_S

都是半倾斜模, 且根据定理 2.1.11, $(N \otimes_S U, N) \oplus (M, 0)$ 是 $\text{Mod}-T$ 中的半倾斜对象.

2.2 挠对

设 U 是一个 (S, R) - 双模. 令 $F = U \otimes_R -$, 那么逗号范畴 $(F, S-\text{Mod})$ 同构于范畴 $T-\text{Mod}$ [28], 其中 $T = \begin{pmatrix} R & 0 \\ U & S \end{pmatrix}$. 在本节中, 我们主要考虑特殊的逗号范畴 $(U \otimes_R -, S-\text{Mod}) \cong T-\text{Mod}$. 在这种情况下, 对于 $(U \otimes_R -, S-\text{Mod})$ 中的任意对象 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$, 我们有 $A \in R-\text{Mod}$ 和 $B \in S-\text{Mod}$.

我们首先给在积范畴和逗号范畴上的三个函子和三个类.

定义 2.2.1 (1) $p: R-\text{Mod} \times S-\text{Mod} \longrightarrow T-\text{Mod}$ 的定义如下: 对于任意一个 $R-\text{Mod} \times S-\text{Mod}$ 中的对象 (A, B) , 设

$$p(A, B) = \begin{pmatrix} A \\ (U \otimes_R A) \oplus B \end{pmatrix}_{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \quad p(f, g) = \begin{pmatrix} f \\ (U \otimes_R f) \oplus g \end{pmatrix},$$

其中任意的 $(f, g) \in R-\text{Mod} \times S-\text{Mod}$, 可以得到 $p(A, B) = p(A, 0) \oplus p(0, B)$;

(2) $q: T-\text{Mod} \longrightarrow R-\text{Mod} \times S-\text{Mod}$ 的定义如下: 对于任意一个 $T-\text{Mod}$ 中的对

象 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$, 设 $q\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = (A, B)$, $q\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = (f, g)$, 其中任意的 $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T-\text{Mod}$;

(3) $h: R\text{-Mod} \times S\text{-Mod} \longrightarrow T\text{-Mod}$ 的定义如下:

对于任意一个 $R\text{-Mod} \times S\text{-Mod}$ 中的对象 (A, B) , 设 $h(A, B) = \begin{pmatrix} A \oplus \text{Hom}_S(U, B) \\ B \end{pmatrix}$,

$h(f, g) = \begin{pmatrix} f \oplus \text{Hom}_S(U, g) \\ g \end{pmatrix}$, 其中任意的 $(f, g) \in R\text{-Mod} \times S\text{-Mod}$.

可以看出 p 是 q 的左伴随矩阵且 q 是 h 的左伴随矩阵.

Mitchell 在文献[29]中介绍了函子 p , 它是加法左 Kan 扩张函子的一个特例. 近年来, 函子 p 在文献[30]和文献[11]中出现过, 函子 q 和 h 在文献[12]中出现过.

设 $\mathcal{C}$ 是 $R\text{-Mod}$ 的一个类, $\mathcal{D}$ 是 $S\text{-Mod}$ 的一个类.

我们用 $\mathfrak{U}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}$ 表示对象 $\left\{ \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} : C \in \mathcal{C}, D \in \mathcal{D} \right\}$ 的类;

$\mathfrak{B}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}$ 表示对象 $\left\{ \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}_{\varphi} : C \in \mathcal{C}, D \in \mathcal{D} \text{ 且 } \varphi \text{ 是单射} \right\}$ 的类;

$\mathfrak{J}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}$ 表示对象 $\left\{ \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}_{\varphi} : \ker \tilde{\varphi} \in \mathcal{C}, D \in \mathcal{D} \text{ 且 } \tilde{\varphi} \text{ 是满射} \right\}$ 的类, 其中 $\tilde{\varphi}$ 是从 A 到

$\text{Hom}_S(U, B)$ 的态射, 且 $\tilde{\varphi}(x)(u) = \varphi(u \otimes x)$, 其中 $u \in U$, $x \in A$.

下面我们给出一些 $T\text{-Mod}$ 中 Hom 集合上的同构.

引理 2.2.2 设 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}_{\varphi}$ 和 $\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}_{\varphi}$ 在 $T\text{-Mod}$ 中, 则以下结论成立.

$$(1) \text{Hom}_T \left(\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}_{\varphi}, \begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cong \text{Hom}_R(A, C);$$

$$(2) \text{Hom}_T \left(\begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}_{\varphi} \right) \cong \text{Hom}_S(B, D);$$

$$(3) \text{Hom}_T \left(\begin{pmatrix} A \\ U \otimes_R A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}_{\varphi} \right) \cong \text{Hom}_R(A, C);$$

$$(4) \text{Hom}_T \left(\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}_{\varphi}, \begin{pmatrix} \text{Hom}_S(U, D) \\ D \end{pmatrix} \right) \cong \text{Hom}_S(B, D);$$

$$(5) \text{Hom}_T \left(\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}_{\varphi} \right) \cong \ker \tilde{\varphi}.$$

证明：(1) 因为 (q, h) 是一个伴随对，所以我们有

$$\begin{aligned} \text{Hom}_T \left(\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix} \right) &\cong \text{Hom}_T \left(\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, h(C, 0) \right) \cong \text{Hom}_{R-\text{Mod} \times S-\text{Mod}} \left(q \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, (C, 0) \right) \\ &\cong \text{Hom}_{R-\text{Mod} \times S-\text{Mod}} ((A, B), (C, 0)) \cong \text{Hom}_R (A, C). \end{aligned}$$

(2)-(4) 因为 (p, q) ， (q, h) 是伴随对，其证明与(1)类似。

(5) 根据文献[12]中引理 4.1(2)，其结论成立。 $\square$

同理，范畴 $\text{Mod}-T$ 中的对象是三元组 $(X, Y)_\phi$ ，其中 $X \in \text{Mod}-R$ ， $Y \in \text{Mod}-S$ 且 $\phi: Y \otimes_B U \longrightarrow X$ 是一个 R -模中的态射，从 $(X_1, Y_1)_{\phi_1}$ 到 $(X_2, Y_2)_{\phi_2}$ 的态射是自然对 (g_1, g_2) 且使得 $\phi_2(g_2 \otimes 1) = g_1 \phi_1$ 成立，其中 $g_1 \in \text{Hom}_R(X_1, X_2)$ ， $g_2 \in \text{Hom}_S(Y_1, Y_2)$ 。

根据文献[31]中的命题 3.6.1，存在一个阿贝尔群的同构

$$(X, Y)_\phi \otimes_T \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}_\varphi \cong \left((X \otimes_R A) \oplus (Y \otimes_S B) \right) / H,$$

其中 H 是由所有形式为 $(\phi(y \otimes u)) \otimes a - y \otimes \phi(u \otimes a)$ 的元素生成的子群，其中 $y \in Y$ ， $u \in U$ 且 $a \in A$ 。从张量积的定义可以得出以下结论。

命题 2.2.3 设 (A, B) 是右 T -模， $\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}_\varphi$ 是左 T -模，则以下结论成立。

- (1) $(A, 0) \otimes_T \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} \cong A \otimes_R C$;
- (2) $(A, B) \otimes_T \begin{pmatrix} 0 \\ D \end{pmatrix} \cong B \otimes_S D$;
- (3) $(A, B) \otimes_T \begin{pmatrix} C \\ U \otimes_R C \end{pmatrix} \cong A \otimes_R C$;
- (4) $(B \otimes_S U, B) \otimes_T \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} \cong B \otimes_S D$;
- (5)^[12] $(0, B) \otimes_T \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} \cong D / \text{Im } \varphi$.

以下命题给出了 $\mathfrak{U}_D^c$ 和 $\mathfrak{B}_D^c$ 的重要性质。

命题 2.2.4 设 $\mathcal{C}$ 是左 R -模的一个类， $\mathcal{D}$ 是左 S -模的一个类，则以下结论成立。

$$(1) \left(\mathfrak{B}_D^C \right)^{\perp_0} = \mathfrak{U}_{D^{\perp_0}}^{C^{\perp_0}};$$

$$(2) \mathfrak{B}_{\perp_0 D}^{\perp_0 C} \subseteq \left(\mathfrak{U}_D^C \right)^{\perp_0}. \text{ 当 } S^+ \in \mathcal{D}, {}_R U \text{ 是平坦, } U_S \text{ 是投射, } \left(\mathfrak{U}_D^C \right)^{\perp_0} \subseteq \mathfrak{B}_{\perp_0 D}^{\perp_0 C}.$$

证明: (1) 对任意的 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \in \left(\mathfrak{B}_D^C \right)^{\perp_0}$, $C \in \mathcal{C}$ 和 $D \in \mathcal{D}$, 根据引理 2.2.2(3), 因为

$$\begin{pmatrix} C \\ U \otimes_R C \end{pmatrix} \in \mathfrak{B}_D^C, \text{ 所以我们有 } \begin{pmatrix} C \\ U \otimes_R C \end{pmatrix} \in \text{Hom}_R(C, A) \cong \text{Hom} \left(\begin{pmatrix} C \\ U \otimes_R C \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \right) = 0.$$

根据引理 2.2.2(2), 因为 $\begin{pmatrix} 0 \\ D \end{pmatrix} \in \mathfrak{B}_D^C$, 所以我们有

$$\text{Hom}_S(D, B) \cong \text{Hom} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ D \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \right) = 0. \text{ 即, } \left(\mathfrak{B}_D^C \right)^{\perp_0} \subseteq \mathfrak{U}_{D^{\perp_0}}^{C^{\perp_0}}.$$

相反, 对于任意的 $\begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix} \in \mathfrak{U}_{D^{\perp_0}}^{C^{\perp_0}}$ 和 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathfrak{B}_D^C$, 根据 $\mathfrak{B}_D^C$ 的定义, 我们可以得

到 $T\text{-Mod}$ 中的正合列如下:

$$0 \longrightarrow \begin{pmatrix} X \\ U \otimes_R X \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ Y/U \otimes_R X \end{pmatrix} \longrightarrow 0.$$

将函子 $\text{Hom}_T \left(-, \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix} \right)$ 作用在上述正合列, 可以得到以下正合列:

$$0 \rightarrow \text{Hom}_T \left(\begin{pmatrix} 0 \\ Y/U \otimes_R X \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix} \right) \rightarrow \text{Hom}_T \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix} \right) \rightarrow \text{Hom}_T \left(\begin{pmatrix} X \\ U \otimes_R X \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix} \right) \rightarrow 0.$$

根据 $\mathfrak{B}_D^C$ 的定义有 $X \in \mathcal{C}$, $Y/U \otimes_R X \in \mathcal{D}$. 根据引理 2.2.2(2)和(3), 我们有

$$\text{Hom}_T \left(\begin{pmatrix} 0 \\ Y/U \otimes_R X \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix} \right) \cong \text{Hom}_S(Y/U \otimes_R X, N) = 0,$$

和

$$\text{Hom}_T \left(\begin{pmatrix} X \\ U \otimes_R X \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix} \right) \cong \text{Hom}_R(X, M).$$

根据上述正合列我们可以得到 $\text{Hom}_T \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix} \right) = 0$, 也就是说, $\mathfrak{U}_{D^{\perp_0}}^{C^{\perp_0}} \subseteq \left(\mathfrak{B}_D^C \right)^{\perp_0}$.

(2) 对于任意的 $\begin{pmatrix} G \\ H \end{pmatrix} \in \mathfrak{B}_{\perp_0 D}^{\perp_0 C}$, $P \in \mathcal{C}$ 和 $Q \in \mathcal{D}$, 根据 $\mathfrak{B}_{\perp_0 D}^{\perp_0 C}$ 的定义, 我们可以得到

$T\text{-Mod}$ 中的正合列如下:

$$0 \longrightarrow \begin{pmatrix} G \\ U \otimes_R G \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} G \\ H \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ H/U \otimes_R G \end{pmatrix} \longrightarrow 0.$$

其中 $G \in {}^{\perp_0}\mathcal{C}$, $H/U \otimes_R G \in {}^{\perp_0}\mathcal{D}$. 将函子 $\text{Hom}_T\left(-, \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}\right)$ 作用在上述正合列, 可以得到以下正合列:

$$0 \rightarrow \text{Hom}_T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ H/U \otimes_R G \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}\right) \rightarrow \text{Hom}_T\left(\begin{pmatrix} G \\ H \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}\right) \rightarrow \text{Hom}_T\left(\begin{pmatrix} G \\ U \otimes_R G \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}\right).$$

根据引理 2.2.2 的(2)和(3), 我们有:

$$\text{Hom}_T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ H/U \otimes_R G \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}\right) \cong \text{Hom}_S(H/U \otimes_R G, Q) = 0$$

和

$$\text{Hom}_T\left(\begin{pmatrix} G \\ U \otimes_R G \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}\right) \cong \text{Hom}_R(G, P) = 0.$$

相反, 根据上述正合列我们有 $\text{Hom}_T\left(\begin{pmatrix} G \\ H \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}\right) = 0$, 即, $\mathfrak{B}_{{}^{\perp_0}\mathcal{D}}^{{}^{\perp_0}\mathcal{C}} \subseteq {}^{\perp_0}(\mathfrak{U}_{{}^{\perp_0}\mathcal{D}}^{\mathcal{C}})$.

反之, $\begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix} \in {}^{\perp_0}(\mathfrak{U}_{{}^{\perp_0}\mathcal{D}}^{\mathcal{C}})$, $C \in \mathcal{C}$ 且 $D \in \mathcal{D}$ 时, 根据引理 2.2.2(1), 我们有

$$\text{Hom}_R(I, C) \cong \text{Hom}_T\left(\begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 0, \text{ 且 } I \in {}^{\perp_0}\mathcal{C}.$$

$((0, S) \otimes_T -, \text{Hom}_S((0, S), -))$ 是伴随对, 根据下面的同构, 我们有

$$J/(U \otimes_R I) \in {}^{\perp_0}\mathcal{D}.$$

根据张量积的定义, 有 $\text{Hom}_S(J/(U \otimes_R I), D) \cong \text{Hom}_S\left((0, S) \otimes_T \begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix}, D\right)$, 根据伴随

对的定义有 $\text{Hom}_S\left((0, S) \otimes_T \begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix}, D\right) \cong \text{Hom}_T\left(\begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix}, \text{Hom}_S((0, S), D)\right)$, 所以

$$\text{Hom}_S\left(J/(U \otimes_R I), D\right) \cong \text{Hom}_T\left(\begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix}, \text{Hom}_S((0, S), D)\right) \cong \text{Hom}_T\left(\begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ D \end{pmatrix}\right) = 0.$$

我们考虑 $T\text{-Mod}$ 中以下正合列:

$$0 \longrightarrow (U, 0) \longrightarrow (U, S) \longrightarrow (0, S) \longrightarrow 0.$$

将函子 $-\otimes_T \begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix}$ 作用在上述正合列，可以得到以下正合列：

$$\mathrm{Tor}_1 \left((0, S), \begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix} \right) \longrightarrow (U, 0) \otimes_T \begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix} \longrightarrow (U, S) \otimes_T \begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix} \longrightarrow (0, S) \otimes_T \begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix} \longrightarrow 0.$$

根据命题 2.2.3 的(1)和(4)，可以得到

$$(U, 0) \otimes_T \begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix} \cong U \otimes_R I$$

和

$$(U, S) \otimes_T \begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix} \cong (S \otimes_S U, S) \otimes_T \begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix} \cong S \otimes_S J \cong J.$$

由于 $\mathrm{Tor}_1 \left((0, S), \begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix} \right)^+ \cong \mathrm{Ext}_1 \left(\begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ S^+ \end{pmatrix} \right)$ ，根据文献[12]中的推论 3.3(2)，

因为是 S^+ 单射，所以 $\begin{pmatrix} 0 \\ S^+ \end{pmatrix}$ 的维数最多为 1. 根据 $\mathrm{Hom}_T \left(\begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ S^+ \end{pmatrix} \right) = 0$ 可以证明

$\mathrm{Ext}_1 \left(\begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ S^+ \end{pmatrix} \right) = 0$. 即， $\mathrm{Tor}_1 \left((0, S) \otimes_T \begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix} \right) = 0$. 所以 $U \otimes_R I \longrightarrow J$ 是单射，

即， ${}^{\perp_0}(\mathfrak{U}_{\mathcal{D}}^c) \subseteq \mathfrak{B}_{\perp_0 \mathcal{D}}^c$. □

根据上述命题中(2)的证明可知，可以用 “ $\mathrm{Tor}_1 \left((0, S), {}^{\perp_0}(\mathfrak{U}_{\mathcal{D}}^c) \right) = 0$ ” 替代

“ $S^+ \in \mathcal{D}$ ， ${}_R U$ 是平坦的， U_S 是投射的”. 但是不能确定删除条件后结论是否依然成立. 接下来，我们给出以下定理及其证明.

定理 2.2.5 设 $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$ 是左 R -模的两个子范畴， $\mathcal{D}_1$ 和 $\mathcal{D}_2$ 是左 S -模的两个子范畴.

如果 $S^+ \in \mathcal{D}$ ， ${}_R U$ 是平坦的且 U_S 是投射的，那么 $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ 和 $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ 是挠对当且仅当 $(\mathfrak{B}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}, \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2})$ 是挠对.

证明： $(\Rightarrow)$ ：根据命题 2.2.4(1)，因为 $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ 和 $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ 是挠对，所以

$$(\mathfrak{B}_{\mathcal{D}}^c)^{\perp_0} = \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_1^{\perp_0}}^{\mathcal{C}_1^{\perp_0}} = \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2}, \text{ 且根据命题 2.2.4(2)有 } {}^{\perp_0}(\mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2}) = \mathfrak{B}_{\perp_0 \mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2} = \mathfrak{B}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}.$$

$(\Leftarrow)$ ：(1) 对于任意的 $A \in \mathcal{C}_1$ ， $B \in \mathcal{C}_2$ ， $\begin{pmatrix} A \\ U \otimes_R A \end{pmatrix} \in \mathfrak{B}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}$ 且 $\begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2}$ ，根据

引理 2.2.2(3)，因为 $(\mathfrak{B}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}, \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2})$ 是一个挠对，所以

$$\mathrm{Hom}_R(A, B) \cong \mathrm{Hom}_T\left(\begin{pmatrix} A \\ U \otimes_R A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 0.$$

即 $\mathrm{Hom}_R(C_1, C_2) = 0$.

根据命题 2.2.4(1), 对于任意的 $X \in \mathcal{C}_1^{\perp_0}$, 有 $\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2^{\perp_0}}^{\mathcal{C}_2^{\perp_0}} = (\mathfrak{B}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1})^{\perp_0} = \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2}$, 即,

$X \in \mathcal{C}_2$.

根据命题 2.2.4(2), 对于任意的 $Y \in {}^{\perp_0}\mathcal{C}_2$, 有 $\begin{pmatrix} Y \\ U \otimes_R Y \end{pmatrix} \in \mathfrak{B}_{{}^{\perp_0}\mathcal{D}_1}^{{}^{\perp_0}\mathcal{C}_1} = {}^{\perp_0}(\mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2}) = \mathfrak{B}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}$,

即 $Y \in \mathcal{C}_1$. 因此, $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ 是一个挠对.

(3) 对于任意的 $M \in \mathcal{D}_1, N \in \mathcal{D}_2$, 有 $\begin{pmatrix} 0 \\ M \end{pmatrix} \in \mathfrak{B}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}, \begin{pmatrix} 0 \\ N \end{pmatrix} \in \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2}$. 根据引理 2.2.2(2). 因

为 $(\mathfrak{B}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}, \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2})$ 是一个挠对, 所以有

$$\mathrm{Hom}_S(M, N) \cong \mathrm{Hom}_T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ M \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ N \end{pmatrix}\right) = 0.$$

根据命题 2.2.4(1), 对于任意的 $P \in \mathcal{D}_1^{\perp_0}$, 有 $\begin{pmatrix} 0 \\ P \end{pmatrix} \in \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_1^{\perp_0}}^{\mathcal{C}_1^{\perp_0}} = (\mathfrak{B}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1})^{\perp_0} = \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2}$. 即,

$P \in \mathcal{D}_2$.

根据命题 2.2.4(2), 对于任意的 $Q \in {}^{\perp_0}\mathcal{D}_2$, 有 $\begin{pmatrix} 0 \\ Q \end{pmatrix} \in \mathfrak{B}_{{}^{\perp_0}\mathcal{D}_2}^{{}^{\perp_0}\mathcal{C}_2} = {}^{\perp_0}(\mathfrak{U}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}) = \mathfrak{B}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}$. 即,

$Q \in \mathcal{D}_1$. 因此, $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ 是一个挠对. $\square$

下面命题给出了 $\mathfrak{U}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}$ 和 $\mathfrak{J}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}$ 之间的联系.

命题 2.2.6 设 $\mathcal{C}$ 是左 R -模的一个类, $\mathcal{D}$ 是左 S -模的一个类. 下列结论成立.

$$(1) \quad {}^{\perp_0}(\mathfrak{J}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}) = \mathfrak{U}_{{}^{\perp_0}\mathcal{D}}^{{}^{\perp_0}\mathcal{C}}.$$

$$(2) \quad \mathfrak{J}_{\mathcal{D}^{\perp_0}}^{\mathcal{C}^{\perp_0}} \subseteq (\mathfrak{U}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}})^{\perp_0}. \text{ 当 } R \in \mathcal{C}, {}_R U \text{ 是平坦的且 } U_S \text{ 是投射的, } (\mathfrak{U}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}})^{\perp_0} \subseteq \mathfrak{J}_{\mathcal{D}^{\perp_0}}^{\mathcal{C}^{\perp_0}}.$$

证明: (1) $(\Rightarrow)$: 对于任意的 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in {}^{\perp_0}(\mathfrak{J}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}})$, 其中 $C \in \mathcal{C}, D \in \mathcal{D}$, 根据引理 2.2.2(1),

因为 $\begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{J}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}$, 所以 $\mathrm{Hom}_R(X, C) \cong \mathrm{Hom}_T\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 0$. 即, $X \in {}^{\perp_0}\mathcal{C}$.

根据引理 2.2.2(4), 因为 $\begin{pmatrix} \text{Hom}_S(U, D) \\ D \end{pmatrix} \in \mathfrak{J}_D^c$, 所以有

$$\text{Hom}_S(Y, D) \cong \text{Hom}_T\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \text{Hom}_S(U, D) \\ D \end{pmatrix}\right) = 0.$$

即 $Y \in {}^{\perp_0}\mathcal{D}$. 因此 ${}^{\perp_0}(\mathfrak{J}_D^c) \subseteq \mathfrak{U}_{{}^{\perp_0}\mathcal{D}}^{{}^{\perp_0}\mathcal{C}}$.

($\Leftarrow$): 对于任意的 $\begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix} \in \mathfrak{U}_{{}^{\perp_0}\mathcal{D}}^{{}^{\perp_0}\mathcal{C}}$, $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}_\phi \in \mathfrak{J}_D^c$, 根据 $\mathfrak{J}_D^c$ 的定义, 可以得到以下

正合列:

$$0 \longrightarrow \begin{pmatrix} \ker \tilde{\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \text{Hom}_S(U, B) \\ B \end{pmatrix} \longrightarrow 0,$$

将函子 $\text{Hom}_T\left(\begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}, -\right)$ 作用在上述正合列, 可以得到以下正合列:

$$0 \rightarrow \text{Hom}_T\left(\begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \ker \tilde{\varphi} \\ 0 \end{pmatrix}\right) \rightarrow \text{Hom}_T\left(\begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\right) \rightarrow \text{Hom}_T\left(\begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \text{Hom}_S(U, B) \\ B \end{pmatrix}\right).$$

根据引理 2.2.2 的(1)和(4), 有

$$\text{Hom}_T\left(\begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \ker \tilde{\varphi} \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cong \text{Hom}_R(M, \ker \tilde{\varphi}) = 0$$

和

$$\text{Hom}_T\left(\begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \text{Hom}_S(U, B) \\ B \end{pmatrix}\right) \cong \text{Hom}_R(N, B) = 0.$$

因此 $\text{Hom}_T\left(\begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\right) = 0$. 即, $\begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix} \in {}^{\perp_0}(\mathfrak{J}_D^c)$.

(4) 对于任意的 $\begin{pmatrix} G \\ H \end{pmatrix}_\phi \in \mathfrak{J}_D^{c^{\perp_0}}$, $\begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix} \in \mathfrak{U}_D^c$, 我们考虑以下正合列:

$$0 \longrightarrow \begin{pmatrix} \ker \tilde{\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} G \\ H \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \text{Hom}_S(U, H) \\ H \end{pmatrix} \longrightarrow 0,$$

将函子作用在上述正合列, 可以得到以下正合列:

$$0 \rightarrow \text{Hom}_T\left(\begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \ker \tilde{\varphi} \\ 0 \end{pmatrix}\right) \rightarrow \text{Hom}_T\left(\begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} G \\ H \end{pmatrix}\right) \rightarrow \text{Hom}_T\left(\begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \text{Hom}_S(U, H) \\ H \end{pmatrix}\right).$$

根据引理 2.2.2 的(1)和(4), 有

$$\mathrm{Hom}_T \left(\begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \ker \tilde{\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cong \mathrm{Hom}_R (I, \ker \tilde{\varphi}) = 0$$

和

$$\mathrm{Hom}_T \left(\begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{Hom}_S (U, H) \\ H \end{pmatrix} \right) \cong \mathrm{Hom}_S (J, H) = 0.$$

因此 $\mathrm{Hom}_T \left(\begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} G \\ H \end{pmatrix} \right) = 0$. 所以 $\mathfrak{J}_{\mathcal{D}^{\perp_0}}^{\mathcal{C}^{\perp_0}} \subseteq \mathfrak{U}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}$.

反之, 对于任意的 $\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}_{\psi} \in (\mathfrak{U}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}})^{\perp_0}$, 其中 $C \in \mathcal{C}$, $D \in \mathcal{D}$. 根据引理 2.2.2(5),

因为 $\begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{U}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}$, 所以有 $\mathrm{Hom}_R (C, \ker \tilde{\psi}) \cong \mathrm{Hom}_R \left(C, \mathrm{Hom}_T \left(\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \right) \right) \cong \mathrm{Hom}_T$

$\left(\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} \otimes_R C, \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \right) \cong \mathrm{Hom}_T \left(\begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \right) = 0$. 即, $\ker \tilde{\psi} \in \mathcal{C}^{\perp_0}$.

因为 $\begin{pmatrix} 0 \\ D \end{pmatrix} \in \mathfrak{U}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}$, 所以有 $\mathrm{Hom}_S (D, Q) \cong \mathrm{Hom}_T \left(\begin{pmatrix} 0 \\ D \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \right) = 0$. 即 $Q \in \mathcal{D}^{\perp_0}$.

我们考虑以下正合列:

$$0 \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ U \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} R \\ U \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow 0,$$

将函子 $\mathrm{Hom}_T \left(-, \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \right)$ 作用在上述正合列, 可以得到以下正合列:

$$0 \rightarrow \mathrm{Hom}_T \left(\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \right) \rightarrow \mathrm{Hom}_T \left(\begin{pmatrix} R \\ U \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \right) \rightarrow \mathrm{Hom}_T \left(\begin{pmatrix} 0 \\ U \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \right) \rightarrow \mathrm{Ext}_1 \left(\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \right).$$

根据文献[12]中的推论 3.3(1)可知, $\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$ 的投射维数最多为 1. 根据

$$\mathrm{Hom}_T \left(\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \right) = 0$$

可以得到 $\mathrm{Ext}_1 \left(\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \right) = 0$. 根据引理 2.2.2 的(2)和(3)有

$$\mathrm{Hom}_T \left(\begin{pmatrix} R \\ U \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \right) \cong \mathrm{Hom}_T \left(\begin{pmatrix} R \\ U \otimes_R R \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \right) \cong \mathrm{Hom}_R (R, P) \cong P$$

和

$$\mathrm{Hom}_T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ U \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}\right) \cong \mathrm{Hom}_S(U, Q).$$

即, $\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}_\psi \in \mathfrak{J}_{\mathcal{D}^{\perp_0}}^{\mathcal{C}^{\perp_0}}$. 所以 $(\mathfrak{U}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}})^{\perp_0} \subseteq \mathfrak{J}_{\mathcal{D}^{\perp_0}}^{\mathcal{C}^{\perp_0}}$. $\square$

与命题 2.2.4(2)相似, 我们可以用“ $\mathrm{Ext}_1\left(\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}, (\mathfrak{U}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}})^{\perp_0}\right) = 0$ ”替代“ $R \in \mathcal{C}$, ${}_R U$ 是平坦的且 U_S 是投射的”. 我们仍不能确定删除条件后结论是否依然成立, 接下来我们给出以下定理及其证明.

定理 2.2.7 设 $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$ 是左 R -模的两个子范畴, $\mathcal{D}_1$ 和 $\mathcal{D}_2$ 是左 S -模的两个子范畴.

如果 $R \in \mathcal{C}_1$, ${}_R U$ 是平坦的且 U_S 是投射的, 那么 $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ 和 $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ 是挠对当且仅当 $(\mathfrak{U}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}, \mathfrak{J}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2})$ 是挠对.

证明: $(\Rightarrow)$: 根据命题 2.2.6(2), 因为 $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ 和 $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ 是挠对, 所以 $(\mathfrak{U}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1})^{\perp_0} = \mathfrak{J}_{\mathcal{D}_1^{\perp_0}}^{\mathcal{C}_1^{\perp_0}} = \mathfrak{J}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2}$. 同时根据命题 2.2.6(1), 有 ${}^{\perp_0}(\mathfrak{J}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2}) = \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2^{\perp_0}}^{\mathcal{C}_2^{\perp_0}} = \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}$. 所以 $(\mathfrak{U}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}, \mathfrak{J}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2})$ 是挠对.

$(\Leftarrow)$: (1) 对于任意的 $X \in \mathcal{C}_1$, $Y \in \mathcal{C}_2$, 有 $\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}$, $\begin{pmatrix} Y \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{J}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2}$. 根据引理 2.2.2(1), 因为 $(\mathfrak{U}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}, \mathfrak{J}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2})$ 是挠对, 所以有 $\mathrm{Hom}_R(X, Y) \cong \mathrm{Hom}_T\left(\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Y \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 0$. 即, $\mathrm{Hom}_R(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = 0$.

根据命题 2.2.6(2), 对于任意的 $M \in \mathcal{C}_1^{\perp_0}$, 有 $\begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{J}_{\mathcal{D}_1^{\perp_0}}^{\mathcal{C}_1^{\perp_0}} = (\mathfrak{U}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1})^{\perp_0} = \mathfrak{J}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2}$. 即, $M \in \mathcal{C}_2$.

根据命题 2.2.6(1), 对于任意的 $N \in {}^{\perp_0}\mathcal{C}_2$, 有 $\begin{pmatrix} N \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2^{\perp_0}}^{\mathcal{C}_2^{\perp_0}} = {}^{\perp_0}(\mathfrak{J}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2}) = \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}$. 即,

$N \in \mathcal{C}_1$. 因此 $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ 是一个挠对.

(2) 对于任意的 $I \in \mathcal{D}_1$, $J \in \mathcal{D}_2$, 有 $\begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} \in \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}$, $\begin{pmatrix} \mathrm{Hom}_S(U, J) \\ J \end{pmatrix} \in \mathfrak{J}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2}$. 根据引

理 2.2.2(2), 因为 $(\mathfrak{U}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}, \mathfrak{J}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2})$ 是一个挠对, 所以有

$$\mathrm{Hom}_R(I, J) \cong \mathrm{Hom}_T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{Hom}_S(U, J) \\ J \end{pmatrix}\right) = 0.$$

即, $\mathrm{Hom}_S(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = 0$.

根据命题 2.2.6(2), 对于任意的 $P \in \mathcal{D}_1^{\perp_0}$, 有

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Hom}_S(U, P) \\ P \end{pmatrix} \in \mathfrak{J}_{\mathcal{D}_1^{\perp_0}}^{\mathcal{C}_1^{\perp_0}} = (\mathfrak{U}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1})^{\perp_0} = \mathfrak{J}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2}.$$

即, $P \in \mathcal{D}_2$.

根据命题 2.2.6(1), 对于任意的 $Q \in {}^{\perp_0}\mathcal{D}_2$, 有 $\begin{pmatrix} 0 \\ Q \end{pmatrix} \in \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\perp_0 \mathcal{C}_2} = {}^{\perp_0}(\mathfrak{J}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2}) = \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}$. 即,

$Q \in \mathcal{D}_1$. 因此 $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ 是一个挠对. $\square$

根据命题 2.1.8, 定理 2.1.10, 定理 2.2.5, 定理 2.2.7 和文献[26]中的引理 2.3, 我们可以直接得到下面的推论.

推论 2.2.8 设 $\begin{pmatrix} A \\ FA \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix}$ 是 $T\text{-Mod}$ 中的半倾斜对象(或者, 部分半倾斜对象),

${}_R U$ 是平坦的, U_S 是投射的那么以下结论成立.

(1) 如果 $S^+ \in B^{\perp_0}$, 那么 $(\mathfrak{B}_{A^{\perp_0}}^{\mathrm{Gen}A}, \mathfrak{U}_{B^{\perp_0}}^{\mathrm{Gen}B})$ 是一个挠对;

(2) 如果 $R \in \mathrm{Gen}A$, 那么 $(\mathfrak{U}_{A^{\perp_0}}^{\mathrm{Gen}A}, \mathfrak{J}_{B^{\perp_0}}^{\mathrm{Gen}B})$ 是一个挠对.

根据定理 1.2.2, 我们可以得到以下推论.

推论 2.2.9 令 $T = \begin{pmatrix} R & 0 \\ R & R \end{pmatrix}$, 那么以下结论成立.

(1) 如果 $R^+ \in \mathcal{D}$, 那么 $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 是 $R\text{-Mod}$ 中的挠对当且仅当 $(\mathfrak{B}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}, \mathfrak{U}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}})$ 是 $T\text{-Mod}$ 中的挠对;

(2) 如果 $R \in \mathcal{C}$, 那么 $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 是 $R\text{-Mod}$ 中的挠对当且仅当 $(\mathfrak{U}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}, \mathfrak{J}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}})$ 是 $T\text{-Mod}$ 中的挠对.

第3章 n - $\mathcal{X}$ -星模与平衡对

本章首先给出平衡对及其相关的一些概念,在第1节先回顾了平衡对的定义,在第2节中借助平衡对的定义引入了相对 n -拟投射和相对 n -星模的概念,并研究证明了其基本性质、等价刻画及其二者之间的关系.在第3节中借助相对 n -星模,给出了 n - $\mathcal{X}$ -倾斜模的两个新的等价刻画.

3.1 平衡对

定义 3.1.1^[32] 设 $\mathcal{A}$ 是一个贝尔范畴, $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ 是 $\mathcal{A}$ 的两个子范畴且都关于直和项封闭.对于任意的 $M \in \mathcal{A}$, M 的一个右 $\mathcal{X}$ -逼近是指存在一个态射: $X \xrightarrow{f} M$,其中 $X \in \mathcal{X}$,且使得对于任意的 $X' \in \mathcal{X}$,映射

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X', f): \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X', X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X', M)$$

都为满射.如果 $\mathcal{A}$ 中每个对象都存在右 $\mathcal{X}$ -逼近,那么 $\mathcal{X}$ 就称为 $\mathcal{A}$ 中的一个反变有限子范畴.

对偶地,我们可以定义左 $\mathcal{X}$ -逼近和共变有限子范畴.

定义 3.1.2 称 $\mathcal{A}$ 中的复形

$$Q^\bullet := \cdots \longrightarrow Q_{-2} \longrightarrow Q_{-1} \longrightarrow Q_0 \longrightarrow Q_1 \longrightarrow Q_2 \longrightarrow \cdots$$

是 $\mathcal{X}$ -正合的,如果对于任意的 $X \in \mathcal{X}$,复形 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Q^\bullet)$ 都是正合的.称复形 $Q^\bullet$ 是 $\mathcal{Y}$ -余正合的,如果对于任意的 $Y \in \mathcal{Y}$,复形 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Q^\bullet, Y)$ 都是正合的.

定义 3.1.3 称 $\mathcal{A}$ 中的复形 $\cdots \longrightarrow X_{-2} \longrightarrow X_{-1} \longrightarrow X_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ 是对象 M 的一个 $\mathcal{X}$ -分解,如果它是 $\mathcal{X}$ -正合的且所有的 $X_i \in \mathcal{X}$, $i \leq 0$.对偶地,可以定义对象 M 的 $\mathcal{Y}$ -余分解.

定义 3.1.4 称 $\mathcal{A}$ 中的复形 $\cdots \longrightarrow X_{-2} \longrightarrow X_{-1} \longrightarrow X_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ 是对象 M 的一个 $\mathcal{X}$ -分解, M 的 $\mathcal{X}$ -分解维数用 $\dim_{\mathcal{X}}(M)$ 表示,其被定义为最小整数 $n \geq 0$,使得存在 M 的 $\mathcal{X}$ -分解

$$0 \longrightarrow X_{-n} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{-2} \longrightarrow X_{-1} \longrightarrow X_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

对偶地,可以定义 M 的 $\mathcal{Y}$ -余分解维数.

命题 3.1.5 设 $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ 是阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 的两个子范畴.称 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 为一个平衡对,如

果它满足以下三个条件:

- (1) $\mathcal{X}$ 是反变有限子范畴, $\mathcal{Y}$ 是共变有限子范畴;
- (2) 对于 $\mathcal{A}$ 中的每个对象 M , 存在 $\mathcal{X}$ -分解 $X^\bullet \longrightarrow M$, 使得它在函子 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{Y})$ 作用下是正合的, 即该 $\mathcal{X}$ -分解是 $\mathcal{Y}$ -余正合的;
- (3) 对于 $\mathcal{A}$ 中的每个对象 N , 存在 $\mathcal{Y}$ -余分解 $N^\bullet \longrightarrow Y$, 使得它在函子 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ 作用下是正合的, 即该 $\mathcal{Y}$ -余分解是 $\mathcal{X}$ -正合的.

3.2 n - $\mathcal{X}$ -星模

定义 3.2.1 一个 R -模 Q 称为 n - $\mathcal{X}$ -拟投射的, 如果对任意 $\mathcal{X}$ -正合列 $0 \longrightarrow A \longrightarrow Q_0 \longrightarrow B \longrightarrow 0$ 都是 Q -正合的, 其中 $Q_0 \in \text{Add}Q$, $A \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^{n-1}Q$.

接下来, 我们将给出 n - $\mathcal{X}$ -拟投射模的一个等价刻画.

命题 3.2.2 对于任意一个 R -模 Q , 如果 $\text{Pres}_{\mathcal{X}}^{n-1}Q = \text{Pres}_{\mathcal{X}}^nQ$, 那么下面命题等价.

- (1) Q 是一个拟投射模;
- (2) 如果 $0 \longrightarrow A \longrightarrow Q_0 \longrightarrow B \longrightarrow 0$ 是 $\mathcal{X}$ -正合的, 其中 $Q_0 \in \text{Add}Q$, $B \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^{n-1}Q$, 那么 $B \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^nQ$ 当且仅当该序列是 Q -正合的.

证明: 根据 n - $\mathcal{X}$ -拟投射模的定义, 我们只需要证明(1) $\Rightarrow$ (2).

如果 $A \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^{n-1}Q$, 结果显然成立. 另一方面, 设上述序列为 Q -正合的.

因为 $B \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^{n-1}Q$, 则存在一个 $\mathcal{X}$ -正合序列 $0 \longrightarrow B_1 \longrightarrow Q_B \longrightarrow B \longrightarrow 0$,

其中 $Q_B \in \text{Add}Q$, $B_1 \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^{n-1}Q$. 显然, 根据(1)它是 Q -正合的. 根据文献[13]

中的引理 2.3, 我们有

$$A \oplus Q_B \cong B_1 \oplus Q_0 \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^{n-1}Q = \text{Pres}_{\mathcal{X}}^nQ.$$

所以存在一个 $\mathcal{X}$ -正合序列 $0 \longrightarrow A \longrightarrow Q'_0 \longrightarrow A \oplus Q_B \longrightarrow 0$, 其中

$Q'_0 \in \text{Add}Q$, $A' \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^{n-1}Q$. 因此我们可以得到下面的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & A' & \xlongequal{\quad} & A' & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 0 \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & Q'_0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & \\
 0 \longrightarrow & Q_B & \longrightarrow & A \oplus Q_B & \longrightarrow & A & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & 0 & & 0 & & &
 \end{array}$$

图 3-1

容易看出图 3-1 中的所有列和行都是 Q -正合且 $\mathcal{X}$ -正合的. 因为 $A' \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^{n-1}Q$, 所以存在一个 $\mathcal{X}$ -正合列 $0 \longrightarrow A'' \longrightarrow Q_{A'} \longrightarrow A' \longrightarrow 0$ 其中 $Q_{A'} \in \text{Add}Q$, $A'' \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^{n-2}Q$ 因此, 我们有下面交换图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & A'' & \xlongequal{\quad} & A'' & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 0 \longrightarrow & Q_{A'} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} & Q_{A'} \oplus Q_B & \xrightarrow{(0, 1)} & Q_B & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow \pi_1 & & \downarrow (i_2 \pi_1, f) & & \parallel & \\
 0 \longrightarrow & A' & \xrightarrow{i_2} & B_2 & \xrightarrow{\pi_2} & Q_B & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & 0 & & 0 & & &
 \end{array}$$

图 3-2

图 3-2 中态射 f 的存在性是因为第三行是 Q -正合的. 因为 $A'' \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^{n-2}Q$, 则从上图的第二列可以看出, $B_2 \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^{n-1}Q$. 从图 3-1 的第二行, 我们可以得到 $A \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^n Q = \text{Pres}_{\mathcal{X}}^{n-1} Q$. $\square$

下面, 我们给出 n - $\mathcal{X}$ -星模的定义和一些性质.

定义 3.2.3 一个 R -模 S 称为相对于容许平衡对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 的 n -星模(简称, n - $\mathcal{X}$ -星模), 如果 S 是 $(n+1)$ - $\mathcal{X}$ -拟投射的, 且 $\text{Pres}_{\mathcal{X}}^n S = \text{Pres}_{\mathcal{X}}^{n+1} S$.

命题 3.2.4 设 S 是 $n-\mathcal{X}$ -星模, 序列 $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ 是 $\mathcal{X}$ -正合的.

- (1) 如果 X 和 Y 都在 $\text{Pres}_{\mathcal{X}}^n S$ 中, 那么 Z 也在 $\text{Pres}_{\mathcal{X}}^n S$ 中;
- (2) 如果序列是 S -正合的, 且 $Z \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^n S$, 那么 $X \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^n S$ 当且仅当 $Y \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^n S$;
- (3) 如果 X , Y 和 Z 都在 $\text{Pres}_{\mathcal{X}}^n S$ 中, 那么序列是 S -正合的.

证明: (1) 因为 $X, Y \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^n S = \text{Pres}_{\mathcal{X}}^{n+1} S$, 所以存在下述两个 $\mathcal{X}$ -正合列

$$0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow S_X \xrightarrow{\pi_1} X \longrightarrow 0$$

和

$$0 \longrightarrow Y' \longrightarrow S_Y \xrightarrow{\pi_2} Y \longrightarrow 0$$

其中 $S_X, S_Y \in \text{Add} S$, $X_1, Y' \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^n S$. 我们考虑下面的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & Y_1 & \longrightarrow & Z_1 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & S_X & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} & S_X \oplus S_Y & \xrightarrow{(0,1)} & S_Y \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \pi_1 & & \downarrow (i\pi_1, \pi_2) & & \downarrow \pi\pi_2 \\
 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{i} & Y & \xrightarrow{\pi} & Z \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

图 3-3

由蛇引理可以看出, 图 3-3 中的第一行是 $\mathcal{X}$ -正合的. 因为 S 是 $(n+1)-\mathcal{X}$ -拟投射的, 所以序列 $0 \longrightarrow Y' \longrightarrow S_Y \xrightarrow{\pi_2} Y \longrightarrow 0$ 是 S -正合的, 不难验证图 3-3 中的第二列也是 S -正合的. 因此由命题 2.3 有 $Y_1 \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^n S$. 事实上, 图 3-3 中的所有序列都是 $\mathcal{X}$ -正合的. 对图 3-3 中的第一行重复上述过程, 根据第三列, 我们可以得到 $Z \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^n S$.

- (2) 如果 X 在 $\text{Pres}_{\mathcal{X}}^n S$ 中, 类似于马蹄引理即可得证.

如果 Y 在 $\text{Pres}_{\mathcal{X}}^n S$ 中, 则存在一个 $\mathcal{X}$ -正合列

$$0 \longrightarrow Y_1 \longrightarrow S_Y \longrightarrow Y \longrightarrow 0,$$

其中 $S_Y \in \text{Add} S$, $Y_1 \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^n S$. 我们考虑下面的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & Y_1 & \xlongequal{\quad} & Y_1 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & S_Y & \longrightarrow & Z \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

图 3-4

由图 3-4 的第三行和第二列都是 S -正合的，可以直接证明图 3-4 中第二行也是 S -正合的。根据蛇引理，容易证明第二行和第一列都是 $\mathcal{X}$ -正合的。考虑图 3-4 第二行，由于 S 是 $(n+1)$ - $\mathcal{X}$ -拟投射的，我们可以得到 $A \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^n S$ 。根据(1)，我们可以从第一列中看出 $X \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^n S$ 。

(3) 根据(1)的证明可以得到图 3-3，由(1)可以看出 $Z_1 \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^n S$ 。因为 S 是 $(n+1)$ - $\mathcal{X}$ -拟投射的，所以图 3-3 中的最右列是 S -正合的，即对于任意态射 $f: S \longrightarrow Z$ ，存在态射 $g: S \longrightarrow S_Y$ 使得 $f = \pi\pi_2 g$ 。

由于 $f = \pi\pi_2 g = \pi(i\pi, \pi_2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} g$ ，因此 $\text{Hom}_R(S, \pi)$ 是满射的。也就是说，图

3-3 中第三行序列 $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ 是 S -正合的。 □

定理 3.2.5 若下列三个陈述是等价的。

- (1) S 是一个 n - $\mathcal{X}$ -星模；
- (2) 如果序列 $0 \longrightarrow U \longrightarrow V \longrightarrow W \longrightarrow 0$ 是 $\mathcal{X}$ -正合的，其中 $V, W \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^n S$ ，那么 $U \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^n S$ 当且仅当该序列是 S -正合的；
- (3) 如果序列 $0 \longrightarrow U \longrightarrow S_0 \longrightarrow V \longrightarrow 0$ 是 $\mathcal{X}$ -正合的，其中 $S_0 \in \text{Add} S$ ， $V \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^n S$ ，那么 $U \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^n S$ 当且仅当序列是 S -正合的。

证明： (1) $\Rightarrow$ (2) 根据命题 3.2.4 的(2)和(3)。

(2) $\Rightarrow$ (3) 显然的。

(3) $\Rightarrow$ (1) 根据命题 3.2.2, 我们只需要证明 $\text{Pres}_{\mathcal{X}}^n S = \text{Pres}_{\mathcal{X}}^{n+1} S$. 对于任意的 $M \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^n S$, 存在一个 $\mathcal{X}$ -正合列

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\alpha} S_M \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

其中 $S_M \in \text{Add} S$, $M_1 \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^{n-1} S$. 则我们有下面的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{\alpha} & S_M & \xrightarrow{g} & M \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \gamma & & \downarrow f & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & S'_M & \xrightarrow{\beta} & M \longrightarrow 0 \end{array}$$

图 3-5

其中 β 是赋值映射且 $S'_M = S^{(\text{Hom}(S, M))}$.

根据赋值映射的定义, 存在态射 $f: S_M \longrightarrow S'_M$ 使得图 3-5 中右边的正方形是可交换的, 进而存在态射 $\gamma: M_1 \longrightarrow M_2$ 使得图 3-5 中左边的正方形是可交换的. 对于任意态射 $\theta: X \longrightarrow M$, 其中 $X \in \mathcal{X}$, 存在态射 $\delta: X \longrightarrow S_M$ 使得 $\theta = g\delta$, 即, $\theta = \beta f\delta$. 因此 $\text{Hom}_R(X, \beta)$ 是满射的. 即, 第二行是 $\mathcal{X}$ -正合的. 注意到第二行是 S -正合的, 根据上述(3), 我们有 $M_2 \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^n S$, 即, $M \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^{n+1} S$, 即 $\text{Pres}_{\mathcal{X}}^n S \subseteq \text{Pres}_{\mathcal{X}}^{n+1} S$.

反之是显然的. 所以 $\text{Pres}_{\mathcal{X}}^n S = \text{Pres}_{\mathcal{X}}^{n+1} S$. □

设 $\mathcal{C}$ 是 $R\text{-Mod}$ 的一个子范畴, 对于任一个 $\mathcal{X}$ -正合序列

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0,$$

如果 $X, Z \in \mathcal{C}$, 那么 $Y \in \mathcal{C}$, 则称 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{X}$ -扩张下闭的.

命题 3.2.6 下面两个命题是等价的:

(1) S 是一个 n - $\mathcal{X}$ -星模且 $\text{Pres}_{\mathcal{X}}^n S$ 在 $\mathcal{X}$ -扩张下是封闭的;

(2) $\text{Pres}_{\mathcal{X}}^n S = \text{Pres}_{\mathcal{X}}^{n+1} S \subseteq S^{\mathcal{X}^{\perp_1}}$.

证明: (1) $\Rightarrow$ (2) 我们只需要证明 $\text{Pres}_{\mathcal{X}}^n S \subseteq S^{\mathcal{X}^{\perp_1}}$. 也就是说, 对于任意的 $M \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^n S$, 我们只需要验证 $\mathcal{X}$ -正合序列 $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow S \longrightarrow 0$ 可裂的. 因为 $\text{Pres}_{\mathcal{X}}^n S$ 在 $\mathcal{X}$ -扩张下是封闭的, 所以 $N \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^n S$. 根据命题 3.2.4(3)可以看出上面的序列是 S -正合的, 因此它是可裂的.

(2) $\Rightarrow$ (1) 根据定义 3.2.3, 可以看出 S 是一个 n - $\mathcal{X}$ -星模. 对于任意一个 $\mathcal{X}$ -正合

列 $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$, 其中 $L, N \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^n S$. 因为 $\text{Pres}_{\mathcal{X}}^n S \subseteq S^{\mathcal{X}^\perp_1}$, 显然序列是 S -正合的. 根据命题 3.2.4(2), $M \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^n S$, 即, $\text{Pres}_{\mathcal{X}}^n S$ 在 $\mathcal{X}$ -扩张下封闭. $\square$

设 $\mathcal{C}$ 是 $R\text{-Mod}$ 的一个子范畴, 称 $\mathcal{C}$ 在 $n\text{-}\mathcal{X}$ -像下是封闭的, 如果对于任意 $\mathcal{X}$ -正合列 $C_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_2 \longrightarrow C_1 \longrightarrow X \longrightarrow 0$, 其中对于所有的 i 有 $C_i \in \mathcal{C}$, 那么 $X \in \mathcal{C}$. 显然, 子范畴 $\text{Pres}_{\mathcal{X}}^1 S$ 在 $1\text{-}\mathcal{X}$ -像下是封闭的. 我们不知道 $\text{Pres}_{\mathcal{X}}^n S$ 在 $n\text{-}\mathcal{X}$ -像下是否是封闭的. 但是如果 S 是一个 $n\text{-}\mathcal{X}$ -星模且 $\text{Pres}_{\mathcal{X}}^n S$ 在 $\mathcal{X}$ -扩张下是封闭的, 那么我们有如下的结论.

命题 3.2.7 设 S 是一个 $n\text{-}\mathcal{X}$ -星模且 $\text{Pres}_{\mathcal{X}}^n S$ 在 $\mathcal{X}$ -扩张下是封闭的. 那么我们有 $\text{Pres}_{\mathcal{X}}^k(\text{Pres}_{\mathcal{X}}^n S) = \text{Pres}_{\mathcal{X}}^k S$, 其中 $k \geq 1$. 特别地, $\text{Pres}_{\mathcal{X}}^n S$ 在 $n\text{-}\mathcal{X}$ -像下是封闭的.

证明: 这个 $\text{Pres}_{\mathcal{X}}^k S \subseteq \text{Pres}_{\mathcal{X}}^k(\text{Pres}_{\mathcal{X}}^n S)$ 是显然成立的. 因此我们只需要验证: 当 $k \geq 1$ 时, $\text{Pres}_{\mathcal{X}}^k(\text{Pres}_{\mathcal{X}}^n S) \subseteq \text{Pres}_{\mathcal{X}}^k S$. 接下来我们将使用数学归纳法来证明该结论是成立的.

当 $k=1$ 时, 对于任意 $A \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^1(\text{Pres}_{\mathcal{X}}^n S)$, 存在一个 $\mathcal{X}$ -正合列

$$0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

满足 $B \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^n S = \text{Pres}_{\mathcal{X}}^{n+1} S$, 进一步存在 $\mathcal{X}$ -正合列

$$0 \longrightarrow B_1 \longrightarrow S_B \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

满足 $S_B \in \text{Add} S$, $B \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^n S$. 我们考虑以下交换图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & B_1 & \xlongequal{\quad} & B_1 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & C & \longrightarrow & S_B & \longrightarrow & A \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & A \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

图 3-6

注意到图 3-6 的中间一行是 $\mathcal{X}$ -正合的. 因此 $A \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^1 S$, 即当 $k=1$ 时结论是成立的.

假设结果对所有 $1 \leq i \leq k$ 都成立. 下面我们将证明这个结果对于 $i=k+1$ 也是成立的. 设 $X \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^{k+1}(\text{Pres}_{\mathcal{X}}^n S)$, 即, 存在一个 $\mathcal{X}$ -正合列

$$Y_{k+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Y_2 \longrightarrow Y_1 \xrightarrow{f} X \longrightarrow 0$$

满足所有的 $Y_i \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^n S$. 设 $\text{Ker} f = X_1$, 那么通过归纳假设, 则有

$$X_1 \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^k(\text{Pres}_{\mathcal{X}}^n S) = \text{Pres}_{\mathcal{X}}^k S.$$

因为 S 是 n - $\mathcal{X}$ -星模, 所以存在一个 $\mathcal{X}$ -正合列

$$0 \longrightarrow Y'_1 \longrightarrow S' \longrightarrow Y_1 \longrightarrow 0,$$

其中 $Y_1 \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^n S$. 我们考虑下面的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & Y'_1 & = & Y'_1 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & S' & \longrightarrow & X \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & Y_1 & \longrightarrow & X \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

图 3-7

容易看出所有的行和列都是 $\mathcal{X}$ -正合的. 因为 $X_1 \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^k S$, 所以存在一个 $\mathcal{X}$ -正合列

$$0 \longrightarrow X'_1 \longrightarrow S'' \longrightarrow X_1 \longrightarrow 0,$$

其中 $S'' \in \text{Add} S$, $X'_1 \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^{k-1} S$. 因此我们考虑下面的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & X'_1 & = & X'_1 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & Y'_1 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & S'' \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & Y'_1 & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & X_1 \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

图 3-8

容易看出，所有行和列都是 $\mathcal{X}$ -正合的.

在图 3-8 中，根据中间一行，因为 $\text{Pres}_{\mathcal{X}}^n S$ 在 $\mathcal{X}$ -扩张下封闭，所以我们有 $M \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^n S$. 注意到 $X'_1 \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^{k-1} S = \text{Pres}_{\mathcal{X}}^{k-1}(\text{Pres}_{\mathcal{X}}^n S)$. 根据第二列，可以看出 $Z \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^k(\text{Pres}_{\mathcal{X}}^n S) = \text{Pres}_{\mathcal{X}}^k S$. 从图 3-7 中的中间一行可以看出 $X \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^{k+1} S$. $\square$

3.3 n - $\mathcal{X}$ -倾斜模

Bazzoni 介绍了相对倾斜模的概念^[33]. 在本节中，我们首先给出 n - $\mathcal{X}$ -倾斜模的定义^[12]，借助 n - $\mathcal{X}$ -星模主要给出了 n - $\mathcal{X}$ -倾斜模的若干个等价刻画，具体参见定理 3.3.2 和定理 3.3.5.

用 $\mathcal{X}\text{-dim } M$ 表示 M 的 $\mathcal{X}$ -维数，定义 $\mathcal{X}\text{-dim } M = \inf\{n \mid \text{存在一个 } M \text{ 的 } \mathcal{X}\text{-分解: } 0 \longrightarrow X_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \text{ 满足对每个 } i \text{ 都有 } C_i \in \mathcal{X}\}$. 如果不存在这样的整数，则 $\mathcal{X}\text{-dim } M = \infty$. 下面我们回顾一下 n - $\mathcal{X}$ -倾斜模的定义.

定义 3.3.1 一个 R -模 T 被称为相对于容许平衡对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 的 n -倾斜模(简称， n - $\mathcal{X}$ -倾斜模)，如果它满足下列条件：

- (1) $\mathcal{X}\text{-dim } M \leq n$;
- (2) T 是 $\mathcal{X}$ -自正交的，即， $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^i(T, T^{(I)}) = 0$ ，任意的 $i \geq 0$ ，对于所有的集合 I ;
- (3) 对任意的 $X \in \mathcal{X}$ 都存在一个 $\mathcal{X}$ -正合列

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow T_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow T_n \longrightarrow 0$$

满足所有的 $T_i \in \text{Add} T$.

接下来, 我们将给出本部分中第一个结论.

定理 3.3.2 下面四个命题是等价的:

- (1) T 是一个 $n-\mathcal{X}$ -倾斜模;
- (2) $\text{Pres}_{\mathcal{X}}^n T = T^{\mathcal{X}_{1 \leq i \leq n}}$;
- (3) T 是一个 $n-\mathcal{X}$ -星模且 $\mathcal{Y} \subseteq \text{Pres}_{\mathcal{X}}^n T$;
- (4) $\mathcal{Y} \subseteq \text{Pres}_{\mathcal{X}}^n T = \text{Pres}_{\mathcal{X}}^{n+1} T \subseteq T^{\mathcal{X}_{\perp_1}}$.

证明: (1) $\Rightarrow$ (2) 根据文献[12]中的定理 3.9, 结论显然成立.

(2) $\Rightarrow$ (3) 容易看出 $\mathcal{Y} \subseteq T^{\mathcal{X}_{1 \leq i \leq n}} = \text{Pres}_{\mathcal{X}}^n T$. 下面我们只需要证明 T 是一个 $n-\mathcal{X}$ -星模. 对于任意的 $\mathcal{X}$ -正合列 $(*)$ $0 \longrightarrow U \longrightarrow T' \longrightarrow V \longrightarrow 0$, 其中 $T' \in \text{Add} T$, $V \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^n T$. 通过维数转移可以得到 $U \in T^{\mathcal{X}_{2 \leq i \leq n}}$. 应用函子 $\text{Hom}_R(T, -)$ 作用于序列 $(*)$, 由此可诱导出一个正合列

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(T, U) \longrightarrow \text{Hom}_R(T, T') \longrightarrow \text{Hom}_R(T, V) \longrightarrow \text{Ext}_R(T, X) \longrightarrow 0,$$

从该正合列很容易看出

$$\text{序列} (*) \text{ 是 } T\text{-正合的} \Leftrightarrow U \in T^{\mathcal{X}_{\perp_1}} \Leftrightarrow U \in T^{\mathcal{X}_{1 \leq i \leq n}} = \text{Pres}_{\mathcal{X}}^n T.$$

因此通过定理 3.2.5(3)可以得到 T 是一个 $n-\mathcal{X}$ -星模.

(3) $\Rightarrow$ (4) 只需要证明 $\text{Pres}_{\mathcal{X}}^n T \subseteq T^{\mathcal{X}_{\perp_1}}$ 即可. 通过假设, 对于任意的 $U \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^n T$, 存在 $\mathcal{X}$ -正合列 $(*1)$: $0 \longrightarrow U \longrightarrow Y \longrightarrow V \longrightarrow 0$, 其中 $Y \in \mathcal{Y} \subseteq \text{Pres}_{\mathcal{X}}^n T$. 根据命题 3.2.4(1), $V \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^n T$. 根据命题 3.2.4(3), 可以看出序列 $(*1)$ 是 T -正合的. 因为 $Y \subseteq T^{\mathcal{X}_{\perp_1}}$, 根据维数转移不难验证 $U \in T^{\mathcal{X}_{\perp_1}}$. 即, $\text{Pres}_{\mathcal{X}}^n T \subseteq T^{\mathcal{X}_{\perp_1}}$.

(4) $\Rightarrow$ (1) 根据文献[12]中的定理 3.9, 我们只需要证明 $\text{Pres}_{\mathcal{X}}^n T \subseteq T^{\mathcal{X}_{\perp_{\geq 1}}}$ 即可. 对于任意的 $U \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^n T$, 取 U 的 $\mathcal{X}$ -余分解, 即, 存在一个 $\mathcal{X}$ -正合列

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow Y_0 \longrightarrow V \longrightarrow 0,$$

其中 $Y_0 \in \mathcal{Y} \subseteq \text{Pres}_{\mathcal{X}}^n T$. 根据命题 3.2.4 的(1)和(3), $V \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^n T$ 且该序列是 T -正合的. 可以看出 $U \in T^{\mathcal{X}_{\perp_{1,2}}}$, 即, $\text{Pres}_{\mathcal{X}}^n T \subseteq T^{\mathcal{X}_{\perp_{1,2}}}$. 对 V 重复上述过程, 则可以得到 $\text{Pres}_{\mathcal{X}}^n T \subseteq T^{\mathcal{X}_{\perp_{\geq 1}}}$.

另一方面, 对于任意的 $M \in T^{\mathcal{X}^{\perp_{\geq 1}}}$, 取 M 的一个 $\mathcal{Y}$ -余分解, 即, 存在一个 $\mathcal{X}$ -正合列 $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f_0} Y_0 \xrightarrow{f_1} Y_1 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{f_n} Y_n \longrightarrow Y_{n+1} \longrightarrow \cdots$, 其中 $Y_j \in \mathcal{Y}$ 对于任意的 j . 设 $\text{Ker} f_j = M_{j-1}$, $1 \leq j \leq n+1$ 其中 $M_0 = M$. 通过维数转移, 对于任意的 $1 \leq j \leq n+1$, 有 $M_j \in T^{\mathcal{X}^{\perp_{\geq 1}}}$. 根据命题 3.2.6, T 是一个 n - $\mathcal{X}$ -星模且 $\text{Pres}_{\mathcal{X}}^n T$ 在 $\mathcal{X}$ -扩张下封闭. 根据命题 3.2.7, 因为 $\mathcal{Y} \subseteq \text{Pres}_{\mathcal{X}}^n T$, 所以 $M_n \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^n T$. 根据命题 3.2.4(2), 有 $M \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^n T$. 即, $T^{\mathcal{X}^{\perp_{\geq 1}}} \subseteq \text{Pres}_{\mathcal{X}}^n T$. $\square$

设 T 是一个 R -模. 对象 $T \in \mathcal{C}_n^{\mathcal{X}T}$ 当且仅当存在一个 $\mathcal{X}$ -正合列

$$T_n \longrightarrow T_{n-1} \cdots \longrightarrow T_1 \longrightarrow T_0 \longrightarrow U \longrightarrow 0,$$

满足所有的 $T_i \in \text{Add} T$ 且该正合列是 T -正合的. 为了给出 n - $\mathcal{X}$ -倾斜模的一个新的等价刻画, 我们需要以下两个引理.

引理 3.3.3 设 $0 \longrightarrow U \xrightarrow{i} V \xrightarrow{\pi} W \longrightarrow 0$ 是 $\mathcal{X}$ -正合列.

(1) 如果 $U, V \in \mathcal{C}_n^{\mathcal{X}T}$, 那么 $W \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^{n+1} T$. 而且, 如果这个序列是 T -正合的, 那么 $W \in \mathcal{C}_n^{\mathcal{X}T}$.

(2) 如果 $V, W \in \mathcal{C}_n^{\mathcal{X}T}$ 且这个序列是 T -正合的, 那么 $U \in \mathcal{C}_{n-1}^{\mathcal{X}T}$.

证明: (1) 我们用归纳法来证明. 对于 $n=0$, 结论显然成立.

我们假设结论对 $n=k-1$ 是成立的. 设 $U, V \in \mathcal{C}_k^{\mathcal{X}T}$, 那么存在两个 $\mathcal{X}$ -正合列

$$0 \longrightarrow U' \longrightarrow T_U \xrightarrow{f} U \longrightarrow 0$$

和

$$0 \longrightarrow V' \longrightarrow T_V \xrightarrow{g} V \longrightarrow 0$$

满足 $T_U, T_V \in \text{Add} T$, $U', V' \in \mathcal{C}_{k-1}^{\mathcal{X}T}$, 且两个序列都是 T -正合的. 我们考虑下面的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & U' & \longrightarrow & V'' & \longrightarrow & W_1 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & T_U & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} & T_U \oplus T_V & \xrightarrow{(0,1)} & T_V \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & U & \xrightarrow{i} & V & \xrightarrow{\pi} & W \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

图 3-9

容易看出，图 3-9 中的所有序列都是 $\mathcal{X}$ -正合的. 应用文献[13]中的引理 3.2 于 $\mathcal{X}$ -正合列

$$0 \longrightarrow V' \longrightarrow T_V \longrightarrow V \longrightarrow 0$$

和

$$0 \longrightarrow V'' \longrightarrow T_U \oplus T_V \longrightarrow V \longrightarrow 0 ,$$

我们可以得到 $V'' \oplus T_V \cong V' \oplus T_U \oplus T_V \in \mathcal{C}_{k-1}^{\mathcal{X}T}$. 对 $\mathcal{X}$ -正合列

$$0 \longrightarrow U' \oplus T_V \longrightarrow V'' \oplus T_V \longrightarrow W_1 \longrightarrow 0 ,$$

使用归纳假设，可以得出 $W_1 \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^k T$. 根据图 3-9 的第 3 列，我们可以得到 $W \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^{k+1} T$. 此外，如果这个序列是 T -正合的，不难验证图 3-9 中的所有序列也是 T -正合的，从图 3-9 的第 3 列即可得证.

(2) 因为 $V, W \in \mathcal{C}_n^{\mathcal{X}T}$ ，存在两个 $\mathcal{X}$ -正合列

$$0 \longrightarrow V' \longrightarrow T_V \longrightarrow V \longrightarrow 0$$

和

$$0 \longrightarrow W' \longrightarrow T_W \longrightarrow W \longrightarrow 0 ,$$

其中 $T_V, T_W \in \text{Add} T$ ， $V', W' \in \mathcal{C}_{n-1}^{\mathcal{X}T}$ ，且两个序列都是 T -正合的. 我们考虑如下交换图：

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & V' & \xlongequal{\quad} & V' & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & W'' & \longrightarrow & T_V & \longrightarrow & W \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & U & \longrightarrow & V & \longrightarrow & W \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

图 3-10

容易看出图 3-10 中的所有序列都是 $\mathcal{X}$ -正合的和 T -正合的. 根据第一列, 我们可以得到一个新的 $\mathcal{X}$ -正合列

$$(*2): 0 \longrightarrow V' \oplus T_W \longrightarrow W'' \oplus T_W \longrightarrow U \longrightarrow 0,$$

其中 $V' \oplus T_W \in \mathcal{C}_{n-1}^{\mathcal{X}T}$. 显然序列 $(*2)$ 也是 T -正合的. 考虑图 3-10 中的第二行和序列

$$0 \longrightarrow W' \longrightarrow T_W \longrightarrow W \longrightarrow 0,$$

根据文献[13]中的引理 2.3, 我们有 $W'' \oplus T_W \cong W' \oplus T_V \in \mathcal{C}_{n-1}^{\mathcal{X}T}$. 根据序列 $(*2)$, 通过(1)我们有 $U \in \mathcal{C}_{n-1}^{\mathcal{X}T}$. □

引理 3.3.4 如果 T 是一个 n - $\mathcal{X}$ -倾斜模, 那么 $\mathcal{C}_n^{\mathcal{X}T} = \text{Pres}_{\mathcal{X}}^n T$.

证明: 显然, $\mathcal{C}_n^{\mathcal{X}T} \subseteq \text{Pres}_{\mathcal{X}}^{n+1} T = \text{Pres}_{\mathcal{X}}^n T$. 另一方面, 对于任意的 $M \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^{n+1} T$, 存在如下的 $\mathcal{X}$ -正合列

$$(*3): \cdots \longrightarrow T_n \xrightarrow{f_n} \cdots \longrightarrow T_1 \xrightarrow{f_1} T_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0,$$

其中 $T_i \in \text{Add} T$ 对于任意的 i . 设 $\text{Im } f_i = M_i \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^{n+1} T$. 考虑 $\mathcal{X}$ -正合列

$$(*4): 0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow T_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

根据定理 3.3.2, T 是 $(n+1)$ - $\mathcal{X}$ -拟投射的. 根据命题 3.2.2, 序列 $(*4)$ 是 T -正合的. 类似可证所有的序列 $0 \longrightarrow M_{i+1} \longrightarrow T_0 \longrightarrow M_i \longrightarrow 0$ 都是 T -正合的. 因此序列 $(*3)$ 是 T -正合的, 即, $M \in \mathcal{C}_n^{\mathcal{X}T}$. 所以 $\mathcal{C}_n^{\mathcal{X}T} = \text{Pres}_{\mathcal{X}}^{n+1} T = \text{Pres}_{\mathcal{X}}^n T$. □

在本文的最后, 我们给出 n - $\mathcal{X}$ -倾斜模的另一个等价刻画.

定理 3.3.5 一个 R -模 T 被称为相对于容许平衡对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 的 n -倾斜模(简称, n - $\mathcal{X}$ -倾斜模), 设 T 是一个 R -模. 那么 T 是 n - $\mathcal{X}$ -倾斜模当且仅当

- (1) $\text{Hom}(T, -)$ 在 $\mathcal{C}_n^{\mathcal{X}T}$ 中保持正合性;
- (2) $Y \subseteq \mathcal{C}_n^{\mathcal{X}T}$;
- (3) $\mathcal{C}_n^{\mathcal{X}T}$ 在 n - $\mathcal{X}$ -像下封闭.

证明: $(\Rightarrow)$: 根据定理 3.3.2, 引理 3.3.4, 命题 3.2.6 和命题 3.2.7, 结论显然成立.

$(\Leftarrow)$: 注意到 $\mathcal{C}_n^{\mathcal{X}T} \subseteq \text{Pres}_{\mathcal{X}}^{n+1}T \subseteq \text{Pres}_{\mathcal{X}}^nT$. 因为 $\mathcal{C}_n^{\mathcal{X}T}$ 在 n - $\mathcal{X}$ -像下是封闭的且 $\text{Add}T \subseteq \mathcal{C}_n^{\mathcal{X}T}$, 所以我们有 $\text{Pres}_{\mathcal{X}}^nT \subseteq \mathcal{C}_n^{\mathcal{X}T}$. 因此 $\mathcal{C}_n^{\mathcal{X}T} = \text{Pres}_{\mathcal{X}}^{n+1}T = \text{Pres}_{\mathcal{X}}^nT$. 对于任意的 $M \in \mathcal{C}_n^{\mathcal{X}T}$, 存在一个 $\mathcal{X}$ -正合列 $(*5): 0 \longrightarrow M \longrightarrow Y \longrightarrow M_1 \longrightarrow 0$, 其中 $Y \in \mathcal{Y}$. 根据引理 3.3.3 的(1), $M_1 \in \text{Pres}_{\mathcal{X}}^{n+1}T \subseteq \mathcal{C}_n^{\mathcal{X}T}$. 根据条件(1), 序列 $(*5)$ 是 T -正合的, 易证 $M \in T^{\mathcal{X}^\perp_1}$, 即, $\mathcal{C}_n^{\mathcal{X}T} \subseteq T^{\mathcal{X}^\perp_1}$. 因此根据定理 3.3.2(4), T 是一个 n - $\mathcal{X}$ -倾斜模. □

第 4 章 结论与展望

4.1 结论

在第二章给出逗号范畴中半倾斜对象的刻画, 并且说明在一定条件下, 逗号范畴同构于 $T\text{-Mod}$ 范畴后主要对以下做出证明并得出结论:

1. $\begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}_h \in \mathcal{D}_\sigma$ 当且仅当 $M \in \mathcal{D}_{\sigma_A}$, $N \in \mathcal{D}_{\sigma_B}$.
2. 设 $A \in R\text{-Mod}$, $B \in S\text{-Mod}$ 且函子 F 与直和可交换. 那么 $\mathcal{D}_\sigma$ 是挠类当且仅当 $\mathcal{D}_{\sigma_A}$ 和 $\mathcal{D}_{\sigma_B}$ 都是挠类.

3. 设 $A \in R\text{-Mod}$, $B \in S\text{-Mod}$, 且函子 F 与直和可交换, 那么 $\begin{pmatrix} A \\ FA \oplus B \end{pmatrix}_{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$ 是关于 σ 的半倾斜对象当且仅当: (1) A 是关于 σ_A 的半倾斜对象; (2) B 是关于 σ_B 的半倾斜对象; (3) $FA \in \text{Gen} B$.

4. 设 $\mathcal{C}$ 是左 R -模的一个类, $\mathcal{D}$ 是左 S -模的一个类, 那么 $(\mathfrak{B}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}})^{\perp_0} = \mathfrak{U}_{\mathcal{D}^{\perp_0}}^{\mathcal{C}^{\perp_0}}$;
 $\mathfrak{B}_{\mathcal{D}^{\perp_0}}^{\mathcal{C}^{\perp_0}} \subseteq (\mathfrak{U}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}})^{\perp_0}$.

5. 设 $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$ 是左 R -模的两个子范畴, $\mathcal{D}_1$ 和 $\mathcal{D}_2$ 是左 S -模的两个子范畴. 如果 $S^+ \in \mathcal{D}$, ${}_R U$ 是平坦的且 U_S 是投射的, 那么 $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ 和 $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ 是挠对当且仅当 $(\mathfrak{B}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}, \mathfrak{U}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2})$ 是挠对.

6. 设 $\mathcal{C}$ 是左 R -模的一个类, $\mathcal{D}$ 是左 S -模的一个类. 那么 ${}^{\perp_0}(\mathfrak{J}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}) = \mathfrak{U}_{\mathcal{D}^{\perp_0}}^{\mathcal{C}^{\perp_0}}$;
 $\mathfrak{J}_{\mathcal{D}^{\perp_0}}^{\mathcal{C}^{\perp_0}} \subseteq (\mathfrak{U}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}})^{\perp_0}$.

7. 设 $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$ 是左 R -模的两个子范畴, $\mathcal{D}_1$ 和 $\mathcal{D}_2$ 是左 S -模的两个子范畴. 如果 $R \in \mathcal{C}_1$, ${}_R U$ 是平坦的且 U_S 是投射的, 那么 $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ 和 $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ 是挠对当且仅当 $(\mathfrak{U}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}, \mathfrak{J}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2})$ 是挠对.

在第三章借助平衡对给出了 $n\text{-}\mathcal{X}$ -倾斜模和 $n\text{-}\mathcal{X}$ -星模的定义后, 研究并证明了一些基本性质, 并得出以下结论:

1. $n\text{-}\mathcal{X}$ -星模在 $\text{Pres}_{\mathcal{X}}^n S$ 中的封闭性.

2. $n-\mathcal{X}$ -星模的若干等价条件.
3. $n-\mathcal{X}$ -倾斜模的若干等价条件.
4. 如果 T 是一个 $n-\mathcal{X}$ -倾斜模, 那么 $\mathcal{C}_n^{\mathcal{X}T} = \text{Pres}_{\mathcal{X}}^n T$.

4.2 展望

本文我们主要研究了半倾斜(Silting)对象、平衡对(Balanced pairs)和相对星模(Relative star modules)的相关性质. 首先我们学习了模范畴中半倾斜对象的定义以及相关性质, 类似于三角矩阵环上倾斜模的刻画, 我们给出了逗号范畴(Comma category)中半倾斜对象的刻画, 并给出了一个 AR 箭图的例子; 其次借助平衡对给出 $n-\mathcal{X}$ -星模, 从而进一步推广得到 $n-\mathcal{X}$ -倾斜模的等价刻画. 在后续的研究中, 我们主要是在外三角范畴(Extriangulated categories)中考虑半倾斜对象、平衡对和相对星模的相关知识, 对学习外三角范畴, 倾斜理论等均有着一定的帮助.

参考文献

- [1] 佟文廷. 同调代数引论[M]. 高等教育出版社, 1998.
- [2] Brenner S, Butler M C R. Generalizations of the Bernstein-Gelfand-Ponomarev reflection functors, *Lecture Notes in Math.* 1980, 832:103–169.
- [3] Happel D, Ringel H C M. Tilted algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* 1982, 274:399-443.
- [4] Assem I, Simson D, Skowronski A. Elements of the Representation Theory of Associative Algebras, Vol. 1, Techniques of Representation Theory, *London Math. Soc. Stud. Texts 65*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006.
- [5] Dickson S E. A torsion theory for Abelian categories, *Trans Amer Math Soc*, 1966, 121:223–235.
- [6] Fossum R, Griffith P, Reiten I. Trivial Extensions of Abelian Categories[M]. Springer Berlin Heidelberg; Springer, Berlin, Heidelberg:2006-08-01.
- [7] Yuan Y, He J, Wu D. Cotorsion pair in comma categories[J]. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 2024, (prepublish):1-20.
- [8] Tang G. Abelian Model Structures on Comma Categories[J]. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2024, (prepublish):1-10.
- [9] Chen Q, Zheng M. Recollements of abelian categories and special types of comma categories[J]. *Journal of Algebra*, 2009, 321(9):2474-2485.
- [10] Irfan M. On Adjointness of Comma Categories[J]. *Communications, Faculty Of Science, University of Ankara Series A1Mathematics and Statistics*, 1961, 063-068.
- [11] Hu J, Zhu H. Special precovering classes in comma categories[J]. *Science China Mathematics*, 2021, 65(5):1-18.
- [12] Mao L X. Cotorsion pairs and approximation classes over formal triangular matrix rings[J]. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 2020, 224(6):106271-106271.
- [13] Chen X W, Le J. Recollements, comma categories and morphic enhancements[J]. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, 2022, 152(3):567-591.
- [14] Ladkani S. Derived Equivalences of Triangular Matrix Rings Arising from Extensions of Tilting Modules[J]. *Algebras and Representation Theory*, 2011, 14(1):57-74.

- [15]Marmaridis N. Comma categories in representation theory, *Comm. Algebra*, 1983, 11:1919–1943.
- [16]Chen X. Homotopy equivalences induced by balanced pairs[J]. *Journal of Algebra*, 2010, 324(10):2718-2731.
- [17]Zheng Y. Balanced pairs induce recollements[J]. *Communications in Algebra*, 2017, 45(10):4238-4245.
- [18]Li H, Wang J, Huang Z. Applications of balanced pairs[J]. *Science China Mathematics*, 2016, 59(5):861-874.
- [19]Enochs E E, Overtoun M G. *Relative Homological Algebra*[M]. Degruyter, 2011.
- [20]Huang Z, Iyama O. Auslander-type conditions and cotorsion pairs[J]. *Journal of Algebra*, 2007, 318(1):93-110.
- [21]Krause H, Solberg Ø. Applications of Cotorsion Pairs[J]. *Journal of the London Mathematical Society*, 2003, 68(3):631-650.
- [22]Zhang P Y, Liu M H, Liu D J and Wei J Q. Balanced pairs and relative tilting objects in recollements of abelian categories. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, Accept.
- [23]Wei J Q. n-star modules and n-tilting modules. *Journal of Algebra*. 2005, 283:711-722.
- [24]Auslander M, Reiten I. Applications of contravariantly finite subcategories. *Advanced Mathematics*, 1991, 86:111-152.
- [25]Miyashita Y. Tilting modules associated with a series of idempotent ideals[J]. *Journal of Algebra*, 2001, 238: 485-501.
- [26]Angeleri L H, Frederik M, Jorge V. Silting Modules[J]. *International Mathematics Research Notices*, 2015, 2016(4):1251-34.
- [27]Peng Y, Zhu R, et al. Gorenstein projective objects in comma categories[J]. *Periodica Mathematica Hungarica*, 2021, 84(2):1-17.
- [28]Marmaridis N. Comma categories in representation theory, *Commutations in Algebra*, 1983, 11:1919–1943.
- [29]Mitchell B. Rings with several objects. *Adv Math*, 1972, 8:1–161.
- [30]Enochs E E, Cortés-Izurdiaga M, Torrecillas B. Gorenstein conditions over triangular matrix rings[J]. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 2014, 218(8):1544-1554.
- [31]Krylov P, Tuganbaev A. *Formal Matrices*[M]. Springer, 2017.
- [32]Auslander M, Smalø S O. Preprojective modules over Artin algebras[J]. *Journal*

of algebra, 1980, 66(1): 61-122.

- [33]Bazzoni S. Characterization of n -cotilting and n -tilting modules[J]. Journal of Algebra, 2004, 273: 359–372.

攻读硕士期间取得的学术成果

- [1] 王新雨, 张培雨. n -星模与平衡对[J]. 安徽工程大学学报(自然科学版)(已录用)

致谢

花开花落万物道，聚散离别终有时。行文至此，意味着我的研究生求学阶段即将画上句号。回首过往，满是感激与不舍。

涓涓师恩，铭记于心。首先感谢我的导师。从论文选题、框架搭建到细节修改，感谢导师始终以严谨的学术态度和耐心的指导为我指明方向。无论是生活中还是学习上，感谢导师一直以来对我的关怀与帮助，在导师的鼓励与教诲下，我拥有了面对困难的勇气与不轻易放弃的决心，在之后的道路中，我会一直铭记于心。

然后我要感谢我的家人。感谢他们尊重我求学路上的每一个决定，给予我无限的支持与关爱。

最后感谢研究生三年里的同学和朋友。感谢她们陪伴我成长，在我失落与不安时给我鼓励，让我拥有再次前进的力量。愿我们友谊长存，前程似锦。