

分类号: O154.2

密 级: 公开

单位代码: 10363

学 号: 2221020110

题目: 相对倾斜对与 Auslander-Reiten 对应

英文并列

题目: RELATIVE TILTING PAIRS AND THE  
AUSLANDER-REITEN  
CORRESPONDENCE

学生姓名: 田梦雪

指导教师: 刘大俊 副教授

专 业: 数学

研究方向: 同调代数

答辩时间: 2025 年 5 月 14 日

## 安徽工程大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：我恪守学术道德，崇尚严谨学风。所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已明确注明和引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品及成果的内容。论文为本人亲自撰写，我对所写的内容负责，并完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

学位论文作者签名 田梦雪.

日期：2025 年 5 月 14 日

## 安徽工程大学学位论文版权使用授权书

学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅或借阅。本人授权安徽工程大学可以将本学位论文的全部内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保密 ☐ ，在 \_\_\_\_ 年解密后适用本版权书。

本学位论文属于

不保密 ☒ 。

学位论文作者签名：田梦雪

指导教师签名：刘大

日期：2025 年 5 月 14 日

日期：2025 年 5 月 14 日

# 相对倾斜对与 Auslander-Reiten 对应

## 摘要

本文在经典倾斜理论的基础上, 研究相对倾斜理论. 令  $F$  为加法函子  $\text{Ext}_A^1(-, -)$  的子函子, 首先通过研究倾斜模, 余倾斜模与  $F$ -倾斜模,  $F$ -余倾斜模之间的联系, 类比考虑倾斜对所具备的特性, 由此引入  $n$ - $F$ -倾斜对(在本文中, 也被称为相对倾斜对)的概念, 它是倾斜对的自然推广.

本文通过讨论  $n$ - $F$ -倾斜对的重要性质, 类比经典倾斜对的等价刻画, 我们给出了  $n$ - $F$ -倾斜对版本的相似刻画. 此外, 在经典的倾斜理论中, 有著名的 Auslander-Reiten 对应定理, 即: 倾斜模与共变有限子范畴、余可解子范畴之间存在一一对应. 因此, 本文还重点研究了相对倾斜对如何诱导 Auslander-Reiten 对应.

本课题的研究, 将进一步推广倾斜对的相关理论, 对完善和发展相对倾斜理论有重要的意义.

**关键词:**  $F$ -正合列,  $F$ -自正交模,  $n$ - $F$ -倾斜对, 倾斜理论, Auslander-Reiten 对应

# Relative tilting pairs and the Auslander-Reiten correspondence

## ABSTRACT

Based on the classical theory of tilting, this paper investigates the relative tilting theory. Let  $F$  be a subfunctor of the functor  $\text{Ext}_A^1(-, -)$ . Firstly, by studying the relationship between the tilting modules, the cotilting modules and the  $F$ -tilting modules, the  $F$ -cotilting modules, the characteristics of the tilting pair are considered analogically. Consequently, we introduce the concept of the  $n$ - $F$ -tilting pair (also referred to as the relative tilting pair in this paper), which naturally generalizes the notion of the tilting pair.

This paper discusses the important properties of  $n$ - $F$ -tilting pairs and analogizes the equivalence characterization of classical tilting pairs, providing a similar characterization for  $n$ - $F$ -tilting pairs. Additionally, in the classical theory of tilting, there is the well-known Auslander-Reiten correspondence: there exists a one-to-one correspondence between tilting modules and covariantly finite, coresolving subcategories. Therefore, this paper also focuses on how relative tilting pairs induce an Auslander-Reiten correspondence.

The research on this topic will further promote the relative theories of tilting pairs, which is of great significance for the perfection and development of relative tilting theory.

Tian Mengxue(Mathematics)

Supervised by Liu Dajun

KEY WORDS:  $F$ -exact sequences,  $F$ -selforthogonal modules,  $n$ - $F$ -tilting pairs, tilting theory

## 目录

|                                              |     |
|----------------------------------------------|-----|
| 摘要 .....                                     | I   |
| ABSTRACT .....                               | II  |
| 目录 .....                                     | III |
| 第 1 章 绪论 .....                               | 1   |
| 1.1 研究背景 .....                               | 1   |
| 1.2 预备知识 .....                               | 2   |
| 1.3 研究内容与结构安排 .....                          | 5   |
| 第 2 章 $n$ -F- 倾斜对 .....                      | 7   |
| 2.1 F- 自正交模的基本性质 .....                       | 7   |
| 2.2 $n$ - 倾斜对和 $n$ -F- 倾斜对 .....             | 14  |
| 2.3 $n$ -F- 倾斜对的性质和刻画 .....                  | 15  |
| 第 3 章 $n$ -F- 倾斜对的 Auslander-Reiten 对应 ..... | 22  |
| 3.1 F- 自正交模性质的进一步研究 .....                    | 22  |
| 3.2 $n$ -F- 倾斜对的 Auslander-Reiten 对应 .....   | 27  |
| 第 4 章 总结与展望 .....                            | 37  |
| 4.1 总结 .....                                 | 37  |
| 4.2 展望 .....                                 | 38  |
| 参考文献 .....                                   | 39  |
| 硕士期间发表的论文 .....                              | 41  |
| 致谢 .....                                     | 42  |

# 第 1 章 绪论

## 1.1 研究背景

有限维代数表示理论的核心之一是倾斜理论. 经典倾斜理论是一种构造模范畴中子范畴之间等价的方法, 如今已经发展成为研究各种数学领域的有力工具, 包括交换和非交换代数、有限群理论和代数拓扑等.

Brenner 和 Butler<sup>[1]</sup>, Happel 和 Ringel<sup>[2]</sup>在 20 世纪 80 年代有限维代数的背景下研究了经典倾斜模和余倾斜模的概念. 1985 年, Miyashita<sup>[3]</sup>考虑了有限投射维数的有限生成倾斜模. 20 世纪 90 年代, Colpi 和 Trlifaj<sup>[4]</sup>引入了无限生成模的概念. 这个定义推广了经典的倾斜模概念, 它的自然对偶推广了经典的余倾斜模的概念.

后来, Wakamatsu<sup>[5]</sup>和 Wei<sup>[6]</sup>研究了具有无限投射维数的倾斜模. 在研究 Artin 代数上的倾斜模时, Miyashita<sup>[7]</sup>引入了倾斜对的概念, 接着, Wei 和 Xi<sup>[8]</sup>给出了倾斜对的重要刻画. 倾斜对对于构造与一系列幂等理想相关的倾斜模很有用. 同时, 倾斜对的概念也统一了倾斜模和余倾斜模的概念.

另一方面, 在 20 世纪 90 年代, 相对倾斜理论引起了众多知名学者的关注. Auslander 和 Solberg<sup>[9]</sup>利用相对同调理论的方法在 Artin 代数上引入了 F-余倾斜模的概念. Wei<sup>[10]</sup>研究了 F-倾斜模, Ma 和 Sauter<sup>[11]</sup>研究了忠实平衡模上的 F-余倾斜模. 关于倾斜对的最新进展, 请参考[12].

为了加深对倾斜对的理解, 基于相对倾斜理论, 我们将引入  $n$ -F-倾斜对的概念, 这是  $n$ -倾斜对的相对概念. 这个概念统一了  $n$ -F-余倾斜模和  $n$ -F-倾斜模的定义, 对研究相对倾斜理论有重要的意义.

近年来, 倾斜理论的研究取得了显著的进展. 其核心理论之一的 Auslander-Reiten 对应理论也取得了一系列成果. Auslander 和 Reiten<sup>[13]</sup>给出了经典倾斜模与某些特殊子范畴之间的一一对应关系: 对于自正交  $A$ -模  $T$ , (1)  $T \rightarrow T^\perp$  给出基础倾斜模的同构类与共变有限余分解子范畴  $\mathcal{X}$  之间的一一对应, 使得  $\hat{\mathcal{X}} = A\text{-mod}$ ; (2)  $T \rightarrow \text{add}_A^\vee T$  给出了基础倾斜模的同构类与有限投射维数模范畴中反变有限分解子范畴之间的一一对应关系. 这对于倾斜模性质的刻

画是很重要的. 2008 年, Wei<sup>[14]</sup>将倾斜模的 Auslander-Reiten 对应推广到倾斜对. 这些结果也被许多学者在其他范畴中推广. 例如, Di 和 Wei 等在交换范畴中引入了关于余挠对的倾斜子范畴, 并在此背景下给出了相应的 Auslander-Reiten 对应<sup>[15]</sup>, 同时介绍了在三角范畴中半倾斜子范畴的 Auslander-Reiten 对应<sup>[16]</sup>. 此外, 还研究了许多倾斜对象在外三角范畴中诱导的 Auslander-Reiten 对应. Zhu 和 Zhuang<sup>[17]</sup>定义了在外三角范畴中倾斜(余倾斜)子范畴的概念, 同时还得到了倾斜(共倾斜)子范畴和余可解共变(可解反变)有限子范畴之间的 Auslander-Reiten 对应. 2021 年, Zhao, Zhu 和 Zhuang<sup>[18]</sup>引入了外三角范畴中倾斜对的另一种形式, 同时也给出了倾斜对的 Auslander-Reiten 对应, 该对应对具有某些假设的自正交子范畴中的有限倾斜子范畴进行了分类. 最近, Zhang, Wei 和 Wang<sup>[19]</sup>给出了在外三角范畴中带有无限投射维数(内射维数) $\infty$ -倾斜(余倾斜)的新定义, 同时建立了在  $\infty$ -倾斜(余倾斜)子范畴和带有 E-投射生成元的余分解(可解)子范畴之间的部分 Auslander-Reiten 对应.

作为模范畴中倾斜对的推广, 文献[20]中引入了  $n$ -F-倾斜对的概念. 因此, 本文主要研究  $n$ -F-倾斜对与某类子范畴之间的 Auslander-Reiten 对应.

## 1.2 预备知识

本文中总是假定子范畴在同构下是闭的. 我们固定一个 Artin  $k$ -代数  $A$ , 并且下面提到的模都是有限生成的左  $A$ -模. 用  $A\text{-mod}$  表示所有有限生成的左  $A$ -模的范畴.

设  $F$  为  $\text{Ext}_A^1(-, -)$  的加法子函子. 如果一个短正合列  $0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow L \rightarrow 0$  在  $F(L, M)$  中, 就称这个正合列是  $F$ -正合的. 如果一个长正合列

$$\cdots \rightarrow M_n \xrightarrow{d_n} \cdots \rightarrow M_0 \xrightarrow{d_0} M_{-1} \xrightarrow{d_{-1}} \cdots \rightarrow M_{-n} \xrightarrow{d_n} \cdots$$

可以分裂成一些短的  $F$ -正合列, 就称这个正合列是  $F$ -正合的. 值得注意的是, 通过态射  $L' \rightarrow L$  和  $M \rightarrow M'$  作用在  $F$ -正合列  $0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow L \rightarrow 0$  而得到的每个拉回列和推出列都是  $F$ -正合的. 此外, 正合列的直和是  $F$ -正合的当且仅当其中的每个正合列都是  $F$ -正合的<sup>[21]</sup>.

$A$ -模  $P$  是  $F$ -投射的, 如果所有以  $P$  为结尾的  $F$ -正合列是可裂的. 对偶地, 定义了  $F$ -内射模. 显然, 所有的投射模都是  $F$ -投射模, 但反过来则不成立. 设

$\mathcal{P}(\mathcal{F})$  ( $\mathcal{I}(\mathcal{F})$ ) 表示  $F$ -投射模的子范畴 ( $F$ -内射模的子范畴). 如果对所有  $M \in A\text{-mod}$ , 存在  $F$ -正合列  $0 \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$ , 其中  $P \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$ , 就称  $F$  有足够多的投射对象. 对偶地, 可以定义有足够多的内射对象. 对于任何的  $M \in A\text{-mod}$ , 如果存在一个  $F$ -正合列  $\cdots \rightarrow P_n \xrightarrow{d_n} \cdots \rightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \rightarrow 0$ , 其中  $P_i \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$ , 那么就称为模  $M$  的  $F$ -投射分解. 对偶地, 可以定义  $F$ -内射分解. 此外, 对于任何的  $M \in A\text{-mod}$ , 通过使用  $F$ -投射分解 (或者  $F$ -内射分解) 得到的  $\text{Hom}_A(-, M)$  (或  $\text{Hom}_A(M, -)$ ) 的右导函子  $\text{Ext}_F^i(-, M)$  (或  $\text{Ext}_F^i(M, -)$ ) 是定义良好的. 在这里  $\text{Ext}_F^1(M, N) = F(M, N)$ . 如果  $M$  有一个长度为  $\leq n$  的  $F$ -投射分解, 则称  $A$ -模  $M$  有  $F$ -投射维数  $\leq n$  (记为  $\text{pd}_F \leq n$ ), 也就是说, 对于所有的  $N \in A\text{-mod}$ , 有  $\text{Ext}_F^{n+1}(M, N) = 0$ . 下面的两个引理是  $F$ -正合列的重要刻画, 有助于我们在更深层次上理解  $F$ -正合列.

**引理 1.2.1:** 对于  $A$ -模的正合列  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ , 以下是等价的:

- (1) 这个序列是  $F$ -正合的.
- (2)  $0 \rightarrow \text{Hom}_A(P, A) \rightarrow \text{Hom}_A(P, B) \rightarrow \text{Hom}_A(P, C) \rightarrow 0$  是正合的, 其中  $P \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$ .
- (3)  $0 \rightarrow \text{Hom}_A(C, I) \rightarrow \text{Hom}_A(B, I) \rightarrow \text{Hom}_A(A, I) \rightarrow 0$  是正合的, 其中  $I \in \mathcal{I}(\mathcal{F})$ .

如果序列  $0 \rightarrow \text{Ker}(f) \rightarrow T \rightarrow N \rightarrow 0$  是  $F$ -正合的, 那么映射  $f: T \rightarrow N$  就称为  $F$ -满的. 如果序列  $0 \rightarrow N \rightarrow T \rightarrow \text{Coker}(g) \rightarrow 0$  是  $F$ -正合的, 那么映射  $g: N \rightarrow T$  就称为  $F$ -单的. 通过引理 1.2.1, 可以得到  $f$  是  $F$ -满的当且仅当  $f$  是满的以及  $\text{Hom}_A(P, f)$  是满的, 其中  $P \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$ . 对偶地,  $g$  是  $F$ -单的当且仅当  $g$  是满的以及  $\text{Hom}_A(g, I)$  是满的, 其中  $I \in \mathcal{I}(\mathcal{F})$ .

**引理 1.2.2:** ([10, 引理 1.2]) 设  $0 \rightarrow M \xrightarrow{i} N \xrightarrow{\pi} L \rightarrow 0$  是正合列, 那么:

态射  $\pi$  是  $F$ -满的当且仅当  $i$  是  $F$ -单的.

- (1) 如果  $f: T \rightarrow N$  是  $F$ -满的, 那么  $\pi$  是  $F$ -满的当且仅当  $f\pi$  是  $F$ -满的.
- (2) 如果  $g: N \rightarrow T$  是  $F$ -单的, 那么  $i$  是  $F$ -单的当且仅当  $ig$  是  $F$ -单的.

设  $T$  是  $A$ -模,  $\text{add}_A T$  表示由  $T$  的复制的有限直和的所有直和项组成的子范畴. 我们用  $\text{add}_F^\vee T$  表示所有  $A$ -模  $M$  的子范畴, 使得对于正整数  $m$  存在  $F$ -正合列

$0 \rightarrow M \rightarrow C_0 \rightarrow \cdots \rightarrow C_m \rightarrow 0$ , 其中  $C_i \in \text{add}_A T$ . 对偶地,  $\hat{\text{add}}_F T$  表示所有  $A$ -模  $M$  的子范畴, 使得对于整数  $m$  存在  $F$ -正合列  $0 \rightarrow C_m \rightarrow \cdots \rightarrow C_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ , 其中  $C_i \in \text{add}_A T$ . 设  $M \in \check{\text{add}}_F T$ , ( $M \in \hat{\text{add}}_F T$ ), 我们用  $\text{codim}_{_F T}(M)$  (或  $\text{dim}_{_F T}(M)$ ) 表示最小整数  $m$ , 满足存在  $F$ -正合列  $0 \rightarrow C_m \rightarrow \cdots \rightarrow C_0 \rightarrow M \rightarrow 0$  (或  $0 \rightarrow M \rightarrow C_0 \rightarrow \cdots \rightarrow C_m \rightarrow 0$ ), 其中  $C_i \in \text{add}_A T$ . 简单起见, 用  $(\check{\text{add}}_F T)_n$  (或  $(\hat{\text{add}}_F T)_n$ ) 表示所有满足  $M \in \check{\text{add}}_F T$  且  $\text{codim}_{_F T}(M) \leq n$  的子范畴 (或  $0 \rightarrow C_m \rightarrow \cdots \rightarrow C_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ , 其中  $\text{dim}_{_F T}(M) \leq n$ ).

本文用  $T^\perp$  (或  ${}^\perp T$ ) 表示满足  $\text{Ext}_F^{i \geq 1}(T, N) = 0$  的所有  $A$ -模  $N$  的子范畴, (或  $\text{Ext}_F^{i \geq 1}(N, T) = 0$ ).  $A$ -模  $T$  被称为  $F$ -自正交的, 如果满足  $\text{Ext}_F^{i \geq 1}(T, T) = 0$ , 也就是说, 对于任意的  $i \geq 1$ , 有  $\text{Ext}_F^i(T, T) = 0$ .  ${}_T \mathcal{X}^F$  (或  $\mathcal{X}_T^F$ ) 表示为  $T^\perp$  的满子范畴 (或  ${}^\perp T$ ), 其由所有  $A$ -模  $N$  组成, 使得存在  $F$ -正合列  $\cdots \xrightarrow{f_2} T_1 \xrightarrow{f_1} T_0 \xrightarrow{f_0} N \rightarrow 0$  (或  $0 \rightarrow N \xrightarrow{f_0} T_0 \xrightarrow{f_1} T_1 \xrightarrow{f_2} \cdots$ ), 其中  $T_i \in \text{add}_A T$ ,  $\text{Im } f_i \in T^\perp$  (或  $\text{Im } f_i \in {}^\perp T$ ). 显而易见, 有  $\hat{\text{add}}_F T \subseteq {}_T \mathcal{X}^F \subseteq T^\perp$  (或  $\check{\text{add}}_F T \subseteq \mathcal{X}_T^F \subseteq {}^\perp T$ ).

设  $\mathcal{C}$  为  $A$ -模的一个子范畴.  $\text{Pres}_F^n(T)$  表示所有  $A$ -模  $M$  的子范畴, 满足  $F$ -正合列  $C_n \rightarrow \cdots \rightarrow C_1 \rightarrow M \rightarrow 0$ , 其中  $C_i \in \mathcal{C}$ . 简单地用  $\text{Pres}_F^n(T)$  表示  $\text{Pres}_F^n(\text{add}_A T)$ . 对于任何  $M \in \text{Pres}_{\mathcal{C}\mathcal{X}^F}^n(T)$ , 存在一个  $F$ -正合列  $0 \rightarrow X \xrightarrow{f_n} T_n \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} T_1 \rightarrow M \rightarrow 0$ , 其中  $X \in {}_{\mathcal{C}} \mathcal{X}^F$ ,  $T_i \in \text{add}_A T$ . 事实上有  $\text{Gen}_F(T) := \text{Pres}_F^1(T)$ . 显然,  $\text{Gen}_F(T)$  在直和项下是封闭的.

设  $\mathcal{C}$  对某个  $A$ -模  $T$  具有  $\text{add}_A T$  的形式, 其中  $\text{add}_A T$  由  $T$  的有限直和的直和项组成.  $\mathcal{C}$  中的相对内射余生成元是范畴  $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{C} \cap \mathcal{C}^\perp$ , 满足  $\mathcal{C}$  中的每个对象都可以嵌入到  $\mathcal{I}$  中的对象中. 对偶地, 定义了  $\mathcal{C}$  中的相对投射生成元. 注意, 如果  $\mathcal{I}$  是相对内射余生成元 (分别为,  $\mathcal{C}$  中的相对投射生成元), 那么它也是  $\check{\mathcal{C}}$  中的相对内射余生成元 (分别地, 一个相对投射生成元在  $\check{\mathcal{C}}$  中). 现在假设  $\mathcal{C}$  是一个具有相对内射余生成元  $\mathcal{I}$  的范畴, 如果  $\mathcal{D}$  在  $F$ -扩张、直和项和单态上核下是闭的, 并且

包含  $\mathcal{I}$ ，那么称子范畴  $\mathcal{D} \in \mathcal{C}$  在  $\mathcal{C}$  中是相对余分解的. 对偶地，设  $\mathcal{C}$  是一个具有相对投射生成元  $\mathcal{P}$  的范畴，如果  $\mathcal{D}$  在 F-扩张、直和项和满态核下闭，且包含  $\mathcal{P}$ ，则称子范畴  $\mathcal{D} \in \mathcal{C}$  在  $\mathcal{I}$  中是相对可解的.

Auslander 和 Smal<sup>[22]</sup>引入了函数有限子范畴的概念. 设  $C \in \mathcal{C}$  和  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$  是在直和项下闭的子范畴. 如果存在一个  $D \in \mathcal{D}$  和一个态射  $f: D \rightarrow C$  (或  $f: C \rightarrow D$ )，对于任意的  $D' \in \mathcal{D}$ ，使得  $\text{Hom}_A(D', f)$  (或  $\text{Hom}_A(f, D')$ ) 是满射的，则称映射  $f$  为  $C$  的右(左)  $D$ -逼近. 而且，如果  $f$  是右(左)极小的，即，每当  $f = gf$  (或  $f = fg$ ) 满足满射(单射)  $g: D \rightarrow D$  是一个同构，则映射  $f$  被称为  $C$  的右极小(左)  $D$ -逼近. 注意，每当  $C$  具有右(左)  $D$ -逼近，则它具有右(左)最小  $D$ -逼近<sup>[23]</sup>.

子范畴  $\mathcal{D}$  称为在  $\mathcal{C}$  中反变有限的(共变有限)，如果对于任意的  $C \in \mathcal{C}$ ，存在 F-正合列  $0 \rightarrow K \rightarrow W \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$  ( $0 \rightarrow C \xrightarrow{g} W \rightarrow K \rightarrow 0$ )，其中  $g$  是  $C$  的右极小(左)  $D$ -逼近. 如果  $\mathcal{D}$  在  $\mathcal{C}$  中既反变有限又共变有限，则其在  $\mathcal{C}$  中是函数有限的. 注意到，如果  $\mathcal{D}$  包含一个在  $\mathcal{C}$  中的相对内射余生成元(相对投射生成元)，那么每个  $C \in \mathcal{C}$  的左(右)  $D$ -逼近是一个单态(满态).

### 1.3 研究内容与结构安排

本文通过经典倾斜理论和相对倾斜理论的联系，类比得到相对倾斜对的一些结果. 在倾斜模，余倾斜模和 F-倾斜模的基础知识中，研究其之间的联系，接着从中考虑  $n$ -F-倾斜对与倾斜对之间的联系，给出  $n$ -F-倾斜对的概念、性质以及相关定理推论，最后给出  $n$ -F-倾斜对在子范畴方面的刻画，文章具体安排如下.

假设 F 为加法函子  $\text{Ext}_A^1(-, -)$  的子函子，第二章首先考虑倾斜对具备的特性，引入  $n$ -F-倾斜对(相对倾斜对)的概念，设  $A$  是 Artin 代数. 对  $(C, T)$  是  $n$ -F-倾斜的如果满足：(1)  $C$  是 F-自正交的；(2)  $T$  是 F-自正交的；(3)  $T \in (\text{add}_F C)_n$ ；(4)  $C \in (\text{add}_F T)_n$ . 接着研究其相关的性质，最后给出  $n$ -F-倾斜对的等价刻画. 假设  $C$  是 F-自正交的， $C \in \text{Copres}_n^{\text{Pres}_{\mathcal{C}^F}}(T)$ ，那么  $(C, T)$  是  $n$ -F-倾斜对当且仅当  $\text{Pres}_{\mathcal{C}^F}^n(T) = T^\perp \bigcap_{\mathcal{C}^F} \mathcal{C}^F$ .

第三章主要研究  $n$ -F-倾斜对在子范畴方面的刻画. 首先主要讨论了 F-自正

交模的相关性质. 然后通过一系列重要的命题给出了  $n$ -F- 倾斜对的 Auslander-Reiten 对应. 设  $C$  是 F- 自正交的,  ${}_C\mathcal{X}^F$  有相对内射余生成子,  ${}_C\check{\mathcal{X}}^F$  是有限滤过范畴. 那么  $T \rightarrow {}_T\mathcal{X}^F$  给出了基本  $n$ -C-F- 倾斜模的同构类与  ${}_C\mathcal{X}^F$  中的相对余分解、共变有限子范畴  $\mathcal{D}$  之间的一一对应, 其中  $\check{\mathcal{D}} = {}_C\check{\mathcal{X}}^F$ .

## 第 2 章 $n$ -F- 倾斜对

本章节主要研究  $n$ -F- 倾斜对, 令  $F$  为  $\text{Ext}_A^1(-, -)$  的子函子. 第一节主要讨论  $F$ - 自正交模的相关性质; 第二节将引入倾斜对的自然推广:  $n$ -F- 倾斜对的概念, 并研究其性质; 第三节通过证明一系列重要命题及引理, 最终得到了  $n$ -F- 倾斜对的等价刻画.

### 2.1 F- 自正交模

本节主要介绍和  $F$ - 自正交模相关的定理. 首先, 回顾一下  $F$ - 扩张闭的概念: 如果对于任意的  $F$ - 正合列  $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ , 其中  $L, N \in \mathcal{C}$ , 那么  $M \in \mathcal{C}$ .

**引理 2.1.1:** 设  $T$  是  $F$ - 自正交的, 那么:

(1)  $\mathcal{X}_T^F$  在  $F$ - 扩张、 $F$ - 满射核、有限直和与直和项下是闭的.

(1)'  ${}_T\mathcal{X}^F$  在  $F$ - 扩张、 $F$ - 满射核、有限直和与直和项下是闭的.

(2)  $\text{Ext}_F^{i \geq 1}(U, V) = 0$ , 其中  $U \in \text{add}_F^\vee T, V \in T^\perp$ .

(2)'  $\text{Ext}_F^{i \geq 1}(U, V) = 0$ , 其中  $U \in {}^\perp T, V \in \text{add}_F^\wedge T$ .

(3)  $(\text{add}_F^\vee T)_n = \{X \in \mathcal{X}_T^F \mid \text{Ext}_F^{n+1}(Y, X) = 0, \text{ 其中 } Y \in {}^\perp T\}$   
 $= \{X \in \mathcal{X}_T^F \mid \text{Ext}_F^{n+1}(Y, X) = 0, \text{ 其中 } Y \in \mathcal{X}_T^F\}.$

(3)'  $(\text{add}_F^\wedge T)_n = \{X \in {}_T\mathcal{X}^F \mid \text{Ext}_F^{n+1}(X, Y) = 0, \text{ 其中 } Y \in T^\perp\}$   
 $= \{X \in {}_T\mathcal{X}^F \mid \text{Ext}_F^{n+1}(X, Y) = 0, \text{ 其中 } Y \in {}_T\mathcal{X}^F\}.$

(4)  $(\text{add}_F^\vee T)_n$  在  $F$ - 扩张、有限直和和直和项下是封闭的.

(4)'  $(\text{add}_F^\wedge T)_n$  在  $F$ - 扩张、有限直和和直和项下是封闭的.

(5) 给定一个  $F$ - 正合列  $0 \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow W \rightarrow 0$ , 如果  $V, W \in {}_T\mathcal{X}^F$  和  $\text{Ext}_F^1(T, U) = 0$ , 那么  $U \in {}_T\mathcal{X}^F$ .

(5)' 给定一个  $F$ - 正合列  $0 \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow W \rightarrow 0$ , 如果  $U, V \in {}_T\mathcal{X}^F$  和  $\text{Ext}_F^1(W, T) = 0$ , 那么  $W \in {}_T\mathcal{X}^F$ .

**证明:** (1)参考[11, 命题 3.1]. 为了读者阅读方便, 下面我们给出证明的细节.

首先证明  $\mathcal{X}_T^F$  在 F-扩张下封闭.

设  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  是 F-正合列, 其中  $A, C \in \mathcal{X}_T^F$ , 去证明  $B \in \mathcal{X}_T^F$ . 通过假设, 可得两个 F-正合列  $0 \rightarrow A \rightarrow T_0 \rightarrow L \rightarrow 0$  和  $0 \rightarrow C \rightarrow T'_0 \rightarrow K \rightarrow 0$ , 其中  $T_0, T'_0 \in \text{add}_A T$ ,  $L, K \in \mathcal{X}_T^F$ . 接着考虑下面的推出图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \rightarrow & A & \rightarrow & B & \rightarrow & C \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \rightarrow & T_0 & \rightarrow & U & \rightarrow & C \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & L & = & L & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 
 \end{array}$$

图 2-1: 推出图 1

因为  $C \in \mathcal{X}_T^F \subseteq {}^\perp T$ , 所以得到  $\text{Ext}_F^1(C, T_0) = 0$ , 也就是说,  $U \simeq T_0 \oplus C$ . 那么我们有下面的推出图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \rightarrow & B & \rightarrow & T_0 \oplus C & \rightarrow & L \rightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & B & \rightarrow & T_0 \oplus T' & \rightarrow & V \rightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & K & = & K \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

图 2-2: 推出图 2

中间一列是两个 F-正合列的直和, 根据[13, 引理 1.2], 它是 F-正合的. 由于右列是 F-正合列  $0 \rightarrow T_0 \oplus C \rightarrow T_0 \oplus T'_0 \rightarrow K \rightarrow 0$  的推出, 那么它也是正合的.

根据引理 1.2.2, 中间一行也是 F-正合的. 又因为  $K, L \in {}^\perp T$ ,  ${}^\perp T$  在扩张下封闭,

所以有  $V \in {}^\perp T$ . 注意到  $L, K \in \mathcal{X}_T^F$ , 接着重复这个过程, 易得  $B \in \mathcal{X}_T^F$ . 因此  $\mathcal{X}_T^F$  在  $F$ -扩张下是封闭的.

其次证明  $\mathcal{X}_T^F$  在  $F$ -满态核下是闭的.

设  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  是  $F$ -正合列, 其中  $B, C \in \mathcal{X}_T^F$ , 去证明  $A \in \mathcal{X}_T^F$ . 通过假设我们有一个  $F$ -正合列  $0 \rightarrow B \rightarrow T_0 \rightarrow E \rightarrow 0$ , 其中  $T_0 \in \text{add}_A T$ ,  $E \in \mathcal{X}_T^F$ . 因此可以构造以下交换图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & 0 & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \rightarrow & A & \rightarrow & B & \rightarrow & C \rightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & A & \rightarrow & T_0 & \rightarrow & K \rightarrow 0 \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & & E & = & E & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & & 0 & & 0 & 
 \end{array}$$

图 2-3: 交换图 1

类似地, 根据引理 1.2.2, 可得右边一列和中间一行也是  $F$ -正合的. 因为  $C, E \in \mathcal{X}_T^F$ ,  $\mathcal{X}_T^F$  在  $F$ -扩张下封闭, 可得  $K \in \mathcal{X}_T^F$ , 因此我们有  $A \in \mathcal{X}_T^F$ . 也就是说,  $\mathcal{X}_T^F$  在  $F$ -满射的核下是封闭的.

最后证明  $\mathcal{X}_T^F$  在有限直和及直和项下是闭的.

假设  $B \simeq A \oplus C$ . 设  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  是  $F$ -正合列, 其中  $B \in \mathcal{X}_T^F$ , 去证明  $A \in \mathcal{X}_T^F$ . 序列  $0 \rightarrow B \simeq A \oplus C \rightarrow A \oplus K \rightarrow E \rightarrow 0$  是两个  $F$ -正合列通过上面交换图的直和, 因此它也是  $F$ -正合的[14, 引理 1.2]. 又因为  $B, E \in \mathcal{X}_T^F$ , 我们得到,  $A \oplus K \in \mathcal{X}_T^F$ , 因此有  $K \in {}^\perp T$ . 通过重复该过程  $0 \rightarrow K \rightarrow A \oplus K \rightarrow A \rightarrow 0$ , 可得  $A \in \mathcal{X}_T^F$ . 因此,  $\mathcal{X}_T^F$  在有限直和项下是封闭的.

(2) 如果  $U \in \text{add}_F^\vee T$ , 则存在  $F$ -正合列  $0 \rightarrow U \rightarrow T_0 \rightarrow \cdots \rightarrow T_n \rightarrow 0$ , 其中  $T_i' \in \text{add}_A T$ . 因此对于任意的  $V \in T^\perp$ , 通过应用函子  $\text{Hom}_A(-, V)$ , 得到了对于任

意的  $i \geq 1$ ，通过维数转移有  $\text{Ext}_F^i(U, V) \simeq \text{Ext}_F^{i+n}(T_n, V) = 0$ 。

(3)一方面，对于任意的  $X \in (\text{add}_F^\vee T)_n$ ，存在一个  $F$ -正合列

$0 \rightarrow X \rightarrow T_0 \rightarrow \cdots \rightarrow T_n \rightarrow 0$ ，其中  $T_i \in \text{add}_A T$ 。因此，对于  $Y \in {}^\perp T$ ，应用函子  $\text{Hom}_A(Y, -)$ ，通过维数转移可得  $\text{Ext}_F^{n+1}(Y, X) \simeq \text{Ext}_F^1(Y, T_n) = 0$ ，其中  $n \geq 1$ 。

另一方面，对于任意的  $X \in \mathcal{X}_T^F$ ，则存在  $F$ -正合列  $0 \rightarrow X \xrightarrow{f_0} T_0 \xrightarrow{f_1} T_1 \xrightarrow{f_2} \cdots$ ，其中  $T_i \in \text{add}_A T$  和  $\text{Im } f_i \in {}^\perp T$ 。如果对于任意的  $Y \in {}^\perp T$  有  $\text{Ext}_F^{n+1}(Y, X) = 0$ ，那么应用函子  $\text{Hom}_A(\text{Im } f_{n+1}, -)$ ，通过维数转移得到

$$\text{Ext}_F^1(\text{Im } f_{n+1}, \text{Im } f_n) \simeq \text{Ext}_F^{n+1}(\text{Im } f_{n+1}, X) = 0.$$

所以，序列  $0 \rightarrow \text{Im } f_n \rightarrow T_n \rightarrow \text{Im } f_{n+1} \rightarrow 0$  是可裂的，也就是说，

$T_n \simeq \text{Im } f_n \oplus \text{Im } f_{n+1}$ ，即  $\text{Im } f_n \in \text{add}_A T$ ，因此得到  $X \in (\text{add}_A^\vee T)_n$ 。

(4)设  $0 \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow W \rightarrow 0$  是  $F$ -正合列，如果  $U, W \in (\text{add}_F^\vee T)_n$ ，则通过(1)得  $V \in \mathcal{X}_T^F$ ，对于任意的  $Y \in \mathcal{X}_T^F$ ，通过(3)有  $\text{Ext}_F^{n+1}(Y, V) = 0$ 。再通过(3)可以得到  $V \in (\text{add}_F^\vee T)_n$ 。其余部分的证明也是类似的。

(5)因为  $W \in {}_T \mathcal{X}^F$ ，则我们有  $F$ -正合列  $0 \rightarrow W' \rightarrow T' \rightarrow W \rightarrow 0$ ，其中  $W' \in {}_T \mathcal{X}^F$ ， $T' \in \text{add}_A T$ 。注意到  $\text{Ext}_F^1(T, U) = 0$ ，所以我们可以构造下面的交换图：

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & W' & = & W' & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \rightarrow & U & \rightarrow & U \oplus T' & \rightarrow & T' \rightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & U & \rightarrow & V & \rightarrow & W \rightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

图 2-4: 交换图 2

因为  $V, W' \in {}_T \mathcal{X}^F$  以及  ${}_T \mathcal{X}^F$  在  $F$ -扩张下是封闭的，那么有  $U \oplus T' \in {}_T \mathcal{X}^F$ 。然后

通过 (1)', 可以得到  $U \in {}_T\mathcal{X}^F$ . □

设  $\mathcal{Y} \subseteq \mathbf{A}\text{-mod}$  是有限直和项下闭的满子范畴. 假设  $T \in \mathcal{Y}$ , 如果对于任意的  $Y \in \mathcal{Y}$ , 存在一个 F-正合列  $0 \rightarrow Y' \rightarrow T_Y \rightarrow Y \rightarrow 0$ , 其中  $T_Y \in \text{add}_A T$ ,  $Y' \in \mathcal{Y}$ , 那么  $T$  称为  $\mathcal{Y}$  的相对生成元. 对偶的, 如果对于任意的  $Y \in \mathcal{Y}$ , 存在一个 F-正合列  $0 \rightarrow Y \rightarrow T_Y \rightarrow Y' \rightarrow 0$ , 其中  $T_Y \in \text{add}_A T$ ,  $Y' \in \mathcal{Y}$ ,  $T$  称为  $\mathcal{Y}$  的相对余生成元.

例如,  ${}_T\mathcal{X}^F$  有一个相对生成元  $T$ , 当  $\mathcal{X}_{T'}^F$  有一个相对余生成元  $T'$ . 此外,  $T$  和  $T'$  都是 F-自正交的.

下面的引理对于得到某些特殊子范畴上的 F-正合列是有用的, 因此我们给出了详细的证明.

**引理 2.1.2:** 假设  $\mathcal{Y} \subseteq \mathbf{A}\text{-mod}$  包含一个相对生成元  $T$ . 注意  $T$  是 F-自正交的, 在扩张、有限直和项下是封闭的. 设  $X$  是  $\mathbf{A}$ -模, 使得对于任意的  $m, Z$ , 这里存在一个 F-正合列  $0 \rightarrow X \rightarrow N_m \rightarrow \cdots \rightarrow N_1 \rightarrow Z \rightarrow 0$ , 其中  $N_i \in \mathcal{Y}$ . 那么:

(1) 存在一个 F-正合列  $0 \rightarrow U_m \rightarrow V_m \rightarrow X \rightarrow 0$ , 其中  $U_m \in \mathcal{Y}$ , 对于  $V_m$ , 使得存在一个 F-正合列  $0 \rightarrow V_m \rightarrow T_m \rightarrow \cdots \rightarrow T_1 \rightarrow Z \rightarrow 0$ , 其中  $T_i \in \text{add}_A T$ .

(2) 如果也有  $Z \in \mathcal{Y}$ , 那么存在一个 F-正合列  $0 \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow X \rightarrow 0$ , 其中  $U \in \mathcal{Y}$ ,  $V$  满足  $V \in (\text{add}_F^\vee T)_m$ .

(3) 存在一个 F-正合列  $0 \rightarrow X \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow 0$ , 其中  $U \in \mathcal{Y}$ , 对于  $V$ , 存在一个 F-正合列  $0 \rightarrow V \rightarrow T_{m-1} \rightarrow \cdots \rightarrow T_1 \rightarrow Z \rightarrow 0$ , 其中  $T_i \in \text{add}_A T$ , 此外, 如果  $U \in \mathcal{Y}$ , 那么  $V$  满足  $V \in (\text{add}_F^\vee T)_{m-1}$ .

**证明:** (1) 使用到  $m$  的归纳法证明. 如果  $m=1$ , 那么存在 F-正合列  $0 \rightarrow X \rightarrow N_1 \rightarrow Z \rightarrow 0$ , 其中  $N_1 \in \mathcal{Y}$ . 因为  $N_1 \in \mathcal{Y}$ , 所以存在 F-正合列  $0 \rightarrow U_1 \rightarrow T' \rightarrow N_1 \rightarrow 0$ , 其中  $U_1 \in \mathcal{Y}$ ,  $T' \in \text{add}_A T$ . 接着构造下面的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & U_1 & = & U_1 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \rightarrow & V_1 & \rightarrow & T' & \rightarrow & Z \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \rightarrow & X & \rightarrow & N_1 & \rightarrow & Z \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 
 \end{array}$$

图 2-5: 交换图 3

通过引理 1.2.2, 因为  $a: T' \rightarrow N_1$  是 F-满的, 那么  $\pi: N_1 \rightarrow Z$  是 F-满的当且仅当  $a\pi$  是 F-满的, 也就是说, 中间一行也是 F-正合的. 所以左列就是所求的 F-正合列.

假设结果在  $m-1$  的情况下成立. 接下来去证明这个结论对  $m$  也是成立的.

首先, 通过归纳假设, 存在一个 F-正合列  $0 \rightarrow U'_{m-1} \rightarrow V'_{m-1} \rightarrow X' \rightarrow 0$ , 其中  $U'_{m-1} \in \mathcal{Y}$ , 对于  $V'_{m-1}$  使得存在一个 F-正合列  $0 \rightarrow V'_{m-1} \rightarrow T'_{m-1} \rightarrow \cdots \rightarrow T' \rightarrow Z \rightarrow 0$ , 其中  $T' \in \text{add}_A T$ . 其次, 定义  $X' = \text{Coker}(X \rightarrow N_m)$ , 可以构造以下交换图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & U'_{m-1} & = & U'_{m-1} & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \rightarrow & X & \rightarrow & Y & \rightarrow & V'_{m-1} \rightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & X & \rightarrow & N_m & \rightarrow & X' \rightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

图 2-6: 交换图 4

显然, 中间一列和中间一行都是 F-正合的. 因为  $N_m, U'_{m-1} \in \mathcal{Y}$ ,  $\mathcal{Y}$  在 F-扩张下封闭, 可以得到  $Y \in \mathcal{Y}$ . 因此这有 F-正合列  $0 \rightarrow U_m \rightarrow T_Y \rightarrow Y \rightarrow 0$ , 其中  $T_Y \in \text{add}_A T$ ,  $U_{m-1} \in \mathcal{Y}$ . 所以有下面的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & U_m & = & U_m & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \rightarrow & V_m & \rightarrow & T_Y & \rightarrow & V'_{m-1} \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \rightarrow & X & \rightarrow & Y & \rightarrow & V'_{m-1} \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 
 \end{array}$$

图 2-7: 交换图 5

最后，根据引理 1.2.2，中间的一行是 F-正合的，很容易看出左边的一列正好是所求的 F-正合列。

(2)如果  $Z \in \mathcal{Y}$ ，则存在 F-正合列  $0 \rightarrow Z' \rightarrow T_0 \rightarrow Z \rightarrow 0$ ，其中  $T_0 \in \text{add}_A T$ ，

$Z' \in \mathcal{Y}$ 。定义  $X_1 = \text{Ker}(N_1 \rightarrow Z)$ 。有下面的拉回图：

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & Z' & = & Z' & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \rightarrow & X_1 & \rightarrow & Y' & \rightarrow & T_0 \rightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & X_1 & \rightarrow & N_1 & \rightarrow & Z \rightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

图 2-8: 拉回图 1

得到中间列和中间行都是 F-正合的。因此，存在一个 F-正合列  $0 \rightarrow X \rightarrow N_m \rightarrow \cdots \rightarrow N_2 \rightarrow Y' \rightarrow T_0 \rightarrow 0$ 。因为  $N_1, Z' \in \mathcal{Y}$ ，通过引理 2.1.1，我们可以从中间一行得到  $Y' \in \mathcal{Y}$ 。因此通过 (1)，可以得到存在 F-正合列  $0 \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow X \rightarrow 0$ ，其中  $U \in \mathcal{Y}$ ，对于  $V$ ，则存在 F-正合列

$$0 \rightarrow V \rightarrow T_m \rightarrow \cdots \rightarrow T_1 \rightarrow T_0 \rightarrow 0,$$

其中  $T_i \in \text{add}_A T$ ，也就是说， $V \in (\text{add}_F T)_m$ 。

(3)通过(1), 存在 F- 正合列  $0 \rightarrow U' \rightarrow V' \rightarrow X \rightarrow 0$ , 其中  $U' \in \mathcal{Y}$ , 对于  $V'$ , 存在 F- 正合列  $0 \rightarrow V' \rightarrow T_m \rightarrow \cdots \rightarrow T_1 \rightarrow Z \rightarrow 0$ , 其中  $T_i \in \text{add}_A T$ . 表示  $V = \text{Coker}(V' \rightarrow T_m)$ . 然后有下面的推出图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \rightarrow & U' & \rightarrow & V' & \rightarrow & X \rightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & U' & \rightarrow & T_m & \rightarrow & U \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & V & = & V & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 
 \end{array}$$

图 2-9: 推出图 3

通过引理 1.2.2, 中间的一行也是 F- 正合的, 所以可以很容易地得到右边一列就是所需的 F- 正合列.

其余的证明与(2)类似, 所以可以省略它.  $\square$

下面是引理 2.1.2 的对偶陈述.

**引理 2.1.3:** 假设  $T$  是 F- 自正交的,  $n$  是一个整数. 设  $X$  是  $A$ - 模, 存在 F- 正合列  $0 \rightarrow Z \rightarrow N_1 \rightarrow \cdots \rightarrow N_m \rightarrow X \rightarrow 0$ , 其中  $N_i \in (\text{add}_F T)_n$ . 那么就存在 F- 正合列  $0 \rightarrow X \rightarrow V \rightarrow U \rightarrow 0$ , 其中  $U \in (\text{add}_F T)_{n-1}$ , 对于  $V$ , 存在 F- 正合列  $0 \rightarrow Z \rightarrow T_1 \rightarrow \cdots \rightarrow T_m \rightarrow V \rightarrow 0$ , 其中  $T_i \in \text{add}_A T$ .

**注 2.1.4:** 假设  $T$  是 F- 自正交的. 注意  ${}_T \mathcal{X}^F$  有一个相对生成元  $T$ , 所以如果存在一个 F- 正合列  $0 \rightarrow \text{Ker} f_0 \xrightarrow{f_0} T_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ , 其中  $T_0 \in {}_T \mathcal{X}^F$ , 则根据引理 2.1.2 (1), 我们有两个 F- 正合列  $0 \rightarrow H_0 \rightarrow T_0 \rightarrow \text{Ker} f_0 \rightarrow 0$ ,  $0 \rightarrow M_0 \rightarrow T_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ , 其中  $H_0 \in {}_T \mathcal{X}^F$ ,  $T_0 \in \text{add}_A T$ .

## 2.2 $n$ - 倾斜对和 $n$ -F- 倾斜对

在这一节中, 我们介绍了  $n$ -F- 倾斜对的概念. 首先, 我们回顾  $n$ - 倾斜对的

概念.

**定义 2.2.1:** (参考[7]) 设  $A$  是 Artin 代数. 对  $(C, T)$  是  $n$ -倾斜的如果满足:

- (1)  $C$  是自正交的;
- (2)  $T$  是自正交的;
- (3)  $T \in (\text{add}_A^\wedge C)_n$ ;
- (4)  $C \in (\text{add}_A^\vee T)_n$ .

**定义 2.2.2:** 设  $A$  是 Artin 代数. 对  $(C, T)$  是  $n$ -F-倾斜的如果满足:

- (1)  $C$  是 F-自正交的;
- (2)  $T$  是 F-自正交的;
- (3)  $T \in (\text{add}_F^\wedge C)_n$ ;
- (4)  $C \in (\text{add}_F^\vee T)_n$ .

在这种情况下, 我们也称  $T$  是  $n$ -C-F-倾斜的或者  $C$  是  $n$ -T-F-倾斜的. 如果满足定义 2.2.2 中的条件(1)、(2)和(3), 称  $T$  是部分  $n$ -C-F-倾斜的. 对偶的, 如果满足定义 2.2.2 中的条件(1)、(2)和(4), 称  $C$  是  $n$ -T-F-倾斜的.

从现在开始, 我们假设  $C$  是 F-自正交的, 并且  $n \geq 1$  是一个固定的整数.

**注 2.2.3:** 注意函子  $\text{Gext}^1(-, -)$  (参考[23]) 是  $\text{Ext}^1(-, -)$  的特殊子函子. 所以设  $F = \text{Gext}^1(-, -)$ , 那么所有的 F-正合列都是 G-正合列, 所有的  $n$ -F-倾斜对都是 Gorenstein 倾斜对. 设  $F = \text{Ext}^1(-, -)$ , 那么所有的 F-正合列都是正合列, 所有的  $n$ -F-倾斜对都是倾斜对, 其中长度  $\leq n$ . 也就是说,  $n$ -F-倾斜对的概念是 Gorenstein 倾斜对和倾斜对的推广.

### 2.3 $n$ -F-倾斜对的相关性质

本节给出了  $n$ -F-倾斜对的一些重要性质和一个等价刻画. 下面的引理告诉我们如何比较  ${}_T\mathcal{X}^F$  和  ${}_C\mathcal{X}^F$  之间的关系.

**引理 2.3.1:** 设  $T$  是 F-自正交的.

(1) 如果  $C \in (\text{add}_F^\vee T)_n$ , 那么  $T^\perp \subseteq C^\perp$ .

(2) 如果  $T \in {}_c\mathcal{X}^F$ ,  $C \in (\text{add}_F^\vee T)_n$ , 那么  ${}_T\mathcal{X}^F \subseteq {}_c\mathcal{X}^F$ .

特别的, 如果  $(C, T)$  是  $n$ -F-倾斜对, 那么  $T^\perp \subseteq C^\perp$ ,  ${}_T\mathcal{X}^F \subseteq {}_c\mathcal{X}^F$ .

**证明:** (1) 如果  $C \in (\text{add}_F^\vee T)_n$ , 那么存在 F-正合列  $0 \rightarrow C \rightarrow T_0 \xrightarrow{f_0} T_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_n} T_n \rightarrow 0$ , 其中  $T_i \in \text{add}_A T$ . 如果对于任意的  $N \in T^\perp$ , 有  $\text{Ext}_F^{i \geq 1}(T, N) = 0$ , 那么应用函子  $\text{Hom}_A(-, N)$ , 可以通过维数转移得到  $\text{Ext}_F^i(C, N) \simeq \text{Ext}_F^{i+n}(T_n, N) = 0$ , 其中  $i \geq 1$ . 因此有  $T^\perp \subseteq C^\perp$ .

(2) 设  $M \in {}_T\mathcal{X}^F$ , 则存在 F-正合列  $\cdots \xrightarrow{f_2} T_1 \xrightarrow{f_1} T_0 \xrightarrow{f_0} M \rightarrow 0$ , 其中  $T_i \in \text{add}_A T$ ,  $\text{Ker } f_i \in {}_T\mathcal{X}^F$ . 因为  $T \in {}_c\mathcal{X}^F$ , 通过应用引理 2.1.2 到 F-正合列  $0 \rightarrow \text{Ker } f_0 \rightarrow T_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ , 则存在 F-正合列

$$0 \rightarrow H_0 \rightarrow M_0 \rightarrow \text{Ker } f_0 \rightarrow 0, \quad (2.1)$$

其中  $H_0 \in {}_c\mathcal{X}^F$ ,  $M_0$  满足下面的 F-正合列

$$0 \rightarrow M_0 \rightarrow C_0 \rightarrow M \rightarrow 0, \quad (2.2)$$

其中  $C_0 \in \text{add}_A C$ . 因为通过 (1)  $H_0 \in {}_c\mathcal{X}^F \subseteq C^\perp$ ,  $\text{Ker } f_0 \in C^\perp$  以及  $C^\perp$  在 F-扩张下是闭的, 则有  $M_0 \in C^\perp$ . 现在可以构造以下交换图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \text{Ker } f_1 & = & \text{Ker } f_1 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \rightarrow & H_0 & \rightarrow & Y & \rightarrow & T_1 \rightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & H_0 & \rightarrow & M_0 & \rightarrow & \text{Ker } f_0 \rightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

图 2-10: 交换图 6

因为  $H_0, T_1 \in {}_c\mathcal{X}^F$ ,  ${}_c\mathcal{X}^F$  在 F-扩张下是封闭的, 所以从中间一行得到  $Y \in {}_c\mathcal{X}^F$ .

因此存在 F-正合列  $0 \rightarrow H_1 \rightarrow C_1 \rightarrow Y \rightarrow 0$ ，其中  $H_1 \in {}_C\mathcal{X}^F$ ， $C_1 \in \text{add}_A C$ 。

因此，我们有以下交换图：

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & H_1 & = & H_1 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \rightarrow & M_1 & \rightarrow & C_1 & \rightarrow & M_0 \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \rightarrow & \text{Ker } f_1 & \rightarrow & Y & \rightarrow & M_0 \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 
 \end{array}$$

图 2-11：交换图 7

通过引理 1.2.2，中间一行也是 F-正合的，因此，存在 F-正合列

$$0 \rightarrow M_1 \rightarrow C_1 \rightarrow M_0 \rightarrow 0, \quad (2.3)$$

其中  $C_1 \in \text{add}_A C$ 。所以存在 F-正合列

$$0 \rightarrow H_1 \rightarrow M_1 \rightarrow \text{Ker } f_1 \rightarrow 0, \quad (2.4)$$

其中  $H_0 \in {}_C\mathcal{X}^F$ 。

重复过程(2.1)到(2.4)，得到一个 F-正合列  $\cdots \xrightarrow{g_2} C_1 \xrightarrow{g_1} C_0 \xrightarrow{g_0} M \rightarrow 0$ ，其中  $C_i \in \text{add}_A C$ ， $\text{Ker } g_i = M_i \in C^\perp$ 。  $\square$

**命题 2.3.2:** 假设  $(C, T)$  是  $n$ -F-倾斜对。对于 A-模  $M$ ，以下是等价的：

- (1)  $M \in {}_T\mathcal{X}^F$ ;
- (2)  $M \in T^\perp \bigcap {}_C\mathcal{X}^F$ ;
- (3)  $M \in \text{Pres}_{C\mathcal{X}^F}^n(T)$ 。

**证明:** (1)  $\Rightarrow$  (2) 因为  $(C, T)$  是  $n$ -F-倾斜对，根据引理 2.2.1，得到  $M \in {}_T\mathcal{X}^F \subseteq {}_C\mathcal{X}^F$ 。

所以当  $M \in {}_T\mathcal{X}^F \subseteq T^\perp$  时，有  $M \in T^\perp \bigcap {}_C\mathcal{X}^F$ 。

(2)  $\Rightarrow$  (3) 首先证明如果  $M \in T^\perp \bigcap {}_C\mathcal{X}^F$ ，那么  $M \in \text{Gen}_F(T)$ 。事实上，因为

$M \in {}_C\mathcal{X}^F$ ，所以存在 F-正合列  $0 \rightarrow M_1 \rightarrow C_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ ，其中  $M_1 \in {}_C\mathcal{X}^F$ ， $C_0 \in \text{add}_A C$ 。又因为  $(C, T)$  是  $n$ -F-倾斜对，存在 F-正合列  $0 \rightarrow C_0 \rightarrow T' \rightarrow X \rightarrow 0$ ，其中  $T' \in \text{add}_A T$ ， $X \in \text{add}_F^\vee T$ 。接下来可以考虑下面的推出图：

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \rightarrow & M_1 & \rightarrow & C_0 & \rightarrow & M \rightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & M_1 & \rightarrow & T' & \rightarrow & Y \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & X & = & X & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 
 \end{array}$$

图 2-12: 推出图 4

因为  $M \in T^\perp$ ， $X \in \text{add}_F^\vee T$ ，通过引理 2.1.1 我们得到  $\text{Ext}_F^{i \geq 1}(X, M) = 0$ ，接着从中间一行可以看出  $Y \simeq M \oplus X$ 。因为  $Y \in \text{Gen}_F(T)$ ，可以得到  $M \in \text{Gen}_F(T)$ 。

其次，取  $M \in T^\perp \cap {}_C\mathcal{X}^F$ ，存在 F-正合列  $0 \rightarrow M' \rightarrow T_M \rightarrow M \rightarrow 0$ ，其中  $M' \in T^\perp$ ， $T_M \in \text{add}_A T$ ，因为  $M \in \text{Gen}_F(T)$ 。又因为  $T^\perp \subseteq C^\perp$ ， $\text{add}_A T \subseteq {}_C\mathcal{X}^F$ ，通过引理 2.1.1，得到  $M' \in T^\perp \cap {}_C\mathcal{X}^F$ 。最后通过对  $M'$  重复这个过程，可以得到， $M \in \text{Pres}_{{}_C\mathcal{X}^F}^n(T)$ 。

(3)  $\Rightarrow$  (2) 对于任意的  $M \in \text{Pres}_{{}_C\mathcal{X}^F}^n(T)$ ，存在 F-正合列

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{f_n} T_n \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} T_1 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

其中  $X \in {}_C\mathcal{X}^F$ ， $T_i \in \text{add}_A T$ 。通过引理 2.1.1，很明显可以看出  $M \in {}_C\mathcal{X}^F$ 。所以只需要去证明  $M \in T^\perp$ 。因为  $T$  是 F-自正交的，通过应用函子  $\text{Hom}_A(T, -)$ ，通过维数转移得到  $\text{Ext}_F^i(T, M) \simeq \text{Ext}_F^{i+n}(T, X)$ ，其中  $i \geq 1$ 。因为  $T$  是  $n$ -C-F-倾斜的，则存在 F-正合列  $0 \rightarrow C_n \rightarrow \cdots \rightarrow C_0 \rightarrow T \rightarrow 0$ 。然后应用函子  $\text{Hom}_A(-, X)$ ，通过维数转移得到  $\text{Ext}_F^{i+n}(T, X) \simeq \text{Ext}_F^i(C_n, X)$ ，其中  $i \geq 1$ 。根据以上结果得到

$\text{Ext}_F^{i \geq 1}(T, M) = 0$ ，也就是说， $M \in T^\perp$ 。

(2)  $\Rightarrow$  (1) 在(2)到(3)的证明过程中，对于任意的  $M \in T^\perp \bigcap {}_c\mathcal{X}^F$ ，我们注意到存在一个长 F-正合列  $\cdots \xrightarrow{f_1} T_1 \xrightarrow{f_0} T_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ ，其中  $T_i \in \text{add}_A T$ ， $\text{Im } f_i \in T^\perp$ 。根据定义可得  $M \in {}_T\mathcal{X}^F$ 。  $\square$

下面的命题介绍了一个特殊的子范畴  $\text{Pres}_{c\mathcal{X}^F}^n(T)$  的一些重要性质。首先，很容易得到以下结果。

**命题 2.3.3:** 如果  $\text{Pres}_{c\mathcal{X}^F}^m(T) = T^\perp \bigcap {}_c\mathcal{X}^F$ ，其中  $m \geq 1$ ，那么  $T \in T^\perp \bigcap {}_c\mathcal{X}^F$ 。

**命题 2.3.4:** 如果  $\text{Pres}_{c\mathcal{X}^F}^n(T) = T^\perp \bigcap {}_c\mathcal{X}^F$ ，那么  $\text{Pres}_{c\mathcal{X}^F}^n(T) = \text{Pres}_{c\mathcal{X}^F}^{n+1}(T)$ 。

**证明：** 只需证明，对于任意得  $M \in \text{Pres}_{c\mathcal{X}^F}^n(T)$ ，存在 F-正合列  $0 \rightarrow L \rightarrow T_M \rightarrow M \rightarrow 0$ ，其中  $T_m \in \text{add}_A T$ ， $L \in \text{Pres}_{c\mathcal{X}^F}^n(T)$ 。事实上，如果  $M \in \text{Pres}_{c\mathcal{X}^F}^n(T)$ ，则存在 F-正合列  $0 \rightarrow N \rightarrow T_1 \rightarrow M \rightarrow 0$ ，其中  $N \in \text{Pres}_{c\mathcal{X}^F}^{n-1}(T)$ ， $T_1 \in \text{add}_A T$ 。显然可以看出  $M, T_1 \in {}_c\mathcal{X}^F$ ，通过引理 2.1.1，可以得到  $N \in {}_c\mathcal{X}^F$ 。又因为  $M \in {}_c\mathcal{X}^F$ ，可以得到另外一个 F-正合列  $0 \rightarrow L \rightarrow T_M \rightarrow M \rightarrow 0$ ，其中  $L \in {}_c\mathcal{X}^F$ ， $T_M \in \text{add}_A T$ 。因此通过命题 2.2.2 得  $T$  是 F-自正交的， $M \in T^\perp$ 。因为  $T^\perp$  在 F-满射核下是闭的，可得  $L \in T^\perp$ 。现在构造下面的拉回图：

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & N & = & N \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & L & \rightarrow & Y & \rightarrow & T_1 \rightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & L & \rightarrow & T_M & \rightarrow & M \rightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

图 2-13: 拉回图 2

因为  $T_M, N \in {}_c\mathcal{X}^F$ ，以及  ${}_c\mathcal{X}^F$  在 F-扩张下封闭，则有  $Y \in {}_c\mathcal{X}^F$ 。除此之外，

因为  $L \in T^\perp$ ，根据中间一行我们有  $Y \simeq L \oplus T_1$ 。又因为  ${}_c\mathcal{X}^F$  也在直和项下封闭，所以有  $L \in {}_c\mathcal{X}^F$ 。最后，得到  $L \in T^\perp \cap {}_c\mathcal{X}^F = \text{Pres}_{c\mathcal{X}^F}^n(T)$ 。□

**命题 2.3.5:** 如果  $\text{Pres}_{c\mathcal{X}^F}^n(T) = T^\perp \cap {}_c\mathcal{X}^F$ ，那么  $\text{Pres}_{c\mathcal{X}^F}^n(T) = \text{Pres}_{c\mathcal{X}^F}^n(\text{Pres}_{c\mathcal{X}^F}^n(T))$ 。

**证明:** 对于任意的  $M \in \text{Pres}_{c\mathcal{X}^F}^n(\text{Pres}_{c\mathcal{X}^F}^n(T))$ ，存在 F-正合列

$$0 \rightarrow X \rightarrow P_n \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

其中  $P_i \in \text{Pres}_{c\mathcal{X}^F}^n(T)$ ， $X \in {}_c\mathcal{X}^F$ 。显然的， $\text{Pres}_{c\mathcal{X}^F}^n(T) = T^\perp \cap {}_c\mathcal{X}^F$  在 F-扩张、有限直和项下是封闭的。此外，通过命题 2.2.2 得  $T$  是 F-自正交的。因此范畴  $\text{Pres}_{c\mathcal{X}^F}^n(T)$  满足引理 2.1.2 的假设，然后就可以得到一个 F-正合列  $0 \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow X \rightarrow 0$ ，其中  $U \in \text{Pres}_{c\mathcal{X}^F}^n(T)$ ，对于  $V$ ，存在一个 F-正合列  $0 \rightarrow V \rightarrow T'_n \rightarrow \cdots \rightarrow T'_1 \rightarrow M \rightarrow 0$ ，其中  $T'_i \in \text{add}_A T$ 。因为  $U, X \in {}_c\mathcal{X}^F$ ， ${}_c\mathcal{X}^F$  在 F-扩张下封闭，可得  $V \in {}_c\mathcal{X}^F$ 。因此  $M \in \text{Pres}_{c\mathcal{X}^F}^n(T)$ 。□

下面两个结果的目的是告诉我们何时满足  $n$ -F-倾斜对的最后两个条件。

**命题 2.3.6:** 假设  $\text{Pres}_{c\mathcal{X}^F}^n(T) = T^\perp \cap {}_c\mathcal{X}^F$ ，如果  $C \in \text{Copres}^n(\text{Pres}_{c\mathcal{X}^F}^n(T))$ ，那么  $C \in (\text{add}_F^\vee T)_n$ 。

**证明:** 如果  $C \in \text{Copres}^n(\text{Pres}_{c\mathcal{X}^F}^n(T))$ ，则存在 F-正合列

$$0 \rightarrow C \rightarrow P_n \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow 0,$$

其中  $P_i \in \text{Pres}_{c\mathcal{X}^F}^n(T)$ ， $1 \leq i \leq n$ 。通过假设和命题 2.2.2 得到  $P_0 \in \text{Pres}_{c\mathcal{X}^F}^n(T)$ 。对  $\text{Pres}_{c\mathcal{X}^F}^n(T)$  应用引理 2.1.2，可以得到 F-正合列  $0 \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow C \rightarrow 0$ ，其中  $U \in \text{Pres}_{c\mathcal{X}^F}^n(T)$ ， $V \in (\text{add}_F^\vee T)_n$ 。注意通过假设有  $U \in C^\perp$ 。因此得到  $V \simeq C \oplus U$ 。最后通过引理 2.1.1 我们得到  $C \in (\text{add}_F^\vee T)_n$ 。□

**命题 2.3.7:** 假设  $\text{Pres}_{c\mathcal{X}^F}^n(T) = T^\perp \cap {}_c\mathcal{X}^F$ ，如果  $C \in \text{Copres}^n(\text{Pres}_{c\mathcal{X}^F}^n(T))$ ，那么  $T \in (\text{add}_F^\wedge C)_n$ 。

**证明:** 首先，去证明  $\text{Ext}_F^{n+1}(T, M) = 0$ ，其中  $M \in {}_c\mathcal{X}^F$ 。

对于任意的  $M \in {}_C\mathcal{X}^F$  , 存在 F-正合列  $0 \rightarrow Z \rightarrow C_1 \rightarrow \cdots \rightarrow C_n \rightarrow M \rightarrow 0$  , 其中  $Z \in {}_C\mathcal{X}^F$  ,  $C_i \in \text{add}_A C$  . 然后通过命题 2.2.5 可以得到  $C_i \in (\text{add}_F^\vee T)_n$  . 接着通过引理 2.1.3 我们得到 F-正合列  $0 \rightarrow M \rightarrow V \rightarrow U \rightarrow 0$  , 其中  $U \in (\text{add}_F^\vee T)_{n-1}$  , 对于  $V$  , 存在 F-正合列  $0 \rightarrow Z \rightarrow T'_1 \rightarrow \cdots \rightarrow T'_n \rightarrow V \rightarrow 0$  , 其中  $T'_i \in \text{add}_A T$  . 很明显得到  $V \in \text{Pres}_{C\mathcal{X}^F}^n(T) = T^\perp \bigcap {}_C\mathcal{X}^F$  . 所以通过维数转移和引理 2.1.1 可以得到  $\text{Ext}_F^{n+1}(T, M) \simeq \text{Ext}_F^n(T, U) = 0$  .

通过命题 2.2.2 有  $T \in {}_C\mathcal{X}^F$  , 则存在 F-正合列

$$0 \rightarrow X_{n+1} \rightarrow C_n \xrightarrow{f_n} C_{n-1} \rightarrow \cdots \xrightarrow{f_1} C_0 \rightarrow T \rightarrow 0 ,$$

其中  $X_{n+1} \in {}_C\mathcal{X}^F$  ,  $C_i \in \text{add}_A C$  . 通过维数转移和上述结论得到

$$\text{Ext}_F^1(\text{Im} f_n, X_{n+1}) \simeq \text{Ext}_F^{n+1}(T, X_{n+1}) = 0 . \text{ 因此有 } \text{Im} f_n \in \text{add}_F C , \text{ 即 } T \in (\text{add}_F^\wedge C)_n . \square$$

下面的结果是  $n$ -F-倾斜对的等价刻画, 这是我们在本文中的主要结果.

**定理 2.3.8:** 假设  $C$  是 F-自正交的,  $C \in \text{Copres}^n(\text{Pres}_{C\mathcal{X}^F}^n(T))$  , 那么  $(C, T)$  是  $n$ -F-倾斜对当且仅当  $\text{Pres}_{C\mathcal{X}^F}^n(T) = T^\perp \bigcap {}_C\mathcal{X}^F$  .

**证明:** 根据命题 2.2.1, 2.2.2, 2.2.5, 2.2.6, 结论显然成立. □

### 第 3 章 $n$ -F-倾斜对的 Auslander-Reiten 对应

本章节主要研究  $n$ -F-倾斜对与某类子范畴之间的 Auslander-Reiten 对应. 具体安排如下. 第一节主要讨论了 F-自正交模的相关性质. 在第二节中, 我们通过一系列重要的命题给出了  $n$ -F-倾斜对的 Auslander-Reiten 对应.

#### 3.1 F-自正交模的相关性质

**命题 3.1.1:** 假设  $C$  是 F-自正交的. 则以下是等价的.

$$(1) T \in (\text{add}_{\text{F}}^{\vee} C). \text{ (或者 } T \in {}_c\mathcal{X}^{\text{F}}).$$

$$(2) \text{ 这里存在一个 F-正合列 } 0 \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow T \rightarrow 0, \text{ 其中 } U \in \text{add}_{\text{F}}^{\wedge} C \text{ (或者 } U \in {}_c\mathcal{X}^{\text{F}}), \\ V \in \text{add}_{\text{F}}^{\vee} C.$$

$$(3) \text{ 这里存在一个 F-正合列 } 0 \rightarrow T \rightarrow U' \rightarrow V' \rightarrow 0, \text{ 其中 } U' \in \text{add}_{\text{F}}^{\wedge} C \text{ (或者 } \\ U' \in {}_c\mathcal{X}^{\text{F}}), V' \in \text{add}_{\text{F}}^{\vee} C.$$

**证明:** (1)  $\Rightarrow$  (2) 如果  $T \in (\text{add}_{\text{F}}^{\vee} C)$ , 我们有 F-正合列  $0 \rightarrow T \rightarrow C_0 \rightarrow \cdots \rightarrow C_n \rightarrow 0$ , 其中  $C_i \in \text{add}_{\text{F}}^{\wedge} C$ . 通过引理 2.1.2(2), 则存在一个 F-正合列  $0 \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow T \rightarrow 0$ , 其中  $U \in \text{add}_{\text{F}}^{\wedge} C$ ,  $V$  满足 F-正合列  $0 \rightarrow V \rightarrow C_m \rightarrow \cdots \rightarrow C_0 \rightarrow 0$ , 其中  $C_i \in \text{add}_{\text{F}} C$ , 也就是说,  $V \in \text{add}_{\text{F}}^{\vee} C$ .

(2)  $\Rightarrow$  (3) 假设存在一个 F-正合列  $0 \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow T \rightarrow 0$ , 其中  $U \in \text{add}_{\text{F}}^{\wedge} C$ ,  $V \in \text{add}_{\text{F}}^{\vee} C$ . 因为  $V \in \text{add}_{\text{F}}^{\vee} C$ , 所以存在一个 F-正合列  $0 \rightarrow V \rightarrow C_0 \rightarrow V' \rightarrow 0$ , 其中  $C_0 \in \text{add}_{\text{F}} C$ ,  $V' \in \text{add}_{\text{F}}^{\vee} C$ . 那么我们有下面的推出图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \rightarrow & U & \rightarrow & V & \rightarrow & T \rightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & U & \rightarrow & C_0 & \rightarrow & U' \rightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & V' & = & V' \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

图 3-1: 推出图 5

因为  $U \in \text{add}_F^{\wedge} C$ ,  $C_0 \in \text{add}_F C$ , 可得  $U' \in \text{add}_F^{\wedge} C$ . 右边一列就是我们期望得到的 F-正合列.

(3)  $\Rightarrow$  (1) 假设存在一个 F-正合列  $0 \rightarrow T \rightarrow U' \rightarrow V' \rightarrow 0$ , 其中  $U' \in \text{add}_F^{\wedge} C$ ,  $V' \in \text{add}_F^{\vee} C$ . 因为  $V' \in \text{add}_F^{\vee} C$ , 存在一个 F-正合列  $0 \rightarrow V' \rightarrow C_0 \rightarrow \cdots \rightarrow C_n \rightarrow 0$ , 其中  $C_i \in \text{add}_F C$ . 可得存在一个 F-正合列  $0 \rightarrow T \rightarrow U' \rightarrow C_0 \rightarrow \cdots \rightarrow C_n \rightarrow 0$ , 其中  $U' \in \text{add}_F^{\wedge} C$ ,  $C_i \in \text{add}_F C \subseteq \text{add}_F^{\wedge} C$ , 因此得到  $T \in (\text{add}_F^{\vee} C)$ .  $\square$

下面是命题 3.1.1 的一个简单推论.

**推论 3.1.2:** 假设  $T$  是 F-自正交的.

$$(1) {}^{\perp}({}_T \mathcal{X}^F) \cap_T {}^{\vee} \mathcal{X}^F = \text{add}_F^{\vee} T.$$

$$(2) ({}^{\perp}({}_T \mathcal{X}^F))^{\perp} \cap_T {}^{\vee} \mathcal{X}^F = {}_T \mathcal{X}^F.$$

**证明:** (1) 如果  $M \in \text{add}_F^{\vee} T$ , 那么存在一个 F-正合列  $0 \rightarrow M \rightarrow T_0 \rightarrow \cdots \rightarrow T_n \rightarrow 0$ , 其中  $T_i \in \text{add}_F T \subseteq {}_T \mathcal{X}^F$ , 因此我们得到  $M \in {}_T \mathcal{X}^F$ . 注意对于任意的  $N \in {}_T \mathcal{X}^F$ ,  $N \in {}_T \mathcal{X}^F \subseteq T^{\perp}$ . 通过引理 2.1.1 (2), 有  $M \in {}^{\perp}({}_T \mathcal{X}^F) \cap_T {}^{\vee} \mathcal{X}^F$ , 所以有  $M \in {}^{\perp}({}_T \mathcal{X}^F)$ .

另一方面, 根据命题 3.1.1(2), 如果  $M \in {}_T \mathcal{X}^F$ , 那么存在一个 F-正合列  $0 \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow M \rightarrow 0$ , 其中  $U \in {}_T \mathcal{X}^F$ ,  $V \in \text{add}_F^{\vee} T$ . 进一步说, 如果  $M \in {}^{\perp}({}_T \mathcal{X}^F)$ , 我们得到对于任意的  $U \in {}_T \mathcal{X}^F$ , 有  $\text{Ext}_F^1(M, U) = 0$ , 那么  $V \simeq U \oplus M$ . 因此, 通过

引理 2.1.1 我们得到  $M \in \text{add}_F^\vee T$ .

(2) 很显然有  ${}_T\mathcal{X}^F \subseteq ({}^\perp({}_T\mathcal{X}^F))^\perp \cap {}_T\mathcal{X}^F$ . 另一方面, 假设  $M \in {}_T\mathcal{X}^F$ , 那么存在一个 F-正合列  $0 \rightarrow M \rightarrow U' \rightarrow V' \rightarrow 0$ , 其中  $U' \in {}_T\mathcal{X}^F$ ,  $V' \in \text{add}_F^\vee T$ . 注意  ${}_T\mathcal{X}^F \subseteq T^\perp$ , 通过引理 2.1.1 (2) 有  $\text{add}_F^\vee T \subseteq {}^\perp(T^\perp) \subseteq {}^\perp({}_T\mathcal{X}^F)$ , 如果  $M \in ({}^\perp({}_T\mathcal{X}^F))^\perp$ , 有  $\text{Ext}_F^1(V', M) = 0$ . 通过引理 2.1.1(2), 对于任意的  $V' \in {}^\perp({}_T\mathcal{X}^F)$ , 我们有  $\text{Ext}_F^1(V', M) = 0$ , 因此我们得到 F-正合列  $0 \rightarrow M \rightarrow U' \rightarrow V' \rightarrow 0$  是可裂的, 通过引理 2.1.1 (1)'  $M \in {}_T\mathcal{X}^F$ .  $\square$

**命题 3.1.3:** 假设  $C$  是 F-自正交的. 那么  ${}_C\mathcal{X}^F$  在 F-扩张, 满同态核, 单同态余核下封闭.

**证明:** 首先, 假设序列  $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0 (*)$  是 F-正合的.

如果  $L, N \in {}_C\mathcal{X}^F$ , 我们需要去证明  $M \in {}_C\mathcal{X}^F$ . 因为  $L \in {}_C\mathcal{X}^F$ , 通过命题 3.1.1 可得存在一个 F-正合列  $0 \rightarrow L \rightarrow X_L \rightarrow L' \rightarrow 0$ , 其中  $L' \in \text{add}_F^\vee C$ ,  $X_L \in {}_C\mathcal{X}^F$ , 那么我们有下面的推出图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \rightarrow & L & \rightarrow & M & \rightarrow & N \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \rightarrow & X_L & \rightarrow & Y & \rightarrow & N \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & L' & = & L' & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 
 \end{array}$$

图 3-2: 推出图 6

因此, 我们有两个 F-正合列  $0 \rightarrow X_L \rightarrow Y \rightarrow N \rightarrow 0$ ,  $0 \rightarrow M \rightarrow Y \rightarrow L' \rightarrow 0$ .

因为  $N \in {}_C\mathcal{X}^F$ , 通过命题 3.1.1 可得存在一个 F-正合列  $0 \rightarrow X_N \rightarrow N' \rightarrow N \rightarrow 0$ ,

其中  $N' \in {}_C\mathcal{X}^F$ ,  $X_N \in {}_C\mathcal{X}^F$ . 那么我们有下面的拉回图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & X_N & = & X_N & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \rightarrow & X_L & \rightarrow & Y' & \rightarrow & N' \rightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & X_L & \rightarrow & Y & \rightarrow & N \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 
 \end{array}$$

图 3-3: 拉回图 3

因此，我们得到一个 F-正合列  $0 \rightarrow X_N \rightarrow Y' \rightarrow Y \rightarrow 0$ 。因为  $N' \in {}_C^{\vee}\mathcal{X}^F$ ， $X_L \in {}_C\mathcal{X}^F \subseteq C^{\perp}$ ，所以通过引理 2.1.1 我们可以得到  $\text{Ext}_F^1(N', X_L) = 0$ ，即  $Y' \simeq X_L \oplus N' \in {}_C\mathcal{X}^F$ 。因此存在一个 F-正合列  $0 \rightarrow Y' \rightarrow X_{Y'} \rightarrow Z \rightarrow 0$ ，其中  $X_{Y'} \in {}_C\mathcal{X}^F$ ， $Z \in \text{add}_F^{\vee} C$ 。所以我们可以考虑下面的交换图：

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \rightarrow & X_N & \rightarrow & Y' & \rightarrow & Y \rightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & X_N & \rightarrow & X_{Y'} & \rightarrow & X_Z \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & Z & = & Z & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 
 \end{array}$$

图 3-4: 交换图 8

我们得到一个 F-正合列  $0 \rightarrow Y \rightarrow X_N \rightarrow Z \rightarrow 0$ 。同时我们也有一个 F-正合列  $0 \rightarrow M \rightarrow Y \rightarrow L' \rightarrow 0$ 。因此，我们可以构造下图：

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \rightarrow & M & \rightarrow & Y & \rightarrow & L' \rightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & M & \rightarrow & X_Z & \rightarrow & M' \rightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & Z & = & Z \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

图 3-5: 交换图 9

很容易看出  $X_Z \in {}_c\mathcal{X}^F$ ,  $M \in \text{add}_F^\vee C$ . 因此我们得到了  $M \in {}_c\mathcal{X}^F$ .

其次, 因为序列(\*)是 F-正合的, 如果  $L, M \in {}_c\mathcal{X}^F$ , 那么通过命题 3.1.1 存在 F-正合列  $0 \rightarrow M \rightarrow X_M \rightarrow M' \rightarrow 0$ , 其中  $M' \in \text{add}_F^\vee C$ ,  $X_M \in {}_c\mathcal{X}^F$ . 那么我们有下面的推出图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \rightarrow & L & \rightarrow & M & \rightarrow & N \rightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & L & \rightarrow & X_M & \rightarrow & K \rightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & M' & = & M' \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

图 3-6: 推出图 7

因为  $M \in {}_c\mathcal{X}^F$ ,  $X_M \in {}_c\mathcal{X}^F$ , 所以我们有  $M' \in {}_c\mathcal{X}^F$ . 因为  $L \in {}_c\mathcal{X}^F$ ,  $X_M \in {}_c\mathcal{X}^F$ , 所以通过中间一行我们可以得到  $K \in {}_c\mathcal{X}^F$ . 通过右边一列我们得到  $N \in {}_c\mathcal{X}^F$ .

最后, 如果在序列(\*)中  $M, N \in {}_c\mathcal{X}^F$ , 那么通过命题 3.1.1 可得存在 F-正合列  $0 \rightarrow M \rightarrow X_M \rightarrow M' \rightarrow 0$ , 其中  $M' \in \text{add}_F^\vee C$ ,  $X_M \in {}_c\mathcal{X}^F$ . 那么我们有下面的推出图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & 0 & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \rightarrow & L & \rightarrow & M & \rightarrow & N \rightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & L & \rightarrow & X_M & \rightarrow & K \rightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & M' & = & M' \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

图 3-7: 推出图 8

因为  $M \in {}_c\check{\mathcal{X}}^F$ ,  $X_M \in {}_c\mathcal{X}^F \subseteq {}_c\check{\mathcal{X}}^F$ , 所以通过中间一系列我们有  $M' \in {}_c\check{\mathcal{X}}^F$ . 因为  ${}_c\check{\mathcal{X}}^F$  在  $F$ -扩张下封闭, 通过右列我们可得  $K \in {}_c\check{\mathcal{X}}^F$ . 因此有  $L \in {}_c\check{\mathcal{X}}^F$ .  $\square$

以下结果对本文很重要. 特别地, 我们将把它应用于  $\mathcal{C} = {}_c\mathcal{X}^F$  或  $\mathcal{C} = \hat{\text{add}}_F C$  的情况, 其中  $C$  是  $F$ -自正交模.

**引理 3.1.4:** 设  $\mathcal{C}$  是一个范畴, 在  $F$ -扩张, 单同态余核下封闭. 假设  $\check{\mathcal{C}}$  在  $F$ -扩张, 单同态余核, 满同态核下封闭. 令  $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$  在  $\check{\mathcal{C}}$  中是  $F$ -正合的. 表示  $\text{codim}_{_F\mathcal{C}}(L) = l$ ,  $\text{codim}_{_F\mathcal{C}}(M) = m$ ,  $\text{codim}_{_F\mathcal{C}}(N) = n$ . 则:

- (1) 如果  $l = 0$ , 那么  $m = n$ .
- (2) 如果  $m = 0, l > 0$ , 那么  $l = n + 1$ .
- (3) 如果  $n = 0, m > 0$ , 那么  $l = m$ .
- (4) 如果  $l \leq \min\{m, n\}$ , 那么  $m = n$ .
- (5) 如果  $n < l$ , 那么  $l = n + 1$ .
- (6) 如果  $n < m$ , 那么  $l = m$ .
- (7)  $m \leq \max\{l, n\}$ .
- (8)  $l \leq \max\{m, n\} + 1$ .
- (9)  $n \leq \max\{l, m\}$ .

### 3.2 $n$ - $F$ -倾斜对的 Auslander-Reiten 对应

在这一节中, 我们将给出  $n$ - $F$ -倾斜对的 Auslander-Reiten 对应. 首先回顾

一下  $n$ -倾斜对的概念. 设  $A$  是一个 Artin 代数.  $(C, T)$  对被称为  $n$ -倾斜的, 如果满足: (1)  $C$  是自正交的; (2)  $T$  是自正交的; (3)  $T \in (\text{add}_A^\wedge C)_n$ ; (4)  $C \in (\text{add}_A^\vee T)_n$ . 接下来回顾一下  $n$ -F-倾斜对的概念.  $(C, T)$  对是  $n$ -F-倾斜的如果满足: (1)  $C$  是 F-自正交的; (2)  $T$  是 F-自正交的; (3)  $T \in (\text{add}_F^\wedge C)_n$ ; (4)  $C \in (\text{add}_F^\vee T)_n$ . 在这种情况下, 也称  $T$  是  $n$ -C-F-倾斜的或者  $C$  是  $n$ -T-F-倾斜的.

下面的引理 3.2.1 和命题 3.2.2 将证明当  $T$  是  $n$ -C-F-倾斜时子范畴  ${}_T\mathcal{X}^F$  的特殊性质. 特别地, 我们将建立模  $T$  和子范畴  ${}_T\mathcal{X}^F$  之间的双射, 如定理 3.2.11 所详述. 设  $\omega \in A$ -模, 我们表示

$$\text{Gen}_F(\omega) = \{X \in A\text{-模} \mid \text{存在 } F\text{-满射: } \omega^n \rightarrow X \rightarrow 0, \text{ 对于某个整数 } n\}.$$

**引理 3.2.1:** 设  $C$  是 F-自正交的,  $\omega \in {}_C\mathcal{X}^F$ . 如果  $\omega$  也是 F-自正交的,  $C \in \omega^\vee$ , 那么有  $\omega^\perp \subseteq C^\perp$ ,  $\omega^\perp \cap {}_C\mathcal{X}^F = {}_\omega\mathcal{X}^F$ . 特别地, 如果  $T$  是  $n$ -C-F-倾斜的, 那么有  $T^\perp \subseteq C^\perp$ ,  $T^\perp \cap {}_C\mathcal{X}^F = {}_T\mathcal{X}^F$ .

**证明:** 首先去证明  $\omega^\perp \subseteq C^\perp$ . 因为  $C \in \omega^\vee$ , 则存在 F-正合列  $0 \rightarrow C \xrightarrow{f_0} \omega_0 \xrightarrow{\cdots} \omega_{n-1} \xrightarrow{f_n} \omega_n \rightarrow 0$ , 其中  $\omega_i \in \omega$ . 通过对 F-正合列  $0 \rightarrow \text{Ker } f_n \rightarrow \omega_{n-1} \rightarrow \omega_n \rightarrow 0$  应用函子  $\text{Hom}_A(-, N)$ . 我们观察到对于任意的  $N \in \omega^\perp$ , 可以得到  $\text{Ext}_F^{i \geq 1}(\omega_{n-1}, N) = 0$ , 那么通过维数转移得到  $\text{Ext}_F^{i \geq n}(C, N) \simeq \text{Ext}_F^{i \geq 1}(\text{Ker } f_n, N) = 0$ . 因此得到了  $\omega^\perp \subseteq C^\perp$ .

其次去证明  $\omega^\perp \cap {}_C\mathcal{X}^F \subseteq {}_\omega\mathcal{X}^F$ . 假设  $M \in \omega^\perp \cap {}_C\mathcal{X}^F$ , 先证明  $M \in \text{Gen}_F(\omega)$ . 因为  $M \in {}_C\mathcal{X}^F$ , 所以存在 F-正合列  $0 \rightarrow M_1 \rightarrow C_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ , 其中  $M_1 \in {}_C\mathcal{X}^F$ ,  $C_0 \in \text{add}_A C$ . 又因为  $C \in \omega^\vee$ , 则存在 F-正合列  $0 \rightarrow C_0 \rightarrow T' \rightarrow X \rightarrow 0$ , 其中  $T' \in \omega$ ,  $X \in \omega^\vee$ . 接下来去考虑下面的推出图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & 0 & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \rightarrow & M_1 & \rightarrow & C_0 & \rightarrow & M \rightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & M_1 & \rightarrow & T' & \rightarrow & Y \rightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & X & = & X \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

图 3-8: 推出图 9

通过引理 2.1.1(2), 很容易得到  $\text{Ext}_F^{i \geq 1}(X, M) = 0$ , 即  $M \oplus X \simeq Y \in \text{Gen}_F(\omega)$ . 因此有  $M \in \text{Gen}_F(\omega)$ . 那么存在 F-正合列  $0 \rightarrow M' \rightarrow T_M \rightarrow M \rightarrow 0$ , 其中  $M' \in \omega^\perp$ ,  $T_M \in \omega$ . 因为  $\omega \subseteq {}_c\mathcal{X}^F$ , 通过引理 2.1.1(1)可以得到  $M' \in \omega^\perp \cap {}_c\mathcal{X}^F$ . 因此, 对  $M$  重复此过程, 依此类推, 最终可以得到  $M \in {}_\omega\mathcal{X}^F$ .

最后去证明  ${}_\omega\mathcal{X}^F \subseteq \omega^\perp \cap {}_c\mathcal{X}^F$ . 因为  ${}_\omega\mathcal{X}^F \subseteq \omega^\perp$ , 所以只需要去证明  ${}_\omega\mathcal{X}^F \subseteq {}_c\mathcal{X}^F$ . 对于任意的  $M \in {}_\omega\mathcal{X}^F$ , 存在 F-正合列  $\cdots \xrightarrow{f_2} T_1 \xrightarrow{f_1} T_0 \xrightarrow{f_0} M \rightarrow 0$ , 其中  $T_i \in \omega$ ,  $\text{Ker } f_i \in {}_\omega\mathcal{X}^F$ . 然后通过注 2.1.4, 可以得到两个 F-正合列  $0 \rightarrow H_0 \rightarrow M_0 \rightarrow \text{Ker } f_0 \rightarrow 0$  和  $0 \rightarrow M_0 \rightarrow C_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ , 其中  $H_0 \in {}_c\mathcal{X}^F$ ,  $C_0 \in \text{add}_A C$ . 又因为  $\text{Ker } f_0 \in {}_\omega\mathcal{X}^F \subseteq \omega^\perp \subseteq C^\perp$ , 可以得到  $M_0 \in C^\perp$ . 因此我们可以构造下面的拉回图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & 0 & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & & \text{Ker } f_1 & = & \text{Ker } f_1 & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \rightarrow & H_0 & \rightarrow & Y & \rightarrow & T_1 \rightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & H_0 & \rightarrow & M_0 & \rightarrow & \text{Ker } f_0 \rightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

图 3-9: 拉回图 4

因为  $H_0 \in {}_c\mathcal{X}^F$ ,  $T_1 \in {}_c\mathcal{X}^F$ , 从中间的一行得到  $Y \in {}_c\mathcal{X}^F$ . 那么就存在 F-正合

列  $0 \rightarrow H_1 \rightarrow C_1 \rightarrow Y \rightarrow 0$  , 其中  $H_1 \in {}_C\mathcal{X}^F$  ,  $C_1 \in \text{add}_A C$  . 接下来构造下面的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & H_1 & = & H_1 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \rightarrow & M_1 & \rightarrow & C_1 & \rightarrow & M_0 \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \rightarrow & \text{Ker} f_1 & \rightarrow & Y & \rightarrow & M_0 \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 
 \end{array}$$

图 3-10: 交换图 10

因为  $H_1 \in {}_C\mathcal{X}^F \subseteq C^\perp$  ,  $\text{Ker} f_1 \in {}_\omega\mathcal{X}^F \subseteq \omega^\perp \subseteq C^\perp$  , 可以得到  $M_1 \subseteq C^\perp$  , 通过对 F-正合列  $0 \rightarrow H_1 \rightarrow M_1 \rightarrow \text{Ker} f_1 \rightarrow 0$  重复上述过程, 依此类推, 可以得到 F-正合列  $\cdots \xrightarrow{g_2} C_1 \xrightarrow{g_1} C_0 \xrightarrow{g_0} M \rightarrow 0$  , 其中  $C_i \in \text{add}_A C$  ,  $\text{Ker} g_i = M_i \in C^\perp$  . 因此, 我们可得  $M \in {}_C\mathcal{X}^F$  .  $\square$

**命题 3.2.2:** 假设  $T$  是  $n$ -C-F-倾斜的.

$$(1) {}_C\mathcal{X}^F = {}_T\check{\mathcal{X}}^F \cap C^\perp .$$

$$(2) {}_T\check{\mathcal{X}}^F = {}_C\check{\mathcal{X}}^F .$$

**证明:** (1) 首先证明  ${}_C\mathcal{X}^F \subseteq {}_T\check{\mathcal{X}}^F \cap C^\perp$  . 现在只需要证明  ${}_C\mathcal{X}^F \subseteq {}_T\check{\mathcal{X}}^F$  . 通过假设, 对于任意的  $M \in {}_C\mathcal{X}^F$  , 存在 F-正合列  $0 \rightarrow M_n \rightarrow C_n \rightarrow \cdots \rightarrow C_1 \rightarrow M \rightarrow 0$  , 其中  $M_n \in {}_C\mathcal{X}^F$  ,  $C_i \in \text{add}_A C$  . 注意  $C_i \in \text{add}_F^\vee T$  , 因此通过引理 2.1.2 的对偶结果, 存在 F-正合列  $0 \rightarrow M \rightarrow V \rightarrow U \rightarrow 0$  和  $0 \rightarrow M_n \rightarrow T_n \rightarrow \cdots \rightarrow T_1 \rightarrow V \rightarrow 0$  , 其中  $U \in \text{add}_F^\vee T$  ,  $T_i \in \text{add}_A T$  , 那么可得  $V \in {}_C\mathcal{X}^F$  . 现在去证明  $V \in T^\perp$  . 通过应用函子  $\text{Hom}_A(T, -)$  , 对于任意的  $i \geq 1$  , 通过维数转移我们有  $\text{Ext}_F^i(T, V) \simeq \text{Ext}_F^{i+n}(T, M_n)$  . 因为  $T$  是  $n$ -C-F-倾斜的, 考虑 F-正合列  $0 \rightarrow C_n \rightarrow \cdots \rightarrow C_0 \rightarrow T \rightarrow 0$  . 因此可以得到  $\text{Ext}_F^{i+n}(T, M_n) \simeq \text{Ext}_F^i(C_n, M_n) = 0$  , 其中  $i \geq 1$  . 于是有  $\text{Ext}_F^{i \geq 1}(T, V) = 0$  , 也就是

$V \in T^\perp$ . 因此有  $V \in {}_T\mathcal{X}^F$ , 可得  $M \in {}_T\check{\mathcal{X}}^F \cap C^\perp$ .

现在去证明  ${}_c\mathcal{X}^F \supseteq {}_T\check{\mathcal{X}}^F \cap C^\perp$ . 设  $M \in {}_T\check{\mathcal{X}}^F \cap C^\perp$ , 存在 F-正合列  $0 \rightarrow M \xrightarrow{f_0} X_0 \rightarrow \cdots \xrightarrow{f_m} X_m \rightarrow 0$ , 其中  $X_i \in {}_T\mathcal{X}^F$ . 因为  $M \in C^\perp$  以及通过引理 3.2.1 有  ${}_T\mathcal{X}^F \subseteq {}_c\mathcal{X}^F$ , 得到了  $\text{Ker} f_i \in C^\perp$ . 那么通过引理 3.1.1 可以得到  $\text{Ker} f_m \in {}_c\mathcal{X}^F$ , 类似的可得每个  $\text{Ker} f_i \in {}_c\mathcal{X}^F$ . 因此可得  $M \in {}_c\mathcal{X}^F$ .

(2)通过(1)可得  ${}_T\check{\mathcal{X}}^F \subseteq {}_c\mathcal{X}^F \subseteq {}_c\check{\mathcal{X}}^F$ , 所以我们只需要去证明  ${}_c\check{\mathcal{X}}^F \subseteq {}_T\check{\mathcal{X}}^F$ . 对于任意的  $M \in {}_c\check{\mathcal{X}}^F$ , 存在 F-正合列  $0 \rightarrow M \rightarrow C_0 \rightarrow \cdots \rightarrow C_n \rightarrow 0$ , 其中  $C_i \in {}_c\mathcal{X}^F = {}_T\check{\mathcal{X}}^F \cap C^\perp$ . 通过命题 3.1.3 可得  $M \subseteq {}_T\check{\mathcal{X}}^F$ .  $\square$

接下来, 我们将证明 Wakamatsu's 引理 (F-Wakamatsu's 引理, 见引理 3.2.4) 的相对版本, 这对定理 3.2.11 的建立至关重要.

**引理 3.2.3:** 如果  $\partial: E \rightarrow M$  是右极小  $\mathcal{C}$ -逼近以及

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & S & \xrightarrow{i} & P & \xrightarrow{\pi} & G \rightarrow 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow \theta & & \\ & & E & \xrightarrow{\partial} & M & & \end{array}$$

图 3-11: 交换图 10

是交换图, 其中  $G \in \mathcal{C}$ , 使得上面一行是 F-正合的, 那么存在态射  $\alpha: P \rightarrow E$  使得  $f = \alpha i, \theta = \partial \alpha$ .

**证明:** 考虑下面的推出图:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & S & \xrightarrow{i} & P & \xrightarrow{\pi} & G \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \rightarrow & E & \xrightarrow{j} & X & \rightarrow & G \rightarrow 0 \end{array}$$

图 3-12: 推出图 10

因为第一行是 F-正合的, 则第二行也是 F-正合的. 又因为  $E, G \in \mathcal{C}$ ,  $\mathcal{C}$  在 F-扩张下封闭, 所以有  $X \in \mathcal{C}$ . 那么通过推出图的性质, 则存在态射  $h: X \rightarrow M$  使得  $\partial = hj, \theta = hk$ . 那么可以得到下面的交换图:

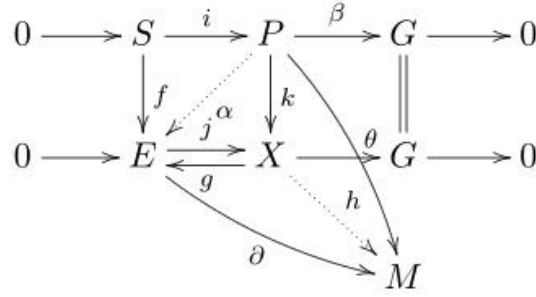


图 3-13: 交换图 12

因为  $\partial: E \rightarrow M$  是极小右  $\mathcal{C}$ -逼近, 则存在态射  $g: X \rightarrow E$  使得  $h = \partial g$ . 因此,  $\partial = hj = \partial gj$ , 也表明了  $gj: E \rightarrow E$  是自同构. 然后设  $\alpha = gk$ , 有  $jf = ki = jgki = j\alpha i$ . 因为  $j$  是  $F$ -单态射, 所以  $j$  也是单态射. 那么有  $f = \alpha i$ . 因为  $\theta = hk, h = \partial g$ , 有  $\theta = hk = \partial gk = \partial \alpha$ .  $\square$

**引理 3.2.4(F-Wakamatsu's Lemma):** 设  $M \in A\text{-mod}$ ,  $\mathcal{C}$  是一个范畴在  $F$ -扩张和直和项下封闭.

(1) 如果  $E \xrightarrow{\partial} M$  是  $M$  的右极小  $\mathcal{C}$ -逼近, 那么对于任意的  $C' \in \mathcal{C}$  有  $\text{Ext}_F^1(C', \text{Ker} \partial) = 0$ .

(2) 如果  $M \xrightarrow{\partial} E$  是  $M$  的左极小  $\mathcal{C}$ -逼近, 那么对于任意的  $C' \in \mathcal{C}$  有  $\text{Ext}_F^1(\text{Coker} \partial, C') = 0$ .

**证明:** (1) 设  $f: C \rightarrow M$  是  $M$  的右极小  $\mathcal{C}$ -逼近, 设  $K := \text{Ker} \partial$ ,  $i: K \rightarrow E$ .

对于任意的  $C' \in \mathcal{C}$ , 存在  $F$ -正合列  $0 \rightarrow S \rightarrow P \rightarrow C' \rightarrow 0$ , 其中  $P \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$ . 通过应用函子  $\text{Hom}_A(-, K)$ , 我们得到  $F$ -正合列

$$\text{Hom}_A(P, K) \rightarrow \text{Hom}_A(S, K) \rightarrow \text{Ext}_F^1(C', K) \rightarrow 0.$$

对于任意的态射  $f: S \rightarrow K$ , 根据引理 3.2.3, 存在态射  $\alpha: P \rightarrow E$  使得下图交换:

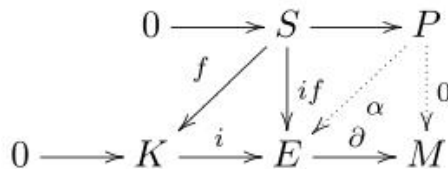


图 3-14: 交换图 13

那么有  $\text{Im} \alpha \subseteq \text{Ker} \partial = K$ . 因此映射  $\text{Hom}_A(P, K) \rightarrow \text{Hom}_A(S, K)$  是满射,  $\text{Ext}_F^1(C', K) = 0$ .

(2)是(1)的对偶,所以我们省略了证明.  $\square$

范畴  $\mathcal{C}$  是有限滤过范畴, 如果存在  $\mathcal{C}$  中的模的有限子集  $\mathcal{S}$ , 使得  $\mathcal{C}$  中的每个对象都有  $\mathcal{S}$  中的部分有限滤过范畴. 显然, 范畴  $\mathbf{A-mod}$  是有限滤过范畴. 也很容易看出, 如果  $\mathcal{C}$  是有限表示类的, 则  $\mathcal{C}$  是有限滤过范畴.

**引理 3.2.5:** 设  $\mathcal{C}$  是  $F$ -自正交的,  ${}^\vee_c \mathcal{X}^F$  是有限滤过范畴. 假设子范畴  $\mathcal{D} \subseteq {}^\vee_c \mathcal{X}^F$  在  $F$ -扩张, 单同态余核下封闭, 其中  ${}^\vee \mathcal{D} = {}^\vee_c \mathcal{X}^F$ . 则

(1)存在  $n$  使得  ${}^\vee \mathcal{D} = ({}^\vee \mathcal{D})_n$ .

(2) ${}^\perp \mathcal{D} \cap {}^\vee_c \mathcal{X}^F \subseteq \hat{\text{add}}_F C$ .

**证明:** (1)因为  ${}^\vee \mathcal{D} = {}^\vee_c \mathcal{X}^F$  是有限滤过范畴, 则存在有限子集  $\mathcal{S}$  使得在  ${}^\vee \mathcal{D}$  中的每个对象都具有  $\mathcal{S}$  中的部分有限滤过范畴. 设  $n = \max \{\text{codim}_{F\mathcal{D}}(S), S \in \mathcal{S}\}$ , 通过引理 3.1.4 可得存在  $n$  使得  ${}^\vee \mathcal{D} = ({}^\vee \mathcal{D})_n$ .

(2)对于任意的  $X \in {}^\perp \mathcal{D} \cap {}^\vee_c \mathcal{X}^F$ , 通过(1)很容易得到  $\text{Ext}_F^{n+1}(X, {}^\vee \mathcal{D}) = 0$ . 取  $F$ -正合列  $0 \rightarrow \text{Ker} f_n \xrightarrow{f_n} C_n \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_1} C_0 \xrightarrow{f_0} X \rightarrow 0$ , 其中  $C_i \in \text{add}_F C$ ,  $\text{Ker} f_i \in {}^\vee_c \mathcal{X}^F \subseteq C^\perp$ . 通过假设有  $\text{Ker} f_n \in {}^\vee \mathcal{D}$ , 那么通过维数转移我们可以得到  $\text{Ext}_F^1(\text{Ker} f_{n-1}, \text{Ker} f_n) \simeq \text{Ext}_F^{n+1}(X, \text{Ker} f_n) = 0$ . 可得  $0 \rightarrow \text{Ker} f_n \rightarrow C_n \rightarrow \text{Ker} f_{n-1} \rightarrow 0$  是可裂的, 即  $\text{Ker} f_{n-1} \in \text{add}_F C$ . 因此, 有  $X \in T \in \hat{\text{add}}_F C$ .  $\square$

**引理 3.2.6:** 设  $\mathcal{C}$  是  $F$ -自正交的使得  ${}^\vee_c \mathcal{X}^F$  有相对内射余生成子  $\mathcal{F}(\mathcal{I})$ . 对于任意的  $X \in {}^\vee_c \mathcal{X}^F$ , 如果子范畴  $\mathcal{D} \subseteq {}^\vee_c \mathcal{X}^F$  在  ${}^\vee_c \mathcal{X}^F$  中是相对余可解的, 那么  $X \in {}^\perp \mathcal{D}$ , 其中  $\text{Ext}_F^1(X, \mathcal{D}) = 0$ .

**证明:** 对于任意的  $D \in \mathcal{D} \subseteq {}^\vee_c \mathcal{X}^F$ , 存在  $F$ -正合列  $0 \rightarrow D \xrightarrow{f_0} I_0 \xrightarrow{f_1} I_1 \rightarrow \cdots$ , 其中  $I_i \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ . 因为  $\mathcal{D}$  在  ${}^\vee_c \mathcal{X}^F$  中是相对余可解的, 我们得到每一个  $\text{Ker} f_i \in \mathcal{D}$ . 因此, 如果  $X \in {}^\vee_c \mathcal{X}^F$ , 其中  $\text{Ext}_F^1(X, \mathcal{D}) = 0$ , 那么对于任意的  $i \geq 1$ , 有

$$\text{Ext}_F^i(X, \mathcal{D}) \simeq \text{Ext}_F^1(X, \text{Ker } f_{i-1}) = 0.$$

□

**引理 3.2.7:** 设  $C$  是  $F$ -自正交的, 子范畴  $\mathcal{D}$  在  ${}_c\mathcal{X}^F$  中是相对余可解, 共变有限的.

对于任意的  $L \in {}_c\mathcal{X}^F$ , 存在  $F$ -正合列  $0 \rightarrow L \rightarrow D' \rightarrow M \rightarrow 0$ , 其中  $D' \in \mathcal{D}$ ,  $M \in {}^\perp\mathcal{D}$ .

**证明:** 通过共变有限的定义, 存在  $F$ -正合列  $0 \rightarrow L \xrightarrow{g} D' \rightarrow M \rightarrow 0$ , 其中  $g$  是  $C$  的右极小  $\mathcal{D}$ -逼近. 再通过引理 3.2.4 和 3.2.6 得  $M \in {}^\perp\mathcal{D}$ . □

**引理 3.2.8:** 设  $C$  是  $F$ -自正交的, 子范畴  $\mathcal{D}$  在  ${}_c\mathcal{X}^F$  中是相对余可解, 共变有限的.

对于任意的  $D \in \mathcal{D}$ , 存在  $F$ -正合列  $0 \rightarrow D' \rightarrow \omega_D \rightarrow D \rightarrow 0$ , 其中  $D' \in \mathcal{D}$ ,  $\omega_D \in \omega$ ,  $\omega = \mathcal{D} \cap {}^\perp\mathcal{D}$ . 特别地,  $\mathcal{D} \in {}_\omega\mathcal{X}^F$ .

**证明:** 对于任意的  $D \in \mathcal{D}$ , 存在  $F$ -正合列  $0 \rightarrow L \rightarrow C_D \rightarrow D \rightarrow 0$ , 其中  $C_D \in \text{add}_A C$ ,  $L \in {}_c\mathcal{X}^F$ . 通过引理 3.2.7, 存在  $F$ -正合列  $0 \rightarrow L \rightarrow D' \rightarrow M \rightarrow 0$ , 其中  $D' \in \mathcal{D}$ ,  $M \in {}^\perp\mathcal{D}$ . 我们接下来考虑下面的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \rightarrow & L & \rightarrow & C_D & \rightarrow & D \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \rightarrow & D' & \rightarrow & \omega_D & \rightarrow & D \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & M & = & M & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 
 \end{array}$$

图 3-15: 交换图 14

不难看出, 中间一行正好是所要求的  $F$ -正合列. □

**引理 3.2.9:** 设  $C$  是  $F$ -自正交的使得  ${}_c\mathcal{X}^F$  有相对内射余生成子. 假设子范畴  $\mathcal{D}$  在

${}_c\mathcal{X}^F$  中是相对余可解, 共变有限的, 其中  $\check{\mathcal{D}} = \check{{}_c\mathcal{X}^F}$ . 表示  $\omega = \mathcal{D} \cap {}^\perp\mathcal{D}$ . 那么  ${}^\perp\mathcal{D} \cap {}_c\mathcal{X}^F \subseteq \check{\omega}$ . 特别地,  $C \in \check{\omega}$ .

**证明:** 对于任意的  $X \in {}_c\mathcal{X}^F$ , 通过引理 3.2.7, 则存在  $F$ -正合列  $0 \rightarrow X \rightarrow D_0 \rightarrow X_1 \rightarrow 0$ , 其中  $D_0 \in \mathcal{D}$ ,  $X_1 \in {}^\perp\mathcal{D}$ . 因此, 如果  $X \in {}^\perp\mathcal{D}$ , 我们有

$D_0 \in \mathcal{D} \cap {}^\perp \mathcal{D} = \omega$ . 然后有  $X_1 \in {}^\perp \mathcal{D} \cap {}_c \mathcal{X}^F$ . 对  $X_1$  重复上述过程, 依此类推, 可以得到 F-正合列  $0 \rightarrow X \rightarrow D_0 \xrightarrow{f_0} D_1 \xrightarrow{f_1} \cdots$ , 其中  $D_i \in \omega$ ,  $\text{Ker } f_i \in {}^\perp \mathcal{D} \cap {}_c \mathcal{X}^F$ . 因为  ${}_c \mathcal{X}^F \subseteq {}_c \check{\mathcal{X}}^F = \check{\mathcal{D}}$ , 通过引理 3.1.4 可知存在  $m$  使得  $\text{Ker } f_m \in \mathcal{D}$ . 然后可以得到  $\text{Ker } f_m \in \mathcal{D} \cap {}^\perp \mathcal{D} = \omega$ . 因此我们得到了  ${}^\perp \mathcal{D} \cap {}_c \mathcal{X}^F \subseteq \check{\omega}$ .  $\square$

**命题 3.2.10:** 设  $C$  是 F-自正交的,  ${}_c \mathcal{X}^F$  有相对内射余生成子,  ${}_c \check{\mathcal{X}}^F$  是有限滤过范畴. 假设子范畴  $\mathcal{D}$  在  ${}_c \mathcal{X}^F$  中是相对余可解, 共变有限的, 其中  $\check{\mathcal{D}} = {}_c \check{\mathcal{X}}^F$ , 那么对于唯一的基本  $n$ -C-F-倾斜模  $T$ , 有  $\omega = \text{add}_F T$ , 其中  $\omega = \mathcal{D} \cap {}^\perp \mathcal{D}$ , 此外, 在这种情况下,  $\mathcal{D} = {}_\omega \mathcal{X}^F$ .

**证明:** 通过引理 3.2.9 有  $C \in \check{\omega}$ , 则存在 F-正合列  $0 \rightarrow C \rightarrow \omega_0 \rightarrow \omega_1 \rightarrow \cdots \rightarrow \omega_n \rightarrow 0$ , 其中  $\omega_i \in \omega$ . 设  $T$  是出现在  $\omega_i$  中的非同构不可分解直和项的直和, 其中  $0 \leq i \leq n$ .  $T$  是 F-自正交的,  $C \in \text{add}_F T$ . 通过引理 3.2.5, 有  $T \in T \in \text{add}_F C$ . 因此  $T$  是  $n$ -C-F-倾斜的. 如果  $\omega' \in \omega$ , 我们可以得到  $T \oplus \omega'$  也是  $n$ -C-F-倾斜的. 因为  $T$  和  $T \oplus \omega'$  具有相同数目的非同构不可分解的直和项, 所以  $\omega' \in \text{add}_F T$ . 因此可得到  $\omega = \text{add}_F T$ .

根据引理 3.2.8 可得  $\mathcal{D} \subseteq {}_\omega \mathcal{X}^F$ , 接下来证明  ${}_\omega \mathcal{X}^F \subseteq \mathcal{D}$ . 通过假设和引理 3.2.1 和 3.2.5, 有  ${}_\omega \mathcal{X}^F \subseteq {}_c \mathcal{X}^F \subseteq {}_c \check{\mathcal{X}}^F = \check{\mathcal{D}} = (\check{\mathcal{D}})_n$ . 对于任意的  $M \in {}_\omega \mathcal{X}^F$ , 存在 F-正合列  $0 \rightarrow \text{Ker } f_n \rightarrow \omega_n \xrightarrow{f_n} \cdots \xrightarrow{f_0} \omega_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ , 其中  $\omega_i \in \omega \subseteq \mathcal{D}$ ,  $\text{Ker } f_i \in {}_\omega \mathcal{X}^F$ . 然后通过引理 3.1.4 有  $M \in \mathcal{D}$ . 最后可得  ${}_\omega \mathcal{X}^F \subseteq \mathcal{D}$ .  $\square$

**定理 3.2.11:** 设  $C$  是 F-自正交的,  ${}_c \mathcal{X}^F$  有相对内射余生成子,  ${}_c \check{\mathcal{X}}^F$  是有限滤过范畴. 那么  $T \rightarrow {}_T \mathcal{X}^F$  给出了基本  $n$ -C-F-倾斜模的同构类与  ${}_c \mathcal{X}^F$  中的相对余分解、共变有限子范畴  $\mathcal{D}$  之间的一一对应, 其中  $\check{\mathcal{D}} = {}_c \check{\mathcal{X}}^F$ .

**证明:** 通过引理 2.1.1 和 3.2.1, 可知  ${}_T \mathcal{X}^F$  是相对余分解的, 通过命题 3.2.2 有

${}_T\check{\mathcal{X}}^F = {}_C\check{\mathcal{X}}^F$ , 然后我们声称  ${}_T\mathcal{X}^F$  在  ${}_C\mathcal{X}^F$  中是共变有限的, 即对于任意的  $X \in {}_C\mathcal{X}^F$ , 因为  ${}_T\check{\mathcal{X}}^F = {}_C\check{\mathcal{X}}^F$ , 我们得到  $X \in {}_T\check{\mathcal{X}}^F$ . 因此存在 F-正合列

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{f_0} T_0 \xrightarrow{f_1} T_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \rightarrow T_m \rightarrow 0,$$

其中  $T_i \in {}_T\mathcal{X}^F, 0 \leq i \leq m$ , 且  $m$  为整数. 通过引理 2.1.2 (3) 和  ${}_T\mathcal{X}^F$  有一个相对投射生成元  $T$  的事实, 对某个  $U \in {}_T\mathcal{X}^F$  和某个  $V \in \text{add}_F^{\check{}} T$ , 则存在 F-正合列  $0 \rightarrow X \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow 0$ . 结合引理 2.1.1 (2), 我们得到  ${}_T\mathcal{X}^F$  在  ${}_C\mathcal{X}^F$  中是共变有限的. 剩余部分可以通过命题 3.2.10 得到.  $\square$

## 第4章 总结与展望

### 4.1 总结

以下列出本文的主要结论:

1. 如果  $(C, T)$  是  $n$ -F-倾斜对, 那么  $T^\perp \subseteq C^\perp$ ,  ${}_T\mathcal{X}^F \subseteq {}_C\mathcal{X}^F$ .
2. 假设  $(C, T)$  是  $n$ -F-倾斜对. 对于  $A$ -模  $M$ , 下列条件是等价的:  
 (1)  $M \in {}_T\mathcal{X}^F$ ; (2)  $M \in T^\perp \cap {}_C\mathcal{X}^F$ ; (3)  $M \in \text{Pres}_{C\mathcal{X}^F}^n(T)$ .
3. 如果  $\text{Pres}_{C\mathcal{X}^F}^m(T) = T^\perp \cap {}_C\mathcal{X}^F$ , 其中  $m \geq 1$ , 那么  $T \in T^\perp \cap {}_C\mathcal{X}^F$ .
4. 如果  $\text{Pres}_{C\mathcal{X}^F}^n(T) = T^\perp \cap {}_C\mathcal{X}^F$ , 那么  $\text{Pres}_{C\mathcal{X}^F}^n(T) = \text{Pres}_{C\mathcal{X}^F}^{n+1}(T)$ .
5. 如果  $\text{Pres}_{C\mathcal{X}^F}^n(T) = T^\perp \cap {}_C\mathcal{X}^F$ , 那么  $\text{Pres}_{C\mathcal{X}^F}^n(T) = \text{Pres}_{C\mathcal{X}^F}^n(\text{Pres}_{C\mathcal{X}^F}^n(T))$ .
6. 假设  $\text{Pres}_{C\mathcal{X}^F}^n(T) = T^\perp \cap {}_C\mathcal{X}^F$ , 如果  $C \in \text{Copres}^n(\text{Pres}_{C\mathcal{X}^F}^n(T))$ , 那么  $C \in (\text{add}_F T)_n^\vee$ .
7. 假设  $\text{Pres}_{C\mathcal{X}^F}^n(T) = T^\perp \cap {}_C\mathcal{X}^F$ , 如果  $C \in \text{Copres}^n(\text{Pres}_{C\mathcal{X}^F}^n(T))$ , 那么  $T \in (\text{add}_F C)_n^\wedge$ .
8. 假设  $C$  是 F-自正交的,  $C \in \text{Copres}^n(\text{Pres}_{C\mathcal{X}^F}^n(T))$ , 那么  $(C, T)$  是  $n$ -F-倾斜对当且仅当  $\text{Pres}_{C\mathcal{X}^F}^n(T) = T^\perp \cap {}_C\mathcal{X}^F$ .
9. 假设  $T$  是 F-自正交的. 有  
 (1)  ${}^\perp({}_T\mathcal{X}^F) \cap {}_T\mathcal{X}^F = \text{add}_F T$ . (2)  $({}^\perp({}_T\mathcal{X}^F))^\perp \cap {}_T\mathcal{X}^F = {}_T\mathcal{X}^F$ .
10. 假设  $C$  是 F-自正交的. 那么  ${}_C\mathcal{X}^F$  在 F-扩张, 满同态核, 单同态余核下封闭.
11. 设  $C$  是 F-自正交的,  $\omega \in {}_C\mathcal{X}^F$ . 如果  $\omega$  也是 F-自正交的,  $C \in \omega^\vee$ , 那么有  $\omega^\perp \subseteq C^\perp$ ,  $\omega^\perp \cap {}_C\mathcal{X}^F = {}_\omega\mathcal{X}^F$ . 特别地, 如果  $T$  是  $n$ -C-F-倾斜的, 那么有  $T^\perp \subseteq C^\perp$ ,  $T^\perp \cap {}_C\mathcal{X}^F = {}_T\mathcal{X}^F$ .
12. 假设  $T$  是  $n$ -C-F-倾斜的. 有 (1)  ${}_C\mathcal{X}^F = {}_T\mathcal{X}^F \cap C^\perp$ . (2)  ${}_T\mathcal{X}^F = {}_C\mathcal{X}^F$ .
13. 设  $C$  是 F-自正交的,  ${}_C\mathcal{X}^F$  有相对内射余生成子. 假设子范畴  $\mathcal{D}$  在  ${}_C\mathcal{X}^F$  中是相对余可解, 共变有限的, 其中  $\check{\mathcal{D}} = {}_C\mathcal{X}^F$ . 表示  $\omega = \mathcal{D} \cap {}^\perp\mathcal{D}$ . 那么  ${}^\perp\mathcal{D} \cap {}_C\mathcal{X}^F \subseteq \omega^\vee$ .

特别地,  $C \in \omega^\vee$ .

14. 设  $C$  是  $F$ -自正交的,  ${}_C\mathcal{X}^F$  有相对内射余生成子,  ${}_C^\vee\mathcal{X}^F$  是有限滤过范畴. 那么  $T \rightarrow {}_r\mathcal{X}^F$  给出了基本  $n$ - $C$ - $F$ -倾斜模的同构类与  ${}_C\mathcal{X}^F$  中的相对余分解、共变有限子范畴  $\mathcal{D}$  之间的一一对应, 其中  $\mathcal{D} = {}_C^\vee\mathcal{X}^F$ .

## 4.2 展望

1. Sun 和 Zhao<sup>[24]</sup>介绍了 Wakamatsu 倾斜对的概念, 这是对 Wakamatsu 倾斜模和倾斜对的自然推广. 最近, Zhao 和 Zhu<sup>[18]</sup>介绍了外三角范畴中引入倾斜对的概念, 这是十分创新的推广. 因此, 在此基础上去考虑外三角范畴的 Wakamatsu 倾斜对将是十分有趣的课题.

2. 文章第三章中介绍了  $n$ - $F$ -倾斜对诱导的 Auslander-Reiten 对应, 接下来考虑更为复杂的情形, 即是否存在由  $n$ - $F$ -Wakamatsu 倾斜对诱导的 Auslander-Reiten 对应?

## 参考文献

- [1] Brenner S, Butler M C R. Generalizations of the Bernstein-Gelfand-Ponomarev reflection functors[J]. Springer Berlin Heidelberg, 1980.
- [2] Happel D, Ringel H C M. Tilted Algebras[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1982, 274(2):399-443.
- [3] Miyashita Y. Tilting modules of finite projective dimension[J]. Mathematische Zeitschrift, 1986, 193(1):113-146.
- [4] Colpi R, Trlifaj J. Tilting Modules and Tilting Torsion Theories[J]. Journal of Algebra, 1995, 178(2):614-634.
- [5] Wakamatsu T. On modules with trivial self-extensions[J]. Journal of Algebra, 1988, 114(1):106-114.
- [6] Wei J Q. Equivalences and the tilting theory[J]. Journal of Algebra, 2005, 283(2):584-595.
- [7] Miyashita Y. Tilting Modules Associated with a Series of Idempotent Ideals[J]. Journal of Algebra, 2001, 238(2):485-501.
- [8] Wei J Q, Xi C C. A characterization of the tilting pair[J]. Journal of Algebra, 2007, 317(1):376-391.
- [9] Auslander M, Solberg. Relative homology and representation theory II: Relative cotilting theory[J]. Communications in Algebra, 1993, 21(9):3033-3079.
- [10] Wei J Q. A note on relative tilting modules[J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2010, 214(4):493-500.
- [11] Ma B, Sauter J. On faithfully balanced modules, F-cotilting and F-Auslander algebras[J]. Journal of Algebra, 2019, 556:1115-1164.
- [12] Zhang Y F, Ma Y J, Zhao T W. Tilting pairs and Wakamatsu tilting subcategories over triangular matrix algebras[J]. Georgian Mathematical Journal, 2023, 30: 465-476.
- [13] Auslander M, Reiten I. Applications of contravariantly finite subcategories[J]. Advances in Mathematics, 1991, 86(1):111-152.
- [14] Wei J Q, Xi C C. Auslander-Reiten correspondence for tilting pairs[J]. Journal of

- Pure and Applied Algebra, 2008, 212(2):411-422.
- [15]Di Z X, Wei J Q, Zhang X, et al. Tilting subcategories with respect to cotorsion triples in abelian categories[J]. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A Mathematics, 2017, 147(4):703-726.
- [16]Di Z X, Liu Z K, Wang J P, et al. An Auslander-Buchweitz approximation approach to (pre)silting subcategories in triangulated categories[J]. Journal of Algebra, 2019, 525:42-63.
- [17]Zhu B, Zhuang X. Tilting subcategories in extriangulated categories[J]. Frontiers of Mathematics in China, 2020, 15:225-253.
- [18]Zhao T, Zhu B, Zhuang X. Tilting pairs in extriangulated categories[J]. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. 2021, 64(4):947-981.
- [19]Zhang Z, Wei J Q, Wang S.  $\infty$ - Tilting Subcategories in Extriangulated Categories[J]. Chinese Annals of Mathematics, Series B, 2024, 45(1):151-160.
- [20]Tian M X, Liu D J, Mei Y X. A characterization of the n-F-tilting pair[J]. Journal of Mathematical Research with Applications. Accepted.
- [21]Auslander M, Solberg. Relative homology and representation theory I, Relative homology and homologically finite subcategories[J]. Communications in Algebra, 1993, 21(9):2995-3031.
- [22]Auslander M, Smalø S O. Almost split sequences in subcategories[J]. Journal of Algebra, 1990, 71(2):426-454.
- [23]Liu D J, Wei J Q. Gorenstein tilting pair[J]. Communications in algebra. 2020, 48(9):3846-3858.
- [24]Sun J X, Zhao G Q. Wakamatsu tilting pairs[J]. Journal of Algebra and Its Applications, 2014, 13(07): 1450041.

## 硕士期间发表的论文

- [1] Tian M X, Liu D J, Mei Y X. A characterization of the  $n$ -F-tilting pair[J]. Journal of Mathematical Research with Applications. Accepted.
- [2] Tian M X, Liu D J, Mei Y X. Auslander-Reiten correspondence for  $n$ -F-tilting pairs. Submitted.

## 致谢

走在时光的轨迹中，转眼即逝的三年研究生的学习生涯已经落幕，借此机会表达我对这段美好时光的感激。

一朝沐杏雨，一朝念师恩。首先要感谢刘大俊导师的悉心教导，从论文开题到定稿的过程中给予我耐心的指导和帮助，提出了很多宝贵的修改意见，从导师的身上我学到了严谨认真的学术态度，让我在学习的道路不断的变成更好的自己。感谢导师在生活中的关怀与支持。您不仅是我学术上的引路人，更是我人生道路上的榜样。

然后我要感谢我的家人，尤其是我的父母。你们一直是我坚强的后盾，无论我遇到什么困难，你们总是给予我无条件的支持与鼓励。你们的爱与关怀让我能够心无旁骛地专注于学业。是你们给予我前进的动力，让我在学术道路上不断追求进步。之后，我都会带着这份感恩之心，努力成为你们的骄傲。

其次感谢研究生三年里的同学和朋友们，感谢你们在生活中的陪伴与支持。无论是深夜的讨论，还是闲暇时的欢笑，你们的陪伴让我在繁忙的学业中找到了放松与快乐。我们一起度过的时光，成为了我硕士生活中最美好的回忆。祝我们在人生的新篇章中，开创辉煌，前途无量，未来可期！

最后，再次向所有帮助过我的人表达最诚挚的谢意。这段求学经历将成为我人生中最宝贵的财富，未来的每一步，我都会带着这份感恩与坚持，勇敢前行。