

分类号: 0159
密 级: 公开

单位代码: 10363
学 号: 2221020112

题 目 基于 Aczel-Alsina 范数的几类模糊多属性
决策方法研究

英文并列

THE ACZEL-ALSINA NORM-BASED
SEVERAL TYPES OF FUZZY RESEARCH
ON MULTI-ATTRIBUTE DECISION-
MAKING METHODS

学生姓名: 李龙莲

指导教师: 周金明

专 业: 0701 数学

研究方向: 决策理论与方法

论文答辩日期: 2025 年 5 月 14 日

安徽工程大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：我恪守学术道德，崇尚严谨学风。所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已明确注明和引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品及成果的内容。论文为本人亲自撰写，我对所写的内容负责，并完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

学位论文作者签名：李龙莲

日期：2025年5月14日

安徽工程大学学位论文版权使用授权书

学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅或借阅。本人授权安徽工程大学可以将本学位论文的全部内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保密 ☐，在 ____ 年解密后适用本版权书。

本学位论文属于

不保密 ☒。

学位论文作者签名：

李龙莲

指导教师签名：

1 龙莲

日期： 2025 年 5 月 14 日

日期： 2025 年 5 月 14 日

基于 Aczel-Alsina 范数的几类模糊多属性决策方法研究

摘 要

在多属性决策理论基础上, 本文基于 Aczel-Alsina 范数理论, 分析了在不同模糊环境下 Aczel-Alsina 范数分别与 Maclaurin 对称平均算子、Hamy 平均算子和 Heronian 平均算子结合的决策方法, 并将上述方法应用于现实问题。

第一章为绪论, 梳理了多属性决策模型的研究背景及意义。根据多属性决策在不同环境下的研究现状进行综述, 然后介绍了本文的研究内容、技术路线、研究方法以及可能的创新点。

第二章为理论基础, 描述了 Aczel-Alsina 范数的定义, 介绍了 Aczel-Alsina 范数在区间值毕达哥拉斯模糊环境、多值中智模糊环境下以及 r, s, t 球形模糊环境下的运算法则, 为基于 Aczel-Alsina 范数在不同模糊环境下与各算子进行集成提供了理论依据。

第三章研究了区间值毕达哥拉斯模糊 (IVPF) 多属性决策方法。在 IVPF 环境下, 构建 Aczel-Alsina Maclaurin 对称均值算子 (AAMSM)。首先分析了 IVPF Aczel-Alsina Maclaurin 对称均值算子 (IVPFAAMSM) 的性质, 其次提出了 IVPFAAWMSM 多属性决策方法, 最后将其应用于实际问题中并进行灵敏度分析。

第四章提出了在多值中智模糊环境中的决策方法。在多值中智模糊环境下, 结合 Aczel-Alsina 范数构建 Aczel-Alsina Hamy 平均算子 (AAHM) 和 AA 对偶 Hamy 平均算子 (AADHM)。与改进的 IDOCRIW 法结合提出新的决策方法, 并将决策方法应用于解决可再生能源选择问题, 结果表明该方法的可行性和有效性。

第五章研究了 r, s, t 球形模糊环境决策方法。在 r, s, t 球形模糊环境下与 Aczel-Alsina 范数和 Heronian 算子结合构建一种新的决策方法，并通过案例分析表明该方法的有效性和实用性。

第六章为结论与展望，总结了本文研究工作以及未来需要进一步深入探索和研究的问题，并展望了 Aczel-Alsina 范数在复模糊多属性决策需要进一步研究的方向。

关键词： Aczel-Alsina 范数，多属性决策，Maclaurin 平均算子，Hamy 平均算子，Heronian 平均算子

THE ACZEL-ALSINA NORM-BASED SEVERAL TYPES OF FUZZY RESEARCH ON MULTI-ATTRIBUTE DECISION- MAKING METHODS

ABSTRACT

On the basis of existing multi-attribute decision-making theories, this paper analyses the decision-making methods based on the theory of Aczel-Alsina norm, combining the Aczel-Alsina norm with some kinds of operators, namely, Maclaurin symmetric averaging operator, Hamy averaging operator, and Heronian mean operator respectively, in different fuzzy environments, and applies the above methods to the real-world problems.

The first chapter is an introduction, sorting out the research background and significance of multi-attribute decision-making models. It reviews the domestic and international literature according to the current research status of multi-attribute decision-making in different environments; then it introduces the research content, technical route, research methodology and innovations of this paper.

Chapter 2 is the theoretical foundation, which describes the definition of Aczel-Alsina norm, introduces the application of Aczel-Alsina norm in interval-valued Pythagorean fuzzy environments, multi-valued

Neutrosophic fuzzy environments, and r, s, t spherical fuzzy environments, and provides the theoretical basis for integrating with each operator based on Aczel-Alsina norm in different fuzzy environments.

Chapter 3 investigates the decision-making method based on in interval-valued Pythagorean fuzzy (IVPF) environment. The Aczel-Alsina Maclaurin symmetric mean operator (AAMSM) is constructed in the IVPF environment. This chapter first analyses the properties of the IVPF Aczel-Alsina Maclaurin symmetric mean operator (IVPFAAMSM), proposes a multi-attribute decision-making method for IVPFAAWMSM, and finally applies it to a real-world case and performs a sensitivity analysis.

Chapter 4 proposes a decision-making method based on decision-making in a multivalued neutrosophic fuzzy environment. The construction of Aczel-Alsina Hamy mean operator (AAHM) and AA dual Hamy mean operator (AADHM) combined with Aczel-Alsina norm in multi-valued WI fuzzy environments is investigated. Combined with the improved IDOCRIW method to form a new decision-making method, the decision-making method is applied to a renewable energy case to show the feasibility and effectiveness of the method.

Chapter 5 investigates the decision making method in r, s, t spherical fuzzy environment. A new decision-making method is constructed in r, s, t spherical fuzzy environment in combination with Aczel-Alsina norm and Heronian mean operator and the effectiveness and

practicality of the method is demonstrated through case study and sensitivity analysis.

Chapter 6 is the conclusion and outlook, which summarises the results of the research work in this paper as well as the problems that need further in-depth research and exploration in the future, and looks forward to the direction of Aczel-Alsina norm in complex fuzzy multi-attribute decision making that needs further research.

Li Longlian(Applied Mathematics)

Supervised by Zhou Jinming

KEY WORDS: Aczel-Alsina norm, Multi-attribute decision making, Maclaurin symmetric mean operator, Hamy mean operator, Heronian Mean operator

目 录

摘 要	IV
ABSTRACT	VI
第 1 章 绪论	1
1.1 研究背景及意义	1
1.2 国内外研究现状	1
1.3 研究内容和技术路线	5
1.4 创新点	6
第 2 章 理论基础	7
2.1 几类模糊环境下的基础理论	7
2.2 Aczel-Alsina 范数的相关运算定律	9
第 3 章 基于 MSM 的区间毕达哥拉斯模糊多属性决策方法	14
3.1 预备知识	14
3.2 区间毕达哥拉斯模糊 Maclaurin 对称平均算子 (IVPFAAMSM) 及其性质	16
3.3 基于 IVPFAAWMSM 算子的多属性决策模型及其应用	18
3.4 案例分析	20
3.5 本章小结	25
第 4 章 基于 Hamy 算子和对偶 Hamy 算子的多值中智多属性群决策方法	26
4.1 预备知识	26
4.2 中智熵元素算子及其性质区间	27
4.3 基于中智模糊环境下的多属性决策模型及其应用	32
4.4 案例分析	37
4.5 本章小结	47
第 5 章 基于 Heronian 平均算子的 r, s, t 球形模糊多属性决策方法	48
5.1 预备知识	48
5.2 r, s, t 球形模糊 Heronian 算子($r, s, t-SPFAAHrm$)及其性质	49
5.3 基于 $r, s, t-SPFAAHrm$ 算子多属性决策模型及其应用	51
5.4 案例分析	53
5.5 本章小结	57

第 6 章 总结与展望	58
6.1 总结	58
6.2 展望	58
参考文献	59
硕士期间发表的论文	66
致谢	67

第 1 章 绪论

1.1 研究背景及意义

多属性决策是一种综合考虑多种因素,对有限个方案进行排序,并从中选出最佳方案的一种决策方法。其理论与方法在工程、科技、经济、管理、军事等众多领域有着重要的应用。在传统的多目标决策方法中,专家们往往给出一个准确的数值,用来表示各个属性下的备选方案的评价值。随着社会的进步,决策问题日趋复杂化,决策者所提供的评估信息,通常含有“好”、“很好”、“一般”、“很差”等不确定性。

为了能够处理不确定性数据,直觉模糊集(IFS)^[1]理论作为模糊集理论^[2]的拓展,是由隶属度和非隶属度组成。Yager^[3]提出了毕达哥拉斯模糊集(PFS)。然而,该方法仅能得到准确的实数值,无法对不确定性信息进行有效的处理。Smarandache^[4]将不确定度加入直觉模糊集并提出了中智集,Wang 等^[5]在中智集的基础上提出了单值中智集,并对它相关的运算规则和性质进行研究。随着研究的发展,中智集的真实程度,不确定程度和失真程度不仅限于某个值或某个区间,而是有限离散值的集合。因此,王坚强等^[6]提出了多值中智集的概念。多值中智模糊是单值模糊集的拓展,不仅可以实现多值中智元素间不同序列长度(基数)的合理信息表达,而且可以反映出每个中智多值元素中接近相应平均水平的多值序列^[7]。Li 等^[8]人根据真、假、不确定序列的平均值和香农熵,提出了中智多值元素到中智熵元素(NEE)的转换方法。赵婷婷^[9]基于单值中智模糊集的汉明距离和欧式距离,提出单值中智模糊集的广义距离公式。由于真实度、不确定度和谬误度的重要性并不相同,考虑到这些不同层次的重要性,Ali 和 Naeem^[10]最近提出了 r,s,t 球面模糊集的概念。

1.2 国内外研究现状

1.2.1 多属性研究评述

在各种情况下,决策过程由利益决定,而利益取决于我们的专业知识和先前信息。由于人类疏忽中细节不足,它极有可能被环境累积的复杂性和缺乏框架知识所纠缠。因此,在特定时间范围内找到最佳解决方案是极其困难的。为了解决

所收集数据中的这些漏洞、歧义和不足,决策专家经常使用模糊集及其众多泛化,证明了这是捕获信息不准确的有效数学工具。

多属性决策问题是管理、工程以及经济学等领域的研究热点。备选方案的指标值和权重一般是以实数表示的。然而,由于在决策过程中存在不确定性,决策者很难确定一个最佳的选择。Yager 和 Abbasov^[11]研究了毕达哥拉斯模糊加权平均算子(PFWA)和毕达哥拉斯模糊有序加权平均算子(PFOWA),可以处理模糊环境下的权重问题。Peng 和 Yang^[12]在毕达哥拉斯模糊信息集成中引入 Choquet 积分。Zhang 和 Xu^[13]提出了利用毕达哥拉斯模糊数的 TOPSIS 方法解决多准则决策问题。为了求解多属性决策问题,Garg^[14]在区间值毕达哥拉斯模糊条件下提出了一种新的精确函数。Wu 和 Wei^[15]利用 Hamacher 算子提出了若干毕达哥拉斯模糊集成算子。Garg^[16]提出了许多方法来解决概率毕达哥拉斯模糊条件下的决策问题。在毕达哥拉斯模糊条件下,Wei 等^[17]完成了各种集成算子处理多属性决策问题。Aydin 等^[18]提出了梯形毕达哥拉斯模糊数的集成算子。Liang 和 Xu^[19]提出了一种针对犹豫的 PFS 的多属性决策问题的 TOPSIS 方法的拓展。Rahman 等^[20]提出了毕达哥拉斯模糊加权 Einstein 几何集成算子。Liang 等^[21]将 Bonferroni 平均算子应用到了毕达哥拉斯模糊集(PFS)环境下,并利用它来更好地应用与解决问题。Ren 等^[22]采用 PF TODIM 方法解决多属性决策问题。Zhang^[23]提出了一种基于相似性度量概念的多属性决策策略。Gou 等^[24]分析了连续 PFS 的特征。此外,MacLaurin 对称平均算子(MSM)(MacLaurin^[25], Wang 等^[26], Liu 等^[27])考虑了参数之间的相互关系,以提高集成结果的可靠性。Wei 和 Lu^[28]以及 Wang 等^[29]将 MSM 算子应用于区间值毕达哥拉斯(IVPFS)框架。将幂平均算子和 MSM 算子相结合,既可以消除不合理参数的影响,又可以比较多个参数之间的关系。

模糊集合能处理不完全、不准确的信息,中智集能处理不一致性、不连续性问题,在已有的信息不准确或不一致的情况下,将模糊集合与中智集相结合,能有效地解决该问题。Das 等^[30]提出了中智模糊集理论,该理论结合了模糊集和中智集的优点,其中参与度由模糊隶属度表示,真实值隶属函数表示重要度,失真值隶属函数估计不重要程度,不确定性表示未知事实,一定意义上讲,该模糊集属于 2 型模糊集,考虑了隶属度函数,能处理受不确定性影响较大的复杂决策问题,弥补了传统 1 型模糊集的不足。为了便于应用,Das^[30]等人还提出了单值中智模糊集的概念,并给出了相关的运算规则、距离测度和相似性度量。与单值

三角中智集, 单值中智犹豫模糊集, 单值中智梯形语言集等这些单值中智集的扩展形式不同, 单值中智模糊集既保留了模糊集的隶属度函数, 又保留了单值中智集的形式, 用中智数表征模糊隶属函数, 即在一定程度上量化了模糊隶属度所涉及的真、假和不确定程度。Peng 等^[31]研究了多值中智模糊幂集成算子。Ji 等^[32]研究了基于投影的多值中智 TODIM 方法。在复杂决策过程中, 多位决策者可以根据实际情况给出一个或者多个评价值, 因而所获得的信息为多值中智模糊信息。

可以看出, 前人提出的模糊集, 如毕达哥拉斯模糊集、球面模糊集等, 是具有特定参数值的特定模糊集的扩展。Mahmood 等^[33]为这些广义集创造了术语 t 球面模糊集 (t -SPFS)。对评价数值的限制, 表明 t -SPFS 比 PFS 和球形模糊更全面。它可以为决策者提供更广泛的评估选项, 使其成为表达模糊信息的动态媒介 (Akram 等^[34]; Naz 等^[35]; Akram 和 Martino^[36])。Wu^[37]等通过引入一种利用 Jensen Shannon 散度优势的新型散度度量, 解决了准确测量 t -SPFS 之间距离的挑战。Naz 等^[38]开发了一些算子, 并研究了 2 元语言 t 球模糊环境下的复比例评估 (COPRAS) 方法。此外, Akram 和 Martino^[39]将软 SPFS 的概念扩展到 t 球模糊软粗糙集, 并着手建立其核心理论和实际应用。Ju 等^[40]介绍了 t -SPFS 的定律和交互聚合算子。此外, 他们还开发了基于 t -SPFS 的 TODIM 的创新扩展。Alsalem 等^[41]使用 t -SPFS 数据研究了新冠肺炎疫苗分发问题。然而, 在 t -SPFS 中, 术语水平是同义词。在实践中, 隶属度、非隶属度和谬误隶属度可能有不同的程度, 可能需要使用不同的表达式。

随着时间的推移, 信息聚合已成为解决多准则决策者 (MCDM) 问题的主要方法。由于其重要性和与 MCDM 困境的密切关系, 它在众多学科中得到了极大的认可。学者们为各种类型的模糊数据提出了各种各样的集成算子。尽管如此, 人们对这个话题仍然有很大的研究兴趣。最初, Mahmood 等^[42]提出了 t -SPF 加权几何集成算子。Zeng 等^[43]通过结合与球形模糊的关联概率开发了新的算子。Ullah 等^[44]为 t -SPFS 开辟了基于 Hamacher 算子, 以评估机器人性能。Farid 等^[45]利用他们提出的 t -SPF 动态 Einstein 算子研究了处理 MCDM 问题的策略。Liu 等^[46]率先提出了具有正态 t SPFS 的 Maclaurin 对称均值算子及其权重。Khan 等^[47]提出了 t -SPF 背景下的阿基米德集成算子及其对 MCDM 问题的实现。

1.2.2 Aczel-Alsina 范数研究评述

Menger^[48]在其空间理论中提出了三角范数(t-NMs)的概念。t-NM 及其相关的三角余范数(t-CNM)是 PFS 中的关键,例如, Einstein t-NM 和 t-CNM^[49], Archimedes t-NM 和 t-CNM^[50], Lukasiewicz t-NM 和 t-CNM^[51], Hamacher t-NM 和 t-CNM^[52]等。Klement 和 Mesia^[53]对 t-NMs 的特征及性质进行了研究。Aczel 和 Alsina^[54]提出了新的三角范数,称为 Aczel-Alsina t-NM (AA t-NM)和 Aczel-Alsina t-CNM (AA t-CNM), 它们对参数变化设置了很高的区间。由于所包含参数的可变性质, Aczel-Alsina 范数与其余范数具有重大意义, Senapati 等人利用 AA - t-NMs 提出了决策理论的新思路。他们将 AA t-NMs 应用于 IFS^[55]、区间值 IFS^[56]、犹豫模糊^[57]、图像模糊集^[58]环境下的决策问题。

Wang 等^[59]设计了一种分数级评价,该技术同时增加了非真实距离并减小了真实之间的距离。Naeem 和 Ali^[60]介绍了一种基于 AA 球形模糊算子的新型 MCDM 方法,并讨论了它们在评估太阳能电池中的应用。同时, Ali 和 Naeem^[61]根据 AA 运算规律,提出了各种 p, q 正交模糊集成算子。根据前面的讨论, MCDM 中使用的集成算子与现实世界的现象一致。为了在多属性决策中获得最优解,数据应该更容易处理。此外, r, s, t -SPFS 环境比 IFS, PFS, SPFS 和 t-SPFS 更有效地处理歧义。AA t-NM 和 t-CM 目前尚未在 r, s, t -SPFS 框架内使用。鉴于这些考虑,将 AA 范数集成算子的概念引入 r, s, t -SPFS 环境,然后研究它们在多属性决策中的应用。最近, Ali 和 Naeem^[8]提出了 r, s, t -SPFNs 的加法、乘法、标量乘法和标量幂等基本运算定律。利用这些定律,建立了一些 r, s, t -SPF 集成算子,并都得到了良好的结果。然而,在 r, s, t -SPF 的环境中论述关于 AA 范数集成的算子的文献较少。

1.3 研究内容和技术路线

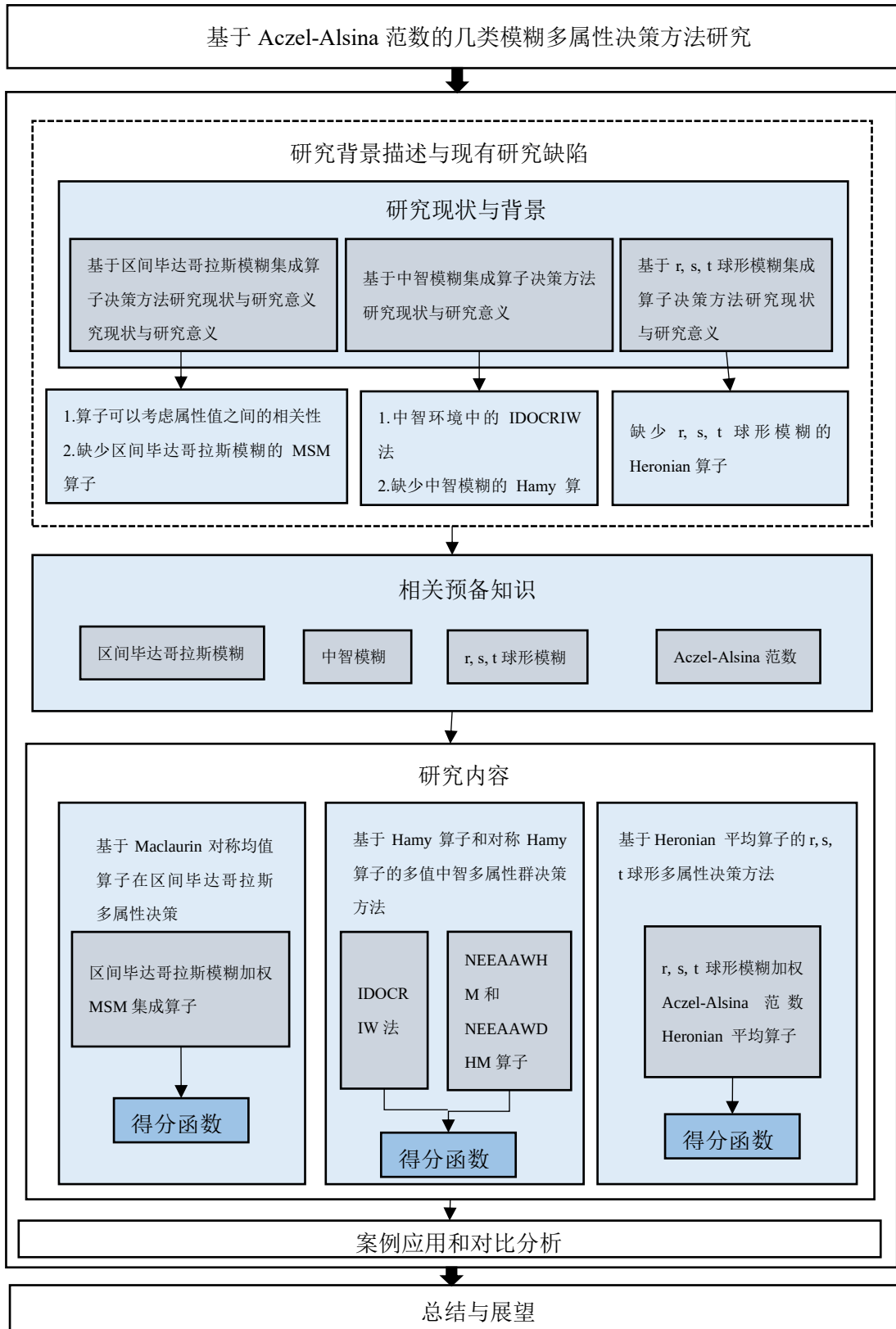


图 1-1 本文研究框架

1.4 创新点

本文主要分析了 Aczel-Alsina 范数在多属性决策上的应用研究, 拓宽 Aczel-Alsina 范数的应用领域, 主要创新点有以下几个方面:

(1) 在区间值毕达哥拉斯模糊 (IVPF) 中构建 Aczel Alsina 范数的 Aczel Alsina Maclaurin 对称均值 (AAMSM) 算子, 并应用于电池供应商选择案例。

(2) 在多值中智模糊环境下, 结合 Aczel-Alsina 范数构建 Aczel-Alsina Hamy 平均 (AAHM) 算子和对偶 Hamy 平均 (AADHM) 算子, 改进的 IDOCRIW 法确定权重, 并应用于可再生能源案例。

(3) 在 r, s, t 球形模糊环境下, 结合 Aczel-Alsina 范数构建 Aczel-Alsina Heronian 平均 (AAHrM) 算子, 并应用于机器人选择案例中。

第 2 章 理论基础

本文回顾了几类模糊环境下的基础理论, 包括区间值毕达哥拉斯模糊、多值中智模糊环境、 r, s, t 球形模糊环境相关概念, 然后解释了 Aczel-Alsina 范数的相关概念以及在上述几类环境中的一些基本运算。

2.1 几类模糊环境下的基础理论

2.1.1 区间值毕达哥拉斯模糊相关概念

定义 2.1.1^[62] 设 X 为论域, 称 $A = \{\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle\}$ 为论域 X 上的毕达哥拉斯模糊集, 其中 $\mu_A: X \rightarrow [0,1]$, $\nu_A: X \rightarrow [0,1]$ 是 X 上的两个映射, 并且满足

$$(\mu_A(x))^2 + (\nu_A(x))^2 \leq 1 \quad (2.1)$$

其中: μ_A 是 $X \rightarrow [0,1]$ 的隶属度; ν_A 是 $X \rightarrow [0,1]$ 的非属度, 犹豫度 π_A 可以表示为

$$\pi_A = \sqrt{1 - (\mu_A(x))^2 - (\nu_A(x))^2} \quad (2.2)$$

定义 2.1.2^[62]: 设 X 为论域, 称

$$A = \{\langle x, [\mu_A^L(x), \mu_A^U(x)], [\nu_A^L(x), \nu_A^U(x)] \mid x \in X \rangle\}$$

为论域 X 上的一个区间值毕达哥拉斯模糊集, 其中 $[\mu^L(x), \mu^U(x)] \subseteq [0,1]$,

$[\nu^L(x), \nu^U(x)] \subseteq [0,1]$ 分别表示元素 x 在 A 的区间值隶属度和区间值非隶属度,

且对于任意元素 x 都有 $x \in A$ 有 $\mu^L(x) \geq 0$, $\nu^L(x) \geq 0$, $0 \leq (\mu^U(x))^2 + (\nu^U(x))^2 \leq 1$,

$$\pi_A(x) = (\pi^L(x), \pi^U(x)) = \left(\sqrt{1 - (\mu^U(x))^2 - (\nu^U(x))^2}, \sqrt{1 - (\mu^L(x))^2 - (\nu^L(x))^2} \right) \quad (2.3)$$

$\pi_A(x)$ 为 x 隶属于 A 的犹豫度。

2.1.2 中智模糊

定义 2.1.3^[8] 设 $Y = \{y_k \mid k=1, 2, \dots, m\}$ 为有限全域集 Y 上多值中智模糊集的 M 被定义为

$$M = \{ \langle y_k, M_T(y_k), M_I(y_k), M_F(y_k) \rangle | y_k \in Y \} \quad (2.4)$$

其中 $M_T(y_k), M_I(y_k), M_F(y_k)$ 分别为具有相同或不同模糊值的真、不确定、假序列，

$$M_T(y_k) = (\alpha_T^1(y_k), \alpha_T^2(y_k), \dots, \alpha_T^{r_k}(y_k)),$$

$$M_I(y_k) = (\alpha_I^1(y_k), \alpha_I^2(y_k), \dots, \alpha_I^{r_k}(y_k)),$$

$$M_F(y_k) = (\alpha_F^1(y_k), \alpha_F^2(y_k), \dots, \alpha_F^{r_k}(y_k)), \quad y_k \in Y,$$

r_k 表示序列的长度，满足 $0 \leq \sup M_T(y_k) + \sup M_I(y_k) + \sup M_F(y_k) \leq 3$ ($k=1, 2, \dots, m$)。

为了方便，在按降序排列中，在 M 的 NMVE 第 k 个元素可以被表示为

$$M_{S_k} = \langle M_T(y_k), M_I(y_k), M_F(y_k) \rangle = \langle (\alpha_{Tk}^1(y_k), \alpha_{Tk}^2(y_k), \dots, \alpha_{Tk}^{r_k}(y_k)), (\alpha_{Ik}^1(y_k), \alpha_{Ik}^2(y_k), \dots, \alpha_{Ik}^{r_k}(y_k)), (\alpha_{Fk}^1(y_k), \alpha_{Fk}^2(y_k), \dots, \alpha_{Fk}^{r_k}(y_k)) \rangle.$$

定义 2.1.4^[8] 设 $M_{S_k} = \langle M_T(y_k), M_I(y_k), M_F(y_k) \rangle$ ，其中

$$M_T(y_k) = (\alpha_T^1(y_k), \alpha_T^2(y_k), \dots, \alpha_T^{r_k}(y_k)),$$

$$M_I(y_k) = (\alpha_I^1(y_k), \alpha_I^2(y_k), \dots, \alpha_I^{r_k}(y_k)),$$

$$M_F(y_k) = (\alpha_F^1(y_k), \alpha_F^2(y_k), \dots, \alpha_F^{r_k}(y_k)),$$

为 NMVE 的第 k 个元素。其 NEE 可表示如下：

$$NE_k = \langle (\alpha_{Tk}, e_{Tk}), (\alpha_{Ik}, e_{Ik}), (\alpha_{Fk}, e_{Fk}) \rangle, \quad (2.5)$$

其中 $\alpha_{Tk}, \alpha_{Ik}, \alpha_{Fk} \in [0, 1]$ 为真、不确定性和假度序列的平均值， $e_{Tk}, e_{Ik}, e_{Fk} \in [0, 1]$

为真、不确定性和假度序列的归一化熵值，由下式得到：

$$(1) \quad \alpha_{Tk} = \frac{1}{r_k} \sum_{j=1}^{r_k} \alpha_{Tk}^j \quad \text{和} \quad e_{Tk} = -\frac{1}{\ln r_k} \sum_{j=1}^{r_k} \left(\frac{\alpha_{Tk}^j}{\sum_{j=1}^{r_k} \alpha_{Tk}^j} \ln \frac{\alpha_{Tk}^j}{\sum_{j=1}^{r_k} \alpha_{Tk}^j} \right);$$

$$(2) \quad \alpha_{I_k} = \frac{1}{r_k} \sum_{j=1}^{r_k} \alpha_{I_k}^j \text{ 和 } e_{I_k} = -\frac{1}{\ln r_k} \sum_{j=1}^{r_k} \left(\frac{\alpha_{I_k}^j}{\sum_{j=1}^{r_k} \alpha_{I_k}^j} \ln \frac{\alpha_{I_k}^j}{\sum_{j=1}^{r_k} \alpha_{I_k}^j} \right);$$

$$(3) \quad \alpha_{F_k} = \frac{1}{r_k} \sum_{j=1}^{r_k} \alpha_{F_k}^j \text{ 和 } e_{F_k} = -\frac{1}{\ln r_k} \sum_{j=1}^{r_k} \left(\frac{\alpha_{F_k}^j}{\sum_{j=1}^{r_k} \alpha_{F_k}^j} \ln \frac{\alpha_{F_k}^j}{\sum_{j=1}^{r_k} \alpha_{F_k}^j} \right)。$$

注：由于 r_k 分量的熵不能超过 $\ln r_k (r_k > 1)$ ，所以定义的归一化香农熵测度满足

$e_{T_k}, e_{I_k}, e_{F_k} \in [0, 1]$ ，并且存在如下结果：

$$\sum_{j=1}^{r_k} \frac{\alpha_{T_k}^j}{\sum_{j=1}^{r_k} \alpha_{T_k}^j} = 1, \sum_{j=1}^{r_k} \frac{\alpha_{I_k}^j}{\sum_{j=1}^{r_k} \alpha_{I_k}^j} = 1, \sum_{j=1}^{r_k} \frac{\alpha_{F_k}^j}{\sum_{j=1}^{r_k} \alpha_{F_k}^j} = 1$$

满足香农熵条件。当多值序列中所有分量的值相同时，归一化香农熵等于 1。

2.1.3 r, s, t 球形模糊

定义 2.1.5 ^[10] 设 Y 为一个论域。 r, s, t 球形模糊集 $(r, s, t\text{-SPFS}) M$ 在 Y 上表示为

$$M = \{ \langle y, \mu(y), \theta(y), \nu(y) \rangle | y \in Y \} \quad (2.6)$$

其中 $\mu: Y \rightarrow [0, 1]$ ， $\theta: Y \rightarrow [0, 1]$ ， $\nu: Y \rightarrow [0, 1]$ ，表示为隶属等级（MG），中性等级（NG），非隶属等级（NMG），对于任意的 $y \in Y$ 有自然数 r, s, t 使 $0 \leq \mu^r(y) + \theta^s(y) + \nu^t(y) \leq 1$ ，不确定的度 $\pi(y) = \sqrt[l]{1 - \mu^r(y) - \theta^s(y) - \nu^t(y)}$ ，其中 l 是 r, s 和 t 的最小公倍数。

2.2 Aczel-Alsina 范数的相关运算定律

定义 2.2.1 ^[54] 设 x 和 y 为两个随机的非负实数，Aczel-Alsina 范数和余范数可表示为：

$$T_A^\varphi(x, y) = e^{(-((-\ln x)^\varphi + (-\ln y)^\varphi))^{1/\varphi}}, \varphi > 0 \quad (2.7)$$

$$S_A^\varphi(x, y) = 1 - e^{(-((-\ln(1-x))^\varphi + (-\ln(1-y))^\varphi))^{1/\varphi}}, \varphi > 0 \quad (2.8)$$

基于 IVPFS 概念和定义 2.2.1, 提出了 IVPFN 的 Aczel-Alsina 运算定律。

定义 2.2.2^[63] 设 $p = ([\mu^L, \mu^U], [\nu^L, \nu^U])$, $p_1 = ([\mu_1^L, \mu_1^U], [\nu_1^L, \nu_1^U])$,

$p_2 = ([\mu_2^L, \mu_2^U], [\nu_2^L, \nu_2^U])$, 是三个区间毕达哥拉斯模糊集 (IVPIFS), 则

Aczel-Alsina 算子的定义运算如下:

(1)

$$p_1 \oplus p_2 = \left[\sqrt{1 - e^{-((-\log(1-(\mu_1^L)^2))^\varphi + (-\log(1-(\mu_2^L)^2))^\varphi))^{1/\varphi}}}, \sqrt{1 - e^{-((-\log(1-(\mu_1^U)^2))^\varphi + (-\log(1-(\mu_2^U)^2))^\varphi))^{1/\varphi}}} \right],$$

$$\left[\sqrt{e^{-((-\log(\nu_1^L)^2)^\varphi + (-\log(\nu_2^L)^2)^\varphi))^{1/\varphi}}}, \sqrt{e^{-((-\log(\nu_1^U)^2)^\varphi + (-\log(\nu_2^U)^2)^\varphi))^{1/\varphi}}} \right] >$$

(2)

$$p_1 \otimes p_2 = \left[\sqrt{e^{-((-\log(\mu_1^L)^2)^\varphi + (-\log(\mu_2^L)^2)^\varphi))^{1/\varphi}}}, \sqrt{e^{-((-\log(\mu_1^U)^2)^\varphi + (-\log(\mu_2^U)^2)^\varphi))^{1/\varphi}}} \right],$$

$$\left[\sqrt{1 - e^{-((-\log(1-(\nu_1^L)^2))^\varphi + (-\log(1-(\nu_2^L)^2))^\varphi))^{1/\varphi}}}, \sqrt{1 - e^{-((-\log(1-(\nu_1^U)^2))^\varphi + (-\log(1-(\nu_2^U)^2))^\varphi))^{1/\varphi}}} \right] >$$

(3)

$$p^\lambda = \left[\sqrt{e^{-\lambda(-\log(\nu^L)^2)^\varphi}}, \sqrt{e^{-\lambda(-\log(\nu^U)^2)^\varphi}} \right], \left[\sqrt{1 - e^{-\lambda(-\log(1-(\mu^L)^2))^\varphi}}, \sqrt{1 - e^{-\lambda(-\log(1-(\mu^U)^2))^\varphi}} \right] >$$

(4)

$$\lambda p = \left[\sqrt{1 - e^{-\lambda(-\log(1-(\mu^L)^2))^\varphi}}, \sqrt{1 - e^{-\lambda(-\log(1-(\mu^U)^2))^\varphi}} \right], \left[\sqrt{e^{-\lambda(-\log(\nu^L)^2)^\varphi}}, \sqrt{e^{-\lambda(-\log(\nu^U)^2)^\varphi}} \right] >.$$

定理 2.2.1^[63]: 设 $p = ([\mu^L, \mu^U], [\nu^L, \nu^U])$, $p_1 = ([\mu_1^L, \mu_1^U], [\nu_1^L, \nu_1^U])$,

$p_2 = ([\mu_2^L, \mu_2^U], [\nu_2^L, \nu_2^U])$ 是三个区间毕达哥拉斯模糊集, 则有

$$(1) \quad p_1 \oplus p_2 = p_2 \oplus p_1;$$

$$(2) \quad p_1 \otimes p_2 = p_2 \otimes p_1;$$

$$(3) \quad \lambda(p_1 \oplus p_2) = \lambda p_1 \oplus \lambda p_2;$$

$$(4) \quad (\lambda_1 + \lambda_2)p = \lambda_1 p \oplus \lambda_2 p, \quad \lambda_1, \lambda_2 > 0;$$

$$(5) \quad (p_1 \otimes p_2)^\lambda = p_1^\lambda \otimes p_2^\lambda;$$

$$(6) \quad p^{\lambda_1} \otimes p^{\lambda_2} = p^{(\lambda_1 + \lambda_2)}, \quad \lambda_1, \lambda_2 > 0.$$

基于 NEE 概念和定义 2.2.1, 提出了 NEE 的 Aczel-Alsina 运算定律。

定义 2.2.3 [8] 设 $NE_1 = \langle (\alpha_{T1}, e_{T1}), (\alpha_{I1}, e_{I1}), (\alpha_{F1}, e_{F1}) \rangle$,

$$NE_2 = \langle (\alpha_{T2}, e_{T2}), (\alpha_{I2}, e_{I2}), (\alpha_{F2}, e_{F2}) \rangle$$

是两个 NEEs, $\varphi \geq 1, \lambda > 0$, 则 Aczel-Alsina 算子的定义运算如下:

(1)

$$NE_1 \oplus NE_2 = \left\langle \left[\left(1 - e^{-((- \log((1 - \alpha_{T1}))^\varphi + (- \log((1 - \alpha_{T2}))^\varphi)^{1/\varphi})}, \left(1 - e^{-((- \log((1 - e_{T1}))^\varphi + (- \log((1 - e_{T2}))^\varphi)^{1/\varphi})} \right) \right], \right. \\ \left. \left[\left(e^{-((- \log \alpha_{I1})^\varphi + (- \log \alpha_{I2})^\varphi)^{1/\varphi}} \right), \left(e^{-((- \log e_{I1})^\varphi + (- \log e_{I2})^\varphi)^{1/\varphi}} \right)^{1/q} \right], \right. \\ \left. \left[\left(e^{-((- \log \alpha_{F1})^\varphi + (- \log \alpha_{F2})^\varphi)^{1/\varphi}} \right), \left(e^{-((- \log e_{F1})^\varphi + (- \log e_{F2})^\varphi)^{1/\varphi}} \right) \right] \right\rangle;$$

(2)

$$NE_1 \otimes NE_2 = \left\langle \left[\left(e^{-((- \log \alpha_{T1})^\varphi + (- \log \alpha_{T2})^\varphi)^{1/\varphi}} \right), \left(e^{-((- \log e_{T1})^\varphi + (- \log e_{T2})^\varphi)^{1/\varphi}} \right) \right], \right. \\ \left[\left(1 - e^{-((- \log((1 - \alpha_{I1}))^\varphi + (- \log((1 - \alpha_{I2}))^\varphi)^{1/\varphi})}, \left(1 - e^{-((- \log((1 - e_{I1}))^\varphi + (- \log((1 - e_{I2}))^\varphi)^{1/\varphi})} \right) \right], \right. \\ \left. \left[\left(1 - e^{-((- \log((1 - \alpha_{F1}))^\varphi + (- \log((1 - \alpha_{F2}))^\varphi)^{1/\varphi})}, \left(1 - e^{-((- \log((1 - e_{F1}))^\varphi + (- \log((1 - e_{F2}))^\varphi)^{1/\varphi})} \right) \right] \right\rangle;$$

(3)

$$NE_1^\lambda = \left\langle \left[\left(e^{-(\lambda(- \log \alpha_{T1})^\varphi)^{1/\varphi}} \right), \left(e^{-(\lambda(- \log e_{T1})^\varphi)^{1/\varphi}} \right) \right], \right. \\ \left[\left(1 - e^{-(\lambda(- \log((1 - \alpha_{I1}))^\varphi)^{1/\varphi}} \right), \left(1 - e^{-(\lambda(- \log((1 - e_{I1}))^\varphi)^{1/\varphi}} \right) \right], \\ \left[\left(1 - e^{-(\lambda(- \log((1 - \alpha_{F1}))^\varphi)^{1/\varphi}} \right), \left(1 - e^{-(\lambda(- \log((1 - e_{F1}))^\varphi)^{1/\varphi}} \right) \right] \right\rangle;$$

(4)

$$\lambda NE_1 = \left\langle \left[\left(1 - e^{-(\lambda(- \log((1 - \alpha_{T1}))^\varphi)^{1/\varphi}} \right), \left(1 - e^{-(\lambda(- \log((1 - e_{T1}))^\varphi)^{1/\varphi}} \right) \right], \right. \\ \left[\left(e^{-(\lambda(- \log \alpha_{I1})^\varphi)^{1/\varphi}} \right), \left(e^{-(\lambda(- \log e_{I1})^\varphi)^{1/\varphi}} \right) \right], \\ \left[\left(e^{-(\lambda(- \log \alpha_{F1})^\varphi)^{1/\varphi}} \right), \left(e^{-(\lambda(- \log e_{F1})^\varphi)^{1/\varphi}} \right) \right] \right\rangle.$$

定义 2.2.4^[8] 设 NE_1, NE_2 为两个 NEEs, 其中

$$NE_1 = \langle (\alpha_{T1}, e_{T1}), (\alpha_{I1}, e_{I1}), (\alpha_{F1}, e_{F1}) \rangle ;$$

$$NE_2 = \langle (\alpha_{T2}, e_{T2}), (\alpha_{I2}, e_{I2}), (\alpha_{F2}, e_{F2}) \rangle ;$$

两者关系被定义如下:

$$(1) \quad NE_1 \supseteq NE_2 \Leftrightarrow \alpha_{T1} \geq \alpha_{T2}, e_{T1} \geq e_{T2}, \alpha_{I1} \geq \alpha_{I2}, e_{I1} \geq e_{I2}, \alpha_{F1} \geq \alpha_{F2} \text{ 和 } e_{F1} \geq e_{F2} ;$$

$$(2) \quad NE_1 = NE_2 \Leftrightarrow NE_1 \supseteq NE_2 \text{ 和 } NE_2 \supseteq NE_1 ;$$

$$(3) \quad NE_1 \cup NE_2 = \langle (\alpha_{T1} \vee \alpha_{T2}, e_{T1} \vee e_{T2}), (\alpha_{I1} \vee \alpha_{I2}, e_{I1} \vee e_{I2}), (\alpha_{F1} \vee \alpha_{F2}, e_{F1} \vee e_{F2}) \rangle ;$$

$$(4) \quad NE_1 \cap NE_2 = \langle (\alpha_{T1} \wedge \alpha_{T2}, e_{T1} \wedge e_{T2}), (\alpha_{I1} \wedge \alpha_{I2}, e_{I1} \wedge e_{I2}), (\alpha_{F1} \wedge \alpha_{F2}, e_{F1} \wedge e_{F2}) \rangle ;$$

$$(5) \quad (NE_1)^C = \langle (\alpha_{F1}, e_{F1}), (\alpha_{I1}, e_{I1}), (\alpha_{T1}, e_{T1}) \rangle .$$

基于 r, s, t -SPFS 概念和定义 2.2.1, 提出了 r, s, t -SPFN 的 Aczel-Alsina 运算定律。

定义 2.2.5^[64] 设 ψ, ψ_1, ψ_2 为任意三个 r, s, t -SPFNs, $\varphi \geq 1$, 并且 $\lambda > 0$, 则对它们的 AA - t-NM 和 t-CM 运算表示为

$$(1) \quad \psi_1 \oplus \psi_2 = \begin{pmatrix} \sqrt[r^*]{1 - \exp\left(-\left(\left(-\ln(1 - \mu_{\psi_1}^{r*})\right)^\varphi + \left(-\ln(1 - \mu_{\psi_2}^{r*})\right)^\varphi\right)^{1/\varphi}}\right)}, \\ \sqrt[s^*]{\exp\left(-\left(\left(-\ln \theta_{\psi_1}^{s*}\right)^\varphi + \left(-\ln \theta_{\psi_2}^{s*}\right)^\varphi\right)^{1/\varphi}}\right)}, \\ \sqrt[t^*]{\exp\left(-\left(\left(-\ln \nu_{\psi_1}^{t*}\right)^\varphi + \left(-\ln \nu_{\psi_2}^{t*}\right)^\varphi\right)^{1/\varphi}}\right)} \end{pmatrix} ;$$

$$(2) \quad \psi_1 \otimes \psi_2 = \begin{pmatrix} \sqrt[r^*]{\exp\left(-\left(\left(-\ln \mu_{\psi_1}^{r*}\right)^\varphi + \left(-\ln \mu_{\psi_2}^{r*}\right)^\varphi\right)^{1/\varphi}}\right)}, \\ \sqrt[s^*]{1 - \exp\left(-\left(\left(-\ln(1 - \theta_{\psi_1}^{s*})\right)^\varphi + \left(-\ln(1 - \theta_{\psi_2}^{s*})\right)^\varphi\right)^{1/\varphi}}\right)}, \\ \sqrt[t^*]{1 - \exp\left(-\left(\left(-\ln(1 - \nu_{\psi_1}^{t*})\right)^\varphi + \left(-\ln(1 - \nu_{\psi_2}^{t*})\right)^\varphi\right)^{1/\varphi}}\right)} \end{pmatrix} ;$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \psi^\lambda &= \left(\begin{array}{c} r^* \sqrt[\varphi]{\exp\left(-\left(\lambda\left(-\ln \mu_\psi^{r^*}\right)^\varphi\right)^{1/\varphi}\right)}, \\ s^* \sqrt[\varphi]{1-\exp\left(-\left(\lambda\left(-\ln(1-\theta_\psi^{s^*})\right)^\varphi\right)^{1/\varphi}\right)}, \\ t^* \sqrt[\varphi]{1-\exp\left(-\left(\lambda\left(-\ln(1-\nu_\psi^{t^*})\right)^\varphi\right)^{1/\varphi}\right)} \end{array} \right) ; \\
 (4) \quad \lambda\psi &= \left(\begin{array}{c} r^* \sqrt[\varphi]{1-\exp\left(-\left(\lambda\left(-\ln(1-\mu_\psi^{r^*})\right)^\varphi\right)^{1/\varphi}\right)}, \\ s^* \sqrt[\varphi]{\exp\left(-\left(\lambda\left(-\ln \theta_\psi^{s^*}\right)^\varphi\right)^{1/\varphi}\right)}, \\ t^* \sqrt[\varphi]{\exp\left(-\left(\lambda\left(-\ln \nu_\psi^{t^*}\right)^\varphi\right)^{1/\varphi}\right)} \end{array} \right) .
 \end{aligned}$$

r, s, t -球形模糊数的运算律由定理 2.2.2 给出。

定理 2.2.2^[64] 设 $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ 是任意三个任意 r, s, t -SPFNs, 有

1. $\varphi_1 \oplus \varphi_2 = \varphi_2 \oplus \varphi_1$;
2. $\varphi_1 \otimes \varphi_2 = \varphi_2 \otimes \varphi_1$;
3. $\lambda(\varphi_1 \oplus \varphi_2) = \lambda\varphi_1 \oplus \lambda\varphi_2, \lambda > 0$;
4. $(\lambda_1 + \lambda_2)\varphi = \lambda_1\varphi + \lambda_2\varphi, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$;
5. $(\varphi_1 \otimes \varphi_2)^\lambda = \varphi_1^\lambda \otimes \varphi_2^\lambda, \lambda > 0$;
6. $\varphi^{\lambda_1} \otimes \varphi^{\lambda_2} = \varphi^{(\lambda_1 + \lambda_2)}, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ 。

本章主要论述了模糊集的相关概念以及 Aczel-Alsina 范数分别与区间值毕达哥拉斯模糊集、多值中智模糊集以及 r, s, t 球形模糊相结合的 Aczel-Alsina 运算定律。接下来, 主要论述在不同模糊环境下的 Aczel-Alsina 范数相结合的决策方法, 并应用于实际案例中。

第3章 基于 MSM 的区间毕达哥拉斯模糊多属性决策方法

在进行多属性决策时，决策者往往会出现判断犹豫不决的情况，其主要原因是属性与属性之间的相关性。Aczel-Alsina Maclaurin 对称均值算子（AAMSM）是在区间值毕达哥拉斯模糊（IVPF）中构建的。其优点是决策者可以根据风险偏好做出决策，适用于处理不确定环境中的复杂数据。首先分析了区间值毕达哥拉斯模糊 Aczel-Alsina Maclaurin 对称均值（IVPFAAMSM）算子的性质，提出了 IVPFAAMSM 多属性决策方法，并进行了灵敏度分析。最后，将提出的方法应用于选择电池供应商案例，说明了该方法的可行性和有效性。

3.1 预备知识

为了更好的对决策的综合属性进行分析，下面给出得分函数和精确函数的相关定义。

定义 3.1.1^[65] 设 $p = ([\mu^L, \mu^U], [\nu^L, \nu^U])$ 为区间值毕达哥拉斯模糊数，则得分函数定义为

$$S(p) = \frac{1}{2} [(\mu^L(x))^2 + (\mu^U(x))^2 - (\nu^L(x))^2 - (\nu^U(x))^2]. \quad (3.1)$$

定义 3.1.2^[65] 设 $p = ([\mu^L, \mu^U], [\nu^L, \nu^U])$ 为区间值毕达哥拉斯模糊数，则精确函数定义为

$$H(p) = \frac{1}{2} [(\mu^L(x))^2 + (\mu^U(x))^2 + (\nu^L(x))^2 + (\nu^U(x))^2]. \quad (3.2)$$

定义 3.1.3^[66] 设 X 为论域，若 p_i 是与 X 有关的两个 IVPFS， $i=1, 2$ ，

- (1) 若 $S(p_1) > S(p_2)$ ，则 $p_1 \succ p_2$ ，即 p_1 优于 p_2 ；
- (2) 若 $S(p_1) < S(p_2)$ ，则 $p_1 \prec p_2$ ，即 p_1 劣于 p_2 ；
- (3) 若 $S(p_1) = S(p_2)$ ，则有
 - (i) $H(p_1) > H(p_2)$ 则 $p_1 \succ p_2$ ，即 p_1 优于 p_2 ；
 - (ii) $H(p_1) < H(p_2)$ 则 $p_1 \prec p_2$ ，即 p_1 劣于 p_2 ；
 - (iii) $H(p_1) = H(p_2)$ 则 $p_1 \sim p_2$ ，即 p_1 与 p_2 无异。

根据在定义 2.2.2 IVPFE 上的运算法则, 设 $p_i (i=1, 2, \dots, n)$ 为一列 IVPFE , 相关权重向量 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$, 满足 $\omega_i \geq 0$ 且 $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$, 则有

(1) 区间毕达哥拉斯模糊加权平均 (IVPFAAWA) 算子^[63]:

$$\begin{aligned} IVPFAAWA(p_1, p_2, \dots, p_n) &= \bigoplus_{i=1}^n \omega_i p_i \\ &= \left[\left[\sqrt{1 - e^{-\left(\sum_{i=1}^n \omega_i (-\log((1 - (\mu_i^L)^2))^{\varphi} \right)^{1/\varphi}}} \right]^{1/\varphi}, \sqrt{1 - e^{-\left(\sum_{i=1}^n \omega_i (-\log((1 - (\mu_i^U)^2))^{\varphi} \right)^{1/\varphi}}} \right]^{1/\varphi}, \right. \\ &\quad \left. \left[\sqrt{e^{-\left(\sum_{i=1}^q \omega_i (-\log((v_i^L)^2))^{\varphi} \right)^{1/\varphi}}}, \sqrt{e^{-\left(\sum_{i=1}^q \omega_i (-\log((v_i^U)^2))^{\varphi} \right)^{1/\varphi}}} \right] \right] \end{aligned} \quad (3.3)$$

(2) 区间毕达哥拉斯模糊加权几何 (IVPFAAWG) 算子^[67]:

$$\begin{aligned} IVPFAAWG(p_1, p_2, \dots, p_n) &= \bigoplus_{i=1}^n p_i^{\omega_i} = \left[\left[\sqrt{e^{-\left(\sum_{i=1}^n \omega_i (-\log((\mu_i^L)^2))^{\varphi} \right)^{1/\varphi}}}, \sqrt{e^{-\left(\sum_{i=1}^n \omega_i (-\log((\mu_i^U)^2))^{\varphi} \right)^{1/\varphi}}} \right]^{1/\varphi}, \right. \\ &\quad \left. \left[\sqrt{1 - e^{-\left(\sum_{i=1}^n \omega_i (-\log((1 - (v_i^L)^2))^{\varphi} \right)^{1/\varphi}}}, \sqrt{1 - e^{-\left(\sum_{i=1}^n \omega_i (-\log((1 - (v_i^U)^2))^{\varphi} \right)^{1/\varphi}}} \right]^{1/\varphi} \right] \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

定义 3.1.4^[25] 设 $a_i (i=1, 2, \dots, n)$ 是一组非空实数, 并且 $r=1, 2, \dots, n$, 如果

$$MSM^{(r)}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \left[\frac{\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \prod_{j=1}^r a_{i_j}}{C_r^n} \right]^{1/r} \quad (3.5)$$

则称为 Maclaurin 对称平均算子, 简称 $MSM^{(r)}$ 。其中 $(1, 2, \dots, n)$ 中遍历组合的 r 元

组为 $(i_1, i_2, \dots, i_r)$, $C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ 为其中的二项式系数。

(1) 若 $a \geq 0$ 且对任意的 i , 都有 $a_i = a$, 则 $MSM(a_1, a_2, \dots, a_n) = a$;

(2) 若 $a_i \leq b_i$, 则 $MSM^{(r)}(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq MSM^{(r)}(b_1, b_2, \dots, b_n)$;

(3) $MIN(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq MSM^{(r)}(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq MAX(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 。

3.2 区间毕达哥拉斯模糊 Maclaurin 对称平均算子

(IVPFAAMSM) 及其性质

定义 3.2.1 设 $p_i (i=1,2,\dots,n)$ 是一组区间毕达哥拉斯模糊元, 且 $r=1,2,\dots,n$, 若

$$IVPFAAMSM^{(r)}(p_1, p_2, \dots, p_n) = \left[\frac{\bigoplus_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \bigotimes_{j=1}^r p_{i_j}}{C_r^n} \right]^{1/r} \quad (3.6)$$

则称其为区间值毕达哥拉斯模糊 Aczel – Alsina Maclaurin 对称平均算子, 简记为 $IVPFAAMSM^{(r)}$ 算子。其中 $(1,2,\dots,n)$ 中遍历组合的 r 元组为 $(i_1, i_2, \dots, i_r)$,

$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ 为其中的二项式系数。

定理 3.2.1 设 $p_i (i=1,2,\dots,n)$ 为一列 IVPFE, 则运用 $IVPFAAMSM^{(r)}$ 算子集成得到的模糊集仍为 IVPFE, 且有

$$\begin{aligned} IVPFAAMSM^{(r)} = & \left\{ \left[\left(\sqrt[1-\frac{\sum_{j=1}^r (-\log(1-e^{-(-\log((\mu_{i_j}^L)^2)^{\varphi})^{1/\varphi}})}{C_r^n})}{1-e} \right)^{1/\varphi} \right]^{1/r}, \left[\left(\sqrt[1-\frac{\sum_{j=1}^r (-\log(1-e^{-(-\log((\mu_{i_j}^U)^2)^{\varphi})^{1/\varphi}})}{C_r^n})}{1-e} \right)^{1/\varphi} \right]^{1/r} \right\}, \\ & \left\{ \left[\left(\sqrt[e^{-\frac{\sum_{j=1}^r (-\log(1-(v_{i_j}^L)^2)^{\varphi})^{1/\varphi}}}{C_r^n}}]{e} \right)^{1/\varphi} \right]^{1/r}, \left[\left(\sqrt[e^{-\frac{\sum_{j=1}^r (-\log(1-(v_{i_j}^U)^2)^{\varphi})^{1/\varphi}}}{C_r^n}}]{e} \right)^{1/\varphi} \right]^{1/r} \right\} \end{aligned} \quad (3.7)$$

证明: (1) 根据定义可得

$$\begin{aligned} \bigotimes_{j=1}^r p_{i_j} = & \left[\left[\sqrt[e^{-\frac{\sum_{j=1}^r (-\log((\mu_{i_j}^L)^2)^{\varphi})^{1/\varphi}}}{C_r^n}}]{e}, \sqrt[e^{-\frac{\sum_{j=1}^r (-\log((\mu_{i_j}^U)^2)^{\varphi})^{1/\varphi}}}{C_r^n}}]{e} \right], \right. \\ & \left. \left[\sqrt[1-\frac{\sum_{j=1}^r (-\log(1-(v_{i_j}^L)^2)^{\varphi})^{1/\varphi}}{C_r^n}}]{1-e}, \sqrt[1-\frac{\sum_{j=1}^r (-\log(1-(v_{i_j}^U)^2)^{\varphi})^{1/\varphi}}{C_r^n}}]{1-e} \right] \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \bigoplus_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \bigotimes_{j=1}^r p_{i_j}^{\sim} = \\
 & \left\{ \left[\sqrt{1-e^{-\left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} (-\log(1-e^{-\left(\sum_{j=1}^r (-\log((\mu_{i_j}^L)^2))^{\varphi})^{1/\varphi}} \right)^{\varphi})^{1/\varphi}} \right)}} \right], \left[\sqrt{1-e^{-\left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} (-\log(1-e^{-\left(\sum_{j=1}^r (-\log((\mu_{i_j}^U)^2))^{\varphi})^{1/\varphi}} \right)^{\varphi})^{1/\varphi}} \right)}} \right], \right. \\
 & \left. \left[\sqrt{e^{-\left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} (-\log(1-e^{-\left(\sum_{j=1}^r (-\log(1-(v_{i_j}^L)^2))^{\varphi})^{1/\varphi}} \right)^{\varphi})^{1/\varphi}} \right)}} \right], \left[\sqrt{e^{-\left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} (-\log(1-e^{-\left(\sum_{j=1}^r (-\log(1-(v_{i_j}^U)^2))^{\varphi})^{1/\varphi}} \right)^{\varphi})^{1/\varphi}} \right)}} \right] \right\} \\
 & \left[\frac{\bigoplus_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \bigotimes_{j=1}^r p_{i_j}^{\sim}}{C_r^n} \right]^{1/r} = \\
 & \left\{ \left(\left[\sqrt{1-e^{-\left(\frac{\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} (-\log(1-e^{-\left(\sum_{j=1}^r (-\log((\mu_{i_j}^L)^2))^{\varphi})^{1/\varphi}} \right)^{\varphi})^{1/\varphi}}{C_r^n} \right)}} \right]^{1/r} \right), \left(\left[\sqrt{1-e^{-\left(\frac{\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} (-\log(1-e^{-\left(\sum_{j=1}^r (-\log((\mu_{i_j}^U)^2))^{\varphi})^{1/\varphi}} \right)^{\varphi})^{1/\varphi}}{C_r^n} \right)}} \right]^{1/r} \right), \right. \\
 & \left. \left(\left[\sqrt{e^{-\left(\frac{\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} (-\log(1-e^{-\left(\sum_{j=1}^r (-\log(1-(v_{i_j}^L)^2))^{\varphi})^{1/\varphi}} \right)^{\varphi})^{1/\varphi}}{C_r^n} \right)}} \right]^{1/r} \right), \left(\left[\sqrt{e^{-\left(\frac{\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} (-\log(1-e^{-\left(\sum_{j=1}^r (-\log(1-(v_{i_j}^U)^2))^{\varphi})^{1/\varphi}} \right)^{\varphi})^{1/\varphi}}{C_r^n} \right)}} \right]^{1/r} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\mu^L(x) \geq 0, \quad v^L(x) \geq 0, \quad 0 \leq (\mu_{i_j}^U(x))^2 + (v_{i_j}^U(x))^2 \leq 1.$$

对 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, 满足 $0 \leq \mu_{i_j}^L \leq \mu_{i_j}^U \leq 1$, $0 \leq v_{i_j}^L \leq v_{i_j}^U \leq 1$, 有

$$0 \leq \left(\left[\sqrt{1-e^{-\left(\frac{\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} (-\log(1-e^{-\left(\sum_{j=1}^r (-\log((\mu_{i_j}^U)^2))^{\varphi})^{1/\varphi}} \right)^{\varphi})^{1/\varphi}}{C_n^r} \right)}} \right]^{1/r} \right) \leq 1,$$

$$\text{和 } 0 \leq \left(\left[\sqrt{e^{-\left(\frac{\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} (-\log(1-e^{-\left(\sum_{j=1}^r (-\log(1-(v_{i_j}^L)^2))^{\varphi})^{1/\varphi}} \right)^{\varphi})^{1/\varphi}}{C_n^r} \right)}} \right]^{1/r} \right) \leq 1;$$

且 $(\mu_{i_j}^U(x))^2 + (v_{i_j}^U(x))^2 \leq 1$, 即 $(\mu_{i_j}^U(x))^2 \leq 1 - (v_{i_j}^U(x))^2$, 对任意 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, 有

$$\sqrt{e^{-\left(\sum_{j=1}^r (-\log((\mu_{i_j}^U)^2))^{\varphi})^{1/\varphi}}} \leq \sqrt{e^{-\left(\sum_{j=1}^r (-\log(1-(v_{i_j}^U)^2))^{\varphi})^{1/\varphi}}},$$

$$\sqrt{1-e^{-\left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} (-\log(1-e^{-\left(\sum_{j=1}^r (-\log((\mu_{i_j}^U)^2))^{\varphi})^{1/\varphi}} \right)^{\varphi})^{1/\varphi}}} \leq \sqrt{1-e^{-\left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} (-\log(1-e^{-\left(\sum_{j=1}^r (-\log(1-(v_{i_j}^U)^2))^{\varphi})^{1/\varphi}} \right)^{\varphi})^{1/\varphi}}},$$

$$\left(\left[\sqrt{1-e^{-\left(\frac{\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} (-\log(1-e^{-\left(\sum_{j=1}^r (-\log((\mu_{i_j}^U)^2))^{\varphi})^{1/\varphi}} \right)^{\varphi})^{1/\varphi}}{C_n^r} \right)}} \right]^{2/r} \right) \leq \left(\left[\sqrt{1-e^{-\left(\frac{\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} (-\log(1-e^{-\left(\sum_{j=1}^r (-\log(1-(v_{i_j}^U)^2))^{\varphi})^{1/\varphi}} \right)^{\varphi})^{1/\varphi}}{C_n^r} \right)}} \right]^{2/r} \right);$$

即

$$\begin{aligned}
 & \left(\sqrt[r]{\frac{\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} (-\log(1-e^{-\frac{-(\sum_{j=1}^r (-\log(1-(\mu_{i_j}^U)^2)^{\varphi}))^{1/\varphi}}}{C_n^r}}))^{\varphi}}{1-e}} \right)^{1/r} + \left(\sqrt[r]{\frac{\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} (-\log(1-e^{-\frac{-(\sum_{j=1}^r (-\log(1-(v_{i_j}^U)^2)^{\varphi}))^{1/\varphi}}}{C_n^r}}))^{\varphi}}{e}} \right)^{1/r} \\
 & \leq \left(\sqrt[r]{\frac{\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} (-\log(1-e^{-\frac{-(\sum_{j=1}^r (-\log(1-(\mu_{i_j}^U)^2)^{\varphi}))^{1/\varphi}}}{C_n^r}}))^{\varphi}}{1-e}} \right)^{2/r} + \left(\sqrt[r]{\frac{\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} (-\log(1-e^{-\frac{-(\sum_{j=1}^r (-\log(1-(v_{i_j}^U)^2)^{\varphi}))^{1/\varphi}}}{C_n^r}}))^{\varphi}}{e}} \right)^{2/r} \leq 1
 \end{aligned}$$

定理 3.2.2 若 $p_i = ([\mu_i^L, \mu_i^U], [v_i^L, v_i^U])$ 是一组 IVPFNs, $IVPFAAMSM^{(r)}$ 可满足以下性质:

(1) (幂等性) 如果对于任意 $i=1,2,\dots,n$ 都有 $p_i = p$, 则

$$IVPFAAMSM^{(r)}(p_1, p_2, \dots, p_n) = p \quad (3.8)$$

(2) (置变不换性) 若 p_i' ($i=1,2,\dots,n$) 是 p_i 的任意一组置换, 则

$$IVPFAAMSM^{(r)}(p_1, p_2, \dots, p_n) = IVPFAAMSM^{(r)}(p_1', p_2', \dots, p_n') \quad (3.9)$$

(3) (单调性) 若 p_i' 和 p_i 为两个任意的 IVPFE, 对于任意 $i=1,2,\dots,n$, 如果有 $\mu_i^L \geq \mu_i'^L, \mu_i^U \geq \mu_i'^U, v_i^L \geq v_i'^L, v_i^U \geq v_i'^U$, 则

$$IVPFAAMSM^{(r)}(p_1, p_2, \dots, p_n) \geq IVPFAAMSM^{(r)}(p_1', p_2', \dots, p_n') \quad (3.10)$$

(4) (有界性) 设 $p^- = -\min p_i = ([\min_i \mu_i^L, \min_i \mu_i^U], [\min_i v_i^L, \min_i v_i^U])$,

$$p^+ = \max p_i = ([\max_i \mu_i^L, \max_i \mu_i^U], [\max_i v_i^L, \max_i v_i^U]),$$

则有

$$p^- \leq IVPFAAMSM^{(r)}(p_1, p_2, \dots, p_n) \leq p^+. \quad (3.11)$$

3.3 基于 IVPFAAWMSM 算子的多属性决策模型及其应用

3.3.1 IVPFAAWMSM 算子

定理 3.3.1 设 $p_i = ([\mu_i^L, \mu_i^U], [v_i^L, v_i^U])$ 是一系列 IVPFE, 其中 $i=1,2,\dots,n$,

相关的权重向量为 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$, 满足 $\omega_i \geq 0 (i=1,2,\dots,n)$ 且 $\sum_{\omega=1}^n \omega_i = 1$, 若

$$\begin{aligned}
 IVPFAAWMSM^{(r)} &= \left[\frac{\bigoplus_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \left(\bigotimes_{j=1}^r p_{i_j}^{\omega_{i_j}} \right)}{C_n^r} \right]^{1/r} = \\
 &\left[\left(\sqrt[1-r]{\frac{\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \left((-\log(1-e^{-\sum_{j=1}^r \omega_{i_j} (-\log((\mu_{i_j}^L)^2))^{\omega_{i_j}}}))^{1/\varphi} \right)}{C_n^r}} \right)^{\varphi}}{1-e^{-\left(\frac{\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \left((-\log(1-e^{-\sum_{j=1}^r \omega_{i_j} (-\log((\mu_{i_j}^U)^2))^{\omega_{i_j}}}))^{1/\varphi} \right)}{C_n^r}} \right)^{\varphi}}} \right)^{1/r}, \\
 &\left[\left(\sqrt[1-r]{\frac{\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \left((-\log(1-e^{-\sum_{j=1}^r \omega_{i_j} (-\log(1-(v_{i_j}^L)^2))^{\omega_{i_j}}}))^{1/\varphi} \right)}{C_n^r}} \right)^{\varphi}}{1-e^{-\left(\frac{\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \left((-\log(1-e^{-\sum_{j=1}^r \omega_{i_j} (-\log(1-(v_{i_j}^U)^2))^{\omega_{i_j}}}))^{1/\varphi} \right)}{C_n^r}} \right)^{\varphi}}} \right)^{1/r} \right] \\
 &\quad (3.12)
 \end{aligned}$$

则称 $IVPFAAWMSM^{(r)}$ 为区间毕达哥拉斯模糊 AA 加权 Maclaurin 平均算子。其中 $(i_1, i_2, \dots, i_r)$ 遍历组合 $(1, 2, \dots, n)$ 中所有 r 元组, $C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ 为二项式系数。

3.1.2 算法模型

设方案集为 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ 为属性集, 属性权重向量 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$, 满足 $\omega_j \geq 0$ 且 $\sum_{j=1}^n \omega_j = 1$ 。为了从方案中选择最佳方案, 现邀请专家针对选择方案运用专业知识进行综合评估得到多个区间值毕达哥拉斯模糊集, 进而构建出相应的区间值毕达哥拉斯模糊决策矩阵 $E = (p_{ij})_{m \times n}$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$ 。

具体步骤如下:

步骤 1 根据各选择方案相关的决策信息, 构建相应的区间值毕达哥拉斯模糊决策矩阵 $E = (p_{ij})_{m \times n}$ 。

步骤 2 决策信息标准化。将决策矩阵 E 规范化转化为规范矩阵,

$$p_{ij} = \begin{cases} p_{ij}, & C_j \text{ 为效益型属性} \\ p_{ij}^c, & C_j \text{ 为成本型属性} \end{cases}$$

步骤 3 运用 $IVPFAAWA$ 算子、 $IVPFAAWG$ 算子、 $IVPFAAWMSM$ 算子计算各选择方案 x_i 的综合属性 p_i 。

步骤 4 计算各选择方案综合属性 p_i 的得分函数 $S(p_i)$ 和精确函数 $H(p_i)$ 。

步骤 5 对各选择方案排序，选择出这些方案中综合性能值最高的方案。

3.4 案例分析

江铃集团新能源汽车有限公司（JMEV）由江铃汽车集团股份有限公司创建。其总部位于中国南昌。公司专注于新能源汽车的研发、制造、销售和服务，发展迅速。该公司希望在未来五年内打造多款新能源汽车车型和整个电动汽车平台^[68]。

JMEV 希望为其新能源汽车的电池选择顶级电池供应商，以提高其市场竞争力。经过初步筛选，以下五家供应商企业是潜在的电池供应商：

x_1 :天津力神电池股份有限公司； x_2 :宁德时代新能源科技股份有限公司；

x_3 :远东福斯特新能源有限公司； x_4 :深圳比亚迪锂电池有限公司；

x_5 :中航锂电（洛阳）有限公司。

公司要求决策者在五个备选方案 $X = \{x_i\}_{i=1}^5$ 中，根据四个属性选择最佳电池供应商。这些属性 $C = \{C_i\}_{i=1}^4$ 具体描述如下。

电池价格(C_1)：除了降低生产过程中的能源消耗和废物处理成本外，价格低廉的电池还能降低运营和维护成本。这不仅能提高企业的盈利能力和整体经济效益，还能增强企业的竞争力。

电池质量(C_2)：作为现代技术不可或缺的一部分，电池质量直接影响设备的性能和用户体验。因此，制造商在追求更高质量的电池时需要考虑这些关键因素，以满足用户对持久电力支持的需求。

物流效率(C_3)：及时将产品运送到约定地点对于保持客户满意度和市场份额至关重要。高效的物流系统可以帮助企业降低成本，提高生产效率，确保产品按时送达目的地。

电池安全(C_4)：虽然电池是我们日常生活中必需的能源，但使用或处置不当会危及我们的健康、安全、环境甚至电池本身。因此，电池安全极为重要。

为了保证决策结论的合理性，每年对潜在电池供应商进行评估是决策者的职责所在。本方法中评价指标的加权向量为 $\omega = (0.25, 0.28, 0.24, 0.23)^T$ ，评价数据为 $IVPFE$ 。为了维护市场的公平性和透明度，这一评估过程是必要的，以确保电池供应商的资质和产品质量得到考虑。

表 3-1 IVPF 决策矩阵

	C_1	C_2	C_3	C_4
x_1	$([0.55, 0.60], [0.25, 0.30])$	$([0.55, 0.60], [0.25, 0.30])$	$([0.50, 0.55], [0.30, 0.30])$	$([0.50, 0.50], [0.25, 0.30])$
x_2	$([0.45, 0.50], [0.30, 0.35])$	$([0.45, 0.45], [0.35, 0.35])$	$([0.50, 0.50], [0.30, 0.50])$	$([0.55, 0.60], [0.25, 0.35])$
x_3	$([0.50, 0.50], [0.30, 0.30])$	$([0.55, 0.60], [0.25, 0.30])$	$([0.60, 0.60], [0.20, 0.30])$	$([0.50, 0.60], [0.20, 0.40])$
x_4	$([0.60, 0.65], [0.25, 0.30])$	$([0.50, 0.50], [0.30, 0.35])$	$([0.55, 0.55], [0.20, 0.30])$	$([0.55, 0.65], [0.25, 0.25])$
x_5	$([0.40, 0.55], [0.10, 0.40])$	$([0.45, 0.50], [0.30, 0.30])$	$([0.50, 0.55], [0.30, 0.35])$	$([0.50, 0.55], [0.30, 0.30])$

步骤 1: 根据相关决策信息，构建 IVPF 决策矩阵，如表 3-1 所示。

步骤 2: 根据上述信息，四个属性指标均为效益指标，因此无需对专家决策信息矩阵进行归一化处理。

步骤 3: 根据表 3-1 所示的决策信息矩阵，利用 IVPFAAWA 算子、IVPFAAWG 和 IVPFAAWMSM^(r) 算子的相关信息计算各方案的综合值 $p_i (i=1, 2, \dots, m)$ ，其中 $\varphi=3$ ，可得如下结果。

$$x_1 = ([0.5302, 0.5739], [0.2600, 0.300]); x_2 = ([0.4963, 0.5289], [0.2968, 0.3730]);$$

$$x_3 = ([0.5485, 0.5840], [0.2312, 0.3166]); x_4 = ([0.5564, 0.6072], [0.2456, 0.2968]);$$

$$x_5 = ([0.4709, 0.5388], [0.1952, 0.3302]).$$

IVPFAAWG 算子的综合值为：

$$x_1 = ([0.5241, 0.5580], [0.2671, 0.300]); x_2 = ([0.4790, 0.4988], [0.3131, 0.4209]);$$

$$x_3 = ([0.5319, 0.5667], [0.2567, 0.3403]); x_4 = ([0.5433, 0.5669], [0.2644, 0.3131]);$$

$$x_5 = ([0.4542, 0.5339], [0.2866, 0.3514]).$$

IVPFAAWMSM₁($r=1$) 算子的综合值为：

$$x_1 = ([0.6810, 0.7004], [0.2082, 0.2400]); x_2 = ([0.6450, 0.6707], [0.2355, 0.3023]);$$

$$x_3 = ([0.6939, 0.7116], [0.1832, 0.2558]); x_4 = ([0.6916, 0.7305], [0.1947, 0.2355]);$$

$$x_5 = ([0.6323, 0.6792], [0.1586, 0.2658]).$$

$IVPFAAWMSM_2(r=2)$ 算子的综合值为:

$$\begin{aligned} x_1 &= ([0.7744, 0.7958], [0.4859, 0.5182]); x_2 = ([0.7506, 0.7646], [0.5234, 0.5943]); \\ x_3 &= ([0.7806, 0.8027], [0.4676, 0.5427]); x_4 = ([0.7883, 0.8087], [0.4788, 0.5234]); \\ x_5 &= ([0.7358, 0.7815], [0.5033, 0.5541]). \end{aligned}$$

$IVPFAAWMSM_3(r=3)$ 算子的综合值为:

$$\begin{aligned} x_1 &= ([0.8224, 0.8388], [0.6332, 0.6593]); x_2 = ([0.8012, 0.8118], [0.6669, 0.7308]); \\ x_3 &= ([0.8286, 0.8435], [0.6225, 0.6843]); x_4 = ([0.8324, 0.8450], [0.6295, 0.6669]); \\ x_5 &= ([0.7905, 0.8275], [0.6485, 0.6930]). \end{aligned}$$

$IVPFAAWMSM_4(r=4)$ 算子的综合值为:

$$\begin{aligned} x_1 &= ([0.8508, 0.8643], [0.7189, 0.7401]); x_2 = ([0.8319, 0.8404], [0.7480, 0.8054]); \\ x_3 &= ([0.8540, 0.8676], [0.7118, 0.7638]); x_4 = ([0.8586, 0.8677], [0.7170, 0.7480]); \\ x_5 &= ([0.8210, 0.8548], [0.7317, 0.7699]). \end{aligned}$$

步骤 4: 如表 3-2 所示, 获取前面提到的运算符综合属性的准确度值和分值。

步骤 5: 根据得分函数值的大小, 对每个算子的优劣程度进行排序; 得分值越高, 说明合成情况越好, 从而选出最佳选择。

表 3-2 各算子综合属性值的评分函数以及比较

算子名称	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	排序结果
$IVPFAAWA$	0.2265	0.1494	0.2441	0.2650	0.1825	$x_4 \succ x_3 \succ x_1 \succ x_5 \succ x_2$
$IVPFAAWG$	0.2123	0.1015	0.2111	0.2243	0.1429	$x_4 \succ x_1 \succ x_3 \succ x_5 \succ x_2$
$IVPFAAWMSM_1$	0.4267	0.3595	0.4444	0.4593	0.3826	$x_4 \succ x_3 \succ x_1 \succ x_5 \succ x_2$
$IVPFAAWMSM_2$	0.3642	0.2605	0.3703	0.3861	0.2959	$x_4 \succ x_3 \succ x_1 \succ x_5 \succ x_2$
$IVPFAAWMSM_3$	0.2722	0.1611	0.2711	0.2829	0.2045	$x_4 \succ x_1 \succ x_3 \succ x_5 \succ x_2$
$IVPFAAWMSM_4$	0.2032	0.0950	0.1960	0.2082	0.1383	$x_4 \succ x_1 \succ x_3 \succ x_5 \succ x_2$

根据可视化的最优新能源汽车选择结果, 通过对图 3-1 的分析可以得出结论, 基于 $IVPFAAWA$, $IVPFAAWG$ 和 $IVPFAAWMSM^{(r)}$ 的决策方法, 选出的优秀新能源汽车都是 x_4 。这说明决策方法是合理有效的。

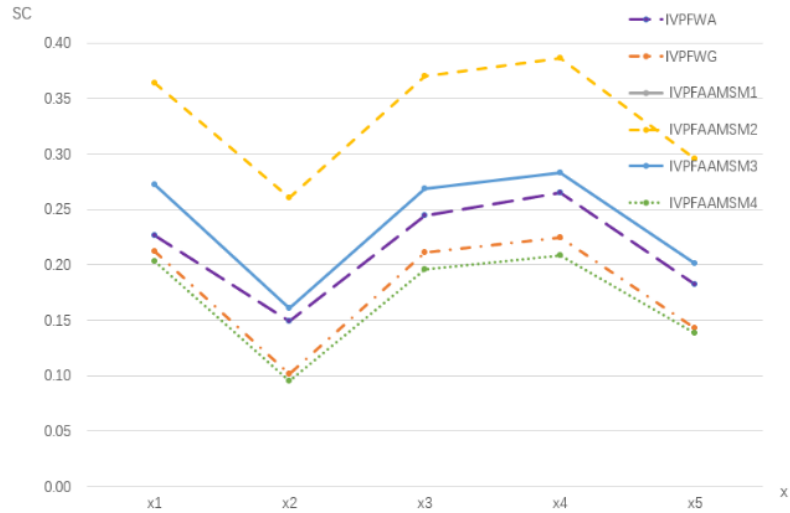


图 3-1 每个算子的得分值

由于 r 和 φ 是参数变量，不同的参数可能对决策结果产生不同的影响。下面，我们讨论 r 和 φ 参数变化对这个例子的排序结果的影响。为了研究备选方案对结果的影响，选择参数 $r \in [1, 4]$ 和 $\varphi \in [2, 21]$ 的不同值。

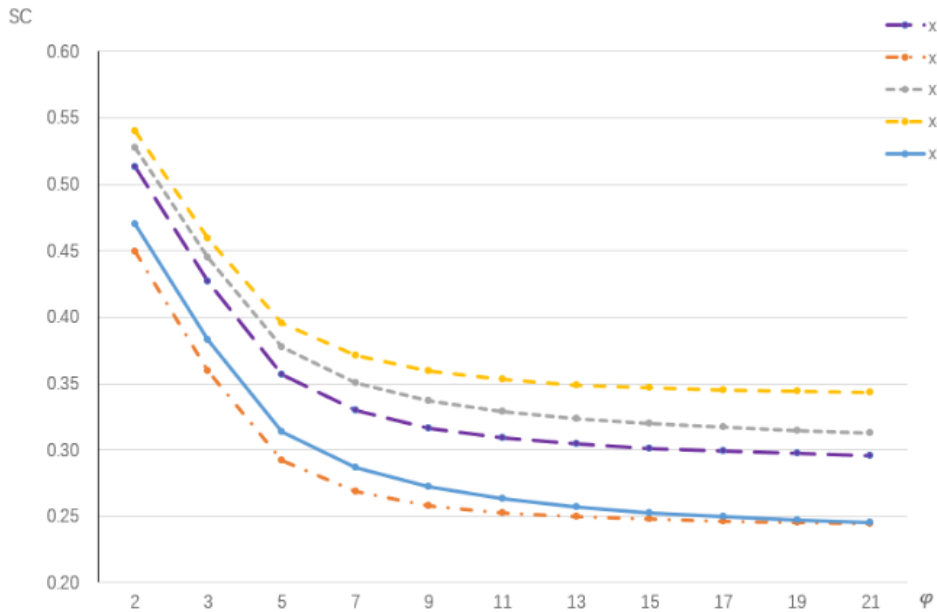


图 3-2. $IVPFAAWSM_1(r=1)$ 的得分值随 φ 的变化

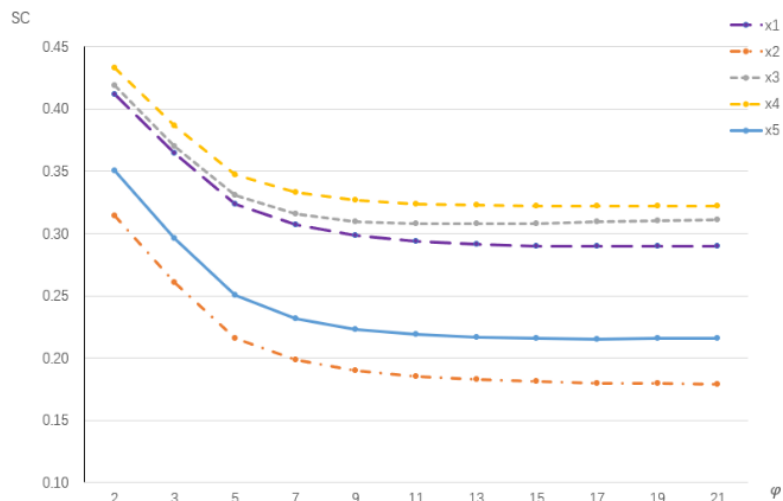


图 3-3. $IVPFAAWMSM_2(r=2)$ 的得分值随 φ 的变化

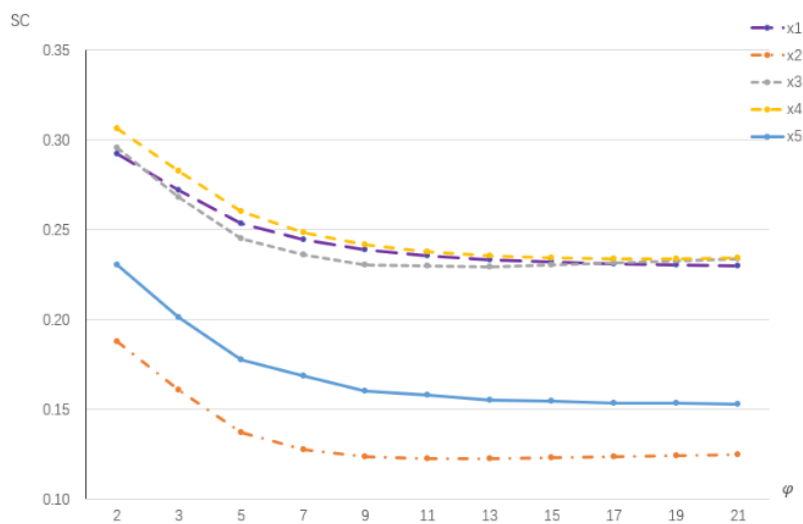


图 3-4. $IVPFAAWMSM_3(r=3)$ 的得分值随 φ 的变化

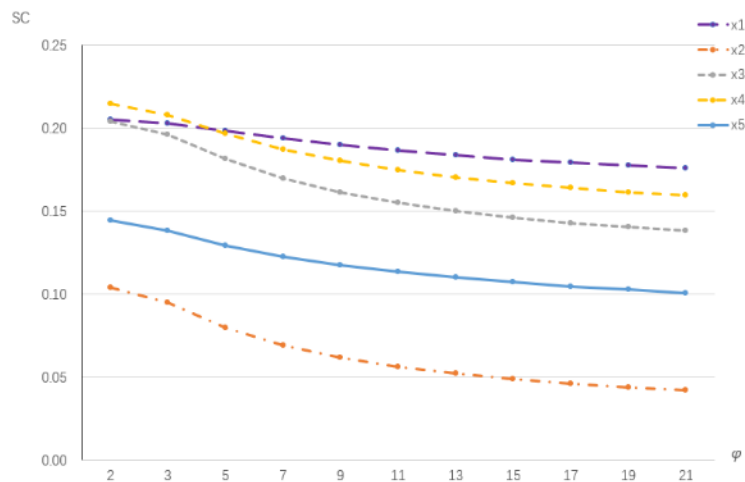


图 3-5. $IVPFAAWMSM_4(r=4)$ 的得分值随 φ 的变化

如果 $r \in \{1,2,3,4\}$, 参数 φ 范围在区间 $[2,12]$ 内, 图 3-2 和图 3-3 显示, 当 $r=1,2$, 随着 φ 变化, 排序没有变化, x_4 仍是最优选择。当 $r=3$ 随着的变化, x_1 和 x_3 发生逆序, 但是最优选择仍是 x_4 (如图 3-4)。当 $r=4$, 当参数较小是最优方案仍是 x_4 , 但随着参数 φ 的变大, 最优方案是 x_1 , 同时其他选项的排序并没有更明显的改变。

3.5 本章小结

文章在 *IVPFS* 环境下引入了 Maclaurin 对称平均算子, 并基于 Aczel–Alsina 算子提出了区间毕达哥拉斯 AA Maclaurin 对称平均算子 ($IVPIFAAWMSM^{(r)}$), 详细阐述其相关性质如幂等性, 置换不变性, 单调性及有界性; 接着, 根据参数 r, φ 的不同变化情况对算子 $IVPIFAAWMSM^{(r)}$ 的几种特殊情况进行讨论, 并构建基于 $IVPIFAAWMSM^{(r)}$ 算子的多属性决策模型; 最后, 将该模型应用于不确定环境下选择计算机的决策问题, 通过比较分析并且将 $IVPIFAAWMSM^{(r)}$ 与其他算子进行比较, 结果表明本文提出的决策方法具有灵活性和有效性, 决策结果能够满足决策者的自身偏好等需求。本文提出的算子具有以下优点:

- (1) 由于参数 r, φ 取值的变动, 排序结果也会出现微小的变化, 表明本文构建的算子更具有灵活性;
- (2) 决策者可以根据个人的决策及风险偏好改变参数, 以应对不同决策的需求, 优于个性化特点;
- (3) 本文提出的算子可以考虑属性值之间的相关性, 以确保决策过程中的信息完整性, 并尽可能避免了决策信息过程中的信息缺失。

第 4 章 基于 Hamy 算子和对偶 Hamy 算子的多值中智多属性群决策方法

第三章具体地介绍了区间毕达哥拉斯模糊环境下，Aczel-Alsina 范数与 Maclaurin 对称平均算子相结合的新的方法并进行案例分析与敏感度分析。但毕达哥拉斯模糊环境无法解决不确定度的相关问题，中智模糊基于隶属函数，真实值隶属度，失真值隶属度和不确定度这四个维度进行分析。本章主要在多值中智模糊环境下，结合 Aczel-Alsina 范数构建 Aczel-Alsina Hamy 平均 (AAHM) 算子和对偶 Hamy 平均 (AADHM) 算子。首先，分析中智熵元素 Aczel-Alsina Hamy 平均算子 (NEEAHM) 和中智熵元素 Aczel-Alsina 对偶 Hamy 平均算子 (NEEAADHM) 的性质。其次，提出多值中智环境下的改进的 IDOCRIW 法确定权重，并将其与 NEEAHM 和 NEEAADHM 算子结合形成新的决策方法；最后，将决策方法应用于可再生能源案例，表明该方法的可行性和有效性。

4.1 预备知识

为了对 NEEs 进行分类，我们定义了 NEEs 的得分和精确函数以及排名。

定义 4.1.1^[8] 设 $NE_k = \langle (\alpha_{Tk}, e_{Tk}), (\alpha_{Ik}, e_{Ik}), (\alpha_{Fk}, e_{Fk}) \rangle$ ($k=1,2$) 为两 NEEs。其得分函数与精确函数可表示：

$$S(NE_k) = (2 + \alpha_{Tk} \times e_{Tk} - \alpha_{Ik} \times e_{Ik} - \alpha_{Fk} \times e_{Fk}) / 3, S(NE_k) \in [0,1] \quad (4.1)$$

$$A(NE_k) = \alpha_{Fk} \times e_{Fk} - \alpha_{Ik} \times e_{Ik}, A(NE_k) \in [0,1] \quad (4.2)$$

因此， NE_1 和 NE_2 这两个 NEEs 按照以下规律排序：

- (1) 若 $S(NE_1) > S(NE_2)$ ，则 $NE_1 \succ NE_2$ ，即 NE_1 优于 NE_2 。
- (2) 若 $S(NE_1) < S(NE_2)$ ，则 $NE_1 \prec NE_2$ ，即 NE_1 劣于 NE_2 。
- (3) 若 $S(NE_1) = S(NE_2)$ ，则有
 - (i) $H(NE_1) > H(NE_2)$ ，则 $NE_1 \succ NE_2$ ，即 NE_1 优于 NE_2 ；
 - (ii) $H(NE_1) < H(NE_2)$ ，则 $NE_1 \prec NE_2$ ，即 NE_1 劣于 NE_2 ；
 - (iii) $H(NE_1) = H(NE_2)$ ，则 $NE_1 \sim NE_2$ ，即 NE_1 与 NE_2 无异。

定义 4.1.2^[69] 设 $a_k (k=1,2,\dots,n)$ 是一组非空实数, 并且 $\gamma=1,2,\dots,n$, 如果

$$HM^{(\gamma)}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{\bigoplus_{1 \leq k_1 < \dots < k_\gamma \leq n} \left(\bigotimes_{j=1}^{\gamma} a_{k_j} \right)^{1/\gamma}}{C_n^\gamma}, \quad (4.3)$$

则称 $HM^{(\gamma)}$ 为 Hamy 平均算子。其中 $(k_1, k_2, \dots, k_\gamma)$ 遍历组合 $(1, 2, \dots, n)$ 中的 γ 元组, $C_n^\gamma = \frac{n!}{\gamma!(n-\gamma)!}$ 为二项式系数。

定义 4.1.3^[69] 设 $a_k (k=1,2,\dots,n)$ 是一组非空实数, 并且 $\gamma=1,2,\dots,n$, 如果

$$DHM^{(\gamma)}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \left[\bigoplus_{1 \leq k_1 < \dots < k_\gamma \leq n} \left(\frac{\bigotimes_{j=1}^{\gamma} a_{k_j}}{\gamma} \right) \right]^{1/C_n^\gamma} \quad (4.4)$$

则称 $DHM^{(\gamma)}$ 为对偶 Hamy 平均算子。其中 $(k_1, k_2, \dots, k_\gamma)$ 遍历组合 $(1, 2, \dots, n)$ 中的 γ 元组, $C_n^\gamma = \frac{n!}{\gamma!(n-\gamma)!}$ 为二项式系数。

(1) 若 $a \geq 0$ 且对任意的 i , 都有 $a_i = a$, 则 $HM(a_1, a_2, \dots, a_n) = a$;

(2) 若 $a_i \leq b_i$, 则 $HM^{(\gamma)}(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq HM^{(\gamma)}(b_1, b_2, \dots, b_n)$;

(3) $MIN(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq HM^{(\gamma)}(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq MAX(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 。

4.2 中智熵元素算子及其性质区间

4.2.1 中智熵元素加权 Hamy 算子 (NEEAAWHM)

定义 4.2.1 设 $NE_k = \langle (\alpha_{Tk}, e_{Tk}), (\alpha_{Ik}, e_{Ik}), (\alpha_{Fk}, e_{Fk}) \rangle (k=1,2,\dots,n)$ 是一组 NEE, NEEAAHM 算子可以被定义为:

$$NEEAAHM^{(\gamma)}(NE_1, NE_2, \dots, NE_n) = \frac{\bigoplus_{1 \leq k_1 < \dots < k_\gamma \leq n} \left(\bigotimes_{j=1}^{\gamma} NE_{k_j} \right)^{1/\gamma}}{C_n^\gamma} \quad (4.5)$$

因此, NEEAAHM 算子具有以下定理。

定理 4.2.1 设 $NE_k = \langle (\alpha_{Tk}, e_{Tk}), (\alpha_{Ik}, e_{Ik}), (\alpha_{Fk}, e_{Fk}) \rangle (k=1,2,\dots,n)$ 是一组 NEEs,

则 $NEEAHM$ 算子的仍为 NEE, 且有

$$\begin{aligned}
 & NEEAHM^{(\gamma)}(NE_1, NE_2, \dots, NE_n) = \\
 & \left\langle \left[\begin{array}{cc} -\left(\frac{1}{C_n^\gamma} \left(\sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_\gamma \leq n} (-\ln(1-e^{-\left(\frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{\gamma} (-\log(\alpha_{Tk_j}))^\rho\right)^{1/\rho}}) \right)^\rho\right)^{1/\rho} & -\left(\frac{1}{C_n^\gamma} \left(\sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_\gamma \leq n} (-\ln(1-e^{-\left(\frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{\gamma} (-\log(e_{Tk_j}))^\rho\right)^{1/\rho}}) \right)^\rho\right)^{1/\rho} \\ 1-e & , 1-e \end{array} \right], \right. \\
 & \left[\begin{array}{cc} -\left(\frac{1}{C_n^\gamma} \left(\sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_\gamma \leq n} (-\ln(1-e^{-\left(\frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{\gamma} (-\log(1-\alpha_{Ik_j}))^\rho\right)^{1/\rho}}) \right)^\rho\right)^{1/\rho} & -\left(\frac{1}{C_n^\gamma} \left(\sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_\gamma \leq n} (-\ln(1-e^{-\left(\frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{\gamma} (-\log(1-e_{Ik_j}))^\rho\right)^{1/\rho}}) \right)^\rho\right)^{1/\rho} \\ e & , e \end{array} \right], \\
 & \left. \left[\begin{array}{cc} -\left(\frac{1}{C_n^\gamma} \left(\sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_\gamma \leq n} (-\ln(1-e^{-\left(\frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{\gamma} (-\log(1-\alpha_{Fk_j}))^\rho\right)^{1/\rho}}) \right)^\rho\right)^{1/\rho} & -\left(\frac{1}{C_n^\gamma} \left(\sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_\gamma \leq n} (-\ln(1-e^{-\left(\frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{\gamma} (-\log(1-e_{Fk_j}))^\rho\right)^{1/\rho}}) \right)^\rho\right)^{1/\rho} \\ e & , e \end{array} \right] \right\rangle \quad (4.6)
 \end{aligned}$$

证明:

$$\begin{aligned}
 & \bigotimes_{j=1}^{\gamma} NE_{k_j} = \left\langle \left[\begin{array}{cc} -\left(\sum_{j=1}^{\gamma} (-\log(\alpha_{Tk_j}))^\rho\right)^{1/\rho} & -\left(\sum_{j=1}^{\gamma} (-\log(e_{Tk_j}))^\rho\right)^{1/\rho} \\ e & , e \end{array} \right], \right. \\
 & \left[\begin{array}{cc} -\left(\sum_{j=1}^{\gamma} (-\log(1-\alpha_{Ik_j}))^\rho\right)^{1/\rho} & -\left(\sum_{j=1}^{\gamma} (-\log(1-e_{Ik_j}))^\rho\right)^{1/\rho} \\ 1-e & , 1-e \end{array} \right], \\
 & \left. \left[\begin{array}{cc} -\left(\sum_{j=1}^{\gamma} (-\log(1-\alpha_{Fk_j}))^\rho\right)^{1/\rho} & -\left(\sum_{j=1}^{\gamma} (-\log(1-e_{Fk_j}))^\rho\right)^{1/\rho} \\ 1-e & , 1-e \end{array} \right] \right\rangle \\
 & (\bigotimes_{j=1}^{\gamma} NE_{k_j})^{1/\gamma} = \left\langle \left[\begin{array}{cc} -\left(\frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{\gamma} (-\log(\alpha_{Tk_j}))^\rho\right)^{1/\rho} & -\left(\frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{\gamma} (-\log(e_{Tk_j}))^\rho\right)^{1/\rho} \\ e & , e \end{array} \right], \right. \\
 & \left[\begin{array}{cc} -\left(\frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{\gamma} (-\log(1-\alpha_{Ik_j}))^\rho\right)^{1/\rho} & -\left(\frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{\gamma} (-\log(1-e_{Ik_j}))^\rho\right)^{1/\rho} \\ 1-e & , 1-e \end{array} \right], \\
 & \left. \left[\begin{array}{cc} -\left(\frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{\gamma} (-\log(1-\alpha_{Fk_j}))^\rho\right)^{1/\rho} & -\left(\frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{\gamma} (-\log(1-e_{Fk_j}))^\rho\right)^{1/\rho} \\ 1-e & , 1-e \end{array} \right] \right\rangle \\
 & \frac{\bigoplus_{1 \leq k_1 < \dots < k_\gamma \leq n} \left(\bigotimes_{j=1}^{\gamma} NE_{k_j} \right)^{1/\gamma}}{C_n^\gamma} = \\
 & \left\langle \left[\begin{array}{cc} -\left(\frac{1}{C_n^\gamma} \left(\sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_\gamma \leq n} (-\ln(1-e^{-\left(\frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{\gamma} (-\log(\alpha_{Tk_j}))^\rho\right)^{1/\rho}}) \right)^\rho\right)^{1/\rho} & -\left(\frac{1}{C_n^\gamma} \left(\sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_\gamma \leq n} (-\ln(1-e^{-\left(\frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{\gamma} (-\log(e_{Tk_j}))^\rho\right)^{1/\rho}}) \right)^\rho\right)^{1/\rho} \\ 1-e & , 1-e \end{array} \right], \right. \\
 & \left[\begin{array}{cc} -\left(\frac{1}{C_n^\gamma} \left(\sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_\gamma \leq n} (-\ln(1-e^{-\left(\frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{\gamma} (-\log(1-\alpha_{Ik_j}))^\rho\right)^{1/\rho}}) \right)^\rho\right)^{1/\rho} & -\left(\frac{1}{C_n^\gamma} \left(\sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_\gamma \leq n} (-\ln(1-e^{-\left(\frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{\gamma} (-\log(1-e_{Ik_j}))^\rho\right)^{1/\rho}}) \right)^\rho\right)^{1/\rho} \\ e & , e \end{array} \right], \\
 & \left. \left[\begin{array}{cc} -\left(\frac{1}{C_n^\gamma} \left(\sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_\gamma \leq n} (-\ln(1-e^{-\left(\frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{\gamma} (-\log(1-\alpha_{Fk_j}))^\rho\right)^{1/\rho}}) \right)^\rho\right)^{1/\rho} & -\left(\frac{1}{C_n^\gamma} \left(\sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_\gamma \leq n} (-\ln(1-e^{-\left(\frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{\gamma} (-\log(1-e_{Fk_j}))^\rho\right)^{1/\rho}}) \right)^\rho\right)^{1/\rho} \\ e & , e \end{array} \right] \right\rangle
 \end{aligned}$$

明显可得出, 集成后的算子仍是 NEE。

定理 4.2.2 若 $NE_k = \langle (\alpha_{Tk}, e_{Tk}), (\alpha_{Ik}, e_{Ik}), (\alpha_{Fk}, e_{Fk}) \rangle (k=1, 2, \dots, n)$ 是一组 NEEs,

$NEEAAHM^{(\gamma)}$ 可满足以下性质:

(1) 幂等性: 如果对于任意 $(k=1,2,\dots,n)$ 都有 $NE_k = NE$, 则

$$NEEAAHM^{(\gamma)}(NE_1, NE_2, \dots, NE_n) = NE.$$

(2) 单调性, 若 NE_k 和 NE_k' 为两个任意的 NEE , 对于任意 $i=1,2,\dots,n$, 如果

有 $\alpha_{Tk} \geq \alpha_{Tk}', e_{Tk} \geq e_{Tk}', \alpha_{Ik} \geq \alpha_{Ik}', e_{Ik} \geq e_{Ik}', \alpha_{Fk} \geq \alpha_{Fk}', e_{Fk} \geq e_{Fk}'$, 则

$$NEEAAHM^{(\gamma)}(NE_1, NE_2, \dots, NE_n) \geq NEEAAHM^{(\gamma)}(NE_1', NE_2', \dots, NE_n').$$

(3) 有界性, 若 $NEEs$ 的最大值和最小值表示如下:

$$NE_{\max} = \left\langle \left(\max_k(\alpha_{Tk}), \max_k(e_{Tk}) \right), \left(\min_k(\alpha_{Ik}), \min_k(e_{Ik}) \right), \left(\min_k(\alpha_{Fk}), \min_k(e_{Fk}) \right) \right\rangle,$$

$$NE_{\min} = \left\langle \left(\min_k(\alpha_{Tk}), \min_k(e_{Tk}) \right), \left(\max_k(\alpha_{Ik}), \max_k(e_{Ik}) \right), \left(\max_k(\alpha_{Fk}), \max_k(e_{Fk}) \right) \right\rangle,$$

则有

$$NE_{\min} \leq NEEAAHM^{(\gamma)}(NE_1, NE_2, \dots, NE_n) \leq NE_{\max}.$$

定理 4.2.3 设 $NE_k = \langle (\alpha_{Tk}, e_{Tk}), (\alpha_{Ik}, e_{Ik}), (\alpha_{Fk}, e_{Fk}) \rangle (k=1,2,\dots,n)$ 是一组 NEE ,

其权重为 $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ 对满足 $w_i \in [0,1]$ 且 $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ 。则 $NEEAAWHM$ 算

子的仍为 NEE , 由公式给出:

$$\begin{aligned} NWWAAWHM^{(\gamma)}(NE_1, NE_2, \dots, NE_n) &= \frac{\bigoplus_{1 \leq k_1 < \dots < k_\gamma \leq n} \left(\bigotimes_{j=1}^{\gamma} NE_{k_j}^{w_{k_j}} \right)^{1/\gamma}}{C_n^\gamma} \\ &= \left\langle \left[1-e^{-\left(\frac{1}{C_n^\gamma} \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_\gamma \leq n} (-\ln(1-e^{-\left(\frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{\gamma} w_{k_j} (-\log(\alpha_{Tk_j}))^\varphi\right)^{1/\varphi}})\right)^{1/\varphi}} \right]}, \right. \\ &\quad \left. \left[1-e^{-\left(\frac{1}{C_n^\gamma} \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_\gamma \leq n} (-\ln(1-e^{-\left(\frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{\gamma} w_{k_j} (-\log(e_{Tk_j}))^\varphi\right)^{1/\varphi}})\right)^{1/\varphi}} \right]} \right], \\ &\quad \left[e^{-\left(\frac{1}{C_n^\gamma} \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_\gamma \leq n} (-\ln(1-e^{-\left(\frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{\gamma} w_{k_j} (-\log(1-\alpha_{Ik_j}))^\varphi\right)^{1/\varphi}})\right)^{1/\varphi}} \right]}, \\ &\quad \left. \left[e^{-\left(\frac{1}{C_n^\gamma} \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_\gamma \leq n} (-\ln(1-e^{-\left(\frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{\gamma} w_{k_j} (-\log(1-e_{Ik_j}))^\varphi\right)^{1/\varphi}})\right)^{1/\varphi}} \right]} \right], \right. \\ &\quad \left. \left[e^{-\left(\frac{1}{C_n^\gamma} \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_\gamma \leq n} (-\ln(1-e^{-\left(\frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{\gamma} w_{k_j} (-\log(1-\alpha_{Fk_j}))^\varphi\right)^{1/\varphi}})\right)^{1/\varphi}} \right]}, \right. \\ &\quad \left. \left[e^{-\left(\frac{1}{C_n^\gamma} \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_\gamma \leq n} (-\ln(1-e^{-\left(\frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{\gamma} w_{k_j} (-\log(1-e_{Fk_j}))^\varphi\right)^{1/\varphi}})\right)^{1/\varphi}} \right]} \right] \right\rangle \end{aligned} \quad (4.7)$$

4.2.2 中智熵元素加权对偶 Hamy (NEEAAWDHM) 算子

定义 4.2.2 设 $NE_k = \langle (\alpha_{Tk}, e_{Tk}), (\alpha_{Ik}, e_{Ik}), (\alpha_{Fk}, e_{Fk}) \rangle (k=1,2,\dots,n)$ 是一组 $NEEs$,

$NEEAADHM$ 算子可以被定义为:

$$DHM^{(\gamma)}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \left[\bigoplus_{1 \leq k_1 < \dots < k_\gamma \leq n} \left(\frac{\bigotimes_{j=1}^{\gamma} a_{k_j}}{\gamma} \right) \right]^{1/C_n^\gamma} \quad (4.8)$$

因此, $NEEAADHM$ 算子具有以下定理。

定理 4.2.4 设 $NE_k = \langle (\alpha_{Tk}, e_{Tk}), (\alpha_{Ik}, e_{Ik}), (\alpha_{Fk}, e_{Fk}) \rangle (k=1, 2, \dots, n)$ 是一组 NEE, 则 $NEEAADHM$ 算子的仍为 NEE, 由公式给出:

$$\begin{aligned} NEEAADHM^{(\gamma)}(NE_1, NE_2, \dots, NE_n) = & \left\langle \left[e^{-\left(\frac{1}{C_n^\gamma} \left(\sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_\gamma \leq n} (\log(1-e_{Tk_j}))^{1/\varphi} \right)^{\varphi}} \right)^{1/\varphi}}, e^{-\left(\frac{1}{C_n^\gamma} \left(\sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_\gamma \leq n} (\log(1-e_{Ik_j}))^{1/\varphi} \right)^{\varphi} \right)^{1/\varphi}} \right], \right. \\ & \left[1-e^{-\left(\frac{1}{C_n^\gamma} \left(\sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_\gamma \leq n} (-\log(1-e_{Fk_j}))^{1/\varphi} \right)^{\varphi} \right)^{1/\varphi}}, 1-e^{-\left(\frac{1}{C_n^\gamma} \left(\sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_\gamma \leq n} (-\log(1-e_{Fk_j}))^{1/\varphi} \right)^{\varphi} \right)^{1/\varphi}} \right], \\ & \left. \left[1-e^{-\left(\frac{1}{C_n^\gamma} \left(\sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_\gamma \leq n} (-\log(1-e_{Fk_j}))^{1/\varphi} \right)^{\varphi} \right)^{1/\varphi}}, 1-e^{-\left(\frac{1}{C_n^\gamma} \left(\sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_\gamma \leq n} (-\log(1-e_{Fk_j}))^{1/\varphi} \right)^{\varphi} \right)^{1/\varphi}} \right] \right\rangle \end{aligned} \quad (4.9)$$

证明:

$$\begin{aligned} \bigoplus_{j=1}^{\gamma} NE_{k_j} &= \left\langle \left[1-e^{-\left(\sum_{j=1}^{\gamma} (-\log(1-\alpha_{Tk_j}))^{1/\varphi} \right)^{\varphi}}, 1-e^{-\left(\sum_{j=1}^{\gamma} (-\log(1-e_{Ik_j}))^{1/\varphi} \right)^{\varphi}} \right], \right. \\ & \left[e^{-\left(\sum_{j=1}^{\gamma} (-\log(\alpha_{Fk_j}))^{1/\varphi} \right)^{\varphi}}, e^{-\left(\sum_{j=1}^{\gamma} (-\log(e_{Fk_j}))^{1/\varphi} \right)^{\varphi}} \right], \\ & \left. \left[e^{-\left(\sum_{j=1}^{\gamma} (-\log(\alpha_{Fk_j}))^{1/\varphi} \right)^{\varphi}}, e^{-\left(\sum_{j=1}^{\gamma} (-\log(e_{Fk_j}))^{1/\varphi} \right)^{\varphi}} \right] \right\rangle \\ \left(\frac{\bigoplus_{j=1}^{\gamma} NE_{k_j}}{\gamma} \right) &= \left\langle \left[1-e^{-\left(\frac{1}{\gamma} \left(\sum_{j=1}^{\gamma} (-\log(1-\alpha_{Tk_j}))^{1/\varphi} \right)^{\varphi} \right)^{1/\varphi}}, 1-e^{-\left(\frac{1}{\gamma} \left(\sum_{j=1}^{\gamma} (-\log(1-e_{Ik_j}))^{1/\varphi} \right)^{\varphi} \right)^{1/\varphi}} \right], \right. \\ & \left[e^{-\left(\frac{1}{\gamma} \left(\sum_{j=1}^{\gamma} (-\log(\alpha_{Fk_j}))^{1/\varphi} \right)^{\varphi} \right)^{1/\varphi}}, e^{-\left(\frac{1}{\gamma} \left(\sum_{j=1}^{\gamma} (-\log(e_{Fk_j}))^{1/\varphi} \right)^{\varphi} \right)^{1/\varphi}} \right], \\ & \left. \left[e^{-\left(\frac{1}{\gamma} \left(\sum_{j=1}^{\gamma} (-\log(\alpha_{Fk_j}))^{1/\varphi} \right)^{\varphi} \right)^{1/\varphi}}, e^{-\left(\frac{1}{\gamma} \left(\sum_{j=1}^{\gamma} (-\log(e_{Fk_j}))^{1/\varphi} \right)^{\varphi} \right)^{1/\varphi}} \right] \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \bigotimes_{1 \leq k_1 < \dots < k_\gamma \leq n} \left(\frac{\bigoplus_{j=1}^{\gamma} NE_{k_j}}{\gamma} \right) = \\
 & \left\langle \left[e^{-\left(\sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_\gamma \leq n} (\log(1-e)^{-\left(\frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{\gamma} (-\log(1-\alpha_{Tk_j}))^\varphi \right)^{1/\varphi}} \right)^\varphi} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. , e^{-\left(\sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_\gamma \leq n} (\log(1-e)^{-\left(\frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{\gamma} (-\log(1-e_{Tk_j}))^\varphi \right)^{1/\varphi}} \right)^\varphi} \right] \right. \\
 & \quad \left[1-e^{-\left(\sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_\gamma \leq n} (-\log(1-e)^{-\left(\frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{\gamma} (-\log(\alpha_{Fk_j}))^\varphi \right)^{1/\varphi}} \right)^\varphi} \right. \\
 & \quad \left. \left. , 1-e^{-\left(\sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_\gamma \leq n} (-\log(1-e)^{-\left(\frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{\gamma} (-\log(e_{Fk_j}))^\varphi \right)^{1/\varphi}} \right)^\varphi} \right] \right. \\
 & \quad \left. \left[1-e^{-\left(\sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_\gamma \leq n} (-\log(1-e)^{-\left(\frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{\gamma} (-\log(\alpha_{Fk_j}))^\varphi \right)^{1/\varphi}} \right)^\varphi} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. 1-e^{-\left(\sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_\gamma \leq n} (-\log(1-e)^{-\left(\frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{\gamma} (-\log(e_{Fk_j}))^\varphi \right)^{1/\varphi}} \right)^\varphi} \right] \right\rangle \\
 & \left(\bigotimes_{1 \leq k_1 < \dots < k_\gamma \leq n} \left(\frac{\bigoplus_{j=1}^{\gamma} NE_{k_j}}{\gamma} \right) \right)^{1/C_n^\gamma} = \\
 & \left\langle \left[e^{-\left(\frac{1}{C_n^\gamma} \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_\gamma \leq n} (\log(1-e)^{-\left(\frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{\gamma} (-\log(1-\alpha_{Tk_j}))^\varphi \right)^{1/\varphi}} \right)^\varphi} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. , e^{-\left(\frac{1}{C_n^\gamma} \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_\gamma \leq n} (\log(1-e)^{-\left(\frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{\gamma} (-\log(1-e_{Tk_j}))^\varphi \right)^{1/\varphi}} \right)^\varphi} \right] \right. \\
 & \quad \left[1-e^{-\left(\frac{1}{C_n^\gamma} \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_\gamma \leq n} (-\log(1-e)^{-\left(\frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{\gamma} (-\log(\alpha_{Fk_j}))^\varphi \right)^{1/\varphi}} \right)^\varphi} \right. \\
 & \quad \left. \left. , 1-e^{-\left(\frac{1}{C_n^\gamma} \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_\gamma \leq n} (-\log(1-e)^{-\left(\frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{\gamma} (-\log(e_{Fk_j}))^\varphi \right)^{1/\varphi}} \right)^\varphi} \right] \right. \\
 & \quad \left. \left[1-e^{-\left(\frac{1}{C_n^\gamma} \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_\gamma \leq n} (-\log(1-e)^{-\left(\frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{\gamma} (-\log(\alpha_{Fk_j}))^\varphi \right)^{1/\varphi}} \right)^\varphi} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. 1-e^{-\left(\frac{1}{C_n^\gamma} \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_\gamma \leq n} (-\log(1-e)^{-\left(\frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{\gamma} (-\log(e_{Fk_j}))^\varphi \right)^{1/\varphi}} \right)^\varphi} \right] \right\rangle
 \end{aligned}$$

明显可看出，集成后的算子仍是 NEE。

定理 4.2.5 若 $NE_k = \langle (\alpha_{Tk}, e_{Tk}), (\alpha_{lk}, e_{lk}), (\alpha_{Fk}, e_{Fk}) \rangle (k=1, 2, \dots, n)$ 是一组 NEEs,

$NEEAADHM^{(\gamma)}$ 可满足以下性质:

(1) 幂等性: 如果对于任意 $(k=1, 2, \dots, n)$ 都有 $NE_k = NE$, 则

$$NEEAADHM^{(\gamma)}(NE_1, NE_2, \dots, NE_n) = NE$$

(2) (单调性) 若 NE_k 和 NE'_k 为两个任意的 NEE, 对于任意 $i=1, 2, \dots, n$, 如果有 $\alpha_{Tk} \geq \alpha'_{Tk}, e_{Tk} \geq e'_{Tk}, \alpha_{lk} \geq \alpha'_{lk}, e_{lk} \geq e'_{lk}, \alpha_{Fk} \geq \alpha'_{Fk}, e_{Fk} \geq e'_{Fk}$, 则

$$NEEAADHM^{(\gamma)}(NE_1, NE_2, \dots, NE_n) \geq NEEAADHM^{(\gamma)}(NE'_1, NE'_2, \dots, NE'_n)$$

(3) (有界性) 若 NEEs 的最大值和最小值可表示为

$$NE_{\max} = \left\langle \left(\max_k(\alpha_{Tk}), \max_k(e_{Tk}) \right), \left(\min_k(\alpha_{lk}), \min_k(e_{lk}) \right), \left(\min_k(\alpha_{Fk}), \min_k(e_{Fk}) \right) \right\rangle,$$

$$NE_{\min} = \left\langle (\min_k(\alpha_{Tk}), \min_k(e_{Tk})), (\max_k(\alpha_{Ik}), \max_k(e_{Ik})), (\max_k(\alpha_{Fk}), \max_k(e_{Fk})) \right\rangle,$$

则有

$$NE_{\min} \leq NEEAADHM^{(\gamma)}(NE_1, NE_2, \dots, NE_n) \leq NE_{\max}.$$

定理 4.2.6 设 $NE_k = \langle (\alpha_{Tk}, e_{Tk}), (\alpha_{Ik}, e_{Ik}), (\alpha_{Fk}, e_{Fk}) \rangle (k=1, 2, \dots, n)$ 是一组 NEE, 其权重为 $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ 对满足 $w_i \in [0, 1]$ 且 $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ 。则 $NEEAADHM$ 算子的仍为 NEE,

$$\begin{aligned} NEEAADHM^{(\gamma)}(NE_1, NE_2, \dots, NE_n) &= \left(\bigotimes_{1 \leq k_1 < \dots < k_\gamma \leq n} \left(\frac{\bigoplus_{j=1}^{\gamma} w_{k_j} NE_{k_j}}{\gamma} \right) \right)^{1/C_n^\gamma} \\ &= \left\langle \left[e^{-\left(\frac{1}{C_n^\gamma} \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_\gamma \leq n} (\log(1-e)^{-\left(\frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{\gamma} w_{k_j} (-\log(1-\alpha_{Tk_j}))^\rho \right)^{1/\rho}} \right)^\rho} \right)^{1/\rho}, e^{-\left(\frac{1}{C_n^\gamma} \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_\gamma \leq n} (\log(1-e)^{-\left(\frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{\gamma} w_{k_j} (-\log(1-e_{Tk_j}))^\rho \right)^{1/\rho}} \right)^\rho} \right)^{1/\rho} \right], \\ &\quad \left[1-e^{-\left(\frac{1}{C_n^\gamma} \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_\gamma \leq n} (-\log(1-e)^{-\left(\frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{\gamma} w_{k_j} (-\log(\alpha_{Fk_j}))^\rho \right)^{1/\rho}} \right)^\rho} \right)^{1/\rho}, 1-e^{-\left(\frac{1}{C_n^\gamma} \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_\gamma \leq n} (-\log(1-e)^{-\left(\frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{\gamma} w_{k_j} (-\log(e_{Fk_j}))^\rho \right)^{1/\rho}} \right)^\rho} \right)^{1/\rho} \right], \\ &\quad \left[1-e^{-\left(\frac{1}{C_n^\gamma} \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_\gamma \leq n} (-\log(1-e)^{-\left(\frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{\gamma} w_{k_j} (-\log(\alpha_{Fk_j}))^\rho \right)^{1/\rho}} \right)^\rho} \right)^{1/\rho}, 1-e^{-\left(\frac{1}{C_n^\gamma} \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_\gamma \leq n} (-\log(1-e)^{-\left(\frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{\gamma} w_{k_j} (-\log(e_{Fk_j}))^\rho \right)^{1/\rho}} \right)^\rho} \right)^{1/\rho} \right] \right\rangle \end{aligned} \quad (4.10)$$

如以上定理 4.2.4 证明

4.3 基于中智模糊环境下的多属性决策模型及其应用

4.3.1 IDOCRIW 法

4.3.1.1 模糊熵法

模糊熵方法根据准则的固有信息确定各准则的权重^[70]。该方法可以消除人的意见的随机性和可变性,从而避免人为的标准权重误差。同时它是基于备选方案的实际性能数据,因此,熵法确定权重可能更符合实际。为了确定熵权,设方案集为 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ 为属性集。为了从上述方案中选择最佳方案,现邀请相关领域一群专家运用中智多值模糊集对方案进行综合评估 NMVE

$$ND_{ij} = \langle M_{Tij}, M_{Iij}, M_{Fij} \rangle = \langle (\alpha_{Tij}^1, \alpha_{Tij}^2, \dots, \alpha_{Tij}^q), (\alpha_{Iij}^1, \alpha_{Iij}^2, \dots, \alpha_{Iij}^q), (\alpha_{Fij}^1, \alpha_{Fij}^2, \dots, \alpha_{Fij}^q) \rangle \text{ 分}$$

别表示真、不确定性和假的度序列，其中 $0 \leq \sup M_{Tik} + \sup M_{Iik} + \sup M_{Fik} \leq 3$ 和 $\alpha_{Tik}^q, \alpha_{Iik}^q, \alpha_{Fik}^q \in [0,1], q \in Z^+$ 。进而构建一个中智多值模糊决策矩阵 $M = (ND_{ij})_{m \times n}$ ， $i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n$ 。

步骤 1 根据定义 2.1.4, 对 NMVEs 进行转化为 NVEs, 有 $ND_{ij} = \langle \alpha_{Tij}, \alpha_{Iij}, \alpha_{Fij} \rangle$, 其中 $\alpha_{Tij}, \alpha_{Iij}, \alpha_{Fij} \in [0,1], i=1,2,\dots,m, j=1,2,\dots,n$, 构建中智熵模糊决策矩阵 $N = (ND_{ij})_{m \times n}$, 可构建新中智模糊下表示为 $X = (x_{ij}^T, x_{ij}^I, x_{ij}^F)$ 。

步骤 2 对决策矩阵中的准则值进行归一化处理，使每个准则都归一到同一个基中，消除各准则单元中的歧义。归一化准则值由式求得。

$$\begin{aligned} v_{ij}^T &= \frac{x_{ij}^T}{\sum_{i=1}^n x_{ij}^T}, \\ v_{ij}^I &= \frac{x_{ij}^I}{\sum_{i=1}^n x_{ij}^I}, \\ v_{ij}^F &= \frac{x_{ij}^F}{\sum_{i=1}^n x_{ij}^F}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

其中 v_{ij} 是第 i 个选项，第 j 个准则的标准化(无单位)值。

步骤 3 得到每个准则的熵度 $E_j (j=1,2,\dots,m; 0 \leq E_j \leq 1)$

$$\begin{aligned} E_j^T &= -\frac{1}{\ln n} \sum_{i=1}^n v_{ij}^T \ln(v_{ij}^T), \\ E_j^I &= -\frac{1}{\ln n} \sum_{i=1}^n v_{ij}^I \ln(v_{ij}^I), \\ E_j^F &= -\frac{1}{\ln n} \sum_{i=1}^n v_{ij}^F \ln(v_{ij}^F). \end{aligned} \quad (4.12)$$

步骤 4 确定各指标的差异程度(D_j)为

$$\begin{aligned} D_j^T &= 1 - E_j^T, \\ D_j^I &= 1 - E_j^I, \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$D_j^F = 1 - E_j^F.$$

步骤 5 准则 (j) 的熵权 w_j 为 D_j 的归一化值, 其中 $\sum_{j=1}^m w_j^T = 1, \sum_{j=1}^m w_j^I = 1,$

$$\sum_{j=1}^m w_j^F = 1; j=1,2,\dots,m;$$

$$\begin{aligned} w_j^T &= \frac{D_j^T}{\sum_{j=1}^m D_j^T}, \\ w_j^I &= \frac{D_j^I}{\sum_{j=1}^m D_j^I}, \\ w_j^F &= \frac{D_j^F}{\sum_{j=1}^m D_j^F} \end{aligned} \quad (4.14)$$

4.3.1.2 Criteria impact loss (CILOS) 加权方法

熵的应用的一个缺点是标准的相对重要性(影响)几乎不受标准数量增加的影响^[71]。此外, 熵法获得的标准权重可能显著高于其他方法。这可能导致显著性(影响)的丧失。为了克服这些问题, 采用了 CILOS 方法, 当其他标准中的一个达到最大值或最小值时, 考虑每个标准的影响损失。详见文献^[72], 具体如下:

步骤 6 使用将最小化(负)准则转换为最大化(正)准则, 形成一个如式所示的新矩阵 R ,

$$\begin{aligned} v_{ij}^{T'} &= \begin{cases} \frac{\min_i(v_{ij}^T)}{v_{ij}^F}, & \text{第 } j \text{ 个准则为负准则} \\ v_{ij}^T, & \text{第 } j \text{ 个准则为正准则} \end{cases}, \quad v_{ij}^{I'} = \begin{cases} \frac{\min_i(v_{ij}^I)}{v_{ij}^I}, & \text{第 } j \text{ 个准则为负准则} \\ v_{ij}^I, & \text{第 } j \text{ 个准则为正准则} \end{cases} \\ v_{ij}^{F'} &= \begin{cases} \frac{\min_i(v_{ij}^F)}{v_{ij}^T}, & \text{第 } j \text{ 个准则为负准则} \\ v_{ij}^F, & \text{第 } j \text{ 个准则为正准则} \end{cases}, \quad \text{其中 } j=1,2,\dots,m。 \end{aligned}$$

$$r_{ij}^T = \frac{v_{ij}^{T'}}{\sum_{i=1}^n v_{ij}^{F'}}, \quad (4.15)$$

$$r_{ij}^I = \frac{v_{ij}^{I'}}{\sum_{i=1}^n v_{ij}^{I'}},$$

$$r_{ij}^F = \frac{v_{ij}^{F'}}{\sum_{i=1}^n v_{ij}^{F'}}$$

$$R^T = \|r_{ij}^T\|, \quad R^I = \|r_{ij}^I\|, \quad R^F = \|r_{ij}^F\| \quad (4.16)$$

步骤 7 使用计算矩阵中每列(即准则)的最大值。从矩阵中取 x_{kij} 的值形成方阵 G ，它对应于式中 k_i 行的第 i 个标准的最大值。在方阵 G 中，所有标准的最大值位于前导对角线处。

$x_j^T = \max_i (r_{ij}^T) = r_{K_j j}^T$, $x_j^I = \max_i (r_{ij}^I) = r_{K_j j}^I$, $x_j^F = \max_i (r_{ij}^F) = r_{K_j j}^F$, K_j 表示第 j 列的最大元素的行数。

$$G^T = \|g_{ij}^T\|, \quad g_{ij}^T = r_i^T, \quad g_{ij}^T = r_{K_j j}^T;$$

$$G^I = \|g_{ij}^I\|, \quad g_{ij}^I = r_i^I, \quad g_{ij}^I = r_{K_j j}^I;$$

$$G^F = \|g_{ij}^F\|, \quad g_{ij}^F = r_i^F, \quad g_{ij}^F = r_{K_j j}^F;$$

步骤 8 $P^T = \|p_{ij}^T\|$, 其中 $p_{ij}^T = \frac{r_j^T - g_{ij}^T}{x_j^T} = \frac{g_{ii}^T - g_{ij}^T}{g_{ii}^T}$ ($p_{ij}^T = 0; i, j = 1, 2, \dots, m$);

$$P^I = \|p_{ij}^I\|, \quad \text{其中 } p_{ij}^I = \frac{r_j^I - g_{ij}^I}{x_j^I} = \frac{g_{ii}^I - g_{ij}^I}{g_{ii}^I} \quad (p_{ij}^I = 0; i, j = 1, 2, \dots, m);$$

$$P^F = \|p_{ij}^F\|, \quad \text{其中 } p_{ij}^F = \frac{r_j^F - g_{ij}^F}{x_j^F} = \frac{g_{ii}^F - g_{ij}^F}{g_{ii}^F}, \quad (p_{ij}^F = 0; i, j = 1, 2, \dots, m);$$

表示标准显著性相对损失矩阵" P ",

$$\begin{aligned}
 F^T &= \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^m p_{i1}^T & p_{12}^T & \cdots & p_{1m}^T \\ p_{21}^T & -\sum_{i=1}^m p_{i2}^T & \cdots & p_{2m}^T \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{m1}^T & p_{m2}^T & \cdots & -\sum_{i=1}^m p_{im}^T \end{bmatrix}_{m \times m}, \\
 F^I &= \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^m p_{i1}^I & p_{12}^I & \cdots & p_{1m}^I \\ p_{21}^I & -\sum_{i=1}^m p_{i2}^I & \cdots & p_{2m}^I \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{m1}^I & p_{m2}^I & \cdots & -\sum_{i=1}^m p_{im}^I \end{bmatrix}_{m \times m}, \\
 F^F &= \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^m p_{i1}^F & p_{12}^F & \cdots & p_{1m}^F \\ p_{21}^F & -\sum_{i=1}^m p_{i2}^F & \cdots & p_{2m}^F \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{m1}^F & p_{m2}^F & \cdots & -\sum_{i=1}^m p_{im}^F \end{bmatrix}_{m \times m};
 \end{aligned}$$

表示标准权重系统矩阵" F "。

步骤 9 权重 $q^T = (q_1^T, q_2^T, \dots, q_m^T)$, $q^I = (q_1^I, q_2^I, \dots, q_m^I)$, $q^F = (q_1^F, q_2^F, \dots, q_m^F)$

($j=1, 2, \dots, m$), 准则是由所示的齐次线性方程组得到的。

有 $F^T \times q^T = 0$, 其中 $\sum_{j=1}^m q_j^T = 1$; $F^I \times q^I = 0$, 其中 $\sum_{j=1}^m q_j^I = 1$; $F^F \times q^F = 0$, 其

中 $\sum_{j=1}^m q_j^F = 1$ 。

步骤 10 利用方程对模糊熵法和 CILOS 方法进行积分, 得到了准则权值的

改进综合确定(IDOCRIW), 其中 $\sum_{j=1}^m W_j = 1$,

$$W_j = \frac{(\frac{1}{3}q_j^T + \frac{1}{3}q_j^I + \frac{1}{3}q_j^F) + (\frac{1}{3}w_j^T + \frac{1}{3}w_j^I + \frac{1}{3}w_j^F)}{\sum_{j=1}^m \left((\frac{1}{3}q_j^T + \frac{1}{3}q_j^I + \frac{1}{3}q_j^F) + (\frac{1}{3}w_j^T + \frac{1}{3}w_j^I + \frac{1}{3}w_j^F) \right)}. \quad (4.17)$$

4.3.2 基于 NEEAAWHM 和 NEEAWDHM 算子的决策模型

具体步骤如下：

步骤 11 根据以上定义与公式，对 NMVEs 进行转化为 NEEs, $N_{Eij} = \langle (\alpha_{Tij}, e_{Tij}), (\alpha_{Iij}, e_{Iij}), (\alpha_{Fij}, e_{Fij}) \rangle$ ，其中 $\alpha_{Tij}, \alpha_{Iij}, \alpha_{Fij} \in [0, 1]$ ， $e_{Tij}, e_{Iij}, e_{Fij} \in [0, 1]$ ， $i = 1, 2, \dots, m$ ， $j = 1, 2, \dots, n$ ，构建中智熵模糊决策矩阵 $N = ((ND)_{ij})_{m \times n}$ 。

步骤 12 决策信息标准化。将决策矩阵 E 规范化转化为规范矩阵 $N = (NE_{ij})_{m \times n}$ ，

$$NE_{ij} = \begin{cases} ND_{ij}, & C_j \text{ 为效益型属性,} \\ ND_{ij}^C, & C_j \text{ 为成本型属性.} \end{cases}$$

步骤 13 利用 NEEAAWHM 和 NEEAWDHM 算子计算各备选方案 A_i 的综合属性信息 N_{Ei} 。

步骤 14 计算个备选方案综合属性信息 NE_i 的得分函数 $S(NE_i)$ 和精确函数 $H(NE_i)$ 。

步骤 15 对各备选方案进行优劣排序，选出综合性能最高的方案。

4.4 案例分析

面对气候变化和环境恶化，谋求可持续发展已导致向可再生能源的重大转变。一种可靠的、负担得起的、稳定的可再生能源必须满足未来几乎所有的能源需求。

国际能源署发布的 2020 年可再生能源报告显示，中国是 2020 年全球可再生能源容量增长的主要推动力之一。截至 2020 年底，我国可再生能源累计装机容量达到 9.34 亿千瓦，占全球可再生能源总装机规模的三分之一。特别是我国风电、光伏在去年新增装机约 1.2 亿千瓦，占全球风电、光伏新增装机容量的一半以上，成为全球可再生能源发展的中坚力量^[73]。

有五种方案 $A_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ ，其中 A_1 ：太阳能， A_2 ：固体废物能源， A_3 ：生物质能， A_4 ：风能， A_5 ：核能。

属性如表 4-1

表 4-1 属性类型

	属性	类型
C_1	社会因素(社会效益、社会接受度)	效益型
C_2	技术因素(国家能源安全、国家经济效益)	成本型
C_3	经济因素(技术成熟度、电网可用性、效率)	效益型
C_4	环境因素(碳排放)	效益型
C_5	政治因素(投资成本、管理成本)	效益型

表 4-2 多值中智模糊矩阵

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	$\langle (0.961, 0.754, 0.431), (0.342, 0.342, 0.675), (0.532, 0.112, 0.332) \rangle$	$\langle (0.675, 0.253, 0.435), (0.342, 0.346, 0.435), (0.752, 0.223, 0.436) \rangle$	$\langle (0.285, 0.213, 0.237), (0.342, 0.434, 0.564), (0.843, 0.432, 0.649) \rangle$	$\langle (0.723, 0.311, 0.322), (0.564, 0.134, 0.542), (0.462, 0.345, 0.431) \rangle$	$\langle (0.237, 0.342, 0.543), (0.453, 0.234, 0.534), (0.745, 0.253, 0.524) \rangle$
A_2	$\langle (0.543, 0.135, 0.533), (0.432, 0.654, 0.342), (0.454, 0.245, 0.422) \rangle$	$\langle (0.545, 0.355, 0.532), (0.542, 0.342, 0.762), (0.354, 0.135, 0.422) \rangle$	$\langle (0.154, 0.745, 0.432), (0.453, 0.654, 0.453), (0.531, 0.335, 0.421) \rangle$	$\langle (0.567, 0.435, 0.422), (0.432, 0.654, 0.453), (0.432, 0.343, 0.521) \rangle$	$\langle (0.345, 0.345, 0.421), (0.773, 0.342, 0.654), (0.532, 0.323, 0.321) \rangle$
A_3	$\langle (0.745, 0.435, 0.432), (0.854, 0.632, 0.321), (0.431, 0.135, 0.457) \rangle$	$\langle (0.335, 0.321, 0.542), (0.513, 0.243, 0.432), (0.575, 0.243, 0.632) \rangle$	$\langle (0.422, 0.243, 0.532), (0.321, 0.524, 0.432), (0.555, 0.532, 0.522) \rangle$	$\langle (0.321, 0.342, 0.533), (0.621, 0.455, 0.542), (0.434, 0.356, 0.632) \rangle$	$\langle (0.432, 0.423, 0.543), (0.232, 0.234, 0.543), (0.342, 0.324, 0.527) \rangle$
A_4	$\langle (0.454, 0.332, 0.432), (0.432, 0.323, 0.432), (0.642, 0.354, 0.521) \rangle$	$\langle (0.723, 0.456, 0.643), (0.532, 0.432, 0.451), (0.441, 0.521, 0.539) \rangle$	$\langle (0.426, 0.163, 0.543), (0.322, 0.134, 0.543), (0.531, 0.349, 0.531) \rangle$	$\langle (0.432, 0.223, 0.543), (0.321, 0.234, 0.532), (0.353, 0.531, 0.451) \rangle$	$\langle (0.345, 0.353, 0.432), (0.321, 0.671, 0.572), (0.183, 0.223, 0.451) \rangle$
A_5	$\langle (0.732, 0.323, 0.543), (0.369, 0.542, 0.441), (0.541, 0.231, 0.432) \rangle$	$\langle (0.543, 0.765, 0.654), (0.624, 0.342, 0.431), (0.531, 0.153, 0.220) \rangle$	$\langle (0.234, 0.764, 0.543), (0.521, 0.127, 0.579), (0.434, 0.254, 0.522) \rangle$	$\langle (0.543, 0.554, 0.435), (0.343, 0.334, 0.431), (0.335, 0.254, 0.529) \rangle$	$\langle (0.542, 0.265, 0.542), (0.342, 0.331, 0.348), (0.535, 0.585, 0.234) \rangle$

步骤 1-5 由模糊熵法可得到:

$$w_1^T = 0.1422, \quad w_1^I = 0.0259, \quad w_1^F = 0.0811;$$

$$w_2^T = 0.0720, \quad w_2^I = 0.2822, \quad w_2^F = 0.2711;$$

$$w_3^T = 0.0694, \quad w_3^I = 0.4244, \quad w_3^F = 0.1367 \quad ;$$

$$w_4^T = 0.2184, \quad w_4^I = 0.1728, \quad w_4^F = 0.1884 \quad ;$$

$$w_5^T = 0.4980, \quad w_5^I = 0.0948, \quad w_5^F = 0.3228 \quad .$$

步骤 6-9 由 CILOS 法可得到:

$$q^T = (0.2887, 0.4749, 0.0912, 0.0545, 0.0906) ;$$

$$q^I = (0.3662, 0.1921, 0.0840, 0.1107, 0.2470) ;$$

$$q^F = (0.2089, 0.1691, 0.2847, 0.1426, 0.1947) 。$$

步骤 10 由式 (4.17) 利用方程对模糊熵法和 CILOS 方法进行积分, 得到了准则权值的改进综合确定(IDOCRIW)法:

$$w = (0.185, 0.244, 0.182, 0.148, 0.241) 。$$

步骤 11 根据定义 2.1.5 得到 NEE 决策矩阵 N_D ;

步骤 12 标准化, 由表 4-1 得 C_2 为成本型;

步骤 13 利用 $NEEAAWHM$ 和 $NEEAAWDHM$ 算子计算各备选方案 A_i 的综合属性信息 N_{Ei} , 其中 $\varphi = 3$ 。

$NEEAAWHM(\gamma = 1)$ 的综合属性值为:

$$A_1 = \langle (0.6979, 0.9999), (0.1908, 0.7245), (0.3234, 0.8397) \rangle ;$$

$$A_2 = \langle (0.6680, 0.9907), (0.2396, 0.7426), (0.2958, 0.9076) \rangle ;$$

$$A_3 = \langle (0.6922, 0.9866), (0.2243, 0.7897), (0.3210, 0.9351) \rangle ;$$

$$A_4 = \langle (0.6279, 0.9922), (0.2020, 0.7883), (0.3365, 0.9434) \rangle ;$$

$$A_5 = \langle (0.6375, 0.9808), (0.2465, 0.6842), (0.3094, 0.9018) \rangle 。$$

$NEEAAWHM(\gamma = 2)$ 的综合属性值为:

$$A_1 = \langle (0.6767, 0.9657), (0.1998, 0.8219), (0.3398, 0.8635) \rangle ;$$

$$A_2 = \langle (0.6596, 0.9806), (0.2611, 0.8204), (0.2992, 0.9266) \rangle ;$$

$$A_3 = \langle (0.6465, 0.9846), (0.2318, 0.8650), (0.3321, 0.9477) \rangle ;$$

$$A_4 = \langle (0.6044, 0.9902), (0.2322, 0.8288), (0.3432, 0.9549) \rangle ;$$

$$A_5 = \langle (0.6262, 0.9762), (0.2500, 0.7449), (0.3241, 0.9468) \rangle 。$$

$NEEAAWHM(\gamma = 3)$ 的综合属性值为:

$$A_1 = \langle (0.6683, 0.9539), (0.2034, 0.8562), (0.3466, 0.8819) \rangle;$$

$$A_2 = \langle (0.6554, 0.9721), (0.2739, 0.8468), (0.3006, 0.9374) \rangle;$$

$$A_3 = \langle (0.6322, 0.9842), (0.2341, 0.8888), (0.3350, 0.9561) \rangle;$$

$$A_4 = \langle (0.5905, 0.9890), (0.2440, 0.8755), (0.3460, 0.9613) \rangle;$$

$$A_5 = \langle (0.6238, 0.9731), (0.2515, 0.7645), (0.3304, 0.9561) \rangle。$$

$NEEAAWHM(\gamma = 4)$ 的综合属性值为:

$$A_1 = \langle (0.6647, 0.9526), (0.2053, 0.8724), (0.3502, 0.9056) \rangle;$$

$$A_2 = \langle (0.6528, 0.9681), (0.2823, 0.8773), (0.3013, 0.9465) \rangle;$$

$$A_3 = \langle (0.6234, 0.9841), (0.2353, 0.8974), (0.3363, 0.9648) \rangle;$$

$$A_4 = \langle (0.5810, 0.9882), (0.2500, 0.9374), (0.3475, 0.9681) \rangle;$$

$$A_5 = \langle (0.6228, 0.9706), (0.2522, 0.7708), (0.3338, 0.9603) \rangle。$$

$NEEAAWHM(\gamma = 5)$ 的综合属性值为:

$$A_1 = \langle (0.6627, 0.9519), (0.2064, 0.8784), (0.3524, 0.9701) \rangle;$$

$$A_2 = \langle (0.6510, 0.9653), (0.2881, 0.9499), (0.3017, 0.9555) \rangle;$$

$$A_3 = \langle (0.6172, 0.9840), (0.2359, 0.9018), (0.3371, 0.9790) \rangle;$$

$$A_4 = \langle (0.5739, 0.9876), (0.2532, 0.9480), (0.3484, 0.9784) \rangle;$$

$$A_5 = \langle (0.6222, 0.9686), (0.2527, 0.7740), (0.3358, 0.9623) \rangle。$$

$NEEAWDHM(\gamma = 1)$ 的综合属性值为:

$$A_1 = \langle (0.3408, 0.7804), (0.5230, 0.9809), (0.6745, 0.9978) \rangle;$$

$$A_2 = \langle (0.3100, 0.8253), (0.6269, 0.9949), (0.6344, 0.9975) \rangle;$$

$$A_3 = \langle (0.2974, 0.8708), (0.5685, 0.9886), (0.6742, 0.9990) \rangle;$$

$$A_4 = \langle (0.2553, 0.9069), (0.5585, 0.9958), (0.6807, 0.9993) \rangle;$$

$$A_5 = \langle (0.2871, 0.8398), (0.5776, 0.9541), (0.6671, 0.9980) \rangle。$$

$NEEA\text{AWD}HM(\gamma = 2)$ 的综合属性值为:

$$A_1 = \langle (0.3488, 0.8179), (0.5055, 0.9685), (0.6703, 0.9778) \rangle;$$

$$A_2 = \langle (0.3313, 0.8791), (0.5750, 0.9631), (0.6326, 0.9915) \rangle;$$

$$A_3 = \langle (0.3277, 0.8822), (0.5496, 0.9786), (0.6606, 0.9958) \rangle;$$

$$A_4 = \langle (0.2824, 0.9128), (0.5414, 0.9784), (0.6762, 0.9962) \rangle;$$

$$A_5 = \langle (0.2987, 0.8520), (0.5766, 0.9365), (0.6537, 0.9959) \rangle。$$

$NEEA\text{AWD}HM(\gamma = 3)$ 的综合属性值为:

$$A_1 = \langle (0.3523, 0.8562), (0.4997, 0.9558), (0.6692, 0.9746) \rangle;$$

$$A_2 = \langle (0.3396, 0.8468), (0.5545, 0.9525), (0.6321, 0.9880) \rangle;$$

$$A_3 = \langle (0.3453, 0.8888), (0.5399, 0.9685), (0.6563, 0.9942) \rangle;$$

$$A_4 = \langle (0.2949, 0.8755), (0.5324, 0.9588), (0.6744, 0.9950) \rangle;$$

$$A_5 = \langle (0.3031, 0.7645), (0.5763, 0.9202), (0.6460, 0.9934) \rangle。$$

$NEEA\text{AWD}HM(\gamma = 4)$ 的综合属性值为:

$$A_1 = \langle (0.3542, 0.8870), (0.4971, 0.9426), (0.6687, 0.9735) \rangle;$$

$$A_2 = \langle (0.3437, 0.9022), (0.5470, 0.9427), (0.6319, 0.9863) \rangle;$$

$$A_3 = \langle (0.3564, 0.8918), (0.5344, 0.9605), (0.6542, 0.9927) \rangle;$$

$$A_4 = \langle (0.3011, 0.9168), (0.5266, 0.9577), (0.6735, 0.9938) \rangle;$$

$$A_5 = \langle (0.3053, 0.8612), (0.5761, 0.9089), (0.6409, 0.9892) \rangle。$$

$NEEA\text{AWD}HM(\gamma = 5)$ 的综合属性值为:

$$A_1 = \langle (0.3553, 0.9951), (0.4957, 0.9253), (0.6684, 0.9729) \rangle;$$

$$A_2 = \langle (0.3458, 0.9065), (0.5429, 0.9331), (0.6318, 0.9848) \rangle;$$

$$A_3 = \langle (0.3633, 0.8945), (0.5311, 0.9525), (0.6530, 0.9917) \rangle;$$

$$A_4 = \langle (0.3046, 0.9177), (0.5223, 0.9572), (0.6730, 0.9928) \rangle;$$

$$A_5 = \langle (0.3066, 0.8637), (0.5760, 0.9060), (0.6373, 0.9807) \rangle。$$

步骤 14 计算各备选方案综合属性信息 A_i 的得分函数 $S(A_i)$ 。

步骤 15 对各备选方案进行优劣排序，选出综合性能最高的方案。

基于 $NEEAAWHM$ 算子， $NEEAWDHM$ 算子和 $NEEAAWG$ 算子以及 $NEEAAGA$ 算子决策方法选择的最佳可持续能源均为 A_1 （见表 4-3）。说明了本文提出的决策方法具有合理性和有效性。

表 4-3 各算子的得分值与排序结果

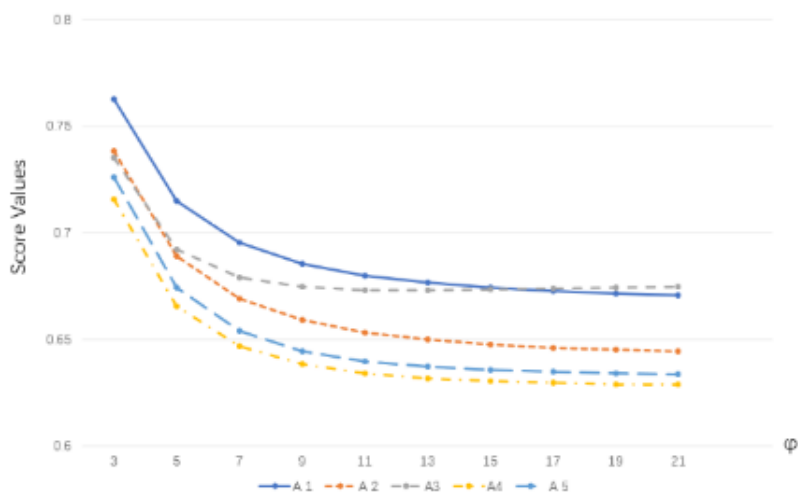
	$S(A_1)$	$S(A_2)$	$S(A_3)$	$S(A_4)$	$S(A_5)$	排序结果
$NEEWHM(\gamma=1)$	0.7627	0.7385	0.7352	0.7155	0.7258	$A_1 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_5 \succ A_4$
$NEEWHM(\gamma=2)$	0.7319	0.7185	0.7071	0.6928	0.7061	$A_1 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_5 \succ A_4$
$NEEWHM(\gamma=3)$	0.7192	0.7078	0.6979	0.6793	0.6996	$A_1 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_5 \succ A_4$
$NEEWHM(\gamma=4)$	0.7123	0.6997	0.6926	0.6678	0.6965	$A_1 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_5 \succ A_4$
$NEEWHM(\gamma=5)$	0.7025	0.6888	0.6882	0.6620	0.6947	$A_1 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_5 \succ A_4$
$NEEWDHM(\gamma=1)$	0.3600	0.3331	0.3411	0.3317	0.3414	$A_1 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_5 \succ A_4$
$NEEWDHM(\gamma=2)$	0.3801	0.3701	0.3645	0.3515	0.3545	$A_1 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_5 \succ A_4$
$NEEWDHM(\gamma=3)$	0.3906	0.3783	0.3772	0.3589	0.3532	$A_1 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_5 \succ A_4$
$NEEWDHM(\gamma=4)$	0.3982	0.3904	0.3850	0.3675	0.3684	$A_1 \succ A_3 \succ A_5 \succ A_2 \succ A_4$
$NEEWDHM(\gamma=5)$	0.4149	0.3949	0.3905	0.3705	0.3726	$A_1 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_5 \succ A_4$

续表 4-3 各算子的得分值与排序结果

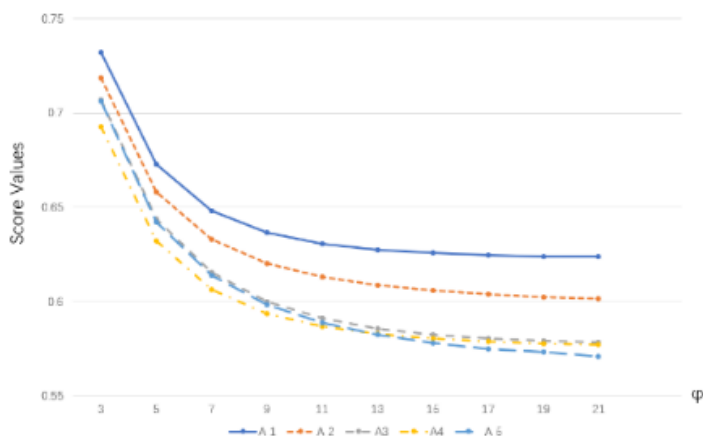
$NEEAWA$	0.5950	0.5834	0.5796	0.5496	0.5578	$A_1 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_5 \succ A_4$
$NEEAWG$	0.5381	0.5191	0.5200	0.4899	0.5193	$A_1 \succ A_3 \succ A_5 \succ A_2 \succ A_4$

4.4.2 敏感度分析

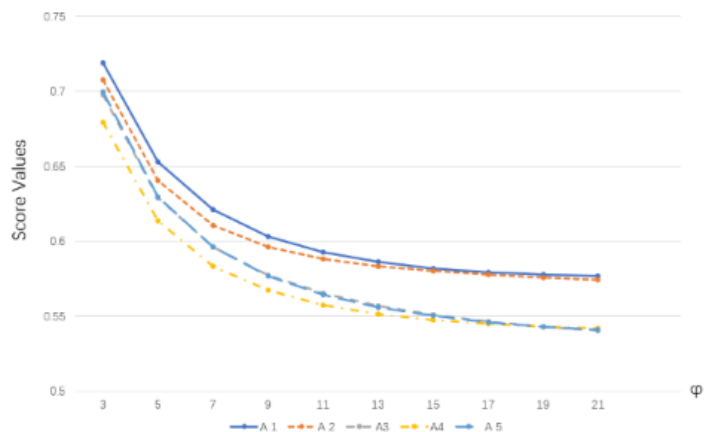
由于 γ, φ 是参数变量, 不同的参数可能对决策结果产生不同的影响。对 γ, φ 进行敏感度分析, 可以观察 γ, φ 的变化对备选方案排序条件的影响。 $\gamma \in [1, 4]$ 和 $\varphi \in [3, 21]$ 的不同值来检验对备选方案的影响。



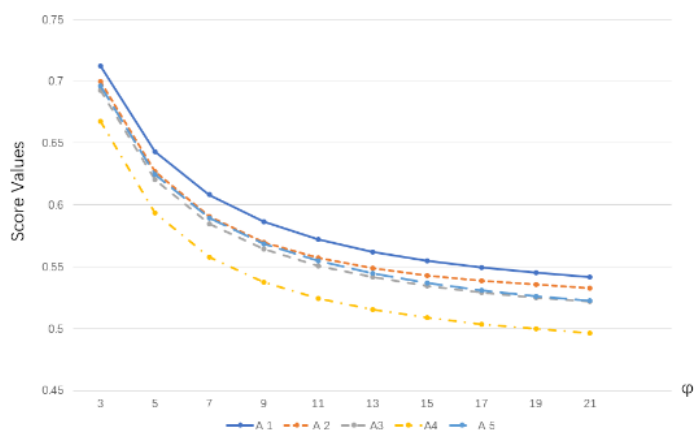
(a) $\gamma = 1$



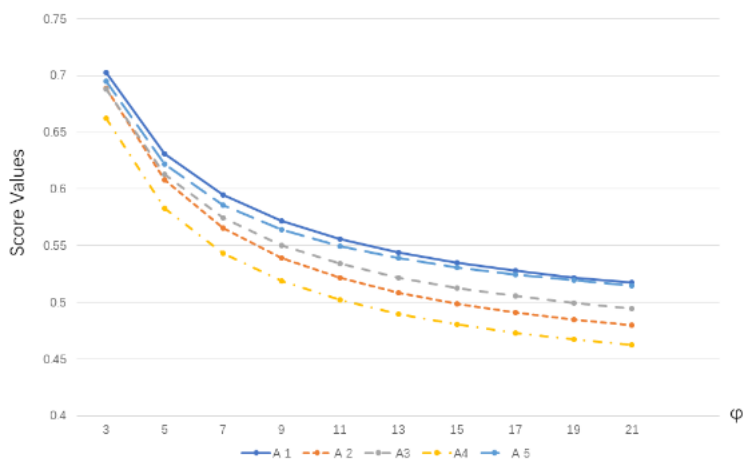
(b) $\gamma = 2$



(c) $\gamma = 3$



(d) $\gamma = 4$



(e) $\gamma = 5$

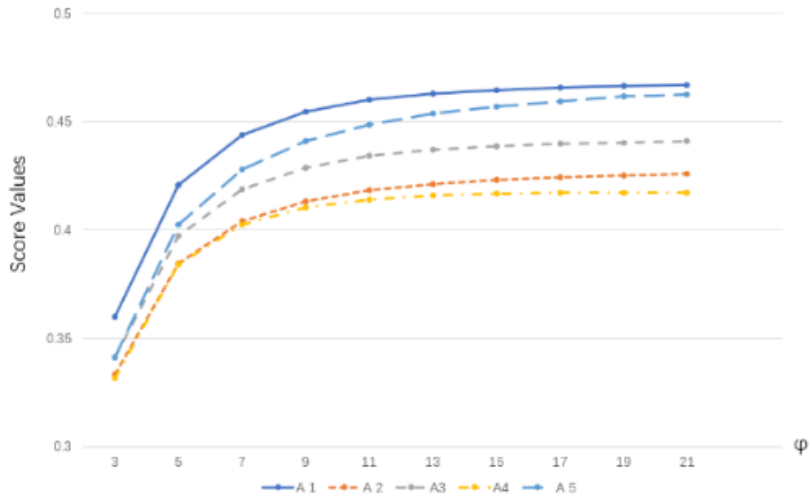
图 4-1 $NEEAAWHM$ 得分值随 ϕ 和 γ 的影响

当 γ 取为 2,3,4,5 时, 参数 ϕ 在 [3,21] 的范围内变化, 图 4-1 中 $NEEAAWHM$ 算子排序结果发生变化, 特别是 A_2, A_3, A_4, A_5 的排序发生变化, 但 A_1 始终都是最

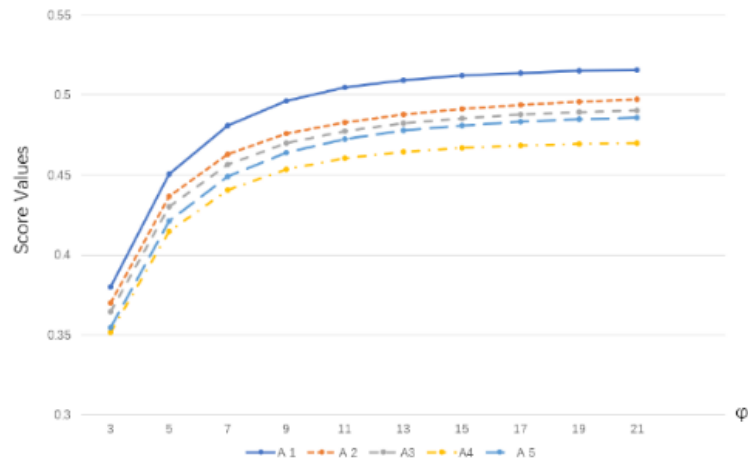
优解；当 $\gamma = 1$ 时，随着 φ 的增大，其最优解的结果发生变化， A_3 成为最优选择。

γ 取为 1, 2, 3, 4 时，参数 φ 在 [3, 21] 的范围内变化，图 4-2 中 *NEEAAWHM* 算子排序结果发生变化，特别是 A_2, A_3, A_4, A_5 的排序发生变化，但 A_1 始终都是最优解；

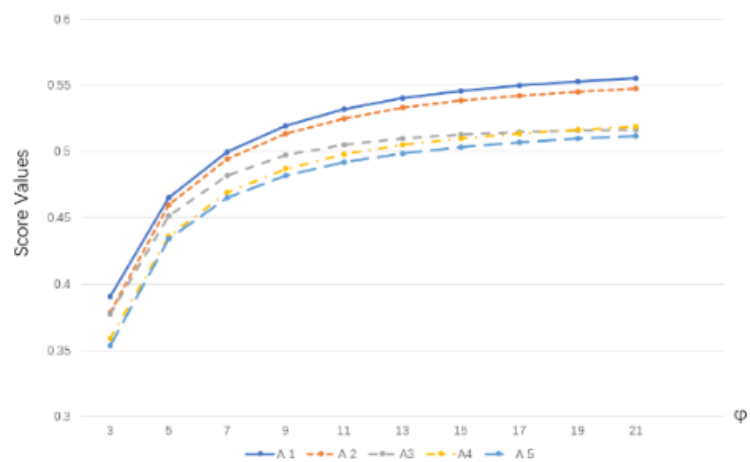
当 $\gamma = 5$ 时，随着 φ 的增大，其最优解的结果发生变化， A_3 成为最优选择。



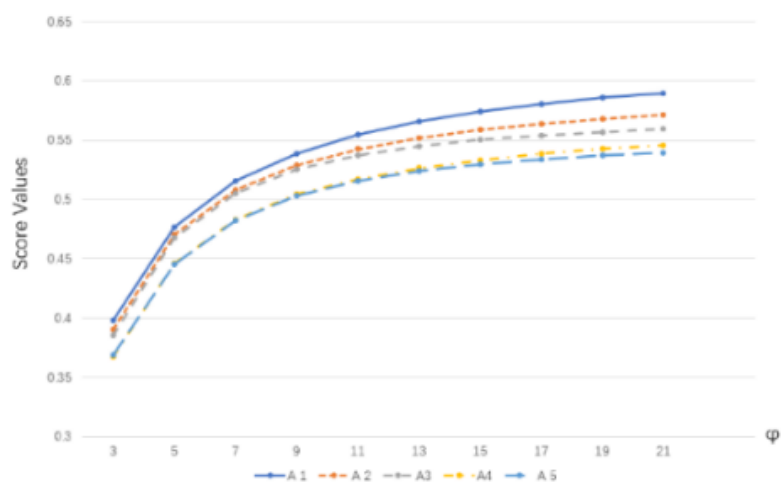
(a) $\gamma = 1$



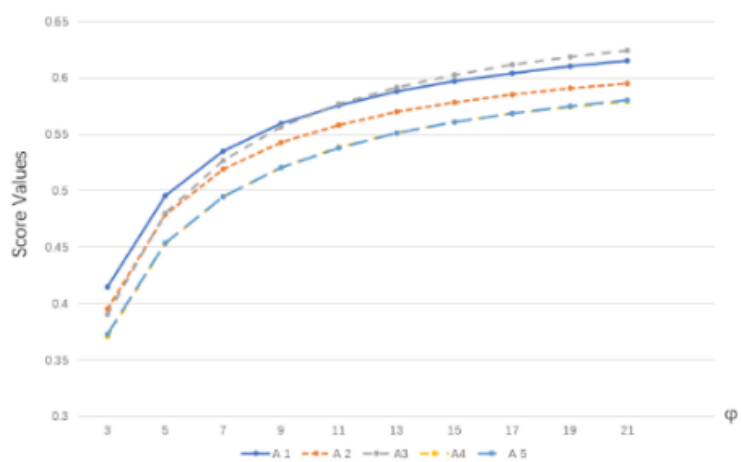
(b) $\gamma = 2$



(c) $\gamma = 3$



(d) $\gamma = 4$



(e) $\gamma = 5$

图 4-2 NEEAARDHM 得分值随 ϕ 和 γ 的影响

4.5 本章小结

MADM 技术是一种著名的集成决策工具，广泛应用于计算科学、环境生物学、绿色供应商系统、可再生能源企业和社会决策过程等多个生活领域。同时，Aczel-Alsina 集成工具理论是一种强大的鲁棒数学表达式，用于克服集成过程中的信息丢失。利用 HM 集成模型理论来表达多个决策过程中不同输入参数之间的相互关系。在本文中，一些集成方法包括 $NEEAAHM$ 、 $NEEAAWHM$ 、 $NEEAADHM$ 和 $NEEAAWDHM$ 算子。为了证明我们提出的算子的稳健性和可靠性，最后用实验案例研究来评估不同最佳选择的可替代能源，并于现有方法的结果与目前提出的算子的结果进行了对比。

本文提出的算子具有以下优点：

- (1) 随着参数 γ, ϕ 取值的变化，属性值的排序结果最佳选择比较稳定；
- (2) 本文提出在中智模糊环境下的 IDOCRIW 方法计算属性权重，决策方法更具有稳健；
- (3) 利用本文提出的决策方法处理属性值具有相关性的多属性决策问题会更加科学并可能避免了决策信息过程中的信息缺失。

第 5 章 基于 Heronian 平均算子的 r, s, t 球形模糊多属性决策方法

第三章和第四章主要介绍了区间值毕达哥拉斯模糊和中智模糊环境下的 Aczel-Alsina 范数分别与不同算子集合形成新的决策方法。但其仍存在缺陷，其评价结果不仅需要在 $[0, 1]$ 之间，而且还需满足平方或立方的累加小于等于 1。但 r, s, t 球形模糊可以运用参数不同更大范围的容纳评价信息的多元化。本章在 r, s, t 球形模糊环境下与 Aczel-Alsina 范数和 Heronian 算子结合形成新的决策方法并通过案例分析，证明新的方法的有效性和实用性。

5.1 预备知识

定义 5.1.1^[74] 对于一组非负实数集 ψ_τ , $\tau = 1, 2, 3, \dots, n$ 。HrM 运算符定义为：

$$HrM^{p,q}(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) = \left(\left(\frac{2}{\partial(\partial+1)} \right) \left(\bigoplus_{\tau=1}^n \bigoplus_{j=1}^n (\psi_\tau^p \otimes \psi_j^q) \right) \right)^{\frac{1}{p+q}} \quad (5.1)$$

定义 5.1.2^[64] 设 $\psi = (\mu, \theta, \nu)$ 是任意的 r, s, t -SPFN，则得分函数定义为

$$S(\psi) = \frac{1}{2} [1 + (\mu^r - \theta^s - \nu^t)] \quad (5.2)$$

定义 5.1.3^[64] 设 $\psi = (\mu, \theta, \nu)$ 是任意的 r, s, t -SPFN，则精确函数定义为

$$A(\psi) = \frac{1}{2} [1 + (\mu^r + \theta^s + \nu^t)] \quad (5.3)$$

定义 5.1.4^[64] 设 $\psi = (\mu, \theta, \nu)$ 是任意的 r, s, t -SPFN， $\psi_i = (\mu_i, \theta_i, \nu_i) (i = 1, 2)$ ，有

- (1) 若 $S(\psi_1) > S(\psi_2)$ ，则 $\psi_1 \succ \psi_2$ ，即 ψ_1 优于 ψ_2 ；
- (2) 若 $S(\psi_1) < S(\psi_2)$ ，则 $\psi_1 \prec \psi_2$ ，即 ψ_1 劣于 ψ_2 ；
- (3) 若 $S(\psi_1) = S(\psi_2)$ ，则有
 - (i) $A(\psi_1) > A(\psi_2)$ ，则 $\psi_1 \succ \psi_2$ ，即 ψ_1 优于 ψ_2 ；
 - (ii) $A(\psi_1) < A(\psi_2)$ ，则 $\psi_1 \prec \psi_2$ ，即 ψ_1 劣于 ψ_2 ；
 - (iii) $A(\psi_1) = A(\psi_2)$ ，则 $\psi_1 \sim \psi_2$ ，即 ψ_1 与 ψ_2 无异。

5.2 r, s, t 球形模糊 Heronian 算子 (r, s, t -SPFAAHrm) 及其性质

定理 5.2.1 设 $\psi_i (i=1, 2, \dots, n)$ 为一列 r, s, t -SPFN, 则运用 r, s, t -SPFAAHrm

算子集成得到的模糊集仍为 r, s, t -SPF, 且有

$$\begin{aligned}
 r, s, t\text{-SPFAAHrm}^{p,q}(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) &= \left(\left(\frac{2}{n(n+1)} \right) \left(\bigoplus_{\tau=1}^n \bigoplus_{j=1}^n (\psi_{\tau}^p \otimes \psi_j^q) \right) \right)^{\frac{1}{p+q}} \\
 &= \left(\sqrt[p+q]{\exp \left[- \left(\frac{1}{p+q} \right) \left(- \ln \left[1 - \exp \left[- \left(\frac{2}{n(n+1)} \right) \left(\sum_{\tau=1}^n \sum_{j=1}^n \left(- \ln \left(1 - \exp \left(- \left(p(-\ln \mu_{\psi_{\tau}}^*)^{\rho} + q(-\ln \mu_{\psi_j}^*)^{\rho} \right)^{1/\rho} \right) \right)^{\rho} \right) \right]^{1/\rho} \right) \right] \right] \right]} \right. \\
 &\quad \left. \sqrt[p+q]{1 - \exp \left[- \left(\frac{1}{p+q} \right) \left(- \ln \left[1 - \exp \left[- \left(\frac{2}{n(n+1)} \right) \left(\sum_{\tau=1}^n \sum_{j=1}^n \left(- \ln \left(1 - \exp \left(- \left(p(-\ln(1-\theta_{\psi_{\tau}}^*))^{\rho} + q(-\ln(1-\theta_{\psi_j}^*))^{\rho} \right)^{1/\rho} \right) \right)^{\rho} \right) \right]^{1/\rho} \right) \right] \right] \right]} \right. \\
 &\quad \left. \sqrt[p+q]{1 - \exp \left[- \left(\frac{1}{p+q} \right) \left(- \ln \left[1 - \exp \left[- \left(\frac{2}{n(n+1)} \right) \left(\sum_{\tau=1}^n \sum_{j=1}^n \left(- \ln \left(1 - \exp \left(- \left(p(-\ln(1-\nu_{\psi_{\tau}}^*))^{\rho} + q(-\ln(1-\nu_{\psi_j}^*))^{\rho} \right)^{1/\rho} \right) \right)^{\rho} \right) \right]^{1/\rho} \right) \right] \right] \right]} \right) \right)^{1/\rho}
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

证明:

$$\begin{aligned}
 &(\psi_{\tau}^p \otimes \psi_j^q) \\
 &= \left(\sqrt[p]{r^* \exp \left(- \left(p(-\ln \mu_{\psi_{\tau}}^*)^{\rho} + q(-\ln \mu_{\psi_j}^*)^{\rho} \right)^{1/\rho} \right)} \right. \\
 &\quad \left. \sqrt[p]{s^* 1 - \exp \left(- \left(p(-\ln(1-\theta_{\psi_{\tau}}^*))^{\rho} + q(-\ln(1-\theta_{\psi_j}^*))^{\rho} \right)^{1/\rho} \right)} \right. \\
 &\quad \left. \sqrt[p]{t^* 1 - \exp \left(- \left(p(-\ln(1-\nu_{\psi_{\tau}}^*))^{\rho} + q(-\ln(1-\nu_{\psi_j}^*))^{\rho} \right)^{1/\rho} \right)} \right) ;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \bigoplus_{\tau=1}^n \bigoplus_{j=1}^n (\psi_{\tau}^p \otimes \psi_j^q) \\
 &= \left(\sqrt[r^*]{1 - \exp \left(- \left(\sum_{\tau=1}^n \sum_{j=1}^n \left(-\ln \left(1 - \exp \left(- \left(p(-\ln \mu_{\psi_{\tau}}^{r^*})^{\varphi} + q(-\ln \mu_{\psi_j}^{r^*})^{\varphi} \right)^{1/\varphi} \right) \right)^{\varphi} \right)^{1/\varphi} \right)} \right) \right. \\
 & \quad \left. \sqrt[s^*]{\exp \left(- \left(\sum_{\tau=1}^n \sum_{j=1}^n \left(-\ln \left(1 - \exp \left(- \left(p(-\ln (1 - \theta_{\psi_{\tau}}^{s^*}))^{\varphi} + q(-\ln (1 - \theta_{\psi_j}^{s^*}))^{\varphi} \right)^{1/\varphi} \right) \right)^{\varphi} \right)^{1/\varphi} \right)} \right) \right. \\
 & \quad \left. \sqrt[t^*]{\exp \left(- \left(\sum_{\tau=1}^n \sum_{j=1}^n \left(-\ln \left(1 - \exp \left(- \left(p(-\ln (1 - \nu_{\psi_{\tau}}^{t^*}))^{\varphi} + q(-\ln (1 - \nu_{\psi_j}^{t^*}))^{\varphi} \right)^{1/\varphi} \right) \right)^{\varphi} \right)^{1/\varphi} \right)} \right) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{2}{n(n+1)} \right) \left(\bigoplus_{\tau=1}^n \bigoplus_{j=1}^n ((\psi_{\tau})^p \otimes (\psi_j)^q) \right) \\
 &= \left(\sqrt[r^*]{1 - \exp \left(- \left(\left(\frac{2}{n(n+1)} \right) \left(\sum_{\tau=1}^n \sum_{j=1}^n \left(-\ln \left(1 - \exp \left(- \left(p(-\ln \mu_{\psi_{\tau}}^{r^*})^{\varphi} + q(-\ln \mu_{\psi_j}^{r^*})^{\varphi} \right)^{1/\varphi} \right) \right)^{\varphi} \right)^{1/\varphi} \right)} \right) \right. \\
 & \quad \left. \sqrt[s^*]{\exp \left(- \left(\left(\frac{2}{n(n+1)} \right) \left(\sum_{\tau=1}^n \sum_{j=1}^n \left(-\ln \left(1 - \exp \left(- \left(p(-\ln (1 - \theta_{\psi_{\tau}}^{s^*}))^{\varphi} + q(-\ln (1 - \theta_{\psi_j}^{s^*}))^{\varphi} \right)^{1/\varphi} \right) \right)^{\varphi} \right)^{1/\varphi} \right)} \right) \right. \\
 & \quad \left. \sqrt[t^*]{\exp \left(- \left(\left(\frac{2}{n(n+1)} \right) \left(\sum_{\tau=1}^n \sum_{j=1}^n \left(-\ln \left(1 - \exp \left(- \left(p(-\ln (1 - \nu_{\psi_{\tau}}^{t^*}))^{\varphi} + q(-\ln (1 - \nu_{\psi_j}^{t^*}))^{\varphi} \right)^{1/\varphi} \right) \right)^{\varphi} \right)^{1/\varphi} \right)} \right) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\left(\frac{2}{n(n+1)} \right) \left(\bigoplus_{\tau=1}^n \bigoplus_{j=1}^n (\psi_{\tau}^p \otimes \psi_j^q) \right) \right)^{\frac{1}{p+q}} = \\
 & \left(\sqrt[r^*]{\exp \left(- \left(\left(\frac{1}{p+q} \right) \left(-\ln \left(1 - \exp \left(- \left(\left(\frac{2}{n(n+1)} \right) \left(\sum_{\tau=1}^n \sum_{j=1}^n \left(-\ln \left(1 - \exp \left(- \left(p(-\ln \mu_{\psi_{\tau}}^{r^*})^{\varphi} + q(-\ln \mu_{\psi_j}^{r^*})^{\varphi} \right)^{1/\varphi} \right) \right)^{\varphi} \right)^{1/\varphi} \right) \right)^{\varphi} \right)^{1/\varphi} \right)} \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \sqrt[s^*]{1 - \exp \left(- \left(\left(\frac{1}{p+q} \right) \left(-\ln \left(1 - \exp \left(- \left(\left(\frac{2}{n(n+1)} \right) \left(\sum_{\tau=1}^n \sum_{j=1}^n \left(-\ln \left(1 - \exp \left(- \left(p(-\ln (1 - \theta_{\psi_{\tau}}^{s^*}))^{\varphi} + q(-\ln (1 - \theta_{\psi_j}^{s^*}))^{\varphi} \right)^{1/\varphi} \right) \right)^{\varphi} \right)^{1/\varphi} \right) \right)^{\varphi} \right)^{1/\varphi} \right)} \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \sqrt[t^*]{1 - \exp \left(- \left(\left(\frac{1}{p+q} \right) \left(-\ln \left(1 - \exp \left(- \left(\left(\frac{2}{n(n+1)} \right) \left(\sum_{\tau=1}^n \sum_{j=1}^n \left(-\ln \left(1 - \exp \left(- \left(p(-\ln (1 - \nu_{\psi_{\tau}}^{t^*}))^{\varphi} + q(-\ln (1 - \nu_{\psi_j}^{t^*}))^{\varphi} \right)^{1/\varphi} \right) \right)^{\varphi} \right)^{1/\varphi} \right) \right)^{\varphi} \right)^{1/\varphi} \right)} \right) \right) \right) \right)
 \end{aligned}$$

证明得证。

定理 5.2.2 若 $\psi_i = (\mu_i, \theta_i, \nu_i)$ 是一组 r, s, t -SPFN, r, s, t -SPFAAHRM 可满足以下性质:

(1) (幂等性) 如果对于任意 $\tau = 1, 2, \dots, n$ 都有 $\psi_i = \psi$, 则

$$r, s, t\text{-SPFAAHRM}(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) = \psi \quad (5.5)$$

(2) (置变不变性) 若 $\psi_i' (\tau = 1, 2, \dots, n)$ 是 ψ_i 的任意一组置换, 则

$$r, s, t\text{-SPFAAHRM}(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) = r, s, t\text{-SPFAAHRM}(\psi_1', \psi_2', \dots, \psi_n') \quad (5.6)$$

(3) (单调性) 若 ψ_i' 和 ψ_i 为两个任意的 r, s, t -SPFE, 对于任意 $\tau = 1, 2, \dots, n$, 如果有 $\mu_\tau \geq \mu_\tau', \theta_\tau \geq \theta_\tau', \nu_\tau \geq \nu_\tau'$, 则

$$r, s, t\text{-SPFAAHRM}(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) \geq r, s, t\text{-SPFAAHRM}(\psi_1', \psi_2', \dots, \psi_n') \quad (5.7)$$

(4) (有界性) 设

$$\begin{aligned} \psi_\tau^- &= \min \psi_\tau = (\min_\tau \mu_\tau, \min_\tau \theta_\tau, \min_\tau \nu_\tau), \\ \psi_\tau^+ &= \max \psi_\tau = (\max_\tau \mu_\tau, \max_\tau \theta_\tau, \max_\tau \nu_\tau), \end{aligned}$$

则有

$$\psi^- \leq r, s, t\text{-SPFAAHRM}(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) \leq \psi^+ \quad (5.8)$$

5.3 基于 r, s, t -SPFAAHRM 算子多属性决策模型及其应用

5.3.1 r, s, t -SPFAAHRM 算子

定理 5.3.1 假设 $\psi_\tau = (\mu_\tau, \theta_\tau, \nu_\tau)$ 是一系列 r, s, t -SPFE, 其中 $\tau = 1, 2, \dots, n$, 相关的权重向量为 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$, 满足 $\omega_\tau \geq 0 (\tau = 1, 2, \dots, n)$ 且 $\sum_{\tau=1}^n \omega_\tau = 1$, 若

$$r, s, t\text{-SPFAAHRM}^{p,q}(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) = \left(\frac{2}{n(n+1)} \left(\bigoplus_{\tau=1}^n \bigoplus_{j=1}^n \left((\omega_\tau \psi_\tau)^p \otimes (\omega_j \psi_j)^q \right) \right) \right)^{\frac{1}{p+q}}$$

$$\begin{aligned}
 & \sqrt[n]{\exp\left[-\left(\frac{1}{p+q}\right)\left(-\ln\left(1-\exp\left[-\left(\frac{2}{n(n+1)}\right)\left(\sum_{r=1}^n\sum_{j=1}^n\left(-\ln\left(1-\exp\left[-p\left(-\ln\left(1-\exp\left(-\left(\lambda(-\ln(1-\mu_{\psi_r}^*)\right)^{1/\rho}\right)\right)\right]\right)\right)\right]\right)^{\rho}+q\left(-\ln\left(1-\exp\left(-\left(\lambda(-\ln(1-\mu_{\psi_j}^*)\right)^{1/\rho}\right)\right)\right)\right)^{\rho}\right)\right]\right]} \\
 = & \sqrt[n]{1-\exp\left[-\left(\frac{1}{p+q}\right)\left(-\ln\left(1-\exp\left[-\left(\frac{2}{n(n+1)}\right)\left(\sum_{r=1}^n\sum_{j=1}^n\left(-\ln\left(1-\exp\left[-p\left(-\ln\left(1-\exp\left(-\left(\lambda(-\ln\theta_{\psi_r}^*)\right)^{1/\rho}\right)\right)\right]\right)\right)\right]\right)^{\rho}+q\left(-\ln\left(1-\exp\left(-\left(\lambda(-\ln\theta_{\psi_j}^*)\right)^{1/\rho}\right)\right)\right)^{\rho}\right)\right]\right]} \\
 & \sqrt[n]{1-\exp\left[-\left(\frac{1}{p+q}\right)\left(-\ln\left(1-\exp\left[-\left(\frac{2}{n(n+1)}\right)\left(\sum_{r=1}^n\sum_{j=1}^n\left(-\ln\left(1-\exp\left[-p\left(-\ln\left(1-\exp\left(-\left(\lambda(-\ln\nu_{\psi_r}^*)\right)^{1/\rho}\right)\right)\right]\right)\right)\right]\right)^{\rho}+q\left(-\ln\left(1-\exp\left(-\left(\lambda(-\ln\nu_{\psi_j}^*)\right)^{1/\rho}\right)\right)\right)^{\rho}\right)\right]\right]}
 \end{aligned}$$

则称 $r,s,t-SPFAAWHrM$ 为 r,s,t 球形模糊 AA 加权 Heronian 平均算子。

5.3.2 算法模型

设方案集为 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ 为属性集, 属性权重向量 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$, 满足 $\omega_j \geq 0$ 且 $\sum_{j=1}^n \omega_j = 1$ 。为了从方案中选择最佳方案, 现邀请专家针对选择方案运用专业知识进行综合评估得到多个 r,s,t 球形模糊集, 进而构建出相应的 r,s,t 球形模糊决策矩阵 $E = (\psi_{ij})_{m \times n}$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$ 。

具体步骤如下:

步骤 1 根据各选择方案相关的决策信息, 构建相应的 r,s,t 球形模糊决策矩阵 $E = (\psi_{ij})_{m \times n}$ 。

步骤 2 决策信息标准化将决策矩阵 E 规范化转化为规范矩阵 $E = (\psi_{ij})_{m \times n}$,

$$\psi_{ij} = \begin{cases} \psi_{ij}, & C_j \text{ 为效益型属性} \\ \psi_{ij}^c, & C_j \text{ 为成本型属性} \end{cases}。$$

步骤 3 运用 $r,s,t-SPFAAWA$ 算子、 $r,s,t-SPFAAWG$ 算子、 $r,s,t-SPFAAWHrM$ 算子计算各选择方案 x_i 的综合属性 ψ_i 。

步骤 4 计算各选择方案综合属性 ψ_i 的得分函数 $S(\psi_i)$ 和精确函数 $H(\psi_i)$ 。

步骤 5 对各选择方案排序, 选择出这些方案中综合性能值最高的方案。

5.4 案例分析

现代焊接技术最明显的体现是机器人焊接。第一代机器人焊接系统采用两道焊接工艺，第一道用于学习焊缝的几何形状，第二道用于跟踪和焊接焊缝。第二代机器人焊接系统采用了突破性的技术，可以实时监测焊缝，同时学习和跟踪焊缝。第三代机器人焊接系统是机器人焊接技术中最复杂的，因为它们可以实时操作，并且在混乱的环境中工作时可以理解焊缝快速变化的形状。根据工业弧焊机器人的选择，更高的产品质量要求应该导致更便宜的成本和更可靠的焊缝。机器人的特点可能是它们的质量密度、可复制性、载货能力、最大到达距离、平均能耗和运动。在为特定应用选择机器人时，必须考虑所有这些因素。本研究了弧焊过程中工业机器人的选择。使用四个独立的机器人，它们具有五个可编程轴和来自各自制造商的不同控制器来收集弧焊机器人的数据。在审查了机器人制造商提供的几个数据表来定义他们的产品后，评估了选择标准。表 3 列出了选择弧焊机器人时需要考虑的五个最重要的因素^[10]：

现有四个方案 $O = \{O_1, O_2, O_3, O_4\}$ 以及五个属性 $C = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$ 。

重量密度(C_1)：考虑了机器人的物理重量。消费者通常想要轻型机器人。 C_1 为成本型属性。

可复制性 (C_2)：指机器人重复做一项工作的能力。通常，复制以毫米为单位进行测量。 C_2 为效益型属性。

载货能力 (C_3)：指机器人能够提起转弯的最大总重量。多多益善。通常，重量密度以公斤表示。 C_3 为效益型属性。

最大到达距离 (C_4)：是机器人完成一项工作的最大垂直和水平长度的平均值。这是典型的想要获得更多。通常，机器人最大的岩石以毫米为单位测量。 C_4 为效益型属性。

机器人的运动 (C_5)：指机器人在接近执行器尖端轨迹的参考点上的运动。在描述机器人时，通常会用到速度、加速度和加速度导数。通常，机器人的速度

用米每秒或米每秒平方表示。 C_5 为效益型属性。

表 5-1 r, s, t 球形模糊矩阵

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
O_1	(0.5,0.3,0.4)	(0.4,0.2,0.5)	(0.8,0.4,0.3)	(0.6,0.6,0.4)	(0.4,0.5,0.5)
O_2	(0.5,0.3,0.6)	(0.7,0.5,0.6)	(0.4,0.5,0.5)	(0.5,0.2,0.6)	(0.5,0.4,0.6)
O_3	(0.6,0.5,0.4)	(0.5,0.4,0.6)	(0.3,0.6,0.7)	(0.4,0.3,0.5)	(0.4,0.3,0.5)
O_4	(0.5,0.6,0.5)	(0.4,0.7,0.3)	(0.7,0.4,0.6)	(0.6,0.5,0.4)	(0.6,0.5,0.6)

步骤 1 根据相关决策信息，构建区间毕达哥拉斯模糊决策矩阵 $E = (\psi_{ij})_{m \times n}$ ，如表 5-1 所示。

步骤 2 根据上面信息得知 C_1 为成本型指标，其他属性指标 $C_j (j = 2, 3, 4)$ 均为效益型指标，对专家决策信息矩阵进行标准化得到 $D = (\psi_{ij})_{m \times n}$ 。

步骤 3 根据表 5-1 决策信息矩阵， r, s, t -SPFAAWA 算子、 r, s, t -SPFAAWG 算子、 r, s, t -SPFAAWHrM 算子计算出各选择方案的综合属性 $\psi_i (i = 1, 2, 3, 4)$ ，设 $\varphi = 2$ ， $r = 3, s = 3, t = 3$ 可得。

由 r, s, t -SPFAAWA 算子得到的综合属性为：

$$\begin{aligned} O_1 &= (0.6956, 0.3484, 0.3993) ; \quad O_2 = (0.5881, 0.3501, 0.5489) ; \\ O_3 &= (0.4206, 0.4031, 0.5795) ; \quad O_4 = (0.6237, 0.4985, 0.4473) 。 \end{aligned}$$

由 r, s, t -SPFAAWG 算子得到的综合属性为：

$$\begin{aligned} O_1 &= (0.4977, 0.4914, 0.4567) ; \quad O_2 = (0.4985, 0.4543, 0.5672) ; \\ O_3 &= (0.3772, 0.5150, 0.6268) ; \quad O_4 = (0.5445, 0.5881, 0.5427) 。 \end{aligned}$$

由 r, s, t -SPFAAWHrM ($p = 2, q = 2$) 算子得到的综合属性为：

$$\begin{aligned} O_1 &= (0.5587, 0.6026, 0.6447) ; \quad O_2 = (0.4721, 0.5984, 0.7377) ; \\ O_3 &= (0.3359, 0.6309, 0.7548) ; \quad O_4 = (0.5021, 0.7164, 0.6745) 。 \end{aligned}$$

步骤 4 计算各选择方案综合属性 ψ_i 的得分函数 $S(\psi_i)$ 和精确函数 $H(\psi_i)$ 。

表 5-2 各算子得分函数值及排序结果

各算子	O_1	O_2	O_3	O_4	排序结果
$r,s,t-SPFAAWHrM$	0.3438	0.2447	0.1784	0.2260	$O_1 \succ O_2 \succ O_4 \succ O_3$
$r,s,t-SPFAAWA$	0.6153	0.4976	0.4072	0.5146	$O_1 \succ O_2 \succ O_4 \succ O_3$
$r,s,t-SPFAAWG$	0.4547	0.4238	0.3354	0.3991	$O_1 \succ O_2 \succ O_4 \succ O_3$

最终得出 $r,s,t-SPFAAWHrM$ 、 $r,s,t-SPFAAWA$ 、 $r,s,t-SPFAAWG$ 算子的排序都为 $O_1 \succ O_2 \succ O_4 \succ O_3$ 。

本节重点进行敏感性分析，以评估不同参数如何影响排名结果。由于 r^*, s^* 和 t^* 以及 p, q, φ 是参数变量，不同的参数可能对决策结果产生不同的影响。

表 5-3 r^* 值不同的结果

r^*, s^*, t^*	排序结果
$r^*=5, s^*=3, t^*=3$	$O_1 \succ O_2 \succ O_4 \succ O_3$
$r^*=7, s^*=3, t^*=3$	$O_1 \succ O_2 \succ O_4 \succ O_3$
$r^*=9, s^*=3, t^*=3$	$O_1 \succ O_2 \succ O_4 \succ O_3$
$r^*=13, s^*=3, t^*=3$	$O_1 \succ O_2 \succ O_4 \succ O_3$
$r^*=17, s^*=3, t^*=3$	$O_1 \succ O_2 \succ O_4 \succ O_3$
$r^*=20, s^*=3, t^*=3$	$O_1 \succ O_2 \succ O_4 \succ O_3$

首先，我们讨论 r 和 φ 参数变化对这个例子的排序结果的影响。为了展示上述图示的可靠性和一致性，我们在一个结构化框架内检查了不同参数（如 r^*, s^* 和 t^* ）的敏感性。为此，我们设置了 $s^*=3$ 和 $t^*=3$ 的值，并探索了 r^* 的不同值。通过改变 r^* 的值，不同选择的排名结果保持一致，即 $O_1 \succ O_2 \succ O_4 \succ O_3$ ，如表 5-3 所示。此外，在确定 $r^*=3$ 和 $t^*=3$ 并增加 $r,s,t-SPFAAWHrM$ 算子中 $t^*=\{3, 5, 7, 10, 13, 17, 20\}$ 的值后，从表 5-4 中可以看出，选择的排名结果最佳排名不变，但有排序发生稳定变化，即 $O_1 \succ O_4 \succ O_2 \succ O_3$ 。同样，如果我们固定 $r^*=3$ 和 $s^*=3$ ，并改变 $r,s,t-SPFAAWHrM$ 中 $t^*=\{3,5,7,10,13,17,20\}$ 的值，排名结果

保持不变，即 $O_1 \succ O_2 \succ O_4 \succ O_3$ （如表 5-5）。因此，在 $r, s, t-SPFAAWHrM$ 算子下，所提出的方法在不同的 r^*, s^* 和 t^* 值下表现出稳定性。

表 5-4 s^* 值不同的结果

r^*, s^*, t^*	排序结果
$r^* = 3, s^* = 5, t^* = 3$	$O_1 \succ O_4 \succ O_2 \succ O_3$
$r^* = 3, s^* = 7, t^* = 3$	$O_1 \succ O_4 \succ O_2 \succ O_3$
$r^* = 3, s^* = 9, t^* = 3$	$O_1 \succ O_4 \succ O_2 \succ O_3$
$r^* = 3, s^* = 13, t^* = 3$	$O_1 \succ O_4 \succ O_2 \succ O_3$
$r^* = 3, s^* = 17, t^* = 3$	$O_1 \succ O_4 \succ O_2 \succ O_3$
$r^* = 3, s^* = 20, t^* = 3$	$O_1 \succ O_4 \succ O_2 \succ O_3$

表 5-5 t^* 值不同的结果

r^*, s^*, t^*	排序结果
$r^* = 3, s^* = 3, t^* = 5$	$O_1 \succ O_2 \succ O_4 \succ O_3$
$r^* = 3, s^* = 3, t^* = 7$	$O_1 \succ O_2 \succ O_4 \succ O_3$
$r^* = 3, s^* = 3, t^* = 9$	$O_1 \succ O_2 \succ O_4 \succ O_3$
$r^* = 3, s^* = 3, t^* = 13$	$O_1 \succ O_2 \succ O_4 \succ O_3$
$r^* = 3, s^* = 3, t^* = 17$	$O_1 \succ O_2 \succ O_4 \succ O_3$
$r^* = 3, s^* = 3, t^* = 20$	$O_1 \succ O_2 \succ O_4 \succ O_3$

表 5-6 p, q 值不同的结果

p, q	排序结果
$p = 1, q = 5$	$O_1 \succ O_2 \succ O_4 \succ O_3$
$p = 5, q = 1$	$O_1 \succ O_2 \succ O_4 \succ O_3$
$p = 2, q = 10$	$O_1 \succ O_2 \succ O_4 \succ O_3$
$p = 10, q = 2$	$O_1 \succ O_2 \succ O_4 \succ O_3$

其次，对 p, q 和 ϕ 进行敏感度分析。如表 5-6 Heronian 算子中参数 p, q 对于

最终的排序结果没有较大影响， O_1 仍是最优选择。得分函数随着 φ 的变化而改变如表 5-6，但其排序没有发生改变 $O_1 \succ O_2 \succ O_4 \succ O_3$ 。 φ 在 $[5, 21]$ 之间排序结果也没有发生变化，排序结果一直为 $O_1 \succ O_2 \succ O_4 \succ O_3$ （如图 5-1）。

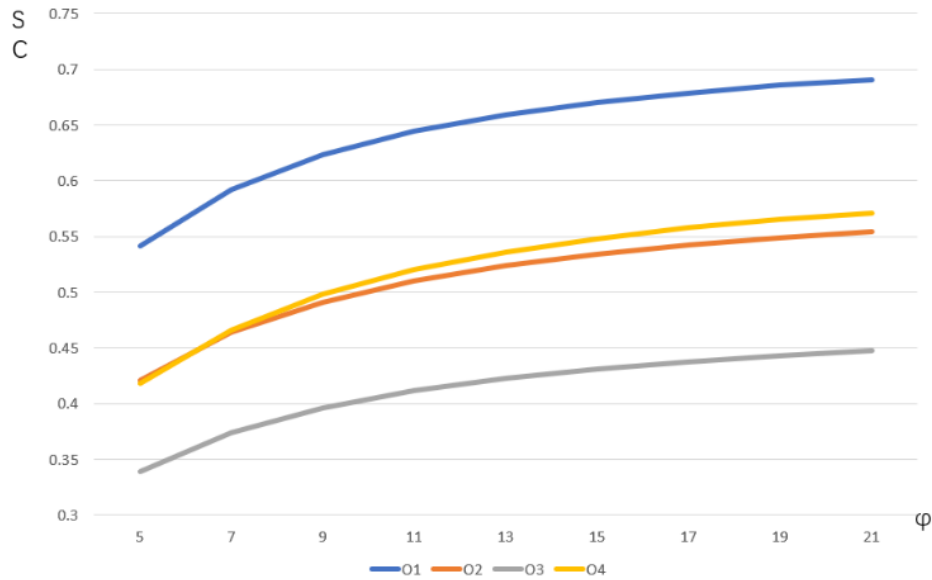


图 5-1 得分函数随 φ 值不同的结果

5.5 本章小结

本章在 r, s, t 球形模糊环境下提出基于 AA 范数的 Heronian 平均算子，并将其应用到机器人的选择中，通过敏感度结果分析， O_1 算子的有效性。根据比较分析，该模型框架的优点和成果如下：

（1）与其他评估框架相比，框架方法利用更合理的输入数据，即 r, s, t -SPFNs 来评估替代方案。然而，其他评估框架中的数据没有利用三个灵活的参数 r, s, t 。这些可调参数的加入扩大了应用范围，并允许更合理地捕获数据。

（2）本文在 r, s, t -SPFAAWHrM 环境下与 AA 范数和 Heronian 算子结合，更加注重属性与其自身之间关联性，使结果更具有稳定性。

（3）所提出的框架只需要几个简单的步骤，突出了其计算便利性。这种可访问性使其非常适合紧急决策支持场景。

第6章 总结与展望

6.1 总结

本文在对多种模糊信息——区间值毕达哥拉斯集、多值中智集、 r, s, t 球形模糊集研究的环境中，对 Aczel-Alsina 范数的多属性决策方法环境下的集成算法进行了如下研究：

(1) 随着多属性决策方法在决策领域中的地位越来越重要，关于区间毕达哥拉斯模糊环境的相关决策方法也得到了进一步完善。在区间毕达哥拉斯模糊环境下，提出了与 Aczel-Alsina 范数结合的 Maclaurin 对称平均算子。该方法充分考虑属性值之间的相关性，并尽可能避免决策信息过程中的信息缺失。

(2) 在多值中智模糊环境下，提出了与 Aczel-Alsina 范数结合的 Hamy 平均算子和对偶 Hamy 平均算子，将该算子与 IDOCRIW 法结合起来，使决策结果更具有稳定性。最后通过实例分析以及敏感度分析，证明其算法模型的实用性。

(3) r, s, t 球形模糊环境对于评价值更具有包容性，为决策者面对不确定评价信息进行有效决策。基于 r, s, t 球形模糊集，提出与 Aczel-Alsina 范数结合的 Heronian 平均算子，并对 r, s, t -SPFAAHrM 算子的性质进行分析。最后通过案例分析以及关于 r, s, t 等参数的敏感度分析，验证了提出方法的有效性和可行性。

6.2 展望

关于多属性决策的研究是未来继续研究的重点工作，进一步研究工作如下：

(1) 提出更高效的 Aczel-Alsina 范数计算方法，探索其在人工智能、大数据分析等环境中的应用。Aczel-Alsina 范数有望在更多领域发挥重要作用，为解决复杂的实际问题提供新的思路和方法。

(2) 本文主要研究了多种模糊环境与 Aczel-Alsina 范数融合的多属性决策，未来可以考虑将本文的研究方法拓展于不同的算法当中，并将其应用于解决现实问题。

(3) 本文主要在区间毕达哥拉斯模糊环境中介绍了 Aczel-Alsina 范数，未来研究将在复模糊多属性决策中进行探索研究，并将其应用于更多实际场景中。

参考文献

- [1] Atanassov K T. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets Systems, 1986, 20(1): 87-96
- [2] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353.
- [3] Yager R R. Pythagorean fuzzy subsets[C]//2013 joint IFSA world congress and NAFIPS annual meeting (IFSA/NAFIPS). Edmonton: IEEE, 2013: 57-61.
- [4] Smarandache F. A unifying field in Logics: Neutrosophic Logic [M]. Philosophy. American Research Press, 1999. 1-141.
- [5] Wang H, Smarndanche F, Zhang, Y, et al. Single valued neutrosophic sets [M]. Infinite study, 2010.
- [6] 王坚强, 李新娥. 基于多值中智集的 TODIM 方法[J]. 控制与决策, 2015, 30(06): 1139-1142.
- [7] 杨媛媛, 陈树伟, 李舒敬. 多值直觉中智集及其性质[J]. 模糊系统与数学, 2022, 36(01): 11-17.
- [8] Li W, Ye J, and Ezgi T. MAGDM model using the Aczel-Alsina aggregation operators of neutrosophic entropy elements in the case of neutrosophic multi-valued sets [J]. Neutrosophic Sets and Systems, 2023, 57 (1): 1-17.
- [9] 赵婷婷. 基于单值中智模糊集的多属性群决策方法研究[D]. 山西大学, 2023.
- [10] Ali J, Muhammad N. r, s, t-spherical fuzzy VIKOR method and its application in multiple criteria group decision making[J]. IEEE Access, 2023, 11: 46454-46475.
- [11] Yager R R, Basov A M. Pythagorean membership grades. complex numbers and decision making[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2013, 28(5): 436-452.
- [12] Peng X, Yang Y. Pythagorean fuzzy Choquet integral based MABAC method for multiple attribute group decision making[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2016, 31(10): 989-1020.
- [13] Zhang X, Xu Z. Extension of TOPSIS to multiple criteria decision making with Pythagorean fuzzy sets[J]. International journal of intelligent systems, 2014, 29(12): 1061-1078.
- [14] Garg H. A novel accuracy function under interval-valued Pythagorean fuzzy environment for solving multicriteria decision making problem[J]. Journal of

- Intelligent and Fuzzy Systems, 2016, 31(1): 529-540.
- [15] Wu S J, Wei G W. Pythagorean fuzzy Hamacher aggregation operators and their application to multiple attribute decision making[J]. International Journal of Knowledge-Based and Intelligent Engineering Systems, 2017, 21(3): 189-201.
- [16] Garg H. Some methods for strategic decision-making problems with immediate probabilities in Pythagorean fuzzy environment[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2018, 33(4): 687-712.
- [17] Lu M, Wei G, Alsaadi F E, et al. Hesitant pythagorean fuzzy hamacher aggregation operators and their application to multiple attribute decision making[J]. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 2017, 33(2): 1105-1117.
- [18] Aydin S, Kahraman C, Kabak M. Development of harmonic aggregation operator with trapezoidal Pythagorean fuzzy numbers[J]. Soft Computing, 2020, 24(15): 11791-11803.
- [19] Liang D, Xu Z. The new extension of TOPSIS method for multiple criteria decision making with hesitant Pythagorean fuzzy sets[J]. Applied Soft Computing, 2017, 60: 167-179.
- [20] Rahman K, Abdullah S, Ahmed R, et al. Pythagorean fuzzy Einstein weighted geometric aggregation operator and their application to multiple attribute group decision making[J]. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 2017, 33(1): 635-647.
- [21] Liang D, Darko A P, Xu Z. Interval-valued Pythagorean fuzzy extended Bonferroni mean for dealing with heterogenous relationship among attributes[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2018, 33(7): 1381-1411.
- [22] Ren P, Xu Z, Gou X. Pythagorean fuzzy TODIM approach to multi-criteria decision making[J]. Applied soft computing, 2016, 42: 246-259.
- [23] Zhang X. A novel approach based on similarity measure for Pythagorean fuzzy multiple criteria group decision making[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2016, 31(6): 593-611.
- [24] Gou X, Xu Z, Ren P. The properties of continuous Pythagorean fuzzy information[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2016, 31(5): 401-424.
- [25] Maclaurin C. A second letter to Martin Folkes, Esq; concerning the roots of equations, with demonstration of other rules of algebra[J]. Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A, 1729, 1729(36): 59-96.
- [26] Liu P, Chen S M, Wang P. Multiple-attribute group decision-making based on q-

- rung orthopair fuzzy power maclaurin symmetric mean operators[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2018, 50(10): 3741-3756.
- [27] Liu P, Chen S M, Wang Y. Multiattribute group decision making based on intuitionistic fuzzy partitioned Maclaurin symmetric mean operators[J]. Information Sciences, 2020, 512: 830-854.
- [28] Wei G, Lu M, Gao H. Picture fuzzy heronian mean aggregation operators in multiple attribute decision making[J]. International Journal of Knowledge-Based and Intelligent Engineering Systems, 2018, 22(3): 167-175.
- [29] Wang J, Wei G, Gao H. Approaches to multiple attribute decision making with interval-valued 2-tuple linguistic Pythagorean fuzzy information[J]. Mathematics, 2018, 6(10): 201.
- [30] Das S, Roy B K, Kar M B, et al. Neutrosophic fuzzy set and its application in decision making[J]. Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing, 2020, 11(11): 5017-5029.
- [31] Biswas P, Pramanik S, Giri B C. Aggregation of triangular fuzzy neutrosophic set information and its application to multi-attribute decision making[J]. Neutrosophic Sets and Systems, 2016, 6(12): 20-40.
- [32] Ye J. Multiple-attribute decision-making method under a single-valued neutrosophic hesitant fuzzy environment[J]. Journal of Intelligent Systems, 2014, 24: 23-36.
- [33] Mahmood T, Ullah K, Khan Q, et al. An approach toward decision-making and medical diagnosis problems using the concept of spherical fuzzy sets[J]. Neural Computer Application, 2019, 31(11):7041–7053.
- [34] Akram M, Naz S, Feng F, et al. Extended MABAC method based on 2-tuple linguistic T-spherical fuzzy sets and Heronian mean operators: An application to alternative fuel selection[J]. Aims Math, 2023, 8(5): 10619-10653.
- [35] Naz S, Akram M, Muzammal M. Group decision-making based on 2-tuple linguistic T-spherical fuzzy COPRAS method[J]. Soft Computing, 2023, 27(6): 2873-2902.
- [36] Akram M, Alessio M. Multi-attribute group decision making based on T-spherical

- fuzzy soft rough average aggregation operators[J]. Granular Computing, 2023,8(1): 171-207.
- [37] Wu M, Chen T Y, Fan J. Divergence measure of T-spherical fuzzy sets and its applications in pattern recognition[J]. IEEE Access, 2019, 8: 10208-10221.
- [38] Naz S, Muhammad A, Mamoon M. Group decision-making based on 2-tuple linguistic T-spherical fuzzy COPRAS method[J]. Soft Computing, 2023, 27(6): 2873-2902.
- [39] Akram M, Alessio M. Multi-attribute group decision making based on T-spherical fuzzy soft rough average aggregation operators[J]. Granular Computing, 2023, 8(1): 171-207.
- [40] Ju Y, Liang Y, Luo C, et al. T-spherical fuzzy TODIM method for multi-criteria group decision-making problem with incomplete weight information[J]. Soft Computing, 2021, 25: 2981-3001.
- [41] Alsalem M A, Alsattar H A, Albahri AS, et al. Based on T-spherical fuzzy environment: a combination of FWZIC and FDOSM for prioritising COVID-19 vaccine dose recipients[J]. Journal of infection and public health, 2021, 14(10): 1513-1559.
- [42] Mahmood T, Ullah K, Khan Q, et al. An approach toward decision-making and medical diagnosis problems using the concept of spherical fuzzy sets." Neural Computing and Applications 31 (2019): 7041-7053.
- [43] Zeng S, Garg H, Munir M, Mahmood T, et al. A multi-attribute decision making process with immediate probabilistic interactive averaging aggregation operators of T-spherical fuzzy sets and its application in the selection of solar cells[J]. Energies, 2019, 12(4436): 2-26.
- [44] Ullah K, Mahmood T, Garg H. Evaluation of the performance of search and rescue robots using T-spherical fuzzy Hamacher aggregation operators[J]. International Journal of Fuzzy Systems, 2020, 22(2): 570-582.
- [45] Farid H M A, Riaz M, Garcia G S, et al. T-spherical fuzzy information aggregation with multi-criteria decision-making[J]. AIMS Math, 2023,8(5): 10113-10145.

- [46] Liu P, Wang D, Zhang H, et al. Multi-attribute decision-making method based on normal T-spherical fuzzy aggregation operator[J]. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 2021, 40(5): 9543-9565.
- [47] Khan M R, Ullah K, Khan Q. Multi-attribute decision-making using Archimedean aggregation operator in T-spherical fuzzy environment[J]. *Reports in Mechanical Engineering*, 2023, 4(1): 18-38.
- [48] Menger K, Menger K. Statistical metrics[J]. *Selecta Mathematica: Volume 2*, 2003: 433-435.
- [49] Garg H. A new generalized Pythagorean fuzzy information aggregation using Einstein operations and its application to decision making[J]. *International Journal of Intelligent Systems*, 2016, 31(9): 886-920.
- [50] Sarkar A, Biswas A. Multicriteria decision-making using Archimedean aggregation operators in Pythagorean hesitant fuzzy environment[J]. *International Journal of Intelligent Systems*, 2019, 34(7): 1361-1386.
- [51] Venkatesan D, Sriram S. On Lukasiewicz disjunction and conjunction of Pythagorean fuzzy matrices[J]. *International Journal of Computer Sciences and Engineering*, 2019, 7(6): 861-865.
- [52] Wei G, Lu M, Tang X, et al. Pythagorean hesitant fuzzy Hamacher aggregation operators and their application to multiple attribute decision making[J]. *International Journal of Intelligent Systems*, 2018, 33(6): 1197-1233.
- [53] Klement E P, Mesiar R, Pap E. Triangular norms[J]. *Tatra Mountains Mathematical Publications*, 1997, 13: 169-193.
- [54] Aczél J, Alsina C. Characterizations of some classes of quasilinear functions with applications to triangular norms and to synthesizing judgements[J]. *aequationes mathematicae*, 1982, 25(1): 313-315.
- [55] Senapati T, Chen G, Yager R R. Aczel–Alsina aggregation operators and their application to intuitionistic fuzzy multiple attribute decision making[J]. *International Journal of Intelligent Systems*, 2022, 37(2): 1529-1551.
- [56] Senapati T, Chen G, Mesiar R, et al. Novel Aczel–Alsina operations-based interval-valued intuitionistic fuzzy aggregation operators and their applications in multiple attribute decision-making process[J]. *International Journal of Intelligent Systems*, 2022, 37(8): 5059-5081.
- [57] Senapati T, Chen G, Mesiar R, et al. Novel Aczel–Alsina operations-based

- hesitant fuzzy aggregation operators and their applications in cyclone disaster assessment[J]. *International Journal of General Systems*, 2022, 51(5): 511-546.
- [58] Senapati T. Approaches to multi-attribute decision-making based on picture fuzzy Aczel–Alsina average aggregation operators[J]. *Computational and Applied Mathematics*, 2022, 41(40): 1-28.
- [59] Wang N, Li Q, Abd E AA, et al. A novel hybrid multibiometrics based on the fusion of dual iris, visible and thermal face images[R]. *Chengdu: 2013 international symposium on biometrics and security technologies*, 2013. 217-223.
- [60] Naeem M, Ali J. A novel multi-criteria group decision-making method based on Aczel–Alsina spherical fuzzy aggregation operators: Application to evaluation of solar energy cells[J]. *Physica Scripta*, 2022, 97(8): 085203.
- [61] Ali J, Muhammad N. Analysis and application of p, q-quasirung orthopair fuzzy Aczel–Alsina aggregation operators in multiple criteria decision-making[J]. *IEEE Access*, 2023, 11: 49081-49101.
- [62] Chen T. Remoteness index-based Pythagorean fuzzy VIKOR methods with a generalized distance measure for multiple criteria decision analysis[J]. *Information Fusion*, 2018(41):129-150.
- [63] Senapati T, Chen G, Mesiar R, et al. Multiple attribute decision making based on Pythagorean fuzzy Aczel-Alsina average aggregation operators[J]. *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*, 2023, 14(8): 10931-10945.
- [64] Ali J. Analysis and application of r, s, t-spherical fuzzy Aczel–Alsina aggregation operators in multiple criteria decision-making[J]. *Granular Computing*, 2024, 9(1): 17.
- [65] Bengio Y, Courville A, Vincent P. Representation learning: a review and new perspectives[J]. *IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2013, 35(8): 1798-1828.
- [66] Liang W. The Maximizing Deviation Method Based on Interval-Valued Pythagorean Fuzzy Weighted Aggregating Operator for Multiple Criteria Group Decision Analysis[J]. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2015, 2015:1-15.
- [67] Hussain A, Ullah K, Mubasher M, et al. Interval-valued Pythagorean fuzzy information aggregation based on Aczel-Alsina operations and their application in multiple attribute decision making[J]. *IEEE Access*, 2023, 11: 34575-34594.
- [68] Wan S P, Rao T, Dong J Y. Time-series based multi-criteria large-scale group

- decision making with intuitionistic fuzzy information and application to multi-period battery supplier selection[J]. *Expert Systems with Applications*, 2023, 232(120749), 1-37.
- [69] Hara T, Uchiyama M, Takahasi S. A refinement of various mean inequalities[J]. *Journal of Inequalities and Applications*, 1998, 2 (1998): 387-395.
- [70] Zavadskas E K, Valentinas P. Integrated determination of objective criteria weights in MCDM[J]. *International Journal of Information Technology and Decision Making*, 2016, 15(2): 267-283.
- [71] Čereška A, Podvezko V, Zavadskas EK, et al. Operating characteristics analysis of rotor systems using MCDM methods[J]. *Studies in Informatics and Control*, 2016, 25(1): 60.
- [72] Alao M A, Popoola O M, Ayodele T R. Selection of waste-to-energy technology for distributed generation using IDOCRIW-Weighted TOPSIS method: A case study of the City of Johannesburg, South Africa[J]. *Renewable Energy*, 2021, 178: 162-183.
- [73] Riaz M, Farid H M, Antucheviciene J, et al. Efficient decision making for sustainable energy using single-valued neutrosophic prioritized interactive aggregation operators[J]. *Mathematics*, 2023, 11(2186): 2-29.
- [74] Yu D J, Wu Y Y. Interval-valued Intuitionistic Fuzzy Heronian Mean Operators and Their Application in Multi-criteria Decision Making [J]. *African Journal of Business Management*, 2012, 6(11): 4158-4168.

硕士期间发表的论文

- [1] Jinming Zhou, **Longlian Li** (李龙莲), Shengnan Tao . Applications of Advanced MCDM to the Selection of Battery Suppliers[J]. **Transformations in Business and Economics**, 2024, 23 (63): 66-83. (SSCI)
- [2] **李龙莲**, 周金明, 陶胜男. 基于 Aczel-Alsina Hamy 算子的多值中智多属性群决策方法[J]. **合肥工业大学学报** (已录用)
- [3] 周金明, 詹媛媛, **李龙莲**, 陶胜男.直觉模糊云 Bonferroni 赋权均值算子集成方法研究[J]. **数学的实践与认识**, 2023,53(06):187-196.
- [4] 詹媛媛, 周金明, 陶胜男, **李龙莲**. 基于 Manhattan 距离的正态云模型相似性度量方法研究[J]. **合肥大学学报 (自然科学版)** , 2024, 41(5): 9-15.
- [5] 陶胜男, 周金明, 黄日朋, **李龙莲**. 基于赋权划分算子的云群决策方法研究[J]. **滁州学院学报** (已录用)

致谢

时光飞逝，转眼间三年的研究生生活就要画上句号。站在这个人生的重要节点回望，我深深明白，自己每一点进步都离不开老师、同学和家人们的支持与付出。

首先，我要感谢我的导师周金明老师。这三年来，您像引路人一样带着我走进学术世界。从教我怎么在文献里找关键信息，到手把手指导论文；从帮我反复修改论文结构，到叮嘱我要坚守学术道德。周老师在我完成 2 篇小论文的路上给予了许许多多的帮助。

其次，我还要感谢数理与金融学院的老师们，感谢他们在研究生生活上给我充分的指导，帮助我在理论上打下了坚实的基础，也帮助解决我在生活上的遇到的各种困难。

再次，我衷心的感谢我的父母，他们在十多年的求学历程中，不辞辛劳，对我给予了极大的支持与鼓励，给予了我无尽的宽容。

最后，向评审论文的各位专家致以深深的敬意和由衷的感谢！