

分类号: (O211.63)
密 级: 公开

单位代码: 10363
学 号: 2221020107

题 目 两类非线性非高斯随机过程的统计推断

英文并列

题 目 Statistical Inference for Two Classes of
Nonlinear non-Gaussian Stochastic Processes

学生姓名: 万山林
指导教师: 吴小太 教授
专 业: 数学
研究方向: 随机微分方程

论文答辩日期: 2025 年 5 月 14 日

安徽工程大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：我恪守学术道德，崇尚严谨学风。所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已明确注明和引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品及成果的内容。论文为本人亲自撰写，我对所写的内容负责，并完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

学位论文作者签名：万山林

日期：2025 年 5 月 14 日

安徽工程大学学位论文版权使用授权书

学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅或借阅。本人授权安徽工程大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保密 ☐，在 _____ 年解密后适用本版权书。

本学位论文属于

不保密 ☒。

学位论文作者签名：万山林

日期：2025 年 5 月 14 日

指导教师签名：吴小华

日期：2025 年 5 月 14 日

两类非线性非高斯随机过程的统计推断

摘 要

由布朗运动驱动的随机微分方程在排队论、金融、生物等领域有着广泛应用，但现实世界中许多随机现象具有显著的拖尾特性且较为复杂，该模型无法有效地刻画这些现象的统计特性。相比之下， α -稳定分布能够很好地描述具有尖峰脉冲特性和严重拖尾特性的随机现象。鉴于 α -稳定分布在描述这些复杂现象上的优势，本文将研究两类非线性非高斯随机过程的统计推断问题，主要内容可分为两个部分。第一部分，研究连续时间状态观测下 α -稳定过程驱动的非时齐随机微分方程的参数估计量的相合性、收敛速率以及渐近分布。第二部分使用核型估计方法分析第二类 α -稳定过程驱动的随机微分方程非参数估计量的相合性和渐近分布。

具体而言，本文的研究架构与内容安排如下：

第一章，本文系统地介绍了本文所研究问题的背景和意义，详细阐述了随机微分方程统计推断问题的国内外研究现状，给出该领域已有成果存在的不足。

第二章，简要介绍文中需要用到的一些定义、定理和不等式等。

第三章，使用加权拟合估计方法研究了 α -稳定过程驱动的非时齐非线性随机微分方程参数估计问题。首先利用鞅大数定律、 α -稳定

积分矩最大值不等式、Markov 不等式等工具分析了轨迹拟合估计量的相合性。其次，结合 α -稳定过程自相似性质、映射定理、Toeplitz 引理等理论建立了轨迹拟合估计量的渐近分布。

第四章，使用核型非参数估计方法研究第二类 α -稳定过程驱动的随机微分方程非参数估计问题。使用 α -稳定分布基本性质、 α -稳定积、分矩不等式、Markov 不等式等工具分别分析了估计量的相合性。其次，利用 Taylor 展开公式、 α -稳定积分核性质分析建立了非参数估计量的渐近分布。

最后对全文的研究成果进行了系统的总结，并提出展望。

关键词： α -稳定过程；非时齐随机微分方程；非参数估计；相合性；渐近分布

STATISTICAL INFERENCE FOR TWO CLASSES OF NONLINEAR NON-GAUSSIAN STOCHASTIC PROCESSES

ABSTRACT

In recent years, stochastic differential equations driven by Brownian motion have been widely studied in fields such as queuing theory, finance and biology. However, in the real world, many random phenomena exhibit characteristics of spike-pulse and heavy tails, stochastic differential equations driven by Brownian motion fails to describe the statistical characteristics of these phenomena accurately. In the contrast, the α -stable processes can well describe random phenomena with characteristics of spike-pulse and heavy tails. Therefore, this paper deals with the problems of statistical inference for two types of nonlinear non-Gaussian stochastic processes. The research content includes two parts. The first part discusses the parameter estimation problem for time inhomogeneous stochastic differential equations driven by α -stable processes, the consistency, convergence rate, and asymptotic distribution of the trajectory fitting estimator are discussed. The second part discusses the nonparametric estimation problem for the second type of stochastic differential equations

driven by α -stable processes, the consistency and the asymptotic distribution of the nonparametric estimators are discussed.

Specifically, the study is organized as follows:

First of all, this paper mainly introduces the research background and research significance of the problems related to this paper, as well as the current status of domestic and international research on the parameter estimation problem of stochastic differential equations and also points out the deficiencies of the existing achievements in this field.

The following part is preliminaries. It mainly introduces the α -stable process, gives the definition and properties of the α -stable process, the definition of the characteristic function of a random variable, and the related lemmas.

Then, we discuss the problem of trajectory fitting estimation for time inhomogeneous stochastic differential equations driven by α -stable processes. By using tools such as the law of large numbers for martingales, the maximum inequality of moments of α -stable integrals, and the Markov inequality, the consistency of the trajectory fitting estimator is proved. Then, by combining theories such as the self-similar property of α -stable processes, the mapping theorem, and the Toeplitz lemma, the asymptotic distribution of the trajectory fitting estimator is established.

After that, the problem of kernel-type nonparametric estimation of stochastic differential equations driven by the second type of α -stable

process is studied. By using the basic properties of α -stable distributions, α -stable products, integral moment inequalities, Markov inequalities and other tools, the consistency of the estimators is discussed. Then, by using the Taylor expansion formula and the properties of α -stable integral kernels, the asymptotic distribution of the nonparametric estimators is established.

Finally, the results of this paper are summarized and we provide suggestions for the further study.

Wan Shanlin (Applied Mathematics)

Supervised by Wu Xiaotai

KEYWORDS: α -stable processes; time inhomogeneous stochastic differential equations; nonparametric estimation; consistency; asymptotic distribution

目录

摘 要.....	I
ABSTRACT.....	III
第 1 章 绪论.....	1
1.1 研究背景和意义.....	1
1.2 研究现状	2
第 2 章 预备知识.....	6
2.1 符号说明	6
2.2 相关定义及引理	6
第 3 章 非时齐随机微分方程的参数估计.....	9
3.1 引言	9
3.2 问题描述	9
3.3 轨迹拟合估计量 $\hat{\theta}_T$ 的相合性	10
3.4 轨迹拟合估计量 $\hat{\theta}_T$ 的渐近分布	12
第 4 章 非参数估计量的相合性和渐近分布.....	18
4.1 引言	18
4.2 问题描述	18
4.3 核估计量 $\hat{A}_t$ 的相合性	19
4.4 核估计量 $\hat{A}_t$ 的渐近分布	24
第 5 章 总结与展望.....	30
5.1 结论	30
5.2 展望	30
参考文献.....	31
硕士期间发表的论文.....	36
致 谢.....	37

第 1 章 绪论

1.1 研究背景和意义

在过去的数十年间,统计推断在现代随机过程理论与应用研究中发挥着重要作用。其中,由布朗运动驱动的随机微分方程的统计推断问题在金融、生物等领域引起了广泛关注。2003 年,许之彦^[1]基于转移密度不等式,建立了不含未知参数的误差界,分析了时齐扩散过程的漂移项和扩散项的局部多项式估计,给出了局部线性估计的相合性和渐进正态性的证明。2009 年, Tang 和 Chen^[2]对连续时间下扩散过程的参数估计问题展开研究,讨论了 Vasicek 过程和 CIR 过程参数估计的偏差和方差,提出了适用于一般扩散过程的偏差校正方法。2014 年,邢雪丹^[3]对多种常见形式的伊藤过程进行蒙特卡罗模拟,并进行了相应的统计推断研究,选取股票样本数据模拟后,提出指数 OU 过程(Ornstein-Uhlenbeck process)模型,推导其股票价格表达式及相关性质,拓展了伊藤过程在金融建模中的应用范围。2015 年,王允艳^[4]围绕扩散型过程的统计推断问题展开深入研究。将复加权方法应用于和分扩散过程的扩散系数估计,把经验似然方法引入和分扩散过程的统计推断,针对扩散过程和带跳扩散过程,提出局部 M 估计量,拓宽了扩散过程统计推断的应用场景。2016 年, Wei 和 Shu^[5]等研究了离散观测条件下 CIR 模型的参数估计问题,证明了极大似然参数估计量的相合性,并用数值模拟证明该方法的有效性。2019 年, Pan^[6]采用伪极大似然估计法和最小二乘法估计随机 SIS 流行病模型的参数。在研究过程中,讨论了参数的点估计值、区间估计值以及联合置信区间,通过分析和模拟实例,研究了影响置信区间宽度和置信区域面积的因素。2020 年, EI 和 Ali^[7]基于欧拉极大似然估计法对 HIV 传播随机 SIS 流行病模型的部分参数进行估计,讨论了估计量参数的相合性和收敛性,为传染病模型的研究提供了重要的理论依据。2022 年,付金玉^[8]聚焦于高频和低频金融数据的波动率建模与统计推断,构建 GARCH-Itô-Jumps 模型与 GQARCH-Itô-Jumps 模型,针对市场微观结构噪音和跳跃问题,提出了结合门限技术和核光滑的稳健估计方法,确保在复杂市场环境下估计量的有效性。2023 年, Zhang 和 Shu^[9]针对基于离散观测的 Ait-Sahalia 型利率模型的参数估计问题

展开研究，证明了极大似然估计量的强相合性。

实际上，许多自然现象可以用 α -稳定分布来描述，如地震发生的频次和强度，生物种群个体大小以及网络流量的波动等。 α -稳定分布是一类重要的非高斯分布，在诸多领域展现独特价值与意义。它与高斯分布显著不同，概率密度函数形式更为复杂，却能更好拟合现实中具有厚尾、尖峰等特征的数据分布。例如，2002 年，Mikosch^[10] 等人的研究表明，连接速率适中时，相较于重尾连接长度分布尾， α -稳定过程几乎可近似表示一段时间内累计的宽带网络流量，为网络流量建模提供新视角。2003 年，Nolan^[11]发现，从 1975 年 1 月到 1997 年 9 月，美元与坦桑尼亚先令每月汇率服从 α -稳定分布。2006 年，李旭涛^[12] 的研究指出，用 α -稳定分布描述实际信号的非高斯性和重尾性比正态分布更为恰当，能准确捕捉信号特征。2007 年，武东和汤银才^[13]通过研究股票收益率数据发现，其具有显著尖峰厚尾特征，运用稳定分布模拟股票收益率比正态分布效果更理想，能更准确反映股票市场实际波动情况。2011 年，Xu^[14]等发现上海综合指数和深圳成分指数收益呈现非对称尖峰厚尾特征与 α -稳定分布相吻合。2017 年，于玲^[15]发现信号、雷达和生物医学信号处理中，许多信号和噪声脉冲性较强，使用 α -稳定分布比高斯分布更能反映实际情况。

正态分布、柯西分布是 α -稳定分布的特殊情形。鉴于此，且考虑到 α -稳定分布在诸多领域能精准拟合厚尾、尖峰数据分布而展现出独特价值，本文研究两类非线性非高斯随机过程的统计推断问题。

1.2 研究现状

近年来，由布朗运动驱动的随机微分方程的统计推断问题引起了学者们的广泛关注，一般由如下随机微分方程表示：

$$dX_t = f(X_t)dt + g(X_t)dW_t, \quad (1.1)$$

其中， $f(X_t)$ 是漂移项系数， $g(X_t)$ 是扩散项系数， W_t 是标准布朗运动。而统计估计在统计推断中占据重要地位，统计估计方法通过构建样本函数，对总体的分布函数、分布参数或数字特征进行估计。例如，用样本均值估计总体均值，用经验分布函数估计总体分布函数等。进一步细分，统计估计可划分为参数估计与非参数估计两大范畴。近些年来，随着研究不断深入，在随机微分方程参数估计

研究中, 参数估计又分为时齐随机微分方程参数估计和非时齐随机微分方程参数估计两个方面。譬如, 在时齐随机微分方程参数估计方面: 2001 年, Dietz^[16] 讨论了一类非遍历随机微分方程轨迹拟合估计量的强相合性和渐近正态性。2003 年, Dietz 和 Kutoysnts^[17] 研究了一类遍历随机过程轨迹拟合估计量的强相合性和渐近正态性。2011 年, Bo^[18]等讨论了遍历反射 OU 过程下极大似然估计量的相合性和渐近正态性。2015 年, Jiang 和 Dong^[19]研究了非遍历情形下带有线性漂移项 OU 过程极大似然估计的渐近行为。2018 年, Abiayad^[20]讨论了一类非遍历随机微分方程轨迹拟合估计量的强相合性和渐近分布。2019 年, Zang 和 Zhang^[21]分析了非遍历情形下反射 OU 过程轨迹拟合估计量的相合性和渐近正态性。

目前, 由第二类高斯过程驱动的随机微分方程的参数估计问题成为新的研究热点, 被学者们广泛研究 (见文献 Azmoodeh & Morlanes^[22]; Azmoodeh & Viitasaari^[23]; Balde^[24]等; El Onsy^[25]等; El Onsy^[26]等), 2020 年, Alazemi^[27]等讨论了高斯均值回复第二类 OU 过程的最小二乘估计量的相合性和渐近分布。

在现实的金融市场中, 诸如股票价格、金融资产的收益率和波动率变化等数据会随着时间的推移而发生变化。许多学者采用布朗运动驱动的非时齐随机微分方程来刻画这类现象。例如, 2005 年, Fan^[28]研究了非时齐和时间依赖扩散过程的瞬时收益和波动函数, 跃迁密度和状态价格密度估计等金融经济计量学中的非参数技术问题。2019 年, 邵金^[29]研究了非时齐扩散过程参数估计量的渐近性质, 同时探讨了扩散过程遍历性假设检验的无偏性和相合性。2011 年, Zhao 和 Gao^[30]讨论了非时齐扩散过程极大似然参数估计量的大偏差问题。

值得注意的是, 上述文献大多基于漂移函数已知的前提条件。然而, 在实际情况中, 漂移项函数往往是未知的, 此时就需要运用非参数估计方法对其进行估计。本文采用非参数平滑法来估计漂移项函数。非参数平滑法的优势在于, 它无需预先指定先验模型, 能够为探索变量之间的关系提供多样化的途径。最经典的 Ndaraya-Watson 估计法由 Ndaraya^[31]和 Watson^[32]提出。在独立和相同分布观测条件下, N-W 估计数的非参数方法的主要统计特性 (如相合性和收敛速率) 是在 1980 年至 1990 年间发展起来的 (见 Hardle^[33]), 并在 20 世纪 90 年代被进一步研究 (见 Bosq^[34])。

目前, 在随机微分方程的非参数估计研究方面, 许多学者针对高斯噪声情形

下的非参数趋势估计展开了探讨。Pham^[35] (1981) 和 Prakasa Rao^[36] (1985) 模仿 Nadaraya-Watson 估计法构造了非参数估计量,并讨论了 N-W 估计量的渐近行为。1995 年, Arfi^[37]讨论了遍历情形下 N-W 估计量的强相合性。其他非参数估计法也得到了广泛研究: 1994 年, Kutoyants^[38]研究了小白噪声非参数趋势估计量的渐近性为。2011 年, Mishra 和 Prakasa Rao^[39]讨论了分数随机微分方程中核估计量的相合性和渐近正态性。2019 年, Prakasa Rao^[40]研究了由混合分数布朗运动驱动带有小噪声的随机微分方程中非参数趋势估计问题。2020 年, Prakasa Rao^[41]讨论了次分数布朗运动驱动的随机微分方程非参数估计量的渐近行为。

不难发现, 上述文献的研究主要集中在高斯过程驱动的随机微分方程的统计推断方面。随着非高斯随机微分方程在金融、生物、工程等领域的广泛应用, 学者们对非高斯随机微分方程统计推断问题产生了浓厚的兴趣。譬如, 参数估计方面: 2007 年, Hu 和 Long^[42]使用加权轨迹拟合方法研究了 α -稳定过程驱动的 OU 过程的参数估计问题, 并考察了估计量的强相合性, 收敛速率以及估计误差的渐近分布特征。2009 年, Hu 和 Long^[43]使用最小二乘法研究了离散时间点下 α -稳定过程驱动的的 OU 过程的参数估计问题, 并讨论了估计量的强相合性和收敛速率。2013 年, Zhang^[44]研究了离散观测条件下由对称 α -稳定运动驱动的 OU 过程的参数估计问题, 讨论最小二乘估计量的相合性和渐近分布。2023 年, 潘玉荣,贾朝勇等^[45]研究了一类由对称 α -稳定运动驱动的随机微分方程参数估计问题, 讨论了最小二乘估计的强相合性。2025 年, Zhang^[46]讨论了 α -稳定过程驱动的非遍历情形下反射 OU 过程加权拟合估计量的强相合性和渐近分布。然而, 由 α -稳定过程驱动的随机微分方程的非参数趋势估计 (见 Zhang^{[47][48]}) 却少有报道。

1.3 本文结构

本文研究两类非线性非高斯过程的统计推断问题。全文共分为五章, 具体安排如下:

第一章为绪论, 系统地介绍了本文所研究问题的背景和意义, 详细阐述了随机微分方程统计推断问题的国内外研究现状, 给出该领域已有成果存在的不足。

第二章为预备知识, 简要介绍文中需要用到的一些定义、定理和不等式等。

第三章使用轨迹拟合估计方法研究了 α -稳定过程驱动的非时齐非线性随机微分方程参数估计问题。首先利用鞅大数定律、 α -稳定积分矩最大值不等式、Markov 不等式等工具分析了轨迹拟合估计量的相合性。其次, 结合 α -稳定过程自相似性质、映射定理、Toeplitz 引理等理论建立了轨迹拟合估计量的渐近分布。

第四章使用核型非参数估计方法研究第二类 α -稳定过程驱动的随机微分方程非参数估计问题。使用 α -稳定分布基本性质、 α -稳定积、分矩不等式、Markov 不等式等工具分别分析了估计量的相合性。其次, 利用 Taylor 展开公式、 α -稳定积分核性质分析建立了非参数估计量的渐近分布。

最后对全文的研究成果进行了系统的总结, 并提出展望。

第2章 预备知识

2.1 符号说明

在这一部分,我们给出一些关于 α -稳定过程的预备知识和引理。在本文中,我们用“ $\rightarrow_p$ ”来表示依概率收敛,用“ $\underline{d}$ ”表示等价同分布,用“ $\circ$ ”来表示复合函数。用 ϕ_+ 和 ϕ_- 来表示 ϕ 的正部和负部。用 $L_{a.s.}^\alpha$ 表示所有实值 $(\mathcal{F}_t)$ 可测过程 ϕ 的族,定义在 $\Omega \times [0, \infty]$ 上,使得对于 $T > 0$, $\int_0^T |\phi(t, \omega)|^\alpha dt < \infty$ a.s.。由Rosinski and Woyczynski^[49]的定理 4.1 和 Kallenberg^[50]的定理 3.1, 相对于严 α -稳定 levy 过程 Z , 可测过程 ϕ 是可积的,即对任意 $T > 0$, $\int_0^t \phi(t) dZ_t$ 存在当且仅当 $\phi \in L_{a.s.}^\alpha$ 。用 (D_T, B_T) 表示 $[0, T]$ 上的右连续左极限函数 $\{x_t, 0 \leq t \leq T\}$ 的可测空间,其 σ 代数为 $\mathcal{B}_T = \sigma\{x_t, 0 \leq t \leq T\}$ 。令 $\Theta_k(L)$ 表示函数 $(h_t, 0 \leq t \leq T)$ 的类,这些函数满足阶的赫尔德条件 $\chi \in (0, 1]$, 相对于 t 是 k 次可微的。

$$|h_t^{(k)} - h_s^{(k)}| \leq L|t - s|^\chi, s, t \in [0, T],$$

对于一些常数 $L > 0$, 当 $K > 0$, $h_t^{(k)}$ 表示 $h(\cdot)$ 在 t 时刻 k 阶导数, 如果 $k = 0$, 用 $h(0)$ 表示 g 。

2.2 相关定义及引理

定义 2.2.1 (α -稳定分布) 若随机变量 ξ 的特征函数满足以下条件:

$$\Phi_z(\mu) = \mathbb{E} \exp\{iuZ\} = \begin{cases} \exp\left\{-\sigma^\alpha |\mu|^\alpha \left(1 - i\beta \operatorname{sgn}(\mu) \tan \frac{\alpha\pi}{2} + i\mu u\right)\right\}, & \alpha \neq 1 \\ \exp\left\{-\alpha |\mu| \left(1 + i\beta \frac{2}{\pi} \operatorname{sgn}(\mu) \log |\mu| + i\mu u\right)\right\}, & \alpha = 1 \end{cases}$$

则随机变量 ξ 服从 α -稳定分布, 记为 $\xi \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ 。其中, 稳定性指标 $\alpha \in (0, 2)$, 偏度参数 $\beta \in (-1, 1)$, 尺度参数 $\sigma \in (0, \infty)$, 位移参数 $\mu \in (-\infty, \infty)$ 。若 $\mu = 0$, 则称 ξ 为严 α -稳定分布。若 $\beta = 0$, 则称 ξ 为对称 α -稳定分布。

定义 2.2.2 (α -稳定 Lévy 过程) 若 $\{Z_t\}_{t \geq 0}$ 被称为标准 α -稳定过程, 则满足以下条件:

- (1) $Z_0 = 0$, a.s.;

(2) $Z_t - Z_s \sim S_\alpha\left((t-s)^{\frac{1}{\alpha}}, \beta, 0\right), t > s \geq 0;$

(3) 对于任意有限时间点 $0 \leq s_0 < s_1 < \dots < s_m < \infty$, 随机变量 $Z_{s_0}, Z_{s_1} - Z_{s_0}, \dots, Z_{s_m} - Z_{s_{m-1}}$ 是独立的。

其中 $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ 是一个 α -稳定的随机变量。

引理 2.2.1 (Toeplitz 引理^[51]) 假设 $(\phi^T)_{T \geq 0}$ 是定义在 $[0, \infty)$ 上的测度, 有以下性质:

(1) $\forall T > 0, \phi^T([0, T]) = 1,$

(2) $\forall K > 0, \text{当 } T \rightarrow \infty, \phi^T([0, K]) \rightarrow 0,$

当 $T \rightarrow \infty$ 时,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T f_t \phi^T(dt) = f_\infty,$$

其中, $f_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} f_t$ 存在

引理 2.2.2 (稳定积分矩不等式, 见文献^[52]) 令 φ_t 是一个可测过程, 满足当 $T < \infty$ 时, $\int_0^T |\varphi(t)^\alpha dt| < \infty$ 几乎处处成立。 $F: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ 是一个连续函数。

假设 φ 是非负或 Z 是对称的, 同时存在常数 C, λ_0 和 $\alpha_0 < \alpha$, 对于所有 $y > 0$ 和 $\lambda > \lambda_0$, 都有 $F(\lambda y) \leq C \lambda^{\alpha_0} F(y)$ 。那么必然存在依赖于 $\alpha, \alpha_0, \beta, C$ 的常数 C_1, C_2 和 λ_0 使得对于每一个 $T > 0$ 都有

$$\begin{aligned} & C_1 E \left[F \left(\left(\int_0^T |\varphi(t)^\alpha dt| \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right) \right] \\ & \leq E \left[F \left(\sup_{t \leq T} \left| \int_0^T \int_0^t \varphi(t)^\alpha dZ_s \right| \right) \right] \\ & \leq C_2 E \left[F \left(\left(\int_0^T |\varphi(t)^\alpha dt| \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right) \right]. \end{aligned}$$

引理 2.2.3 (见 Kutoyants^[38], 引理 1.11) : 令 c_0, c_1, c_2 为非负常数, $u(t), v(t)$ 为非负有界函数, $0 \leq t \leq T$

$$u(t) \leq c_0 + c_1 \int_0^t v(s) u(s) ds + c_2 \int_0^t v(s) \left[\int_0^s u(r) dK(r) \right] ds,$$

其中 $K(t)$ 是一个非增右连续函数, $0 \leq K(t) \leq K_0$

$$u(t) \leq c_0 \exp \left\{ (c_1 + c_2 K_0) \int_0^t v(s) ds \right\}.$$

内锁属性对于 α -稳定随机积分是一个重要引理 (见 Long^[52])。

引理 2.2.4 (α -稳定随机积分的性质) 令 Z 为严 α -稳定过程并且 $\phi \in L_{a.s.}^\alpha$

(i) 存在独立过程 $Z', Z'' \stackrel{d}{=} Z, Z'' \stackrel{d}{=} Z$, 得

$$\int_0^t \phi(s) dZ_s = Z' \circ \int_0^t \phi_+^\alpha(s) ds - Z'' \circ \int_0^t \phi_-^\alpha(s) ds, \quad a.s.$$

(ii) 如果 Z 是对称的, 即 $\beta=0$, 存在 α -稳定 Lévy 过程 $Z' \stackrel{d}{=} Z$, 使得

$$\int_0^t \phi(s) dZ_s = Z' \circ \int_0^t |\phi(s)|^\alpha ds, \quad a.s.$$

第3章 非时齐随机微分方程的参数估计

3.1 引言

近年来,由 α -稳定过程驱动的时齐随机微分方程得到了广泛研究。然而,在现实的金融市场及相关领域中,诸如股票价格的波动、金融资产收益率和波动率的动态变化等数据,不仅呈现出典型的尖峰厚尾特征,还会随着时间的推移而发生变化。这意味着实际情况中的许多随机现象并不能简单地用时齐随机微分方程来准确刻画,因此,研究 α -稳定过程驱动的非时齐随机微分方程具有重要的现实意义。

尽管由 α -稳定过程驱动的时齐随机微分方程得到了广泛研究,但关于 α -稳定过程驱动的非时齐随机微分方程的研究却相对匮乏,相关的报道较为少见。基于上述背景,着重探讨由 α -稳定过程驱动的非时齐随机微分方程的参数估计问题。具体而言,在非时齐的条件设定下,讨论了 α -稳定过程驱动的随机微分方程轨迹拟合参数估计问题。本文对轨迹拟合估计量的相合性和收敛速率展开系统研究,随后,进一步深入探讨轨迹拟合估计量的渐近分布。

3.2 问题描述

在本章中,我们考虑由 α -稳定($\alpha \in (1,2)$)过程驱动的非时齐随机微分方程的参数估计问题:

$$dX_t = \theta h_t X_t + dZ_t, \quad (3.1)$$

其中, $\theta \in \mathbb{R}$ 是一个未知参数, $h: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 为可测函数, $\{Z_t\}_{t \geq 0}$ 是一个给定的标准 α -稳定($\alpha \in (1,2)$)Lévy过程。假设观测过程 $X = \{X_t, t \geq 0\}$ 在区间 $[0, T]$ 上。这里最小二乘估计方法不能直接应用到 α -稳定过程驱动的随机微分方程,因为 α -稳定过程 $\{Z_t\}_{t \geq 0}$ 不是平方可积的,所以极大似然估计法不能直接应用到这里。为了研究未知参数 θ 的相合性,本文运用轨迹拟合估计方法。

方程(3.1)可被写为

$$X_t = X_0 + \theta H_t + Z_t. \quad (3.2)$$

其中, $H_t = \int_0^t h_s X_s ds$ 。要获得参数 θ 的轨迹拟合估计量, 则需使得 $\int_0^T |X_t - (X_0 + \theta H_t)|^2 dt$ 达到最小。其中, $T > 0$, 为时间常数。由此可得参数 θ 轨迹拟合估计量为

$$\hat{\theta}_t = \frac{\int_0^T (X_t - X_0) H_t dt}{\int_0^T H_t^2 dt}. \quad (3.3)$$

把 (3.2) 式带入 (3.3) 式里可得

$$\hat{\theta}_t - \theta = \frac{\int_0^T H_t Z_t dt}{\int_0^T H_t^2 dt}. \quad (3.4)$$

我们给出以下假设条件

(A1) 对于任意 $t \geq 0$, 函数 h_t 满足当 $t \geq 0$ 时, $\theta \int_0^T h_t dt \rightarrow \infty$, 并且当 $T \rightarrow \infty$ 时, $T e^{-\theta \int_0^T h_t dt} \rightarrow 0$, 并且 $\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-\alpha \theta \int_0^t h_u du} dt := \tau_\infty$ 存在。

(A2) 存在常数 $b_i > 0$, 对于 $i = 1, 2, 3$, 当 T 足够大时,

$$h_t > b_1, \forall t \geq T^{\frac{1}{\alpha}}, \quad (3.5)$$

并且

$$\frac{e^{\theta \int_0^t h_u du}}{\int_0^T e^{\theta \int_0^t h_u du} dt} \leq b_2 e^{-b_3(T-t)}, \forall t \in [0, T]. \quad (3.6)$$

由条件(A1)可得, 对于 $K > 0, i = 1, 2, 3$, 当 $T \rightarrow \infty$ 时, $F_i(T) \rightarrow \infty$, 并且

$F_i(k)/F_i(T) \rightarrow 0$ 。简记以下函数:

$$F_1(T) = \int_0^T h_t e^{\int_0^t h_s ds} dt, F_2(t) = \int_0^T e^{2\theta \int_0^t h_s ds} dt, F_3(T) = \int_0^T e^{\theta \int_0^t h_s ds} dt$$

伽马函数由下列函数定义

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt, s > 0.$$

(A3) $h_{vT} = h_v h_T$.

3.3 轨迹拟合估计量 $\hat{\theta}_T$ 的相合性

我们在这一部分讨论轨迹拟合估计量 $\hat{\theta}_T$ 的强相合性。

定理 3.1: 如果条件(A1)成立, 则 $\lim_{T \rightarrow \infty} \hat{\theta}_T = \theta, a.s., i.e.$ 即 $\hat{\theta}_T$ 轨迹拟合估计量是强相合的。

证明: 对函数 $e^{-\theta \int_0^t h_s ds} X_t$ 使用 Itô 伊藤公式可得

$$\begin{aligned}
 & d\left(e^{-\theta \int_0^t h_s ds} X_t\right) \\
 &= -\theta h_t e^{-\theta \int_0^t h_s ds} X_t dt + e^{-\theta \int_0^t h_s ds} dX_t \\
 &= -\theta h_t e^{-\theta \int_0^t h_s ds} X_t dt + e^{-\theta \int_0^t h_s ds} (\theta h_t X_t dt + dZ_t) \\
 &= e^{-\theta \int_0^t h_s ds} dZ_t
 \end{aligned}$$

两边同时从 0 到 t 积分, 可得

$$X_t e^{-\theta \int_0^t h_s ds} = X_0 + \int_0^t e^{-\theta \int_0^s h_u du} dZ_s =: \eta_t \quad (3.7)$$

令 $\lambda_t = \int_0^t e^{-\theta \int_0^s h_u du} dZ_s$, 易知 λ_t 是一个 L^p 有界的左极右连 $\mathcal{F}_t$ 鞅 ($1 \leq p \leq \alpha$)。且 λ_t 是一个分布为 $S_\alpha(\Gamma_t^\alpha, \beta, 0)$ 的随机变量。当 $t \rightarrow \infty$ 时, 我们可以推出 λ_t 收敛到一个分布为 $S_\alpha(\Gamma_\infty^\alpha, \beta, 0)$ 的 α -稳定随机变量。由鞅收敛定理可知

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\theta \int_0^t h_s ds} X_t = X_0 + \int_0^\infty e^{-\theta \int_0^s h_u du} dZ_s = \eta_\infty, \quad a.s. \quad (3.8)$$

由条件(A1)和引理 2.1 可得

$$\begin{aligned}
 & \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{H_t}{e^{\theta \int_0^t h_s ds}} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t \left[\left(e^{-\theta \int_0^s h_u du} X_s - \eta_\infty + \eta_\infty \right) h_s e^{\theta \int_0^s h_u du} \right] ds}{e^{\theta \int_0^t h_s ds}} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t \left(e^{-\theta \int_0^s h_u du} X_s - \eta_\infty \right) h_s e^{\theta \int_0^s h_u du} ds}{e^{\theta \int_0^t h_s ds}} + \eta_\infty \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{F_1(t)}{e^{\theta \int_0^t h_s ds}} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{F_1(t)}{e^{\theta \int_0^t h_s ds}} \cdot \int_0^t \left(e^{-\theta \int_0^s h_u du} X_s - \eta_\infty \right) \frac{h_s e^{\theta \int_0^s h_u du}}{F_1(t)} ds \\
 &\quad + \eta_\infty \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{F_1(t)}{e^{\theta \int_0^t h_s ds}} \\
 &= \frac{\eta_\infty}{\theta}, \quad a.s. \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

由鞅强大数定律和条件(A1)可推出

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{Z_T}{e^{\theta \int_0^T h_s ds}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{Z_T}{T} \frac{T}{e^{\theta \int_0^T h_s ds}} = 0, \quad a.s. \quad (3.10)$$

由式(3.9),(3.10)以及引理 2.1 可推出

$$\begin{aligned}
 \lim_{T \rightarrow \infty} (\hat{\theta}_T - \theta) &= \frac{\int_0^t H_t Z_t dt}{\int_0^t H_t^2 dt} \\
 &= \frac{\int_0^t \frac{H_t}{e^{\theta \int_0^t h_s ds}} \frac{Z_t}{e^{\theta \int_0^t h_s ds}} \frac{e^{2\theta \int_0^t h_s ds}}{F_2(T)} dt}{\int_0^t \left(\frac{H_t}{e^{\theta \int_0^t h_s ds}} \right)^2 \frac{e^{2\theta \int_0^t h_s ds}}{F_2(T)} dt} \\
 &= 0, \quad a.s.
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

当 $\theta=0$ 时, $X_t = X_0 + Z_t$ 。令 $t=uT$, $dt=Tdu$, 可得

$$\int_0^T H_t Z_t dt = \int_0^T \left(\int_0^t h_s X_s ds \right) Z_t dt = \int_0^1 Z_{uT} \left(\int_0^{uT} h_s X_s ds \right) T du.$$

令 $s=vT$, $ds=Tdv$, 可得

$$\text{上式} = T^{2+\frac{2}{\alpha}} \int_0^1 \frac{Z_{uT}}{T^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\int_0^u h_{vT} \left(\frac{Z_{vT} + X_0}{T^{\frac{1}{\alpha}}} \right) dv \right) du = h_T \int_0^1 \left(\int_0^1 h_v \frac{Z_{vT} + X_0}{T^{\frac{1}{\alpha}}} dv \right)^2 du.$$

由条件(A3)可得

$$\begin{aligned}
 \int_0^t H_t^2 dt &= T \int_0^1 \int_0^{uT} (h_s X_s ds)^2 du \\
 &= T^{3+\frac{2}{\alpha}} \int_0^1 \left(\int_0^1 h_{vT} \frac{Z_{vT} + X_0}{T^{\frac{1}{\alpha}}} dv \right)^2 du \\
 &= h_T \int_0^1 \frac{Z_{uT}}{T^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\int_0^u h_v \left(\frac{Z_{vT} + X_0}{T^{\frac{1}{\alpha}}} \right) dv \right) du
 \end{aligned}$$

因此, 可推出

$$\frac{\int_0^T H_t Z_t dt}{\int_0^t H_t^2 dt} \stackrel{d}{=} \frac{1}{T} \frac{c_1}{d_1} \rightarrow_p 0, \tag{3.12}$$

其中, $c_1 = \int_0^1 \frac{Z_{uT}}{T^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\int_0^u h_v \left(\frac{Z_{vT} + X_0}{T^{\frac{1}{\alpha}}} \right) dv \right) du$, $d_1 = \int_0^1 \left(\int_0^1 h_v \frac{Z_{vT} + X_0}{T^{\frac{1}{\alpha}}} dv \right)^2 du$.

因此, 由式 (3.1) 和式 (3.12) 可知, 则当 $T \rightarrow \infty$ 时, $\hat{\theta}_T \rightarrow_p \theta$, 证毕。

3.4 轨迹拟合估计量 $\hat{\theta}_T$ 的渐近分布

我们用 “ $\Rightarrow$ ” 表示依分布收敛。在这一部分, 我们讨论了轨迹拟合估计量 $\hat{\theta}_T$ 的渐近分布。

定理 3.2 若条件(A1)和(A2)成立，则当 $T \rightarrow \infty$ 时，

$$\frac{F_2(T)}{T^{\frac{1}{\alpha}} F_3(T)} (\hat{\theta}_T - \theta) \Rightarrow |\theta| \frac{U}{\eta_\infty}, \quad (3.13)$$

其中 η_∞ 满足式 (3.8)， U 是一个服从 α -稳定分布 $S_\alpha(1, \beta, 0)$ 的随机变量，且与随机变量 η_∞ 相互独立。

证明：根据式 (3.4)，可得

$$\begin{aligned} \frac{F_2(T)}{F_3(T) T^{\frac{1}{\alpha}}} (\hat{\theta}_T - \theta) &= \frac{F_3^{-1}(T) T^{-\frac{1}{\alpha}} \int_0^t H_t Z_t dt}{F_2^{-1}(T) \int_0^t H_t^2 dt} \\ &= \frac{\eta_T^2}{F_2^{-1}(T) \int_0^t H_t^2 dt} \left(\frac{F_3^{-1}(T) \int_0^t H_t dt Z_T T^{-\frac{1}{\alpha}}}{\eta_T^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{-F_3^{-1}(T) T^{-\frac{1}{\alpha}} \int_0^t H_t (Z_T - Z_t) dt}{\eta_T^2} \right) \\ &=: G_1(T) (G_2(T) + G_3(T)). \end{aligned} \quad (3.14)$$

下面我们分别研究 $G_i(T), i = 1, 2, 3$ 的渐近行为，由引理 2.1 可知

$$\lim_{T \rightarrow \infty} F_2^{-1}(T) \int_0^T H_t^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \left(\frac{H_t^2}{e^{\theta \int_0^t h_s ds}} \right)^2 \frac{e^{2\theta \int_0^t h_s ds}}{F_2(T)} dt = \frac{\eta_\infty^2}{\theta^2}, \quad a.s.$$

显然，

$$\lim_{T \rightarrow \infty} G_1(T) = \theta^2, \quad a.s. \quad (3.15)$$

接下来，我们考虑 $G_2(T)$ 。其中

$$G_2(T) = \frac{F_3^{-1}(T) \int_0^T H_t dt T^{-\frac{1}{\alpha}} Z_T}{\eta_T} \quad (3.16)$$

由引理 2.1 可知

$$\lim_{T \rightarrow \infty} F_3^{-1}(T) \int_0^T H_t dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \left(\frac{H_t}{e^{\theta \int_0^t h_s ds}} \right) \frac{e^{\theta \int_0^t h_s ds}}{F_3(T)} dt = \frac{\eta_\infty}{\theta}, \quad a.s.$$

这意味着

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{F_3^{-1}(T) \int_0^T H_t dt}{\eta_T} = \frac{1}{\theta} \quad (3.17)$$

式 (3.16) 中的 $\frac{T^{-\frac{1}{\alpha}} Z_T}{\eta_T}$ 可表示为

$$\frac{T^{-\frac{1}{\alpha}}Z_T}{\eta_T} = \frac{T^{-\frac{1}{\alpha}}\left(Z_T - Z_{\frac{1}{T^{\frac{1}{\alpha}}}}\right) + T^{-\frac{1}{\alpha}}Z_{\frac{1}{T^{\frac{1}{\alpha}}}}}{\eta_{\frac{1}{T^{\frac{1}{\alpha}}}} + (\eta_T - \eta_{\frac{1}{T^{\frac{1}{\alpha}}}})}$$

我们可以得到以下几个结论：

(1) 随机变量 $T^{-\frac{1}{\alpha}}\left(Z_T - Z_{\frac{1}{T^{\frac{1}{\alpha}}}}\right)$ 服从 α -稳定分布 $S_\alpha(1 - T^{\frac{1}{\alpha}-1}, \beta, 0)$ ，且当 $T \rightarrow \infty$ 时，随机变量 $T^{-\frac{1}{\alpha}}\left(Z_T - Z_{\frac{1}{T^{\frac{1}{\alpha}}}}\right)$ 弱收敛于一个分布为 $S_\alpha(1, \beta, 0)$ 的 α -稳定随机变量 U ，

(2) 由鞅强大数定律可得

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{Z_{\frac{1}{T^{\frac{1}{\alpha}}}}}{T^{\frac{1}{\alpha}}}, \quad a.s.$$

(3) 显然

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \eta_{\frac{1}{T^{\frac{1}{\alpha}}}} = \eta_\infty, a.s.$$

(4) 随机变量 $T^{-\frac{1}{\alpha}}\left(Z_T - Z_{\frac{1}{T^{\frac{1}{\alpha}}}}\right)$ 与 $\eta_{\frac{1}{T^{\frac{1}{\alpha}}}}$ 相互独立

(5) 当 $T \rightarrow \infty$ ，有 $\eta_T - \eta_{\frac{1}{T^{\frac{1}{\alpha}}}} \rightarrow_p 0$ 。

证明结论 (5)：由 η_T 的定义可得

$$\left| \eta_T - \eta_{\frac{1}{T^{\frac{1}{\alpha}}}} \right| \leq \left| \int_{T^{\frac{1}{\alpha}}}^T e^{-\theta \int_0^s h_u du} dZ_s \right| \quad (3.18)$$

根据 Markov 不等式，引理 2.2 和条件(A2)可得对任意给定 $\varepsilon > 0$ ，当 $T \rightarrow \infty$ 时，

$$\begin{aligned} p \left\{ \left| \int_{T^{\frac{1}{\alpha}}}^T e^{-\theta \int_0^s h_u du} dZ_s \right| > \varepsilon \right\} &\leq \varepsilon^{-1} \mathbb{E} \left| \int_{T^{\frac{1}{\alpha}}}^T e^{-\theta \int_0^s h_u du} dZ_s \right| \\ &\leq \varepsilon^{-1} C_2 \mathbb{E} \left[\left| \int_{T^{\frac{1}{\alpha}}}^T e^{-\alpha \theta \int_0^s h_u du} ds \right|^{\frac{1}{\alpha}} \right] \\ &\leq \varepsilon^{-1} C_2 \mathbb{E} \left[\left| \int_{T^{\frac{1}{\alpha}}}^T b_1^{-1} h_s e^{-\alpha \theta \int_0^s h_u du} ds \right|^{\frac{1}{\alpha}} \right] \end{aligned}$$

$$= \varepsilon^{-1} C_2 b_1^{-1} \left| \frac{e^{-\alpha\theta \int_0^T h_u du} - e^{-\alpha\theta \int_0^{T^{\frac{1}{\alpha}}} h_u du}}{\alpha\theta} \right|^{\frac{1}{\alpha}} \quad (3.19)$$

上式趋向于 0。根据式 (3.18) 和 (3.19)，可得结论 (5) 成立。由结论 (1) - (5) 可知当 $T \rightarrow \infty$ 时，

$$\frac{T^{-\frac{1}{\alpha}} Z_T}{\eta_T} \Rightarrow \frac{v}{\eta_\infty} \quad (3.20)$$

其中， U 与 η_∞ 相互独立。根据式 (3.16)，(3.17)，(3.20)，可得当 $T \rightarrow \infty$ 时，

$$G_2(T) \Rightarrow \frac{U}{\theta \eta_\infty} \quad (3.21)$$

最后，证明当 $T \rightarrow \infty$ 时， $G_3(T) \rightarrow_p 0$ 。事实上，

$$\begin{aligned} & |F_3^{-1}(T) T^{-\frac{1}{\alpha}} [\int_0^T H_t(Z_T - Z_t) dt]| \\ & \leq F_3^{-1}(T) T^{-\frac{1}{\alpha}} \int_0^T \left| \int_0^t h_s X_s ds \right| |Z_T - Z_t| dt \\ & \leq F_3^{-1}(T) T^{-\frac{1}{\alpha}} \int_0^T \left(\int_0^t |e^{-\theta \int_0^s h_u du} X_s| h_s e^{\theta \int_0^s h_u du} ds \right) |Z_T - Z_t| dt \\ & \leq \frac{1}{|\theta|} \sup_{t \geq 0} |e^{-\theta \int_0^t h_u du} X_s| F_3^{-1}(T) T^{-\frac{1}{\alpha}} \int_0^T e^{\theta \int_0^t h_u du} |Z_T - Z_t| dt. \end{aligned}$$

显然， $\sup_{t \geq 0} |e^{-\theta \int_0^t h_u du} X_s|$ 是几乎必然有限的。当 $T \rightarrow \infty$ 时，我们考虑下式

$$F_3^{-1}(T) T^{-\frac{1}{\alpha}} \int_0^T e^{\theta \int_0^t h_u du} |Z_T - Z_t| dt \rightarrow_p 0,$$

由条件(A2)，可知存在足够大的 T 使得

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[F_3^{-1}(T) T^{-\frac{1}{\alpha}} \int_0^T e^{\theta \int_0^t h_u du} |Z_T - Z_t| dt \right] \\ & \leq T^{-\frac{1}{\alpha}} \int_0^T \frac{e^{\theta \int_0^t h_u du}}{F_3(T)} \mathbb{E}[|Z_T - Z_t|] dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq b_2 T^{-\frac{1}{\alpha}} \int_0^T C(1, \alpha) (T-t)^{\frac{1}{\alpha}} e^{-b_3(T-t)} dt \\
 &= C(1, \alpha) b_2 T^{-\frac{1}{\alpha}} \int_0^T r^{\frac{1}{\alpha}} e^{-b_3 r} dr \\
 &\leq C(1, \alpha) b_2 T^{-\frac{1}{\alpha}} \int_0^\infty r^{\frac{1}{\alpha}} e^{-b_3 r} dr \\
 &\leq C(1, \alpha) b_2 T^{-\frac{1}{\alpha}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) b_3^{-\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)} \quad (3.22)
 \end{aligned}$$

其中 $C(1, \alpha) = \frac{4\Gamma(-1/\alpha)}{\alpha\sqrt{\pi}\Gamma(-1/2)}$ (见文献 Zolotarev^[54])。这也就意味着当 $T \rightarrow \infty$ 时,

$$\mathbb{E}[F_3^{-1}(T) T^{-\frac{1}{\alpha}} \int_0^T e^{\theta \int_0^t h_u du} |Z_T - Z_t| dt] \rightarrow_p 0.$$

因此, 当 $T \rightarrow \infty$ 时,

$$G_3(T) \rightarrow_p 0. \quad (3.23)$$

由 (3.14), (3.15) (3.21), (3.23) 可得式 (3.13), 证毕。

注 3.1 许多函数 h_t , $t \geq 0$ 实际满足条件(A1)和(A2)。我们考虑两类特殊的函数 h_t , $t \geq 0$ 。

(1) 令 $\theta > 0$, $h_t = t^p$, $p \geq 0$, 有

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-\alpha\theta \int_0^u h_r dr} du = \int_0^\infty e^{-\frac{\alpha\theta}{p+1} u^{p+1}} du = \left(\frac{p+1}{\alpha\theta}\right)^{\frac{1}{p+1}} \frac{1}{p+1} \Gamma\left(\frac{1}{p+1}\right)$$

即条件(A1)是成立的, 易证明, 条件(A2)中的式(3.5)也成立,

$$\int_0^T e^{\theta \int_0^t h_u du} dt = \int_0^T e^{\frac{\theta}{p+1} t^{p+1}} dt \geq d_1 e^{\frac{\theta}{p+1} T^{p+1}}$$

对于每一个 $T \geq T_1$, 存在某个 T_1 和 $d_1 > 0$ 。显然, 对于 $T \geq 1$, $T^{p+1} - t^{p+1} = (T-t)(T^p + T^{p-1}t + \dots + Tt^{p-1} + t^p) \geq T-t$ 。当 T 足够大时,

$$\frac{e^{\theta \int_0^t h_u du}}{\int_0^T e^{\theta \int_0^t h_u du} dt} \leq \frac{1}{d_1} e^{-\frac{\theta}{p+1}(T^{p+1}-t^{p+1})}, t \in [0, T].$$

当 $b_2 = \frac{1}{d_1}$, $b_3 = \frac{\theta}{p+1}$ 条件(A2)中的式(3.6)也是成立的。

(2) 令 $\theta > 0$, $h_t = e^{qt}$, $q \geq 0$, 则 $T \rightarrow \infty$ 时,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-\alpha\theta \int_0^u h_r dr} du = \int_0^\infty e^{-\frac{\alpha\theta}{q}(e^{qu}-1)} du = q^{-1} e^{\frac{\alpha\theta}{q}} \int_1^\infty y^{-1} e^{-\frac{\alpha\theta}{q}y} dy$$

由反常积分的极限比较判别法可以得出反常积分 $q^{-1}e^{\frac{\alpha\theta}{q}} \int_1^\infty y^{-1}e^{\frac{\alpha\theta}{q}y} dy$ 收敛。因此，条件(A1)成立。易证明，条件(A2)中的式(3.5)也成立，

$$\int_0^T e^{\theta \int_0^t h_u du} dt = \int_0^T e^{\frac{\theta}{q}(e^{qt}-1)} dt \geq d_2 e^{\frac{\theta}{q}(e^{qT}-1)}$$

对于每一个 $T \geq T_2$ ，存在某个 T_2 和 $d_2 > 0$ 。当 T 足够大时，

$$\frac{e^{\theta \int_0^t h_u du}}{\int_0^T e^{\theta \int_0^t h_u du} dt} \leq \frac{1}{d_2} e^{-\frac{\theta}{q}(e^{qT}-e^{qt})} \leq \frac{1}{d_2} e^{-\theta(T-t)}, t \in [0, T].$$

当 $b_2 = \frac{1}{d_1}, b_3 = \frac{\theta}{p+1}$ ，条件(A2)中的式(3.6)也是成立的。

第4章 非参数估计量的相合性和渐近分布

4.1 引言

在上一章中，我们围绕由 α -稳定过程驱动的非时齐随机微分方程展开了深入探讨，分析了轨迹拟合估计量的相合性与渐近分布。

目前，针对高斯噪声情形下的非参数趋势估计的渐近理论已经取得了丰富的研究成果。1995 年，Arfi^[37]讨论了遍历情形下 N-W 估计量的强相合性，1994 年，Kutoyants^[38]研究了小白噪声非参数趋势估计量的渐近性。2011 年，Mishra 和 Prakasa Rao^[39]讨论了分数随机微分方程中核估计量的相合性和渐近正态性。2019 年，Prakasa Rao^[40]研究了由混合分数布朗运动驱动带有小噪声的随机微分方程中非参数趋势估计问题。2020 年 Prakasa Rao^[41]讨论了次分数布朗运动驱动的随机微分方程非参数估计量的渐近行为。

然而，由非高斯过程驱动的随机微分方程的非参数趋势估计方面的研究（见 Zhang^{[47][48]}）却少有报道。本文对由第二类 α -稳定过程驱动的随机微分方程展开系统研究，讨论了核估计量的相合性和渐近分布。

4.2 问题描述

受上述文献启发，本章考虑如下由第二类 α -稳定过程驱动的随机微分方程 $X = \{X_t, 0 \leq t \leq T\}$

$$dX_t = A_t(x)dt + \varepsilon \sigma_t(X) dU_t^{(1)}, 0 \leq t \leq T, \quad (4.1)$$

这里 $X_0 = x_0$, $\varepsilon \in (0,1)$, 函数 $A(\cdot)$ 是一个未知的非泛函平稳可测函数, $\sigma(\cdot)$ 是一个已知有界函数, $U_t^{(1)} := \int_0^t e^{-s} dZ_{as}$, 其中, $a_s = \frac{1}{\alpha} e^{as}$, Z_t , $0 \leq t \leq T$ 是定义在有右连续和 σ 代数族的概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的标准 α -稳定过程 ($1 < \alpha < 2$), 假设 $\{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ 是以下方程的解

$$\frac{dx_t}{dt} = A_t(x), x_0, 0 \leq t \leq T, \quad (4.2)$$

其中, x_0 是初始值。本文使用观测值 $\{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ 估计函数 $A_t = A_t(x)$, 使用 Kutoyants^[38]的方法, 我们为趋势函数 $A_t = A_t(x)$ 建立了一个核估计量,

$$\hat{A}_t = \frac{1}{\varphi_\varepsilon} \int_0^T G\left(\frac{\tau-t}{\varphi_\varepsilon}\right) dX_t,$$

其中, $G(\cdot)$ 是一个有限支撑的有界函数, 规范函数 $\varphi_\varepsilon \rightarrow 0$, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$, $\varepsilon \varphi_\varepsilon^{-\frac{\alpha-1}{\alpha}} \rightarrow 0$ 。

我们给出以下假设:

(H1) 存在正常数 L_1 和 L_2 使得

$$|A_t(x) - A_t(y)| + |\sigma_t(x) - \sigma_t(y)| \leq L_1 \int_0^t |x_s - y_s| dK(s) + L_2 |x_t - y_t|,$$

$$|A_t(x)| + |\sigma_t(x)| \leq L_1 \int_0^t |1 + x_s| dK(s) + L_2 |1 + x_t|,$$

其中, $k(\cdot)$ 在引理 2.2 中已给定, $x_t, y_t \in D_T, t \in [0, T]$ 。

(H2) 函数 $\sigma(\cdot)$ 满足以下约束条件: 存在一个正常数 $\sigma_1 > 0$, 对于每个 $x_t \in D_T, t \in [0, T]$, 使得 $0 < |\sigma_t(x)| < \sigma_1$ 。

(H3) 令 $G(u), u \in R$ 为一个有界函数 (存在常数 $B_1 < 0$ 和 $B_2 > 0$, 对于 $u \notin [B_1, B_2]$, $\int_{B_1}^{B_2} G(u) du = 1$, 使得 $G(u) = 0$), 此外,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G(u)| du < \infty, \int_{-\infty}^{\infty} |G(u)|^\alpha du < \infty, \int_{-\infty}^{\infty} |G(u) u^\chi| du < \infty.$$

(H4) 核函数 $G(\cdot)$ 满足以下条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G(u) u^{k+\chi}| < \infty,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^j G(u) du = 0, j = 1, 2, \dots, k.$$

类似于 Lipster 的结论 4.6 与 Shirayev^[53] 里的讨论, 容易证明随机微分方程 (4.1) 在条件 (H1) 下有一个独立非爆炸性左极右连适应解。

4.3 核估计量 $\hat{A}_t$ 的相合性

引理 4.1: 在假设 (H1) – (H2) 下, 有

$$|X_t - x_t| \leq \varepsilon e^{(L_1 K_0 + L_2)t} \sup_{0 \leq s \leq t} \left| \int_0^t \sigma_u(x) dU_u^{(1)} \right| \quad (4.3)$$

$$\text{当 } \varepsilon \rightarrow 0, \sup_{0 \leq t \leq T} |X_t - x_t| \rightarrow_p 0, \quad (4.4)$$

并且

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}[|X_t - x_t|] \leq 2\varepsilon e^{(L_1 K_0 + L_2)T} C_2 \sigma_1 T^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (4.5)$$

证明: (i) 令 $u(t) = |X_t - x_t|$, 由假设(H1)

$$\begin{aligned} u(t) &\leq \int_0^t |A_s(X) - A_s(x)| ds + \varepsilon \left| \int_0^t \sigma_s(X) dZ_s \right| \\ &\leq L_1 \int_0^t \left[\int_0^s u(r) dr \right] ds + L_2 \int_0^t u(s) ds + \varepsilon \sup_{0 \leq s \leq t} \left| \int_0^s \sigma_u(X) dU_s^{(1)} \right|. \end{aligned}$$

因此, 式 (4.3) 满足引理 2.3, 其中

$$c_0 = e^{(L_1 K_0 + L_2)t} \sup_{0 \leq s \leq t} \left| \int_0^s \sigma_u(X) dZ_u \right|, c_1 = L_2, c_2 = L_1.$$

(ii) 由式 (4.3) 可得

$$\sup_{0 \leq s \leq T} |X_t - x_t| \leq \varepsilon e^{(L_1 K_0 + L_2)T} \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \sigma_s(X) dU_s^{(1)} \right|.$$

由假设(H2), 引理 2.2, Markov 不等式, 对与任意给定的 $\delta > 0$, 可知

$$\begin{aligned} &P \left(\varepsilon e^{(L_1 K_0 + L_2)T} \left| \int_0^t \sigma_s(X) dU_s^{(1)} \right| > \delta \right) \\ &\leq \delta^{-1} e^{(L_1 K_0 + L_2)T} \varepsilon \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \sigma_s(X) dU_s^{(1)} \right| \right] \\ &= \delta^{-1} e^{(L_1 K_0 + L_2)T} \varepsilon \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_{\alpha_0}^{\alpha t} \sigma_{\frac{\ln \alpha s}{\alpha}}(X) (\alpha s)^{-\frac{1}{\alpha}} dZ_s \right| \right] \\ &\leq 2C_2 \delta^{-1} e^{(L_1 K_0 + L_2)T} \varepsilon \mathbb{E} \left[\left(\int_{\alpha_0}^{\alpha T} |\sigma_{\frac{\ln \alpha s}{\alpha}}(X)|^\alpha \frac{1}{\alpha s} ds \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right] \\ &\leq 2C_2 \delta^{-1} e^{(L_1 K_0 + L_2)T} \varepsilon \sigma_1 T^{\frac{1}{\alpha}}, \end{aligned}$$

当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 上式趋向于 0, 表明式 (4.4) 成立

(iii), 由 (4.3), 引理 2.2 和假设(H2)可得

$$\begin{aligned} &\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}[|X_t - x_t|] \\ &\leq \varepsilon e^{(L_1 K_0 + L_2)T} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \sigma_s(X) dU_s^{(1)} \right| \right] \\ &= \varepsilon e^{(L_1 K_0 + L_2)T} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_{\alpha_0}^{\alpha t} \sigma_{\frac{\ln \alpha s}{\alpha}}(X) (\alpha s)^{-\frac{1}{\alpha}} dZ_s \right| \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq 2\varepsilon e^{(L_1 K_0 + L_2)T} C_2 \left(\int_{a_0}^{a_T} \left| \sigma_{\frac{\ln \alpha s}{\alpha}}(X) \right|^\alpha (\alpha s)^{-1} ds \right)^{\frac{1}{\alpha}} \\
 &= 2\varepsilon e^{(L_1 K_0 + L_2)T} C_2 \sigma_1 T^{\frac{1}{\alpha}}.
 \end{aligned}$$

证明完成。

下面，我们给出估计量 $\hat{A}_t$ 相合性的一些结果

定理 4.1 假设条件(H1) – (H3)成立。如果 $A_t \in \Theta_0(L)$, 则 $\hat{A}_t, t \in [0, T]$ 是相合的, 即

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}[|\hat{A}_t - A_t(x)|] = 0. \quad (4.6)$$

证明:

显然

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{E}[|\hat{A}_t - A_t(x)|] \\
 &= \mathbb{E}\left[\left|\frac{1}{\varphi_\varepsilon} \int_0^T G\left(\frac{\tau-t}{\varphi_\varepsilon}\right) (A_\tau(X) - A_\tau(x)) d\tau \right.\right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\varphi_\varepsilon} \int_0^T G\left(\frac{\tau-t}{\varphi_\varepsilon}\right) A_\tau(X) - A_t(x) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\varepsilon}{\varphi_\varepsilon} \int_0^T G\left(\frac{\tau-t}{\varphi_\varepsilon}\right) \sigma_\tau(X) dU_\tau^{(1)} \right|] \\
 &\leq \mathbb{E}\left[\left|\frac{1}{\varphi_\varepsilon} \int_0^T G\left(\frac{\tau-t}{\varphi_\varepsilon}\right) (A_\tau(X) - A_\tau(x)) d\tau \right|\right] \\
 &\quad + \mathbb{E}\left[\left|\frac{1}{\varphi_\varepsilon} \int_0^T G\left(\frac{\tau-t}{\varphi_\varepsilon}\right) A_\tau(X) d\tau - A_t(x)\right|\right] \\
 &\quad + \mathbb{E}\left[\left|\frac{\varepsilon}{\varphi_\varepsilon} \int_0^T G\left(\frac{\tau-t}{\varphi_\varepsilon}\right) \sigma_\tau(X) dU_\tau^{(1)}\right|\right] \\
 &:= Q_1(\varepsilon) + Q_2(\varepsilon) + Q_3(\varepsilon). \quad (4.7)
 \end{aligned}$$

利用变量替换 $u = (\tau - t)\varphi_\varepsilon^{-1}$ 并记

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{11} \wedge \varepsilon_{12}, \quad (4.8)$$

其中

$$\varepsilon_{11} = \sup\left\{\varepsilon: \frac{-t}{\varphi_\varepsilon} \leq B_1\right\}, \varepsilon_{12} = \sup\left\{\varepsilon: \frac{T-t}{\varphi_\varepsilon} \geq B_2\right\}.$$

对于 $Q_1(\varepsilon)$, 由假设(H1), (H3), 和引理 4.1 的式 (4.5), 当 $\varepsilon < \varepsilon_1$

$$\begin{aligned}
 Q_1(\varepsilon) &= \mathbb{E} \left[\left| \int_{\frac{-t}{\varphi_\varepsilon}}^{\frac{T-t}{\varphi_\varepsilon}} G(u) (A_{t+\varphi_\varepsilon u}(X) - A_{t+\varphi_\varepsilon u}(x)) du \right| \right] \\
 &\leq \mathbb{E} \left[\left| \int_{B_1}^{B_2} G(u) (A_{t+\varphi_\varepsilon u}(X) - A_{t+\varphi_\varepsilon u}(x)) du \right| \right] \\
 &\leq \mathbb{E} \left[\left| \int_{B_1}^{B_2} |G(u)| (L_1 \int_0^{t+\varphi_\varepsilon u} |X_s - x_s| dK(s) + L_2 |X_{t+\varphi_\varepsilon u} - x_{t+\varphi_\varepsilon u}|) du \right| \right] \\
 &\leq \int_{B_1}^{B_2} |G(u)| du (L_1 \int_0^T 1 dK(s) + L_2) \cdot \sup_{0 \leq t+\varphi_\varepsilon u \leq T} \mathbb{E}[|X_{t+\varphi_\varepsilon u} - x_{t+\varphi_\varepsilon u}|] \\
 &\leq 2\varepsilon(L_1 K_0 + L_2) C_2 \sigma_1 T^{\frac{1}{\alpha}} e^{(L_1 K_0 + L_2)T} \cdot \int_{B_1}^{B_2} |G(u)| du
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

当 $\varepsilon \rightarrow 0$, 上式趋向于 0。对于 $Q_2(\varepsilon)$, 使用 $A_t(x) \in \Theta_0 L$ 和假设(H3), 对于 $\varepsilon < \varepsilon_1$, 可得

$$\begin{aligned}
 Q_2(\varepsilon) &= \mathbb{E} \left| \int_{\frac{-t}{\varphi_\varepsilon}}^{\frac{T-t}{\varphi_\varepsilon}} A_{\varphi_\varepsilon u+t}(x) G(u) d\tau - A_t(x) \right| \\
 &\leq \left| \int_{B_1}^{B_2} G(u) (A_{\varphi_\varepsilon u+t}(x) - A_t(x)) du \right| \\
 &\leq \int_{B_1}^{B_2} |G(u) (A_{\varphi_\varepsilon u+t}(x) - A_t(x))| du \\
 &\leq L\varphi_\varepsilon^\chi \int_{-\infty}^{\infty} |G(u) u^\chi| du,
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

当 $\varepsilon \rightarrow 0$, 上式趋向于 0。对于 $Q_3(\varepsilon)$, 应用引理 2.2, 假设(H2)和(H3), 可得

$$\begin{aligned}
 Q_3 &= \frac{\varepsilon}{\varphi_\varepsilon} \mathbb{E} \left| \int_0^T G\left(\frac{\tau-t}{\varphi_\varepsilon}\right) \sigma_T(X) dU_\tau^{(1)} \right| \\
 &= \frac{\varepsilon}{\varphi_\varepsilon} \mathbb{E} \left| \int_{\alpha_0}^{\alpha_T} G\left(\frac{\frac{\ln \alpha s}{\alpha} - t}{\varphi_\varepsilon}\right) \sigma_{\frac{\ln \alpha s}{\alpha}}(X) (\alpha s)^{-\frac{1}{\alpha}} dZ_s \right| \\
 &\leq \frac{\varepsilon 2C_2}{\varphi_\varepsilon} \mathbb{E} \left[\int_{\alpha_0}^{\alpha_T} \left| G\left(\frac{\frac{\ln \alpha s}{\alpha} - t}{\varphi_\varepsilon}\right) \sigma_{\frac{\ln \alpha s}{\alpha}}(X) (\alpha s)^{-\frac{1}{\alpha}} \right|^\alpha dZ_s \right]^{\frac{1}{\alpha}}
 \end{aligned}$$

$$\leq 2C_2\sigma_1\left(\varepsilon\varphi_\varepsilon^{-\frac{\alpha-1}{\alpha}}\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}|G(u)|^\alpha du\right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (4.11)$$

当 $\varepsilon\varphi_\varepsilon^{-\frac{\alpha-1}{\alpha}} \rightarrow 0$, 上式趋向于 0。结合式 (4.7) - (4.11), 可以得出式 (4.6) 成立。证明完成。

最后, 我们给出估计量 $\hat{S}_t(x)$ 收敛速率的约束。

定理 4.2: 令 $A_t(x) \in \Theta_k(L)$, $\varphi_\varepsilon = \varepsilon^{\frac{\alpha}{\alpha(\kappa+\chi+1)-1}}$, 然后在假设 (H1) - (H4) 下, 可得

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{A_t \in \Theta_k(L)} \varepsilon^{-\frac{\alpha(\kappa+\chi)}{\alpha(\kappa+\chi+1)-1}} \mathbb{E}[|\hat{A}_t - A_t(x)|] < \infty. \quad (4.12)$$

证明: 对于任意 $x \in R$, 由泰勒公式,

$$\begin{aligned} A(x') &= A(x) + \sum_{j=1}^k A^{(j)}(x) \frac{(x' - x)^j}{j!} \\ &\quad + [A^{(k)}(x + \theta(x' - x)) - A^{(k)}(x)] \frac{(x' - x)^k}{k!}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

其中 $\theta \in (0,1)$, 对于 $\varepsilon < \varepsilon_1$, 结合 (4.10) 到 (4.13) 可得

$$\begin{aligned} Q_2(\varepsilon) &\leq \left| \int_{B_1}^{B_2} G(u)(A_{t+\varphi_\varepsilon u}(x) - A_t(x))du \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^k A^{(j)}(x) \left(\int_{B_1}^{B_2} G(u)u^j du \right) \varphi_\varepsilon^j (j!)^{-1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varphi_\varepsilon^k}{k!} \int_{B_1}^{B_2} G(u)u^k (A_{t+\theta\varphi_\varepsilon u}^{(k)} - A_t^{(k)}(x))du \right|. \end{aligned}$$

结合 $A_t(x) \in \Theta_k(L)$ 与条件(H4), 有

$$\begin{aligned} Q_2(\varepsilon) &\leq \frac{\varphi_\varepsilon^k}{k!} \left| \int_{B_1}^{B_2} G(u)u^k (A^{(k)}(x_k)) \right| du \\ &\leq \frac{\varphi_\varepsilon^k}{(k!)} \left| \int_{B_1}^{B_2} G(u)u^k (A^{(k)}(x_k)) \right| du \\ &\leq L\theta^\chi \frac{\varphi_\varepsilon^{k+\chi}}{(k!)} \int_{B_1}^{B_2} |G(u)u^{k+\chi}| du. \end{aligned} \quad (4.14)$$

由 (4.7) (4.9) (4.11) 和 (4.14), 可得

$$\mathbb{E}|\hat{A}_t - A_t(x)| \leq \vartheta_1 \varepsilon + \vartheta_2 \varphi_\varepsilon^{(k+\chi)} + \vartheta_3 \varepsilon \varphi_\varepsilon^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$$

正常数 $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ 不依赖函数 $A(\cdot)$ 。因此, 令 $\varphi_\varepsilon = \varepsilon^{-\frac{\alpha}{\alpha(\chi+1)-1}}$, , 在假设(H1) – (H4)下, 可以得到

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow \infty} \mathbb{E}|\hat{A}_t - A_t(x)| \varepsilon^{-\frac{\alpha}{\alpha(\chi+1)-1}} < \infty.$$

4.4 核估计量 $\hat{A}_t$ 的渐近分布

这一部分讨论了估计量 $\hat{A}_t$ 的渐近分布。自始至终, U_1, U_2 是两个有 α -稳定分布 $S_\alpha(1, \beta, 0)$ 独立随机变量

定理 4.3: 假设 $A_t(x) \in \Theta_{k+1}L$, $\varphi_\varepsilon = \varepsilon^{\frac{\alpha}{\alpha(k+\chi+1)-1}}$, 假设(H1) – (H4)成立

(i) 令 $\chi \in (0, 1)$, 可得

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{-\frac{\alpha(k+\chi)}{\alpha(k+\chi+1)-1}} (\hat{A}_t - A_t(x)) \\ & \Rightarrow \left(\int_{B_1}^{B_2} (G(u)\sigma_t(x))_+^\alpha du \right)^{\frac{1}{\alpha}} U_1 \\ & \quad - \left(\int_{B_1}^{B_2} (G(u)\sigma_t(x))_-^\alpha du \right)^{\frac{1}{\alpha}} U_2 \end{aligned} \quad (4.15)$$

当 $\varepsilon \rightarrow 0$

(ii) 令 $\chi = 1$, 可得

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{-\frac{\alpha(k+1)}{\alpha(k+2)-1}} (\hat{A}_t - A_t(x)) - \frac{A_t^{(k+1)}(x)}{(k+1)!} \int_{B_1}^{B_2} G(u)u^{k+1} du \\ & \Rightarrow \left(\int_{B_1}^{B_2} (G(u)\sigma_t(x))_+^\alpha du \right)^{\frac{1}{\alpha}} U_1 \\ & \quad - \left(\int_{B_1}^{B_2} (G(u)\sigma_t(x))_-^\alpha du \right)^{\frac{1}{\alpha}} U_2, \end{aligned}$$

当 $\varepsilon \rightarrow 0$

证明: 由(4.1)可得

$$\varepsilon^{-\frac{\alpha(k+1)}{\alpha(k+2)-1}} (\hat{A}_t - A_t(x))$$

$$\begin{aligned}
 &= \varphi_\varepsilon^{-(k+\chi)} \int_{\frac{-t}{\varphi_\varepsilon}}^{\frac{T-t}{\varphi_\varepsilon}} G(u) \left(A_{t+\varphi_\varepsilon u}(X) - A_{t+\varphi_\varepsilon u}(x) \right) du \\
 &\quad + \varphi_\varepsilon^{-(k+\chi)} \int_{\frac{-t}{\varphi_\varepsilon}}^{\frac{T-t}{\varphi_\varepsilon}} G(u) A_{t+\varphi_\varepsilon u}(x) du - A_t(x) \\
 &\quad + \varphi_\varepsilon^{-\frac{1}{\alpha}} \int_0^T G\left(\frac{\tau-t}{\varphi_\varepsilon}\right) (\sigma_\tau(X) - \sigma_\tau(x)) dU_\tau^{(1)} \\
 &\quad + \varphi_\varepsilon^{-\frac{1}{\alpha}} \int_0^T G\left(\frac{\tau-t}{\varphi_\varepsilon}\right) \sigma_\tau(x) dU_\tau^{(1)} \\
 &:= I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon) + I_3(\varepsilon) + I_4(\varepsilon)
 \end{aligned}$$

对于 $I_1(\varepsilon)$, 由引理 4.1 的条件(H1)和 (4.3) 对于 $\varepsilon < \varepsilon_1$, 可得

$$\begin{aligned}
 &|I_1(\varepsilon)| \\
 &\leq \varphi_\varepsilon^{-(K+\chi)} \left| \int_{B_1}^{B_2} G(u) \left(A_{t+\varphi_\varepsilon u}(X) - A_{t+\varphi_\varepsilon u}(x) \right) du \right| \\
 &\leq \varphi_\varepsilon^{-(K+\chi)} \left| \int_{B_1}^{B_2} |G(u)| (L_1 \int_0^{t+\varphi_\varepsilon u} |X_s - x_s| dK(s) \right. \\
 &\quad \left. + L_2 |X_{t+\varphi_\varepsilon u} - x_{t+\varphi_\varepsilon u}|) du \right| \\
 &\leq \varepsilon^{\frac{\alpha-1}{\alpha(k+\chi+1)-1}} e^{(L_1 K_0 + L_2)T} \int_{B_1}^{B_2} |G(u)| \\
 &\leq \varepsilon^{\frac{\alpha-1}{\alpha(k+\chi+1)-1}} (L_1 K_0 + L_2) e^{(L_1 K_0 + L_2)T} \\
 &\quad \cdot \int_{B_1}^{B_2} |G(u)| \left(\sup_{0 \leq t+\varphi_\varepsilon u \leq T} \int_0^{t+\varphi_\varepsilon u} |\sigma_s(X)| dU_s^{(1)} \right) du,
 \end{aligned}$$

其中 ε_1 在 (4.8) 已给定, 由条件(H2), Markov 不等式和引理 2.3, 对于任意给定 $\delta > 0$, 可得

$$\begin{aligned}
 &P(|I_1(\varepsilon)| > \delta) \\
 &\leq \delta^{-1} \varepsilon^{\frac{\alpha-1}{\alpha(k+\chi+1)-1}} (L_2 + L_1 K_0) e^{(L_1 K_0 + L_2)T} \\
 &\quad \cdot \int_{B_1}^{B_2} |G(u)| \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t+\varphi_\varepsilon u \leq T} \int_0^{t+\varphi_\varepsilon u} |\sigma_s(X)| dU_s^{(1)} \right] du \\
 &= \delta^{-1} \varepsilon^{\frac{\alpha-1}{\alpha(k+\chi+1)-1}} (L_2 + L_1 K_0) e^{(L_1 K_0 + L_2)T} \int_{B_1}^{B_2} |G(u)|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t + \varphi_\varepsilon u \leq T} \int_{a_0}^{a_t + \varphi_\varepsilon u} \left| \sigma_{\frac{\ln \alpha s}{\alpha}}(X) (\alpha s)^{-\frac{1}{\alpha}} \right| dZ_s \right] du \\
 & \leq \delta^{-1} \varepsilon^{\frac{\alpha-1}{\alpha(k+\chi+1)-1}} (L_2 + L_1 K_0) e^{(L_1 K_0 + L_2)T} 2C_2 \\
 & \quad \cdot \left[\left(\int_{a_0}^{a_T} \left| \sigma_{\frac{\ln \alpha s}{\alpha}}(X) \right|^\alpha (\alpha s)^{-1} ds \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right] \int_{B_1}^{B_2} |G(u)| du \\
 & \leq \delta^{-1} \varepsilon^{\frac{\alpha-1}{\alpha(k+\chi+1)-1}} (L_2 + L_1 K_0) e^{(L_1 K_0 + L_2)T} T^{\frac{1}{\alpha}} \\
 & \quad \cdot \sigma_1 2C_2 \int_{B_1}^{B_2} |G(u)| du
 \end{aligned}$$

当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 上式趋向于 0。这表明

$$I_1(\varepsilon) \rightarrow_p 0, \quad (4.16)$$

当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 对于任意 $x \in R$, 由泰勒公式

$$\begin{aligned}
 A(y) &= A(x) + \sum_{j=1}^{k+1} A^{(j)}(x) \frac{(y-x)^j}{j!} \\
 &\quad + [A^{(k+1)}(x + \theta(y-x)) - A^{(k+1)}(x)] \\
 &\quad \cdot \frac{(y-x)^{(k+1)}}{(k+1)!},
 \end{aligned}$$

其中 $\theta \in (0,1)$, 对于 $I_2(\varepsilon)$, 由假设(H4), 对于 $\varepsilon < \varepsilon_1$, 可得

$$\begin{aligned}
 & I_2(\varepsilon) \\
 &= \varphi_\varepsilon^{-(k+\chi)} \int_{B_1}^{B_2} G(u) (A_{t+\varphi_\varepsilon u}(x) - A_t(x)) du \\
 &= \varphi_\varepsilon^{-(k+\chi)} \left[\sum_{j=1}^{k+1} A^{(j)}(x_t) \left(\int_{B_1}^{B_2} G(u) u^j du \right) \varphi_\varepsilon^j (j!)^{-1} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\varphi_\varepsilon^{-(k+\chi)}}{(k+1)!} \int_{B_1}^{B_2} G(u) u^{k+1} (A_{t+\theta\varphi_\varepsilon u}^{(k+1)}(x) - A_t^{(k+1)}(x)) du \right] \\
 &= \frac{\varphi_\varepsilon^{1-\chi} A_t^{(k+1)}}{(k+1)!} \int_{B_1}^{B_2} G(u) u^{k+1} du + \frac{\varphi_\varepsilon^{1-\chi}}{(k+1)!} \int_{B_1}^{B_2} G(u) u^{k+1} \\
 &\quad \cdot (A_{t+\theta\varphi_\varepsilon u}^{(k+1)}(x) - A_t^{(k+1)}(x)) du. \quad (4.17)
 \end{aligned}$$

由 $A_t(x) \in \Theta_{k+1}L$ 可得

$$\begin{aligned}
 & \frac{\varphi_\varepsilon^{1-\chi}}{(k+1)!} \int_{B_1} G(u) u^{k+1} (A_{t+\theta\varphi_\varepsilon u}^{(k+1)}(x) - A_t^{(k+1)}(x)) du \\
 & \leq \frac{\varphi_\varepsilon^{1-\chi}}{(k+1)!} \int_{B_2} |G(u) u^{k+1} \cdot (A_{t+\theta\varphi_\varepsilon u}^{(k+1)}(x) - A_t^{(k+1)}(x))| du \\
 & \leq \frac{L\varphi_\varepsilon\theta^\chi}{(k+1)!} \int_{B_1}^{B_2} |G(u) u^{k+\chi+1}| du,
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 上式趋向于 0。式 (4.17) (4.18) 表明

$$I_2(\varepsilon) \rightarrow \begin{cases} 0, & \text{如果 } \chi \in (0,1), \\ \frac{A_t^{(k+1)}(x)}{(k+1)!} \int_{B_1}^{B_2} G(u) u^{k+1} du, & \text{如果 } \chi = 1, \end{cases} \tag{4.19}$$

当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 。对于 $I_3(\varepsilon)$, 由假设(H1)和(H3), Markov 不等式和引理 3.1 的式(4.4), 对于 $\delta > 0$ 和 $\varepsilon < \varepsilon_1$,

$$\begin{aligned}
 & P(|I_3(\varepsilon)| > \delta) \\
 & \leq \delta^{-1} \varphi_\varepsilon^{-\frac{1}{\alpha}} \mathbb{E} \left| \int_0^T G\left(\frac{\tau-t}{\varphi_\varepsilon}\right) \right. \\
 & \quad \left. (\sigma_\tau(X) - \sigma_\tau(x)) dU_\tau^{(1)} \right| \\
 & = \delta^{-1} \varphi_\varepsilon^{-\frac{1}{\alpha}} \mathbb{E} \left(\int_{a_0}^{a_T} \left| G\left(\frac{\ln \alpha \tau}{\alpha} - t\right) \right. \right. \\
 & \quad \cdot \left. \left(\frac{\sigma_{\ln \alpha T}(X) - \sigma_{\ln \alpha T}(x)}{\alpha} \right) (\alpha \tau)^{-\frac{1}{\alpha}} dZ_\tau \right| \\
 & \leq \delta^{-1} 2C_2 \varphi_\varepsilon^{-\frac{1}{\alpha}} \mathbb{E} \left(\int_{a_0}^{a_T} \left| G\left(\frac{\ln \alpha \tau}{\alpha} - t\right) \right. \right. \\
 & \quad \cdot \left. \left(\frac{\sigma_{\ln \alpha T}(X) - \sigma_{\ln \alpha T}(x)}{\alpha} \right) |^\alpha (\alpha \tau)^{-1} d\tau \right)^{\frac{1}{\alpha}} \\
 & \leq \delta^{-1} 2C_2 \varphi_\varepsilon^{-\frac{1}{\alpha}} \left(\int_{a_0}^{a_T} \left| G\left(\frac{\ln \alpha \tau}{\alpha} - t\right) \right|^\alpha \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot (L_1 \int_0^{\frac{\ln \alpha \tau}{\alpha}} |X_s - x_s| dK(s) \\
 & + L_2 |X_{\frac{\ln \alpha \tau}{\alpha}} - x_{\frac{\ln \alpha \tau}{\alpha}}|)^\alpha (\alpha \tau)^{-1} d\tau)^{\frac{1}{\alpha}} \\
 \leq & \delta^{-1} 2C_2 \left(\int_{\frac{-t}{\varphi_\varepsilon}}^{\frac{T-t}{\varphi_\varepsilon}} |G(u)|^\alpha \right. \\
 & \left. (2L_1^\alpha \left(\int_0^{t+\varphi_\varepsilon u} |X_s - x_s| dK(s) \right)^\alpha \right. \right. \\
 & \left. \left. + 2L_2^\alpha |X_{t+\varphi_\varepsilon u} - x_{t+\varphi_\varepsilon u}|^\alpha) du \right)^{\frac{1}{\alpha}} \\
 \leq & \delta^{-1} 2^{\frac{1}{\alpha}+1} C_2 (L_1 K_0 + L_2) \left(\int_{B_1}^{B_2} |G(u)|^\alpha du \right)^{\frac{1}{\alpha}} \\
 & \cdot \sup_{0 \leq t+\varphi_\varepsilon u \leq T} |X_{t+\varphi_\varepsilon u} - x_{t+\varphi_\varepsilon u}|,
 \end{aligned}$$

当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 上式趋向于 0。应用引理 2.2, 存在两个独立过程 $Z', Z'' \stackrel{d}{=} Z$ 使得

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T G\left(\frac{\tau-t}{\varphi_\varepsilon}\right) \sigma_\tau(x) dU_\tau^{(1)} \\
 & = \int_{a_0}^{a_T} G\left(\frac{\frac{\ln \alpha \tau}{\alpha} - t}{\varphi_\varepsilon}\right) \sigma_{\frac{\ln \alpha \tau}{\alpha}}(x) (\alpha \tau)^{-\frac{1}{\alpha}} dZ_\tau \\
 & = Z' \circ \int_{a_0}^{a_T} \left(G\left(\frac{\frac{\ln \alpha \tau}{\alpha} - t}{\varphi_\varepsilon}\right) \sigma_{\frac{\ln \alpha \tau}{\alpha}}(x) (\alpha \tau)^{-\frac{1}{\alpha}} \right)_+^\alpha d\tau \\
 & \quad - Z'' \circ \int_{a_0}^{a_T} \left(G\left(\frac{\frac{\ln \alpha \tau}{\alpha} - t}{\varphi_\varepsilon}\right) \sigma_{\frac{\ln \alpha \tau}{\alpha}}(x) (\alpha \tau)^{-\frac{1}{\alpha}} \right)_-^\alpha d\tau \\
 & = \left(\int_{a_0}^{a_T} \left(G\left(\frac{\frac{\ln \alpha \tau}{\alpha} - t}{\varphi_\varepsilon}\right) \sigma_{\frac{\ln \alpha \tau}{\alpha}}(x) (\alpha \tau)^{-\frac{1}{\alpha}} \right)_+^\alpha d\tau \right)_+^{\frac{1}{\alpha}} U_1 \\
 & \quad - \left(\int_0^T \left(G\left(\frac{\frac{\ln \alpha \tau}{\alpha} - t}{\varphi_\varepsilon}\right) \sigma_{\frac{\ln \alpha \tau}{\alpha}}(x) (\alpha \tau)^{-\frac{1}{\alpha}} \right)_-^\alpha d\tau \right)_-^{\frac{1}{\alpha}} U_2.
 \end{aligned}$$

对于 $I_4(\varepsilon)$, 应用条件 $H(3)$, 可得

$$\begin{aligned}
 I_4(\varepsilon) &\stackrel{d}{=} \left(\int_{\frac{-t}{\varphi_\varepsilon}}^{\frac{T-t}{\varphi_\varepsilon}} \left(G(u) \sigma_{t+\varphi_\varepsilon u}(x) \right)_+^\sigma du \right)^{\frac{1}{\alpha}} U_1 \\
 &\quad - \left(\int_{\frac{-t}{\varphi_\varepsilon}}^{\frac{\tau-t}{\varphi_\varepsilon}} \left(G(u) \sigma_{t+\varphi_\varepsilon u}(x) \right)_-^\sigma du \right)^{\frac{1}{\alpha}} U_2 \\
 &\Rightarrow \left(\int_{B_1}^{B_2} (G(u) \sigma_t(x))_+^\alpha du \right)^{\frac{1}{\alpha}} U_1 \\
 &\quad - \left(\int_{B_1}^{B_2} (G(u) \sigma_t(x))_-^\alpha du \right)^{\frac{1}{\alpha}} U_2
 \end{aligned}$$

当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 。因此，由 Slutsky 的理论，可知就 χ 的范围（例如 $\chi \in (0,1)$ 和 $\chi = 1$ ），

当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时，式（4.15）和（4.16）成立。证明完毕。

注 4.1：如果 Z 是对称的（即 $\beta = 0$ ），在定理 4.1 的条件下，由 α -稳定随机变量的基本性质可得

(i) 令 $\chi \in (0,1)$ ，有

$$\begin{aligned}
 &\varepsilon^{-\frac{\alpha(k+\chi)}{\alpha(k+\chi+1)-1}} (\hat{A}_t - A_t(x)) \\
 &\Rightarrow |\sigma_t(x)| \left(\int_{B_1}^{B_2} |G(u)|^\alpha du \right)^{\frac{1}{\alpha}} S_\alpha(1,0,0),
 \end{aligned}$$

当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 。

(ii) 令 $\chi = 1$ ，有

$$\begin{aligned}
 &\varepsilon^{-\frac{\alpha(k+\chi)}{\alpha(k+\chi+1)-1}} (\hat{A}_t - A_t(x)) - \frac{A_t^{(k+1)}(x)}{(K+1)!} \int_{B_1}^{B_2} G(u) u^{k+1} du \\
 &\Rightarrow |\sigma_t(x)| \left(\int_{B_1}^{B_2} |G(u)|^\alpha du \right)^{\frac{1}{\alpha}} S_\alpha(1,0,0), \varepsilon \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

第5章 总结与展望

5.1 结论

本文围绕两类非线性非高斯随机微分方程的统计推断问题展开了探讨。此类问题在诸多前沿领域中具有重要的理论和实际应用价值。在第三章中，着重研究非时齐条件下由 α -稳定过程驱动的随机微分方程。聚焦于该方程轨迹拟合估计量的相关统计推断问题。首先，证明了轨迹拟合估计量的强相合性，并给出了其收敛速率。随后，分析了轨迹拟合估计量的渐近分布。在第四章的研究中，则将关注点置于第二类 α -稳定过程驱动的随机微分方程的非参数估计问题上，证明了核估计量的相合性，同时，对其渐近分布展开了细致的探讨，分析了核估计量的统计规律。本文的研究丰富了该领域的理论研究成果，更为实际应用中处理复杂随机现象提供了切实可行的理论支持和方法指导。

5.2 展望

α -稳定过程驱动的随机微分方程的统计推断问题是一个值得深入探究的课题，尽管本文考虑了两类非高斯过程驱动的随机微分方程的参数估计问题，但也只是整个课题的一小部分，以下为本文作者对未来的展望：

1. 针对 α -稳定过程驱动的随机微分方程的参数估计，轨迹拟合方法研究较多，其他方法研究未知，可继续探讨贝叶斯估计等方法的可行性。
2. α -稳定过程驱动的随机微分方程非参数估计文献不多，可继续探讨其他估计方法的可行性。

参考文献

- [1] 许之彦.扩散过程的统计推断[D].华东师范大学,2003.
- [2] Tang C Y, Chen S X. Parameter estimation and bias correction for diffusion processes[J]. Journal of Econometrics, 2009, 149(1): 65-81.
- [3] 邢雪丹.伊藤过程理论及其在金融中的应用[D].山东大学,2014.
- [4] 王允艳.几类扩散型过程的统计推断[D].浙江大学,2012.
- [5] Wei C, Shu H, Liu Y. Gaussian estimation for discretely observed Cox-Ingersoll-Ross model[J]. International Journal of General Systems, 2016, 45(5): 561-574.
- [6] Pan Y, Yan L. The least squares estimation for the α -stable Ornstein-Uhlenbeck process with constant drift[J]. Methodology and Computing in Applied Probability, 2019, 21(4): 1165-1182.
- [7] El Ansari Y, El Myr A, Omari L. Parameter inference of a stochastic sis model of transmission of HIV/AIDS with immigration effect[J]. Applied Mathematics & Information Sciences, 2020, 14(4): 617-626.
- [8] 付金玉.基于不同频率金融数据的建模和统计推断[D].东南大学,2022.
- [9] Zhang X, Shu H. Parameter estimation for generalized Ait-Sahalia-type interest rate model[J]. Communications in Statistics-Simulation and Computation, 2023, 52(4): 1630-1638.
- [10] Mikosch T, Resnick S, Rootzén H, et al. Is network traffic approximated by stable Lévy motion or fractional Brownian motion?[J]. The Annals of Applied Probability, 2002, 12(1): 23-68.
- [11] Nolan J P. Modeling financial distributions with stable distributions, Volume 1 of Handbooks in Finance, Chapter 3[M]. 2003.
- [12] 李旭涛.Alpha 稳定分布模型及其应用研究[D].华中科技大学,2006.
- [13] 武东,汤银才.稳定分布及其在金融中的应用[J].应用概率统计,2007,(04):434-445.
- [14] Xu W, Wu C, Dong Y, et al. Modeling Chinese stock returns with stable distribution[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2011, 54(1-2): 610-617.

- [15]于玲.Alpha 稳定分布噪声环境下韧性时延估计新算法研究[D].大连理工大学,2017.
- [16]Dietz H M. Asymptotic behaviour of trajectory fitting estimators for certain non-ergodic SDE[J]. Statistical Inference for Stochastic Processes, 2001, 4(3): 249-258.
- [17]Dietz H M, Kutoyants Y A. Parameter estimation for some non-recurrent solutions of SDE[J]. Statistics & Decisions, 2003, 21(1): 29-46.
- [18]Bo L, Wang Y, Yang X, et al. Maximum likelihood estimation for reflected Ornstein-Uhlenbeck processes[J]. Journal of Statistical Planning and Inference, 2011, 141(1): 588-596.
- [19]Jiang H, Dong X. Parameter estimation for the non-stationary Ornstein-Uhlenbeck process with linear drift[J]. Statistical Papers, 2015, 56: 257-268.
- [20]Abi-ayad I, Mourid T. Parametric estimation for non recurrent diffusion processes[J]. Statistics & Probability Letters, 2018, 141: 96-102.
- [21]Zang Q, Zhang L. Asymptotic behaviour of the trajectory fitting estimator for reflected Ornstein-Uhlenbeck processes[J]. Journal of Theoretical Probability, 2019, 32: 183-201.
- [22]Azmoodeh E, Morlanes J I. Drift parameter estimation for fractional Ornstein-Uhlenbeck process of the second kind[J]. Statistics, 2015, 49(1): 1-18.
- [23]Azmoodeh E, Viitasaari L. Parameter estimation based on discrete observations of fractional Ornstein-Uhlenbeck process of the second kind[J]. Statistical Inference for Stochastic Processes, 2015, 18(3): 205-227.
- [24]Balde M F, Es-Sebaiy K, Tudor C A. Ergodicity and drift parameter estimation for infinite-dimensional fractional Ornstein-Uhlenbeck process of the second kind[J]. Applied Mathematics & Optimization, 2020, 81: 785-814.
- [25]El Onsy B, Es-Sebaiy K, Tudor C A. Statistical analysis of the non-ergodic fractional Ornstein-Uhlenbeck process of the second kind[J]. Communications on Stochastic Analysis, 2017, 11(2): 119-136.
- [26]El Onsy B, Es-Sebaiy K, Ndiaye D. Parameter estimation for discretely observed non-ergodic fractional Ornstein-Uhlenbeck processes of the second kind[J]. Brazilian Journal of Probability and Statistics, 2018, 32(3): 545-558.

- [27] Alazemi F, Alsenafi A, Es-Sebaiy K. Parameter estimation for Gaussian mean-reverting Ornstein-Uhlenbeck processes of the second kind: Non-ergodic case[J]. *Stochastics and Dynamics*, 2020, 20(02): 2050011.
- [28] Fan J. A selective overview of nonparametric methods in financial econometrics[J]. *Statistical Science*, 2005: 317-337.
- [29] 邵金. 非时齐扩散过程渐近性质及遍历性研究[D]. 南京航空航天大学, 2019.
- [30] Zhao S J, Gao F Q. Large deviations for parameter estimators of some time inhomogeneous diffusion process[J]. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 2011, 27(11): 2245-2258.
- [31] Nadaraya E A. On estimating regression[J]. *Theory of Probability & Its Applications*, 1964, 9(1): 141-142.
- [32] Watson G S. Smooth regression analysis[J]. *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series A*, 1964: 359-372.
- [33] Härdle W. Applied nonparametric regression[M]. Cambridge University Press, 1990.
- [34] Bosq D. Nonparametric statistics for stochastic processes: estimation and prediction[M]. Springer Science & Business Media, 2012.
- [35] Pham D T. Nonparametric estimation of the drift coefficient in the diffusion equation[J]. *Series Statistics*, 1981, 12(1): 61-73.
- [36] Prakasa Rao B L S. Estimation of the drift for diffusion process[J]. *Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics*, 1985, 16(2): 263-275.
- [37] Arfi M. Nonparametric drift estimation from ergodic samples[J]. *Journal of Nonparametric Statistics*, 1995, 5(4): 381-389.
- [38] Yu K. Identification of dynamical systems with small noise[J]. *Mathematics and Its Applications*, 1994.
- [39] Mishra M N, Prakasa Rao B L S. Nonparametric estimation of trend for stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion[J]. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, 2011, 14(2): 101-109.
- [40] Prakasa Rao B L S. Nonparametric estimation of trend for stochastic differential equations driven by mixed fractional Brownian motion[J]. *Stochastic Analysis and*

- Applications, 2019, 37(2): 271-280.
- [41] Prakasa Rao B L S. Nonparametric estimation of trend for stochastic differential equations driven by sub-fractional Brownian motion[J]. Random Operators and Stochastic Equations, 2020, 28(2): 113-122.
- [42] Hu Y, Long H. Parameter estimation for Ornstein-Uhlenbeck processes driven by α -stable Lévy motions[J]. Communications on Stochastic Analysis, 2007, 1(2): 175-192.
- [43] Hu Y, Long H. Least squares estimator for Ornstein-Uhlenbeck processes driven by α -stable motions[J]. Stochastic Processes and their Applications, 2009, 119(8): 2465-2480.
- [44] Zhang S, Zhang X. A least squares estimator for discretely observed Ornstein-Uhlenbeck processes driven by symmetric α -stable motions[J]. Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 2013, 65: 89-103.
- [45] 潘玉荣,贾朝勇,沙翠翠.由对称 α -稳定运动驱动的随机微分方程参数估计[J]. 长春师范大学学报,2023,42(12):6-11.
- [46] Zhang X, Jiang Z, Shu H. Trajectory fitting estimation for non-homogeneous reflected Ornstein-Uhlenbeck process driven by an α -stable process[J]. Stochastics, 2025, 97(2): 299-312.
- [47] Zhang X, Yi H, Shu H. Nonparametric estimation of periodic signal disturbed by α -stable noises[J]. Journal of Nonparametric Statistics, 2022, 34(1): 187-205.
- [48] Zhang X, Yi H, Shu H. Nonparametric estimation of the trend for stochastic differential equations driven by small α -stable noises[J]. Statistics & Probability Letters, 2019, 151: 8-16.
- [49] Rosiński J, Woyczyński W A. On Itô stochastic integration with respect to p-stable motion: inner clock, integrability of sample paths, double and multiple integrals[J]. The Annals of Probability, 1986: 271-286.
- [50] Kallenberg O. Some time change representations of stable integrals, via predictable transformations of local martingales[J]. Stochastic Processes and their Applications, 1992, 40(2): 199-223.
- [51] Dietz H M, Kutoyants Y A. A class of minimum-distance estimators for diffusion

- processes with ergodic properties[J]. *Statistics & Risk Modeling*, 1997, 15(3): 211-228.
- [52] Long H. Parameter estimation for a class of stochastic differential equations driven by small stable noises from discrete observations[J]. *Acta Mathematica Scientia*, 2010, 30(3): 645-663.
- [53] Liptser R, Shiryaev A N. *Statistics of random processes: I. General theory*[M]. Springer Science & Business Media, 2001.
- [54] Zolotarev V M. *One-dimensional stable distributions*, *Translations of Mathematical Monographs*, vol. 65[J]. American Mathematical Society, 1986.

硕士期间发表的论文

- [1] Wan S, Jiang Z, Zhang X. Nonparametric Estimation for Stochastic Processes Driven by Alpha-stable Processes of the Second Kind[J]. IAENG International Journal of Applied Mathematics, 2024, 54(7): 1409-1415. (已发表)

致 谢

时光匆匆，如白驹过隙，转眼间我的研究生生涯已临近终点。在这万物复苏的美好时节，回首过去两年多的学习与生活，心中满是感慨。三年科研生涯的日日夜夜，在完成这篇术成果之际，我谨以最诚挚的敬意，向所有在这段学术征途中给予我指引、支持与温暖的师长、亲友致以衷心谢忱。

我要将感激之情献给我的研究生导师吴小太教授。他以渊博的专业知识和丰富的科研经验，为我答疑解惑，给予我极大的帮助。在吴老师的悉心指导下，我学会了严谨的科研方法，更养成了良好的学术习惯。值此毕业之际，我向吴老师致以最崇高的敬意和最诚挚的感谢，衷心祝愿吴老师在今后的生活和工作中，万事顺遂，收获更多的学术成就。

在此，我还要特别感谢张雪康副教授在学业上给予的悉心指导。张老师严谨的教学态度，严密的逻辑思维，丰富的学科知识，以及负责任的工作态度让我在学习和生活方面都受益匪浅，使我的科研能力、学习能力、独立思考能力的能力都得到了提高。感谢张老师的包容与耐心，解答我的困惑，让我完成论文的撰写。祝愿张老师桃李芬芳，教泽绵长。

此外，我还要感谢所有的任课老师们，是你们的倾囊相授，让我在专业知识的积累上日益深厚。在此，我也要特别感谢我的同学，感谢你们在学术讨论中与我思维碰撞，为我提供宝贵的思路和建议。在生活中，他们给予我诸多帮助与支持，感谢你们在生活中的扶持。感谢我的室友，三年的朝夕相处中，我们共同成长、彼此包容，成为了我人生中美好的回忆。

我更要感恩我的父母和亲人，感谢你们一直以来在背后默默的支持与付出。在我面对学习和科研的压力，遭遇失败和挫折时，是你们给予我无尽的鼓励和安慰，让我能够坚定信念，勇往直前。

在此毕业之际，我衷心祝愿各位老师学术长青，祝愿同窗挚友鹏程万里，祝愿家人安康顺遂。前路漫漫，唯有心怀感恩，方能行稳致远。