
分类号: O231.5
密 级: 公开

单位代码: 10363
学 号: 2221020118

题 目 带有私人观念和话题依赖的
观念动力学研究

英文并列
题 目 Research on Opinion Dynamics with Private
Opinion and Topic Dependence

学生姓名: 丁汝葭
指导教师: 何 广 教授
专 业: 数 学
研究方向: 随机控制理论及应用

论文答辩日期: 2025 年 5 月 14 日

安徽工程大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：我恪守学术道德，崇尚严谨学风。所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已明确注明和引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品及成果的内容。论文为本人亲自撰写，我对所写的内容负责，并完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

学位论文作者签名：丁沁霞

日期：2025 年 5 月 14 日

安徽工程大学学位论文版权使用授权书

学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅或借阅。本人授权可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保密 ☐，在 ____ 年解密后适用本版权书。

本学位论文属于

不保密 ☒。

学位论文作者签名：丁迎霞

日期：2025 年 5 月 14 日

指导教师签名：何

日期：2025 年 5 月 14 日

带有私人观念和话题依赖的观念动力学模型研究

摘 要

随着科技的进步和互联网的普及，诸如小红书、抖音等社交媒体平台已成为人们获取资讯的重要渠道。越来越多的人通过网络表达个人见解，信息传播的模式和途径经历了革命性的变革。在此背景下，人际交流信息日趋复杂化，个体在发表观念时可能因群体压力而出现言行不一的现象。我们将个人公开表达的想法称为个人的表达观念，又将个人内心的真实想法称为私人观念。因此，探究个人表达观念与私人观念之间的差异具有重要的现实价值。

首先，本文提出了一种新的观念动力学模型来探讨意见演变的规律。在提出的异质多维模型中，充分考虑了执拗、合作与竞争、异质的异质多维观念体系、私人意见与表达意见的差异以及顺应当地民意的压力等诸多社会心理因素。并利用矩阵分析技术和图论的相关理论，详细分析了该模型的动态行为，发现当系统不含有开放性个体时，无论网络拓扑是否是结构平衡，私人观念和表达观念总是可以以指数级地速度快速收敛到稳定状态，同时稳定状态依赖于最初的私人观念。之后利用数值仿真对所得结果进行了验证。

其次，本文研究了系统含有开放性个体的情况。研究发现如果系统如果开放性个体和非开放性个体共存，只要开放性个体的意见趋于一致，非开放性个体的意见也趋于一致。此外，如果社交网络中存在

执拗的个体,那么几乎所有初始意见的最终私人观念和表达观念之间总是存在差异。之后,我们利用数值模拟实例对所得结果进行验证,并将模型应用于 Zachary 's 空手道俱乐部网络来解释俱乐部划分的原因。

最后,我们对本文进行了总结和归纳,并对观念动力学未来的研究方向进行了展望。本文的研究成果对于进一步发展观念动力学,揭示观念产生、传播和聚合的演变规律具有重要意义。

关键词 观念动力学,私人观念,表达观念,异质多维信念系统,执拗个体,弹性系数,收敛性

Research on opinion dynamics with private opinion and topic dependence

ABSTRACT

With the advancement of science and technology and the popularization of the Internet, social media platforms such as Rednote and TikTok have become important channels for people to obtain information. More and more people express their private opinions through the Internet, the modes and ways of information dissemination have undergone revolutionary changes. In this context, interpersonal communication is becoming more and more complicated, and individuals may be inconsistent in words and deeds when expressed their opinions due to group pressure. We call the publicly expressing opinions of the individual expressed opinions, and the true thoughts of the individual are called private opinions. Therefore, it is of great practical value to explore the difference between individual expressed opinions and private opinions.

Firstly, a new opinion dynamics model is proposed to explore the law of opinion evolution. In the proposed multidimensional model, many social psychological factors such as stubbornness, cooperation and competition, heterogeneous multidimensional opinion systems, differences between private opinions and expressed opinions, and the pressure to conform to local public opinions are fully considered. Based on matrix analysis and

graph theory, the dynamic behavior of the model is analyzed in detail. It is found that when the system does not contain oblivious individuals, whether the network topology is structurally balanced or not, the private opinions and expressed opinions converge rapidly to the stable state with exponential speed, and the stable state depends on the initial private opinions. The results are verified by numerical simulation.

Secondly, this paper studies the system with oblivious individuals. It is found that in a system where oblivious individuals and non-oblivious individuals coexist, as long as the opinions of oblivious individuals tend to agree, the opinions of non-oblivious individuals tend to agree. Moreover, if there are stubborn individuals in the social network, there will always be a difference between the ultimate private opinions and the expressed opinions of almost all initial opinions. Then We validate the results with numerical simulations and apply the model to Zachary's karate club network to explain the division of clubs.

In the end, we summarize this paper, and look forward to the future research direction of opinion dynamics. The research results of this paper are of great significance for further developing the opinions dynamics and revealing the evolution laws of the generation, propagation and aggregation of opinions.

KEY WORDS: Opinion Dynamics, Private Opinion , Expressed Opinion, Stubborn Individuals, Convergence

目录

摘 要	I
ABSTRACT	III
目 录	V
第 1 章 绪论	1
1.1 研究背景和意义	1
1.2 国内外研究现状	2
1.3 主要研究内容和论文结构	4
第 2 章 预备知识	6
2.1 符号	6
2.2 图论	6
2.3 DeGroot 模型简介	7
2.4 F-J 模型简介	8
第 3 章 不具有开放性个体的观念动力学模型的动力学分析	10
3.1 模型描述	10
3.2 假设、备注及引理	12
3.3 主要结论	13
3.4 数值模拟	25
3.5 本章小节	26
第 4 章 具有开放性个体的观念动力学模型的动力学分析	27
4.1 模型描述	27
4.2 主要结论	28
4.3 数值模拟	31
4.4 本章小结	34
第 5 章 总结与展望	36
参考文献	38
硕士期间发表的论文	44
致谢	45

第 1 章 绪论

1.1 研究背景和意义

在过去的几十年里，人们的沟通媒介和方式发生了重大变化，这导致人们对社会群体中意见如何形成和表达的好奇心激增^[1]。洞察意见演变的动态不仅仅是学术追求，而是在复杂的社会互动网络中预测趋势和控制策略的战略需求^[2]。

揭示群体观念和行为的演化模式在社交网络中至关重要^{[3][4]}。所以观念动力学在控制论、社会学、物理学、经济学和生物学等领域得到了广泛的关注^{[1][2][5][6][7]}。观念动力学关注社交网络中的一个基本问题：个体如何受到周围社会群体的影响。对这一问题的探索不仅揭示了人类社会和动物种群相互作用的基本原则，而且有助于引导社会走向更和谐与稳定^{[3][4][8][9]}。

随着科技的进步和互联网的普及，诸如小红书、抖音等社交媒体平台已成为人们获取资讯的重要渠道。越来越多的人通过网络表达个人见解，信息传播的模式和途径经历了变化。在此背景下，人际交流信息日趋复杂化，个体在发表观念时可能因群体压力而出现言行不一的现象。我们将个人公开表达的想法称为个人的表达观念，又将个人内心的真实想法称为私人观念。因此，人们在进行观念的交互时，表达的观念可能和心里所想的观念不同，在这种情况下，个体的私人观念和表达观念会出现差异，可能会产生信息级联，导致各种各样的情况发生。例如，在刑事审判中，超过三分之一的陪审员会私下投票反对陪审团的最终决定。民众的私人观念和公开表达观念之间的巨大差异可能会造成紧张和不满，从而产生严重的后果。无论是在陪审员、公司董事会会议室还是在普通大众中发生的敏感的政治问题，私人观念和表达观念中巨大且持续存在的分歧导致潜在的社会影响是明确的。在这种情形下，讨论私人观念和表达观念的产生、扩散和聚合有着重要的意义。

在社交网络中，竞争现象普遍存在。竞争可以被定义为个体或群体为实现超越他人或取得更优异成果的心理动机与行为表现。参与者为实现自身利益最大化或达成具有吸引力的目标，往往会选择忽视甚至损害他人的权益。这种行为的积极意义在于能够激发个体潜能，推动社会向前发展，并提升生产效率。在日常生活中，竞争通常以各类赛事形式呈现，例如电子竞技联赛、创新创业大赛、歌唱

选秀节目以及摄影作品评选等活动。由此可见，竞争在社交网络中具有普遍性，将其纳入研究范畴对我们的课题具有重要的学术价值。

1.2 国内外研究现状

在现实世界的社交网络结构中，个人之间的意见演变轨迹是一种多方面的现象，受到无数因素的复杂影响，包括情绪反应，社会分层和社会紧张局势^[10]。从系统科学的角度来看，建立一个合适的个人意见动力学模型是理论探索的基石。许多意见形成模型，基于线性加权平均机制^{[11]-[12][13][14][15]}，这是 DeGroot 在文献^[11]中最初阐述的概念。DeGroot 模型描绘了一种动态，当个体参与意见分享时，在特定主题上达成共识。在 DeGroot 模型中，一个人在下一时刻的观念是由他/她的当前立场和他/她的邻居的当前观念的加权平均决定的。研究人员发现，在某些特殊的网络中，一个群体可以达成意见共识，即使每个人只与他们的近邻互动^{[11][16][17]}。由于加权平均机制隐含地假设两种意见之间的吸引力与它们彼此之间的距离成正比，因此在这种温和的假设下产生了共识，这在许多实际情况下是不现实的结果。为了克服这种限制，最近的兴趣转向了证明其他观察到的行为，如分歧，极化和冲突的模型^{[18]-[19][20][21][22][23][24]}。

另一个简单而广泛使用的模型是 Friedkin-Johnsen(F-J)模型，由文献^[12]引入。F-J 模型基于 DeGroot 模型，包含了一个反映个人意愿的因素-他们坚持自己原始观念的倾向。在 DeGroot 模型中，每个人都完全接受社会影响，这很容易导致一致。在 F-J 模型中，在观念的每次迭代中，执拗的代理人总是考虑自己的初始意见。这导致了一个更复杂的动态，在每个时间步，个人的意见基于两个主要驱动因素进行更新：他们邻居的意见和他们自己最初的意见（偏见）。在这种情况下，达成一致是非常罕见的。事实上，如果社会网络中有执拗的个人，社会群体往往会形成多个集群^{[25][26]}。原始的 F-J 模型讨论的是单个主题，网络的影响矩阵是常数和行随机的。

随后，人们对 F-J 模型进行了一些扩展，其中一些扩展考虑了多个主题^[27]或影响矩阵是行随机但随时间变化的情况^{[14][28]}等。为了反映真实世界的网络，重点放在开发越来越复杂的模型，以捕捉个体互动时可能涉及的各种心理社会特征。Hegselmann-Krause(H-K)模型结合了有限信心的概念来捕捉同质性，这是一种个

体只与拥有相似观念和价值观的人互动的现象^{[20][29][30]}。Altafini 模型通过引入负侧权重来模拟个体之间的对抗或竞争互动（可能源于不信任）^{[15][31][32][33]}。

最近，在文献[14]中，F-J 模型的多维扩展被提出来描述同时讨论一组逻辑上相互依赖的主题的个体网络。即，一个人对一个主题 M 的立场可能会影响他/她对一个主题 P 的立场，因为他/她对这两个主题之间的约束或关系的看法。这种相互依赖性被一个“逻辑矩阵”捕捉到。这种相互依赖性可以极大地改变个体对一组主题的最终意见价值^[35]。对于所有个体都具有相同逻辑矩阵的网络，利用文献[14]中的代数条件和文献[36]中的图论条件给出了一个完全稳定性结果。文献[35]中考虑了异构逻辑矩阵。其中至少有一个人需要表现出诚实。本文将考虑多维模型的推广，在信仰系统的意见演变的签署社会网络与执拗的个人。

在群体互动和讨论的环境中，个体往往不能完全坦诚地分享自己的内心观念，有时还会表达与内心观念不同的意见，导致私人意见与表达意见出现偏差的原因是复杂多样的。这可能与偏好伪造^[37]或印象管理^[38]有关。所罗门·阿希的线性实验^[39]是一系列经典的社会心理学研究。通过要求参与者在群体中比较线条长度，这些实验揭示了即使在明显的事实面前，个体也可能被群体压力驱使而顺从，放弃自己正确的判断。此外，群体的压力会扭曲个人的判断。

研究调查表明，超过三分之一的刑事陪审团陪审员私下持有相反的立场，以最终陪审团的决定，关于有罪或无罪的被告^{[40][41]}。私人观念和表达观念之间的偏差的一个共同的潜在主题是，个人往往感到压力，以符合一个感知或强加的社会规范在群体内时，他们正在互动。因此，个人和表达想法之间的差异出现，这种差异的长期存在可能会导致一些负面的社会影响^[42]。最近，有人提出了个体的私人观念和表达观念动态模型来探索差异背后的原因^{[42]-[43][44][45][46]}。在文献[42]中，该模型首次被提出来研究私人观念和表达观念之间的差异。

文献[42]的作者指出，当网络是强连接时，这种差异几乎是不可避免的。在文献[43]中，对私人观念和表达观念模型中的弹性共识进行了研究，所得结果表明，个体只受那些与自己表达的观念或自己的私人观念足够接近的表达的观念的影响。因此，我们在进一步研究中面临的主要困难如下：I）如何建立一个更适用的模型，描述社交网络中的群体行为特征，包括心理因素（信念系统），互动

模式（合作竞争）和决策过程（私人意见）。II）如何发展一种有效的分析方法来研究在适度的网络连接要求下建立的意见动态系统？

在此基础上，本文构建了一个实用的意见动力学模型，以准确描述人们的心理因素、交互模式和决策过程，并在较温和的网络连通性假设下分析了该模型的动态特性。

1.3 主要研究内容和论文结构

本文的主要研究内容如下：首先，我们拓展了经典的 DeGroot 模型和 F-J 模型，提出了一个实用的意见动力学模型来研究意见演化的规律，该模型充分描述了社会和心理因素（异质的信仰体系，顺应当地舆论的压力），互动模式（合作与竞争）和决策过程（同时考虑 PAEO）。所建立的模型是文献[42][47][48][49]中模型的扩展，这些文献忽略了异质信念。其次对于既有合作关系又有竞争关系的社交网络，证明了如果不存在开放性个体或存在开放性个体，只要他们的意见收敛，那么所有个体的意见都将指数快速收敛到一个稳定状态，这推广了文献[42][48]中的相应结果，文献[50]对于只有合作关系的社交网络。在文献[42]中假设网络拓扑是强连通的，这在本文中不是必需的。最后通过对构建的模型的分析，证明了顽强存在、服从压力和异质信念体系共同导致了 PAEO 之间的差异，从而进一步解释了构建的模型与最终 PAEO 差异之间的关系。

我们利用数值仿真对所得结果进行了验证。

本文结构安排如下：

第一章：绪论。本章节主要围绕研究的背景，意义，国内外的研究现状进行了深入解读，并明确了本次研究的核心内容和论文架构。

第二章：预备知识。本章节重点探讨了本文所需要的数学符号和相关的专业名词，同时还详细介绍了常用的三个模型 DeGroot 模型，F-J 模型和私人观念和表达观念模型。

第三章：在本章节中，我们构建了一个新颖的观念动力学模型，该模型同时考虑个体的私人观念，执拗程度和话题依赖。我们对该模型不具有开放性个体的情况下进行了深入分析，得到了模型能够收敛的必要条件，并通过数值模拟证实了我们的观念和结论。

第四章: 在这一章节中, 我们基于上述模型, 考虑了该模型具有开放性个体的情况下, 模型的收敛条件, 并通过数值仿真验证了我们所得的结论是有效的。

第五章: 总结与展望。

第2章 预备知识

2.1 符号

在本文中， $\mathbb{R}^{n \times m}$ 和 $\mathbb{R}^n$ 分别代表 $n \times m$ 矩阵和 n 维向量空间， $\mathbf{1}_n \in \mathbb{R}^n, \mathbf{0}_n \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbf{1}_{n \times m} \in \mathbb{R}^{n \times m}, \mathbf{0}_{n \times m} \in \mathbb{R}^{n \times m}$)表示所有元素分别为1和0列向量（矩阵）。对于 $x = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T \in \mathbb{R}^N$ ， $x_{\max(\min)} = \max(\min) \{x_i, i = 1, 2, \dots, N\}$ 。对于矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ，我们将第 i 行 j 列的元素表示为 a_{ij} 。如果 A 是非负的，即所有 $a_{ij} \geq 0$ ，则记为 $A \geq 0 (A > 0)$ 。 $|A|$ 表示 a_{ij} 取绝对值。 $\rho(A)$ 表示矩阵 A 的谱半径。如果方阵 A 满足 $a_{ij} \geq 0, \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$ ，则称矩阵 A 是行随机的。 $\text{Det}(A)$ 表示矩阵 A 的行列式。 I_N 表示 N 阶单位矩阵。我们用 $\text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_N\}$ 表示对角矩阵（分块对角矩阵）。两个矩阵 $W_1 = [w_{ij,1}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 和 $W_2 = [w_{ij,2}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 被成为同型的，用 $W_1 \sim W_2$ 表示，当且仅当它们的对应元素具有相同的符号。符号 $\otimes$ 代表克罗内克积。

2.2 图论

在本段中，我们简洁地介绍和图论相关的一些定义。给定有向图 $\mathcal{G}[A] = (\mathcal{V}, \mathcal{E}[A], A)$ ，其中 $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ 为节点集， $\mathcal{E}[A] \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 为边集， $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为加权邻接矩阵。 $(v_i, v_j) \in \mathcal{E}[A]$ 表示从节点 i 到节点 j 有一条边。当且仅当 $a_{ji} > 0$ 时， $e_{ij} = (v_i, v_j)$ 在有序边集 $\mathcal{E}[A] \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 中。 e_{ii} 表示自环，即允许 (v_i, v_i) 在 $\mathcal{E}$ 中，本文所涉及的图的每个节点都有自环。 $\mathcal{N}_i = \{v_j : (v_j, v_i) \in \mathcal{E}\}$ 称为 v_i 的邻居集。边的序列 $(v_i, v_{i+1}), \dots, (v_{i+k-1}, v_{i+k})$ 称为从 v_i 到 v_{i+k} 的有向路径，其中序列中的每个节点都是唯一的（除了开始和结束节点外，这些节点都不允许重复）。如果 $v_i = v_{i+k}$ ，这条路径称为一个环， k 称为循环的长度。如果不存在 $k > 1$ 的整数，可以除一个图的每一个环的长度，那么我们称这个图为非周期的。如果存在一个节点 i ，使得从节点 i 到 $\mathcal{G}[W]$ 中的任何其他节点都有一条路径，那么我们说图 $\mathcal{G}[W]$ 包含一棵生成树，节点 i 称为根节点。图 $\mathcal{G}[W]$ 是强连通的当且仅当存在从每个节点到其他每个节点都有路径，或者等价地，矩阵 W 是不可约的。如果存在规范变换矩阵 $\Gamma = \text{diag}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ 使得 $\Gamma W \Gamma \geq 0$ ，其中 $\tau_i \in \{1, -1\}$ ，则称图 $\mathcal{G}[W]$ 结构平衡。

2.3 DeGroot 模型简介

DeGroot 模型是观念动力学的基本模型, 在 1974 年被 DeGroot 提出, DeGroot 模型描述的是一群人在社会网络上就特定话题交换观念的过程, 由于个体进行反复互动, 从而使观念达成一致的过程。在 DeGroot 模型中, 个体的观念是由个体和其邻居在前一时刻的观念的加权平均值决定的。在由 n 个个体组成的社会网络 $G(W)=(V,E)$ 中, $x_i(t)$ 表示个体 i 在时刻 t 的观念, 其中 $t \in N$, 具体表示为

$$x_i(t+1) = \sum_{j=1}^n w_{ij} x_j(t), \quad (2.1)$$

其中社会网络对应的邻接矩阵 W 中的元素为 w_{ij} , 它表示个体的耦合关系, 如果 $w_{ij} > 0$, 则在每一次的迭代过程中, 个体 i 可以影响到个体 j , w_{ij} 越大, 个体 j 对个体 i 的影响越大。令 $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T \in \mathbb{R}^n$ 表示在时刻 t 时, n 个个体在某一特定话题上的观念。我们将系统(2.1)写成更加紧凑的形式:

$$x(t+1) = Wx(t), \quad (2.2)$$

其中, W 是一个行随机矩阵, 即行和为1的非负矩阵, 体现个体间的相互影响关系。 w_{ij} 表示个体 j 对个体 i 的影响权重, 在 DeGroot 模型框架下, 对于系统(2.2)的收敛性和一致性, 可以得到以下相关结果:

定义 2.3.1 (收敛性): 在 DeGroot 模型中, 若对于任意的初始观念 $x(0)$, 存在一个实数向量 $x^* \in \mathbb{R}^n$, 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = x^*$, 则称系统(2.2)是收敛的。

定义 2.3.2 (一致性): 若对于任意的初始观念 $x(0)$, 存在实数 α 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \alpha 1_n$, 则称系统(2.2)达成一致。

很明显, 一致性是收敛的一种特殊情况, 也就是说, 只有 x^* 的 n 个分量都收敛于相同的值 α 时才能达成一致。由系统(2.1)和(2.2)可知, 社会影响网络 G 上的观念演变过程为离散时间齐次 Markov 链(discrete-time homogeneous Markov chain), 随机矩阵 W 是状态转移矩阵。在文献[43]中, 作者给出了 DeGroot 模型达到一致的充分必要条件。

2.4 F-J 模型简介

在 DeGroot 模型中, 每个个体根据自己和邻居当前观念的加权平均值来更新自己的观念, 也就是说, 个体对于社会网络来说是开放的。但是, 在现实世界中, 经过广泛的谈论, 也经常出现持续的分歧。为了解释这种持续的分歧, 1999 年, Friedkin 和 Johnsen 提出了 F-J 模型^[12], 引入了执拗个体的概念。F-J 模型考虑了执拗个体的存在, 他们会在一定程度上坚持自己最初的观点。由于执拗个体的存在, F-J 模型中每个个体的观念演变如下:

$$x_i(k+1) = \xi_i \sum_{j=1}^n w_{ij} x_j(k) + (1-\xi_i)x_i(0), \quad (2.3)$$

其中 $x_i(k) \in \mathbb{R}$, $\xi_i \in [0, 1]$, 在这里 $x_i(k)$ 表示个体 i 的观念, ξ_i 表示个体 i 对人际影响的敏感度。自然地, $1-\xi_i$ 代表个体 i 对其初始观念的执拗程度。当 $0 < \xi_i < 1$ 时, 个体 i 属于执拗个体, 会在一定程度上受到他人观念的影响, 同时也保留部分对自身初始观念的坚持。当 $\xi_i = 0$ 时, 个体 i 属于完全执拗个体, 坚持自己的初始观念, 不受他人的影响。当 $\xi_i = 1$ 时, 个体 i 称为非执拗个体, 很容易被别人影响。进一步地, 将上述系统(2.3)以更紧凑的矩阵形式表示为:

$$x(k+1) = \Xi W x(k) + (I - \Xi)x(0), \quad (2.4)$$

其中 $\Xi = \text{diag}(\xi)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T \in \mathbb{R}^n$, W 是描述人际影响网络结构的行随机矩阵。在 DeGroot 模型中, 每个个体都完全接受社会影响, 这很有可能会使观念达成一致, 但是, 在 F-J 模型中, 在每次观念迭代的时候, 执拗个体总是会考虑自己的初始意见。因此, F-J 模型很难达成共识。近几十年来, 随着多智能体系统和观念动力学模型的研究深入, F-J 模型也得到了进一步的发展, 下述是 F-J 模型收敛性的相关结论:

定理 2.4.1: 若 $G(W)$ 的每一个独立强分支都不完全由非执拗节点组成的, 那么模型(2.3)收敛, 并且观念最终收敛的值为 $x^* = (I - \Xi W)^{-1}(I - \Xi)x(0)$ 。

在模型(2.3)中, 当 $\xi = 1_n$ 时, F-J 模型则恢复为经典的 DeGroot 模型, 因此 DeGroot 模型被看成是 F-J 模型的一种特殊情况。由上述结论我们可以观察到, 相较于经典的 DeGroot 模型, F-J 模型很难实现观念的一致, 因为矩阵 $(I - \Xi W)^{-1}(I - W)$ 的秩很难等于 1, 因此需要对网络中边的权重作很严格的限制。

对于难以实现观念的一致这一现象，一个合理的解释是存在执拗个体使得网络中的观念没办法进行充分的聚合。

第3章 不具有开放性个体的观念动力学模型的动力学分析

考虑到在社会网络中的某个特定的话题上,个体的私人观念和表达观念之间存在差异,本章研究了社会网络中带有私人观念和表达观念以及执拗个体的异质多维观念动力学模型。当系统中没有开放性个体时,无论社会网络是结构平衡的还是结构不平衡的,私人观念和表达观念总是以指数级的速度快速收敛到一个稳定的状态,最终的表达观念取决于个体的初始观念,并且最终的表达观念与个体初始观念都存在最终的差异。最后,通过数值仿真验证了所得结果的有效性。

3.1 模型描述

本章节,我们考虑一种带有私人观念和表达观念的异质多维观念动力学模型。在由 N 个个体组成的签名社会网络上,记为 $\mathcal{I}=\{1,2,\dots,N\}$, 设 $y_i(t) \in \mathbb{R}^m$, $\hat{y}_i(t) \in \mathbb{R}^m$ 分别表示个体 i 的私人观念和表达观念,其中 $t \in T = \{0,1,2,3,\dots\}$, $i \in \mathcal{I} = \{1,2,3,\dots,N\}$ 。 y_i 被认为是个人真实或真实的意见。由于一些原因,个人可能无法表达他或她的真实意见。例如,讨论政治敏感话题,社会道德和伦理,或宗教信仰。所以 $y_i(t)$ 和 $\hat{y}_i(t)$ 通常是不同的。在我们的模型中,个体在服从群体意见的压力下形成自己的观念。他们通过以 $\mathcal{G}[M]$ 为代表的影响力网络进行沟通和交换自己表达的观念,并根据以 $\mathcal{G}[M]$ 为代表的影响力网络更新自己的私人观念。个体 i 的私人观念 $y_i(t)$ 演化为:

$$y_i(t+1) = \lambda_i w_{ii} C_i y_i(t) + \lambda_i \sum_{j \neq i}^N w_{ij} \hat{y}_j(t) + (1 - \lambda_i) y_i(0), \quad (3.1)$$

表达的意见 $\hat{y}_i(t)$ 由以下方程确定:

$$\hat{y}_i(t) = \phi_i C_i y_i(t) + (1 - \phi_i) C_i \sum_{j=1}^N m_{ij} \hat{y}_j(t-1). \quad (3.2)$$

更新意见的过程如图 3-1 所示。



图 3-1 个体更新私人观念和表达观念的过程。

接下来，我们将对模型的参数进行解释。常数 $\lambda_i \in [0,1]$ 表示个体 i 对人际影响的易感性。如果 $\lambda_i < 1$ ，则个体 i 为执拗个体。特别是当 $\lambda_i = 0$ 时，个体 i 被认为是一个完全执拗的个体，即个体 i 拒绝与其他个体交换信息。因此，完全执拗的个人的意见是不会改变的。如果一个人既不执拗，也不受执拗个体的影响，我们称他为开放性个体^[14]。

耦合矩阵 $W = [w_{ij}]$ ($M = [m_{ij}]$) 表示通信拓扑结构。如文献[31]所述， $w_{ij} > 0$ ($m_{ij} > 0$) 表示合作关系， $w_{ij} < 0$ ($m_{ij} < 0$) 表示竞争关系。在本文中，我们假设 $|W|$ 和 $|M|$ 是行随机的。考虑到当个体 i 更新私人和表达的想法时，个体 i 和 j 之间的关系没有改变，但可能存在一定程度的信任（对抗）差异，即 w_{ij} 和 m_{ij} 具有相同的符号，但可能大小不同。所以我们假设 $\text{sgn}(w_{ij}) = \text{sgn}(m_{ij})$ ，其中 $\text{sgn}(\bullet)$ 是符号函数。在这种情况下，矩阵 W 和 M （图 $\mathcal{G}[W]$ 和 $\mathcal{G}[M]$ ）被认为是齐次的，表示 $W \approx M$ 或 $\mathcal{G}[W] \approx \mathcal{G}[M]$ 。式(3.2)中，将 $\sum_{j=1}^n m_{ij} \hat{y}_j(t-1)$ 视为局部民意，它捕捉了个体 i 在 $t-1$ 时刻需要服从的群体规范。一个自然的选择是 $m_{ij} = \text{sgn}(w_{ij}) |\mathcal{N}_i|^{-1}$ 。

常数 $\phi_i \in (0,1)$ 表示个体 i 对符合当地舆论压力的适应能力。如果对所有 $i \in \mathcal{I}$ 设初始表达意见 $\hat{y}_i(0) = y_i(0)$ ，则系统(1)表明 $y_i(t)$ 依赖于 $y_i(0)$ 。这意味着在初始值的温和假设下，最终的私人意见实际上依赖于初始值 $y_i(0)$ 。随后的结果表明，在一些温和的假设下，对于任何最初表达的意见，最终的私人观念和表达观念模型仅取决于最初的私人意见。

$C_i = [c_{pq,i}] \in R^{m \times m}$ 被称为逻辑矩阵^[49]，它表达了信仰体系中 m 个主题之间的逻辑相互依赖关系，反映了个体对所接收信息的内省过程。正如文献[50]所指出的，不同个体之间的信念系统可能存在显著差异，因此，在我们的模型中，我们假设不同个体的信念系统也是不同的，即逻辑矩阵是异质的。 $c_{pq,i}$ 是矩阵 C_i 的第 p 行第 q 列的条目，表示个体 i 在主题 p 和 q 之间的逻辑依赖关系。与文献^{[49][51]}类似，要求 C_i 的对角线条目满足 $c_{pp,i} > 0$ ，对于所有 $p \in \mathcal{T} = \{1, 2, \dots, m\}, i \in \mathcal{I}$ 。

如果对于某个 $p, q \in \mathcal{T}$ 存在个体 $i \neq j$ ，使得 $c_{pq,i} c_{pq,j} < 0$ ，其中 $c_{pq,i}$ 和 $c_{pq,j}$ 分别为 C_i 和 C_j 的非零项，则我们称系统(3.1)和(3.2)包含主题 $p \in \mathcal{T}$ ^[51] 上具有竞争相互依赖(CLI)的个体。

3.2 假设、备注及引理

假设 3.2.1^[49]：对所有 $i \in \mathcal{I}$ ， $g[C_i]$ 是强连通的， $|C_i|$ 是具有正对角元素的行随机的。

假设 3.2.2^[49]：对于每一个 $i, j \in \mathcal{I}$ ，都有 $C_i \sim C_j$ 。

备注 3.2.1：我们的模型捕获了更多的社会和心理因素，如执拗 (λ_i)，合作和竞争 ($w_{ij} > 0$ 或 $w_{ij} < 0$)，认知差异 (异质逻辑矩阵 C_i)，私人观念和表达观念之间的差异 ($y_i(t) \neq \hat{y}_i(t)$) 和符合当地民意的压力 ϕ_i ，这使得应用范围更广。事实上，已有的许多意见动态模型都是我们模型的特例。例如，如果我们不考虑竞争 ($W \geq 0, M \geq 0$) 和认知差异 (对于所有的 $i, j \in \mathcal{T}$ ， $C_i = C_j$)，我们的模型将成为文献[49]中讨论的模型。如果我们不考虑竞争 ($W \geq 0, M \geq 0$)，假设只有一个话题在社交网络上传播 (对于所有 $i \in \mathcal{T}$ ， $C_i = 1$)，我们的模型将成为文献[42]中讨论的模型。对于所有 $i \in \mathcal{T}$ ，当 $y_i(t) = \hat{y}_i(t)$ 时，我们的模型将坍缩为文献[14][51]

中讨论的模型；令 $\lambda_i = 1, C_i = 1, y_i(t) = \hat{y}_i(t)$ ，对于所有 $i \in \mathcal{I}$ ，我们的模型将成为带符号的 DeGroot 模型^{[31][52]}。总之，我们的模型包括许多现有的模型，将有更广泛的应用范围。这也意味着我们模型的复杂性相对较高，这无疑增加了我们分析的难度。

为了获得我们的结果，我们还需要以下引理。

引理 3.2.1^[53]：假设 $A, B, C, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ，如果 $A, D, (A - BD^{-1}C)$ 是非奇异的， $(D - CA^{-1}B)$ 也是非奇异的，则

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & -A^{-1}BD \\ -D^{-1}CA & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix},$$

其中 $A = (A - BD^{-1}C)^{-1}$ ， $D = (D - CA^{-1}B)^{-1}$ 。

引理 3.2.2^[54]：对于任意 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ， $\rho(A) \leq \rho(|A|)$ 。对于任意非负矩阵 $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ，若 $B - A \geq 0$ ，则 $\rho(A) \leq \rho(B)$ 。

引理 3.2.3^{[32][55]}：假设矩阵 A 的对角线元素都大于 0。矩阵 $|A|$ 是行随机的，有符号图 $\mathcal{G}[A]$ 有生成树。如果所有根节点组成的子图结构不平衡，则 $\rho(A) < 1$ 。

引理 3.2.4^[56]：设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 对角线项为正，且矩阵 A 是行随机的。如果图 $\mathcal{G}[A]$ 包含生成树，则 1 为 A 唯一的最大模特征值，其代数多重根为 1。此外， $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = I_n \omega$ ， $\omega = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n]$ 是特征值 1 所对应的左特征向量，满足 $\omega_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ 。如果 $\mathcal{G}[A]$ 的节点 ω_i 是根节点，则 $\omega_i > 0$ ，否则 $\omega_i = 0$ 。

3.3 主要结论

为了得到本文的主要结果，我们以更紧凑的形式重写了系统(3.1)和(3.2)。设 $y_i(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_N(t)]^T$ 和 $\hat{y}_i(t) = [\hat{y}_1(t), \hat{y}_2(t), \dots, \hat{y}_N(t)]^T$ 分别为社会网络中 N 个个体的私人观念和表达观念的列向量。影响矩阵 W 分解为 $W = \widetilde{W} + \widehat{W}$ ，其中 $\widetilde{W} = \text{diag}[w_{11}, w_{22}, \dots, w_{NN}]$ ， $\widetilde{w}_{ii} = w_{ii}$ ，令 $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N]$ 和 $\Phi = \text{diag}[\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N]$ ，将 $\hat{y}_i(t)$ 从系统(3.2)带入系统(3.1)，我们可以得到：

$$\begin{aligned}
 y_i(t+1) = & \lambda_i w_{ii} C_i y_i(t) + \lambda_i \sum_{j \neq i}^n w_{ij} \phi_j C_j y_j(t) + (1-\lambda_i) y_i(0) \\
 & + \lambda_i \sum_{j \neq i}^n w_{ij} (1-\phi_j) C_j \sum_{k \in \mathcal{N}_j} m_{jk} \hat{y}_k(t-1).
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

根据等式(3.2)和等式(3.3)，我们可以得到：

$$\begin{bmatrix} y(t+1) \\ \hat{y}(t) \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} y(t) \\ \hat{y}(t-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [(I_n - \Lambda) \otimes I_m] y(0) \\ 0_{Nm} \end{bmatrix}. \tag{3.4}$$

其中 Q 的表示如下：

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}. \tag{3.5}$$

矩阵 Q 中的元素如下：

$$\begin{aligned}
 Q_{11} &= [(\Lambda \tilde{W}) \otimes I_m] C + [(\Lambda \hat{W} \Phi) \otimes I_m] C, \\
 Q_{12} &= [(\Lambda \tilde{W}) \otimes I_m] C [(I_N - \Phi) M] \otimes I_m, \\
 Q_{21} &= C [\Phi \otimes I_m], \\
 Q_{22} &= C [(I_N - \Phi) M] \otimes I_m.
 \end{aligned}$$

为了更好地理解图 $\mathcal{G}[W]$ ， $\mathcal{G}[M]$ 和 $\mathcal{G}[Q]$ 之间的关系，我们还需要以下引理。

引理 3.3.1^[51]：假设满足假设 3.2.2，对于任意一个对角项为正的矩阵 $\mathfrak{M} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ，有如下结论：

1) 如果系统(3.1)和(3.2)中没有具有 CLI 的个体，则图 $\mathcal{G}(C(\mathfrak{M} \otimes I_m))$ 是结构平衡的，当且仅当图 $\mathcal{G}[\mathfrak{M}]$ 和图 $\mathcal{G}[C_i]$ 是结构平衡的。

2) 如果系统(3.1)和(3.2)中存在具有 CLI 的个体，且假设 3.2.1 满足，图 $\mathcal{G}[\mathfrak{M}]$ 包含生成树，则 $\mathcal{G}(C(\mathfrak{M} \otimes I_m))$ 是结构不平衡的

引理 3.3.2：当假设 3.2.2 被满足，下面的结论成立。

1) 如果系统(3.1)和(3.2)中没有具有 CLI 的个体，则图 $\mathcal{G}[Q]$ 当且仅当图 $\mathcal{G}[M]$ 和图 $\mathcal{G}[C_i]$ 是结构平衡的。

2) 如果系统(3.1)和(3.2)中存在具有 CLI 的个体，且假设 3.2.1 满足，图 $\mathcal{G}[M]$ 包含生成树，则 $\mathcal{G}[Q]$ 是结构不平衡的。

证明：我们首先证明引理的第一部分。

充分性 由于系统中不存在具有 CLI 的个体，当 $\mathcal{G}[M]$ 和 $\mathcal{G}[C_i]$ 结构平衡时，

对于所有 $i \in \mathcal{I}$ ，存在两个规范变换矩阵 Γ_1 和 Γ_2 ，使得 $\Gamma_1 M \Gamma_1 \geq 0, \Gamma_1 C \Gamma_1 \geq 0$ 和 $\Gamma_2 C \Gamma_2 \geq 0$ 。

我们可以得到 $(I_N \otimes \Gamma_2)C(I_N \otimes \Gamma_2) = (\Gamma_1 \otimes \Gamma_2)C(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2) \geq 0$ 。注意 Λ, I_m, Φ ，是非负对角矩阵，矩阵 C 是分块对角矩阵，令 $\Gamma = \Gamma_1 \otimes \Gamma_2$ ，我们有

$$\begin{aligned} \Gamma Q_{11} \Gamma &= \Gamma[(\Lambda \tilde{W}) \otimes I_m] \Gamma \Gamma C \Gamma + \Gamma[(\Lambda \hat{W} \Phi) \otimes I_m] \Gamma \Gamma C \Gamma \\ &= [\Gamma_1(\Lambda \tilde{W} + \Lambda \hat{W} \Phi) \Gamma_1] \otimes I_m \Gamma C \Gamma \geq 0, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \Gamma Q_{12} \Gamma &= \Gamma[(\Lambda \hat{W}) \otimes I_m] \Gamma \Gamma C \Gamma [(I_N - \Phi)M] \otimes I_m \Gamma \\ &= [\Gamma_1(\Lambda \hat{W}) \Gamma_1] \otimes I_m \Gamma C \Gamma [\Gamma_1((I_N - \Phi)M) \Gamma_1] \otimes I_m \geq 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\Gamma Q_{21} \Gamma = \Gamma C \Gamma (\Phi \otimes I_m) \geq 0, \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \Gamma Q_{22} \Gamma &= \Gamma C \Gamma [(I_N - \Phi)M] \otimes I_m \Gamma \\ &= \Gamma C \Gamma [\Gamma_1((I_N - \Phi)M) \Gamma_1] \otimes I_m \geq 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

由式(3.6)-(3.9)可知 $\text{diag}[\Gamma, \Gamma] Q \text{diag}[\Gamma, \Gamma] \geq 0$ ，这意味着 Q 是结构平衡的。这表明 Q 是结构平衡的。

必要性：当 Q 是结构平衡的，很明显 Q_{22} 也是结构平衡的。根据引理 3.3.1，我们可以得到图 $\mathcal{G}[M]$ 和 $\mathcal{G}[c_i]$ 是结构平衡的。

接下来，我们将证明引理的第二部分。

注意到 Q_{22} 是 Q 的子图，根据引理 3.3.1，引理 3.3.2 后半部分的结论是清楚的。引理 3.3.2 的证明已经完成。

设

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

其中 $Q_{11} = ((\tilde{W} + \hat{W} \Phi) \otimes I_m) C$ ， $Q_{12} = (\hat{W} \otimes I_m) C [(I_N - \Phi)M] \otimes I_m$ 。图 $\mathcal{G}[W]$ 和 $\mathcal{G}[M]$ 的节点被标记为 $v_1, \dots, v_N$ 和 $v_{N+1}, \dots, v_{2N}$ 。图 $\mathcal{G}[Q]$ 的节点被标记为 $v_1^1, \dots, v_1^m, v_2^1, \dots, v_2^m, \dots, v_{2N}^1, \dots, v_{2N}^m$ 。下面的引理 3.3.3 说明了 $\mathcal{G}[W]$ 和 $\mathcal{G}[Q]$ 之间的关系，它将在引理 3.3.4 和定理 4.2.2 的证明中使用。

引理 3.3.3：假设 $\mathcal{G}[W]$ 包含一棵生成树，其根节点集为 $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ 。如果假设 3.2.1 成立，则下列结论成立：

1) 对于所有的 $i \in \mathcal{I}$, 在图 $\mathcal{G}[\mathbf{Q}]$ 中, 节点为 $v_i^1, \dots, v_i^m$ 的子图 $\mathcal{G}(w_{ii}C_i)$ 和节点为 $v_{N+i}^1, \dots, v_{N+i}^m$ 的子图都是强连通的。

2) 如果 $w_{ji} \neq 0, i \neq j$, 则对于所有 $l, \tau \in \mathbf{7}$, 子图 $\mathcal{G}[\mathbf{Q}_{11}]$ 中至少存在一条从 v_i^l 到 v_j^τ 的路径, 子图 $\mathcal{G}[\mathbf{Q}_{22}]$ 中至少存在一条从 v_{N+i}^l 到 v_{N+j}^τ 的路径。

3) 节点 $v_1^1, \dots, v_1^m, \dots, v_r^1, \dots, v_r^m$ 分别为 $\mathcal{G}[\mathbf{Q}_{11}]$ 、 $\mathcal{G}[\mathbf{Q}]$ 的根节点。

4) 节点 $v_{N+1}^1, \dots, v_{N+1}^m, \dots, v_{N+r}^1, \dots, v_{N+r}^m$ 为 $\mathcal{G}[\mathbf{Q}_{22}]$ 的根节点。若 $\mathcal{G}[\mathbf{W}]$ 结构平衡且 $2 \leq r \leq N$, 则它们也是 $\mathcal{G}[\mathbf{Q}]$ 的根节点。

证明: 由于所有 C_i 都是强连通的, 所以引理的第一个论证是明显成立的。所以我们的证明从第二个论点开始。

如果 $w_{ji} \neq 0, i \neq j$, 则子图 $\mathcal{G}[w_{ii}C_i]$ 与子图 $\mathcal{G}[w_{jj}C_j]$ 之间存在一条边。注意到子图 $\mathcal{G}[w_{ii}C_i]$ 和子图 $\mathcal{G}[w_{jj}C_j]$ 是强连通的, 这意味着对于所有 $l, \tau \in \mathbf{7}$, 子图 $\mathcal{G}[\mathbf{Q}_{11}]$ 中至少存在一条从 v_i^l 到 v_j^τ 的路径, 根据矩阵 $\mathbf{W}$ 与矩阵 $\mathbf{M}$ 之间的关系, 对子图 $\mathcal{G}[\mathbf{Q}_{22}]$ 也可以得出类似的结论。因此, 引理的第二个论证成立。

接下来, 我们将证明引理的第三个论点。首先, 我们将演示节点 $v_1^1, \dots, v_1^m, \dots, v_r^1, \dots, v_r^m$ 为 $\mathcal{G}[\mathbf{Q}_{11}]$ 的根节点。因为节点 $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ 为 $\mathcal{G}[\mathbf{W}]$ 的根节点, 对于任意 $i \in \{1, 2, \dots, r\}, j \in \{1, 2, \dots, N\}$, 至少存在路径 $v_i, v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_j$ 从节点 v_i 到节点 v_j 。这意味着 $w_{ji} \neq 0$ 。根据第二个论证, 对于所有 $l, \tau \in \mathbf{7}$, 子图 $\mathcal{G}[\mathbf{Q}_{11}]$ 中至少存在一条从 v_i^l 到 v_j^τ 的路径。同样, 由于 $w_{i_1 i_2} \neq 0, i_1 \in \{1, 2, \dots, r\}$, 对于所有 $l, \tau \in \mathbf{7}$, 至少存在一条从 $v_{i_1}^l$ 到 $v_{i_2}^\tau$ 的路径, 即对于所有 $l, \tau \in \mathbf{7}$, 至少存在一条从 v_i^l 到 $v_{i_2}^\tau$ 的路径。重复上述运算, 我们可以得出, 对于所有 $l, \tau \in \mathbf{7}$, 至少存在一条从 v_i^l 到 v_i^τ 的路径, 因此节点 v_i^l 是所有 $l \in \mathbf{7}, i \in \{1, 2, \dots, r\}$ 的 $\mathcal{G}[\mathbf{Q}_{11}]$ 的根节点。注意 $\mathbf{Q}_{21} = C(\Phi \otimes I_m)$ 的对角线元素都大于 0。这意味着在图 $\mathcal{G}[\mathbf{Q}]$ 中, 对于 $i \in \mathcal{I}$ 和 $\tau \in \mathbf{7}$, 节点 v_i^l 和 v_{N+i}^τ 之间存在一条边。因此对于所有 $l \in k, i \in \{1, 2, \dots, r\}$, 节点 v_i^l 也是 $\mathcal{G}[\mathbf{Q}]$ 的根节点。

最后, 我们来证明引理的第四个论证。

由于 $M \approx W$ 且 $0 < \phi_i < 1$, 故 $\mathcal{G}[\mathbf{Q}_{11}] \approx \mathcal{G}[\mathbf{Q}_{22}]$ 。根据引理的第三个论点, 我们可以很容易地得到节点 $v_{N+1}^1, \dots, v_{N+1}^m, \dots, v_{N+r}^1, \dots, v_{N+r}^m$ 为 $\mathcal{G}[\mathbf{Q}_{22}]$ 的根节点。接下来, 我们将证明当 $\mathcal{G}[W]$ 结构平衡且 $2 \leq r \leq N$ 时, $v_{N+1}^1, \dots, v_{N+1}^m, \dots, v_{N+r}^1, \dots, v_{N+r}^m$ 也是 $\mathcal{G}[\mathbf{Q}]$ 的根节点。

结合引理的第三个结论, 为了达到这个目的, 我们只需要指出存在一个节点 v_{N+i}' , 使得对于少数 $i, j \in \{1, 2, \dots, r\}, \iota, \tau \in \mathbb{7}$, 有一条从 v_{N+i}' 到 v_j^τ 的边。

由于 $\mathcal{G}[W]$ 的根节点集为 $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ 。 $\widehat{W}$, M , C , Φ 可以写成下面的形式:

$$\widehat{W} = \begin{bmatrix} \widehat{W}_{11} & \mathbf{0}_{r \times (N-r)} \\ \widehat{W}_{21} & \widehat{W}_{22} \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} M_{11} & \mathbf{0}_{r \times (N-r)} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} C_{11} & \mathbf{0}_{r \times (N-r)} \\ \mathbf{0}_{r \times (N-r)} & C_{22} \end{bmatrix},$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \mathbf{0}_{r \times (N-r)} \\ \mathbf{0}_{r \times (N-r)} & \Phi_{22} \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

其中 $\mathcal{G}[W_{11}]$ 和 $\mathcal{G}[M_{11}]$ 是强连通的。

经过简单的计算, 可以得到

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathfrak{U} & \mathfrak{q} \\ \# & \S \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

式中, $\mathfrak{U} = (\widehat{W}_{11} \otimes I_m)C_{11}(((I_r - \Phi_{11})M_{11}) \otimes I_m)$ 和 $\mathfrak{q}, \#, \S$ 是大小合适的矩阵。

接下来, 我们将证明 $\mathfrak{U} \neq \mathbf{0}_{rm \times rm}$ 。由于 $\mathcal{G}[\widehat{W}_{11}]$ 是结构平衡的, 存在一个规范变换矩阵 Γ_3 , 使得 $\Gamma_3 \widehat{W}_{11} \Gamma_3 \geq 0$ 。此时, 我们有

$$\begin{aligned} (\Gamma_3 \otimes I_m) \mathfrak{U} (\Gamma_3 \otimes I_m) &= (\Gamma_3 \otimes I_m) (\widehat{W}_{11} \otimes I_m) C_{11} \\ &\quad (((I_r - \Phi_{11})M_{11}) \otimes I_m) (\Gamma_3 \otimes I_m) \\ &= (\Gamma_3 \otimes I_m) (\widehat{W}_{11} \otimes I_m) (\Gamma_3 \otimes I_m) (\Gamma_3 \otimes I_m) C_{11} \\ &\quad (\Gamma_3 \otimes I_m) (\Gamma_3 \otimes I_m) (((I_r - \Phi_{11})M_{11}) \otimes I_m) (\Gamma_3 \otimes I_m) \\ &= (|\widehat{W}_{11}| \otimes I_m) C_{11} (((I_r - \Phi_{11})|M_{11}|) \otimes I_m). \end{aligned} \quad (3.13)$$

由于 $\mathcal{G}[\widehat{W}_{11}]$ 的连通性较强, $\widehat{W}_{11}$ 中存在 $w_{ij} \neq 0$ 。经过简单计算, 矩阵 $(\Gamma_3 \otimes I_m) \mathfrak{U} (\Gamma_3 \otimes I_m)$ 应包含 $\sum_{k=1}^r |w_{ik}| (1 - \phi_k) |m_{kj}| C_k$ 。

注意此时 $|w_{ij}| > 0$, $|m_{jj}| > 0$ 和矩阵 C_k 的对角线元素都是大于 0 的, 可以得到

$\sum_{k=1}^r |w_{ik}| (1-\phi_k) |m_{kj}| C_k \neq 0$, 即 $\mathfrak{U} \neq 0$ 。这意味着存在一个节点 v'_{N+i} , 使得对于少数的 $i, j \in \{1, 2, \dots, r\}, \iota, \tau \in \mathbb{T}$, 有一条从 v'_{N+i} 到 v'_j 的边。这样, 我们就完成了此引理的证明。

引理 3.3.4: 假定假设 3.2.1 成立。如果系统(3.1)和(3.2)中不存在开放性个体, 则 $\rho(|Q|) < 1, \rho(Q) < 1, \rho(|Q_{11}|) < 1, \rho(Q_{11}) < 1, \rho(|Q_{22}|) < 1, \rho(Q_{22}) < 1$ 。

证明: $\mathcal{G}[|Q|]$ 中的节点标记为 $N_1^1, N_1^2, \dots, N_1^m, N_2^1, \dots, N_2^m, \dots, N_{2N}^1, \dots, N_{2N}^m$ 。如果 $|Q|$ 的 N_i^j -th 行的行和小于 1, 我们称节点 N_i^j 为执拗个体, 其中 $i \in \{1, 2, \dots, 2N\}, \iota \in \mathbb{T}$ (在系统(3.1)中, 如果个体 i 是执拗个体, 则矩阵 $\Lambda|W|$ 的第 i 行的行和小于 1。这里, 我们将 $\mathcal{G}[|Q|]$ 作为一个社会网络的拓扑结构, 如果矩阵 $|Q|$ 的第 i 行和小于 1, 我们也将第 i 个个体称为执拗个体。类似地, 在这个证明中也使用了术语“开放性个体”。使用它们是为了方便以后描述问题)。因此,

$$\begin{aligned}
 \|[Q_{11}, Q_{12}]\mathbf{1}_{2Nm} &= |Q_{11}|\mathbf{1}_{Nm} + |Q_{12}|\mathbf{1}_{Nm} \\
 &\leq [(\Lambda\widetilde{W}) \otimes I_m]C\mathbf{1}_{Nm} + [(\Lambda|\widehat{W}| \Phi) \otimes I_m]C\mathbf{1}_{Nm} \\
 &\quad + [(\Lambda|\widehat{W}|) \otimes I_m]C[(\mathbf{1}_N - \Phi)|M| \otimes I_m]\mathbf{1}_{Nm} \\
 &= [(\Lambda\widetilde{W}) \otimes I_m]\mathbf{1}_{Nm} + [(\Lambda|\widehat{W}| \Phi) \otimes I_m]\mathbf{1}_{Nm} \\
 &\quad + [(\Lambda|\widehat{W}|) \otimes I_m]C[(M \otimes I_m - \Phi|M| \otimes I_m)\mathbf{1}_{Nm} \\
 &= [(\Lambda\widetilde{W}) \otimes I_m]\mathbf{1}_{Nm} + [(\Lambda|\widehat{W}| \Phi) \otimes I_m]\mathbf{1}_{Nm} \\
 &\quad + [(\Lambda|\widehat{W}|) \otimes I_m]C[(M \otimes I_m)\mathbf{1}_{Nm} \\
 &\quad - (\Lambda|\widehat{W}|) \otimes I_m]C[(\Phi|M| \otimes I_m)\mathbf{1}_{Nm} \\
 &= [(\Lambda\widetilde{W}) \otimes I_m]\mathbf{1}_{Nm} + [(\Lambda|\widehat{W}| \Phi) \otimes I_m]\mathbf{1}_{Nm} \\
 &\quad + [(\Lambda|\widehat{W}|) \otimes I_m]C\mathbf{1}_{Nm} - [(\Lambda|\widehat{W}|) \otimes I_m]C[(\Phi \otimes I_m)\mathbf{1}_{Nm} \\
 &= [(\Lambda\widetilde{W}) \otimes I_m]\mathbf{1}_{Nm} + [(\Lambda|\widehat{W}| \Phi) \otimes I_m]\mathbf{1}_{Nm} \\
 &\quad + [(\Lambda|\widehat{W}|) \otimes I_m]\mathbf{1}_{Nm} - [(\Lambda|\widehat{W}| \Phi) \otimes I_m]\mathbf{1}_{Nm} \\
 &= (\Lambda\widetilde{W} \otimes I_m)\mathbf{1}_{Nm} + [(\Lambda|\widehat{W}|) \otimes I_m]\mathbf{1}_{Nm} = (\Lambda \otimes I_m)\mathbf{1}_{Nm}.
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

我们可以得出, 如果个体 $i \in \mathcal{I}$ 是系统(3.1)中的执拗个体, 则个体 $N_i^j, \tau \in \mathbb{T}$

也是图 $\mathcal{G}[\mathcal{Q}]$ 中的执拗个体。

接下来，我们将证明如果个体 $i \in \mathcal{I}$ 不是系统(3.1)中的开放性个体，那么个体 $N'_i, \tau \in \mathbb{T}$ 也不是图 $\mathcal{G}[\mathcal{Q}]$ 中的开放性个体。假设个体 $j \in \mathcal{I}$ 不是系统(3.1)中的开放性个体，则在图 $\mathcal{G}[\tilde{W} + \hat{W}\Phi]$ 中至少存在一条有向路径 $\mathfrak{P}: (v_i, v_{i_1}), (v_{i_1}, v_{i_2}), \dots, (v_{i_r}, v_j)$ 满足个体 v_i 为执拗个体，其余个体为 $\mathfrak{P}$ 上的非执拗个体。于个体 v_{i_1} 和 v_{i_2} 在系统(3.1)中不是执拗个体，故 $w_{i_1 i_1} \neq 0, w_{i_2 i_2} \neq 0$ 。另一方面， $(v_{i_1}, v_{i_2}) \in \mathfrak{P}$ 则意味着 $w_{i_2 i_1} \neq 0$ 。根据引理 3.3.3 的第二个结论，对于 $\iota, \tau \in \mathbb{T}$ ，从节点 N'_{i_1} 到节点 N'_{i_2} 至少存在一条路径。同理，我们可以证明当 $\iota, \tau \in \mathbb{T}$ ，从节点 N'_{i_2} 到节点 N'_{i_3} 也至少存在一条路径，因此对于 $\iota, \tau \in \mathbb{T}$ ，从节点 N'_{i_1} 到节点 N'_{i_j} 至少存在一条路径。

另一方面，由于个体 i 是系统(3.1)中的执拗个体，因此对于 $\iota \in \mathbb{T}$ ，个体 N'_i 也是图 $\mathcal{G}[\mathcal{Q}]$ 中的执拗个体。由于 $(v_i, v_{i_1}) \in \mathfrak{P}$ ， $w_{i_1 i} \neq 0$ （即 $w_{i_1 i} C_{ii}$ 具有非零对角项）。因此，对于少数的 $\iota, \tau \in \mathbb{T}$ ，至少存在一条从节点 N'_i 到节点 N'_{i_1} 的路径。根据以上分析，如果个体 j 在系统(3.1)中不是开放个体，则个体 $N'_j, N'_j, \dots, N'_j$ （ $j \in \mathcal{I}$ ）在图 $\mathcal{G}[\mathcal{Q}]$ 中也不是开放性个体。

注意 $\mathcal{Q}_{21} = C(\Phi \otimes I_m)$ 和 $0 < \phi_i < 1$ ， $\mathcal{Q}_{21}$ 的所有对角线元素都是非零的。这意味着对于所有 $j \in \mathcal{I}$ 和 $\tau \in \mathbb{T}$ ，存在一条从 N'_j 到 N'_{N+j} 的边。综上所述，如果系统(3.1)中不存在开放性个体，则图 $\mathcal{G}[\mathcal{Q}]$ 中不存在开放性个体建立辅助矩阵。

通过简单的计算，我们可以得到

$$\begin{aligned}
 \|\mathcal{Q}_{21}, \mathcal{Q}_{22}\| \mathbf{1}_{2Nm} &= \|\mathcal{Q}_{21}\| \mathbf{1}_{Nm} + \|\mathcal{Q}_{22}\| \mathbf{1}_{Nm} \\
 &= |C|(\Phi \otimes I_m) \mathbf{1}_{Nm} + |C|(((I_N - \Phi)|M|) \otimes I_m) \mathbf{1}_{Nm} \\
 &= |C|(\Phi \otimes I_m) \mathbf{1}_{Nm} + |C|(|M| \otimes I_m - (\Phi|M|) \otimes I_m) \mathbf{1}_{Nm} \quad (3.15) \\
 &= |C|(\Phi \otimes I_m) \mathbf{1}_{Nm} + |C|(|M| \otimes I_m) \mathbf{1}_{Nm} - |C|(\Phi \otimes I_m) \mathbf{1}_{Nm} \\
 &= |C|(|M| \otimes I_m) \mathbf{1}_{Nm} = \mathbf{1}_{Nm}.
 \end{aligned}$$

然后我们建立一个辅助矩阵

$$\mathbb{F} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{Nm}^T & \mathbf{0}_{Nm}^T \\ \alpha & |Q_{11}| & |Q_{12}| \\ \mathbf{0}_{Nm} & |Q_{21}| & |Q_{22}| \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

其中 $\alpha = \mathbf{1}_{Nm} - [|Q_{11}|, |Q_{12}|] \mathbf{1}_{2Nm} = [\alpha_1^1, \dots, \alpha_1^m, \dots, \alpha_N^1, \dots, \alpha_N^m]^T$ 。由式(3.14)和式(3.15)我们可以得到 $\mathbb{F} \mathbf{1}_{2Nm+1} = \mathbf{1}_{2Nm+1}$ ，即 $\mathbb{F}$ 是行随机的。图 $\mathcal{G}[\mathbb{F}]$ 的节点标记为 $N_0, N_1^1, \dots, N_1^m, \dots, N_{2Nm}^m$ 。根据 α 的定义可知，在图 $\mathcal{G}[\mathbb{F}]$ 存在一条从节点 N_0 到每个执拗个体的边。根据以上讨论，这意味节点 N_0 是图 $\mathcal{G}[\mathbb{F}]$ 的唯一根节点。注意到 $\mathbb{F} \mathbf{1}_{2Nm+1} = \mathbf{1}_{2Nm+1}$ ，根据引理 3.2.4，1 是 $\mathbb{F}$ 的唯一最大模特征值，其代数重数为 1。

另一方面，

$$\begin{aligned} \text{Det}(\lambda I_{2Nm+1} - \mathbb{F}) &= \text{Det} \left(\begin{bmatrix} \lambda - 1 & \mathbf{0}_{2Nm}^T \\ -\tilde{\alpha} & \lambda I_{2Nm} - |Q| \end{bmatrix} \right) \\ &= (\lambda - 1) \text{Det}(\lambda I_{2Nm} - |Q|). \end{aligned} \quad (3.17)$$

这里的 $\tilde{\alpha} = [\alpha^T, \mathbf{0}_{Nm}^T]^T$ 。通过(3.17)式和上面的讨论，可以得出 $\rho(|Q|) < 1$ 的结论。根据引理 3.2.2， $\rho(Q) < 1$ 。与上面的论证类似，可以证明 $\rho(|Q_{11}|) < 1, \rho(Q_{11}) < 1$ 。此外，由 $|Q_{22}| \mathbf{1}_{Nm} = [((I_N - \Phi)|M|) \otimes |C|] \mathbf{1}_{Nm} = (I_N - \Phi) \mathbf{1}_{Nm}$ 可知 $|Q_{22}|$ 的行范数小于 1。因此， $\rho(|Q_{22}|) < 1, \rho(Q_{22}) < 1$ 。这样我们就完成了引理 3.3.4 的证明。

推论 3.3.1: 引理 3.3.4 在下列条件下仍然成立：

- I) 假定假设 3.2.1 成立。则存在至少一个执拗个体，且 $\mathcal{G}[W]$ 是强连通的；
- II) 对于所有 $p \in \mathcal{P}, i \in \mathcal{I}$ ，矩阵 C_i 的所有 $\lambda_i < 1$ 的对角线项都满足 $c_{pp,i} > 0$ 和 $|C_i|$ 是行随机的。

证明: 显然，如果 $\mathcal{G}[W]$ 是强连接的，并且系统(3.1)中存在执拗个体，则系统(3.1)中不存在开放性个体，这表明当条件 I 满足时引理 3.3.4 仍然成立。

另一方面，对于 $\lambda_i < 1$ ($i \in \mathcal{I}$) 表明所有个体 N_i' 都是执拗个体，其中 $i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{P}$ 。根据 Q_{21} 的特征， $c_{pp,i} > 0$ 表明存在从 N_i' 到 N_{N+i}' 的一条边 ($i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{P}$)，所以不是图 $\mathcal{G}[Q]$ 中的所有个体都是开放性个体，这意味着当条件 I 满足时，引理 3.3.4 仍然成立。

备注 3.3.1: 在条件 I 中，我们要求 $\mathcal{G}[C_i]$ 是强连通的。在条件 II 中，我们对

$\mathcal{G}[C_i]$ 的连通性不做任何要求。

接下来,我们将详细分析系统(3.1)和(3.2)的动态特性,并给出了系统(3.1)和(3.2)收敛性的结果。

定理 3.3.1: 在假设 3.2.1 成立的条件下,系统中不存在开放性个体,则系统(3.1)和(3.2)以指数速度收敛到

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = Hy(0), \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{y}(t) = SHy(0),$$

其中 $H = (I_{Nm} - Q_{11} - Q_{12}(I_{Nm} - Q_{22})^{-1}Q_{21})^{-1}((I_N - \Lambda) \otimes I_m)$, $S = ((I_{Nm} - Q_{22})^{-1}Q_{21})$ 。

如果 $\mathcal{G}[W]$ 和 $\mathcal{G}[C_i]$ 都是结构平衡的,则 S 、 H 、 SH 也是结构平衡的,且 $|S|$ 和 $|H|$ 是随机矩阵。

证明: 显然,系统(3.4)是一个非时变线性系统具有恒定输入 $[((I_N - \Lambda) \otimes I_m)y(0))^T, \mathbf{0}_{Nm}^T]^T$ 。当定理的条件满足时,根据引理 3.3.1,我们有 $\rho(Q) \leq 1$ 。根据线性系统理论[54]的结果,可得 $I_{2Nm} - Q$ 是非奇异的,并且系统(3.4)以指数速度收敛于

$$\begin{bmatrix} \lim_{t \rightarrow \infty} y(t+1) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{y}(t+1) \end{bmatrix}^{-1} = (I_{2Nm} - Q)^{-1} \begin{bmatrix} ((I_N - \Lambda) \otimes I_m)y(0) \\ \mathbf{0}_{Nm} \end{bmatrix}.$$

下面,我们将计算 $I_{2Nm} - Q$ 的逆。根据引理 3.3.1, $I_{2Nm} - Q, I_{Nm} - Q_{11}, I_{Nm} - Q_{22}$ 是非奇异的,所以下面的矩阵也是非奇异的。

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} I_{Nm} - Q_{11} & -Q_{12} \\ -Q_{12} & I_{Nm} - Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{Nm} & \mathbf{0}_{Nm \times Nm} \\ (I_{Nm} - Q_{22})^{-1}Q_{21} & I_{Nm} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (I_{Nm} - Q_{11}) - Q_{12}(I_{Nm} - Q_{22})^{-1}Q_{21} & -Q_{12} \\ \mathbf{0}_{Nm \times Nm} & I_{Nm} - Q_{22} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

因此 $(I_{Nm} - Q_{11}) - Q_{12}(I_{Nm} - Q_{22})^{-1}Q_{21}$ 是非奇异的。根据引理 3.2.1,我们可以得到

$$(I_{2Nm} - Q)^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbb{A} & (I_{Nm} - Q_{11})^{-1}Q_{12}\mathbb{D} \\ S\mathbb{A} & \mathbb{D} \end{bmatrix},$$

其中 $\mathbb{A} = (I_{Nm} - Q_{11} - Q_{12}(I_{Nm} - Q_{22})^{-1}Q_{21})^{-1}$, $\mathbb{D} = (I_{Nm} - Q_{22} - Q_{21}(I_{Nm} - Q_{11})^{-1}Q_{12})^{-1}$ 。

所以

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \mathbb{A}((I_N - \Lambda) \otimes I_m)y(0) = Hy(0),$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{y}(t) = (I_{Nm} - Q_{22})^{-1}Q_{21}\mathbb{A}((I_N - \Lambda) \otimes I_m)y(0) = SHy(0).$$

接下来，我们将证明当 W 和 C_i 都是结构平衡时， S 和 H 也是结构平衡的。如果 W 和 C 是结构平衡的，根据引理 3.2.2，存在两个规范变换矩阵 Γ_1 和 Γ_2 ，使得 $\Gamma_1 W \Gamma_1 \geq 0$ 和 $\Gamma_2 C_i \Gamma_2 \geq 0$ 。令 $\Gamma = \Gamma_1 \otimes \Gamma_2$ ，根据引理 3.3.2， $\text{diag}[\Gamma, \Gamma] Q \text{diag}[\Gamma, \Gamma] = |Q| \geq 0$ 。因此 $(I_{2Nm} - |Q|)^{-1} = \text{diag}[\Gamma, \Gamma] (I_{2Nm} - Q)^{-1} \text{diag}[\Gamma, \Gamma]$ 。接下来，根据引理 3.3.4， $\rho(|Q|) < 1$ ， $\rho(|Q_{11}|) < 1$ ， $\rho(|Q_{22}|) < 1$ 。类似于上述结论，我们可以得到

$$(I_{2Nm} - |Q|)^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbb{A}' & \mathbb{R} \mathbb{D}' \\ S' \mathbb{A}' & \mathbb{D}' \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

其中 $\mathbb{A}' = (I_{Nm} - |Q_{11}| - |Q_{12}|(I_{Nm} - |Q_{22}|)^{-1}|Q_{21}|)^{-1}$;

$\mathbb{D}' = (I_{Nm} - |Q_{22}| - |Q_{21}|(I_{Nm} - |Q_{11}|)^{-1}|Q_{12}|)^{-1}$;

$S' = (I_{Nm} - |Q_{22}|)^{-1}|Q_{21}|$; $\mathbb{R} = (I_{Nm} - |Q_{11}|)^{-1}|Q_{12}|$ 。

由于

$$(I_{2Nm} - |Q|)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} |Q|^k \geq 0, (I_{Nm} - |Q_{22}|)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} |Q_{22}|^k \geq 0,$$

根据式(3.18)，可得 $\mathbb{A}' \geq 0$ ， $S' \geq 0$ ， $\mathbb{A}' = \Gamma \mathbb{A} \Gamma \geq 0$ 和 $S' \mathbb{A}' = \Gamma S \mathbb{A} \Gamma = (\Gamma S \Gamma)(\Gamma \mathbb{A} \Gamma) = (\Gamma S \Gamma) \mathbb{A}'$ 。

所以 $S' = \Gamma S \Gamma \geq 0$; $H = \Gamma \mathbb{A}' \Gamma ((I_N - \Lambda) \otimes I_m) = \Gamma \mathbb{A}' ((I_N - \Lambda) \otimes I_m) \Gamma \geq 0$ 。同时， $S' \mathbb{A}' ((I_N - \Lambda) \otimes I_m) = \Gamma S \Gamma \Gamma H \Gamma = \Gamma S H \Gamma \geq 0$ ，因此可以得出 S 、 H 和 SH 是结构平衡的。

接下来我们将证明 $|S|$ 和 $|H|$ 是随机矩阵。由于 $|S| = S'$ 和 $|H| = \mathbb{A}'((I_N - \Lambda) \otimes I_m)$ ，为此，我们只需说明 S' 和 $\mathbb{A}'((I_N - \Lambda) \otimes I_m)$ 是随机矩阵即可。 $\mathbb{S} = (I_{Nm} - |Q_{22}|)^{-1}(\Phi \otimes I_m)$ ，则 $\mathbb{S} \geq 0$ 可逆且 $\mathbb{S}^{-1} = (\Phi \otimes I_m)^{-1}(I_{Nm} - |Q_{22}|)$ 。所以

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^{-1} \mathbf{1}_{Nm} &= (\Phi \otimes I_m)^{-1} [I_{Nm} - ((I_N - \Phi) |M|) \otimes |C|] \mathbf{1}_{Nm} \\ &= (\Phi \otimes I_m)^{-1} (\mathbf{1}_{Nm} - ((I_N - \Phi) \otimes I_m)) \mathbf{1}_{Nm} = (\Phi \otimes I_m)^{-1} (\Phi \otimes I_m) \mathbf{1}_{Nm} = \mathbf{1}_{Nm}. \end{aligned}$$

和 $\mathbf{1}_{Nm} = (\mathbb{S} \mathbb{S}^{-1}) \mathbf{1}_{Nm} = \mathbb{S} (\mathbb{S}^{-1} \mathbf{1}_{Nm}) = \mathbb{S} \mathbf{1}_{Nm}$ 。也就是说 $\mathbb{S}$ 是行随机的。注意 $S' = \mathbb{S} |C|$ 且 $|C|$ 也是随机矩阵。

另一方面 $A'^{-1} = (I_{Nm} - |Q_{11}| - |Q_{12}|(I_{Nm} - |Q_{22}|)^{-1}|Q_{21}|)(I_{Nm} - |Q_{11}| - |Q_{12}|S')$ 。
根据式(3.7)可得，

$$|Q_{12}| = (\Lambda|\hat{W}|) \otimes I_m |C| [((1_N - \Phi)|M|) \otimes I_m]. \quad (3.19)$$

结合式(3.11)和(3.17)，可以得到

$$\begin{aligned} A'^{-1}\mathbf{1}_{Nm} &= (I_{Nm} - |Q_{11}| - |Q_{12}|S')\mathbf{1}_{Nm} = (I_{Nm}\mathbf{1}_{Nm} - |Q_{11}|\mathbf{1}_{Nm} - |Q_{12}|S'\mathbf{1}_{Nm}) \\ &= I_{Nm}\mathbf{1}_{Nm} - |Q_{11}|\mathbf{1}_{Nm} - |Q_{12}|\mathbf{1}_{Nm} = I_{Nm}\mathbf{1}_{Nm} - (|Q_{11}| + |Q_{12}|)\mathbf{1}_{Nm} \\ &= I_{Nm}\mathbf{1}_{Nm} - (\Lambda \otimes I_m)\mathbf{1}_{Nm} = [I_{Nm} - (\Lambda \otimes I_m)]\mathbf{1}_{Nm}, \end{aligned}$$

和 $\mathbf{1}_{Nm} = (A'A'^{-1})\mathbf{1}_{Nm} = A'(A'^{-1}\mathbf{1}_{Nm}) = A'(I_{Nm} - \Lambda)\mathbf{1}_{Nm} = H|\mathbf{1}_{Nm}$ 。由此可以得到 H 也是行随机的。

备注 3.3.2: 根据定理 3.3.1，当系统中没有开放个体时，改变个体之间的关系（合作或竞争）并不会影响观念的趋同，但会引起最终观念值不同。因此，在适当的条件下，个体之间的合作和竞争关系不会影响我们模型中观念的收敛性。

推论 3.3.2: 当满足推论 3.3.1 的条件时，定理 3.3.1 前半部分的结论仍然成立。

证明: 当推论 3.3.1 的任意条件成立时，引理 3.3.4 为真。根据定理 3.3.1 的证明，这意味着 $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = Hy(0), \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{y}(t) = SHy(0)$ 。

推论 3.3.3: 当假设 3.2.1 和假设 3.2.2 成立，且 $0 < \lambda_i < 1$ 。系统中没有 CLI 个体，如果 $\mathcal{G}[W]$ 是结构平衡且强连通的， $\mathcal{G}[C_i]$ 结构平衡，则系统(3.1)和(3.2)会以指数速度收敛到 $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = Hy(0), \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{y}(t) = SHy(0)$ ，其中 S 、 H 、 SH 也是结构平衡的， $|S| > 0$ 和 $|H| > 0$ 是行随机且可逆的。特别地，如果我们进一步假设 $W \geq 0$ ， $C_i \geq 0$ ，则 $S > 0$ ， $H > 0$ 。

证明: 根据定理 3.3.1 的证明，只需要证明 $(I_{2Nm} - |Q|)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} |Q|^k > 0$ ， $(I_{Nm} - |Q_{22}|)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} |Q_{22}|^k > 0$ 。接下来，我们将解释这一点。首先， $0 < \lambda_i < 1$ 意味着 $Q_{11} \sim (W \otimes I_m)C$ 。类似于引理 3.3.1 的前半部分证明，当 $\mathcal{G}[W]$ 和 $\mathcal{G}[C_i]$ 是强连通时，我们可以得到 $\mathcal{G}[(W \otimes I_m)C]$ 和 $\mathcal{G}[Q_{22}]$ 是强连通的。其次，图 $\mathcal{G}[W]$ 和 $\mathcal{G}[C_i]$ 有一个自环，这意味着 $Q_{12} \neq 0$ 和 $Q_{21} \neq 0$ ，并且 $\mathcal{G}[Q]$ 和 $\mathcal{G}[Q_{22}]$ 是非周期的。因此我们可以得出 $\mathcal{G}[Q]$ 和 $\mathcal{G}[Q_{22}]$ 是强连通且非周期的结论。这意味着存在正整数 k_1

和 k_2 ，使得 $|Q|^{k_1} > 0$ 和 $|Q_{22}|^{k_2} > 0$ ，即 $(I_{2Nm} - |Q|)^{-1} > 0$ 和 $(I_{Nm} - |Q_{22}|)^{-1} > 0$ 。进一步，如果只考虑一个话题在社交网络上传播，不考虑竞争关系，结合推论 3.3.4，很容易得到如下结果。

推论 3.3.4: 令 $W \geq 0$ 且 $0 < \lambda_i < 1$ ， $C_i = 1$ 时，如果 $\mathcal{G}[W]$ 是强连通的，则系统 (3.1) 和 (3.2) 以指数速度收敛到极限 $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = Hy(0)$ ， $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{y}(t) = SHy(0)$ ，其中 $S > 0$ 和 $H > 0$ 是行随机的。

备注 3.3.3: 推论 3.3.4 与文[42]中的定理 1 完全一致的，这意味着文[42]中的定理 1 是我们的定理 3.3.1 的一个特例，我们的定理 3.3.1 具有更强的适用性。

根据定理 3.3.1，我们可以分析模型最终的私人观念和表达观念之间的差异。

定理 3.3.2: 如果假设 3.2.1 和假设 3.2.2 成立，当系统中不存在开放个体时，也不存在 CLI 个体。如果 $\mathcal{G}[W]$ 和 $\mathcal{G}[C_i]$ 都是结构平衡的，则最终的观点符合以下不等式：

$$|\hat{y}^*|_{\max} \leq |y^*|_{\max} \leq |y(0)|_{\max}. \quad (3.20)$$

在这里， y^* 和 $\hat{y}^*$ 表示最终的私人观念和表达观念。进一步，如果 $\mathcal{G}[W]$ 也是强连通且非周期， $0 < \lambda_i < 1$ ，则只要 $y(0) \neq \alpha \Gamma \mathbf{1}_{Nm}$ （其中 $\alpha \in \mathbb{R}$ 且存在规范变换矩阵 Γ 满足 $\Gamma W \Gamma \geq 0$ ），则上述不等式是严格的。

证明: 根据定理 3.3.1， $y^* = Hy(0)$ 和 $\hat{y}^* = Sy^*$ 。注意 $|H|$ 和 $|S|$ 是行随机的，所以

$$\begin{aligned} |y^*| &= |Hy(0)| \leq |H| |y(0)| \leq |H| (|y(0)|_{\max} \mathbf{1}_{Nm}) = |y(0)|_{\max} \mathbf{1}_{Nm}, \\ |\hat{y}^*| &= |Sy^*| \leq |S| |y^*| \leq |S| (|y^*|_{\max} \mathbf{1}_{Nm}) = |y^*|_{\max} \mathbf{1}_{Nm}. \end{aligned}$$

即 $|y^*|_{\max} \leq |y(0)|_{\max}$ ， $|\hat{y}^*|_{\max} \leq |y^*|_{\max}$ 。

如果 $\mathcal{G}[W]$ 也是强连通且非周期， $0 < \lambda_i < 1$ ，根据推论 3.3.4，则 $\Gamma H \Gamma > 0$ 和 $\Gamma S \Gamma > 0$ 是行随机且可逆的。所以只要 $y(0) \neq \alpha \Gamma \mathbf{1}_{Nm}$ ，则 $y(0)_{\min} \leq y^*_{\min} \leq \hat{y}^*_{\min}$ 。

根据定理 3.3.1 和定理 3.3.2，当系统中没有开放性个体时，最终的私人观念和表达观念依赖于最初的私人意见，与最初表达的意见无关。同时，对于几乎所有的初始的私人观念和表达观念之间的差异总是存在的。

当社交网络中存在开放性个体时会发生什么？这正是我们要第四章要讨论的问题。

3.4 数值模拟

在本节中，我们将给出一个例子来观察系统的状态演化以验证我们获得的结论。在这个例子是一个由 12 个个体组成社会网络。在这个例子中，我们首先考虑一个没有开放个体的社交网络。图 3-1 显示了其拓扑结构、竞争关系和执拗特征，其中红色个体为执拗个体，红色箭头代表竞争关系，绿色箭头代表合作关系。

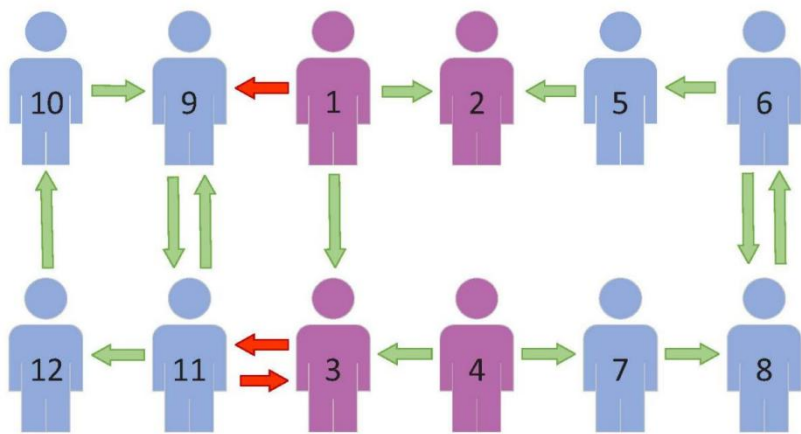


图 3-1 包含 12 个个体的社交网络。

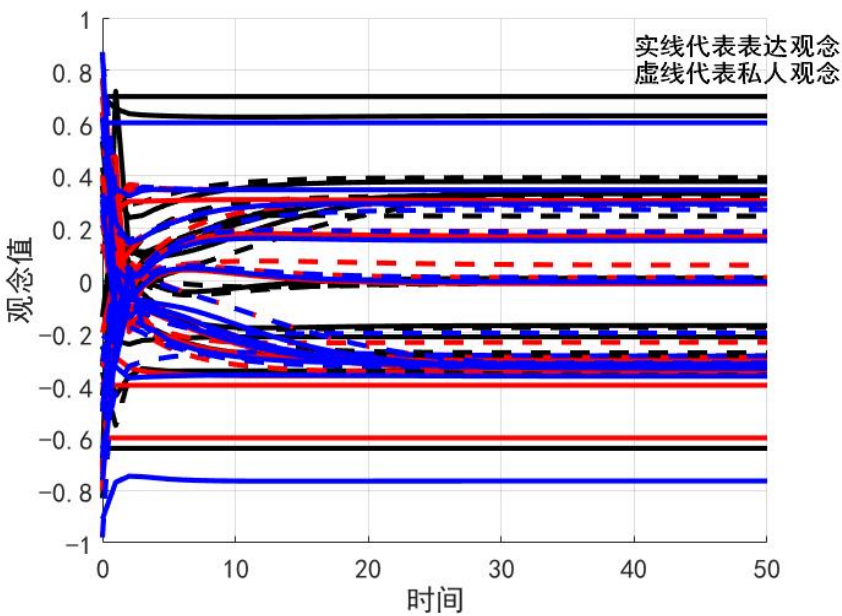


图 3-2 当网络是结构平衡时个体的表达观念和私人观念的演化轨迹。

我们可以观察到，这个社会网络是结构平衡的，不存在开放的个体。假设有三个话题在这个社会网络上传播。并且逻辑随机生成满足假设 3.2.1 和假设 3.2.2 的矩阵。根据定理 3.3.1，所有个体的私人观念和表达观念将以指数速度收敛。图 3-2 显示了意见的演化轨迹。

如果将从个体 11 指向个体 13 的红色箭头改为绿色箭头，并且保持其他个体的关系不变，则整个网络在结构上变得不平衡，但仍然没有开放个体，因此个体观念仍然收敛。观念的演化轨迹如图 3-3 所示。

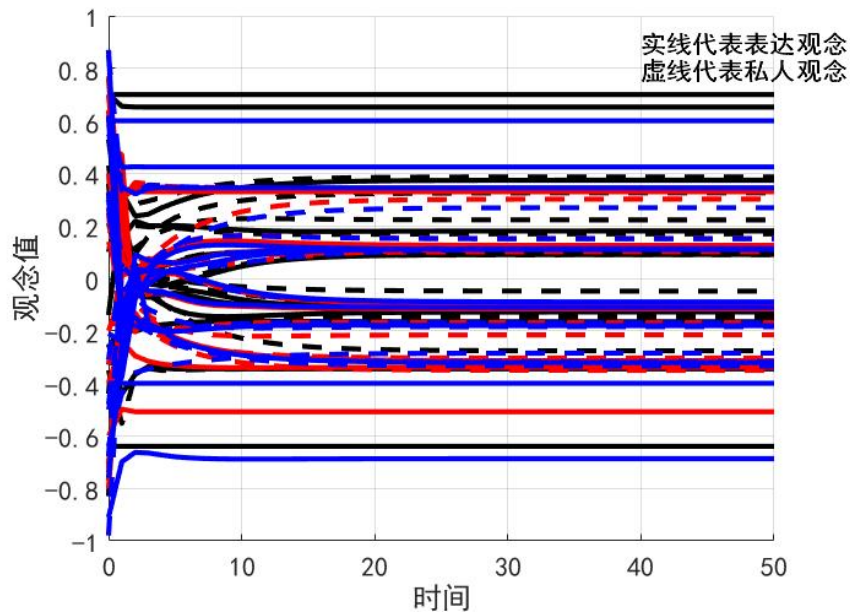


图 3-3 当网络是不结构平衡时个体的表达观念和私人观念的演化轨迹。

因此，我们发现当不存在开放个体时，个体之间的合作和竞争关系不会影响观念的收敛。私人观念和表达观念之间的差异始终存在。

3.5 本章小节

在这一章节中，我们提出了一种基于个体的人际影响网络的异质多维信念系统的观念动力学模型，在这个模型中，我们不仅有表达观念和私人观念，同时还有执拗个体和异质多维信念系统，分析了当系统中存在开放性个体时，无论网络拓扑是否是结构平衡，我们的模型总是可以以指数收敛的速度快速收敛到稳定状态。

第4章 具有开放性个体的观念动力学模型的动力学分析

在本章中，我们对第三章提出的模型进行进一步的分析，我们探索了当异质多维信念系统中存在开放性个体时，观念的演变情况。在不失一般性的情况下，对所有个体进行重新分类，前 n_1 个个体为非开放性个体，后 $n_1 + 1$ 到 N 个体为开放性个体，然后分别在网络拓扑是结构平衡和结构不平衡时，研究个体在社会网络中的观念演化的情况，得到若干观念收敛的条件。最后，我们通过数值模拟技术来验证我们理论分析得出的结论。

4.1 模型描述

在本节中，我们的系统允许开放性个体的存在。在不失一般性的情况下，我们假设个体1到 n_1 是非开放性个体，个体 $n_1 + 1$ 到 N 是开放个体。在这种情况下， Λ ， $\widehat{W}$ ， $\widetilde{W}$ ， M ， C 可以被重写为以下分块矩阵：

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \mathbf{0}_{n_1 \times (N-n_1)} \\ \mathbf{0}_{(N-n_1) \times n_1} & I_{N-n_1} \end{bmatrix}, \widetilde{W} = \begin{bmatrix} \widetilde{W}_{11} & \mathbf{0}_{n_1 \times (N-n_1)} \\ \mathbf{0}_{(N-n_1) \times n_1} & \widetilde{W}_{22} \end{bmatrix}, \Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \mathbf{0}_{n_1 \times (N-n_1)} \\ \mathbf{0}_{(N-n_1) \times n_1} & \Phi_{22} \end{bmatrix},$$

$$\widehat{W} = \begin{bmatrix} \widehat{W}_{11} & \widehat{W}_{12} \\ \mathbf{0}_{(N-n_1) \times n_1} & \widehat{W}_{22} \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ \mathbf{0}_{(N-n_1) \times n_1} & M_{22} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} C_{11} & \mathbf{0}_{n_1 \times (N-n_1)} \\ \mathbf{0}_{(N-n_1) \times n_1} & C_{22} \end{bmatrix}.$$

让 $\mathbf{B}_1(t) = [y_1^T(t), y_2^T(t), \dots, y_{n_1}^T(t)]^T$ ， $\mathbf{B}_2(t) = [y_{n_1+1}^T(t), y_{n_1+2}^T(t), \dots, y_N^T(t)]^T$ ， $\hat{\mathbf{B}}_1(t) = [\hat{y}_1^T(t), \hat{y}_2^T(t), \dots, \hat{y}_{n_1}^T(t)]^T$ ， $\hat{\mathbf{B}}_2(t) = [\hat{y}_{n_1+1}^T(t), \hat{y}_{n_1+2}^T(t), \dots, \hat{y}_N^T(t)]^T$ 。通过公式(3.4)，我们可以得到

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1(t+1) = & \Lambda_{11}[\widetilde{W}_{11} \otimes I_m + (\widehat{W}_{11} \Phi_{11}) \otimes I_m]C_{11}\mathbf{B}_1(t) + [(\Lambda_{11} \widehat{W}_{12} \Phi_{22}) \otimes I_m]C_{22}\mathbf{B}_2(t) \\ & + [(\Lambda_{11} \widehat{W}_{11}) \otimes I_m]C_{11}[(I_{n_1} - \Phi_{11})M_{11}] \otimes I_m \hat{\mathbf{B}}_1(t-1) \\ & + [(\Lambda_{11} \widehat{W}_{11}) \otimes I_m]C_{11}[(I_{n_1} - \Phi_{11})M_{12}] \otimes I_m \hat{\mathbf{B}}_2(t-1) \\ & + [(\Lambda_{11} \widehat{W}_{12}) \otimes I_m]C_{22}[(I_{n_1} - \Phi_{22})M_{22}] \otimes I_m \hat{\mathbf{B}}_2(t-1) \\ & + (I_{n_1 m} - \Lambda_{11} \otimes I_m)\mathbf{B}_1(0), \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_2(t+1) = & [(\widetilde{W}_{22} \otimes I_m)C_{22} + ((\widetilde{W}_{22} \Phi_{22}) \otimes I_m)C_{22}]\mathbf{B}_2(t) \\ & + (\widehat{W}_{22} \otimes I_m)C_{22}[(I_{n_1} - \Phi_{22})M_{22}] \otimes I_m \hat{\mathbf{B}}_2(t-1), \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{B}}_1(t) &= C_{11}[(I_{n_1} - \Phi_{11})M_{11}) \otimes I_m] \hat{\mathbf{B}}_1(t-1) \\ &\quad + C_{11}[(I_{n_1} - \Phi_{11})M_{12}) \otimes I_m] \hat{\mathbf{B}}_2(t-1) \\ &\quad + C_{11}(\Phi_{11} \otimes I_m) \times \mathbf{B}_1(t),\end{aligned}\quad (4.3)$$

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{B}}_1(t) &= C_{11}[(I_{n_1} - \Phi_{11})M_{11}) \otimes I_m] \hat{\mathbf{B}}_1(t-1) \\ &\quad + C_{11}[(I_{n_1} - \Phi_{11})M_{12}) \otimes I_m] \hat{\mathbf{B}}_2(t-1) \\ &\quad + C_{11}(\Phi_{11} \otimes I_m) \times \mathbf{B}_1(t),\end{aligned}\quad (4.4)$$

$$\hat{\mathbf{B}}_2(t) = C_{22}[(I_{n_1} - \Phi_{22})M_{22} \otimes I_m] \hat{\mathbf{B}}_2(t-1) + C_{22}(\Phi_{22} \otimes I_m) \times \mathbf{B}_2(t). \quad (4.5)$$

设 $d_1(t) = [\mathbf{B}_1^T(t), \hat{\mathbf{B}}_1^T(t-1)]^T$, $d_2(t) = [\mathbf{B}_2^T(t), \hat{\mathbf{B}}_2^T(t-1)]^T$, 其中 $d_1(t)$ 表示非开放性个体的私人观念和表达观念, $z_2(t)$ 表示开放性个体的私人观念和表达观念。

我们令 $\Theta_{11} = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{11} & \mu_{22} \end{bmatrix}$, $\Theta_{12} = \begin{bmatrix} \nu_{11} & \nu_{12} \\ 0 & \nu_{22} \end{bmatrix}$, $\Theta_{22} = \begin{bmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{bmatrix}$. 这里

$$\begin{aligned}\mu_{11} &= \Lambda_{11}[\widetilde{W}_{11} \otimes I_m + (\widehat{W}_{11} \Phi_{11}) \otimes I_m] C_{11}, \mu_{12} = [(\Lambda_{11} \widehat{W}_{11}) \otimes I_m] C_{11}[(I_{n_1} - \Phi_{11})M_{11}) \otimes I_m], \\ \mu_{21} &= C_{11}(\Phi_{11} \otimes I_m), \mu_{22} = C_{11}[(I_{n_1} - \Phi_{11})M_{11}) \otimes I_m];\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nu_{11} &= [(\Lambda_{11} \widehat{W}_{12} \Phi_{22}) \otimes I_m] C_{22}, \nu_{22} = C_{11}[(I_{n_1} - \Phi_{11})M_{12}) \otimes I_m], \\ \nu_{12} &= [(\Lambda_{11} \widehat{W}_{11}) \otimes I_m] C_{11}[(I_{n_1} - \Phi_{11})M_{12}) \otimes I_m] + [(\Lambda_{11} \widehat{W}_{12}) \otimes I_m] C_{22}[(I_{n_1} - \Phi_{22})M_{22}) \otimes I_m];\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi_{11} &= (\widetilde{W}_{22} \otimes I_m) C_{22} + [(\widehat{W}_{22} \Phi_{22}) \otimes I_m] C_{22}, \xi_{12} = (\widehat{W}_{22} \otimes I_m), C_{22}[(I_{n_1} - \Phi_{22})M_{22}) \otimes I_m] \\ \xi_{21} &= C_{22}(\Phi_{11} \otimes I_m), \xi_{22} = C_{22}[(I_{n_1} - \Phi_{22})M_{22}) \otimes I_m].\end{aligned}$$

根据式(4.1)到(4.5), 系统(3.4)可以被重写为以下形式:

$$d_1(t+1) = \Theta_{11}d_1(t) + \Theta_{12}d_2(t) + d_1(0), \quad (4.6)$$

$$d_2(t+1) = \Theta_{22}d_2(t), \quad (4.7)$$

这里 $d_1(0) = [(I_{n_1m} - \Lambda_{11} \otimes I_m)\mathbf{B}_1(0)]^T, \mathbf{0}_{n_1m}^T]^T$ 。对于系统 (4.6) 和 (4.7), 我们得到以下结果。

4.2 主要结论

在这个小节, 我们将对系统(4.6)和(4.7)的收敛性进行分析。

定理 4.2.1: 如果假设 3.2.1 成立。如果 $d_2(t)$ 收敛, 则 $d_1(t)$ 收敛, 即系统(3.1)和(3.2)也收敛。如果 $\lim_{t \rightarrow \infty} d_2(t) = d_2^*$, 然后 $\lim_{t \rightarrow \infty} d_1(t) = (I_{n_1m} - \Theta_{11})^{-1}(\Theta_{12}d_2^* + d_1(0))$ 。

证明：由线性系统[54]理论，我们可以知道当 $\rho(\Theta_{11}) < 1$ 时，系统(4.6)是收敛的，同时系统(4.7)也是收敛。根据引理 3.3.4 的证明，我们可以很容易地得到 $\rho(\Theta_{11}) < 1$ 。因此当 $d_2(t)$ 收敛时，则 $d_1(t)$ 也收敛。又知矩阵 $d_2(t)$ 是可逆的。所以 当 $\lim_{t \rightarrow \infty} d_2(t) = d_2^*$ 时，根据 (4.6)，可以得到 $\lim_{t \rightarrow \infty} d_1(t) = (I_{n_1 m} - \Theta_{11})^{-1}(\Theta_{12} d_2^* + d_1(0))$ 。

接下来，我们将讨论系统(4.7)的收敛条件和最终意见对初始意见的依赖性。通过使用引理 3.3.1、引理 3.3.2 和引理 3.3.3，可以得到以下结果。

定理 4.2.2：如果假设 3.2.1 和假设 3.2.2 成立。下面的结论是有效的。

(1): 系统中没有 CLI 个体。如果 $\mathcal{G}[\widehat{W}_{22}]$ 结构平衡的且包含一个生成树， C_i 也是结构平衡的，然后 $\lim_{t \rightarrow \infty} d_2(t) = (\alpha^T d_2(1)) \Gamma \mathbf{1}_{2(N-n_1)m}$ ，这里 α 是矩阵 Θ_{22} 的特征值为 1 的所对应的左特征向量，规范变换矩阵 $\Gamma = \text{diag}[\Gamma_1 \otimes \Gamma_2, \Gamma_1 \otimes \Gamma_2]$ 满足 $\Gamma_1 \widehat{W}_{22} \Gamma_1 \geq 0$ 和 $\Gamma_2 C_i \Gamma_2 \geq 0$ ($i \in \{n_1 + 1, \dots, N\}$)

(2): 如果 $\mathcal{G}[\widehat{W}_{22}]$ 是强连通的，当以下任何一个条件成立时，我们有 $\lim_{t \rightarrow \infty} d_2(t) = \mathbf{0}_{2(N-n_1)m}$ 。 Δ_1 : $\mathcal{G}[\widehat{W}_{22}]$ 结构不平衡； Δ_2 : 存在 $i \in \{n_1 + 1, \dots, N\}$ 使得 $\mathcal{G}[C_i]$ 结构不平衡； Δ_3 : 在个体 $i \in \{n_1 + 1, \dots, N\}$ 中有 CLI 个体。

证明：首先，我们将证明定理的第一部分。

如果 $\mathcal{G}[\widehat{W}_{22}]$ 和 $\mathcal{G}[C_i]$ 是结构平衡的，则根据引理 3.3.2， $\mathcal{G}[\Theta_{22}]$ 是结构平衡的。在这种情况下，通过(3.14)和(3.15)可以得到 $|\Theta_{22}|$ 是行随机的，这意味着系统(4.7)是一个结构平衡的社会网络^{[31][32][52]}的 Altafini 模型。根据引理 3.3.3，当 $\mathcal{G}[\widehat{W}_{22}]$ 包含生成树时， $\mathcal{G}[\Theta_{22}]$ 也包含生成树。根据文献[31][32][52]的结果， $\lim_{t \rightarrow \infty} d_2(t) = (\alpha^T d_2(1)) \Gamma \mathbf{1}_{2(N-n_1)m}$ 。

接下来，我们将证明定理第二部分的结论。根据引理 3.3.3，当 $\mathcal{G}[\widehat{W}_{22}]$ 强连通时， $\mathcal{G}[\zeta_{11}]$ 与 $\mathcal{G}[\zeta_{22}]$ 也强连通，且图 $\mathcal{G}[\zeta_{11}]$ 中的所有节点都是图 $\mathcal{G}[\Theta_{22}]$ 的根节点。另一方面，根据引理 3.3.1 和 3.3.2，当 Δ_1 、 Δ_2 和 Δ_3 的任一条件成立时，图

$\mathcal{G}[\zeta_{11}]$ 、 $\mathcal{G}[\zeta_{22}]$ 和 $\mathcal{G}[\Theta_{22}]$ 是结构不平衡的。接下来，我们将在两种情况下证明 $\rho(\Theta_{22}) < 1$ 。

情况 1: $|\xi_{12}| = (|\widehat{W}_{22}| \otimes I_m) |C_{22}| [((I_{n_1} - \Phi_{22}) | M_{22}) \otimes I_m]$ 。在这种情况下，与式(3.14)和式(3.15)的计算类似，可以得到 $|\Theta_{22}| \mathbf{1}_{2(N-n_1)m} = \mathbf{1}_{2(N-n_1)m}$ ，即 $|\Theta_{22}|$ 是行随机的。注意当 $|\xi_{12}| = (|\widehat{W}_{22}| \otimes I_m) |C_{22}| [((I_{n_1} - \Phi_{22}) | M_{22}) \otimes I_m]$ 时， $|\zeta_{12}| \neq 0$ ，这意味着图 $\mathcal{G}[\zeta_{22}]$ 中的所有节点都是图 $\mathcal{G}[\Theta_{22}]$ 的根节点。因此图 $\mathcal{G}[\Theta_{22}]$ 是强连接且结构不平衡的。根据引理 3.2.3， $\rho(\Theta_{22}) < 1$ 。

情况 2: $|\xi_{12}| \neq (|\widehat{W}_{22}| \otimes I_m) |C_{22}| [((I_{n_1} - \Phi_{22}) | M_{22}) \otimes I_m]$ 。与式(3.14)的计算类似， $[|\xi_{11}|, |\xi_{12}|] \mathbf{1}_{2(N-n_1)m} \leq \mathbf{1}_{(N-n_1)m}$ ，且在矩阵 $[|\xi_{11}|, |\xi_{12}|]$ 中至少有一行使其行和小于1。

$$\text{构造一个矩阵 } \Theta_{22} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{(N-n_1)m}^T & \mathbf{0}_{(N-n_1)m}^T \\ \Xi & |\xi_{11}| & |\xi_{12}| \\ \mathbf{0}_{(N-n_1)m} & |\xi_{22}| & |\xi_{22}| \end{bmatrix}。$$

其中 $\Xi = \mathbf{1}_{(N-n_1)m} - [|\xi_{11}|, |\xi_{12}|] \mathbf{1}_{2(N-n_1)m} \neq 0$ ，通过计算， $|\Theta_{22}| \mathbf{1}_{2(N-n_1)m} = \mathbf{1}_{2(N-n_1)m}$ ，即 $|\Theta_{22}|$ 是行随机的。由于 $\Xi = 0$ 与 $\mathcal{G}[|\zeta_{11}|]$ 也是强连接的，且其所有节点都是图 $\mathcal{G}[|\Theta_{22}|]$ 的根节点，因此图 $\mathcal{G}[|\Theta_{22}|]$ 只有一个根节点。因此，1是 $\mathcal{G}[|\Theta_{22}|]$ 的唯一最大模特征值，其代数多重性为1，根据引理 3.3.4 的证明，这意味着 $\rho(|\Theta_{22}|) < 1$ 。根据引理 3.2.2， $\rho(\Theta_{22}) < 1$ 。

根据上述讨论，当 Δ_1 、 Δ_2 和 Δ_3 的任一条件成立时， $\rho(\Theta_{22}) < 1$ 。这表明线性定常系统(4.7)是渐近稳定的。这样此定理的证明就完成了。

根据定理 4.2.2，当系统中不存在具有 CLI 个体，且 $\mathcal{G}[\widehat{W}_{22}]$ 和 $\mathcal{G}[C_i]$ 结构平衡且强连通时， $\lim_{t \rightarrow \infty} d_2(t) = (\alpha^T d_2(1)) \Gamma \mathbf{1}_{2(N-n_1)m}$ 。这意味着 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{B}_2(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{B}}_2(t) = (\alpha^T d_2(1)) [\Gamma_1 \otimes \Gamma_2] \mathbf{1}_{(N-n_1)m}$ ，即对于开放性个体，最终私人观念和表达观念之间的差异消失，这与定理 3.3.1 不同。另一方面， $\mathcal{G}[\widehat{W}_{22}]$ 是结构平衡且强连通的，根据引理 3.3.3， $\mathcal{G}[\Theta_{22}]$ 也是强连通的，因为 $\mathcal{G}[\Theta_{22}]$ 的所有节

点都是根节点, 其中 $\alpha > 0$ 。因此, 所有开放性个体的初始的私人观念和表达观念都对最终的私人观念和表达观念有贡献, 即最终的私人观念和表达观念不再仅仅依赖于初始的私人意见, 这是与定理 3.3.1 的另一个不同之处。

另一方面, 如果 $\mathcal{G}[\widehat{w}_{22}]$ 是强连接的, 当系统中存在 CLI 个体, 或者 $\mathcal{G}[\widehat{w}_{22}]$ 是结构不平衡的, 或者存在结构不平衡的逻辑矩阵, 则开放个体的最终私人观念和表达观念为零。所以, 对于开放的个体来说, 最终私人观念和表达观念之间的差异消失了。非开放性个体的最终私人观念和表达观念取决于非开放个体的初始意见。

综上所述, 当由开放个体组成的子网是强连接时, 对于开放个体而言, 最终私人观念和表达观念之间的差异将消失, 但对于非开放个体而言, 这种差异仍然存在。特别是, 如果没有执拗的个体, 并且社会网络紧密相连, 那么最终的私人观念和表达观念之间的差异将对所有个体消失。这意味着个人的执拗可能是造成这种差异的主要原因。

4.3 数值模拟

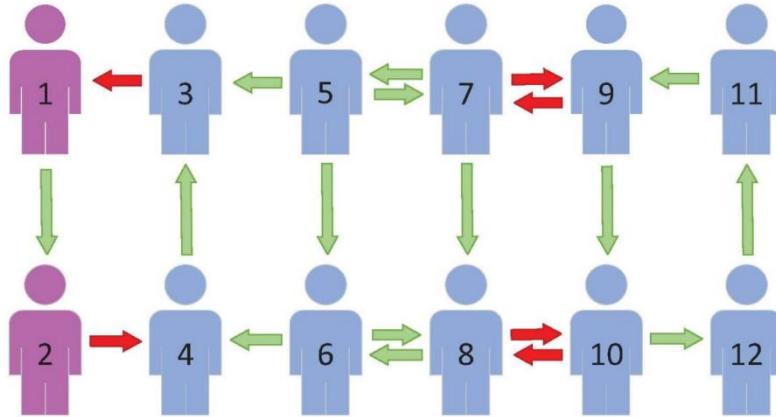


图 4-1 包含 12 个个体的社交网络。

接下来我们将通过示例 2 来验证我们结论的正确性。我们考虑一个具有开放性个体的社交网络作为我们的示例 2, 可以观察到, 具有开放个体组成的社会网络在结构上是平衡的, 并且在图 4-1 中是强连通的。

我们随机生成 12 个满足假设 3.2.1 和 3.2.2 的逻辑矩阵，使得在该社会网络中不存在 CLI 的个体。根据定理 4.2.2，我们知道所有个体的私人观念和表达观念会收敛，他们的观念的演化如图 4-2 所示。

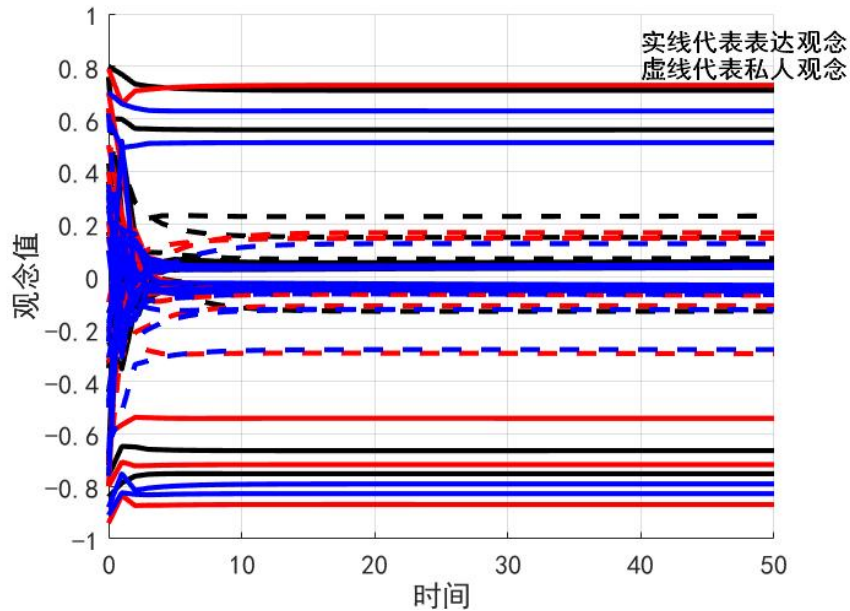


图 4-2 当网络是结构平衡时个体的表达观念和私人观念的演化轨迹。

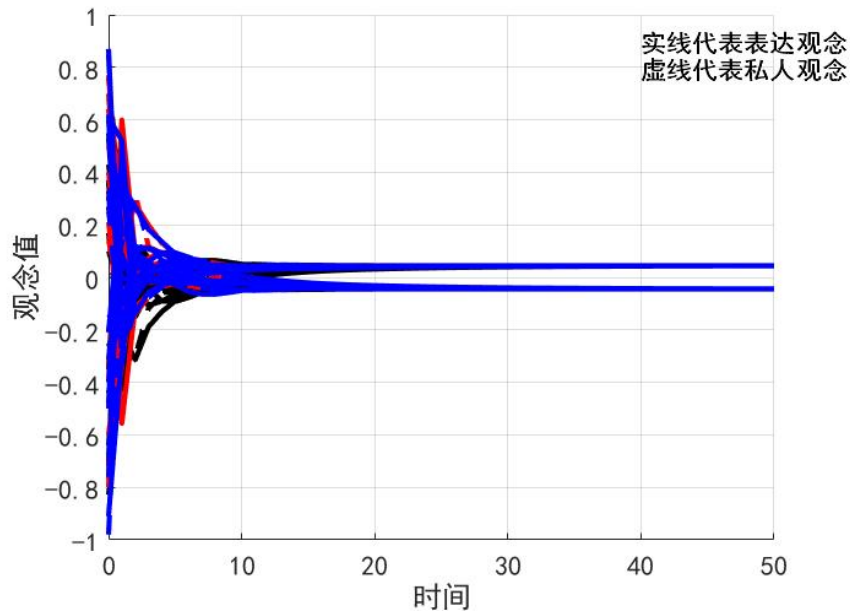


图 4-3 当网络是结构平衡和强连通时无执拗个体的表达观念和私人观念的演化轨迹。

如果不考虑个体 1 和 2 的执拗性，将箭头方向从个体 5 改变到个体 3，那么整个网络成为一个结构平衡的、强连通的社会网络且没有执拗个体。此时观念的演化如图 4-3 所示。

由图 4-3 可知, 所有意见都是极化的, 但私人观念和表达观念之间的差异也消失了, 这意味着个体的执拗性可能是私人观念和表达观念之间差异的主要原因。在图 4-1 的基础上, 我们试图改变个体 7 和 9 之间的关系, 使由开放性个体组成的社会网络在结构上是不平衡的。图 4-4 展示了这种情况下意见的演变过程。

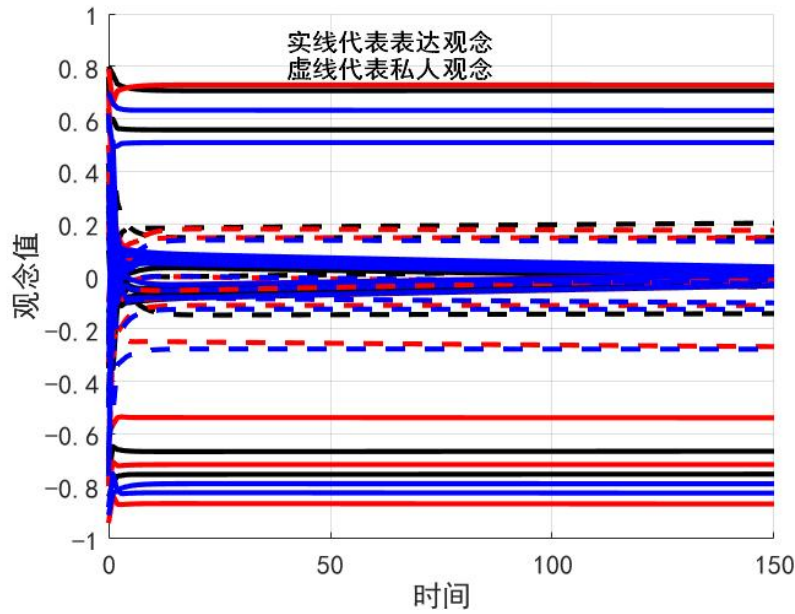


图 4-4 当网络是结构不平衡时个体的表达观念和私人观念的演化轨迹。

通过图 4-4, 意见最终收敛, 但最终的意見值与图 4-2 明显不同, 这表明当由开放性个体组成的社会网络是强连接时, 个体之间的合作和竞争关系的变化不会改变网络的收敛性。

这个例子充分说明了以下三个事实:

- (1) 当意见趋同时, 个体的私人观念和表达观念之间的差异将继续存在;
- (2) 在一些温和的条件下, 如强连接或不存在开放性个体, 个体之间合作竞争关系的变化不影响意见的趋同;
- (3) 一致性是个体的私人观念和表达观念之间差异的一个来源。

接下来我们将举一个关于 Zachary 的空手道俱乐部(ZKC)^[51]的例子来更好地完善我们的结果。在这个例子中, 我们使用本文提出的模型来建模 ZKC 网络^{[51][57]}。ZKC 社交网络是一个著名的经验社交网络^[57], 它由 34 个成员和 156 条边组成。假设有三个主题在网络上传播, 随机生成 34 个满足假设 1 的逻辑矩阵, 并随机选择 10 个成员作为执拗个体。

由于整个网络是强连通的，ZKC 中不存在开放性个体。根据定理 3.3.1，对于任何初始意见，意见将收敛到一个稳定的状态。图 4-5 显示了随机产生的初始意见下的意见演化。

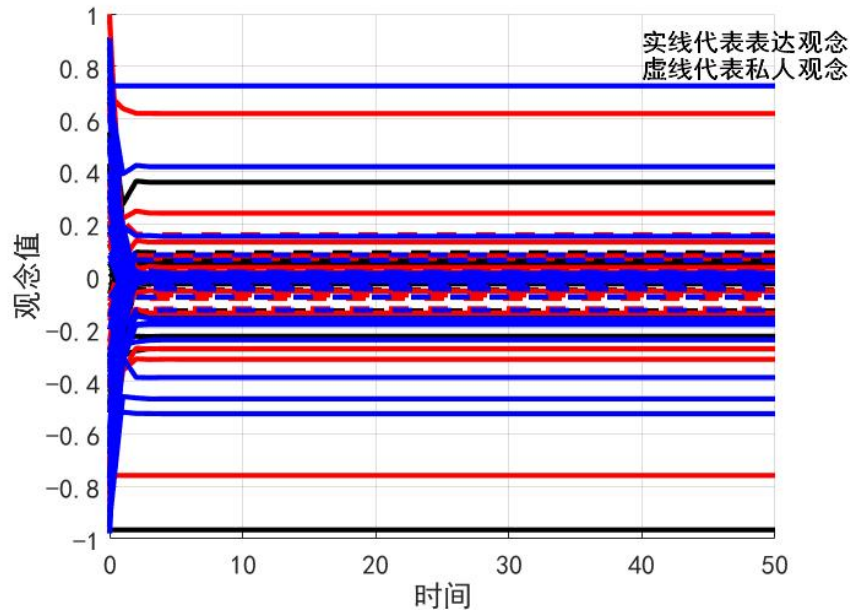


图 4-5 Zachary 空手道俱乐部社会网络的观念演变

从图 4-5 中可以看出，私人观念和表达观念之间的差异非常明显。这种长期持续的差异将不可避免地导致一些不良后果。

因此，这种差异可能是俱乐部分裂的原因之一，这意味着我们的模型能够捕捉到少数社交网络的主要特征，从而能够描绘出更真实的意见演变模式

4.4 本章小结

在本章节中，我们研究了包含开放性个体的观念动力学模型。为了便于分析，我们对所有个体进行了重新分类。研究发现，重新分类后的网络拓扑结构的收敛性与开放性个体的特性密切相关。当系统中同时存在执拗个体和开放性个体时，系统的整体收敛性取决于开放性个体的行为特征。具体而言，当开放性个体构成的子网络呈现强连接状态时，开放性个体的私人观念与表达观念之间的差异将趋于消失。然而，对于执拗个体而言，这种差异仍然持续存在。特别值得注意的是，在不存在执拗个体且整个社会网络为强连通的情况下，所有个体的私人观念与表达观念之间的差异最终都将消失。这一现象表明，个体的执拗特性可能是导致观

念差异持续存在的主要原因。为了更直观地说明我们的模型能够更真实地反映意见演变过程，我们以 ZAC 社会网络为例进行了具体分析。

第5章 总结与展望

在科技持续进步的推动下，人际交往模式正经历着深刻的变革，信息传递的效率和规模呈现出指数级增长态势。基于这一背景，本研究提出了一种独特的观念动力学框架，其核心是：在个体观念的形成与发展过程中，私人观念与公开表达的观念并存，且个体会依据所处环境的变化，动态地修正和优化自身的观念体系。

此外，本研究还深入探讨了执拗个体在观念演变过程中的作用。执拗个体具有强烈的观念稳定性，在观念演化过程中往往保持其原有立场不变。这类个体的存在显著增加了观念演变过程的复杂性和多样性。同时，我们的研究还引入了竞争机制和异质多维信念系统的分析框架。这种框架考虑了个体对不同主题间相互关系的认知影响，即个体对主题 M 的立场可能会受到其对主题 H 立场的影响，这种关联源于个体对两个主题之间内在联系或约束关系的认知。举例来说，一个人对环境保护（主题 M）的态度可能会影响其对经济发展（主题 H）的看法，因为这两个主题在现实中存在着密切的关联和潜在的矛盾。本文的主要工作如下：

一、我们对经典的 F-J 模型进行了扩展，提出了一个不具有开放性个体的观念动力学模型，在这个模型中私人观念，表达观念，竞争关系，执拗个体，异质的多维信念系统。同时存在，我们发现无论社会网络是否是结构平衡的，私人观念和表达观念总是可以以指数级的速度快速收敛到一个稳定的状态，同时，这个稳定的观念依赖于初始的私人观念，最初的表达观念在演化的过程中被开放性。最后，通过数值仿真对所得结果进行了数值模拟，验证了我们的结论是正确的。

二、我们提出了一个具有开放性个体的观念动力学模型。我们发现，当执拗个体和开放性个体同时存在时，整个系统是否收敛完全取决于开放性个体。最后，通过数值仿真对所得结果进行了数值模拟，验证了我们的结论是正确的。并且举了一个现实例子反应了我们模型的真实性和有效性。

观念动力学是一门研究公众舆论和群体情感变化的学科，其核心价值在于为政府、企业和个人提供洞察社会舆论趋势的工具，并助力其有效处理舆情突发事件。虽然这一领域的研究已经积累了相当丰富的成果，但仍然存在许多有待解决的深层次问题。针对目前的研究进展，以下几个方向亟需加强和完善：

(1)当前对于观念动力学的研究大多是假设个体使用凸决策方式进行决策,这种决策方式必然会在一定程度上造成个体的收敛,然而在现实生活中,个体的决策方式通常会更复杂。另外,目前观念动力学的研究中大多假设个体在决策时只用到前一时刻的信息,而对于带有记忆的决策方式仍然很少涉及。

(2) 在本文中,我们只将逻辑矩阵引入到 DeGroot 模型和 F-J 模型这两个经典的观念动力学模型中,在未来我们计划将逻辑矩阵引入到其他具有实际应用价值的观念动力学模型中。

参考文献

- [1] Frasca P, Tarbouriech S, Zaccarian L. Hybrid models of opinion dynamics with opinion-dependent connectivity[J]. Automatica, 2019, 100: 153-161.
- [2] N. E. Friedkin and E. C. Johnsen. Social influence network theory: a sociological examination of small group dynamics [M]. Cambridge University Press, 2011.
- [3] 邓舒予. 突发事件微博舆情意见领袖对网民情感倾向影响研究[D].哈尔滨理工大学, 2024.
- [4] 刁苏蒙. 社交网络中个体交互行为和观点演化模式研究[D].北京交通大学, 2016.
- [5] 马振, 贾保先. 基于观点动力学的社交网络观点共识达成研究[J].中国传媒大学学报:自然科学版, 2023, 30(2): 56-67.
- [6] G. Chen, X. Duan, N. E. Friedkin, and F. Bullo. Social power dynamics over switching and stochastic influence networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2019, 64(2): 582-597.
- [7] 王龙, 田野, 杜金铭. 社会网络上的观念动力学[J]. 中国科学:信息科学, 2018, 48(01): 3-23.
- [8] J. C. X. M. Xiaotai Wu, Yang Tang. Stability analysis for continuous time switched systems with stochastic switching signals[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 63(9): 3083-3090.
- [9] W. Zhang, Q.-L. Han, Y. Tang, and Y. Liu. Sampled-data control for a class of linear time-varying systems[J]. Automatica, 2019, 103: 126 – 134.
- [10] P. Jia, A. MirTabatabaei, N. E. Friedkin, and F. Bullo. Opinion dynamics and the evolution of social power in influence networks[J]. SIAM-Review, 2015, 57(3): 367 – 397.
- [11] M. H. DeGroot. Reaching a consensus[J]. Journal of the American Statistical Association, 1974, 69(345): 118 – 121.
- [12] N. E. Friedkin and E. C. Johnsen. Social influence networks and opinion change[J]. Advances in Group Processes, 1999, 16: 1 – 29.
- [13] C. Altafini. Dynamics of opinion forming in structurally balanced social

- networks[J]. Plos One, 2012, 7: e38135.
- [14] S. E. Parsegov, A. V. Proskurnikov, R. Tempo, and N. E. Friedkin. Novel multidimensional models of opinion dynamics in social networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2016, 62(5): 2270–2285.
- [15] A. V. Proskurnikov, A. S. Matveev, and M. Cao. Opinion dynamics in social networks with hostile camps: consensus vs. polarization[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 61(6): 1524–1536.
- [16] D. Bauso and M. Cannon. Consensus in opinion dynamics as a repeated game[J]. Automatica, 2018, 90: 204–211.
- [17] Y. Zou and K. Xia. Bipartite consensus of opinion dynamics through delivering credible information. IEEE Transactions on Control of Network Systems, 2021, 8: 781–790.
- [18] A. Bizyaeva, A. Franci, and N. E. Leonard. Nonlinear opinion dynamics with tunable sensitivity[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2023, 68(3): 1415–1430.
- [19] A. Franci, M. Golubitsky, I. Stewart, A. Bizyaeva, and N. E. Leonard. Breaking indecision in multiagent, multiopinion dynamics[J]. SIAM-Journal on Applied Dynamical Systems, 2023, 22(3): 1780–1817.
- [20] R. Hegselmann and U. Krause. Opinion dynamics and bounded confidence: models, analysis and simulation[J]. Journal of Artificial Societies and Social Simulation, 2002, 5(3): 1–33.
- [21] Hiller and Timo. Friends and enemies: a model of signed network formation[J]. Theoretical Economics, 2017, 12(3): 1057–1087.
- [22] N. E. Leonard, K. Lipsitz, A. Bizyaeva, A. Franci, and Y. Lelkes. The nonlinear feedback dynamics of asymmetric political polarization[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 2021, 118(50): e2102149118.
- [23] W. Mei, F. Bullo, G. Chen, J. M. Hendrickx, and F. Dorfler. Microfoundation of

- opinion dynamics: rich consequences of the weighted median mechanism[J].
physical review research, 2022, 4(2): 023213.
- [24] F. P. Santos, Y. Lelkes, and S. A. Levin. Link recommendation algorithms and dynamics of polarization in online social networks[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 2021, 118: e2102141118.
- [25] J. K. David Bindel and S. Oren. How bad is forming your own opinion? [J]. Games and Economic Behavior, 2015, 92: 248–265.
- [26] J. Ghaderi and R. Srikant. Opinion dynamics in social networks with stubborn agents : equilibrium and convergence rate[J]. Automatica, 2014, 50(12): 3209–3215.
- [27] N. E. Friedkin. The problem of social control and coordination of complex systems in sociology: a look at the community cleavage problem[J]. IEEE Control Systems Magazine, 2015, 35(3): 40–51.
- [28] S. E. Parsegov, A. V. Proskurnikov, R. Tempo, and N. E. Friedkin. A new model of opinion dynamics for social actors with multiple interdependent attitudes and prejudices[J]. In 2015 54th IEEE Conference on Decision and Control, 2015:3475–3480.
- [29] W. Su, G. Chen, and Y. Hong. Noise leads to quasi-consensus of hegselmannkrause opinion dynamics[J]. Automatica, 2018, 85: 448–454.
- [30] S. R. Etesami and T. Basar. Game-theoretic analysis of the hegselmannkrause model for opinion dynamics in finite dimensions[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(7): 1886–1897.
- [31] C. Altafini. Consensus problems on networks with antagonistic interactions[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012, 58(4): 935–946.
- [32] J. Liu, X. Chen, T. Basar, and M. A. Belabbas. Exponential convergence of the discrete- and continuous-time altafini models[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62(12): 6168–6182.

- [33] W. Xia, M. Cao, and K. H. Johansson. Structural balance and opinion separation in trustmistrust social networks[J]. IEEE Transactions on Control of Network Systems, 2015, 3(1): 46–56.
- [34] P. E. Converse. The nature of belief systems in mass publics (1964) [J]. Critical Review, 2006, 18(1-3): 1–74.
- [35] N. E. Friedkin, A. V. Proskurnikov, R. Tempo, and S. E. Parsegov. Network science on belief system dynamics under logic constraints[J]. Science, 2016, 354(6310): 321–326.
- [36] A. Nedic, A. Olshevsky, and C. A. Uribe. Graph-theoretic analysis of belief system dynamics under logic constraints[J]. Scientific reports, 2019, 9(1): 8843.
- [37] A. Hamlin. Private truths, public lies: the social consequences of preference falsification[J]. The Economic Journal, 1996, 106(438): 1435–1437.
- [38] R. B. Cialdini and N. J. Goldstein. Social influence: compliance and conformity[J]. Annual review of psychology, 2004, 55: 591–621.
- [39] Levine and S. Abraham. Groups, leadership and men[J]. Journal of Applied Psychology, 1953, 37(3): 244–245.
- [40] D. Centola, R. Willer, and M. Macy. The emperor's dilemma: a computational model of selfenforcing norms[J]. American Journal of Sociology, 2005, 110(4): 1009–1040.
- [41] N. L. Waters and V. P. Hans. A jury of one: opinion formation, conformity, and dissent on juries[J]. Journal of Empirical Legal Studies, 2009, 6(3): 513–540.
- [42] M. Ye, Y. Qin, A. Govaert, B. D. Anderson, and M. Cao. An influence network model to study discrepancies in expressed and private opinions[J]. Automatica, 2019, 107: 371–381.
- [43] Karlin S. A first course in stochastic processes[M]. Academic press, 2014.
- [44] L. Zino, M. Ye, and M. Cao. A two-layer model for coevolving opinion dynamics

- and collective decision-making in complex social systems[J]. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2020, 30(8): 083107.
- [45] Y. Shang. Resilient consensus for expressed and private opinions[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2019, 51(1): 318–331.
- [46] C. Cheng and C. Yu. Opinion dynamics with bounded confidence and group pressure[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2019, 532: 121900.
- [47] W. Mei, J. M. Hendrickx, G. Chen, F. Bullo, and F. Dorfler, “Convergence, consensus, and dissensus in the weighted-median opinion dynamics,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2024, 69(10): 6700–6714.
- [48] W. Xia, H. Liang, and M. Ye. Asynchronous expressed and private opinion dynamics on influence networks[J]. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2023, 10(2): 544–555.
- [49] M. Ye, J. Liu, L. Wang, B. D. O. Anderson, and M. Cao. Consensus and disagreement of heterogeneous belief systems in influence networks[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, 35(11): 4679–4694.
- [50] 刘青松, 李明鹏, 柴利. 具有遗忘个体的社会网络多维观点动力学分析与应用[J]. *自动化学报*, 2023, 49(10): 2201-2210.
- [51] G. He, Z. Shen, T. Huang, W. Zhang, and X. Wu. Opinion dynamics with heterogeneous multiple interdependent topics on the signed social networks[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2023, 53(10): 6181–6193.
- [52] Z. Meng, G. S. K.H.Johansson, M. Cao, and Y. Hong. Behaviors of networks with antagonistic interactions and switching topologies[J]. *Automatica*, 2006, 73: 110–116.
- [53] D. S. Bernstein. *Matrix mathematics : theory, facts, and formulas with application to linear systems theory*[M]. Princeton University Press, 2005.

- [54] Wilson.J.Rugh. Linear System Theory[M]. Prentice-Hall, Inc., 1996.
- [55] G. He, H. Ruan, Y. Wu, and J. Liu. Opinion dynamics with competitive relationship and switching topologies[J]. IEEE Access, 2020, 9: 3016–3025.
- [56] W. Ren and R. W. Beard. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50(5): 655–661.
- [57] W. W. Zachary. An information flow model for conflict and fission in small groups[J]. Journal of Anthropological Research, 1977, 33(4): 452–473.

硕士期间发表的论文

- [1] 丁汝霞, 杨露, 胡慧敏, 何广. 基于符号图的具有私人观念的多维观念动力学模型分析[J]. 兰州工业学院学报, 2025. (已录用)
- [2] Guang He, Xiaotai Wu, Rujia Ding, Wenbing Zhang, Yang Tang, Fellow, IEEE, and Jurgen Kurths. Multidimensional Opinion Dynamics with Private Opinions and Heterogeneous Belief Systems on the Signed Social Networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control. (under review)

致谢

三年一瞬，聚散有时，我的研究生生涯迎来了尾声。回顾安工程的这三年，思绪良多，在这三年，我学会了很多，成长了很多，认识了很多朋友，受到了许许多多人的帮助，在此，我将向他们表达最真挚的感谢。

首先，我衷心感谢我的导师何广教授，他的悉心指导贯穿了整个研究过程。从选题到构思，从资料收集到论文撰写，何老师总是耐心倾听我的想法，给予我专业的建议和方向性的指引。在遇到难题时，何老师的鼓励让我重拾信心；在研究陷入瓶颈时，何老师的点拨又让我豁然开朗。何老师严谨的治学态度和丰富的学术经验，为我的研究提供了坚实的保障，让我在学术道路上少走了许多弯路。这份恩情，我将铭记于心，永不敢忘。

其次，我要感谢我的父母。他们是我永远的依靠。在我为学业奔波、为研究焦虑时，父母总是用简单而温暖的话语安慰我，给予我无条件的支持。他们从不干涉我的选择，只是默默地在背后为我加油鼓劲。每当我回到家中，看到他们关切的眼神和忙碌的身影，我便充满了力量。父母的爱是我最坚实的后盾，让我在学术探索的道路上无惧风雨，勇往直前。

最后，我要感谢 507 实验室的同学们。我们一起度过了许多难忘的时光。在研究过程中，我们互相讨论、互相帮助，共同攻克了一个又一个难题。实验室里充满了欢声笑语，也充满了拼搏奋进的氛围。我们一起分享成功的喜悦，也一起面对失败的挫折。这些经历让我明白，团队的力量是无穷的。感谢你们的陪伴，让我的学术旅程不再孤单。

感谢所有给予我帮助和支持的人，是你们让我在学术道路上走得更远、更稳。未来，我将继续努力，不辜负你们的期望。