

分类号：(F840.67)

单位代码：10363

密 级：公开

学 号：2221010106

题 目 分数布朗运动环境下的期权定价研究

题 目 Pricing Option under the Fractional  
Brownian Motion Environment

学生姓名： 孟祥红

指导教师： 沈明轩 副教授

专 业： 金 融

研究方向： 金融风险管理

论文答辩日期： 2025 年 5 月 14 日

## 安徽工程大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：我恪守学术道德，崇尚严谨学风。所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已明确注明和引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品及成果的内容。论文为本人亲自撰写，我对所写的内容负责，并完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

学位论文作者签名：孟祥红

日期：2025 年 5 月 14 日

## 安徽工程大学学位论文版权使用授权书

学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅或借阅。本人授权可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保密☐，在 \_\_\_\_ 年解密后适用本版权书。

本学位论文属于

不保密☒。

学位论文作者签名：孟祥红

日期：2025 年 5 月 14 日

指导教师签名：沈明轩

日期：2025 年 5 月 14 日

## 分数布朗运动环境下的期权定价研究

### 摘 要

在金融市场中，期权因其风险对冲功能一直保持高度活跃状态，而如何提高其定价的合理性与准确性，也是学者们不断探讨研究的重要课题。构建合理的期权定价模型具有重要意义：一方面于投资者而言，其能够帮助投资者科学评估期权价值，精准捕捉市场趋势变化，进而制定更具适应性的投资组合策略，有效规避价格波动风险，提升资金配置效率；另一方面于市场交易层面而言，公允的定价标准为交易双方提供可靠的价值锚点，保障交易公平性，同时通过增强期权合约的流动性，显著提升市场整体交易效能。因此，期权定价研究不仅推动了金融市场理论的完善发展，也能在一定程度上促进金融市场实践的发展。

亚式期权作为金融市场上最受欢迎的奇异期权之一，关于它的期权定价模型，学者们也已经做了大量研究，从经典布莱克斯科尔斯模型扩展至分数布朗运动再到构建布朗运动与分数布朗运动的线性组合，但在与其他期权组合构造的奇异期权以及赋权分数布朗运动方面仍有不足与空白之处。在此背景下，本文旨在推广这些发现，优化现有定价模型，从期权种类及改进布朗运动入手，考虑混合跳扩散环境下上限型与抵付型两类奇异期权定价以及混合赋权分数布朗运动下的亚式期权定价。

首先，考虑金融资产价格变动的自相似性、长期依赖性等分形

特征及跳跃现象，假设股票价格服从混合分数跳扩散过程，通过伊藤引理和分数伊藤公式求解随机微分方程，得到股票价格所满足的随机微分方程解析解，再运用拟条件期望及全概率公式得出上限型与抵付型两类奇异期权定价公式，最后，以抵付型看涨期权为例进行数值模拟，分析不同行权价格、跳跃强度和幂指数对期权价格的影响。

其次，考虑资产价格变动的灵活性，引入赋权分数布朗运动刻画非平稳增量，创新性构建标准布朗运动与赋权分数布朗运动的线性组合，基于混合赋权分数跳扩散过程，参照上述定价方法，给出混合赋权分数布朗跳扩散环境下的几何亚式期权定价公式，并考虑收益函数为幂函数的情况，给出了该环境下的几何亚式幂型期权定价公式。最后，以幂期权为例，利用控制变量法模拟行权价格、跳跃强度、幂指数和赋权参数对亚式幂型看涨期权价格的影响。

**关键词：**分数布朗运动，亚式期权，跳扩散，拟条件期望，数值模拟

# PRICING OPTION UNDER THE FRACTIONAL BROWNIAN MOTION ENVIRONMENT

## ABSTRACT

In the financial market, options remain highly active due to their risk hedging function. Meanwhile, how to improve the rationality and accuracy of option pricing is also an important topic constantly explored by scholars. Building a reasonable option pricing model is of great significance. On the one hand, for investors, it can help them scientifically evaluate the value of options, accurately capture changes in market trends, thereby formulate more adaptable investment portfolio strategies, effectively avoid price fluctuation risks, and improve the efficiency of capital allocation. On the other hand, at the market transaction level, a fair pricing standard provides a reliable value anchor for both parties to the transaction, ensuring the fairness of the transaction. At the same time, by enhancing the liquidity of option contracts, it significantly improves the overall transaction efficiency of the market. Therefore, the research on option pricing not only promotes the improvement and development of financial market theory, but also can, to a certain extent, contribute to the development of financial market practices.

Asian option is one of the most popular exotic options in the financial market. Scholars have done a lot of research on its option pricing model, which extends from the classical Black-Scholes model to fractional Brownian motion and then to construct the linear combination of fractional Brownian motion. However, there are still some shortcomings and gaps in singular options combined with other options and fractional Brownian motion. Against this backdrop, the purpose of this paper is to promote these findings, optimize existing pricing models, starting with the types of options and improvements to Brownian motion, considering the pricing of two types of exotic options, namely, cap and offset options, under the mixed jump-diffusion environment, as well as the pricing of Asian options under the mixed weighted fractional Brownian motion.

Firstly, considering the fractal characteristics of financial asset price changes such as self-similarity, long-term dependence and jumping phenomenon, assuming that stock prices obey the mixed fractional jump diffusion process, the stochastic differential equation is solved by Itô lemma and fractional Itô formula, and the analytic solution of the stochastic differential equation satisfied by stock prices is obtained. Then, two kinds of exotic option pricing formulas of cap type and offset type are obtained by using quasi-conditional expectation and full probability formula. Finally, taking the offset call option as an example, we conduct

numerical simulations to analyze the impact of different exercise prices, jump intensities, and power indices on the option price.

Secondly, considering the flexibility of asset price changes, we introduce the weighted fractional Brownian motion to describe the non-stationary increment, and creatively construct the linear combination of standard Brownian motion and weighted fractional Brownian motion. Based on the mixed weighted fractional jump diffusion process and referring to the above pricing methods, we give the geometric Asian option pricing formula under the mixed weighted fractional jump diffusion environment. Furthermore, considering the case where the return function is a power function, we present the geometric Asian power option pricing formula under this environment. Finally, taking power option as an example, we use the control variate method to simulate the impact of exercise price, jump intensity, power exponent, and weighting parameters on the price of Asian power call options.

KEY WORDS: Fractional Brownian motion, Asian options, Jump diffusion, Quasi-conditional expectation, numerical simulation

## 目录

|                                  |     |
|----------------------------------|-----|
| 摘 要 .....                        | I   |
| ABSTRACT .....                   | III |
| 第 1 章 绪论 .....                   | 1   |
| 1.1 研究背景 .....                   | 1   |
| 1.2 研究意义 .....                   | 1   |
| 1.3 国内外研究现状 .....                | 2   |
| 1.4 文献评述 .....                   | 6   |
| 1.5 论文结构 .....                   | 6   |
| 1.6 研究内容及创新点 .....               | 7   |
| 第 2 章 预备知识 .....                 | 9   |
| 2.1 亚式期权 .....                   | 9   |
| 2.2 上限型期权与抵付型期权 .....            | 9   |
| 2.3 布莱克斯科尔斯期权定价模型 .....          | 10  |
| 2.4 分数布朗运动 .....                 | 10  |
| 2.5 赋权分数布朗运动 .....               | 11  |
| 2.6 分数伊藤积分 .....                 | 12  |
| 2.7 拟条件期望 .....                  | 13  |
| 第 3 章 混合分数跳扩散环境下两类亚式期权的定价 .....  | 14  |
| 3.1 模型及假设 .....                  | 14  |
| 3.2 上限型期权定价 .....                | 15  |
| 3.3 抵付型期权定价 .....                | 17  |
| 3.4 数值模拟 .....                   | 18  |
| 3.5 本章小结 .....                   | 21  |
| 第 4 章 混合赋权分数布朗跳扩散环境下亚式期权定价 ..... | 22  |
| 4.1 模型及假设 .....                  | 22  |
| 4.2 几何亚式期权定价公式 .....             | 23  |
| 4.3 几何亚式幂型期权定价 .....             | 25  |

|                   |    |
|-------------------|----|
| 4.4 数值模拟 .....    | 27 |
| 4.5 本章小结 .....    | 30 |
| 第 5 章 总结与展望 ..... | 31 |
| 参考文献 .....        | 33 |
| 硕士期间发表的论文 .....   | 38 |
| 致谢 .....          | 39 |

## 第 1 章 绪论

### 1.1 研究背景

期权定价模型的研究主要源于金融市场的快速发展和金融衍生品合理定价的需求。期权交易兴起初期，人们多依赖经验对期权价值进行粗略的估计，但随着交易规模的扩大，出于交易公平性的考量，衍生品市场急需一种科学的方法来确定期权价值，布莱克斯科尔斯期权定价模型的出现与引入很好的解决了这一问题。该模型考量了标的资产价格、行权价格、期权到期时间、无风险利率以及资产价格波动率等多方面因素，利用数学公式，给出了欧式期权的科学定价方法。布莱克斯科尔斯模型的出现极大地推动了期权交易市场的规范化发展，也为后续学者们在期权定价方面的研究奠定了坚实的基础，是期权定价发展的一个重要里程碑。

但随着深入研究，人们发现该模型对金融市场的假定过于完美，不符合实际市场情况，资产价格变动的自相似性与长期依赖性等都不能很好的进行解释，于是学者们开始引进分数布朗运动刻画资产价格变动并据此发展出完善的定价体系。然而，分数布朗运动描述下的金融市场可能存在套利问题，于是学者们进一步将分数布朗运动拓展至混合分数布朗运动。此外，还有学者提出分数布朗运动的另一种扩展赋权分数布朗运动，他所提供的非平稳增量为资产价格提供了更灵活的依赖结构。混合分数布朗运动是标准布朗运动与分数布朗运动的推广，能更好的刻画金融市场尖峰厚尾、自相似及长依赖性等现象。混合赋权分数布朗运动则更进一步优化了期权定价模型，基于此运动得出的期权定价模型在一定程度上涵盖了各类期权定价结果，具有更高的理论价值及应用价值。

### 1.2 研究意义

期权的合理定价是期权交易市场迅猛发展的需要。根据国际期货业协会(FIA)发布的 2023 年期权期货交易量统计数据所显示，2023 全球衍生品交易总量连续第六年创纪录，已达 1373 亿份合约，同比增长约 64%。其中，场内期权

成交量较 2022 年相比急剧增长 98.4%，持仓量同比增长 17.8%。此外，预计当前及今后一段时期，全球经济面临的下行压力使得生产企业以及机构投资者的风险管理需求激增，经济的不确定性和金融市场的动荡致使人们对于衍生品市场对冲风险的需求增大，从而促进衍生品市场交易规模进一步扩大。加之地缘政治带来的风险大概率将持续加剧，衍生品市场交易量预计持续增加。

亚式期权是期权市场上最受欢迎的奇异期权之一，区别于欧式期权或美式期权，其到期收益依赖于一段时间内标的资产的平均价格，而不是其在特定时间点的价格。也正因这一特点，使得其价格波动相对较小，可以帮助投资者更好的规避风险，深受投资者青睐。综上所述，亚式期权定价研究是金融研究领域的热点之一，构建合理地期权定价模型有助于更为合理地评估金融衍生品价值，有效对冲风险，促进金融市场交易公平。

关于期权定价模型，前人已做了大量研究，从经典布莱克斯科尔斯模型扩展至分数布朗运动再到构建布朗运动与分数布朗运动的线性组合，但在部分奇异期权及赋权分数布朗运动方面仍有不足之处。在此背景下，本文旨在推广这些发现，优化现有定价模型，从期权种类及改进布朗运动入手，考虑混合跳扩散环境下上限型与抵付型两类奇异期权定价以及混合赋权分数布朗运动下的亚式期权定价。

### 1.3 国内外研究现状

Black 和 Scholes<sup>[1]</sup>(1973)提出了著名的布莱克斯科尔斯模型，该模型假定标的资产价格遵循由标准几何布朗运动驱动的随机过程，为此后各类型期权定价研究奠定了坚实基础。然而，随着研究的不断深入，人们发现该模型对实际金融市场的假设存在局限性，实际的金融市场并不像布莱克斯科尔斯模型假定的那样完美，金融资产价格变动所存在的规模效应、季节效应、尖峰厚尾和资产的长期相关性等现象都无法用标准几何布朗运动驱动模型进行解释，由此建立的期权定价模型与市场实际价格也有所差异。因此针对这些不足，学者们进一步改进传统的期权定价公式。Kolmogorov<sup>[2]</sup>(1940)首次提出分数布朗运动模型，相较于传统标准布朗运动，该模型能更好的刻画标的资产变化所具有的长期相关性和自相似性。在此基础上，Peters<sup>[3]</sup>(1989)使用分数布朗运动定价模型研究

了金融资产的价格变化情况，对布莱克斯科尔斯期权定价理论进行了改进和推广。陈俊霞、赛明<sup>[4]</sup>(2006)考虑股价服从几何分数布朗运动推导出欧式期权定价公式，并说明几何布朗运动是该模型的一种特殊情况。Necula<sup>[5]</sup>(2008)在风险中性的测度下，利用傅里叶变换法和 Girsanov 测度变换研究了该过程在欧式期权定价中的应用。在等价鞅测度下，刘韶跃，杨向群<sup>[6]</sup>(2004)在假设资产价格过程服从几何分数布朗运动的条件下，研究了有红利支付时的欧式期权一般定价公式并给出了几种奇异期权的定价公式。周圣武，刘海媛<sup>[7]</sup>(2009)讨论了分数布朗运动环境下欧式看涨、看跌期权定价公式。赵英英，胡华和马玲<sup>[8]</sup>(2018)首先运用风险中性测度的等价鞅方法得出有红利支付的标的资产价格，然后利用拟条件数学期望公式，结合二者最后推导出欧式双向期权的定价公式。Kalantari<sup>[9]</sup>(2019)等则利用有限差分法研究了分数布朗运动模型框架下美式看跌期权的定价模型。李雨珊，薛红<sup>[10]</sup>(2021)建立了分数布朗运动环境下具有机制转换的欧式期权定价模型，并以上证 50ETF 期权为例进行实证分析，还与其他模型价格做出对比分析以证明该模型相比之下更适用于实际的金融市场。孙娇娇，董峰<sup>[11]</sup>(2022)考虑违约风险的可能性，假设标的资产价格和承约方资产的市场价值均服从分数布朗运动，推导出基于分数布朗运动下有红利支付的脆弱期权定价公式。

Bojedcki 等<sup>[12]</sup>(2007)提出了一种对分数布朗运动的扩展，称为赋权分数布朗运动。它同样具有自相似性、轨道连续性、既不是马尔科夫过程又不是半鞅等特性，与前者相比最大的不同在于非平稳增量，这也为其提供了更灵活的依赖结构。从这个角度来说，赋权分数布朗运动要比分数布朗运动更适合刻画金融市场行为，投资者通常会推迟决策，直到在这样的系统中信息超过特定的门槛。Sun 等<sup>[13]</sup>(2012)使用概率和精算方法推导了赋权分数布朗运动下的欧式期权定价公式，并解释了使用该种模型进行期权定价的合理性。

Cheridito<sup>[14-16]</sup>(2001,2003)发现采用路径积分理论或是 Wick 积分理论，都能构建显性的套利策略，因此从长远来看不存在真正意义的市场均衡。为解决分数布朗运动下的金融市场可能存在的套利问题，学者们进一步提出了用混合分数布朗运动来刻画金融资产价格变动。即构建一个布朗运动与分数布朗运动的线性组合，并证明了当赫斯特指数  $H \in (3/4, 1)$  时，混合分数布朗运动等价于标

准布朗运动,从而有效地消除了金融市场中套利的可能性。基于混合分数布朗运动为驱动的定价模型,余征,闫理坦<sup>[17]</sup>(2008)得到了完备的混合型布莱克斯科尔斯市场下的欧式看涨期权定价公式。Sun 等<sup>[18,19]</sup>(2012,2013)建立了基于混合分数布朗运动的定价模型,并推导出了相应的分数阶偏微分方程,考虑了具有信用风险的金融衍生品定价问题以及欧式货币期权定价问题。Xiao 等<sup>[20]</sup>(2012)在该环境下基于拟条件期望和傅里叶变换研究了认股权证的定价问题,并采用数值方法进行求解。刘文倩,韦才敏和卜祥智<sup>[21]</sup>(2018)利用 Delta 对冲以及混合分数伊藤公式建立定价模型,并通过偏微分方程方法得到了混合分数布朗运动环境下欧式障碍期权定价公式。Khalaf 等<sup>[22]</sup>(2021)构造了标准布朗运动与赋权分数布朗运动的线性组合,首次定义为混合赋权分数布朗运动,并考虑了漂移参数  $\theta > 0$  时的参数估计问题。胡鹏<sup>[23]</sup>(2022)将分数布朗运动进一步推广到广义混合分数布朗运动(GMFBM),并基于该模型下对亚式期权、亚式幂型期权及亚式彩虹期权展开了定价研究。林先伟,秦学志和尚勤<sup>[24]</sup>(2022)利用分形理论和模糊集理论,构建了欧式期权模糊定价模型并分析了赫斯特指数对欧式期权模糊定价模型的影响。庞秋月<sup>[25]</sup>(2024)考虑了在模糊状态下用混合次分数跳过程研究几何亚式期权定价问题。

此外,在金融市场研究领域,上述对期权的研究探讨大都假定股票价格基于连续变化状态,但在实际金融市场中,各类突发事件比如金融危机、自然灾害等时有发生,而这也导致股票价格发生间断性跳跃。鉴于股票价格变化的这一特性,在分数布朗运动模型中引进跳扩散过程,以此来描绘股票价格的动态变化过程,研究分数跳扩散环境下的期权定价问题。Merton<sup>[26]</sup>(1976)对布莱克斯科尔斯公式进行修正,在其中添加泊松跳跃过程。陈超<sup>[27]</sup>(2000)将泊松过程引入到期权定价理论中,推导出一种欧式期权的跳扩散定价公式,并在 2008 年将其推广至脆弱期权定价问题。钱晓松<sup>[28,29]</sup>(2003,2004)在跳扩散模型下研究了交换期权、亚式期权等奇异期权的定价问题。Kim 等<sup>[30]</sup>(2019)研究了在现货汇率服从带跳的广义混合分数布朗运动的情况下,利用等价鞅度量,得到了欧式货币期权和交换期权的解析定价公式,突出了这种方法在期权定价中的潜力。李文汉,钟盈和吕桂稳<sup>[31]</sup>(2021)在交换期权的收益函数中加入了反映标的资产价格之比的示性函数,推导出了跳扩散环境下数字幂型交换期权定价公式。Xu

等<sup>[32,33]</sup>(2023,2024)考虑模糊不确定因素的影响,建立了带跳的模糊混合赋权分数布朗运动所驱动定价模型,得出欧式看涨期权和看跌期权的定价公式,并进一步推进了这一研究至广义混合赋权分数布朗运动。

亚式期权是一种最常见的奇异期权,其到期收益依赖于资产价格的某种平均,由于其波动相对较小,能更好地规避投资风险,因此更受投资者的欢迎。由于该期权与欧式期权及美式期权相比具有许多特殊优点,研究者们在不同的领域也对该期权展开了研究。章珂,周文彪和沈荣芳<sup>[34]</sup>(2001)以连续时间情形为例,采用几何平均代替算术平均计算资产价格的平均值,得出亚式期权解析定价公式。肖文宁,王杨和张寄洲<sup>[35]</sup>(2005)分别从偏微分方程途径与概率论途径两种角度论述推导了亚式期权的详细定价过程,并将二者结果进行比较,证明两种方法得出的结论是完全一致的。金春红,隋振焯<sup>[36]</sup>(2006)研究了离散时间情形下几何平均价格亚式期权的定价问题,并证明在趋于极限时,离散时间与连续时间下几何平均亚式期权定价结果是相同的。王志明,徐娟<sup>[37]</sup>(2010)利用分数布朗运动随机分析理论研究了在固定执行价格下,有红利支付的几何平均亚式期权定价公式。孙玉东,师义民和谭伟<sup>[38]</sup>(2012)探讨了混合分数布朗运动环境下亚式期权的定价公式。沈明轩,何朝林<sup>[39]</sup>(2013)利用拟条件期望的方法,研究了浮动执行价格下几何平均亚式期权定价公式。曹桂兰,王勇<sup>[40]</sup>(2015)以计价单位变换为工具,给出了具有浮动敲定价格的离散和连续几何平均亚式期权的价格公式。薛广明,邓国和<sup>[41]</sup>(2017)利用鞅方法,推导出了具有浮动执行价格的远期生效幂型亚式几何平均看涨期权价格的显性表达式,并利用方差减少技术,建立了浮动执行价的远期生效幂型亚式算术平均看涨期权价格计算的蒙特卡罗模拟算法。基于可靠性数学的思想,在考虑有、无交易费用两种情况下,毛茈萍<sup>[42]</sup>(2020)依据风险中性定价原理研究了固定执价的几何亚式幂型期权定价公式。运用自融资 Delta 对冲策略,丁毅,郭精军<sup>[43]</sup>(2021)基于时变混合分数布朗运动刻画金融资产价格变动,给出了离散情形下几何平均亚式看涨期权所满足的偏微分方程,并进一步得到了几何平均亚式看涨、看跌期权的定价公式。程双双<sup>[44]</sup>(2023)研究了连续情形下基于时变过程的亚式期权定价模型。庞秋月,汪育兵<sup>[45]</sup>(2024)考虑金融市场模糊性,引入模糊理论,研究了基于混合次分数跳过程的几何亚式模糊期权定价。

## 1.4 文献评述

综上所述，在亚式期权定价方面的大多数研究：

第一，从期权种类细分来看，现有对上限型和抵付型期权等奇异期权的研究仍有欠缺，市场交易缺乏参考依据。本文将这两类期权与亚式期权收益函数进行结合，更深入地讨论了上限型和抵付型亚式期权的定价问题，填补了这类期权定价研究的空缺，为金融市场参与者提供了更具针对性、更丰富详实的理论指导。

第二，从模型构建来看，很少有学者从混合赋权分数布朗运动及跳扩散组合模型的角度出发研究期权定价问题，特别是在几何平均亚式期权定价问题方面。回顾已有的研究成果，大多数的都是基于单一分数模型或是一般的分数跳扩散组合模型进行研究的。深入研究表明，单一分数布朗运动应用于期权定价可能出现套利情况，而混合赋权分数布朗运动构建的线性组合可以很好地解决套利问题且为资产价格提供了更灵活的依赖结构。

## 1.5 论文结构

本文共包含五个章节：

第一部分为绪论。主要介绍了论文的研究背景、研究意义，并对国内外相关文献的研究现状予以介绍。

第二部分为预备知识。主要介绍了亚式期权相关概念、布莱克斯科尔斯期权定价模型、分数布朗运动与赋权分数布朗运动相关定义及性质、分数阶伊藤积分公式及证明和拟条件期望等相关预备知识。

第三部分考虑了不同类型的亚式期权定价。主要研究在混合分数布朗跳扩散环境下的亚式期权定价问题。假设股票价格服从混合分数跳扩散过程，利用拟鞅定价方法，研究上限型和抵付型几何平均亚式期权定价公式，并以抵付型几何平均亚式期权为例进行数值仿真说明相关研究结论。

第四部分考虑了不同基础模型下的亚式期权定价。主要研究在赋权分数布朗跳扩散环境下的亚式期权定价问题。假设标的资产由具有跳跃的混合赋权分数布朗运动驱动，在风险中性测度下，通过拟条件期望定价方法研究几何亚式

期权的定价公式。此外，当收益函数是幂函数时，进一步研究亚式幂期权的定价公式。通过数值实验分析了行权价格、跳跃强度等各种因素对亚式幂期权估值的影响。

第五部分将本文研究的主要内容进行总结，并对亚式期权后续研究工作做出展望。

本文的逻辑框架图如下所示：

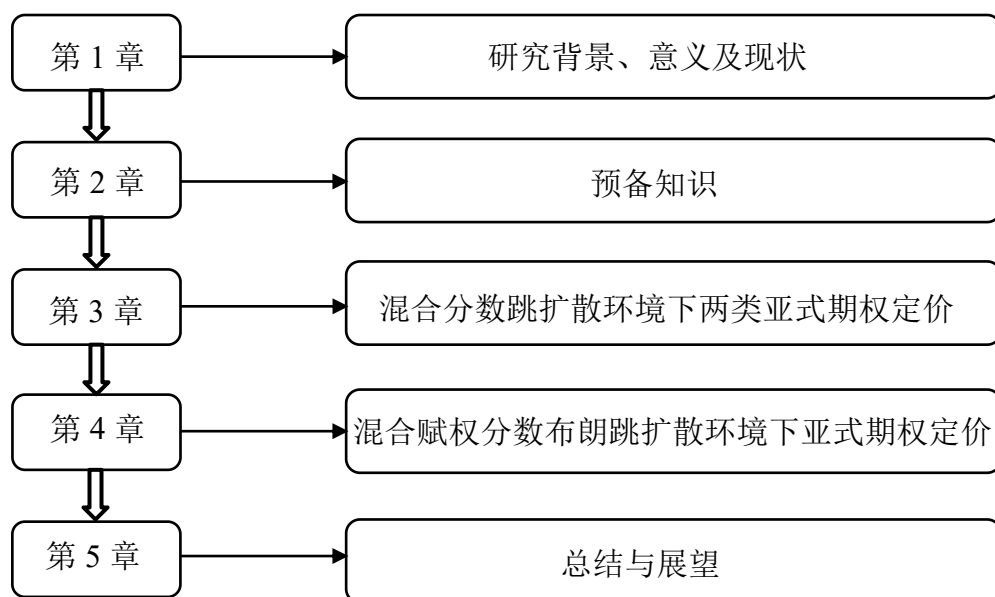


图 1-1 研究框架图

## 1.6 研究内容及创新点

本文的研究内容主要围绕以下两个方面：

第一，推导了混合分数布朗跳扩散环境下两类奇异期权定价公式。考虑金融资产价格变动的自相似性、长期依赖性等分形特征及跳跃现象，基于混合分数布朗跳扩散过程，运用风险中性定价原理构建期权定价模型。首先，通过伊藤引理和分数伊藤公式求解随机微分方程，得到股票价格所满足的随机微分方程解析解；其次，运用拟条件期望及全概率公式得出上限型与抵付型两类奇异期权定价公式；最后，以抵付型看涨期权为例进行数值模拟，分析不同行权价格、跳跃强度和幂指数对期权价格的影响。

第二，推导了混合赋权分数布朗跳扩散环境下几何亚式幂型期权定价公式。考虑资产价格变动的灵活性，引入赋权分数布朗运动刻画非平稳增量，创新性

构建标准布朗运动与赋权分数布朗运动的线性组合，基于混合赋权分数跳扩散过程，参照上述定价方法，给出混合赋权分数布朗跳扩散环境下的几何亚式期权定价公式，并考虑收益函数为幂函数的情况，给出了该环境下的几何亚式幂型期权定价公式；最后，以幂期权为例，利用控制变量法模拟行权价格、跳跃强度、幂指数和赋权参数 $a$ 、 $b$ 对亚式幂型看涨期权价格的影响。

针对几何亚式期权定价现有研究的不足，本文的创新点主要包括以下两个方面：

第一，深入研究几何平均亚式幂型期权。亚式期权由于其收益依赖于一段时间内资产价格的平均值，在较长时间内操纵平均价格远比操纵单一价格困难。而幂型期权对资产价格变化的敏感性更强，能更敏锐地反映资产价值的波动。几何平均亚式幂型期权作为两者的结合体，同时具备这两种新型期权的优势。基于此，依托几何平均亚式幂型期权收益函数为上限型与抵付型两类奇异期权定价，最终给出相关定价公式并进行数值模拟以验证定价公式准确性。

第二，深入改进原有期权定价模型，考虑将分数布朗运动的拓展——赋权分数布朗运动运用于混合定价模型。分数布朗运动在描述资产价格的动态变化中已展现出独特优势，而赋权分数布朗运动在此基础上更进一步。相比于分数布朗运动，他所提供的非平稳增量为资产价格变动提供了更灵活的依赖结构，能够更精准地刻画资产价格的复杂波动特性。相较于传统的混合分数布朗运动，标准布朗运动与赋权分数布朗运动的线性组合更进一步优化了期权定价模型，涵盖了更广泛的期权定价结果，在一定程度上具有更高的理论价值及应用价值。

## 第 2 章 预备知识

### 2.1 亚式期权

亚式期权，也称平均价格期权，是金融衍生品市场上交易活跃的期权之一。它与标准期权的主要区别在于执行价格，亚式期权的执行价格是基于期权合同期内某段时间标的资产价格的平均值。也正是因为这一特性，降低了亚式期权在结算时受到现货市场可能存在的人为操纵风险。

根据执行价格是否固定，亚式期权分为固定执行价格与浮动执行价格；根据标的资产价格的平均方式不同，亚式期权可以分为算术平均与几何平均两种。本文主要考虑在固定执行价格下几何亚式期权定价问题。

固定执行价格看涨期权收益函数为  $(G(T) - K)^+$ ，看跌期权为  $(K - G(T))^+$ ，其中  $G(T) = \exp\left[\frac{1}{T} \int_0^T \ln S_t dt\right]$ 。

### 2.2 上限型期权与抵付型期权

**定义 2.1<sup>[47]</sup>** 令  $A(T) = \frac{1}{T} \int_0^T \ln S_t dt$ ，则  $G(T) = \exp[A(T)]$  表示资产价格在  $(0, T)$  内的几何平均。

上限型几何平均亚式幂型看涨期权在  $T$  时刻的支付函数如下：

$$g_1[S(T)] = \begin{cases} 0, & G^\alpha(T) \leq K_1; \\ G^\alpha(T) - K_1, & K_1 < G^\alpha(T) < K_2; \\ K_2 - K_1, & G^\alpha(T) \geq K_2. \end{cases} \quad (2.1)$$

其中  $\alpha > 1$ ， $K_1$ 、 $K_2$  为给定值，并有  $K_1 < K_2$ 。

抵付型几何平均亚式幂型看涨期权在  $T$  时刻的支付函数如下：

$$g_2[S(T)] = \begin{cases} 0, & G^\alpha(T) \leq K; \\ 0, & K < G^\alpha(T) < M; \\ G^\alpha(T) - K, & G^\alpha(T) \geq M. \end{cases} \quad (2.2)$$

其中  $K$ 、 $M$  为给定值，并有  $K < M$ 。

## 2.3 布莱克斯科尔斯期权定价模型

假设标的股票的期望收益率为无风险利率，且股票价格  $S_t$  服从几何布朗运动，则有如下随机微分方程：

$$dS_t = rS_t dt + \delta S_t dB_t, \quad (2.3)$$

求解随机微分方程可得：

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left( r - \frac{1}{2} \delta^2 \right) t + \delta B_t \right\}, \quad (2.4)$$

求解终期损益并贴现后即可得欧式看涨期权价格为：

$$C(S(0), T) = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2), \quad (2.5)$$

其中

$$d_1 = d_2 + \delta \sqrt{T}, \quad d_2 = \frac{\ln \frac{S_0}{K} + \left( r - \frac{1}{2} \delta^2 \right) T}{\delta \sqrt{T}}.$$

## 2.4 分数布朗运动

**引理 2.1**<sup>[46]</sup> 设  $(\Omega, F, P)$  是一个完备的概率空间，定义在此概率空间上的分数布朗运动  $(W_t^H)_{t \in R_+}$  是 Hurst 指数  $H \in (0, 1)$  的连续高斯过程，并具有如下性质：

(1) 自相似性：对任意  $a > 0$ ， $(W_{at}^H)_{t \in R_+} \triangleq (a^H W_t^H)_{t \in R_+}$ 。

(2) 长期依赖性：令  $\rho(n) = \text{Cov}(W_1^H, W_{n+1}^H - W_n^H)$ ，当  $H \in (\frac{1}{2}, 1)$  时，则有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho(n) = \infty.$$

(3)  $\text{Cov}(W_t^H, W_s^H) = \frac{1}{2} (t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H})$ ， $\forall t \in R_+$ ， $\forall s \in R_+$ 。

(4) 对  $\forall t \in R_+$ ,  $\forall H \in (0,1)$ , 有  $Var(W_t^H) = E((W_t^H)^2) = t^{2H}$ 。

(5) 对  $\forall t \in R_+$ , 当  $H \neq \frac{1}{2}$  时,  $(W_t^H)_{t \in R_+}$  既不是 Markov 过程也不是半鞅。

**定义 2.2**<sup>[24]</sup> 混合分数布朗运动  $M(t)$  是定义在  $(\Omega, F, P)$  上的布朗运动  $B_t$  与分数布朗运动  $W_t^H$  的一个线性组合:

$$M_t^H(\varepsilon, \delta) = \varepsilon B_t + \delta W_t^H, \quad \forall t \geq 0,$$

其中,  $\varepsilon$ 、 $\delta$  以及 Hurst 指数  $H$  均为不为零的实常数。

## 2.5 赋权分数布朗运动

**引理 2.2**<sup>[22]</sup> 设  $(\Omega, F, P)$  是一个完备的概率空间, 定义在此概率空间上的赋权分数布朗运动  $B^{a,b}$  是以零为起点的中心高斯过程, 其协方差为:

$$R^{a,b}(t, s) = E[B_t^{a,b}, B_s^{a,b}] = \int_0^{t \wedge s} u^a \left[ (t-u)^b + (s-u)^b \right] du, \quad \forall t, s \geq 0, \quad (2.6)$$

其中, 参数  $a$ ,  $b$  满足  $a > -1$ ,  $|b| < 1$ ,  $|b| < a+1$ ; 特别地, 当  $a = 0$ ,  $|b| < 1$  时, 赋权分数布朗运动等价于赫斯特指数为  $\frac{b+1}{2}$  的分数布朗运动; 且当  $a = 0$ ,  $b = 0$  时等价于标准布朗运动。

**引理 2.3**<sup>[33]</sup> 混合赋权分数布朗运动  $\xi(t)$  是定义在  $(\Omega, F, P)$  上的布朗运动  $B_t$  与赋权分数布朗运动  $W_t^H$  的一个线性组合:

$$\zeta_t(\delta_1, \delta_2) = \delta_1 B_t + \delta_2 B_t^{a,b}, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.7)$$

混合赋权分数布朗运动具有如下性质:

- (1)  $\{\zeta_t(\delta_1, \delta_2)\}_{t \geq 0}$  是一个中心高斯过程。
- (2) 当  $t = 0$  时,  $\zeta_0(\delta_1, \delta_2) = \delta_1 B_0 + \delta_2 B_0^{a,b} = 0$ 。
- (3) 对任意  $t \geq 0$ ,  $s \geq 0$ ,  $\zeta_t(\delta_1, \delta_2)$  与  $\zeta_s(\delta_1, \delta_2)$  的协方差为:

$$\text{cov}(\zeta_t(\delta_1, \delta_2), \zeta_s(\delta_1, \delta_2)) = \delta_1^2(t \wedge s) + \delta_2^2 \int_0^{t \wedge s} u^a \left[ (t-u)^b + (s-u)^b \right] du,$$

其中  $t \wedge s = \frac{1}{2}(t+s-|t-s|)$ 。

(4) 对任意  $t \geq 0$ ,  $E[(\zeta_t(\delta_1, \delta_2))^2] = \delta_1^2 t + 2\delta_2^2 \int_0^t u^a (t-u)^b du$ 。

## 2.6 分数伊藤积分

引理 2.4<sup>[46]</sup> 令  $f(t, W_t^H)$  为时间  $t$  与几何分数布朗运动  $W_t^H$  的函数, 那么:

$$df(t, W_t^H) = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + Ht^{2H-1} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right\} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dW_t^H. \quad (2.8)$$

证明:

$$\begin{aligned} df(t, W_t^H) &= \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dW_t^H + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (dW_t^H)^2 \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} dt + \delta_1 \frac{\partial f}{\partial x} dB_t + \delta \frac{\partial f}{\partial x} dW_t^H + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dt^{2H} \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial t} + Ht^{2H-1} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \frac{\partial f}{\partial x} dW_t^H, \end{aligned}$$

引理 2.4 得证。

引理 2.5<sup>[46]</sup> 假设股票价格服从几何分数布朗运动, 即:

$$dS_t = rdt + \delta dW_t^H, \quad (2.9)$$

关于上式求解随机微分方程可得其解为:

$$S_t = S_0 \exp \left\{ rt - \frac{1}{2} \delta^2 t^{2H} + \delta_1 W_t^H \right\}. \quad (2.10)$$

证明: 令  $f(t, W_t^H) = S_0 \exp \left\{ rt - \frac{1}{2} \delta^2 t^{2H} + \delta_1 W_t^H \right\}$ , 则有:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= f(t, W_t^H)(r - \delta^2 Ht^{2H-1}), \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= f(t, W_t^H)\delta, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f(t, W_t^H)\delta^2. \end{aligned}$$

代入式(2.6), 可得:

$$\begin{aligned} df(t, W_t^H) &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + Ht^{2H-1} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right\} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dW_t^H \\ &= \left\{ f(t, W_t^H)(r - \delta^2 Ht^{2H-1}) + \delta^2 Ht^{2H-1} f(t, W_t^H) \right\} dt + \delta f(t, W_t^H) dW_t^H \end{aligned}$$

$$= rf(t, Y_t)dt + \delta f(t, W_t^H)dW_t^H,$$

令上式中  $f(t, Y_t) = S_t$ ，上式即等价于：

$$dS_t = rdt + \delta dW_t^H,$$

引理 2.5 得证。

## 2.7 拟条件期望

**引理 2.6<sup>[48]</sup>** 任意有界关于  $F_t^H$  可测的未定权益  $U \in L^2(\mu)$ ，在任意  $t \in (0, T)$  时刻的价格为：

$$U(t) = e^{-r(T-t)} \tilde{E}_t[U]. \quad (2.11)$$

### 第3章 混合分数跳扩散环境下两类亚式期权的定价

#### 3.1 模型及假设

假设市场上只存在两种资产，无风险资产(如债券)与风险资产(如股票)。对于无风险资产，假设其价格过程满足微分方程：

$$dP(t) = rP(t)dt, P(0) = 1,$$

其中  $r$  为无风险利率。对于风险资产，假设其价格过程满足微分方程：

$$dS_t = (r - \lambda k)S_t dt + \varepsilon S_t dB_t + \delta S_t dW_t^H + (e^{J_t} - 1)S_t dN_t, \quad (3.1)$$

其中， $r > 0$  为市场无风险利率， $B_t$ 、 $W_t^H$  和  $N_t$  分别表示布朗运动、分数布朗运动以及 *Poisson* 过程， $\frac{1}{2} < H < 1$ ， $\lambda$  为 *Poisson* 的强度， $k = E_Q(e^{J_t} - 1)$  表示股票价格发生跳跃时其变化率的期望值， $J_t \sim N(\mu_J, \delta_J^2)$ 。

利用 *Wick - Itô* 积分，可求得随机微分方程解为<sup>[46]</sup>：

$$S(t) = S_0 \exp \left\{ (r - \lambda k - \frac{1}{2} \varepsilon^2) t - \frac{1}{2} \delta^2 t^{2H} + \varepsilon B_t + \delta W_t^H + \sum_{i=1}^{N_t} J_i \right\}, S_0 = S(0) > 0. \quad (3.2)$$

当  $N_t = n$  时，有  $\sum_{i=1}^{N_t} J_i \sim N(n\mu_J, n\delta_J^2)$ ，用  $Z$  表示标准正态分布，因此上式可表示为：

$$S(t) = S_0 \exp \left\{ (r - \lambda k - \frac{1}{2} \varepsilon^2) t - \frac{1}{2} \delta^2 t^{2H} + \varepsilon B_t + \delta W_t^H + n\mu_J + \sqrt{n}\delta_J Z \right\}, \quad (3.3)$$

等式两边取对数可得：

$$\ln S(t) = \ln S_0 + (r - \lambda k - \frac{1}{2} \varepsilon^2) t - \frac{1}{2} \delta^2 t^{2H} + \varepsilon B_t + \delta W_t^H + n\mu_J + \sqrt{n}\delta_J Z. \quad (3.4)$$

由(3.4)式可得：

$$\tilde{\mu}_n = \tilde{E}[A(T)] = \tilde{E}\left[\frac{1}{T} \int_0^T \ln S_t dt\right] = \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{E}[\ln S_t] dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{T} \int_0^T \ln S_0 + (r - \lambda k - \frac{1}{2} \varepsilon^2) t - \frac{1}{2} \delta^2 t^{2H} + n \mu_j dt \\
 &= \ln S_0 + \frac{T}{2} (r - \lambda k - \frac{1}{2} \varepsilon^2) - \frac{\delta^2 T^{2H}}{2(2H+1)} + n \mu_j, \\
 \tilde{\delta}_n^2 &= \text{var}[A(T)] = \tilde{E}[A(T) - \tilde{\mu}]^2 = \tilde{E}[\frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon B_t + \delta W_t^H + \sqrt{n} \delta_j Z dt]^2 \\
 &= \frac{\varepsilon^2}{T^2} \int_0^T \int_0^T E[B(t)B(s)] ds dt + \frac{\delta^2}{T^2} \int_0^T \int_0^T E[W_H(t)W_H(s)] ds dt + \frac{n \delta_j^2}{T^2} \tilde{E}[\int_0^T Z dt]^2 \\
 &= \frac{\varepsilon^2}{T^2} \int_0^T \int_0^T \min(t, s) ds dt + \frac{\delta^2}{T^2} \int_0^T \int_0^T \frac{1}{2} [t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}] ds dt + n \delta_j^2 \\
 &= \frac{1}{3} \varepsilon^2 T + \frac{\delta^2 T^{2H}}{2(H+1)} + n \delta_j^2.
 \end{aligned}$$

因此，随机变量  $A(T)$  服从正态分布，且有  $A(T) \sim N(\tilde{\mu}_n, \tilde{\delta}_n^2)$ ，即随机变量  $\ln G(T)$  服从均值为  $\tilde{\mu}_n$ ，方差为  $\tilde{\delta}_n^2$  的高斯分布。

### 3.2 上限型期权定价

**定理 3.1** 若股票价格变动满足式(3.1)，则在混合分数跳扩散环境下，到期时间为  $T$ ，执行价格为  $K$  的上限型几何平均亚式幂型看涨期权定价公式为：

$$\begin{aligned}
 C_1(S(0), T) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} e^{-rT + \alpha \tilde{\mu}_n + \frac{1}{2} \alpha^2 \tilde{\delta}_n^2} [N(d_3) - N(d_4)] - K_1 e^{-rT} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} N(d_1) \\
 &\quad + K_2 e^{-rT} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} N(d_2),
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_0}{\sqrt[n]{K_1}} + \frac{1}{2} rT - \frac{1}{2} \lambda kT - \frac{1}{4} \varepsilon^2 T - \frac{\delta^2 T^{2H}}{2(2H+1)} + n \mu_j}{\sqrt{\frac{1}{3} \varepsilon^2 T + \frac{\delta^2 T^{2H}}{2(H+1)} + n \delta_j^2}},$$

$$d_2 = \frac{\ln \frac{S_0}{\sqrt[\alpha]{K_2}} + \frac{1}{2}rT - \frac{1}{2}\lambda kT - \frac{1}{4}\varepsilon^2 T - \frac{\delta^2 T^{2H}}{2(2H+1)} + n\mu_j}{\sqrt{\frac{1}{3}\varepsilon^2 T + \frac{\delta^2 T^{2H}}{2(H+1)} + n\delta_j^2}},$$

$$d_3 = d_1 + \alpha \sqrt{\frac{1}{3}\varepsilon^2 T + \frac{\delta^2 T^{2H}}{2(H+1)} + n\delta_j^2}, \quad d_4 = d_2 + \alpha \sqrt{\frac{1}{3}\varepsilon^2 T + \frac{\delta^2 T^{2H}}{2(H+1)} + n\delta_j^2}.$$

证明：由定义 2.1 可知，支付函数  $g_1[S(T)]$  可表示为

$$g_1[S(T)] = [G^\alpha(T) - K_1]I_{\{K_1 < G^\alpha(T) < K_2\}} + (K_2 - K_1)I_{\{G^\alpha(T) \geq K_2\}}.$$

由引理 2.6 可得：

$$\begin{aligned} C_1(S(0), T) &= e^{-rT} \left[ \tilde{E}[(G^\alpha(T) - K_1)I_{\{K_1 < G^\alpha(T) < K_2\}}] + \tilde{E}[(K_2 - K_1)I_{\{G^\alpha(T) \geq K_2\}}] \right] \\ &= e^{-rT} \left[ \tilde{E}[G^\alpha(T)I_{\{K_1 < G^\alpha(T) < K_2\}}] - K_1 \tilde{E}[I_{\{K_1 < G^\alpha(T) < K_2\}}] + (K_2 - K_1) \tilde{E}[I_{\{G^\alpha(T) \geq K_2\}}] \right] \\ &= e^{-rT} [\Pi_1 - K_1 \Pi_2 + (K_2 - K_1) \Pi_3]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

下面分别计算  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  和  $\Pi_3$  的值,

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \tilde{E}[G^\alpha(T)I_{\{K_1 < G^\alpha(T) < K_2\}}] = \tilde{E}[e^{\alpha A(T)}I_{\{K_1 < G^\alpha(T) < K_2\}}] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{E}[e^{\alpha A(T)}I_{\{K_1 < G^\alpha(T) < K_2\}} | N(T) = n] P[N(T) = n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} \int_{J_1} e^{\alpha x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tilde{\delta}_n} e^{-\frac{(x-\tilde{\mu}_n)^2}{2\tilde{\delta}_n^2}} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} \int_{d_2}^{d_1} e^{\alpha(\tilde{\mu}_n + \tilde{\delta}_n z)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} e^{\alpha\tilde{\mu}_n + \frac{1}{2}\alpha^2\tilde{\delta}_n^2} \int_{d_2}^{d_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-\alpha\tilde{\delta}_n)^2}{2}} dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} e^{\alpha\tilde{\mu}_n + \frac{1}{2}\alpha^2\tilde{\delta}_n^2} \int_{d_4}^{d_3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} e^{\alpha\tilde{\mu}_n + \frac{1}{2}\alpha^2\tilde{\delta}_n^2} [N(d_3) - N(d_4)], \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} J_1 &= \{x : K_1 < G^\alpha(T) < K_2\} = \{x : K_1 < e^{\alpha A(T)} < K_2\} = \{x : K_1 < e^{\alpha x} < K_2\} \\ &= \{x : \frac{1}{\alpha} \ln K_1 < x < \frac{1}{\alpha} \ln K_2\} = \{z : \frac{1}{\alpha} \ln K_1 < \tilde{\mu}_n + \tilde{\delta}_n z < \frac{1}{\alpha} \ln K_2\} \end{aligned}$$

$$= \{z: \frac{\frac{1}{\alpha} \ln K_1 - \tilde{\mu}_n}{\tilde{\delta}_n} < z < \frac{\frac{1}{\alpha} \ln K_2 - \tilde{\mu}_n}{\tilde{\delta}_n}\} = \{z: -d_1 < z < -d_2\} = \{z: d_2 < z < d_1\}。$$

同理，可得：

$$\Pi_2 = \tilde{E}[I_{\{K_1 < G^\alpha(T) < K_2\}}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} [N(d_1) - N(d_2)],$$

$$\Pi_3 = \tilde{E}[I_{\{G^\alpha(T) \geq K_2\}}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} N(d_2)。$$

其中  $d_1, \dots, d_4$  如上定义。将所得的  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  以及  $\Pi_3$  的值代入式(3.6)可得：

$$\begin{aligned} C_1(S(0), T) &= e^{-rT} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} e^{\alpha \tilde{\mu}_n + \frac{1}{2} \alpha^2 \tilde{\delta}_n^2} (N(d_3) - N(d_4)) \right. \\ &\quad \left. - K_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} (N(d_1) - N(d_2)) + (K_2 - K_1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} N(d_2) \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} e^{-rT + \alpha \tilde{\mu}_n + \frac{1}{2} \alpha^2 \tilde{\delta}_n^2} (N(d_3) - N(d_4)) - K_1 e^{-rT} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} N(d_1) \\ &\quad + K_2 e^{-rT} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} N(d_2)。 \end{aligned}$$

证毕。

### 3.3 抵付型期权定价

**定理 3.2** 若股票价格变动满足式(3.1)，则在混合分数跳扩散环境下，到期时间为  $T$ ，执行价格为  $K$  的抵付型几何平均亚式幂型看涨期权定价公式为：

$$C_2(S(0), T) = e^{-rT} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} e^{\alpha \tilde{\mu}_n + \frac{1}{2} \alpha^2 \tilde{\delta}_n^2} N(d_6) - K e^{-rT} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} N(d_5), \quad (3.7)$$

其中

$$d_5 = \frac{\ln \frac{S_0}{\sqrt[\alpha]{M}} + \frac{1}{2} rT - \frac{1}{2} \lambda kT - \frac{1}{4} \varepsilon^2 T - \frac{\delta^2 T^{2H}}{2(2H+1)} + n\mu_J}{\sqrt{\frac{1}{3} \varepsilon^2 T + \frac{\delta^2 T^{2H}}{2(H+1)} + n\delta_J^2}},$$

$$d_6 = d_5 + \alpha \sqrt{\frac{1}{3} \varepsilon^2 T + \frac{\delta^2 T^{2H}}{2(H+1)} + n \delta_J^2}。$$

证明：由定义 2.1 可知  $g_2[S(T)] = [G^\alpha(T) - K] I_{\{G^\alpha(T) \geq M\}}$ 。由引理 2.6 可得：

$$\begin{aligned} C_2(S(0), T) &= e^{-rT} \tilde{E} \left[ [G^\alpha(T) - K] I_{\{G^\alpha(T) \geq M\}} \right] = e^{-rT} \tilde{E} \left[ [e^{\alpha A(T)} - K] I_{\{G^\alpha(T) \geq M\}} \right] \\ &= e^{-rT} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{E} \left[ [e^{\alpha A(T)} - K] I_{\{G^\alpha(T) \geq M\}} | N(T) = n \right] P[N(T) = n] \\ &= e^{-rT} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{E} \left[ e^{\alpha A(T)} I_{\{G^\alpha(T) \geq M\}} | N(T) = n \right] P[N(T) = n] \right. \\ &\quad \left. - K \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{E} \left[ I_{\{G^\alpha(T) \geq M\}} | N(T) = n \right] P[N(T) = n] \right] = e^{-rT} (\Pi_4 - K \Pi_5) \end{aligned} \quad (3.8)$$

类似定理 3.1 的证明可得：

$$\Pi_4 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} e^{\alpha \tilde{\mu}_n + \frac{1}{2} \alpha^2 \tilde{\delta}_n^2} N(d_6), \quad \Pi_5 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} N(d_5)。$$

其中  $d_5, d_6$  如上定义。将所得的  $\Pi_4$ 、 $\Pi_5$  的值代入式(3.8)可得：

$$\begin{aligned} C_2(S(0), T) &= e^{-rT} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} e^{\alpha \tilde{\mu}_n + \frac{1}{2} \alpha^2 \tilde{\delta}_n^2} N(d_6) - K \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} N(d_5) \right] \\ &= e^{-rT} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} e^{\alpha \tilde{\mu}_n + \frac{1}{2} \alpha^2 \tilde{\delta}_n^2} N(d_6) - K e^{-rT} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} N(d_5)。 \end{aligned}$$

证毕。

### 3.4 数值模拟

在本节中，以抵付型看涨期权为例进行数值模拟，并对模拟结果加以分析，重点讨论部分参数变动对期权价格的影响。

第一，研究行权价格  $K$  与跳跃强度  $\lambda$  的变动对期权价格的影响。模型中部分基础参数的选取如下： $S_0 = 10$ ， $r = 0.05$ ， $\mu_J = 0.03$ ， $\delta_J = 0.06$ ， $\varepsilon = 0.2$ ， $\delta = 0.2$ ， $T = 0.3$ ， $n = 8$ ， $M = 100$ ， $H = 0.8$ ， $\alpha = 2$ 。如下表 3-1 给出了不同

行权价格与跳跃强度下的期权价格，图 3-1 为表 3-1 数据的可视化折线图，从整体上展示了其变化趋势。

表 3-1 不同行权价格  $K$  和跳跃强度  $\lambda$  与期权价格  $C$  的关系表

| K  | C             |               |               |               |
|----|---------------|---------------|---------------|---------------|
|    | $\lambda_1=1$ | $\lambda_2=3$ | $\lambda_3=5$ | $\lambda_4=7$ |
| 60 | 28.942 6      | 32.226 4      | 35.461 5      | 38.620 3      |
| 65 | 26.343 4      | 29.531 4      | 32.674 5      | 35.748 1      |
| 70 | 23.744 2      | 26.836 5      | 29.887 4      | 32.876 0      |
| 75 | 21.145 0      | 24.141 5      | 27.100 3      | 30.003 8      |
| 80 | 18.545 9      | 21.446 5      | 24.313 3      | 27.131 6      |
| 85 | 15.946 7      | 18.751 6      | 21.526 2      | 24.259 4      |
| 90 | 13.347 5      | 16.056 6      | 18.739 2      | 21.387 2      |
| 95 | 10.748 3      | 13.361 6      | 15.952 1      | 18.515 0      |

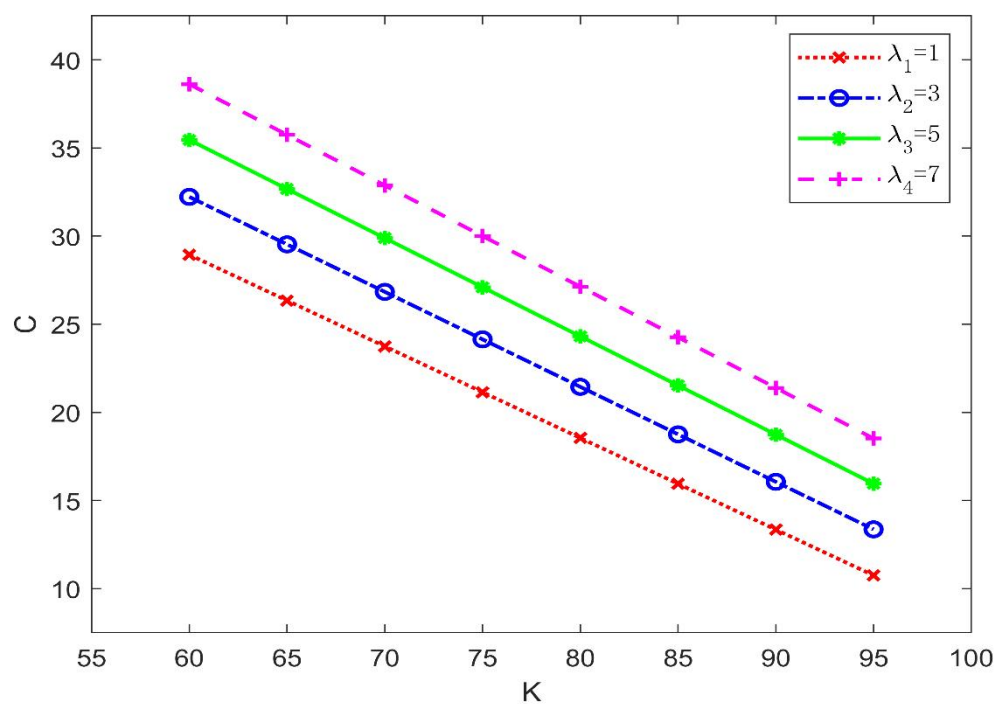


图 3-1 不同行权价格  $K$  和跳跃强度  $\lambda$  与期权价格  $C$  的关系图

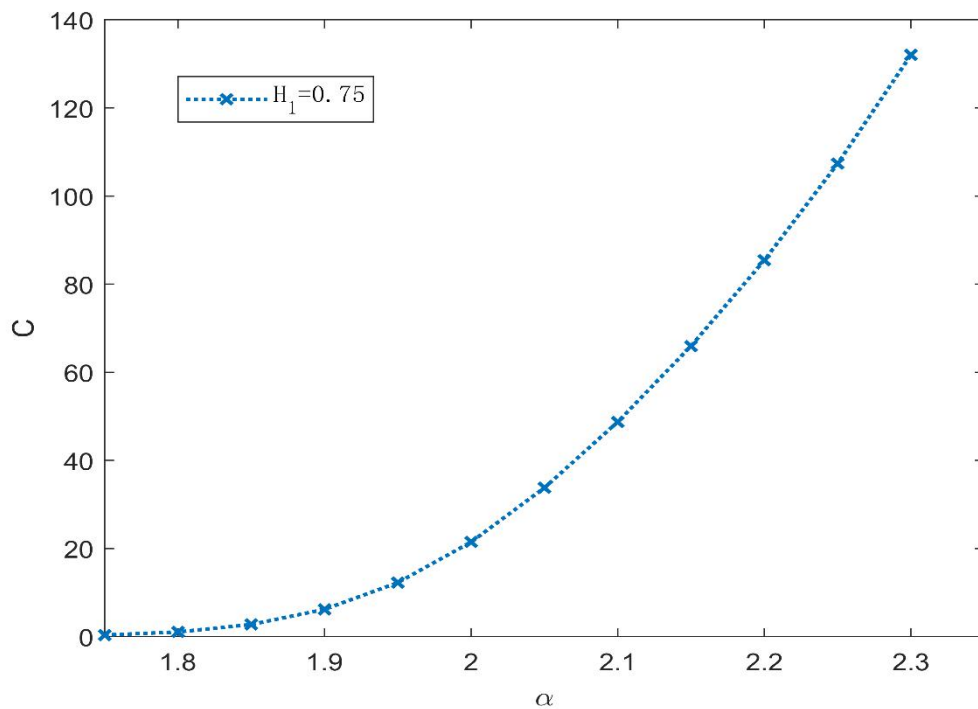
可以看出，行权价格  $K$  越大，亚式看涨期权价格越低。行权价格作为投资者行使期权时的成本，其价格越高，期权的内在价值就越低，期权价格自然下降，故行权价格与期权价格之间呈负相关。此外，随着跳跃强度  $\lambda$  的增大，亚式看涨期权价格逐渐增高。资产价格因为金融市场上突发事件的出现而发生间断性的跳跃，当其增加时，标的资产将有更剧烈的波动，因此期权价值将上升。

第二，研究 *Hurst* 指数  $H$  与幂指数  $\alpha$  对期权价格的影响。模型中相应基础参数设置如下： $S_0=10$ ， $r=0.05$ ， $\mu_j=0.03$ ， $\delta_j=0.06$ ， $\varepsilon=0.2$ ， $\delta=0.2$ ， $T=0.3$ ， $n=8$ ， $M=100$ ， $K=90$ ， $\lambda=7$ 。如下表 3-2 给出了不同赫斯特指数  $H$  与幂指数  $\alpha$  下的期权价格。

可以看出，赫斯特指数与期权价格呈反向关系，即赫斯特指数  $H$  越大，亚式看涨期权价格越低。这是因为赫斯特指数越大，金融市场保持原有趋势的惯性越大，标的资产的价格更加平稳，其价格波动也将更小，最终对应的期权价值也会更小。此外，幂指数反映了期权对股票价格波动的敏感程度。随着幂指数  $\alpha$  的增大，亚式看涨期权价格逐渐增高，二者之间呈正向关系。特别地，图 3-2 展示了当赫斯特指数为 0.75 时幂指数  $\alpha$  与期权价格的变化关系。从图中可以清晰的观察到期权价格随着幂指数的增大而增大，特别是当  $\alpha$  超出一定阈值后， $\alpha$  的增大对期权价格的影响愈发显著，这充分体现了幂型期权的杠杆效应。

表 3-2 不同幂指数  $\alpha$  和赫斯特指数  $H$  与期权价格  $C$  的关系表

| $\alpha$ | $C$        |           |            |           |
|----------|------------|-----------|------------|-----------|
|          | $H_1=0.75$ | $H_2=0.8$ | $H_3=0.85$ | $H_4=0.9$ |
| 1.75     | 0.356 9    | 0.347 9   | 0.340 3    | 0.333 8   |
| 1.8      | 1.067 7    | 1.045 8   | 1.027 0    | 1.011 1   |
| 1.85     | 2.757 5    | 2.713 4   | 2.675 7    | 2.643 2   |
| 1.9      | 6.202 8    | 6.131 0   | 6.069 0    | 6.015 5   |
| 1.95     | 12.257 5   | 12.165 5  | 12.085 5   | 12.015 9  |
| 2        | 21.475 0   | 21.387 2  | 21.310 7   | 21.244 1  |
| 2.05     | 33.795 7   | 33.733 4  | 33.679 7   | 33.633 2  |
| 2.1      | 48.747 6   | 48.708 4  | 48.674 8   | 48.645 9  |

图 3-2 幂指数  $\alpha$  与期权价格  $C$  的关系图

### 3.5 本章小结

本章在假定股票价格过程服从混合分数布朗运动的基础上引入泊松跳过程，综合考量了金融市场上的正常波动与突发事件导致的股票价格跳跃情况，再利用拟鞅方法与全概率公式分别得出了上限型和抵付型两种几何平均亚式幂型期权的定价公式。最后，以抵付型看涨期权为例进行数值模拟，分析不同行权价格、跳跃强度和幂指数对期权价格的影响。发现在其他条件不变的情况下，跳跃强度、幂指数与期权价格之间呈正相关关系，而行权价格、赫斯特指数与期权价格之间呈负相关关系。

## 第4章 混合赋权分数布朗跳扩散环境下亚式期权定价

### 4.1 模型及假设

假定在金融市场中以下假设成立：

- (1) 在买卖股票或期权时不存在交易成本及税收；
- (2) 资产的交易时间和交易金额是连续的；
- (3) 存款利率与贷款利率相同；
- (4) 购股权只可于到期日行使；
- (5) 无风险资产在时间段内的收益率为

$$dM_t = rM_t dt, M_0 = 1, 0 \leq t \leq T, \quad (4.1)$$

其中常数  $r$  为无风险利率；

- (6) 股票价格  $S_t$  由满足以下等式的混合赋权分数布朗运动所驱动：

$$\begin{aligned} dS_t &= (r - \lambda k)S_t dt + S_t d\zeta_t(\delta_1, \delta_2) + (e^{J_t} - 1)S_t dN_t \\ &= (r - \lambda k)S_t dt + \delta_1 S_t dB_t + \delta_2 S_t dB_t^{a,b} + (e^{J_t} - 1)S_t dN_t, \end{aligned} \quad (4.2)$$

其中，常数  $r$  为无风险利率； $\delta_1$  与  $\delta_2$  表示股票价格的波动率； $N_t$  表强度为  $\lambda$  的泊松过程； $k$  表示股票价格跳跃时其变化率的期望值，且有  $k = E_Q(e^{J_t} - 1)$ ； $J_t$  表示在时刻  $t$  跳跃大小百分比，它是一个独立同分布的随机变量序列，且有  $J_i \sim N(\mu_j, \delta_j^2)$ ； $\{B_t\}_{t \geq 0}$ 、 $\{B_t^{a,b}\}_{t \geq 0}$  与  $\{J_t\}_{t \geq 0}$  分别表示标准布朗运动、赋权分数布朗运动以及泊松过程且三者相互独立。

利用 Itô 引理，可求得随机微分方程解为：

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left( r - \frac{1}{2} \delta_1^2 - \lambda k \right) t - \delta_2^2 \int_0^t u^a (t-u)^b du + \delta_1 B_t + \delta_2 B_t^{a,b} + \sum_{i=1}^{N_t} J_i \right\}, \quad (4.3)$$

当  $N_t = n$  时，有  $\sum_{i=1}^{N_t} J_i \sim N(n\mu_j, n\delta_j^2)$ ，因此上式可表示为：

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left( r - \frac{1}{2} \delta_1^2 - \lambda k \right) t - \delta_2^2 \int_0^t u^a (t-u)^b du + \delta_1 dB_t + \delta_2 dB_t^{a,b} + n\mu_J + \sqrt{n} \delta_J Z \right\}. \quad (4.4)$$

其中,  $Z \sim N(0,1)$ 。

## 4.2 几何亚式期权定价公式

我们现求解具有固定执行价格  $K$  和到期时间  $T$  的几何亚式看涨期权价格。

**定理 4.1** 风险中性概率测度下, 假设股票价格  $S_t$  的变动遵循公式(4.4)给出的模型, 则在混合赋权分数布朗运动环境下, 到期时间为  $T$ , 执行价格为  $K$  的几何亚式看涨期权定价公式为:

$$C_1(S_0, T) = e^{-rT} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} e^{\hat{\mu}_n + \frac{\delta_n^2}{2}} N(d_1) - K e^{-rT} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} N(d_2), \quad (4.5)$$

其中

$$d_1 = d_2 + \sqrt{\frac{1}{3} \delta_1^2 T + \frac{\delta_2^2 \tilde{T}}{T^2} + n \delta_J^2},$$

$$d_2 = \frac{\ln \frac{S_0}{K} + \frac{1}{2} \left( r - \frac{1}{2} \lambda T - \frac{1}{2} \delta_1^2 \right) T - A + n \mu_J}{\sqrt{\frac{1}{3} \delta_1^2 T + \frac{\delta_2^2 \tilde{T}}{T^2} + n \delta_J^2}},$$

$$A = \frac{\delta_2^2}{T} \int_0^T \int_0^t u^a (t-u)^b du dt,$$

$$\tilde{T} = \int_0^T \int_0^t \int_0^s u^a \left[ (t-u)^b + (s-u)^b \right] du ds dt + \int_0^T \int_t^T \int_0^t u^a \left[ (t-u)^b + (s-u)^b \right] du ds dt.$$

证明: 令  $A(T) = \frac{1}{T} \int_0^T \ln S_t dt$ ,  $G(T) = \exp[A(T)]$ 。由于股票价格  $S_t$  是对数正态分布, 因此随机变量  $A(T)$  在风险中性概率测度下具有高斯分布。首先计算它的均值和方差。令  $\hat{\mu}_n$  和  $\delta_n^2$  分别表示随机变量  $A(T)$  在风险中性概率测度下的均值和

方差。我们注意到

$$\begin{aligned}
 \hat{\mu}_n &= \tilde{E}[A(T)] = \tilde{E}\left[\frac{1}{T} \int_0^T \ln S_t dt\right] = \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{E}[\ln S_t] dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \ln S_0 + rt - \lambda kt - \frac{1}{2} \delta_1^2 t - \delta_2^2 \int_0^t u^a (t-u)^b du + n\mu_j \right] dt \\
 &= \ln S_0 + \frac{1}{2} rT - \frac{1}{2} \lambda kT - \frac{1}{4} \delta_1^2 T - \frac{\delta_2^2}{T} \int_0^T \int_0^t u^a (t-u)^b du dt + n\mu_j \\
 &= \ln S_0 + \frac{1}{2} rT - \frac{1}{2} \lambda kT - \frac{1}{4} \delta_1^2 T - A + n\mu_j, \\
 \hat{\delta}_n^2 &= \text{var}[A(T)] = \tilde{E}[A(T) - \tilde{\mu}]^2 \\
 &= \tilde{E}\left[\frac{1}{T} \int_0^T \left( \delta_1 B_t + \delta_2 B_t^{a,b} + \sqrt{n} \delta_j Z \right) dt\right]^2 \\
 &= \frac{\delta_1^2}{T^2} \int_0^T \int_0^T E[B_t B_s] ds dt + \frac{\delta_2^2}{T^2} \int_0^T \int_0^T E[B_t^{a,b} B_s^{a,b}] ds dt + \frac{n\delta_j^2}{T^2} \tilde{E}\left[\int_0^T Z dt\right]^2 \\
 &= \frac{\delta_1^2}{T^2} \int_0^T \int_0^T \min(t, s) ds dt + \frac{\delta_2^2}{T^2} \int_0^T \int_0^T \int_0^{t \wedge s} u^a \left[ (t-u)^b + (s-u)^b \right] du ds dt + n\delta_j^2 \\
 &= \frac{1}{3} \delta_1^2 T + \frac{\delta_2^2}{T^2} \left\{ \int_0^T \int_0^t \int_0^s u^a \left[ (t-u)^b + (s-u)^b \right] du ds dt \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^T \int_t^T \int_0^t u^a \left[ (t-u)^b + (s-u)^b \right] du ds dt \right\} + n\delta_j^2 \\
 &= \frac{1}{3} \delta_1^2 T + \frac{\delta_2^2 \tilde{T}}{T^2} + n\delta_j^2.
 \end{aligned}$$

因此如上所述，随机变量  $A(T)$  为对数正态分布，随机变量  $\log A(T)$  为均值为  $\hat{\mu}_n$ ，方差为  $\hat{\delta}_n^2$  的高斯分布。对于几何亚式期权，看涨期权的价格为

$$\begin{aligned}
 C_1(S_0, T) &= e^{-rT} \tilde{E}\left[(G(T) - K)^+\right] \\
 &= e^{-rT} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{E}[(G(T) - K)^+ | N(T) = n] P[N(T) = n] \\
 &= e^{-rT} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} \int_{D_1} (e^x - K) \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\delta}_n}} e^{-\frac{(x-\hat{\mu}_n)^2}{2\hat{\delta}_n^2}} dx,
 \end{aligned}$$

以上公式通过总概率公式进行换算。其中  $D_1$  表示区间  $[x: e^x > K]$ 。下面的计算给出了函数  $C_1(S_0, T)$  的显式解。以  $N(\cdot)$  表示标准正态分布的概率密度函数，则有

$$\begin{aligned}
 C_1(S_0, T) &= e^{-rT} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} \int_{D_1} (e^{\hat{\mu}_n + \hat{\delta}_n y} - K) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\
 &= e^{-rT} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} e^{\hat{\mu}_n + \frac{\hat{\delta}_n^2}{2}} \int_{-d_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y - \hat{\delta}_n)^2}{2}} dy - K e^{-rT} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} \int_{-d_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\
 &= e^{-rT} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} e^{\hat{\mu}_n + \frac{\hat{\delta}_n^2}{2}} \int_{-d_2 - \hat{\delta}_n}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - K \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} e^{-rT} N(d_2) \\
 &= e^{-rT} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} e^{\hat{\mu}_n + \frac{\hat{\delta}_n^2}{2}} N(d_1) - K e^{-rT} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} N(d_2),
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 D_1 &= \{x: G(T) \geq K\} = \{x: e^{A(T)} \geq K\} = \{x: e^x \geq K\} = \{x: x \geq \ln K\} \\
 &= \{y: \hat{\mu}_n + \hat{\delta}_n y \geq \ln K\} = \left\{y: y \geq \frac{\ln K - \hat{\mu}_n}{\hat{\delta}_n}\right\} = \{y: y \geq -d_2\}.
 \end{aligned}$$

证毕。

### 4.3 几何亚式幂型期权定价

现考虑混合赋权分数布朗运动环境下，固定整数  $n \geq 1$ ，具有执行价格  $K$  和到期时间  $T$  亚式幂型看涨期权定价。

**定理 4.2** 风险中性概率测度下，假设股票价格  $S_t$  的变动遵循公式(4.4)给出的模型，则在混合赋权分数布朗运动环境下，到期时间为  $T$ ，执行价格为  $K$  的几何亚式幂型看涨期权定价公式为：

$$C_2(S_0, T) = e^{-rT} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} e^{\alpha \hat{\mu}_n + \frac{1}{2} \alpha^2 \hat{\delta}_n^2} N(d_3) - K e^{-rT} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} N(d_4), \quad (4.6)$$

其中

$$d_3 = d_4 + \alpha \sqrt{\frac{1}{3} \delta_1^2 T + \frac{\delta_2^2 \tilde{T}}{T^2} + n \delta_j^2},$$

$$d_4 = \frac{\ln \frac{S_0}{\sqrt[q]{K}} + \frac{1}{2} \left( r - \frac{1}{2} \lambda k - \frac{1}{2} \delta_1^2 \right) T - A + n \mu_j}{\sqrt{\frac{1}{3} \delta_1^2 T + \frac{\delta_2^2 \tilde{T}}{T^2} + n \delta_j^2}}。$$

证明：对于收益函数为  $(G^\alpha(T) - K)^+ = (\exp(\alpha A(T)) - K)^+$  的几何亚式幂型期权，

根据式(4.4)给出的论证，可以得出：

$$\begin{aligned} C_2(S_0, T) &= e^{-rT} \tilde{E}[(G^\alpha(T) - K)^+] \\ &= e^{-rT} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{E}[(G^\alpha(T) - K)^+ | N(T) = n] P[N(T) = n] \\ &= e^{-rT} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} \int_{D_2} (e^{\alpha x} - K) \frac{1}{\sqrt{2\pi \hat{\delta}_n}} e^{-\frac{(x - \hat{\mu}_n)^2}{2\hat{\delta}_n^2}} dx, \end{aligned}$$

其中  $D_2$  表示区间  $[x: e^{\alpha x} > K]$ 。下面的计算给出了函数  $C_2(S_0, T)$  的显式解。以表

$N(\cdot)$  示标准正态分布的概率密度函数，则有

$$\begin{aligned} C_2(S_0, T) &= e^{-rT} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} \int_{D_2} (e^{\alpha(\hat{\mu}_n + \hat{\delta}_n y)} - K) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= e^{-rT} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} e^{\alpha \hat{\mu}_n + \frac{1}{2} \alpha^2 \hat{\delta}_n^2} \int_{-d_4}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y - \alpha \hat{\delta}_n)^2}{2}} dy - K e^{-rT} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} \int_{-d_4}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= e^{-rT} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} e^{\alpha \hat{\mu}_n + \frac{1}{2} \alpha^2 \hat{\delta}_n^2} \int_{-d_4 - \alpha \hat{\delta}_n}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - K e^{-rT} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} N(d_4) \\ &= e^{-rT} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} e^{\alpha \hat{\mu}_n + \frac{1}{2} \alpha^2 \hat{\delta}_n^2} N(d_3) - K e^{-rT} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} N(d_4), \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} D_2 &= \{x: G^\alpha(T) \geq K\} = \{x: e^{\alpha A(T)} \geq K\} = \{x: e^{\alpha x} \geq K\} = \left\{x: x \geq \frac{1}{\alpha} \ln K\right\} \\ &= \left\{y: \hat{\mu}_n + \hat{\delta}_n y \geq \ln \sqrt[q]{K}\right\} = \left\{y: y \geq \frac{\ln \sqrt[q]{K} - \hat{\mu}_n}{\hat{\delta}_n}\right\} = \{y: y \geq -d_4\}。 \end{aligned}$$

证毕。

#### 4.4 数值模拟

在本节中，以几何亚式幂型期权为例，通过 *Matlab* 对混合赋权分数跳扩散环境下几何亚式幂型期权定价公式进行数值模拟并对结果加以分析，讨论了行权价格  $K$ 、跳跃强度  $\lambda$ 、幂指数  $\alpha$  和赋权参数  $a$ 、 $b$  对几何亚式期权价格的影响。

第一，研究行权价格和跳跃强度的变动对期权价格的影响。模型中部分基础参数的选取如下： $S_0 = 10$ ， $T = 0.5$ ， $r = 0.05$ ， $\delta_1 = 0.2$ ， $\delta_2 = 0.2$ ， $n = 8$ ， $\mu_j = 0.03$ ， $\delta_j = 0.06$ ， $\alpha = 2$ ， $a = b = 0.2$ 。根据式(4.6)，可以得到不同行权价格  $K$  和跳跃强度  $\lambda$  下的亚式幂型期权价格，并绘制相应图表来描述二者参数变动对期权价值的影响趋势。

表 4-1 不同行权价格  $K$  和跳跃强度  $\lambda$  下的期权价格  $C$  的关系表

| K   | C               |                 |                 |                 |                 |                 |                 |                 |                 |
|-----|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
|     | $\lambda_1 = 1$ | $\lambda_2 = 2$ | $\lambda_3 = 3$ | $\lambda_4 = 4$ | $\lambda_5 = 5$ | $\lambda_6 = 6$ | $\lambda_7 = 7$ | $\lambda_8 = 8$ | $\lambda_9 = 9$ |
| 70  | 34.550          | 36.525          | 38.532          | 40.554          | 42.538          | 44.379          | 45.916          | 46.964          | 47.347          |
| 75  | 30.039          | 32.038          | 34.064          | 36.103          | 38.105          | 39.970          | 41.544          | 42.653          | 43.130          |
| 80  | 25.768          | 27.785          | 29.826          | 31.877          | 33.892          | 35.773          | 37.379          | 38.542          | 39.105          |
| 85  | 21.805          | 23.829          | 25.874          | 27.925          | 29.940          | 31.829          | 33.456          | 34.663          | 35.302          |
| 90  | 18.206          | 20.219          | 22.248          | 24.284          | 26.286          | 28.168          | 29.802          | 31.040          | 31.743          |
| 95  | 15.008          | 16.985          | 18.978          | 20.979          | 22.949          | 24.808          | 26.436          | 27.690          | 28.442          |
| 100 | 12.225          | 14.139          | 16.074          | 18.019          | 19.939          | 21.759          | 23.363          | 24.620          | 25.406          |
| 105 | 9.851           | 11.677          | 13.529          | 15.399          | 17.252          | 19.016          | 20.583          | 21.827          | 22.633          |
| 110 | 7.861           | 9.577           | 11.328          | 13.106          | 14.876          | 16.570          | 18.085          | 19.304          | 20.117          |

如上表 4-1 给出了不同行权价格与跳跃强度下的期权价格，图 4-1 为表 4-1 数据的可视图，从整体上展示了其变化趋势。可以看出，混合赋权分数跳扩散环境下亚式幂型看涨期权价值与行权价格之间呈负相关，即行权价格越高，期权到期时的收益越小，这意味着对应的期权价值将越小。与之相反，亚式幂型期权价值与跳跃强度呈同方向变动。跳跃强度在一定程度上代表了非系统性风险，当它增加时，标的资产将有更剧烈的波动，这意味着更高的上限和不变的下限。因此，随着跳跃强度的增大期权价值会上升。

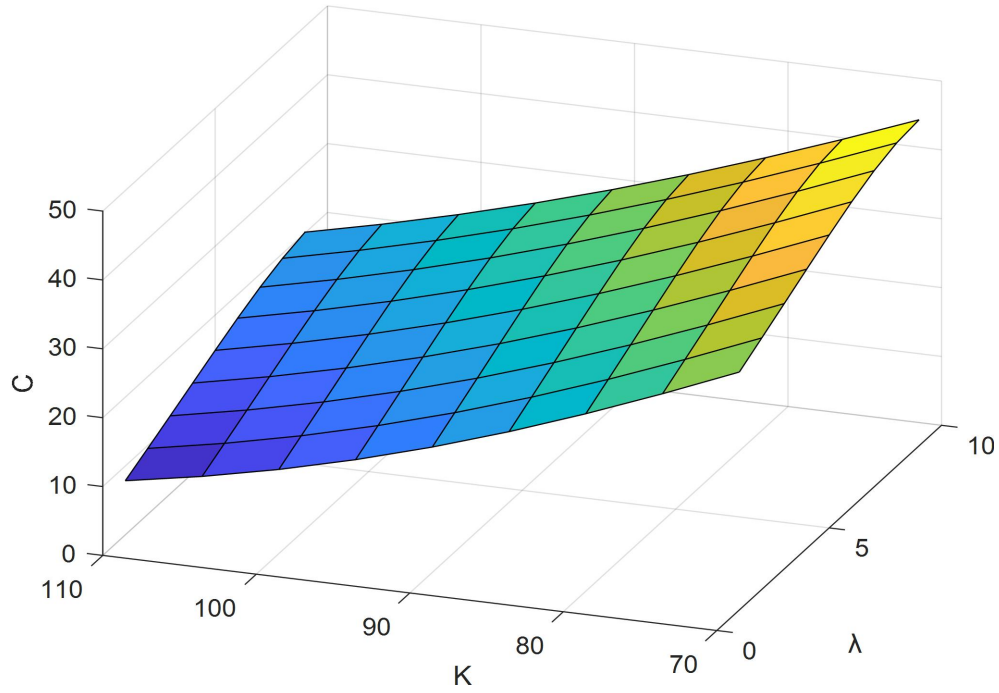


图 4-1 不同行权价格  $K$  和跳跃强度  $\lambda$  与期权价格  $C$  的关系图

第二，研究幂指数  $\alpha$  与期权价格的关系。模型中部分基础参数的选取如下： $S_0 = 10$ ， $T = 0.5$ ， $r = 0.05$ ， $\delta_1 = 0.2$ ， $\delta_2 = 0.2$ ， $n = 8$ ， $\mu_J = 0.03$ ， $\delta_J = 0.06$ ， $K = 100$ ， $\lambda = 6$ ， $a = b = 0.2$ 。根据式(4.6)，可以得到不同幂指数  $\alpha$  下的亚式幂型期权价格，并绘制相应图表来描述该参数变动对期权价值的影响趋势。

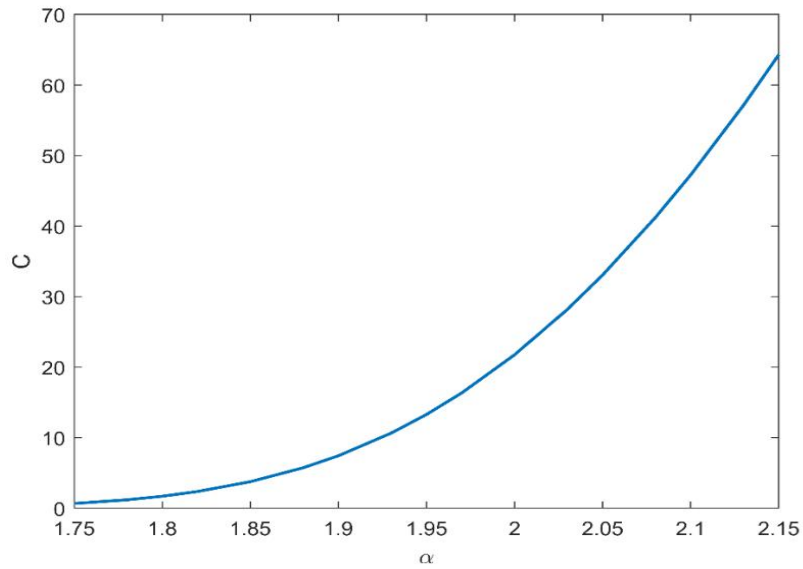


图 4-2 幂指数  $\alpha$  对期权价格的影响

图 4-2 展示了幂指数  $\alpha$  与亚式幂型期权价格之间呈正相关。可以看出，随着  $\alpha$  的增大，期权价格也随之上升。特别是当幂指数增加超过一定阈值时，幂指数的增加对期权价格的影响更为显著，这充分体现了幂期权的杠杆效应。

第三，研究参数  $a$  和  $b$  与期权价格的关系。模型中部分基础参数的选取如下： $S_0 = 10$ ， $T = 0.5$ ， $r = 0.05$ ， $n = 8$ ， $\mu_J = 0.03$ ， $\delta_J = 0.06$ ， $\alpha = 2$ ， $K = 100$ ， $\lambda = 6$ 。根据式(4.6)，利用控制变量法，分别固定  $a$ 、 $b$  为 0.2，讨论赋权参数  $a$ 、 $b$  的变化对期权价格的影响，并绘制相应图表来描述二者参数变动对期权价值的影响趋势。

如下图 4-3 为可视图，从整体上展示了其变化趋势。可以看出，混合赋权分数跳扩散环境下亚式幂型看涨期权价值与赋权参数  $b$  之间呈负相关，即赋权参数  $b$  越大，期权到期时的收益越小，这意味着对应的期权价值将越小。这是因为与赫斯特指数类似，赋权参数  $b$  越大，金融市场保持原有趋势的惯性越大，标的资产的价格更加平稳，其价格波动也将更小，最终对应的期权价值也会更小。与之相反，亚式幂型期权价值与股票价格波动率  $\delta$  呈同方向变动。股票价格波动率越大，意味着股价变动的可能性与变动幅度都越大，这意味着更高的上限和不变的下限。因此，看涨期权价格随着股价波动率的增大而增大。

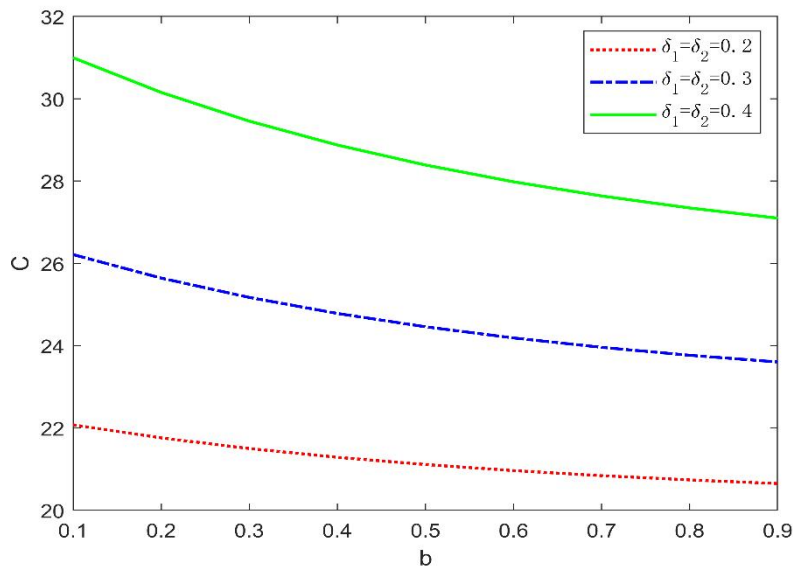


图 4-3 期权价格随赋权参数  $b$  变化价格图

如下图 4-4 展示了不同赋权参数  $a$  与股票价格波动率  $\delta$  下的期权价格，从

整体上展示了其变化趋势。可以看出，与赋权参数 $b$ 相似，混合赋权分数跳扩散环境下亚式幂型看涨期权价值与赋权参数 $a$ 之间呈负相关，即赋权参数 $a$ 越大，期权到期时的收益越小，对应的期权价值将越小。

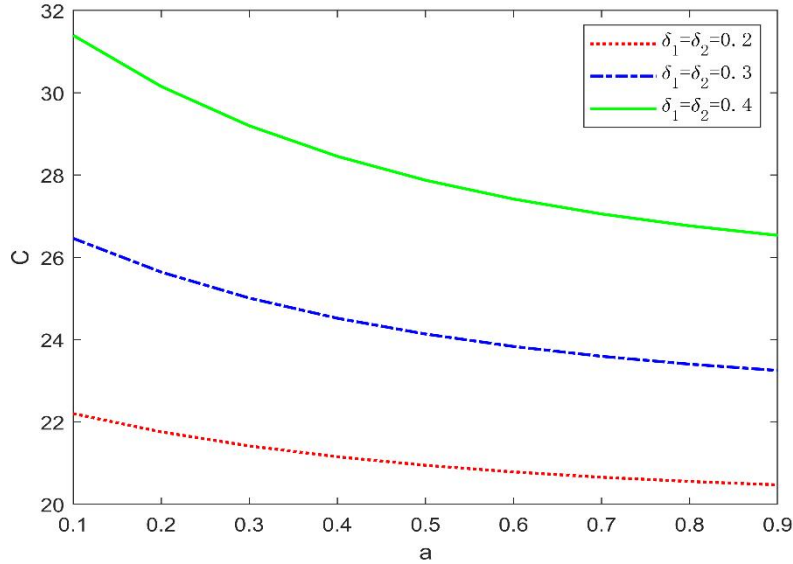


图 4-4 期权价格随赋权参数 $a$ 变化价格图

#### 4.5 本章小结

本章研究了跳扩散环境下基于混合赋权分数布朗运动的几何亚式期权定价模型。我们建立了一个类似于布莱克斯科尔斯模型的微分方程来评估这些金融衍生品。然后通过拟鞅定价方法，推导出亚式看涨期权和亚式幂型看涨期权的定价公式。最后，利用控制变量方法模拟行权价格、跳跃强度、幂指数和赋权参数 $a$ 、 $b$ 对亚式幂型看涨期权价格的影响。发现在其他条件不变的情况下，跳跃强度、幂指数与期权价格之间呈正相关关系，而行权价格、赋权参数与期权价格之间呈负相关关系。

## 第5章 总结与展望

在假定股票价格过程服从混合分数布朗运动的基础上引入泊松跳过程，综合考量了金融市场上的正常波动与突发事件导致的股票价格跳跃情况，基于混合分数布朗跳扩散过程，运用风险中性定价原理构建期权定价模型。首先，通过伊藤引理和分数伊藤公式求解随机微分方程，得到股票价格所满足的随机微分方程解析解；其次，运用拟条件期望及全概率公式得出上限型与抵付型两类奇异期权定价公式；最后，以抵付型看涨期权为例进行数值模拟，分析不同行权价格、跳跃强度和幂指数对期权价格的影响。发现在其他条件不变的情况下，跳跃强度、幂指数与期权价格之间呈正相关关系，而行权价格、赫斯特指数与期权价格之间呈负相关关系。

此外，考虑资产价格变动的灵活性，引入赋权分数布朗运动刻画非平稳增量，创新性构建标准布朗运动与赋权分数布朗运动的线性组合，研究了跳扩散环境下基于混合赋权分数布朗运动的几何亚式期权定价模型。参照上述定价方法，给出混合赋权分数布朗跳扩散环境下的几何亚式期权定价公式，并考虑收益函数为幂函数的情况，给出了该环境下的几何亚式幂型期权定价公式；最后，以幂型期权为例，利用控制变量法模拟行权价格、跳跃强度、幂指数和赋权参数对亚式幂型看涨期权价格的影响。发现在其他条件不变的情况下，跳跃强度、幂指数与期权价格之间呈正相关关系，而行权价格、赋权参数与期权价格之间呈负相关关系。

由于自身知识水平有限，本文研究内容尚有诸多不足之处，在未来仍有一定的发展空间，基于此提出以下几个深入研究发展方向：

第一，在本文所构建的期权定价模型中，无风险利率与随机波动率均为常数，可以进一步考虑二者为时间函数的情况。

第二，为简化模型，本文未考虑期权可能存在的违约风险，随着期权交易量的增大，遭到信用风险的可能性也在增大，可进一步在模型中添加违约风险因素。

第三，为简化模型，本文采用了简单泊松跳过程来刻画突发事件导致的跳跃现象，在未来的定价模型研究中，可进一步考虑采用复合泊松过程。

第四，本文的研究对象是几何亚式幂型期权，可进一步将本文所构建的赋权混合分数布朗运动模型应用于其他奇异期权定价，例如回望期权、障碍期权以及差价期权等。

## 参考文献

- [1] Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. Journal of political economy, 1973, 81(3): 637-654.
- [2] Kolmogorov A N. Wiener'sche Spiralen und einige andere interessante Kurven im HilbertschenRaum[C]. C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N. S.), 1940, 26: 115-118.
- [3] Peters E E. Fractal Structure in the Capital Markets[J]. Financial Analysts Journal, 1989, 45(4): 32-37.
- [4] 陈俊霞, 蹇明. 标的资产服从几何分数布朗运动的期权定价[J]. 经济数学, 2006(03): 252-255.
- [5] Necula C. Option pricing in a fractional Brownian motion environment[J]. Advances in Economic and Financial Research, 2008, 2(3): 259-273.
- [6] 刘韶跃, 杨向群. 分数布朗运动环境中欧式未定权益的定价[J]. 应用概率统计, 2004, 20(4): 429-434.
- [7] 周圣武, 刘海媛. 分数布朗运动环境下的幂期权定价[J]. 大学数学, 2009, 25(5): 69-72.
- [8] 赵英英, 胡华, 马玲等. 分数布朗运动环境下有红利支付的欧式双向期权的定价[J]. 宁夏师范学院学报, 2018, 39(01): 71-74+79.
- [9] Kalantari R, Shahmorad S A. Stable and convergent finite difference method for fractional Black-Scholes model of American put option pricing[J]. Computational Economics, 2019, 53(1): 191-205.
- [10] 李雨珊, 薛红. 分数布朗运动下具有机制转换的欧式期权定价[J]. 纺织高校基础科学学报, 2021, 34(03): 95-101.
- [11] 孙娇娇, 董锋. 分数布朗运动环境下带红利支付的脆弱期权定价模型[J]. 系

统工程, 2022, 40(06): 136-147.

- [12]Bojdecki T, Gorostiza L, Talarczyk A. Occupation time limits of inhomogeneous Poisson systems of independent particles[J]. Stochastic Processes and their Applications, 2007, 118(1): 28-52.
- [13]Sun X, Yan L, Jing H. A weighted-fractional model to European option pricing, Theor. Math.Appl. 2012, 2(3): 87-99.
- [14]Cheridito P. Regularizing fractional Brownian motion with a view towards stock price modelling[D]. ETH Zurich, 2001.
- [15]Cheridito P. Arbitrage in fractional Brownian motion models[J]. Finance and Stochastics, 2003, 7(4): 533-553.
- [16]Cheridito P. Mixed fractional Brownian motion[J]. Bernoulli, 2001, 7(6): 913-934.
- [17]余征, 闫理坦. 混合分数布朗运动环境下的欧式期权定价[J]. 苏州科技学院学报(自然科学版), 2008, 4: 4-10.
- [18]Sun X, Yan L. Mixed-fractional models to credit risk pricing[J]. Journal of Statistical and Econometric Methods, 2012,1(3): 1-7.
- [19]Sun L. Pricing currency options in the mixed fractional Brownian motion[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2013, 392(16): 3441-3458.
- [20]Xiao W, Zhang W, Zhang X, et al. Pricing model for equity warrants in a mixed fractional Brownian environment and its algorithm[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2012, 391(24): 6418-6431.
- [21]刘文倩, 韦才敏, 卜祥智. 混合分数布朗运动环境下欧式障碍期权定价[J]. 经济数学, 2018, 35(4): 16-20.
- [22]Khalaf A D, Anwar Z, Tareq S, et al. A Special Study of the Mixed Weighted Fractional Brownian Motion[J]. Fractal and Fractional, 2021, 5(4): 192.
- [23]胡鹏.基于广义混合分数布朗运动的亚式期权定价研究[D]. 西南财经大学, 2022.

- [24]林先伟, 秦学志, 尚勤. 混合分数布朗运动下欧式期权模糊定价研究[J]. 运筹与管理, 2022, 31(07): 173-178.
- [25]庞秋月. 基于混合次分数跳过程的几何亚式期权模糊定价及统计模拟[D]. 兰州财经大学, 2024.
- [26]Merton R C. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous[J]. Journal of financial economics, 1976, 3(1-2): 125-144.
- [27]陈超. 标的资产价格服从跳-扩散过程的脆弱期权定价模型[J]. 工程数学学报, 2008, 06: 1129-1132.
- [28]钱晓松. 跳扩散模型中亚式期权的定价[J]. 应用数学, 2003, 04: 161-164.
- [29]钱晓松. 跳扩散模型中的测度变换与期权定价[J]. 应用概率统计, 2004, 01: 91-99.
- [30]Kim K, Yun S, Kim N, et al. Pricing formula for European currency option and exchange option in a generalized jump mixed fractional Brownian motion with time-varying coefficients[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2019, 522: 215-231.
- [31]李文汉, 钟盈, 吕桂稳. 基于跳扩散过程的数字幂交换期权定价(英文)[J]. 工程数学学报, 2021, 38(2): 257-270.
- [32]Xu F, Yang J X. Pricing European Options under a fuzzy mixed weighted fractional Brownian motion model with jumps[J]. Fractal and Fractional, 2023, 7(12): 859-873.
- [33]Xu F, Han M. European Option Pricing in the generalized mixed weighted fractional Brownian motion[J]. Fractals, 2024, 32(04): 240030.
- [34]章珂, 周文彪, 沈荣芳. 几何平均亚式期权的定价方法[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2001, 08: 924-927.
- [35]肖文宁, 王杨, 张寄洲. 几何平均亚式期权定价方法的探析[J]. 应用数学, 2005, 02: 253-259.

- [36]金春红, 隋振焯. 离散几何平均价格亚式期权的定价[J]. 辽宁大学学报(自然科学版), 2006, 02: 166-167.
- [37]王志明, 徐娟. 分数布朗运动下红利亚式期权定价公式[J]. 武汉科技大学学报, 2010, 33(06): 665-668.
- [38]孙玉东, 师义民, 谭伟. 分数布朗运动环境下亚式期权定价的新方法[J]. 工程数学学报, 2012, 29(2): 173-178.
- [39]沈明轩, 何朝林. 分数布朗运动环境中几何平均亚式期权的定价[J]. 山东大学学报(理学版), 2013, 48(3): 48-52.
- [40]曹桂兰, 王勇. 浮动敲定价格几何平均亚式期权的风险中性定价[J]. 中国科学院大学学报, 2015, 32(1): 13-17.
- [41]薛广明, 邓国和. 具有浮动执行价的远期生效幂亚式期权定价[J]. 应用数学, 2017, 30(4): 916-926.
- [42]毛姿萍. 混合分数跳-扩散模型下亚式幂期权的定价[D]. 华中师范大学, 2020.
- [43]丁毅, 郭精军. 时变混合分数布朗运动下带交易费用的亚式期权定价[J]. 数学物理学报, 2021, 41 (4): 1135-1146.
- [44]程双双. 基于时变过程的亚式期权定价[D]. 吉林大学, 2023.
- [45]庞秋月, 汪育兵. 基于混合次分数跳过程的亚式期权模糊定价[J]. 兰州文理学院学报(自然科学版), 2024, 38(01): 9-16.
- [46]Wang W, Cai G, Tao X. Pricing geometric Asian power options in the sub-fractional brownian motion environment[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2021, 145: 110754.
- [47]周海艳, 江秉华. 混合分数布朗运动下奇异期权的定价[J]. 湖北师范大学学报(自然科学版), 2019, 39(2): 1-6.
- [48]Shokrollahi F, Kılıçman A. Actuarial approach in a mixed fractional Brownian motion with jumps environment for pricing currency option[J]. Advances in

difference equations, 2015, 257: 1-8.

## 硕士期间发表的论文

- [1] 孟祥红, 沈明轩. 混合分数跳扩散环境下两类亚式期权定价[J]. 安徽工程大学学报已录用
- [2] Xianghong Meng, Mingxuan Shen. Pricing Geometric Asian Power Option under the Mixed Weighted Fractional Brownian Motion Environment[J]. IAENG International Journal of Applied Mathematics 已录用

## 致谢

行文至此，我的研究生生活即将画上句号。回首这段旅程，心中满是感慨，有太多的人值得我衷心感谢。

我要先诚挚地感谢我的导师。在学术的海洋里，您是那座明亮的灯塔。还记得刚开始论文写作时，我满心迷茫，是您耐心引导我梳理研究脉络，从选题的确定，到研究方法的选择，再到论文的撰写与修改，每一个环节都离不开您的悉心指导。在撰写论文期间，您始终保持着极大的耐心与包容，细致审阅后给我提出专业的指导意见，引导我逐步完善论文。此外，您对我的帮助，也绝非局限于学业范畴，更延展至为人处世的方方面面。您目光如炬，总能迅速且精准地洞察我粗心大意这一问题的根源。您多次严肃又不失关切地提醒我，无论是学术研究还是未来投身工作，严谨细致都是不可或缺的品质，细节往往决定着最终的成败。同时，您还十分关注我的人际交往与性格塑造，时常教导我要以开放的心态主动与人交流，保持积极乐观的态度，只有这样，才能在人生道路上拓展视野，收获真挚的情谊与更多的成长机遇。这些言传身教，成为我人生旅程中无比珍贵的财富。

其次我还要诚挚感谢学院的每一位老师。总是温柔亲切的辅导员魏老师，教金融随机分析引论的夏登峰老师，教授随机过程论的姜培华老师，以及教授金融大数据挖掘的张伟老师等等，你们凭借深厚的学术造诣，将复杂的理论深入浅出地讲解，以渊博的专业知识和独特的教学方法，引领我们在知识的海洋中不断探索，对我的论文撰写提供了极大的帮助。感谢老师们三年来的栽培，是你们的倾囊相授，助力我在学术的道路上不断成长。衷心祝愿所有老师在今后平安健康，工作顺遂，万事胜意。

感谢我的师姐、室友和同学们，能与你们相遇是极大的缘分。当我在研究中遇到困难、心情低落时，是你们给予我鼓励和支持，让我重新振作。那些辛苦却又充实的时光，将永远留在我的记忆深处。我们共同度过的欢乐时光，也为我的研究生生活增添了许多温暖和色彩。

还要感谢我的家人。你们是最坚实的后盾，给予我无尽的爱与关怀。在我为学业拼搏的日子里，你们默默承担起生活的琐碎，让我毫无后顾之忧。父

母，你们用辛勤的付出换来了我的成长，你们的理解和信任是我前进的动力。每次遇到挫折，想到你们期待的眼神，我就充满了勇气和力量。

最后，我要感谢自己。感谢你对自己的不放弃，一直在遇见更好的自己。这段经历让我收获的不仅是知识和学位，更是坚韧不拔的意志和面对困难的勇气。

“饮其流者怀其源，学其成时念吾师”。感恩所有帮助过我的人，是你们成就了现在的我。未来，我将带着这份感恩，继续努力前行，不负所望。