

分类号: O212.7

密 级: 公开

单位代码: 10363

学 号: 2221020123

题 目 约束条件下复杂数据单指标变系数模
型的统计推断

题 目 Statistical Inference for Single-index
Varying-coefficient Model with Complex
Date Under Constrain Conditions

学生姓名: 程 颖

指导教师: 何帮强 教授

专 业: 数 学

研究方向: 半参数模型

论文答辩日期: 2025 年 5 月 14 日

安徽工程大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：我恪守学术道德，崇尚严谨学风。所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已明确注明和引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品及成果的内容。论文为本人亲自撰写，我对所写的内容负责，并完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

学位论文作者签名：

程颖

日期： 2025 年 5 月 14 日

安徽工程大学学位论文版权使用授权书

学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅或借阅。本人授权安徽工程大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保密 ☐，在 _____ 年解密后适用本版权书。

本学位论文属于

不保密 ☒。

学位论文作者签名：

日期：2025 年 5 月 14 日

程颖

指导教师签名：

日期：2025 年 5 月 14 日

何帮强

约束条件下复杂数据单指标变系数模型的统计推断

摘 要

单指标变系数模型结合了单指标模型和变系数模型灵活性的特点，使模型降低维度，避免了多维参数的“维数祸根”，让模型在高维环境下仍能进行有效建模和预测，因此此模型在处理复杂数据上具有一定优势，比单指标模型更具说服力。此外，考虑到在实际应用中，由于测量技术、环境等影响，使得数据与现实往往具有偏差，而造成测量误差。同时，关于部分线性单指标变系数模型中，对于参数部分往往需要添加一定的线性约束条件，这样让模型更加贴合实际情况，同时有效的减少估计偏差。本文考虑在附加约束条件下的部分线性单指标变系数模型和带有测量误差的随机约束条件下模型的统计推断问题。

本文首先介绍了约束条件下复杂数据单指标变系数模型的研究背景与意义以及单指标变系数模型的国内外研究现状，同时对论文所涉及到的统计方法：局部多项式回归估计、牛顿迭代法和拉格朗日乘数法做了简要介绍。

其次，考虑附加约束条件的部分线性单指标变系数模型。研究当线性部分的参数存在线性约束时，首先假定指标函数初始向量已知，利用局部多项式回归以及Profile最小二乘估计得到初始参数估计，并通过Newton-Raphson算法进一步获得向量的迭代估计，然后再结合拉格朗日数乘法对模型做约束估计，得到最终参数和指标函数的约束估

计量，并在适当条件下证明了所得估计量的渐近性质，最后通过蒙特卡洛模拟表明在有限样本下参数部分附有约束条件的数据要优于无约束条件的情况。

最后，研究含有测量误差的部分线性单指标变系数模型的随机约束估计。考虑当协变量带有测量误差时，首先利用偏差校正分量来消除测量误差，并通过纠偏Profile混合估计法和牛顿迭代法得到参数和指标函数的纠偏随机约束混合估计量，然后采用广义估计构造参数部分的函数，最后通过数值模拟验证了有随机约束条件比无约束的效果更好。

关键词：单指标变系数模型，随机约束估计，Profile 最小二乘估计，牛顿迭代法，测量误差

STATISTICAL INFERENCE FOR SINGLE-INDEX VARYING-COEFFICIENT MODEL WITH COMPLEX DATA UNDER CONSTRAIN CONDITION

ABSTRACT

The single-index varying-coefficient model integrates the flexibility of both single-index models and varying-coefficient models, enabling dimensionality reduction and avoiding the "curse of dimensionality" associated with multidimensional parameters. This allows the model to effectively perform modeling and prediction in high-dimensional environments, thereby demonstrating certain advantages in handling complex data and being more persuasive than single-index models. Furthermore, in practical applications, due to the influence of measurement techniques, environmental factors, etc., data often deviates from reality, leading to measurement errors. Additionally, in the partially linear single-index varying-coefficient model, it is often necessary to impose certain linear constraints on the parametric components, making the model more aligned with real-world scenarios and effectively reducing estimation bias. This paper investigates the statistical inference problem of the partially linear single-index varying-coefficient model under additional constraints and the model under stochastic constraints

with measurement errors.

Firstly, this paper introduces the research background and significance of the single-index varying-coefficient model for complex data under constraints, as well as the current research status of single-index varying-coefficient models both domestically and internationally. It also provides a brief overview of the statistical methods involved in the thesis, including local polynomial regression estimation, Newton's method, and the method of Lagrange multipliers.

Secondly, we consider the partially linear single-index varying-coefficient model with additional constraints. When there are linear constraints on the parameters of the linear component, we first assume that the initial vector of the index function is known, and use local polynomial regression and profile least squares estimation to obtain initial parameter estimates. We then further obtain iterative estimates of the vector using the Newton-Raphson algorithm. Subsequently, we apply the method of Lagrange multipliers to perform constrained estimation on the model, yielding the final constrained estimators of the parameters and index function. Under appropriate conditions, we prove the asymptotic properties of the obtained estimators. Finally, Monte Carlo simulations demonstrate that data with constrained parameters outperform those without constraints in finite samples.

Lastly, we investigate the stochastic constrained estimation of the

partially linear single-index varying-coefficient model with measurement errors. When the covariates are contaminated with measurement errors, we first utilize bias-corrected components to eliminate the measurement errors and obtain the bias-corrected stochastic constrained hybrid estimators of the parameters and index function through a bias-corrected profile hybrid estimation method and Newton's method. Then, we construct the function of the parametric component using the generalized estimating equation. Finally, numerical simulations verify that the effect of stochastic constraints is better than that without constraints.

Cheng Ying (Applied Mathematics)

Supervised by He Bangqiang

KEY WORDS: random constraint estimation, profile least squares estimation, newton iteration, measurement error, single index variable coefficient models,

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 研究背景与意义	1
1.2 国内外研究现状	2
1.3 主要研究内容	4
第 2 章 相关知识预备	5
2.1 局部多项式回归	5
2.2 Newton-Raphson 迭代法	6
2.3 Lagrange 乘数法	7
第 3 章 约束条件下部分线性单指标变系数模型的统计推断	9
3.1 模型框架	9
3.2 估计方法	10
3.3 主要结论	13
3.4 结果的证明	15
3.5 数值模拟	21
3.6 本章小结	22
第 4 章 带有测量误差的部分线性单指标变系数模型的随机约束估计	24
4.1 模型框架	24
4.2 估计方法	25
4.3 主要结论	28
4.4 主要结果的证明	30
4.5 数值模拟	36
4.6 本章小结	38
第 5 章 总结与展望	39
5.1 总结	39
5.2 展望	39
参考文献	41
硕士期间发表的论文	45
致 谢	46

第 1 章 绪论

1.1 研究背景与意义

在统计学传统的线性模型中，由于假设变量之间是线性的，所以在解决实际问题中存在着很大的局限性，使得数据不能充分运用，而且在实际应用中，传统的线性模型会在高维情况下面临“维度灾难”问题，不能及时捕捉到数据变化。所以，引入灵活性较强的部分线性单指标变系数模型，它是一种功能强大的统计工具，结合基础的变系数模型、线性模型和单指标模型的优点，在处理较高数据维数时，可以降低模型维度，改变模型的复杂关系，同时能够精准捕捉到不同系数变量之间的变化关系，并且考虑到了变量间的非线性关系，又保留了部分线性部分，让其在高维情况下仍能进行高效的估计与预测。通常我们在处理复杂数据时，在部分线性单指标模型的基础上添加的变系数内容，让模型参数随协变量变化而变化，让模型更具适应性。随着时代的发展，技术的迭代，部分线性单指标变系数模型能够系统地分析数据，解决生活中实际问题，在人类各个领域都展现出强大的应用潜力，比如在经济学与金融学方面，它常应用于分析房价的非线性影响，并帮助预测未来走势；在工程技术领域方面，该模型可以用于分析道路规划、时间等多种因素对交通流量的影响；在医药生物方面，它可以分析患者不同基因的表达水平，以此来预测个人疾病风险。

在数据收集过程中，会因为系统不完善、环境等多种因素造成数据测量准确性不高，从而导致整个实验的测量结果与真实值存在偏差，影响模型的可靠性。通过考虑在协变量中添加测量误差，防止变量之间关系扭曲，减少估计偏差，捕捉到真实数据，使得模型在复杂场景下适应高维环境仍可以进行高效的建模和预测。

在实际建模应用中，由于模型在预测过程中，不同变量之间存在复杂关系，需要一定的约束才能得到最优解。所以，为了进一步增加模型的解释性，提高估计效率，考虑在部分线性部分添加特定的线性约束条件，使之可以约束参数部分的取值范围，避免出现过拟合情况。约束条件不仅能帮助研究者快速得到收敛最优解，提高模型数据准确性和精确度，还能完善模型的理论基础，使其更贴合实际。

综上所述,部分线性单指标变系数模型在理论和实际应用中都具有重要的背景和意义,它不仅能让模型更符合实际研究需求,还能提高模型的稳定性,增强其解释能力,并拓展到多个空间领域。

1.2 国内外研究现状

Zhao等^[1]首次提出了部分线性单指标变系数模型,既避免了线性模型的局限性也解决了非参数模型中可能产生的“维数灾祸”问题,具有广泛的应用研究价值。

$$Y = \alpha^T (\beta^T U) Z + \theta^T X + \varepsilon, \quad (1.1)$$

其中 Y 是响应变量, $U \in R^p$ 、 $Z \in R^d$ 和 $X \in R^q$ 是协变量, $\alpha(\cdot) = (\alpha_1(\cdot), \dots, \alpha_d(\cdot))^T$ 是一个未知的单指标向量函数, θ_0 是 q 维的未知系数向量,当协变量给定时,随机误差项 ε 与 (Y, Z, X) 独立,且 $E(\varepsilon | Z, X, U) = 0$ 和 $Var(\varepsilon | Z, X, U) = \sigma^2$ 。对于模型 (1.1),考虑到模型的可识别性,假定 $\|\beta\| = 1$,并且指标参数向量 β 的第一个分量是大于 0 的,其中 $\|\cdot\|$ 表示 Euclid 范数。

(1.1) 式是部分线性变系数模型的自然推广,若 $\beta = 1$,则 (1.1) 变为部分线性变系数模型。对于部分线性变系数模型,Zhang 等^[2]在系数函数大致相同平滑度的条件下,提出局部回归对模型的线性部分和非参数部分进行估计的方法。Fan 和 Huang^[3]提出用于估计参数分量的轮廓最小二乘技术,并研究了轮廓最小二乘估计器的渐进正态性,证明了他在零假设下遵循渐进的 χ^2 的分布。Xia 等^[4]采用常用宽带开发出了模型选择方法,并提出一种估计半变系数模型的新程序。Ahmad^[5]考虑通用样条、幂级数方法估计部分线性变系数模型,证明了在异方差误差条件下,可得到有限维参数的有效估计。You 和 Chen^[6]讨论了在模型中添加可加性测量误差,通过衰减校正,证明了相应的局部多项式估计达到一般非参数回归的最优强收敛速度,并且还得到了误差方差的相合估计。Toutenburg^[7]和 Rao 等^[8]研究了线性回归模型的约束估计。Tabakan^[9]研究了半参数模型参数分量的约束估计。魏传华等^[10]研究了部分线性变系数模型在参数向量上在附有线性约束条件时的估计问题,并证明了其优越性。郑新明和黄彬^[11]研究模型在约束条件下协

变量带有测量误差的统计推断问题,并用拉格朗日乘子检验方法检验约束条件的合理性。刘超等^[12]研究了部分线性变系数模型的线性部分存在多重共线性问题,并且在随机约束条件下运用岭估计构造参数分量,最后证明了方法的有效性。李腾等^[13]考虑了模型线性部分的变量含有测量误差时的随机约束估计,并且提出了参数分量的校正 *profile* 混合估计。张巍巍^[14]考虑了模型在随机约束条件下,利用最小二乘方法,估计线性部分变量有多重共线性问题。Wei 和 Wu^[15]构造了受限条件下的剖面拉格朗日乘数检验统计量。当用加性测量误差时, Zhang 等^[16]和 Wei^[17]提出了参数分量的限制性修正轮廓最小二乘估计,并构造了附加限制条件下的修正轮廓拉格朗日乘数检验统计量。

当 $Z=1$ 时,则 (1.1) 变为部分线性单指标模型, Carroll 等^[18]首次研究了广义部分线性单指标模型,结合局部线性估计完整模型的未知参数,从而推广单指标模型和部分线性模型,并推导出一致的协方差矩阵。Leung 等^[19]使用平滑三次样条法估计线性部分和平均导数估计单指数部分。Zhu 和 Xue^[20]利用偏差校正的经验似然估计模型中参数,解决了参数经验似然比的构造问题; Wang^[21]等提出了两阶段方法并利用局部多项光滑估计线性单指标模型连接函数和它的微分。

(1.1) 式也是单指标变系数模型的有益推广, Xia 和 Li^[22]通过核估计得到单指标的估计量,然后用最小二乘法推导出参数的估计量,证明了相应的估计量是一致渐近正态的。Cai 等^[23]采用函数系数建模技术对非线性时间序列进行分析,增加建模灵活性,缓解“维数诅咒”相关困难,并提出了一种寻找检验统计量零分布的自举法。Huang^[24]检查广义似然比 (GLR) 检验是否适用于 SIVCM 非参数部分的检验问题,并在零假设下,新提出的 GLR 统计量渐近遵循卡方分布,其尺度常数和自由度与干扰参数或函数无关。Huang 和 Zhang^[25]应用经验似然法提出了一种新的 SICRM 指数参数估计经验对数似然比统计量,通过使用最大经验似然估计器获得相关参数的每个分量的新剖面经验似然,提高置信区域的准确性,此外,还考虑了功能组件的修正经验可能性。Wang 和 Xue^[26]发展了一种逐步方法来获得渐近变系数向量和参数向量的正态性估计。Xue 和 Wang^[27]首先通过局部线性拟合估计非参数分量,然后构造参数的经验似然比函数。Xue 和 Pang^[28]考虑用局部线性平滑估计非参数分量,然后使用估计方程构造参数分量的估计器,证明了参数分量估计量是渐近有效的,非参数分量估计量具有渐近正态性和最优

一致收敛率，并提供了未知参数构建置信区域的方法。

一般来说，测量误差分为可加测量误差和非可加测量误差。Shi等^[29]研究一类单指标变系数回归模型在某些协变量存在测量误差时的估计问题，提出了一种基于观测数据的偏差校正最小二乘法。通过用局部线性逼近代替非参数单指标部分，提出了一种估计指标参数的迭代算法。Zhao和Huang^[30]结合模拟外推法、局部线性回归和加权最小二乘法来估计变系数单指标测量误差模型的未知数，并在一定条件下得到估计量的渐近性质。

1.3 主要研究内容

本文分别研究了附加约束条件的部分线性单指标变系数模型和部分线性单指标变系数模型在协变量含有测量误差的统计推断问题。

主要研究模型：

$$\begin{cases} Y = \alpha^T (\beta^T U) Z + \theta^T X + \varepsilon \\ V = Z + u \end{cases}$$

其中 Z 是潜在变量，不可直接测得，能够得到的是带有误差的变量 V 。本文从以下两种情况来研究模型：

1、考虑部分线性单指标变系数模型，在线性部分附加参数约束条件 $A\theta = b$ 进行估计。首先假定单指标参数向量已知，利用局部线性回归和最小二乘法，得到系数函数的初始估计，在此基础上，运用Newton-Raphson算法迭代得到最终估计的参数向量，同时构建参数部分的约束估计量，并在适当正则条件下证明了所给估计量的渐近性质。

2、研究了模型协变量 Z 含有测量误差，并且参数在随机约束条件 $A\theta + \eta = d$ 进行估计。提出了一种偏差校正分量方法来消除误差，最后构建参数部分的约束估计量，并在适当正则条件下证明了所给估计量满足渐近正态分布。

第2章 相关知识预备

2.1 局部多项式回归

由于运用核估计方法处理数据的偏差较大，且存在边界效应，不能灵活捕捉数据特征，而局部多项式估计可以有效调整带宽参数，减少偏差，便于曲线可视化，因此广泛应用于数据分析、建模等领域，Cleveland^[31]对局部多项式估计方法作了详细的阐述。

假设一元回归函数 $m(\cdot)$ 在 x 的邻域内存在连续的 p 阶导数，那么由泰勒展式可得：

$$m(z) \approx \sum_{j=0}^p \frac{m^{(j)}(x)}{j!} (z-x)^j \equiv \sum_{j=0}^p \beta_j (z-x)^j,$$

其中 z 为 x 领域内的点，因此，求 $m(x)$ 的估计量可化解为二次极小化问题

$$\min_{\beta \in R^{p+1}} \sum_{i=1}^n \left\{ Y_i - \sum_{j=0}^p \beta_j (X_i - x)^j \right\}^2 K_h(X_i - x),$$

其中 $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p)^T$ 为系数向量， $K_h(\cdot) = h^{-1}K(\cdot/h)$ ， $K(\cdot)$ 为核函数， h 为带宽。这个极小化问题的结果是一个具有权 $K_h(X_i - x)$ 的加权最小二乘估计。用 $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_p)^T$ 表示极小化问题的解，可得到

$$\hat{\beta} = (X^T W X)^{-1} X^T W Y,$$

其中 $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)^T$ ， $W = \text{diag}\{K_h(X_1 - x), K_h(X_2 - x), \dots, K_h(X_n - x)\}$ ，

$$X = \begin{pmatrix} 1 & X_1 - x & \cdots & (X_1 - x)^p \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & X_n - x & \cdots & (X_n - x)^p \end{pmatrix},$$

令 e_{k+1} 表示第 $k+1$ 个元素为 1，其他元素都为 0， $k=0,1,\dots,p$ ，那么

$$\hat{m}^{(k)}(x_0) = k! \hat{\beta}_k = k! e_{k+1}^T \hat{\beta} \quad (k=0,1,\dots,p)$$

$$= k! e_{k+1}^T \left(X^T(x_0) W(x_0) X(x_0) \right)^{-1} X^T(x_0) W(x_0) Y$$

所以可得函数 $m(x)$ 在 x_0 处的局部多项式估计为

$$\hat{m}(x_0) = e_1^T \left[X^T(x_0) W(x_0) X(x_0) \right]^{-1} X^T(x_0) W(x_0) Y$$

在实际应用中按照要求选择 p 值, 从渐近性质可知奇数阶多项式胜过偶数阶多项式。当 $p=1$, 此类情况是局部多项式的一个特例, 被称为局部线性光滑, 则估计量 $\hat{m}_0(x)$ 为局部线性估计。

局部多项式估计是线性估计类的最优估计, 与核估计相比, 局部多项式的优势在于不需要在特定的点用权函数减少边界效应, 即使在边界处也有很好的性能, 更容易适应于导数的估计, 相关部分可见文献 Fan 和 Gijbels^[32]和 Fan 等^[33]。

2.2 Newton-Raphson 迭代法

牛顿迭代法, 是一种求解非线性方程根的方法, 它的思想是通过递推方式, 不断利用变量的旧值迭代出新值的过程, 从而保证根的局部收敛, 其在数值运算中有着广泛的运用。Newton-Raphson 迭代法根据计算机运算速度快、重复高效操作的特点, 利用泰勒展开, 步步迭代逼近, 优化函数极值点问题, 获取到高精度数值, 提高其稳定性。在解非线性方程问题时, 用牛顿迭代法构造迭代函数是非常重要的, 可以保证其有效迭代收敛, 常用于方程组求解。

以 $f(x)$ 函数为例, 假设 $f(x) \in G^2[a, b]$, 对 $f(x)$ 在点 $x_0 \in [a, b]$ 的领域内作泰勒展开, 那么可得,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)(x - x_0)^2}{2!},$$

那么 $f(x)$ 的线性近似式为 $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ 。假设 $f'(x_k) \neq 0$, 可以构造出迭代式, 得到方程 $f(x) = 0$ 的近似根

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

上式为 r 的二次近似值, 重复以上步骤, 得到 r 的近似值序列,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

以上 r 的 $n+1$ 次近似值, 称为牛顿迭代公式, 若得到的序列 $\{x_k\}$ 收敛于 a , 则 a 是非线性方程的根。经数学论证, 当目标函数连续且所求的零点为孤立点时, 必存在包含该零点的邻域, 使得只要初始近似值选取在此邻域内, 牛顿迭代法即可确保收敛性。进一步而言, 若函数在零点处的导数非零, 则算法将呈现平方收敛特性, 即每次迭代后近似解的精度位数呈指数级增长 (有效位数翻倍), 从而展现出极高的计算效率。

2.3 Lagrange 乘数法

拉格朗日乘数法是解决受多条件限制的多元函数的极值的一个有效工具, 通常在考虑函数极值时, 会对模型附加约束条件:

$$A\theta = b$$

其中, A 是 $k \times q$ 是已知矩阵, b 是 $k \times 1$ 的已知向量, 且 $\text{rank}(A) = k \leq q$ 。

考虑模型 $Y = X\theta + \varepsilon$, ε 是随机误差, 且 $E(\varepsilon|X) = 0$, $\text{Var}(\varepsilon|X) = \sigma^2$, 使得 ε^2 最小, 那么 θ 的最小二乘估计为

$$\hat{\theta} = (X^T X)^{-1} X^T Y。$$

在约束条件下, 利用 Lagrange 乘数法构造辅助函数

$$F(\theta, \lambda) = (Y - X\theta)^T (Y - X\theta) + 2\lambda^T (A\theta - b),$$

其中 λ 为 $k \times 1$ 维向量的拉格朗日乘子, 接下来通过 $F(\theta, \lambda)$ 对 θ 和 λ 求导, 我们可以得到以下两个式子:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \theta} = -2X^T Y + 2X^T X\theta + 2A^T \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 2(A\theta - b) = 0 \end{cases}$$

根据上式计算可得到

$$\hat{\theta} = (X^T X)^{-1} X^T Y - (X^T X)^{-1} A^T \lambda,$$

则

$$d = A\hat{\theta} - A(X^T X)^{-1} A^T \lambda。$$

假设 $A(X^T X)^{-1} A^T$ 的逆矩阵存在，则 λ 的估计为

$$\hat{\lambda} = \left[A(X^T X)^{-1} A^T \right]^{-1} (A\hat{\theta} - d)，$$

再将 $\hat{\lambda}$ 代入 $\hat{\theta}$ 估计中得到 θ 的约束估计为

$$\hat{\theta} = (X^T X)^{-1} X^{-1} Y - (X^T X)^{-1} A^T \hat{\lambda}。$$

$\hat{\theta}$ 是约束条件下 θ 的最小二乘估计，且满足 $A\hat{\theta} = d$ 。

第 3 章 约束条件下部分线性单指标变系数模型的统计推断

本章研究约束条件下的部分线性单指标变系数模型, 首先假定单指标参数向量已知, 将模型转换成部分线性变系数模型, 利用局部线性回归和最小二乘方法, 得到系数函数的初始估计; 然后, 运用Newton-Raphson算法迭代得到最终估计的参数向量, 进一步得到系数函数的估计。在此基础上, 构建参数部分的约束估计量, 并在适当正则条件下证明了所给估计量的渐近性质, 最后通过数值模拟分析所提方法的有效性。

3.1 模型框架

考虑如下部分线性单指标变系数模型:

$$Y = \alpha_0^T (\beta_0^T U) Z + \theta_0^T X + \varepsilon, \quad (3.1)$$

其中 Y 是响应变量, $U \in R^p$ 、 $Z \in R^d$ 和 $X \in R^q$ 是协变量, $\alpha_0(\cdot) = (\alpha_1(\cdot), \dots, \alpha_d(\cdot))^T$ 是一个未知的单指标向量函数, θ_0 是 q 维的未知系数向量, 当协变量给定条件时, 随机误差项 ε 与 (Y, Z, X) 独立, 且 $E(\varepsilon | Z, X, U) = 0$ 和 $Var(\varepsilon | Z, X, U) = \sigma^2$ 。对于模型 (3.1) 的可识别性, 假定 $\|\beta_0\| = 1$, 并且约束 β_0 的第一个非 0 元素是大于 0 的, 其中 $\|\cdot\|$ 表示 Euclid 范数。

文章考虑将参数变量附加约束条件, 提升模型的参数估计效果, 使得推断结果更符合实际情况。约束条件如下:

$$A\theta = b,$$

其中, A 是 $k \times q$ 是已知矩阵, b 是 $k \times 1$ 的已知向量, 且 $rank(A) = k \leq q$ 。

对于变系数单指标模型, Wong^[34]利用局部线性方法和平均方法估计未知函数和回切方法估计参数。文章在此基础上考虑部分线性单指标变系数模型的约束估计问题, 基于 Wang^[6]对 β_0 和 θ_0 逐步进行估计的方法, 运用对部分线性变系数模型的估计方法来估计 θ_0 。但是, β_0 和 θ_0 可能是相关的, 导致识别 β_0 的困难。

文中假设给定 β_0 ，应用剖面二乘法估计 θ_0 ，并使用局部线性核平滑估计 $\alpha(\cdot)$ ，再应用拉格朗日乘数法构造参数分量的约束估计，并在适当条件下证明服从渐近正态性。

3.2 估计方法

在这一节中我们先对 $\alpha(\cdot)$ 进行估计，令 $\{Y_i, U_i, Z_i, X_i\}_{i=1}^n$ 是来自模型 (3.1) 的样本数据，从而有

$$Y_i = \alpha_0^T (\beta_0^T U_i) Z_i + \theta_0^T X_i + \varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.2)$$

下面应用 2.1 节提出局部线性回归方法来估计系数函数 $\{\alpha_j(\cdot), j = 1, \dots, d\}$ ，当 t 在 t_0 的一个领域内，可以利用线性回归函数局部地逼近估计模型 $\alpha_j(t)$ ：

$$\alpha_j(t) \approx \alpha_j(t_0) + \alpha_j'(t)(t - t_0) \equiv a_j + b_j(t - t_0), j = 1, \dots, d,$$

对于给定的 (θ_0, β_0) ，我们可以通过最小化局部最小二乘法得到 $\alpha(t_0)$ 和 $\alpha'(t_0)$ 的估计量

$$\sum_{i=1}^n \left\{ Y_i - \theta_0^T X_i - a^T Z_i - b^T Z_i (\beta_0^T U_i - t_0) \right\}^2 K_h(\beta_0^T U_i - t_0) \quad (3.3)$$

其中， $a = (a_1, \dots, a_d)^T$ ， $b = (b_1, \dots, b_d)^T$ 和 $K_h = K(\cdot/h)/h$ ， $K(\cdot)$ 是核函数， h 是宽带。接下来做一些矩阵记号：

$$Z = (Z_1 \cdots Z_n)^T, \quad X = (X_1 \cdots X_n)^T, \quad H_\beta = \begin{pmatrix} \alpha_0^T (\beta^T U_1) Z_1 \\ \vdots \\ \alpha_0^T (\beta^T U_n) Z_n \end{pmatrix}, \quad Y = (Y_1, \dots, Y_n)^T,$$

$$R_{0,\beta} = \begin{pmatrix} Z_1^T & Z_1^T (\beta^T U_1 - t_0)/h \\ \vdots & \vdots \\ Z_n^T & Z_n^T (\beta^T U_n - t_0)/h \end{pmatrix}, \quad W_{0,\beta} = \text{diag} \{ K_h(\beta^T U_1 - t_0), \dots, K_h(\beta^T U_n - t_0) \},$$

这样模型 (3.2) 可以写成

$$Y = H_{\beta_0} + X\theta + \varepsilon, \quad (3.4)$$

其中 $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)^\top$ ，那么由最小二乘理论求得极小化问题 (3.3) 的解为

$$(\hat{\alpha}(t_0; \beta_0, \theta_0), h\hat{\alpha}'(t_0; \beta_0, \theta_0))^\top = (R_{0, \beta_0}^\top W_{0, \beta_0} R_{0, \beta_0})^{-1} R_{0, \beta_0}^\top W_{0, \beta_0} (Y - X\theta), \quad (3.5)$$

记 S 为局部线性回归的光滑矩阵，即

$$S = \begin{pmatrix} [Z_1^\top, 0_d] (R_{1, \beta_0}^\top W_{1, \beta_0} R_{1, \beta_0})^{-1} R_{1, \beta_0}^\top W_{1, \beta_0} \\ \vdots \\ [Z_n^\top, 0_d] (R_{n, \beta_0}^\top W_{n, \beta_0} R_{n, \beta_0})^{-1} R_{n, \beta_0}^\top W_{n, \beta_0} \end{pmatrix} = S_{\beta_0},$$

其中 0_d 是全体实数都为 0 的 d 维向量，接下来考虑 θ_0 的估计

$$\hat{H}_{\beta_0} = S(Y - X\theta), \quad (3.6)$$

将 (3.6) 式中的 $\hat{H}_{\beta_0}$ 代入 (3.4) 式，经过简单计算得到

$$(I_n - S)Y = (I_n - S)X\theta_0 + \varepsilon, \quad (3.7)$$

其中 I_n 为 n 阶单位矩阵，将线性模型的最小二乘理论应用到上式可得到 θ_0 的估计

$$\hat{\theta} = \left\{ X^\top (I_n - S_{\beta_0})^\top (I_n - S_{\beta_0}) X \right\}^{-1} X^\top (I_n - S_{\beta_0})^\top (I_n - S_{\beta_0}) Y, \quad (3.8)$$

将 $\hat{\theta}$ 代入 (3.5) 式中，得到

$$(\hat{\alpha}(t_0; \beta_0, \hat{\theta}), h\hat{\alpha}'(t_0; \beta_0, \hat{\theta}))^\top = (R_{0, \beta_0}^\top W_{0, \beta_0} R_{0, \beta_0})^{-1} R_{0, \beta_0}^\top W_{0, \beta_0} (Y - X\hat{\theta}). \quad (3.9)$$

以上都是在 β_0 已知的情况下，得到 $\hat{\theta}$ 、 $\hat{\alpha}(t_0; \beta_0, \hat{\theta})$ 和 $\hat{\alpha}'(t_0; \beta_0, \hat{\theta})$ 的估计，但是在实践中并不知道 β_0 的真实值，所以我们用最小化误差平方和来估计它

$$\sum_{i=1}^n \left\{ Y_i - \hat{\alpha}^\top(\beta^\top U_i; \beta, \hat{\theta}) Z_i - \hat{\theta}^\top X_i \right\}^2, \quad (3.10)$$

等价于求解估计方程

$$2 \sum_{i=1}^n \left\{ Y_i - \hat{\alpha}^\top(\beta^\top U_i; \beta, \hat{\theta}) Z_i - \hat{\theta}^\top X_i \right\} \hat{\alpha}^\top(\beta^\top U_i; \beta, \hat{\theta}) Z_i J_{\beta^{(1)}}^\top U_i w(\beta^\top Z_i) = 0, \quad (3.11)$$

其中 $\beta_1 = (1 - \|\beta^{(1)}\|)^2$ ， $\beta^{(1)} = (\beta_2, \dots, \beta_p)^\top$ 是去掉 β 中的第一个分量 β_1 的 $p-1$ 维向量， $J_{\beta^{(1)}} = \partial \beta / \partial \beta^{(1)}$ 是 β 关于 $\beta^{(1)}$ 的雅可比矩阵， $w(\cdot)$ 表示有界权函数，作为指标函数用来估计 $\alpha_0(\cdot)$ 和 $\alpha'_0(\cdot)$ 。

接下来我们使用 Newton-Raphson 算法的 Fisher 评分方法来求解估计方程。

求 $\hat{\alpha}(\cdot)$, $\hat{\beta}$ 和 $\hat{\theta}$ 可以分解为以下迭代过程思想:

步骤 0 (初始化): 选择 β 的初始值 β_0 满足 $\|\beta_0\|=1$ 。

步骤 1: 对于给定的 β_0 , 利用 (3.8) 和 (3.9) 式, 计算出 $\hat{\theta}$, $\hat{\alpha}(\cdot)$ 和 $\hat{\alpha}'(\cdot)$ 。

步骤 2: 利用 Newton-Raphson 算法的 Fisher 评分方法求解估计方程 (3.11)。

步骤 3: 继续重复步骤 1-2, 直至收敛。

步骤 4: 最终的估计量 $\hat{\beta}$ 替换 (3.8) 和 (3.9) 式中的 β_0 , 得到 $\alpha(\cdot)$ 的估计量 $\hat{\alpha}(\cdot)$ 和 $\hat{\theta}$, 此时取 h 是一个估计的宽带, 使得 β_0 已知时, $\hat{\alpha}(\cdot)$ 达到最优。

此时

$$\tilde{\theta} = \left\{ X^T (I_n - S_{\hat{\beta}})^T (I_n - S_{\hat{\beta}}) X \right\}^{-1} X^T (I_n - S_{\hat{\beta}})^T (I_n - S_{\hat{\beta}}) Y, \quad (3.12)$$

$$\tilde{\alpha}(\beta_0^T u_0; \hat{\beta}) = (I_d, 0_d) \left(R_{0,\hat{\beta}}^T W_{0,\hat{\beta}} R_{0,\hat{\beta}} \right)^{-1} R_{0,\hat{\beta}}^T W_{0,\hat{\beta}} (Y - X \tilde{\theta}), \quad (3.13)$$

那么 σ^2 的估计量为

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ Y_i - \hat{\alpha}^T \left(\hat{\beta}^T U_i; \hat{\beta} \right) Z_i - \tilde{\theta}^T X_i \right\}^2, \quad (3.14)$$

记最小二乘得到的

$$\tilde{\theta} = \left(\hat{X}^T \hat{X} \right)^{-1} \hat{X}^T \hat{Y} \quad (3.15)$$

其中 $\hat{X} = (I_n - S_{\hat{\beta}}) X$, $\hat{Y} = (I_n - S_{\hat{\beta}}) Y$ 。

在约束条件 $A\theta = b$ 下, 利用 Lagrange 乘数法构造辅助函数

$$F(\theta, \lambda) = (\hat{Y} - \hat{X}\theta)^T (\hat{Y} - \hat{X}\theta) + 2\lambda^T (A\theta - b) \quad (3.16)$$

这里的 λ 是 $k \times 1$ 维向量的拉格朗日乘子, 接下来通过 $F(\theta, \lambda)$ 对 θ 和 λ 求导, 我们可以得到以下两个式子:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \theta} = -2\hat{X}^T \hat{Y} + 2\hat{X}^T \hat{X}\theta + 2A^T \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 2(A\theta - b) = 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

根据上式计算可得

$$\hat{\theta}_r = (\hat{X}^T \hat{X})^{-1} \hat{X}^T \hat{Y} - (\hat{X}^T \hat{X})^{-1} A^T \lambda = \hat{\theta} - (\hat{X}^T \hat{X})^{-1} A^T \lambda \quad (3.18)$$

将 $\hat{\theta}_r$ 代入 (3.17) 式中, 得到

$$b = A\tilde{\theta} - A(\hat{X}^T \hat{X})^{-1} A^T \lambda,$$

假设 $A(\hat{X}^T \hat{X})^{-1} A^T$ 的逆矩阵存在, 则 λ 的估计为

$$\hat{\lambda} = \left[A(\hat{X}^T \hat{X})^{-1} A^T \right]^{-1} (A\tilde{\theta} - b), \quad (3.19)$$

再将 λ 的估计 $\hat{\lambda}$ 代入 (3.18) 式子中得到 θ 的约束估计为

$$\hat{\theta}_c = (\hat{X}^T \hat{X})^{-1} \hat{X}^T \hat{Y} - (\hat{X}^T \hat{X})^{-1} A^T \left[A(\hat{X}^T \hat{X})^{-1} A^T \right]^{-1} (A\tilde{\theta} - b) \quad (3.20)$$

$\hat{\alpha}(t_0; \hat{\beta})$ 的约束估计可被定义如下:

$$\hat{\alpha}_c(t_0; \hat{\beta}) = (I_d, 0_d) \left(R_{0,\hat{\beta}}^T W_{0,\hat{\beta}} R_{0,\hat{\beta}} \right)^{-1} R_{0,\hat{\beta}}^T W_{0,\hat{\beta}} (Y - X\hat{\theta}_c) \quad (3.21)$$

σ^2 的约束估计为:

$$\hat{\sigma}_c^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ Y_i - \hat{\alpha}_c^T(\hat{\beta}^T U_i; \hat{\beta}) Z_i - \hat{\theta}_c^T X_i \right\}^2 \quad (3.22)$$

其中 0_d 是 d 阶的零矩阵。

3.3 主要结论

提出这些定理之前, 给出下列正则条件:

对于某个正的常数 c_1 , 记 $B_n = \{ \beta \in B : \|\beta - \beta_0\| \leq c_1 n^{-1/2} \}$ 。

(A1) $\beta^T U$ 的密度函数 $f(\cdot)$ 对 T 和接近于 β_0 的点 β 有界远离 0, 且在 T 上满足 1 阶 Lipschitz 条件, 其中 T 是 $\beta^T U$ 的支撑。

(A2) 矩阵 $\Psi(t_0)$ 是正定的, 且 $\Psi(t_0)$ 和 $C(t_0)$ 的每一个元素在 T 上满足 1 阶 Lipschitz 条件, 其中 $\Psi(t_0) = E(ZZ^T | \beta_0^T U = t_0)$, $C(t_0) = E(ZX^T | \beta_0^T U = t_0)$ 和

$$\Gamma(t_0) = E\left(J_{\beta^{(1)}}^T U \alpha_0^T (\beta_0^T U) Z Z^T w(\beta_0^T Z) \middle| \beta_0^T U = t_0\right).$$

$$(A3) \quad E(\|X\|^6) < \infty, E(\|Z\|^6) < \infty, E(\varepsilon^6) < \infty.$$

(A4) $\{(Y_i, U_i, Z_i, X_i), 1 \leq i \leq n\}$ 是严平稳强混合序列, 具有混合系数 $Q(n) = O(\rho^n)$, 其中 $0 < \rho < 1$ 为某个常数。

$$(A5) \quad nh^2 / \log^2 n \rightarrow \infty, \quad nh^4 \log n \rightarrow 0; \quad nh h_1^3 / \log^2 n \rightarrow \infty, \quad nh_1^5 = O(1).$$

(A6) 函数 $\alpha_j(\cdot)$ ($1 \leq j \leq d$) 在 T 上是有界连续的二阶导数, 其中 $\alpha_j(\cdot)$ 是第 j 个分量。

(A7) 核 $K(\cdot)$ 在其支撑 $(-1, 1)$ 上是具有有界导数的对称概率密度函数。

$$\text{记 } \tilde{X}_i = X_i - \left([Z_i^T, 0_d] (R_{i,\beta}^T W_{i,\beta} R_{i,\beta})^{-1} R_{i,\beta}^T W_{i,\beta} Z \right)^T, \quad \delta_n = h^2 + \{\log n / nh\}^{1/2},$$

$\mu_2 = \int t^2 K^2(t) dt$, 为了估计分别在条件(A1)和(A2)中定义的 $f(\cdot)$ 和 $\Psi(\cdot)$, 常见的 Nadaraya-Watson 核估计量分别定义为:

$$\hat{f}(t_0) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_h(\beta^T Z_i - t_0) \text{ 和 } \Psi(t_0) = \frac{1}{n\hat{f}}(t_0) \sum_{i=1}^n Z_i Z_i^T K_h(\beta^T Z_i - t_0)$$

定理 3.1 若条件(A1)-(A6)成立, 则

$$\begin{cases} \sup_{t_0 \in T, \beta \in B_n} \|\hat{\alpha}_h(t_0; \beta) - \alpha_0(t_0)\| = O\left(\left\{\frac{\log n}{nh}\right\}^{1/2} + h^2\right), \\ \sup_{t_0 \in T, \beta \in B_n} \|\hat{\alpha}_h'(t_0; \beta) - \alpha_0'(t_0)\| = O\left(\left\{\frac{\log n}{nh^3}\right\}^{1/2} + h\right). \end{cases}$$

定理 3.2 若条件(A1)-(A6)成立, 则

$$\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta_0) \xrightarrow{D} \left(0, \sigma^2 J_{\beta_0^{(1)}} \Upsilon^+ \Theta \Upsilon^+ J_{\beta_0^{(1)}}^T\right).$$

定理 3.3 若条件(A1)-(A6)成立, 则

$$\sqrt{n}(\tilde{\theta} - \theta_0) \xrightarrow{D} (0, \sigma^2 \Lambda^{-1}).$$

定理 3.4 若条件(A1)-(A6)成立, 则

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_c - \theta_0) \xrightarrow{D} (0, \sigma^2 \phi \Lambda^{-1} \phi^T).$$

3.4 结果的证明

引理 3.1 若条件(A1)-(A7)成立, 则

$$n^{-1/2} X^T (I_n - S_\beta)^T (I_n - S_\beta) \varepsilon \xrightarrow{D} D(0, \sigma^2 \Lambda).$$

其中 $\Lambda = E \left[X - C^T (\beta_0^T U) \Psi^{-1} (\beta_0^T U) Z \right]^{\otimes 2}$.

证明 参考 Xia 和 Li^[22]的引理 2 的证明。

引理 3.2 若条件(A1)-(A6)成立, 则

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2 \Lambda^{-1}).$$

证明

$$\begin{aligned} \sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0) &= \sqrt{n} \left\{ X^T (I_n - S_\beta)^T (I_n - S_\beta) X \right\}^{-1} X^T (I_n - S_\beta)^T (I_n - S_\beta) (Y - X\theta_0) \\ &= \left\{ n^{-1} X^T (I_n - S_\beta)^T (I_n - S_\beta) X \right\}^{-1} n^{-1/2} X^T (I_n - S_\beta)^T (I_n - S_\beta) (H_\beta + \varepsilon), \end{aligned}$$

因为 $\beta \in B_n$ 且 $\|\beta - \beta_0\| = O(n^{-1/2})$, 由引理 1 和大数定律, 我们可以得到

$$\begin{aligned} &n^{-1/2} X^T (I_n - S_\beta)^T (I_n - S_\beta) X \\ &= n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \left\{ X_i - C^T (\beta_0^T U_i) \Psi^{-1} (\beta_0^T U_i) Z_i \right\} \left\{ X_i^T - Z_i^T \Psi^{-1} (\beta_0^T U_i) C (\beta_0^T U_i) \right\} \\ &\quad + O_p(\delta_n + n^{-1/2}) \\ &= E \left[X - C^T (\beta_0^T U) \Psi^{-1} (\beta_0^T U) Z \right]^{\otimes 2} + O_p(1), \end{aligned}$$

那么

$$\begin{aligned} &n^{-1/2} X^T (I_n - S_\beta)^T (I_n - S_\beta) H_\beta \\ &= n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \tilde{X}_i \left\{ \alpha_0^T (\beta^T U_i) Z_i - [Z_i^T, 0_d] (R_{i,\beta}^T W_{i,\beta} R_{i,\beta})^{-1} R_{i,\beta}^T W_{i,\beta} H_\beta \right\}, \end{aligned}$$

根据 $R_{0,\beta}$ 和 $W_{0,\beta}$ 的定义, 我们可以得到

$$n^{-1/2} R_{0,\beta}^T W_{0,\beta} H_\beta = \begin{pmatrix} n^{-1} \sum_{i=1}^n K_h(\beta^T U_i - t_0) Z_i Z_i^T \alpha_0 (\beta^T U_i) \\ n^{-1} \sum_{i=1}^n K_h(\beta^T U_i - t_0) \left(\frac{\beta^T U_i - t_0}{h} \right) Z_i Z_i^T \alpha_0 (\beta^T U_i) \end{pmatrix}$$

$$= f_{\beta}(t_0) \Psi(t_0) \alpha_0(t_0) \otimes [1, 0]^T + O_p(\delta_n),$$

其中 $\otimes$ 是 Kronecker 乘积, 由参考文献 Xia 和 Li^[27] 的引理 2, 我们知道

$$n^{-1} R_{0,\beta}^T W_{0,\beta} R_{0,\beta} = f_{\beta}(t_0) \Psi(t_0) \otimes \text{diag}\{1, \mu_2\} + O_p(\delta_n),$$

所以可以得到

$$\begin{bmatrix} Z_i^T, 0_d \end{bmatrix} \left(R_{i,\beta}^T W_{i,\beta} R_{i,\beta} \right)^{-1} R_{i,\beta} W_{i,\beta} H_{\beta} = Z_i^T \alpha_0(\beta^T U_i) + O_p(\delta_n),$$

再结合 $\tilde{X}_i = X_i - \left(\begin{bmatrix} Z_i^T, 0_d \end{bmatrix} \left(R_{i,\beta}^T W_{i,\beta} R_{i,\beta} \right)^{-1} R_{i,\beta}^T W_{i,\beta} Z \right)^T$, 得到

$$\begin{aligned} & n^{-1/2} X^T (I_n - S_{\beta})^T (I_n - S_{\beta}) H_{\beta} \\ &= n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \left\{ X_i - C^T (\beta_0^T U_i) \Psi^{-1} (\beta_0^T U_i) Z_i + O_p(\delta_n) Z_i^T \alpha_0(\beta^T U_i) O_p(\delta_n) \right\} \\ &= O_p(n^{1/2} \delta_n^2), \end{aligned}$$

由 (A5) 可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/2} \delta_n^2 = 0$,

$$n^{-1/2} X^T (I_n - S_{\beta})^T (I_n - S_{\beta}) H_{\beta} = O_p(1)$$

结合引理 3.1 得到引理 3.2 的结论。

定理 3.1 的证明

通过引理 1, 我们可以得到

$$\begin{pmatrix} \varphi_{n,0}(t_0; \beta) & \varphi_{n,1}(t_0; \beta) \\ \varphi_{n,1}(t_0; \beta) & \varphi_{n,2}(t_0; \beta) \end{pmatrix} = f_{\beta}(t_0) \Psi(t_0) \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} + O_p(\delta_n) \quad (3.23)$$

$$\text{记 } \varphi_{n,k}(t_0; \beta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_h(\beta^T U_i - t_0) \left(\frac{\beta^T U_i - t_0}{h} \right)^k Z_i Z_i^T, k=0,1,2,$$

$$T_{n,k}(t_0; \beta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_h(\beta^T U_i - t_0) \left(\frac{\beta^T U_i - t_0}{h} \right)^k Z_i \left(Y_i - \hat{\theta}^T X_i \right), k=0,1,$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha}(t_0; \beta) \\ h \hat{\alpha}'(t_0; \beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{n,0}(t_0; \beta) & \varphi_{n,1}(t_0; \beta) \\ \varphi_{n,1}(t_0; \beta) & \varphi_{n,2}(t_0; \beta) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} T_{n,0}(t_0; \beta) \\ T_{n,1}(t_0; \beta) \end{pmatrix},$$

则

$$\begin{aligned}
 T_{n,k}(t_0; \beta) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_h(\beta^T U_i - t_0) \left(\frac{\beta^T U_i - t_0}{h} \right)^k Z_i \left(\alpha_0^T(\beta^T U_i) Z_i + \theta^T X_i + \varepsilon_i - \hat{\theta}^T X_i \right) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_h(\beta^T U_i - t_0) \left(\frac{\beta^T U_i - t_0}{h} \right)^k Z_i \left(\alpha_0^T(\beta^T U_i) Z_i + \varepsilon_i - (\hat{\theta} - \theta)^T X_i \right) \\
 &= \eta_{n,k}(t_0; \beta) + \Delta_{n,k}(t_0; \beta) - B_{n,k}(t_0; \beta), \tag{3.24}
 \end{aligned}$$

由引理 2 中 $\|\hat{\theta} - \theta\| = O_p(n^{-1/2})$, 对 $\alpha_0(\beta^T U_i)$ 中 t_0 进行泰勒展开, 再结合 (3.23) 和 (3.24), 我们可得到

$$\begin{aligned}
 \eta_{n,k}(t_0; \beta) &= \varphi_{n,k}(t_0; \beta) \alpha_0(t_0) + h \varphi_{n,k+1}(t_0; \beta) \alpha_0'(t_0) \\
 &\quad + \frac{h^2}{2} \varphi_{n,k+2}(t_0; \beta) \alpha_0''(t_0) + o_p(h^2), \tag{3.25}
 \end{aligned}$$

$$B_{n,k}(t_0; \beta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_h(\beta^T U_i - t_0) \left(\frac{\beta^T U_i - t_0}{h} \right)^k Z_i X_i^T (\hat{\theta} - \theta) = O_p(n^{-1/2}) \tag{3.26}$$

通过 (3.24) 至 (3.26), 可以得到

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} T_{n,0}(t_0; \beta) - \Delta_{n,0}(t_0; \beta) \\ T_{n,1}(t_0; \beta) - \Delta_{n,1}(t_0; \beta) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \varphi_{n,0}(t_0; \beta) & \varphi_{n,1}(t_0; \beta) \\ \varphi_{n,1}(t_0; \beta) & \varphi_{n,2}(t_0; \beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0(t_0) \\ h \alpha_0'(t_0) \end{pmatrix} \\
 &\quad + \frac{h^2}{2} \begin{pmatrix} \varphi_{n,2}(t_0; \beta) \alpha_0''(t_0) \\ \varphi_{n,3}(t_0; \beta) \alpha_0''(t_0) \end{pmatrix} + o_p(h^2), \tag{3.27}
 \end{aligned}$$

因为 $\beta \in B_n$, 我们可以得到

$$\Delta_{n,k}(t_0; \beta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_h(\beta^T U_i - t_0) \left(\frac{\beta^T U_i - t_0}{h} \right)^k Z_i \varepsilon_i = O_p \left(h^2 + \left\{ \frac{\log n}{nh} \right\}^{1/2} \right), \tag{3.28}$$

结合以上 (3.27) 和 (3.28), 可以得到

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \hat{\alpha}(t_0; \beta) - \alpha_0(t_0; \beta) \\ h \{ \hat{\alpha}'(t_0; \beta) - \alpha_0'(t_0; \beta) \} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \varphi_{n,0}(t_0; \beta) & \varphi_{n,1}(t_0; \beta) \\ \varphi_{n,1}(t_0; \beta) & \varphi_{n,2}(t_0; \beta) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Delta_{n,0}(t_0; \beta) \\ \Delta_{n,1}(t_0; \beta) \end{pmatrix} \\
 &\quad + \frac{h^2}{2} \begin{pmatrix} \alpha_0''(t_0) \mu_2 \\ \alpha_0''(t_0) \mu_3 / \mu_2 \end{pmatrix} + o_p(h^2) = O_p \left(\left\{ \frac{\log n}{nh} \right\}^{1/2} + h^2 \right), \tag{3.29}
 \end{aligned}$$

这样就得到的定理 3.1 的结论成立。

定理 3.2 的证明

记 $\Upsilon = E \left[J_{\beta_0^{(1)}}^T U \alpha_0'^T (\beta_0^T U) Z - \Gamma (\beta_0^T U) \Psi^{-1} (\beta_0^T U) Z \right]^{\otimes 2}$, Υ^+ 表示对称矩阵 Υ 的逆,

$$\Theta = E \left[J_{\beta_0^{(1)}}^T U \alpha_0'^T (\beta_0^T U) Z Z^T \alpha_0' (\beta_0^T U) (U - E(U | \beta_0^T U))^T J_{\beta_0^{(1)}} \right],$$

$$\lambda(\beta) = \sum_{i=1}^n \left\{ Y_i - \hat{\alpha}^T(\beta^T U_i) Z_i - \hat{\theta}^T X_i \right\}^2, \quad N(\beta, \hat{\theta}) = \frac{1}{2} \partial \lambda(\beta) / \partial \beta^{(1)},$$

$$\hat{H}_\beta^* = \left(\hat{\alpha}^T(\beta^T U_1; \beta) Z_1, \dots, \hat{\alpha}^T(\beta^T U_n; \beta) Z_n \right)^T = S_\beta (Y - X \hat{\theta}),$$

经过计算可以得到

$$\begin{aligned} \lambda(\beta) &= (Y - X \hat{\theta} - \hat{H}_\beta^*)^T (Y - X \hat{\theta} - \hat{H}_\beta^*) \\ &= (Y - X \hat{\theta})^T (I_n - S_\beta)^T (I_n - S_\beta) (Y - X \hat{\theta}) \\ &= (Y - X \hat{\theta})^T (I_n - S_\beta)^T (I_n - S_\beta) (Y - X \theta_0) \\ &\quad - 2(Y - X \hat{\theta})^T (I_n - S_\beta)^T (I_n - S_\beta) X (\hat{\theta} - \theta_0) \\ &\quad + \left\{ X (\hat{\theta} - \theta_0) \right\}^T (I_n - S_\beta)^T (I_n - S_\beta) X (\hat{\theta} - \theta_0) \\ &= \lambda_1(\beta) - \lambda_2(\beta) + \lambda_3(\beta). \end{aligned}$$

由引理 2, 可以得到 $\lambda_2(\beta) = G + o_p(\sqrt{n})$ 和 $\lambda_3(\beta) = o_p(\sqrt{n})$, 这里的 G 表示一个常数。那么

$$\lambda(\beta) = \lambda_1(\beta) - G + o_p(\sqrt{n}), \quad N(\beta, \hat{\theta}) = N_0(\beta, \theta_0) + o_p(\sqrt{n}),$$

则

$$\begin{aligned} N_0(\beta, \theta_0) &= -\frac{1}{2} \partial \lambda_1(\beta) / \partial \beta^{(1)} \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ Y_i - \hat{\alpha}(\beta^T U_i) Z_i - \theta_0^T X_i \right\} \hat{\alpha}^T(\beta^T U_i) Z_i J_{\beta_0^{(1)}}^T U_i w(\beta^T Z_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \alpha_0'^T(\beta_0^T U_i) Z_i J_{\beta_0^{(1)}}^T U_i w(\beta^T Z_i) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \left\{ \hat{\alpha}^T(\beta^T U_i) - \alpha_0'^T(\beta_0^T U_i) \right\}^T Z_i J_{\beta_0^{(1)}}^T U_i w(\beta^T Z_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\sum_{i=1}^n \left\{ \hat{\alpha}(\beta^T U_i) - \hat{\alpha}(\beta_0^T U_i) \right\}^T Z_i \hat{\alpha}'(\beta^T U_i) Z_i J_{\beta^{(l)}}^T U_i w(\beta^T Z_i) \\
 & -\sum_{i=1}^n \left\{ \hat{\alpha}(\beta_0^T U_i) - \alpha_0(\beta_0^T U_i) \right\}^T Z_i \hat{\alpha}'(\beta^T U_i) Z_i J_{\beta^{(l)}}^T U_i w(\beta^T Z_i) \\
 & = \Pi_1 + \Pi_2 - \Pi_3 - \Pi_4.
 \end{aligned}$$

由于 $\beta \in B_n$, 当 $\|\beta\|=1$ 时, $\|\beta^{(l)} - \beta_0^{(l)}\| \leq cn^{-1/2}$, 我们知道 $J_{\beta^{(l)}} - J_{\beta_0^{(l)}} = O_p(n^{-1/2})$, 结合引理 1 和大数定律, 经过简单计算可以得到 $\Pi_2 = o_p(\sqrt{n})$ 。对 Π_3 中的 $\beta^{(l)} - \beta_0^{(l)}$ 进行泰勒展开, 可以得到

$$\begin{aligned}
 \Pi_3 &= \sum_{i=1}^n \left\{ \hat{\alpha}(\beta^T U_i) - \hat{\alpha}(\beta_0^T U_i) \right\}^T Z_i \alpha_0'(\beta^T U_i) Z_i J_{\beta^{(l)}}^T U_i w(\beta^T X_i) \\
 &+ \sum_{i=1}^n \left\{ \hat{\alpha}(\beta^T U_i) - \hat{\alpha}(\beta_0^T U_i) \right\}^T Z_i \left\{ \hat{\alpha}'(\beta^T U_i) - \alpha_0'(\beta_0^T U_i) \right\}^T Z_i J_{\beta^{(l)}}^T U_i w(\beta^T X_i) \\
 &= \sum_{i=1}^n J_{\beta_0^{(l)}}^T U_i \alpha_0'(\beta_0^T U_i) Z_i \alpha_0'(\beta_0^T U_i) Z_i \left\{ U_i - E(U_i | \beta_0^T U_i) \right\}^T \\
 &J_{\beta_0^{(l)}}(\beta^{(l)} - \beta_0^{(l)}) + o_p(\sqrt{n}).
 \end{aligned}$$

对于 Π_4 , 我们用定理 3.1 的 (3.28)、(3.29) 和控制收敛定理 LoeVe^[35], 我们可以得到

$$\begin{aligned}
 \Pi_4 &= \sum_{i=1}^n \left(\left\{ \hat{\alpha}(\beta_0^T U_i) - \alpha_0(\beta_0^T U_i) \right\}^T Z_i \alpha_0'^T(\beta_0^T U_i) Z_i J_{\beta^{(l)}}^T U_i \right. \\
 &\quad \left. - E \left\{ \hat{\alpha}(\beta_0^T U_i) - \alpha_0(\beta_0^T U_i) \right\}^T Z_i \alpha_0'^T(\beta_0^T U_i) Z_i J_{\beta_0^{(l)}}^T U_i \right) \\
 &\quad + n E \left(\left\{ \hat{\alpha}(\beta_0^T U) - \alpha_0(\beta_0^T U) \right\}^T Z \alpha_0'^T(\beta_0^T U) Z J_{\beta_0^{(l)}}^T U \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \Gamma(\beta_0^T U_i) \Psi^{-1}(\beta_0^T U_i) Z_i + o_p(\sqrt{n}),
 \end{aligned}$$

综上所述, $\hat{\beta}$ 是满足方程 $N_0(\hat{\beta}, \theta_0) = 0$, 此方程与上述等式结合的结果就可以得到定理 3.2 的结论。

定理 3.3 的证明

$$\begin{aligned}
 \sqrt{n}(\tilde{\theta} - \theta_0) &= \sqrt{n} \left\{ X^T (I_n - S_{\hat{\beta}})^T (I_n - S_{\hat{\beta}}) X \right\}^{-1} \\
 &\quad X^T (I_n - S_{\hat{\beta}})^T (I_n - S_{\hat{\beta}}) (Y - X\theta_0) \\
 &= \left\{ n^{-1} X^T (I_n - S_{\hat{\beta}})^T (I_n - S_{\hat{\beta}}) X \right\}^{-1} n^{-1/2} \\
 &\quad X^T (I_n - S_{\hat{\beta}})^T (I_n - S_{\hat{\beta}}) (H_\beta + \varepsilon) \\
 &= \nu_1 + \nu_2,
 \end{aligned}$$

因为 $\beta \in B_n$, $\|\hat{\beta} - \beta_0\| = O_p(n^{-1/2})$, 由 A5 和引理 3.2 可得,

$$\begin{aligned}
 \nu_1 &= \left\{ n^{-1} X^T (I_n - S_{\hat{\beta}})^T (I_n - S_{\hat{\beta}}) X \right\}^{-1} n^{-1/2} X^T (I_n - S_{\hat{\beta}})^T (I_n - S_{\hat{\beta}}) H_\beta \\
 &= \left\{ n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \left\{ X_i - C^T (\beta_0^T U_i) \Psi^{-1} (\beta_0^T U_i) Z_i \right\} \left\{ X_i^T - Z_i^T \Psi^{-1} (\beta_0^T U_i) C (\beta_0^T U_i) \right\} \right\}^{-1} \\
 &\quad n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \tilde{X}_i \left\{ \alpha_0^T (\beta^T U_i) Z_i - [Z_i^T, 0_d] (R_{i,\beta}^T W_{i,\beta} R_{i,\beta})^{-1} R_{i,\beta} W_{i,\beta} H_\beta \right\} + O_p(\delta_n + n^{-1/2}) \\
 &= n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \left\{ X_i - C^T (\beta_0^T U_i) \Psi^{-1} (\beta_0^T U_i) Z_i + O_p(\delta_n) Z_i^T \alpha_0 (\beta^T U_i) O_p(\delta_n) \right\} \\
 &\quad \left\{ E \left[X - C^T (\beta_0^T U) \Psi^{-1} (\beta_0^T U) Z \right]^{\otimes 2} \right\}^{-1} = O_p(n^{1/2} \delta_n^2) = O_p(1), \\
 \nu_2 &= \left\{ n^{-1} X^T (I_n - S_{\hat{\beta}})^T (I_n - S_{\hat{\beta}}) X \right\}^{-1} n^{-1/2} X^T (I_n - S_{\hat{\beta}})^T (I_n - S_{\hat{\beta}}) \varepsilon \\
 &= \left\{ E \left[X - C^T (\beta_0^T U) \Psi^{-1} (\beta_0^T U) Z \right]^{\otimes 2} \right\}^{-1},
 \end{aligned}$$

结合引理 3.1、引理 3.2 和大数定律, 得到定理 3.3 的结论。

定理 3.4 的证明

$$\text{记 } M = (\hat{X}^T \hat{X})^{-1}, \quad \phi = I - M^{-1} A^T [A M^{-1} A^T]^{-1} A,$$

$$\hat{\theta}_c - \theta_0 = (\hat{X}^T \hat{X})^{-1} \hat{X}^T \hat{Y} - (\hat{X}^T \hat{X})^{-1} A^T \left[A (\hat{X}^T \hat{X})^{-1} A^T \right]^{-1} (A \tilde{\theta} - b) - \theta_0$$

$$\begin{aligned}
 &= M^{-1} \hat{X}^{-1} \hat{Y} - M^{-1} A^T [AM^{-1} A^T]^{-1} (AM^{-1} \hat{X}^{-1} \hat{Y} - A\theta_0) - \theta_0 \\
 &= \left(I - M^{-1} A^T [AM^{-1} A^T]^{-1} A \right) (M^{-1} \hat{X}^{-1} \hat{Y} - \theta_0) \\
 &= \left(I - M^{-1} A^T [AM^{-1} A^T]^{-1} A \right) (\hat{\theta} - \theta_0),
 \end{aligned}$$

结合上式和引理 3.2 可得到定理 3.4 结论。

3.5 数值模拟

我们通过蒙特卡洛模拟样本在有限维时建议的方法效果, 考虑以下部分线性单指标变系数模型:

$$Y_i = \alpha_1 (\beta_0^T U_i) Z_{i1} + \alpha_2 (\beta_0^T U_i) Z_{i2} + \theta_0^T X_i + \varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, n,$$

其中 $\alpha_1(t) = 2 \exp(t)$, $\alpha_2(t) = 1 - 5t^2$, $U_i = (U_{i1}, U_{i2})^T$, $\beta_0 = (\beta_{01}, \beta_{02})^T = (1/3, 2/3)$, $\theta_0 = (\theta_{01}, \theta_{02})^T = (1.6, 0.9)^T$, $Z_i = (Z_{i1}, Z_{i2})^T$, $X_i = (X_{i1}, X_{i2})^T$, $i = 1, \dots, n$ 。采用 Epanechnikov 核函数 $K(t) = 0.75(1-t^2)I(|t| \leq 1)$ 。 U_{ij} , $j = 1, 2$ 是服从 $[-1, 1]$ 上的均匀分布的独立随机向量, X_i 满足 $E(X_i) = 0$, $Cov(X_{ik}, X_{il}) = 2 \times 0.5^{|k-l|}$, $k, l = 1, 2$ 的多元正态分布, $Z_{ij} \sim N(0, 2)$, $j = 1, 2$; $\varepsilon_i \sim N(0, 0.6)$ 。

我们考虑用逐步估计的方法来估计指标参数、系数参数和系数函数, 样本量分别为 50, 100, 200, 共进行 200 次模拟重复运行计算偏差 (Bias)、标准差 (SD) 和均方误差 (RMSE)。此时对模型 (2) 的参数部分附加线性约束条件 $A\theta = b$, 其中 $A = (1, 1)$, $b = 2$, 下面我们可以分别得到系数参数和指标函数参数的无约束估计和有约束估计量。

表 3-1 系数参数在有无约束条件下估计结果

N	有无约束	Bias($\hat{\theta}_{01}$)	SD($\hat{\theta}_{01}$)	RMSE($\hat{\theta}_{01}$)	Bais($\hat{\theta}_{02}$)	SD($\hat{\theta}_{02}$)	RMSE($\hat{\theta}_{02}$)
50	无	0.0592	0.0731	0.0794	0.0626	0.0778	0.0783
50	有	0.0503	0.0652	0.0627	0.0601	0.0721	0.0742
100	无	0.0386	0.0468	0.0475	0.0447	0.0522	0.0544
100	有	0.0331	0.0441	0.0462	0.0413	0.0516	0.0501
200	无	0.0182	0.0305	0.0354	0.0325	0.0372	0.0364
200	有	0.0141	0.0287	0.0307	0.0314	0.0327	0.0331

表 3-2 指标函数参数在有无约束条件下估计结果

N	有无约束	Bais($\hat{\beta}_{01}$)	SD($\hat{\beta}_{01}$)	RMSE($\hat{\beta}_{01}$)	Bais($\hat{\beta}_{02}$)	SD($\hat{\beta}_{02}$)	RMSE($\hat{\beta}_{02}$)
50	无	0.0276	0.0284	0.0291	0.0185	0.0217	0.0163
50	有	0.0243	0.0217	0.0238	0.0141	0.0184	0.0134
100	无	0.0128	0.0145	0.0183	0.0107	0.0118	0.0105
100	有	0.0105	0.0126	0.0147	0.0072	0.0098	0.0085
200	无	0.0045	0.0059	0.0063	0.0057	0.0064	0.0075
200	有	0.0023	0.0026	0.0026	0.0028	0.0035	0.0044

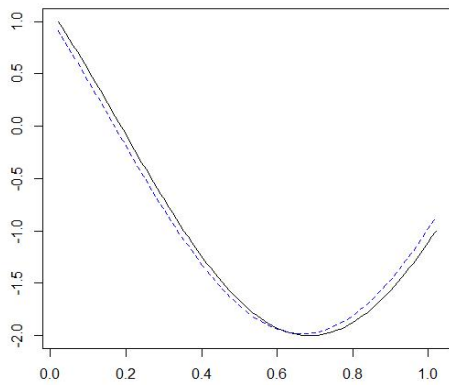


图 3-1 $\alpha_1(\cdot)$ 的估计结果

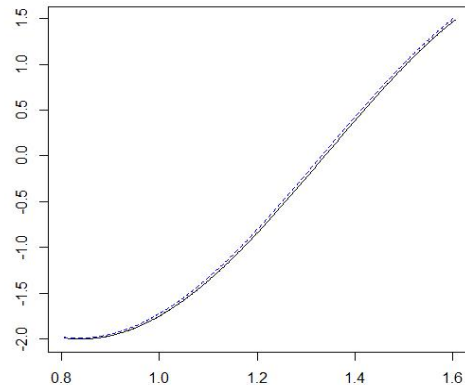


图 3-2 $\alpha_2(\cdot)$ 的估计结果

从表 3-1 和表 3-2 可知：

(1) 无论在有无约束条件下，随着样本点的增多，系数参数和指标函数参数的偏差、标准差和均方误差都在减小。

(2) 在样本容量相同的情况下，有约束条件下的系数参数和指标函数参数的偏差、标准差和均方误差都在减小。

图 3-1 和图 3-2 分别为样本容量 $N = 200$ 时，在考虑约束条件下和无约束条件下的指标函数 $\alpha_1(\cdot)$ 和 $\alpha_2(\cdot)$ ，从中可以看出，指标函数的估计结果在有约束条件下拟合曲线的效果较好，说明有约束估计优于无约束估计的性能。在相同环境中，部分线性单指标变系数模型的参数在有约束条件下与无约束条件下的评价指标相比，精确度更高，使得模型更稳定。

3.6 本章小结

本文在部分线性单指标变系数模型框架下，构建参数部分的约束估计量，并

证明了所得估计量的渐近性质, 然后进行数值模拟, 考虑在样本容量相同条件下, 模型在有约束条件下的系数参数和指标函数参数优于无约束条件下的参数。研究了部分线性单指标变系数模型在参数分量满足线性约束条件下的统计推断结论, 提高模型估计的效率。在本文结论的基础上, 可进一步探究含有测量误差、缺失数据等情况下部分线性单指标变系数模型的约束估计。

第 4 章 带有测量误差的部分线性单指标变系数模型的随机约束估计

本章研究随机约束条件下含有测量误差的部分线性单指标变系数模型,当模型中协变量部分都存在测量误差,提出了偏差校正分量来消除误差,最后构建参数部分的随机约束估计量,并在适当正则条件下证明了所给估计量满足渐近正态分布,使得模型应用越广泛。

4.1 模型框架

在实践中,测量到的数据往往不是真实的数据,由于测量工具、环境等外因而带有测量误差,可能导致不一致的估计,含有测量误差的部分线性单指标变系数模型为:

$$\begin{cases} Y = \alpha^T (\beta^T U) Z + \theta^T X + \varepsilon, \\ V = Z + u, \end{cases} \quad (4.1)$$

其中 Y 是响应变量, $X \in R^q$, $Z \in R^d$, $U \in R^p$ 是协变量,随机误差项 ε 与 (Y, Z, X) 独立,且 $E(\varepsilon | Z, X, U) = 0$ 和 $Var(\varepsilon | Z, X, U) = \sigma^2$ 。 $\alpha(\cdot) = (\alpha_1(\cdot), \alpha_2(\cdot), \dots, \alpha_d(\cdot))^T$ 是未知单指标向量函数。其中测量误差 u , 不可直接观测,能够得到的是带有测量误差的变量 V , 假设 (X, Z, U, ε) 相互独立, 且 $Cov(u) = \Sigma_u$ 。

当参数分量附加随机约束条件时,可以有效提升模型的稳定性,考虑如下的随机约束条件:

$$A\theta + \eta = d,$$

其中 A 是 $k \times q$ 的行满秩的已知矩阵, d 是 $k \times 1$ 的已知向量, 且 $E(\eta) = 0$, 协方差矩阵为 $\sigma^2 \Theta$ 的随机向量, Θ 为已知正定矩阵。

本章认为协变量 Z 是带有测量误差的, 因此易出错协变量的真实值总是不可测的, 对其进行任何建模假设都可能导致模型的错误规范。函数方法包括回归校准^[36]、分数函数法和模拟外推法SIMEX^[37], 这些方法的测量误差方差是已知的

或是可估计的。Xue和Feng^[38]提出了一种正则化变量选择方法考虑单指标变系数模型的变量问题，同时适当选择调节参数，建立了变量选择过程的相合性和估计量的oracle性质。Fan^[39]结合局部线性回归和分位数回归，提出了一种两阶段复合分位数回归估计方法，并建立了估计量的渐近性质。

4.2 估计方法

首先假设模型中变量都不带有测量误差，通过局部线性回归和Newton-Raphson算法进行估计参数和指标函数，得到不含有测量误差时指标函数的初步估计为

$$\hat{\alpha}(t_0; \beta_0, \theta_0) = (I_d \ 0_d) \left(R_{0, \beta_0}^T W_{0, \beta_0} R_{0, \beta_0} \right)^{-1} R_{0, \beta_0}^T W_{0, \beta_0} (Y - X \tilde{\theta}), \quad (4.2)$$

其中 R_{0, β_0}^T 和 W_{0, β_0} 与上一节定义相同。

以上是模型不含测量误差的指标函数的估计量，但是 Z_i 是含有测量误差的，所以结合 You^[40]的思路，引入校正分量 Ω 来消除由测量误差引起的误差。

当 $t_i = \beta_0 U_i$ ， $V = Z + u$ ，可得

$$\Omega = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Sigma_u \otimes \begin{pmatrix} 1 & \frac{t_i - t_0}{h} \\ \frac{t_i - t_0}{h} & \left(\frac{t_i - t_0}{h} \right)^2 \end{pmatrix} K_h(t_i - t_0),$$

$$(R_{0, \beta_0}^V)^T W_{0, \beta_0} R_{0, \beta_0}^V = \begin{pmatrix} V_1^T & V_2^T & \cdots & V_n^T \\ \frac{t_1 - t_0}{h} V_1^T & \frac{t_2 - t_0}{h} V_2^T & \cdots & \frac{t_n - t_0}{h} V_n^T \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} K_h(t_1 - t_0) & & & \\ & K_h(t_2 - t_0) & & \\ & & \ddots & \\ & & & K_h(t_n - t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^T & \frac{t_1 - t_0}{h} V_1^T \\ V_2^T & \frac{t_2 - t_0}{h} V_2^T \\ \vdots & \vdots \\ V_n^T & \frac{t_n - t_0}{h} V_n^T \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{n} \left(R_{0,\beta_0}^V \right)^T W_{0,\beta_0} R_{0,\beta_0}^V &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i Z_i^T \otimes \begin{pmatrix} 1 & \frac{t_i - t_0}{h} \\ \frac{t_i - t_0}{h} & \left(\frac{t_i - t_0}{h} \right)^2 \end{pmatrix} K_h(t_i - t_0) \\
 &+ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Sigma_u \otimes \begin{pmatrix} 1 & \frac{t_i - t_0}{h} \\ \frac{t_i - t_0}{h} & \left(\frac{t_i - t_0}{h} \right)^2 \end{pmatrix} K_h(t_i - t_0) \\
 &+ O \left\{ \left(\frac{\log n}{nh} \right)^{1/2} \right\}, \tag{4.3}
 \end{aligned}$$

其中 $\otimes$ 表示 Kronecker 乘积。Kronecker 乘积计算方式如下

设有 $k \times q$ 维矩阵 $A = (a_{ij})$, $q \times d$ 为 矩阵 $B = (b_{ij})$, a_{ij} 和 b_{ij} 分别表示 a_i 与 b_i 的 j 个元素, 则

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \cdots & a_{nn}B \end{pmatrix},$$

下面对 $e = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_d, h\hat{b}_1, h\hat{b}_2, \dots, h\hat{b}_d) = (R_{0,\beta_0}^T W_{0,\beta_0} R_{0,\beta_0}^T)^{-1} R_{0,\beta_0}^T W_{0,\beta_0} (Y - X\tilde{\theta})$ 进行局部纠偏可以得到

$$e_1 = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_d, h\hat{b}_1, h\hat{b}_2, \dots, h\hat{b}_d) = \left((R_{0,\beta_0}^V)^T W_{0,\beta_0} R_{0,\beta_0}^V - \Omega \right)^{-1} (R_{0,\beta_0}^V)^T W_{0,\beta_0} (Y - X\tilde{\theta}),$$

其中

$$\Omega = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Sigma_u \otimes \begin{pmatrix} 1 & \frac{t_i - t_0}{h} \\ \frac{t_i - t_0}{h} & \left(\frac{t_i - t_0}{h} \right)^2 \end{pmatrix} K_h(t_i - t_0).$$

则模型中指标函数的纠偏估计量为

$$\hat{\alpha}(t_0; \beta_0, \theta_0) = (I_q \ 0_{q \times q}) \left((R_{0,\beta_0}^V)^T W_{0,\beta_0} R_{0,\beta_0}^V - \Omega \right)^{-1} (R_{0,\beta_0}^V)^T W_{0,\beta_0} (Y - X\tilde{\theta}). \tag{4.4}$$

记 S_1 为局部线性回归的光滑矩阵

$$\hat{S}_{\beta_0} = \begin{pmatrix} [V_1^T, 0_d] (R_{1,\beta_0}^T W_{1,\beta_0} R_{1,\beta_0} - \Omega)^{-1} R_{1,\beta_0} W_{1,\beta_0} \\ \vdots \\ [V_n^T, 0_d] (R_{n,\beta_0}^T W_{n,\beta_0} R_{n,\beta_0} - \Omega)^{-1} R_{n,\beta_0} W_{n,\beta_0} \end{pmatrix},$$

$$Q = (I_q, 0_d) \left((R_{0,\beta_0}^V)^T W_{0,\beta_0} R_{0,\beta_0}^V - \Omega \right)^{-1} (R_{0,\beta_0}^V)^T W_{0,\beta_0},$$

$$\hat{X} = (I_n - \hat{S}_{\beta_0}) X, \hat{Y} = (I_n - \hat{S}_{\beta_0}) Y,$$

极小化上式

$$\min \sum_{i=1}^n \left(Y_i - \hat{\alpha}^T(t_0; \beta_0, \theta_0) V_i - \tilde{\theta}^T X_i \right)^2 - \sum_{i=1}^n \hat{\alpha}^T(t_0; \beta_0, \theta_0) \Sigma_u \hat{\alpha}^T(t_0; \beta_0, \theta_0),$$

可得到 θ 的纠偏profile最小二乘估计为

$$\hat{\theta} = (\hat{X}^T \hat{X} - X^T Q^T \Sigma_u Q X)^{-1} (\hat{X}^T \hat{Y} - X^T Q^T \Sigma_u Q Y).$$

将估计值 $\hat{\theta}$ 代入 (4.4) 式中, 可以得到 $\hat{\alpha}(t_0; \beta_0, \theta_0)$ 的纠偏估计

$$\hat{\alpha}(t_0; \beta_0, \theta_0) = (I_d, 0_d) \left((R_{0,\beta_0}^V)^T W_{0,\beta_0} R_{0,\beta_0}^V - \Omega \right)^{-1} (R_{0,\beta_0}^V)^T W_{0,\beta_0} (Y - X \hat{\theta}).$$

以上是在 β_0 已知的情况下, 得到了没有约束条件下的参数以及指标函数的纠偏估计量, 但是在实际情况中不知道 β_0 的真实值, 所以用上一章最小误差平方和的方法来估计 β_0 , 并用Newton-Raphson算法的Fisher评分方法来求解估计方程, 得到最终估计量 $\hat{\beta}$, 替换上式得到最终指标函数估计量

$$\hat{X} = (I_n - \hat{S}_{\hat{\beta}}) X, \hat{Y} = (I_n - \hat{S}_{\hat{\beta}}) Y,$$

$$\tilde{\theta} = (\hat{X}^T \hat{X} - X^T Q^T \Sigma_u Q X)^{-1} (\hat{X}^T \hat{Y} - X^T Q^T \Sigma_u Q Y),$$

$$\hat{\alpha}(t_0; \hat{\beta}) = (I_d, 0_d) \left((R_{0,\hat{\beta}}^V)^T W_{0,\hat{\beta}} R_{0,\hat{\beta}}^V - \Omega \right)^{-1} (R_{0,\hat{\beta}}^V)^T W_{0,\hat{\beta}} (Y - X \tilde{\theta}).$$

对于存在约束条件 $A\theta + \eta = d$ 下的模型, 参考Durbin^[41], Theil^[42], Theil^[43]文献的混合估计方法, 将样本与约束条件相结合, 得到如下模型

$$\begin{bmatrix} \widehat{Y} \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{X} \\ A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \eta \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

对模型 (4.5) 采用广义最小二乘估计, θ 的估计使得如下函数达到最小

$$F(\theta) = (\widehat{Y} - \theta^T \widehat{X})^T (\widehat{Y} - \theta^T \widehat{X}) - \widehat{\alpha}^T(t_0; \widehat{\beta}) \Sigma_u \widehat{\alpha}(t_0; \widehat{\beta}) + (d - A\theta)^T \Theta^{-1} (d - A\theta), \quad (4.6)$$

对 (4.6) 式中 θ 求偏导并让其为 0, 得到

$$\frac{\partial F(\theta)}{\partial \theta} = -2\widehat{X}^T (\widehat{Y} - \theta^T \widehat{X}) + 2\widehat{X}^T Q^T \Sigma_u Q (Y - \theta^T X) + 2A^T \Theta^{-1} (d - A\theta) = 0,$$

整理得到 θ 的混合估计

$$\theta_{PM} = \left(\widehat{X}^T \widehat{X} + A^T \Theta^{-1} A - X^T Q^T \Sigma_u Q X \right)^{-1} \left(\widehat{X}^T \widehat{Y} - X^T Q^T \Sigma_u Q Y + A^T \Theta^{-1} d \right),$$

再代入 $\widehat{\alpha}(t_0; \widehat{\beta})$ 中可得到指标函数估计的随机约束估计

$$\widehat{\alpha}(t_0; \widehat{\beta}) = (I_d, 0_d) \left(\left(R_{0, \widehat{\beta}}^V \right)^T W_{0, \widehat{\beta}} R_{0, \widehat{\beta}}^V - \Omega \right)^{-1} \left(R_{0, \widehat{\beta}}^V \right)^T W_{0, \widehat{\beta}} (Y - X\theta_{PM}).$$

4.3 主要结论

在讨论样本性质之前, 先给出一些正则性条件:

(A1) $\beta^T U$ 的密度函数 $f(\cdot)$ 对 T 和接近于 β_0 的点 β 有界远离 0, 且在 T 上满足 1 阶 Lipschitz 条件, 其中 T 是 $\beta^T U$ 的支撑。

(A2) 矩阵 $\Psi(t_0)$ 是非退化的, 且 $\Psi(t_0)$ 和 $C(t_0)$ 的每一个元素在 T 上满足 1 阶 Lipschitz 条件, 其中 $\Psi(t_0) = E(ZZ^T | \beta_0^T U = t_0)$, $C(t_0) = E(ZX^T | \beta_0^T U = t_0)$ 。

(A3) 存在常数 $s > 2$, 使得 $E\|Z\|^{2s} < \infty$, $E\|X\|^{2s} < \infty$, $E\|\varepsilon\|^{2s} < \infty$, $E\|u\|^{2s} < \infty$, 其中 $l < 2 - s^{-1}$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $n^{2s-1} \rightarrow \infty$ 。

(A4) $\{(Y_i, U_i, Z_i, X_i), 1 \leq i \leq n\}$ 是严平稳强混合序列, $Q(n) = O(\rho^n)$ 具有混合系数, 其中 $0 < \rho < 1$ 为某个常数。

(A5) $nh^2 / \log^2 n \rightarrow \infty$, $nh^4 \log n \rightarrow 0$; $nhh_1^3 / \log^2 n \rightarrow \infty$, $nh_1^5 = O(1)$ 。

(A6) 函数 $\alpha_j(\cdot)$ ($1 \leq j \leq d$) 在 T 上是有界连续的二阶导数, 其中 $\alpha_j(\cdot)$ 是第 j 个分量。

(A7) 核 $K(\cdot)$ 在其支撑 $(-1,1)$ 上是具有有界导数的对称概率密度函数。

记 $\nu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} u_k K^2(u) du$, $\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} u^k K(u) du$, $k=0,1,2,4$ 。

定理 4.1 若条件(A1)-(A7)成立, 则

$$\sqrt{n}(\theta_{PM} - \theta) \xrightarrow{L} N(0, \Lambda_2^{-1} \Lambda_1 \Lambda_2^{-1}),$$

其中

$$\Lambda_2 = E(X_1 X_1^T) - E\{C^T(t_0) \Psi^{-1}(t_0) C(t_0)\}, \quad A^{\otimes 2} = A A^T,$$

$$\begin{aligned} \Lambda_1 = & E\left\{(\varepsilon_i - u_i^T \alpha(t_0))^2\right\} \Lambda + \sigma^2 E\left\{C(t_0) \Psi^{-1}(t_0) \Sigma_u \Psi^{-1}(t_0) C(t_0)\right\} \\ & + E\left\{C(t_0) \Psi^{-1}(t_0) (u_1 u_1^T - \Sigma_u) \alpha(t_0)\right\}^{\otimes 2}. \end{aligned}$$

定理 4.2 若 $\alpha(t_0)$ 为真值, 则

$$\sqrt{nh} \left[\hat{\alpha}(t_0) - \alpha(t_0) - \frac{h^2}{2} \frac{(\mu_3 - \mu_1 \mu_2)}{\mu_2 - \mu_1^2} \begin{pmatrix} \alpha''(t_0) \\ \alpha'''(t_0) \end{pmatrix} \right] \xrightarrow{D} (0, f^{-1}(t_0) \Psi^{-1}(t_0) \nabla \Lambda_3),$$

其中

$$\nabla = \left[\sigma^2 \Psi(t_0) + \sigma^2 \Sigma_u + E\left\{\xi_1 \alpha(t_0) \alpha^T(t_0) \xi_1^T\right\} \right] \Psi^{-1}(t_0), \quad \xi_1 = \Sigma_u - u_1 u_1^T - X_1 u_1^T,$$

$$\Lambda_3 = \frac{1}{(\mu_2 - \mu_1^2)^2} \begin{pmatrix} \mu_2^2 \nu_0 - 2\mu_1 \mu_2 \nu_1 + \mu_1^2 \nu_2 & (\mu_1^2 + \mu_2) \nu_1 - \mu_1 \mu_2 \nu_0 - \mu_1 \nu_2 \\ (\mu_1^2 + \mu_2) \nu_1 - \mu_1 \mu_2 \nu_0 - \mu_1 \nu_2 & \nu_2 - \mu_1 (2\nu_1 + \mu_1 \nu_0) \end{pmatrix}.$$

引理 4.1 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\sup_{t \in T} \left| \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{t_i - t}{h}\right) \left(\frac{t_i - t}{h}\right)^k Z_{ij} Z_{ij} - f(t_0) \Psi_{ij1}(t_0) \mu_k \right| = O(h^2 + \delta_n),$$

$$\sup_{t \in T} \left| \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{t_i - t}{h}\right) \left(\frac{t_i - t}{h}\right)^k Z_{ij} \varepsilon_i \right| = O(\delta_n),$$

$$\sup_{t \in T} \left| \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{t_i - t}{h}\right) \left(\frac{t_i - t}{h}\right)^k Z_{ij} e_{ij} \right| = O(h^2 + \delta_n),$$

其中 $j_0, j_1, j_2 = 0, \dots, d$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$ 。 $\Psi_{j_1 j_2}(t_0)$ 是矩阵 $\Psi(t_0)$ 的第 (j_1, j_2) 个元

素。

引理 4.2 假设条件成立，则

$$\frac{1}{n} \widehat{X}^T \widehat{X} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X^T Q^T \Sigma_u Q X \rightarrow E(X X^T) - E\{C^T(t_0) \Psi^{-1}(t_0) C^T(t_0)\}。$$

引理 4.3 假设条件成立，则

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta} - \theta) \xrightarrow{L} N(0, \Lambda_2^{-1} \Lambda_1 \Lambda_2^{-1})。$$

4.4 主要结果的证明

定理 4.1 的证明：

$$\text{首先记 } P = \widehat{X}^T \widehat{X} + A^T \Theta^{-1} A - X^T Q^T \Sigma_u Q X，$$

那么参数 θ 的混合估计可以写成

$$\begin{aligned} \theta_{PM} &= p^{-1} \left(\widehat{X}^T \widehat{Y} - X^T Q^T \Sigma_u Q Y + A^T \Theta^{-1} d \right) \\ &= p^{-1} \left\{ \widehat{X}^T (I_n - \widehat{S}_{\widehat{\beta}}) (H_{\beta} + X\theta + \varepsilon) \right. \\ &\quad \left. - X^T Q^T \Sigma_u Q (H_{\beta} + X\theta + \varepsilon) + A^T \Theta^{-1} d \right\} \\ &= p^{-1} \left\{ \widehat{X}^T (I_n - \widehat{S}_{\widehat{\beta}}) (H_{\beta} + \varepsilon) + \widehat{X}^T X\theta \right. \\ &\quad \left. - X^T Q^T \Sigma_u Q (H_{\beta} + \varepsilon) - X^T Q^T \Sigma_u Q X\theta \right. \\ &\quad \left. + A^T \Theta^{-1} (A\theta + \eta) \right\} \\ &= \theta + P^{-1} \left\{ \widehat{X}^T (I_n - \widehat{S}_{\widehat{\beta}}) (H_{\beta} + \varepsilon) \right. \\ &\quad \left. - X^T Q^T \Sigma_u Q (H_{\beta} + \varepsilon) + A^T \Theta^{-1} \eta \right\}, \end{aligned}$$

则

$$\sqrt{n}(\theta_{PM} - \theta) = \sqrt{n} P^{-1} \left\{ \widehat{X}^T (I_n - \widehat{S}_{\widehat{\beta}}) (H_{\beta} + \varepsilon) - X^T Q^T \Sigma_u Q (H_{\beta} + \varepsilon) + A^T \Theta^{-1} \eta \right\},$$

又有

$$\begin{aligned} &\left\{ \widehat{X}^T (I_n - \widehat{S}_{\widehat{\beta}}) (H_{\beta} + \varepsilon) - X^T Q^T \Sigma_u Q (H_{\beta} + \varepsilon) + A^T \Theta^{-1} \eta \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left\{ \widehat{X}_i^T (I - \widehat{S}_{\widehat{\beta}}) (H_{\beta} + \varepsilon_i) - X_i^T Q_i^T \Sigma_u Q_i (H_{\beta} + \varepsilon_i) + A^T \Theta^{-1} \eta \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left\{ \left[X_i - C^T(t_0) \Psi^{-1}(t_0) Z_i \right] \left[\varepsilon_i - u_i^T \alpha(t_0) \right] + A^T \Theta^{-1} \eta \right. \\
 &\quad \left. - C^T(t_0) \Psi^{-1}(t_0) u_i \varepsilon_i + C^T(t_0) \Psi^{-1}(t_0) (u_i u_i^T - \Sigma_u) \alpha(t_0) \right\} + o_p(1) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n G_{in} + o_p(1),
 \end{aligned}$$

并且

$$\text{Cov}(A^T \Theta^{-1} \eta) = A^T \Theta^{-1} \eta, \quad \frac{1}{n} A^T \Theta^{-1} \eta = o_p(1),$$

所以

$$\begin{aligned}
 \text{cov}(G_{in}) &= E \left\{ \left[\varepsilon_i - u_i^T \alpha(t_0) \right] \left[X_i - C^T(t_0) \Psi^{-1}(t_0) Z_i \right] \right\}^{\otimes 2} \\
 &\quad + E \left\{ C^T(t_0) \Psi^{-1}(t_0) (u_i u_i^T - \Sigma_u) \alpha(t_0) \right\}^{\otimes 2} \\
 &\quad + E \left\{ C^T(t_0) \Psi^{-1}(t_0) u_i \varepsilon_i \right\}^{\otimes 2}, \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{cov}(G_{in}) &= E \left\{ \left[\varepsilon_i - u_i^T \alpha(t_0) \right] \right\} \Lambda + \sigma^2 E \left\{ C^T(t_0) \Psi^{-1}(t_0) \Sigma_u C^T(t_0) \Psi^{-1}(t_0) \right\}^{\otimes 2} \\
 &\quad + E \left\{ C^T(t_0) \Psi^{-1}(t_0) (u_i u_i^T - \Sigma_u) \alpha(t_1) \right\}^{\otimes 2},
 \end{aligned}$$

简单计算可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{cov}(G_{in}) \xrightarrow{L} (N, \Lambda_1).$$

结合引理 2, 由 Slutsky 定理及中心极限定理可得

$$\sqrt{n}(\theta_{PM} - \theta) \xrightarrow{L} N(0, \Lambda_2^{-1} \Lambda_1 \Lambda_2^{-1})$$

定理 4.2 的证明:

首先指标函数的约束混合估计量可得

$$\begin{aligned}
 \hat{\alpha}(t_0; \hat{\beta}) &= (I_d, 0_d) \left(\left(R_{0, \hat{\beta}}^V \right)^T W_{0, \hat{\beta}} R_{0, \hat{\beta}}^V - \Omega \right)^{-1} \left(R_{0, \hat{\beta}}^V \right)^T W_{0, \hat{\beta}} (Y - X \theta_{PM}) \\
 &= (I_d, 0_d) \left(\left(R_{0, \hat{\beta}}^V \right)^T W_{0, \hat{\beta}} R_{0, \hat{\beta}}^V - \Omega \right)^{-1} \left(R_{0, \hat{\beta}}^V \right)^T W_{0, \hat{\beta}} (H_\beta + \theta^T X + \varepsilon - X \theta_{PM}) \\
 &= (I_d, 0_d) \left(\left(R_{0, \hat{\beta}}^V \right)^T W_{0, \hat{\beta}} R_{0, \hat{\beta}}^V - \Omega \right)^{-1} \left(R_{0, \hat{\beta}}^V \right)^T W_{0, \hat{\beta}} H_\beta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (I_d, 0_d) \left((R_{0,\hat{\beta}}^V)^T W_{0,\hat{\beta}} R_{0,\hat{\beta}}^V - \Omega \right)^{-1} (R_{0,\hat{\beta}}^V)^T W_{0,\hat{\beta}} X (\theta - \theta_{PM}) \\
 & + (I_d, 0_d) \left((R_{0,\hat{\beta}}^V)^T W_{0,\hat{\beta}} R_{0,\hat{\beta}}^V - \Omega \right)^{-1} (R_{0,\hat{\beta}}^V)^T W_{0,\hat{\beta}} \varepsilon \\
 & = L_1 + L_2 + L_3, \tag{4.7}
 \end{aligned}$$

通过泰勒展开, 可得

$$\alpha_j(t) \approx \alpha_j(t_0) + \alpha_j'(t)(t-t_0) + \frac{1}{2} \alpha_j''(t)(t-t_0)^2 + o_p(h^2),$$

则

$$H_\beta = \begin{pmatrix} \alpha_0^T (\beta^T U_1) Z_1 \\ \vdots \\ \alpha_0^T (\beta^T U_n) Z_n \end{pmatrix} = R_{0,\beta} \begin{pmatrix} \alpha(t_0) \\ h\alpha'(t_0) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} Z_1^T \alpha''(t_1)(t_1-t_0) \\ Z_2^T \alpha''(t_2)(t_2-t_0) \\ \vdots \\ Z_n^T \alpha''(t_n)(t_n-t_0) \end{pmatrix} + o_p(h^2),$$

通过计算可得

$$(R_{0,\hat{\beta}}^V)^T W_{0,\hat{\beta}} H_\beta = (R_{0,\hat{\beta}}^V)^T W_{0,\hat{\beta}} R_{0,\beta} \begin{pmatrix} \alpha(t_0) \\ h\alpha'(t_0) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} h^2 (R_{0,\hat{\beta}}^V)^T W_{0,\hat{\beta}} \mathcal{G} \alpha''(t_0) + o_p(h^2)$$

$$\text{其中} \quad \mathcal{G} = \text{dig} \left\{ \left(\frac{t_1-t_0}{h} \right)^2, \left(\frac{t_2-t_0}{h} \right)^2, \dots, \left(\frac{t_n-t_0}{h} \right)^2 \right\},$$

$$\begin{aligned}
 (R_{0,\hat{\beta}}^V)^T W_{0,\hat{\beta}} R_{0,\beta} \begin{pmatrix} \alpha(t_0) \\ h\alpha'(t_0) \end{pmatrix} &= \left((R_{0,\hat{\beta}}^V)^T W_{0,\hat{\beta}} R_{0,\hat{\beta}}^V - \Omega \right) \begin{pmatrix} \alpha(t_0) \\ h\alpha'(t_0) \end{pmatrix} \\
 &+ \left(- (R_{0,\hat{\beta}}^V)^T W_{0,\hat{\beta}} R_{0,\hat{\beta}}^u + \Omega \right) \begin{pmatrix} \alpha(t_0) \\ h\alpha'(t_0) \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

$$R_{0,\hat{\beta}}^u = \begin{pmatrix} u_1^T & \frac{t_1-t_0}{h} u_1^T \\ u_2^T & \frac{t_2-t_0}{h} u_2^T \\ \vdots & \vdots \\ u_n^T & \frac{t_n-t_0}{h} u_n^T \end{pmatrix},$$

所以

$$\frac{1}{n} (R_{0,\hat{\beta}}^V)^T W_{0,\hat{\beta}} \mathcal{G} Z \alpha''(t_0) = \frac{1}{n} (R_{0,\hat{\beta}}^V)^T W_{0,\hat{\beta}} \mathcal{G} Z \alpha''(t_0) + o_p(\delta_n)$$

$$= f(t_0) \Psi(t_0) \alpha''(t_0) \otimes (\mu_2, \mu_3)^T \{1 + o_p(1)\}, \quad (4.8)$$

从而有

$$\left((R_{0,\hat{\beta}}^V)^T W_{0,\hat{\beta}} R_{0,\hat{\beta}}^V - \Omega \right)^{-1} \left\{ (R_{0,\hat{\beta}}^V)^T W_{0,\hat{\beta}} \mathcal{GZ} \alpha''(t_0) \right\} = \frac{\mu_2^2 - \mu_1 \mu_3}{\mu_2 - \mu_1^2} \begin{pmatrix} \alpha''(t_0) \\ \alpha''(t_0) \end{pmatrix} \{1 + o_p(1)\}, \quad (4.9)$$

由 (4.7) (4.8) (4.9) 式子可得

$$\begin{aligned} L_1 = \alpha(t_0) + \frac{1}{2} h^2 \frac{\mu_2^2 - \mu_1 \mu_3}{\mu_2 - \mu_1^2} \alpha''(t_0) + (I_d, 0_d) \left((R_{0,\hat{\beta}}^V)^T W_{0,\hat{\beta}} R_{0,\hat{\beta}}^V - \Omega \right)^{-1} \\ \left(- (R_{0,\hat{\beta}}^V)^T W_{0,\hat{\beta}} R_{0,\hat{\beta}}^u + \Omega \right) \begin{pmatrix} \alpha(t_0) \\ h \alpha'(t_0) \end{pmatrix} + o_p(\delta_n), \end{aligned} \quad (4.10)$$

结合 4.2 节 (4.3) 可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} (R_{0,\hat{\beta}}^V)^T W_{0,\hat{\beta}} R_{0,\hat{\beta}}^V - \Omega = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i Z_i^T \otimes \begin{pmatrix} 1 & \frac{t_i - t_0}{h} \\ \frac{t_i - t_0}{h} & \left(\frac{t_i - t_0}{h} \right)^2 \end{pmatrix} K_h(t_i - t_0) \\ = n f(t_0) \Psi(t_0) \otimes \begin{pmatrix} 1 & \mu_1 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{pmatrix} \{1 + o_p(1)\}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$(R_{0,\hat{\beta}}^V)^T W_{0,\hat{\beta}} X = n f(t_0) C(t_0) \otimes (1 \quad \mu_1)^T \{1 + o_p(1)\}, \quad (4.12)$$

结合 (4.11), (4.12) 式得到

$$(I_d^T, 0_d) \left((R_{0,\hat{\beta}}^V)^T W_{0,\hat{\beta}} R_{0,\hat{\beta}}^V - \Omega \right)^{-1} (R_{0,\hat{\beta}}^V)^T W_{0,\hat{\beta}} X = \Psi^{-1}(t_0) C(t_0) \{1 + o_p(1)\},$$

结合定理 4.1, 可以得到

$$\sqrt{nh} L_2 = \sqrt{nh} \Psi^{-1}(t_0) C(t_0) \{1 + O_p(\delta_n)\} O(n^{-1/2}) = o_p(1).$$

设 J_1, J_2, J_3 是独立同分布随机变量, 由 You^[40] 中定理 2.1 与中心极限定理

可得

$$J_1 = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n Z_i \varepsilon_i K_h(t_i - t_0) \\ \sum_{i=1}^n Z_i \varepsilon_i \left(\frac{t_i - t_0}{h} \right) K_h(t_i - t_0) \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n u_i \varepsilon_i K_h(t_i - t_0) \\ \sum_{i=1}^n u_i \varepsilon_i \left(\frac{t_i - t_0}{h} \right) K_h(t_i - t_0) \end{pmatrix},$$

$$J_3 = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \xi_i K_h(t_i - t_0) & \sum_{i=1}^n \xi_i \left(\frac{t_i - t_0}{h} \right) K_h(t_i - t_0) \\ \sum_{i=1}^n \xi_i \left(\frac{t_i - t_0}{h} \right) K_h(t_i - t_0) & \sum_{i=1}^n \xi_i \left(\frac{t_i - t_0}{h} \right)^2 K_h(t_i - t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(t_0) \\ h\alpha'(t_0) \end{pmatrix},$$

$$\frac{\sqrt{nh}}{n} J_1 \xrightarrow{L} (0, \chi_1), \frac{\sqrt{nh}}{n} J_2 \xrightarrow{L} (0, \chi_2), \frac{\sqrt{nh}}{n} J_3 \xrightarrow{L} (0, \chi_3),$$

其中

$$\chi_1 = \sigma^2 f(t_0) \Psi(t_0) \otimes \begin{pmatrix} \nu_0 & \nu_1 \\ \nu_1 & \nu_2 \end{pmatrix}, \quad \chi_2 = \sigma^2 f(t_0) \Sigma_u \otimes \begin{pmatrix} \nu_0 & \nu_1 \\ \nu_1 & \nu_2 \end{pmatrix},$$

$$\chi_3 = f(t_0) E \{ \xi_1 \alpha(t_0) \alpha^T(t_0) \xi_1^T \} \Sigma_u \otimes \begin{pmatrix} \nu_0 & \nu_1 \\ \nu_1 & \nu_2 \end{pmatrix},$$

综上可得

$$\begin{aligned} f^{-1}(t_0) \Psi^{-1}(t_0) \nabla \Lambda_3 &= \left\{ f(t_0) \Psi(t_0) \otimes \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{pmatrix} \right\}^{-1} \left\{ f(t_0) [\sigma^2 \Psi(t_0) + \sigma^2 \Sigma_u \right. \\ &\quad \left. + E \{ \xi_1 \alpha(t_0) \alpha^T(t_0) \xi_1^T \}] \otimes \begin{pmatrix} \nu_0 & \nu_1 \\ \nu_1 & \nu_2 \end{pmatrix} \right\} \left\{ f(t_0) \Psi(t_0) \otimes \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{pmatrix} \right\}^{-1} \\ &= f^{-1}(t_0) \Psi^{-1}(t_0) [\sigma^2 \Psi(t_0) + \sigma^2 \Sigma_u + E \{ \xi_1 \alpha(t_0) \alpha^T(t_0) \xi_1^T \}] \\ &\quad \Psi^{-1}(t_0) \otimes \frac{1}{(\mu_2 - \mu_1^2)^2} \\ &\quad \begin{pmatrix} \mu_2^2 \nu_0 - 2\mu_1 \mu_2 \nu_1 + \mu_1^2 \nu_2 & (\mu_1^2 + \mu_2) \nu_1 - \mu_1 \mu_2 \nu_0 - \mu_1 \nu_2 \\ (\mu_1^2 + \mu_2) \nu_1 - \mu_1 \mu_2 \nu_0 - \mu_1 \nu_2 & \nu_2 - \mu_1 (2\nu_1 + \mu_1 \nu_0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

引理 4.1 的证明：类似中 Xia^[44]引理 2 证明，此处省略。

引理 4.2 的证明：

由定理 4.2 可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} (R_{0,\hat{\beta}}^V)^T W_{0,\hat{\beta}} R_{0,\hat{\beta}}^V - \Omega &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i Z_i^T \otimes \begin{pmatrix} 1 & \frac{t_i - t_0}{h} \\ \frac{t_i - t_0}{h} & \left(\frac{t_i - t_0}{h} \right)^2 \end{pmatrix} K_h(t_i - t_0) \\ &= n f(t_0) \Psi(t_0) \otimes \begin{pmatrix} 1 & \mu_1 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{pmatrix} \{1 + o_p(1)\}, \end{aligned}$$

同理可得

$$\left(R_{0,\hat{\beta}}^V\right)^T W_{0,\hat{\beta}} X = n f(t_0) C(t_0) \otimes (1 - \mu_1)^T \{1 + o_p(1)\}.$$

由以上两个式子可得

$$[V_i^T, 0_d] \left(\left(R_{0,\hat{\beta}}^V\right)^T W_{0,\hat{\beta}} R_{0,\hat{\beta}}^V - \Omega \right)^{-1} \left(R_{0,\hat{\beta}}^V\right)^T W_{0,\hat{\beta}} X = V_i^T \Psi^{-1}(t_i) C(t_i) \{1 + o_p(1)\},$$

$$[I_i^T, 0_d] \left(\left(R_{0,\hat{\beta}}^V\right)^T W_{0,\hat{\beta}} R_{0,\hat{\beta}}^V - \Omega \right)^{-1} \left(R_{0,\hat{\beta}}^V\right)^T W_{0,\hat{\beta}} X = \Psi^{-1}(t_i) C(t_i) \{1 + o_p(1)\}.$$

由上面两个式子以及大数定律可得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \hat{X}_i^T \hat{X}_i &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \left\{ X_i - X_i^T W_{i,\hat{\beta}} R_{i,\hat{\beta}}^V \left(\left(R_{i,\hat{\beta}}^V\right)^T W_{i,\hat{\beta}} R_{i,\hat{\beta}}^V - \Omega \right)^{-1} \right\} \right. \\ &\quad \left. \left\{ X_i^T - [V_i^T, 0_d] \left(\left(R_{i,\hat{\beta}}^V\right)^T W_{i,\hat{\beta}} R_{i,\hat{\beta}}^V - \Omega \right)^{-1} \left(R_{i,\hat{\beta}}^V\right)^T W_{i,\hat{\beta}} X_i^T \right\} \right\} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - C(t_i) \Psi^{-1}(t_i) V_i) (X_i^T - V_i^T C(t_i) \Psi^{-1}(t_i)) \{1 + o_p(1)\} \\ &\rightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{E(X_i X_i^T) - E\{C^T(t_0) \Psi^{-1}(t_0) C^T(t_0)\}\} \\ &\quad + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E\{C^T(t_0) \Psi^{-1}(t_0) \Sigma_u \Psi^{-1}(t_0) C^T(t_0)\}, \end{aligned}$$

所以上式可写成

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \hat{X}_i^T \hat{X}_i &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{E(X_i X_i^T) - E\{C^T(t_0) \Psi^{-1}(t_0) C^T(t_0)\}\} \\ &\quad + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E\{C^T(t_0) \Psi^{-1}(t_0) \Sigma_u \Psi^{-1}(t_0) C^T(t_0)\}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

同理可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^T Q_i^T \Sigma_u Q_i X_i &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^T W_{0,\hat{\beta}} R_{0,\hat{\beta}}^V \left(\left(R_{0,\hat{\beta}}^V\right)^T W_{0,\hat{\beta}} R_{0,\hat{\beta}}^V - \Omega \right)^{-1} (I_d, 0_d)^T \Sigma_u (I_d, 0_d) \\ &\quad \left(\left(R_{0,\hat{\beta}}^V\right)^T W_{0,\hat{\beta}} R_{0,\hat{\beta}}^V - \Omega \right)^{-1} \left(R_{0,\hat{\beta}}^V\right)^T W_{0,\hat{\beta}} X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n C^T(t_0) \Psi^{-1}(t_0) \Sigma_u \Psi^{-1}(t_0) C^T(t_0) \{1 + o_p(1)\} \\
 &\rightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E \{C^T(t_0) \Psi^{-1}(t_0) \Sigma_u \Psi^{-1}(t_0) C^T(t_0)\}, \quad (4.14)
 \end{aligned}$$

由 (4.7) 和 (4.8) 式可得引理 4.2。

引理 4.3 的证明： 类似定理 4.1 证明

记 $P_1 = \widehat{X}^T \widehat{X} - X^T Q^T \Sigma_u Q X$,

$$\begin{aligned}
 \widehat{\theta} &= p_1^{-1} \left(\widehat{X}^T \widehat{Y} - X^T Q^T \Sigma_u Q Y \right) \\
 &= p_1^{-1} \left\{ \widehat{X}^T (I_n - \widehat{S}_{\widehat{\beta}}) (H_{\beta} + X\theta + \varepsilon) - X^T Q^T \Sigma_u Q (H_{\beta} + X\theta + \varepsilon) \right\} \\
 &= p_1^{-1} \left\{ \widehat{X}^T (I_n - \widehat{S}_{\widehat{\beta}}) (H_{\beta} + \varepsilon) + \widehat{X}^T X\theta - X^T Q^T \Sigma_u Q (H_{\beta} + \varepsilon) - X^T Q^T \Sigma_u Q X\theta \right\} \\
 &= \theta + P_1^{-1} \left\{ \widehat{X}^T (I_n - \widehat{S}_{\widehat{\beta}}) (H_{\beta} + \varepsilon) - X^T Q^T \Sigma_u Q (H_{\beta} + \varepsilon) \right\},
 \end{aligned}$$

同理可得

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta} - \theta) \xrightarrow{L} N(0, \Lambda_2^{-1} \Lambda_1 \Lambda_2^{-1}).$$

4.5 数值模拟

在上一节中我们得到了参数和指标函数的随机约束估计量, 本节将对上一节所得到的估计量的表现情况进行模拟, 考虑模型:

$$\begin{cases} Y_i = \alpha^T (\beta_0^T U_i) Z_i + \theta_1^T X_{i1} + \theta_2^T X_{i2} + \theta_3^T X_{i3} + \theta_4^T X_{i4} + \varepsilon_i \\ V_i = Z_i + u_i, i = 1, 2, \dots, n, \end{cases}$$

其中 $Z_1 \sim N(0, 1)$, $Z_2 \sim N(1, 2)$, $X_{i1} \sim N(0, 1)$, $X_{i2} \sim N(1, 2)$, $X_{i3} \sim N(0, 2)$, $X_{i4} \sim N(1, 1)$, $u_i = (u_1, u_2) \sim N(0, \Sigma_u)$, $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))^T = (\exp(-t), t^3)^T$ 。参数分量 $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)^T = (1, 2, 3, 3)^T$, 协变量 $U_i = (U_{i1}, U_{i2})^T$ 是互相独立的随机变量且服从 $[-1, 1]^2$ 上的均匀分布, $\beta_0 = (\beta_{01}, \beta_{02})^T = (1/2, \sqrt{3}/2)^T$ 。

由于误差的选取会影响估计结果, 所以设定均值为零, 协方差为 1, 将误差分为两种形式: (1) $\varepsilon_i \sim N(0, 1)$, (2) $\varepsilon_i \sim t(-1, 1)$ 。这里我们选取 Epanechnikov

核函数 $K(t) = 0.75(1-t^2)I(|t| \leq 1)$ ，最优带宽 $h_{opt} = h_1 n^{-1/20} (\log n)^{-1/2}$ 。设定模型随机约束条件 $\theta_1 + \theta_2 = 3 + \eta_1$ ， $\theta_3 - \theta_4 = \eta_2$ ，其中

$$E\eta_1 = E\eta_2 = 0, \quad Var(\eta_1, \eta_2) = 0.03,$$

$$Var(\eta_1) = 0.01, \quad Var(\eta_2) = 0.09。$$

从而可以得到

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0.01 & 0.03 \\ 0.03 & 0.09 \end{pmatrix}。$$

对于上述每次设定，分别取样本容量 $n = 50, 100, 200$ ，模拟重复 500 次运行计算偏差 (Bias)、标准差 (SD)，每次求出 θ 的校正估计 $\hat{\theta}$ 和考虑随机约束条件下 θ 的混合估计 θ_{PM} ，模拟结果如下：

表 4-1 参数 θ 的估计结果

θ	Error	n	Unrestricted		Restricted	
			SD	MSE	SD	MSE
1	$\varepsilon_i \sim N(0,1)$	50	0.7072	0.0575	0.5718	0.0325
		100	0.6518	0.0304	0.4126	0.0217
		200	0.4227	0.0189	0.2651	0.0108
	$\varepsilon_i \sim t(-1,1)$	50	0.7125	0.0577	0.5848	0.0326
		100	0.5861	0.0427	0.4028	0.0215
		200	0.4015	0.0261	0.2311	0.0104
2	$\varepsilon_i \sim N(0,1)$	50	0.6752	0.0556	0.5582	0.0324
		100	0.5281	0.0301	0.3927	0.0205
		200	0.3917	0.0118	0.1139	0.0102
	$\varepsilon_i \sim t(-1,1)$	50	0.6213	0.0488	0.5109	0.0314
		100	0.4742	0.0361	0.3541	0.0208
		200	0.3288	0.0199	0.2110	0.0101
3	$\varepsilon_i \sim N(0,1)$	50	0.6435	0.0536	0.5165	0.0316
		100	0.5107	0.0318	0.3944	0.0201
		200	0.3618	0.0137	0.1782	0.0115
	$\varepsilon_i \sim t(-1,1)$	50	0.6022	0.5011	0.5101	0.0308
		100	0.4909	0.0352	0.3531	0.0203
		200	0.3271	0.0261	0.2004	0.0100
3	$\varepsilon_i \sim N(0,1)$	50	0.6281	0.0516	0.5082	0.0303
		100	0.5103	0.0315	0.3894	0.0199
		200	0.3474	0.0127	0.1779	0.0112

50	0.6015	0.0501	0.5085	0.0306
100	0.4877	0.0350	0.3514	0.0204
200	0.3218	0.0258	0.1985	0.0094

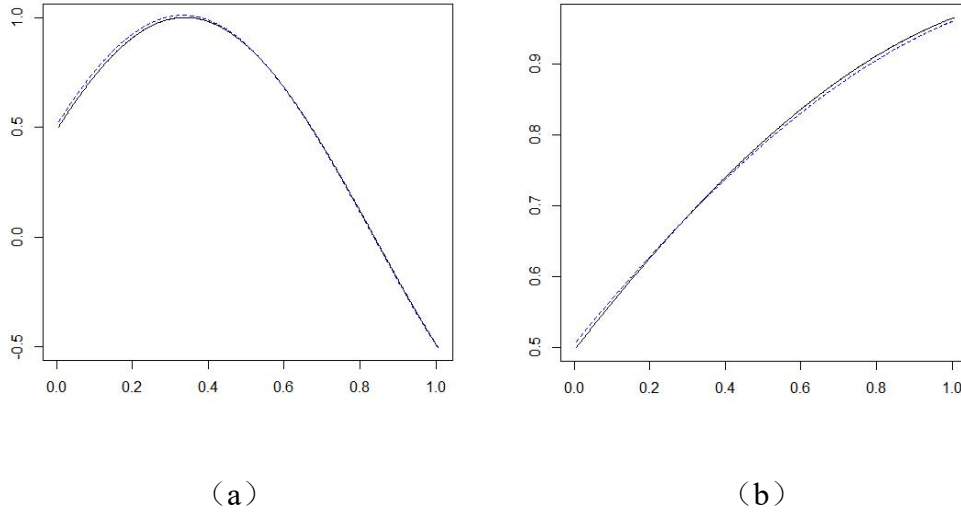


图 4-1 指标函数在有无约束条件下的拟合曲线

从表 4-1 可以得出以下结论：

(1) 当样本量越大时， θ 和 θ_{PM} 的估计值越小，精确值越高，这就说明 θ 和 θ_{PM} 估计效果更好，趋于稳定。

(2) 在保持样本容量一致且模型误差相同的条件下，通过对比发现，对于参数附加随机约束条件的情况下，偏差和标准差的估计数值更小。这一现象表明，添加随机约束条件的参数估计方法，在准确性方面展现出显著的性能优势。

图 4-1 是样本容量为 $n = 200$ ， $\varepsilon_i \sim N(0,1)$ 的情况下，协变量带有测量误差的约束条件下比无约束条件下的拟合效果更好，这些仿真结果表明了基于约束条件下估计的正确性和有效性。

4.6 本章小结

本章主要研究了部分线性单指标变系数模型的协变量部分含有测量误差，并且参数部分添加随机约束条件，通过偏差校正来消除误差，得到参数和指标函数的初始估计量，然后构建Lagrange函数，最终得到参数和指标函数的随机约束混

合估计量，并在适当的条件下证明了其渐近正态性质，最后进行数值模拟，研究表明带有随机约束估计的参数估计效果更好。

第5章 总结与展望

5.1 总结

部分线性单指标变系数模型是目前社会的热点话题，在经济、金融等方面有重大研究价值。为了让模型数据更贴近实际，本文考虑在复杂数据情况下的部分线性单指标变系数模型。本文研究结果如下：

首先研究了在约束条件下部分线性单指标变系数模型的统计推断。假设参数向量已知，将模型转变为部分线性变系数模型，利用局部线性回归和最小二乘方法得到参数和指标函数初始估计量，同时运用Newton-Raphson算法迭代出参数向量，得到最终的指标函数部分，然后用Lagrange乘数法构造函数，在参数部分附加约束条件下得到参数的约束估计量，并在适当条件下证明所得估计量的渐近性质，最后通过数值模拟，分析出模型的参数和指标函数部分在有约束条件下的精确度更高，证明了此估计方法是有效的。

其次考虑了带有测量误差的部分线性单指标变系数模型的随机约束估计。基于约束条件下部分线性单指标变系数模型统计推断的理论，利用偏差校正消除误差，同时运用纠偏混合估计方法和Lagrange乘数法构造随机约束函数，给出了参数和指标函数的混合估计量，然后结合大数定律和中心极限定理在适当条件下证明所得估计量的渐近性质，最后通过数值模拟评估提出的估计，实际数据表明了带有随机约束条件的参数估计效果更好，这表明我们提出的方法在有限样本下具有良好的性能，所提出的估计方法是可行的。

5.2 展望

作者今后将对以下几个方面做进一步的研究：

- 1、本文可进一步通过岭估计研究部分线性单指标变系数模型的统计推断问题，并对约束条件进行合理假设检验。

2、本文主要研究的是对部分线性单指标变系数模型的参数部分添加约束条件，在非参部分研究还不到位，后续可在这方面进一步研究。

3、本文主要考虑了部分线性单指标变系数模型的随机约束估计，并且协变量带有测量误差，而对于所以协变量都含有测量误差的情况没有进行讨论，其次对响应变量的缺失或者删失没有深入研究，这些都具有重要的研究意义，今后可继续开展工作。

参考文献

- [1] Yang Z, Xue L G, Sanying Feng. Estimation for a partially linear single-index varying-coefficient model[J]. Communications in Statistics-Simulation and Computation, 2019, 51(4): 1-19.
- [2] Zhang W Y, Lee X Y, Song X Y. Local polynomial fitting in semivarying coefficient model[J]. Journal of Multivariate Analysis, 2002, 82(1): 166-188.
- [3] Fan J Q, Huang T. Profile likelihood inferences on semiparametric varying-coefficient partially linear models[J]. Bernoulli, 2005, 11(6): 1031-1057.
- [4] Xia Y C, Zhang W Y, Tong H. Efficient estimation for semivarying-coefficient models[J]. Biometrika, 2004, 91(3): 661-681.
- [5] Ahmad I, Leelahanon S, Li Q. Efficient estimation of a semiparametric partially linear varying coefficient model[J]. The Annals of Statistics, 2005, 33(1): 258-283.
- [6] You J H, Chen G M. Estimation of a semiparametric varying-coefficient partially linear errors-in-variables model[J]. Journal of Multivariate Analysis, 2005, 97(2): 324-341.
- [7] Toutenburg H. Prior information in linear models[M]. New York: Wiley, 1982.
- [8] Rao C R. Linear model and generalization least squares and alternatives[M]. Berlin: Springer, 2008.
- [9] Tabakan G, Akden F. Restricted ridge estimators of the parameters in semiparametric regression model[J]. Communications in Statistics-Theory and Methods, 2009, 38(11):1852-1869.
- [10] 魏传华,吴喜之. 部分线性变系数模型的 Profile Lagrange 乘子检验[J]. 系统科学与数学, 2008, 28(4): 416-424.
- [11] 郑新民,黄彬. 约束条件下带误差线性协变量的变系数部分线性模型的统计推断 [J]. 北京化工大学学报(自然科学版), 2014, 41(5): 119-123.
- [12] 刘超,韦杰,魏传华. 部分线性变系数模型的随机约束岭估计[J]. 应用数学, 2017,30(04):774-779.

- [13] 李腾,苏宇楠,魏传华.部分线性变系数测量误差模型的随机约束估计[J]. 统计与决策,2019, 35(7): 21-23.
- [14] 张巍巍.部分线性变系数模型的加权随机约束主成分估计[J]. 统计与决策, 2020, 36(22): 19-22.
- [15] Wei C H, Wu X Z. Profile Lagrange multiplier test for partially linear varying-coefficient regression models[J]. Journal of System Science and Mathematical Science, 2008, 28:416–424.
- [16] Zhang W W, Li G R, Xue L G. Profile inference on partially linear varying-coefficient errors-invariables models under restricted condition[J]. Computational Statistics and Data Analysis, 2011, 55(1):3027–3040.
- [17] Wei C H. Statistical inference for restricted partially linear varying coefficient errors-in-variables models[J]. Journal of Statistical Planning and Inference, 2012, 142(8):2464–2472.
- [18] Carroll J R, Fan J Q, Gijbels S I. Generalized partially linear single-index models[J]. Journal of the American Statistical Association, 1997, 92(438):477-489.
- [19] Leung B, Wong H, Zhang R Q. Smoothing spline estimation for partially linear single-index models[J]. Communications in Statistics-Simulation and Computation, 2010, 39(10):1953-1961.
- [20] Zhu L X, Xue L G. Empirical likelihood confidence regions in a partially linear single-index model[J]. Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 2006, 68(3):549-570.
- [21] Wang J L, Xue L G, Zhu L X. Estimation for a partial-linear single-index model[J]. The Annals of Statistics, 2010, 38(1):246-274.
- [22] Xia Y C, Li W K. On single-index coefficient regression models[J]. Journal of the American Statistical Association, 1999, 94(448):1275–1285.
- [23] Cai Z W, Fan J Q, Yao Q W. Functional-coefficient regression models for nonlinear time series[J]. Journal of the American Statistical Association, 2000, 95 (451):941–956.
- [24] Huang Z. Inference for nonparametric parts in single-index varying-coefficient

- hr/>
- model[J]. Communications in Statistics - Theory and Methods, 2012, 41(7):1214–1227.
- [25] Huang Z, Zhang R. Profile empirical-likelihood inferences for the single-index-coefficient regression model[J]. Statistics and Computing, 2013, 23(4):455–465.
- [26] Wang Q H, Xue L G. Statistical inference in partially-varying-coefficient single index model[J]. Journal of Multivariate Analysis, 2011, 102(1):1–19.
- [27] Xue L, Wang Q. Empirical likelihood for single-index varying-coefficient models[M]. Bernoulli, 2012, 18(3):836–856.
- [28] Xue L G, Pang Z. Statistical inference for a single-index varying-coefficient model[J]. Statistics and Computing, 2013, 23(5):589–599.
- [29] Shi J H, Yang Q, Li X Y. Effects of measurement error on a class of single-index varying coefficient regression model[J]. Computational Statistics, 2017, 32:977-1001.
- [30] Zhao X, Huang Z S. Varying-coefficient single-index measurement error model[J]. Journal of Applied Statistics, 2018, 45(12): 2128-2144.
- [31] Cleveland W S. Robust locally weighted regression and smoothing scatterplots[J]. Journal of the American Statistical Association, 1979, 74(368), 829-836.
- [32] Fan J, Gijbels I. Local polynomial modeling and its applications[J]. Journal of the American Statistical Association, 1998, 93(442):835-836.
- [33] Fan J, Heckman N E, Wand M P. Local polynomial kernel regression for generalized linear models and quasiliikelihood functions[J]. Journal of the American Statistical Association, 1995, 90:141-150.
- [34] Wong H, Ip W, Zhang R Q. Varying-coefficient single-index model[J]. Computational Statistics and Data Analysis, 2008, 52(3):1458-1476.
- [35] LOEVE M. Probability Theory[M]. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1977.
- [36] Pierce D A, Kellerer A M. Adjusting for covariate errors with nonparametric assessment of the true covariate distribution[J]. Biometrika, 2004, 91(4):863-876.
- [37] Cook J R, Stefanski L A. Simulation-Extrapolation estimation in parametric

- measurement error models[J]. Journal of the American Statistical Association, 2012, 89(428):1314-1328.
- [38] Xue L G, Feng S Y. Variable selection for single-index varying-coefficient model[J]. Front Math China, 2013, 8:455-465.
- [39] Fan Y, Tang M L, Tian M Z. Composite quantile regression for varying-coefficient single-index models[J]. Communications in Statistics-Theory and Methods, 2016, 45(10):3027-3047.
- [40] You J, Chen G M. Corrected local polynomial estimation in varying-coefficient models with measurement errors[J]. The Canadian Journal of Statistics, 2006, 34(3):391-410.
- [41] Durbin J. A note on regression when there is extraneous information about one of the coefficients[J]. Journal of the American Statistical Association, 2012, 48(264):799-808..
- [42] Theil H, Goldberger A S. On pure and mixed statistical estimation in economics[J]. International Economic Review. 1963, 2(1):65-78.
- [43] Theil H. On the use of incomplete prior information in regression analysis[J]. Journal of the American Statistical Association, 1963, 58(302):401-414.
- [44] Xia Y C, Li W K. On the estimation and testing of functional-coefficient linear models[J]. Statistics Sinica, 1999, 9:735-757.

硕士期间发表的论文

[1]程颖, 何帮强. 约束条件下部分线性单指标变系数模型的统计推断 [J]. 安庆师范大学学报(已录用待发表).

致 谢

不知不觉间，三年硕士研究生时间已进入倒计时阶段，但当年坚定信念备考研究生的场景还历历在目。这段日子里我收获颇丰，不仅学习到丰富的知识，还遇到了真诚的挚友，是他们让我的科研生活充满了乐趣，我的成长离不开身边所有人的帮助，所以谨以此文来表达我对所有人的感谢。

首先，我要感谢我的导师何帮强教授。还记得与何老师第一次见面跟我说“我们一起努力”，这句话给了我莫大的动力，让我在今后的科研路上快速成长。老师在我论文撰写阶段地给予我高屋建瓴的指导和建议，这种一丝不苟的精神成为我学术生涯最宝贵的财富。老师不仅在学业上帮助我颇多，在生活上也给予我关怀，让我在异地他乡感受温暖。在此，我由衷的感谢何老师三年来对我的栽培，祝愿老师在今后身体健康，工作顺利，生活一帆风顺！

其次，我要感谢办公室的赵瑞师兄、王龙师兄、姚钰琦师兄和我的同门杨颖同学、刘苏兵同学，正是他们无私的帮助，使我有信心把论文写下去。感谢他们，在软件使用上为我解惑，同时也不断与我沟通交流，给我启发。感谢诸位朋友们出现在我的生命中，让我的生活愈发精彩。在此，我衷心地祝福他们，希望今后生活万事如意！

再次，我要感谢我的父母，感谢他们对我学业上的理解和生活上的支持，是他们的爱给了我巨大动力，让我无忧无虑地生活，顺利完成毕业。往后我不会辜负父母的期待，继续向前！！

最后我要感谢安徽工程大学的栽培！祝福母校蒸蒸日上，再创辉煌！