

分类号: TP391

密 级: 公开

学校代码: 10363

学 号: 2220910101



安徽工程大学

Anhui Polytechnic University

硕士学位论文

题目 基于加权张量Schatten P-范数
的多视图子空间聚类算法研究

论文作者 李傲

校内导师 王勇 (教授)

校外导师 余先育 (董事长)

专业学位类别 计算机技术

研究方向 (领域) 数据分析与知识工程

论文提交日期: 2025 年 5 月 9 日

分类号: TP391

密 级: 公开

单位代码: 10363

学 号: 2220910101

题 目 基于加权张量 Schatten P-范数的多视图子空间聚类算法研究

英文并列

题 目 Research on multi-view subspace clustering algorithm
based on weighted tensor Schatten P-norm

论 文 作 者 李傲

校 内 导 师 王勇（教授）

校 外 导 师 余先育（董事长）

专 业 学 位 类 别 计算机技术

研究方向（领域） 数据分析与知识工程

论文答辩日期: 2025 年 5 月 10 日

安徽工程大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：我恪守学术道德，崇尚严谨学风。所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已明确注明和引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品及成果的内容。论文为本人亲自撰写，我对所写的内容负责，并完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

学位论文作者签名：李傲

日期：2023 年 5 月 9 日

安徽工程大学学位论文版权使用授权书

学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅或借阅。本人授权安徽工程大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保密 ☐，在_____年解密后适用本版权书。

本学位论文属于

不保密 ☒。

学位论文作者签名：李敏

日期：2025年5月9日

指导教师签名：王书

日期：2025年5月9日

基于加权张量 Schatten P-范数的多视图子空间聚类算法研究

摘要

多视图子空间聚类 (Multi-view Subspace Clustering, MSC) 作为机器学习领域的重要研究方向, 在计算机视觉、图像处理及生物特征识别等任务中得到了广泛应用。当前主流的多视图子空间聚类方法多是基于自表示学习框架来构建系数矩阵, 并通过核范数约束提升模型泛化能力。然而, 此类方法存在两个本质性问题: (1) 核范数作为秩函数的凸松弛近似, 利用核范数约束系数矩阵, 可能导致矩阵的秩偏离其原始的结构信息; (2) 对奇异值施加相同的收缩策略未能充分考虑奇异值间的差异性。现有研究证明, 加权张量 Schatten P-范数不仅能够有效逼近秩函数, 还能探索奇异值间的先验信息。为此, 本文基于加权张量 Schatten P-范数设计了三种多视图子空间聚类算法来解决上述问题。此外, 本文还探索了多视图数据间的一致性、噪声信息与数据信息融合, 具体内容可概括如下:

(1) 基于一致性约束的多视图子空间聚类

针对多视图数据中潜在一致性信息挖掘不足的问题, 本文提出了基于一致性约束的多视图子空间聚类 (Consistency constraint-based multi-view subspace clustering, CMSC) 算法。具体来说, 该算法首先通过构建基于秩一致性约束的优化框架, 生成共享一致性矩阵, 以显式表征视图间的潜在一致性关联; 其次, 为克服传统核范数对秩函数

的松弛偏差，对共享一致性矩阵施加 Schatten P-范数约束，通过调整 P 值，有效逼近跨视图间的一致性信息；最后，引入图学习方法来增强视图内部的结构特征。

（2）增强张量 Schatten P-范数的多视图子空间聚类

上述方法虽利用 Schatten P-范数实现秩函数的逼近，但主要基于矩阵层面，难以有效利用视图间的高阶相关性。此外，对不同大小的奇异值采用平均正则化处理，不利于学习视图中的先验知识。为此，本文提出了一种增强张量 Schatten P-范数的多视图子空间聚类（Enhanced tensor Schatten P-norm for multi-view subspace clustering, ETSPMSC）算法。该算法不仅利用 Schatten P-范数来逼近张量秩函数，还通过奇异值加权为不同大小的奇异值赋予不同权重，更有效地利用视图中的显著结构特征。此外，鉴于视图中普遍存在噪声信息，所构建的张量可能包含类间的错误表示，本文通过构建噪声模型来获得更可靠的张量结构。

（3）基于信息融合的多视图子空间聚类

现有多视图子空间聚类方法通常是独立学习视图间的一致性和多样性，而非从整体层面探索视图间的结构信息。为此，本文提出了一种基于信息融合的多视图子空间聚类（Information fusion for multi-view subspace clustering, IFMSC）算法。具体而言，该算法首先利用秩一致性约束，生成共享一致性矩阵，准确地提取视图间的共享特征。同时，通过学习不同视角下的流形结构，探索了视图的多样性。此外，

将共享一致性矩阵与多样性矩阵拼接为张量形式，并通过加权张量 Schatten P-范数约束，有效地从整体层面学习视图的结构信息。

关键词：多视图聚类；子空间学习；加权张量 Schatten P-范数；一致性学习；数据去噪；信息融合

Research on multi-view subspace clustering algorithm based on weighted tensor Schatten P-norm

ABSTRACT

Multi-view Subspace Clustering (MSC), as an important research direction in the field of machine learning, has been widely used in computer vision, image processing and biometrics recognition. Current major multi-view subspace clustering methods are mostly based on the self-representation learning framework to construct coefficient matrices and enhance the model generalization ability through the nuclear norm constraints. However, there are two intrinsic limitations of such methods: (1) the nuclear norm as a convex relaxation approximation of the rank function may cause the rank of the coefficient matrices to deviate from their original structural information; (2) the same contraction strategy applied to the singular values fails to adequately take into account the significant structural differences among the singular values. Existing researches have proved that the weighted tensor Schatten P-norm can not only approximate the rank function effectively, but also explore the priori information among the singular values. To address these issues, this dissertation designs three multi-view subspace clustering algorithms based

on weighted tensor Schatten P-norm to solve the above problems. In addition, this dissertation also explores the consistency, noise information and higher-order correlation features among multi-view data, the details of which can be summarized as follows:

(1) Consistency constraint-based multi-view subspace clustering

To address the problem of insufficient mining of potential consistency information in multi-view data, this dissertation proposes a consistency constraint-based multi-view subspace clustering algorithm. Specifically, the algorithm first generates a shared consistency matrix by constructing an optimization framework based on rank consistency constraints to explicitly characterize the potential consistency associations among views; second, to overcome the relaxation bias of the traditional nuclear norm on the rank function, Schatten P-norm constraints are imposed on the shared consistency matrix to effectively approximate the consistency information across views by adjusting the P-values; and lastly, a graph learning method to enhance the structural features inside the views.

(2) Enhanced tensor Schatten P-norm for multi-view subspace clustering

Although the above method utilizes the Schatten P-norm to achieve the approximation of the rank function, it primarily operates at the matrix level, which makes it difficult to effectively utilize the higher-order

correlations among the views. Furthermore, applying average regularization to singular values of different sizes is not conducive to learning the prior knowledge within the views. To resolve these problems, this dissertation proposes an enhanced tensor Schatten P-norm for multi-view subspace clustering algorithm. The algorithm not only utilizes the Schatten P-norm to approximate the tensor rank function, but also assigns different weights to singular values of different sizes through singular value weighting, thereby more effectively exploiting the salient structural features in the views. Moreover, recognizing the pervasive presence of noise in views, which may introduce erroneous inter-class representations in the constructed tensor, this paper incorporates a noise model to obtain a more reliable tensor structure.

(3) Information fusion for multi-view subspace clustering

Existing MSC methods usually learn the consistency and diversity among views independently, rather than exploring the structural information among views at the overall level. To this end, this dissertation proposes an information fusion for multi-view subspace clustering algorithm. Specifically, the algorithm first utilizes the rank consistency constraint to generate a shared consistency matrix to accurately extract the shared features among views. Meanwhile, the diversity of views is explored by learning the flow structure in different views. In addition, the

shared consistency matrix and diversity matrices are spliced into a tensor form, and the structural information of the views is effectively learned at the overall level by weighted tensor Schatten P-norm constraints.

KEY WORDS: Multi-view subspace clustering; Weighted tensor Schatten P-norm; Consistency learning; Data denoising; Information fusion

文中常用符号说明

I : 单位矩阵

v : 视图数目

c : 样本类数

n : 样本数

m : 特征数

$Tr(X)$: 矩阵的迹

$diag(X)$: 对角矩阵

$\|X\|_1$: 矩阵 L_1 范数约束

$\|X\|_{2,1}$: 矩阵 $L_{2,1}$ 范数约束

$\|X\|_*$: 矩阵核范数约束

$\|\mathcal{X}\|_{TNN}$: 张量核范数约束

A^v : 第 v 个视图的原始矩阵

$X^v \in R^{n \times n}$: 第 v 个视图的系数矩阵

$S^v \in R^{n \times n}$: 第 v 个视图的相似矩阵

$W \in R^{n \times n}$: 亲和矩阵

目录

摘要	I
ABSTRACT.....	IV
第 1 章 绪论	1
1.1 研究背景及意义.....	1
1.2 国内外研究现状.....	2
1.3 研究内容及贡献.....	6
1.4 论文组织结构.....	8
第 2 章 相关知识介绍	10
2.1 谱聚类.....	10
2.2 张量及相关定义.....	11
2.3 加权张量 Schatten P-范数定义	13
2.4 多视图子空间聚类.....	13
2.5 多视图图聚类.....	15
2.6 聚类性能评估指标.....	15
第 3 章 基于一致性约束的多视图子空间聚类	17
3.1 基于一致性约束的多视图子空间聚类.....	18
3.1.1 CMSC 模型构建	18
3.1.2 CMSC 的优化	20
3.1.3 CMSC 亲和矩阵优化	22
3.1.4 算法复杂度分析.....	23
3.2 实验.....	24
3.2.1 实验数据集.....	24
3.2.2 对比算法.....	25
3.2.3 聚类性能比较.....	25
3.2.4 参数分析.....	28
3.2.5 亲和矩阵的可视化.....	28
3.2.6 收敛性分析.....	30
3.3 本章小结.....	31
第四章 增强张量 Schatten P-范数的多视图子空间聚类	32
4.1 增强张量 Schatten P-范数的多视图子空间聚类	33
4.1.1 ETSPMSC 模型构建.....	33
4.1.2 ETSPMSC 的优化.....	34
4.1.3 算法复杂度分析.....	36
4.2 实验.....	37
4.2.1 实验数据集.....	37
4.2.2 对比算法.....	38
4.2.3 聚类性能比较.....	39
4.2.4 参数分析.....	41
4.2.5 耗时分析.....	42

4.2.6 收敛性分析.....	44
4.2.7 消融研究.....	44
4.3 本章小结.....	46
第五章 基于信息融合的多视图子空间聚类	47
5.1 基于信息融合的多视图子空间聚类.....	48
5.1.1 IFMSC 模型构建.....	48
5.1.2 IFMSC 的优化.....	50
5.1.3 算法复杂度分析.....	53
5.2 实验.....	54
5.2.1 实验数据集.....	54
5.2.2 对比算法.....	55
5.2.3 聚类性能比较.....	55
5.2.4 亲和矩阵的可视化.....	56
5.2.5 参数分析.....	59
5.2.6 收敛性分析.....	59
5.3 本章小结.....	62
第六章 总结与展望	63
6.1 总结.....	63
6.2 展望.....	63
参考文献	65
致谢	70

第 1 章 绪论

1.1 研究背景及意义

随着信息收集技术的日益发展，所收集到的数据呈爆发式增长的趋势，其载体涵盖声音、视频、图像、文本等多种形式。在此背景下，如何从海量的数据中提取出可供选择的、可依赖的信息变得尤为重要。作为无监督学习^[1]的重要分支，聚类分析通过构建“类内高内聚、类间低耦合”的集群划分机制，实现了对数据内在关联的有效分析。该方法的本质是通过相似性度量准则将相似的样本划分至同质化簇结构中，从而挖掘数据底层的分布规律。

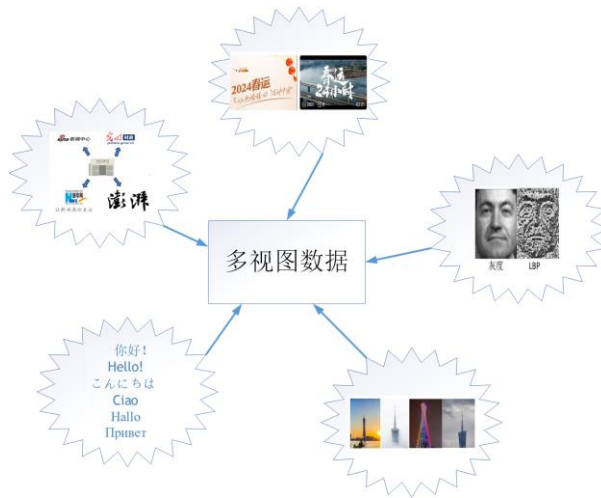


图 1-1 多视图数据示例

Fig.1-1 Example of multi-view data

传统的聚类分析大多从单一特征中抽取信息，如图像的像素矩阵，文本的字频分布或音频的频谱特征等单一数据源信息。然而在现实世界中，事物往往具有多源异构特征，以视频为例：其包含音频流、视觉帧序列和文本传感器等多维度信息；文档可以被翻译成不同的语言形式。此类通过多个数据源来共同描述同一对象的数据形态，被称为多视图数据。图 1-1 是多视图数据的具体表现形式。多视图数据通过在不同视角下对同一组样本对象进行多维表征，每个视图具有其独特的特征空间，能够与其他视图间的数据进行互补。此外，由于多视图数据所描述的数据源是相同的，因此各视图之间存在潜在的共性特征，也称为视图间的一致性信息。视图间的互补性与一致性是多视图数据性能提升的关键性因素。但是，

对于多视图数据信息，往往存在于高维特征空间中，这种高维特性不仅易受噪声干扰与异常值污染，还会导致“维度灾难”问题——直接处理高维数据不仅会引发模型性能的波动性，还会产生高昂的计算开销。多视图子空间聚类（MSC）^[2-6]作为多视图聚类（Multi-view Clustering, MVC）的重要分支，因其能在解决数据的高维度与高复杂度问题上具有突出优势而备受关注。该方法的核心是将原始空间中的高维数据映射到低维子空间，在保持数据固有结构的同时实现维度约简，有效地降低了数据的维度。

尽管 MSC 算法能够很好地处理高维数据，但在其他方面仍然存在一定的局限性。例如，当前的 MSC 算法更关注于视图之间互补性特征，而对跨视图间的全局结构与高阶相关性挖掘不足。此外，在考虑多视图数据的空间结构和高阶相关性关系的同时，奇异值的贡献度以及秩函数逼近对多视图数据聚类性能指标的影响也是一个重要的研究领域。为此，本文从上述角度对 MSC 进行研究，更深层次地挖掘多视图数据潜在特征，从而提升多视图聚类算法的性能，并使这些算法能够更好地应用到实际的聚类场景中去。

1.2 国内外研究现状

目前，利用多视图数据^[7-9]进行聚类的方法主要基于生成式与判别式两大范式构建。生成式方法侧重于探索数据分布建模与重构机制优化，其核心在于构建能够精确表征多视图数据生成过程的概率模型。例如，Bickel 等人^[10]通过将可用属性信息划分为两个单独的子集，确保每个子集都可以独立地学习有关数据的信息。相较于生成式范式，判别式方法侧重于从输入数据特征中预测样本的标签信息，目前已发展成为多视图数据聚类领域的主流研究方向。现有的判别式方法主要分为以下四类^[11]：基于图的方法，基于协同训练的方法，基于多核的方法，基于多视图子空间的方法。

（1）基于图的方法

基于图的方法主要通过构建多个相似图矩阵来表征样本点之间的相似关系，进而生成统一的图矩阵来学习视图的内在结构信息。例如，Wang 等人^[12]将所有数据图矩阵组合在一起，构建了一个统一的相似图矩阵。该相似图矩阵可以自适应不同视图之间的权重，并依次优化每个视图的数据图矩阵，最后对统一图矩阵

施加拉普拉斯约束,以自然地划分所需数量的簇。针对初始图质量对聚类性能的影响,Zhan 等人^[13]提出首先对原始图进行噪声过滤预处理,继而施加低秩约束以增强图结构的判别性。Wang 等人^[14]提出了用于细粒度图学习的方法。其目标是为所有样本分配适当的权重信息,并通过 F 范数约束来确保矩阵的稀疏性。Tan 等人^[15]在此基础上扩展研究,创新性地将局部流形学习与全局拓扑特征相结合,显著提升了算法对复杂数据分布的适应性。在噪声处理方面,Li 等人^[16]使用 Schatten P-范数来约束亲和图,有效地从数据中去除了噪声信息。Kang 等人^[17]提出了一种新的鲁棒主成分分析方法来提高模型的抗噪性。针对多视图特征异构性问题,Tang 等人^[18]提出了一种多图融合和特征权重学习方法。该方法一方面构建特征权重学习模块来自适应评估视图重要性,另一方面设计多图融合算子将异构相似图投影到统一的低维空间中,在降维过程中完整保留了数据的局部几何结构。此外,Shu 等人^[19]提出了一种锚图学习方法,显著减少了算法运行时间。

(2) 基于协同训练的方法

基于协同训练的方法通过为不同视图分别构建分类器模型实现协同优化:各模型基于对应视图生成样本伪标签来计算置信度评分,通过设定置信度阈值并进行筛选,筛选出高置信度样本后,分类器间相互交换高置信度伪标签作为自己的标记数据,并进行参数更新,从而有效挖掘视图间的潜在一致性信息。例如,Kumar 等人^[20]提出了一种基于双分类器协同优化的迭代框架,通过双分类器间的交互优化实现跨视图聚类结果的一致性。

(3) 基于多核的方法

基于多核的方法通过核函数将低维空间中不可分割的数据映射到高维空间,进而转化为线性可分形式。此外,可以融合不同的核函数信息来学习统一的核矩阵并生成聚类结果。例如,Zhang 等人^[21]构建多核共正则化框架,通过联合优化核矩阵与亲和矩阵实现跨视图一致表征学习。此外,Tzortzis 等人^[22]通过加权核学习为不同的核矩阵分配合适的权重信息。Wang 等人^[23]研究了核平滑正则化 MSC 方法,通过核空间映射揭示多源数据非线性关联的同时,引入平滑正则化约束保持原始空间的局部流形结构,实现了特征表示学习与几何结构保持的协同优化。

(4) 基于多视图子空间的方法

多视图子空间聚类利用高维数据的低秩表示构建系数矩阵,并利用机器学习算法将多视图数据进行划分,生成聚类结果,具体流程如图 1-2 所示。该算法的核心是将高维数据划分为低维子空间,并使用自表示学习来保持原始数据的局部结构信息,从而有效缓解“维度灾难”等问题。由于其出色的降维能力和高效的性能,研究人员提出了许多 MSC 方法。现有的 MSC 方法主要分为以下四类:(1)特征级融合,(2)谱嵌入融合,(3)基于矩阵分解,(4)多视图子空间聚类。

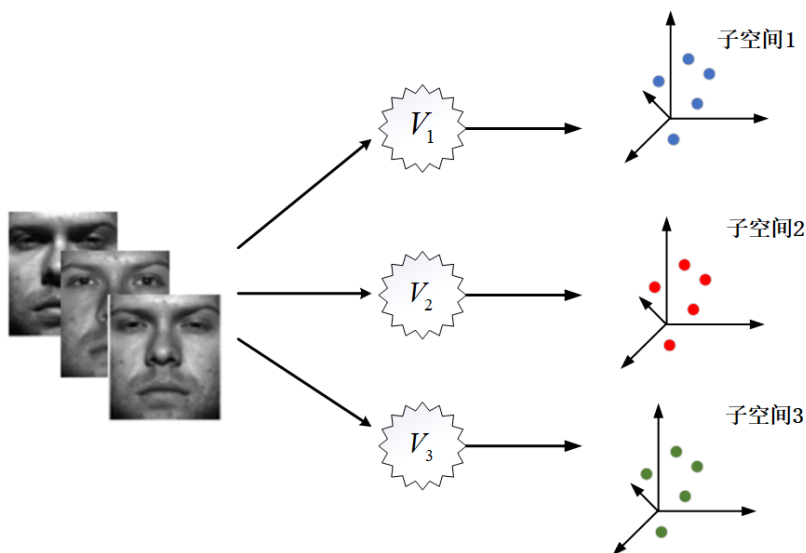


图 1-2 多视图子空间聚类

Fig.1-2 Multi-view Subspace Clustering

1) 特征级融合

特征级融合集成多个视图的特征空间进行联合表征学习,实现聚类优化,其核心在于构建统一的特征空间。最常见融合方法是将是把不同视图的特征直接拼接到一起,形成一个完整的特征集合,接着用 **k-means** 或其他聚类算法处理。其代表算法有典型相关性分析 (CCA) [24]。

2) 谱嵌入融合

谱嵌入融合是通过整合不同视图的谱信息来实现聚类。具体来说,该方法首先从每个视图的低维子空间中提取描述样本关系的谱嵌入矩阵,随后采用融合策略将这些视图特定的谱信息整合为一个统一的公共谱嵌入矩阵,通过对该矩阵进行离散化操作得到最终聚类结果。另一种实现方式则是对各个视图的谱嵌入矩阵分别进行离散化处理,并通过一致性约束使不同视图的聚类结果趋于统一。值得

注意的是,谱嵌入矩阵的构建质量直接决定了聚类性能,而该质量又主要取决于子空间表示对数据本身结构的刻画精度,因此如何设计鲁棒的子空间学习算法成为提升聚类效果的关键。例如,Kang 等人^[25]提出了一种基于旋转矩阵的谱嵌入对齐方法,保证跨视图聚类结果的一致性。在此基础上,Kang 等人^[26]提出了以内部交互的方式实现特定视图的图构造,然后采用基本分区生成与集成策略,来寻找一致的分区。

3) 基于矩阵分解

非负矩阵分解(NMF)作为一种经典的双凸优化模型,其核心在于将高维非负数据矩阵近似分解为两个低秩非负因子矩阵的乘积形式。在多视图聚类领域,基于 NMF 的方法致力于从多视图数据中挖掘共享的潜在信息。Liu 等人^[27]首次将 NMF 分解技术应用于多视图聚类,通过设计跨视图共享基矩阵的约束条件,实现多视图聚类结果的一致性,为 NMF 在多视图聚类场景的扩展提供了基础框架。Wang 等人^[28]在 NMF 分解模型中集成局部流形正则化项,通过约束样本邻域关系保持数据的局部几何结构,有效克服了传统 NMF 方法对数据局部结构建模不足的缺陷。

4) 多视图子空间聚类

基于多视图子空间的聚类方法旨在将高维数据划分为低维子空间,并使用自表示学习来保持原始数据的局部结构信息,从而有效缓解“维度灾难”等问题。由于其出色的降维能力和高效的性能,研究人员提出了许多 MSC 方法。例如,Zheng 等人^[29]提出了一种特征拼接 MSC 方法,通过连接来自不同视图的特征信息并利用双重自表示技术来学习视图间一致性信息。Zhao 等人^[30]提出了一种将秩相等约束与鲁棒主成分分析相结合的方法,以提高模型在视图之间的互补能力。Guo 等人^[31]提出了一种鲁棒的子空间分割方法,该方法直接学习视图的亲矩阵。Gao 等人^[32]通过为每个视图构建独立的系数矩阵并将其堆叠成亲和矩阵,有效地探索了视图间的一致性信息。MSC 在不同的视图上学习,并使用相同的度量来衡量视图之间的相似性。然而,不同视图所携带信息的重要性各不相同,MSC 对所有视图一视同仁,这将导致无法突出重要视图中携带的有效信息,从而影响聚类结果。为了解决这个问题,Li 等人^[33]提出了一种矩阵分解框架,为不同的视图

分配适当的权重。同时, Zhuge 等人^[34]提出了一种鲁棒自加权 MSC 方法, 为视图分配权重来学习每个视图的特征权重矩阵, 并使用权重因子和特征权重来构建共识矩阵。Zhang 等人^[35]提出了低阶张量约束 MSC (LT-MSC) 方法, 该方法先将矩阵拼接成张量, 并应用低阶张量约束来捕捉视图间的互补性结构。然而, LT-MSC 仍然基于矩阵奇异值分解方法, 缺乏明确的物理意义。受 LT-MSC 的启发, Xie 等人^[36]提出了基于张量奇异值分解的 MSC (tensor-singular value decomposition, t-SVD) 方法。从那时起, 研究人员提出了许多张量学习方法来探索视图中的高阶信息。Gao 等人^[37]提出了加权张量核范数 (Weighted tensor nuclear norm, WTNN) 最小化 (WTNNM) 方法, 该方法旨在使用 WTNN 为奇异值分配不同的权重信息, 并提出了一种有效的 WTNNM 求解方法。Zhang 等人^[38]认为, 高质量的亲和矩阵应该是稀疏且连通的, 因此将“好邻居”学习策略引入 MSC 学习方法, 以更好地反映样本之间的本质相关性。

1.3 研究内容及贡献

综合上述分析, 本文基于奇异值加权与秩函数逼近, 结合视图的一致性, 数据去噪和数据信息融合, 深入研究基于加权张量 Schatten P-范数的多视图子空间聚类算法。本文的主要研究内容及贡献如下:

(1) 基于一致性约束的多视图子空间聚类

本文提出了以一致性约束的多视图子空间聚类 (CMSC) 算法。该算法不仅能通过秩一致性约束, 来充分学习视图间的一致性, 从而使得每个视图的聚类结构保持较高的相关性。还通过 Schatten P-范数约束, 能够有效地逼近一致性矩阵秩结构信息。此外, 利用图学习方法增强数据的特征表达。最后, 设计了一种 (Alternating Direction Method of Multipliers, ADMM) 方法用于算法的优化。在多个数据集上的实验结果表明, CMSC 算法具有卓越的聚类性能。

(2) 增强张量 Schatten P-范数的多视图子空间聚类

本文提出了一种增强张量 Schatten P-范数的多视图子空间聚类 (ETSPMSC) 算法。该方法不仅能去除数据中的多种噪声信息, 而且考虑了不同奇异值间的贡献。具体地说, 该方法在矩阵中分别使用拉普拉斯噪声 (l_1 -范数表示损失) 和高

斯噪声 ($l_{2,1}$ -范数表示损失) 对噪声进行建模, 同时有去除这两种噪声, 有助于得到更精确的张量子空间结构。进一步地, 为了充分利用矩阵的先验信息, 利用加权张量为奇异值分配合理的权重, 并通过 Schatten P-范数来更逼近原始秩函数信息。最后, 设计了一种基于 ADMM 的目标函数优化算法, 在基准数据集上的实验结果表明, 相较于其他多视图聚类算法, ETSPMSC 具有更好的聚类性能。

(3) 基于信息融合的多视图子空间聚类

本文提出了一种基于信息融合的多视图子空间聚类 (IFMSC) 算法。IFMSC 首先将原始矩阵分解为一致性矩阵和多样性矩阵。通过对一致性矩阵施加秩一致性约束并将其进一步分解为三因子形式, 可以更准确地提取视图之间的共享特征。同时, 通过学习不同视图之间的流形结构, 探索了视图多样性信息。此外, 一致性和多样性矩阵被整合到一个统一的高阶张量中, 并对其施加加权张量 Schatten P-范数约束。能够有效地使张量逼近原始结构信息, 并从整体层面上有效地学习视图的结构信息。最后, 设计了 (Augmented Lagrange Multiplier, ALM) 来求解 IFMSC, 并在 6 个常用数据集上进行了实验, 结果显示了最佳性能。

算法之间的关系

本研究所提出的三种算法分别从不同的角度来研究多视图子空间聚类, 他们之间具有一定的逻辑和层次关系。基于一致性约束的多视图子空间聚类 (CMSC) 算法是一种能够有效解决视图间一致性与局部结构的多视图子空间聚类算法。但是 CMSC 是基于矩阵层面的, 难以深入高维空间挖掘视图间结构特征。此外, CMSC 引入的图学习方法也会增加视图内部的噪声污染。增强张量 Schatten P-范数的多视图子空间聚类 (ETSPMSC) 算法则能深入挖掘视图间的高维特征, 有效去除数据中的噪声信息。尽管 ETSPMSC 在高维特征空间探索上表现出色, 但它对于视图间特征信息的学习是分开进行的。而基于信息融合的多视图子空间 (IFMSC) 聚类算法, 可从整体层面全面挖掘视图间的全局高维特征, 弥补了前述算法的不足。为了更直观地表示本文的研究内容, 图 1-3 展示了算法的整体框图。

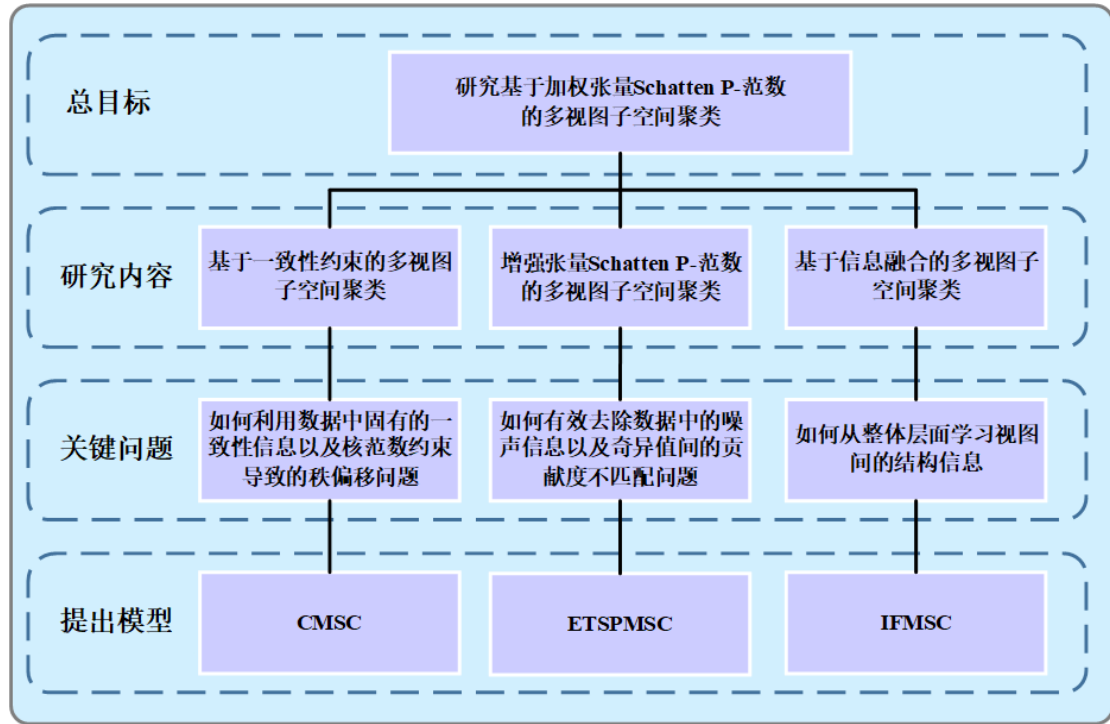


图 1-3 算法整体框图

Fig.1-3 Overall block diagram of the algorithm

1.4 论文组织结构

本文聚焦 MSC 方法的研究，其中第 3 至 5 章为核心内容。核心内容可以分为两部分，第一部分（第 3 章）重点研究基于矩阵的 MSC 方法，主要解决秩函数逼近与共享一致性矩阵优化问题；第二部分（第 4 章和第 5 章）是基于张量的 MSC 方法，重点分析张量的奇异值权重对聚类性能的影响。具体结构如下：

第 1 章 绪论主要阐述了研究的背景、意义及现状，并概括研究内容与贡献。

第 2 章 介绍 MSC 的相关理论基础，包括谱聚类、张量的定义、加权张量 Schatten P-范数定义、算法评估策略、多视图学习方法。

第 3 章 提出了基于一致性约束的多视图子空间聚类算法，详细说明了算法的设计思想、优化求解过程、算法复杂度分析，并在五个真实数据集上进行聚类性能对比和亲和矩阵可视化实验，验证了算法的有效性。

第 4 章 提出了增强张量 Schatten P-范数的多视图子空间聚类算法，详细说明了算法的设计思想、优化求解过程、算法复杂度分析，并在五个真实数据集上进行类性能对比和耗时分析，验证了算法的有效性。

第 5 章 提出了基于信息融合的多视图子空间聚类算法，详细说明了算法的设计思想、优化求解过程、算法复杂度与收敛性分析，并在六个真实数据集上进行聚类性能对比和亲和矩阵可视化实验，验证了算法的有效性。

第 6 章 总结与展望，主要对本文所做的工作进行概述，并对未来的研究展开探讨。

第2章 相关知识介绍

2.1 谱聚类

谱聚类是一种基于图论和矩阵论等数学知识的无监督学习算法。其核心思想是通过构建数据点之间的相似度图，并利用图的谱信息（即特征值和特征向量）来揭示数据的潜在结构，从而实现聚类。具体而言，谱聚类首先将数据点视为图中的节点，并通过计算节点之间的相似性构建带权无向图，距离较近的点赋予较高的权重，距离较远的点赋予较低的权重。随后，将图转化为拉普拉斯矩阵（Laplace Matrix, LM），该矩阵能够有效捕捉图的结构特征。通过对拉普拉斯矩阵进行特征分解，获取其特征值和特征向量，并利用前 n 个特征向量构建新的低维空间。最后，在该空间中使用聚类算法（如 K-means）对数据进行划分，从而完成聚类任务。以下是对相关概念的简要说明：

无向图：对于图 $G(V, E)$ ，其中 $V \in (v_1, v_2, \dots, v_n)$ 表示所有样本点的集合， E 表示连接样本点之间边的集合。

邻接矩阵：邻接矩阵 W 是用以描述无向图或有向图之间是否具有连接关系的矩阵。例如，对于无向图 G 来说，如果结点 v_i 与 v_j 是相连接的，则 $W_{ij} = W_{ji} = 1$ ，否则为 0。

度矩阵：度矩阵 D 是对角矩阵，其中 D_i 表示第 i 个节点的度，即节点 i 与其他相邻节点之间的权重和， $D_i = \sum_{j=1}^n w_{ij}$ 。度矩阵的具体表示如下：

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & & & \\ & D_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D_n \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

拉普拉斯矩阵（Laplace Matrix, LM）：对于无向图 G ，LM 通过 $L = D - W$ 得到。规范化的 LM 为：

$$L_{norm} = D^{-1/2} L D^{-1/2} = I - D^{-1/2} W D^{-1/2} \quad (2.2)$$

其中 I 为单位矩阵， D 为度矩阵， W 为邻接矩阵。

然后，通过对 LM 进行特征值分解，并将得到的特征值按照从小到大的顺序进行排列。选取前 n 个特征值对应的特征向量，经过标准化后，组成特征值矩阵。最后，通过 K-means 算法，将这些特征向量引入至高斯混合模型^[39]（Gaussian Mixture Model, GMM），得到每个样本点隶属于各簇的概率，进而将样本点划分至不同的簇中。

谱聚类算法流程：

1. 构建样本的相似度矩阵；
2. 根据相似度矩阵构建邻接矩阵与度矩阵；
3. 计算 LM 矩阵， $L = D^{-1/2}LD^{-1/2}$ ；
4. 计算 LM 最小的 n 个特征值对应的特征向量；
5. 将各个特征向量组成的矩阵标准化，组成特征矩阵；
6. 对特征值矩阵进行 K-means 聚类，得到聚类结果。

2.2 张量及相关定义

张量也称多维数组，是矩阵向更高维度的扩展，是数据中重要的表征结构。在本文中，矩阵用大写字母表示（如 X ），张量则用花体字母表示（如 $\mathcal{X}$ ）。如图 2-1 为一个三阶张量 $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ 的具体表现形式，其中 n_1 ， n_2 和 n_3 为张量的三个维度信息。一般来说，MSC 在对张量进行操作时一般是在傅里叶域中进行的。张量 $\mathcal{X}$ 沿第三维的快速傅里叶变换（FFT）记为 $\hat{\mathcal{X}} = \text{fft}(\mathcal{X}, [], 3)$ ，而其逆快速傅里叶变换（IFFT）由 $\mathcal{X} = \text{ifft}(\hat{\mathcal{X}}, [], 3)$ 表示。为了便于理解，本文对常见的张量相关定义进行如下概括：

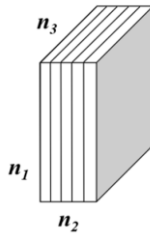


图 2-1 三阶张量的直观表示图

Fig.2-1 The intuitive representation of 3-order tensor

定义 1: 分块循环矩阵 (bcirc) : 对于张量 $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$, 其分块循环矩阵定义为:

$$bcirc(\mathcal{X}) = \begin{bmatrix} X^{(1)} & X^{(n_3)} & \dots & X^{(2)} \\ X^{(2)} & X^{(1)} & \dots & X^{(3)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ X^{(n_3)} & X^{(n_3-1)} & \dots & X^{(1)} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

定义 2: 分块矩阵 (bdiag) : 对于张量 $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$, 其分块矩阵 $\bar{\mathcal{X}}$ 定义为:

$$bdiag(\bar{\mathcal{X}}) = \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{X}}^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{\mathcal{X}}^{(n_3)} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

定义 3: 张量积 (t-product) : 给定张量 $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ 与 $\mathcal{Y} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_4 \times n_3}$, 它们之间的乘积 $\mathcal{X} * \mathcal{Y}$ 为:

$$\mathcal{A} = \mathcal{X} * \mathcal{Y} \quad (2.5)$$

公式 (2.5) 在傅里叶域中表示如下:

$$\mathcal{A}_f^{(k)} = \mathcal{X}_f^{(k)} * \mathcal{Y}_f^{(k)} \quad (2.6)$$

其中 f 表示傅里叶域, $\mathcal{A}_f^{(k)}$ 表示在傅里叶域中的第 k 个正面切片。

定义 4: 张量转置 (Tensor Transpose) : 若 $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$, 则 $\mathcal{X}$ 的转置为 $\mathcal{X}^T \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_1 \times n_3}$ 。 $\mathcal{X}^T$ 是通过转置 $\mathcal{X}$ 的每个正面切片, 从 n_2 至 n_3 顺序进行颠倒得到的。

定义 5: 正交张量 (Orthogonal Tensor) : 对于张量 $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$, 如果满足:

$$\mathcal{X}^T * \mathcal{X} = \mathcal{X} * \mathcal{X}^T = \mathcal{I} \quad (2.7)$$

则称 $\mathcal{X}$ 为正交张量。

定义 6: 张量核范数 (tensor nuclear norm, TNN) : 对于张量 $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$, 张量核范数定义如下所示:

$$\|\mathcal{X}\|_{TNN} = \sum_{i=1}^{n_3} \|\bar{\mathcal{X}}^{(i)}\|_* = \sum_{i=1}^{n_3} \sum_{j=1}^h \sigma_j(\bar{\mathcal{X}}^{(i)}) \quad (2.8)$$

其中, $\sigma_j(\bar{\mathcal{X}}^{(i)})$ 表示 $\bar{\mathcal{X}}^{(i)}$ 的第 j 个奇异值, h 为 n_1 或 n_2 中的最小值。

2.3 加权张量 Schatten P-范数定义

定义 1: Schatten P-范数 (Schatten P-norm) : 对于张量 $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$, 其 Schatten P-范数定义如下所示:

$$\|\mathcal{X}\|_{S_p}^p = \left(\sum_{i=1}^{n_3} \|\bar{\mathcal{X}}^{(i)}\|_{S_p}^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{n_3} \sum_{j=1}^h \sigma_j(\bar{\mathcal{X}}^{(i)})^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.9)$$

其中, p 为幂函数。当 $p=1$ 时, 式 (2.9) 简化为张量核范数模型。

定义 2: 加权张量核范数 (weighted tensor nuclear norm, WTNN) : 对于张量 $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$, 其加权张量核范数定义如下所示:

$$\|\mathcal{X}\|_{\omega, TNN} = \sum_{i=1}^{n_3} \|\bar{\mathcal{X}}^{(i)}\|_{\omega, TNN} = \sum_{i=1}^{n_3} \sum_{j=1}^h \omega_j \sigma_j(\bar{\mathcal{X}}^{(i)}) \quad (2.10)$$

其中, $\sigma_j(\bar{\mathcal{X}}^{(i)})$ 表示 $\bar{\mathcal{X}}^{(i)}$ 的第 j 个奇异值, h 为 n_1 或 n_2 中的最小值, ω_j 为加权项。

定义 3: 加权张量 Schatten P-范数 (weighted tensor Schatten P-norm) : 张量 $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ 的加权张量 Schatten P-范数为:

$$\|\mathcal{X}\|_{\omega, S_p}^p = \left(\sum_{i=1}^{n_3} \|\bar{\mathcal{X}}^{(i)}\|_{\omega, S_p}^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{n_3} \sum_{j=1}^h \omega_j \sigma_j(\bar{\mathcal{X}}^{(i)})^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.11)$$

其中, ω_j 为加权向量 ω 的第 j 个元素, p 为幂函数。 $\sigma_j(\bar{\mathcal{X}}^{(i)})$ 表示 $\bar{\mathcal{X}}^{(i)}$ 的第 j 个奇异值。此外, 当 $p=1$ 时, 式 (2.11) 简化为加权张量核范数模型。

2.4 多视图子空间聚类

目前, 大多数 MSC 算法是通过数据点之间的自表示来寻找其对应的子空间。其基本思想是通过数据样本间的线性组合关系构建系数矩阵, 即每个样本由同一子空间内的其他样本线性重构而成, 具体形式如下:

$$F_m = \sum_{v=1}^V \mathcal{V}(X^{(v)}) + \sum_{v=1}^V \gamma \mathcal{R}(E^{(v)}) \text{ s.t. } A^{(v)} = A^{(v)} X^{(v)} + E^{(v)} \quad (2.12)$$

其中 $A^{(v)}$ 是第 v 个视图的原始矩阵, 每个 $A^{(v)}$ 生成相应的系数矩阵 $X^{(v)} \in R^{n \times n}$ 。

$E^{(v)}$ 表示噪声矩阵, 用于去除数据中多余的噪声信息, γ 为正则化参数。

$\mathcal{V}(\bullet)$ 和 $\mathcal{R}(\bullet)$ 表示分别对系数矩阵 $X^{(v)}$ 与噪声矩阵 $E^{(v)}$ 施加的不同正则化参数。在 MSC 模型中, 对系数矩阵与噪声矩阵施加正则化约束是提升聚类性能的关键, 具体分为以下几种:

(1) 对系数矩阵 $X^{(v)}$ 施加不同的范数约束

L_1 范数约束 ($\|X^{(v)}\|_1$): 当对系数矩阵施加 L_1 范数约束时, 矩阵中的许多元素会被压缩为零, 从而产生稀疏性。这种稀疏性在聚类问题中具有重要的意义和应用价值, 因为它能够识别出最相关的特征或属性, 进而实现特征选择和降维的目的。

L_2 范数约束 ($\|X^{(v)}\|_2$): 当对系数矩阵施加 L_2 范数约束时, 矩阵中的元素往往会趋向于均匀分布, 从而表现出平滑性。这种平滑性在聚类问题中能够增强模型的鲁棒性和稳定性, 因为它有助于降低随机噪声的干扰。

核范数约束 ($\|X^{(v)}\|_*$): 当对系数矩阵施加核范数约束时, 矩阵呈现出低秩性与低秩性, 有助于进行数据恢复和特征提取。

(2) 对噪声矩阵 $E^{(v)}$ 施加不同的范数约束

L_1 范数约束 ($\|E^{(v)}\|_1$): L_1 范数约束的作用在于使噪声矩阵中的多数元素趋近于零, 以此实现噪声的稀疏化。在现实场景中, 噪声往往呈现稀疏特性, 意味着仅有少数数据点受到噪声干扰。在此情形下, 运用 L_1 范数约束能够更有效地保护数据的真实性, 防止有价值的信息被错误地归类为噪声。

L_2 范数约束 ($\|E^{(v)}\|_2$): L_2 范数约束的功能则在于限制噪声的幅值, 以此来降低噪声对聚类结果的干扰。当噪声分布相对均匀时, 采用 L_2 范数约束能够促使噪声较为均衡地分散到各个数据点, 从而避免个别数据点受到噪声的过度影响, 确保聚类结果的稳定性和可靠性。

$L_{2,1}$ 范数约束 ($\|E^{(v)}\|_{2,1}$) : $L_{2,1}$ 范数约束是一种复合约束方法, 它首先对矩阵的每一行施加 L_1 范数, 以促使大部分噪声点的权值趋近于零, 从而有效抑制异常值的影响; 随后对整个矩阵施加 L_2 范数, 以平衡不同行之间的噪声权重, 避免某些行的权重过大或过小。这种约束方法能够显著降低噪声和异常值对数据的干扰, 进而提升聚类结果的精确性和鲁棒性。

2.5 多视图图聚类

多视图图聚类算法首先计算每个视图的相似性矩阵, 随后将这些矩阵进行整合, 形成一个统一的亲和性矩阵^[40]。最终, 通过谱聚类算法对该亲和性矩阵进行聚类分析。目标函数如下:

$$F_g = \sum_{v=1}^V \Psi(S^{(v)}) + \sum_{v=1}^V \beta \Omega(S^{(v)}) \quad (2.13)$$

其中 S^v 表示第 v 个视图的相似性矩阵, $\beta > 0$ 是惩罚参数。 $\Psi(\bullet)$ 用于构造每个视图的相似矩阵, $\Omega(\bullet)$ 用于对所有相似矩阵施加不同的范数约束。

2.6 聚类性能评估指标

为了充分地评估算法的聚类性能, 通常会采用多种评价指标来对算法进行综合衡量。本文选取了三种常用的评价指标来对聚类算法的性能进行系统性的评估, 具体包括:

(1) 归一化互信息 (Normalized Mutual Information, NMI)

NMI 是一种用于衡量两个聚类结果相似程度的评价指标。该方法通过将聚类算法的输出结果与真实标签进行比较, 计算两者之间的互信息, 以反映它们之间的相关性。为了消除不同聚类结果在规模和分布上的差异, 互信息会被归一化处理, 即除以它们熵的几何平均值。最终得到的 NMI 值范围在 $[0, 1]$ 之间, 值越接近 1, 表明两个聚类结果越相似, 聚类性能越好。NMI 的定义如下所示:

$$NMI(Y, C) = \frac{I(Y; C)}{\sqrt{H(Y)H(C)}} \quad (2.14)$$

其中, Y 和 C 分别表示真实标签与输出结果, $H(*)$ 表示真实标签的熵, $I(Y;C)$ 表示互信息。

(2) 准确率 (Accuracy, ACC)

ACC 通过计算聚类结果与真实标签之间的正确匹配的比例来衡量算法的性能。ACC 的定义如下所示:

$$ACC = \frac{\sum_{j=1}^n \delta(y_j, c_j)}{n} \quad (2.15)$$

其中, n 表示总样本数, y_j 和 c_j 分别表示真实标签与输出结果, $\delta(\cdot, \cdot)$ 为狄拉克函数。

(3) F-Score

通常情况下, 精确率与召回率呈负相关关系。因此在实际应用中, 往往需要根据具体需求对两者进行权衡。为了综合衡量这两个指标, 引入了 F-Score 这一评价指标。F-Score 的定义如下所示:

$$F-Score = (1 + \lambda^2) \cdot \frac{Precision \cdot Recall}{\lambda^2 \cdot Precision + Recall} \quad (2.16)$$

其中, 当 $\lambda=1$ 时, 为 F1-Score, 这时精确率与召回率同样重要。当 $\lambda < 1$ 时, 精确率更重要; 反之, 则召回率更重要。

第3章 基于一致性约束的多视图子空间聚类

在无监督学习领域，聚类因其能够有效地揭示数据的内在结构信息，常被用作数据预处理的关键工具。其中，MSC 能够有效地处理数据中的高维信息，避免“维度诅咒”，被广泛应用于聚类任务。

MSC 大多通过“自表示法”从子空间中得到更为干净与鲁棒的表示矩阵。自表征方法假设不同样本之间的数据是线性相关的，并且每个样本中的特征可以由其他样本中的特征线性表示。如图 3-1 所示，列向量中的每一行都表示数据的一个特征。每个视图都表征了原始数据源的部分知识，因此不同视图之间的特征可以相互补充。此外，由于所描述的数据源是相同的，因此不同视图之间存在固有的一致性信息。视图间的互补性和一致性信息共同定义了多视图数据的全局结构信息，也为研究人员利用视图间的全局信息提供了坚实的基础。

Zheng 等人^[29]提出了一种特征拼接 MSC 方法。该方法通过拼接多视图数据特征，并利用对偶自表示技术学习视图的全局信息。Tang 等人^[41]通过协同训练策略将原始数据矩阵融合为低秩共识矩阵，并通过施加秩约束获得聚类结果，进而揭示了数据的全局信息。Chen 等人^[42]提出了多视图低秩表示方法。该方法通过对系数矩阵施加对称的低秩约束来保持矩阵信息在行与列维上的一致性。Zheng 等人^[43]提出了一种约束线性双分解 MSC 方法，旨在确保所有系数矩阵均表现出相同的聚类特性。此外，Duan 等人^[44]使用一步 MSC 方法将子空间学习，信息融合和秩约束融合为一个整体，以直接生成聚类结果。

上述研究方法虽然取得了优异的性能，但仍存在一定的局限性。首先，它们大多通过学习亲和矩阵来揭示不同视图间的一致性，而不是直接学习视图间的共享属性信息。其次，大多数方法采用核范数对系数矩阵进行约束，这可能限制了共享属性矩阵对原始一致性信息的准确逼近。此外，视图内部的局部结构对视图质量具有重要影响，而现有方法未能充分考虑到这一点。

在本章中，提出了一种基于一致性约束的多视图子空间聚类算法(CMSC)，有效地解决了上述问题。具体来说，通过双向一致性约束，将子空间学习与图学习方法整合到同一个框架中，以增强系数矩阵的局部结构特征。在此基础上，对

系数矩阵施加秩一致性约束，并将其分解为矩阵三因子形式，得到共享一致性矩阵，以保证聚类结构的一致性。此外，通过对共享系数矩阵施加 Schatten P-范数约束，更好地使共享系数矩阵逼近原始一致性信息。最后利用信息阈值筛选与融合策略来提高亲和矩阵的抗噪性。该方法框架图如图 3-1 所示。本章主要贡献如下：

(1) 通过将多视图子空间学习、图学习和矩阵三因子分解整合到一个统一的模型中，实现了多视图一致性和局部信息的深入探索与应用。

(2) 对共享一致性矩阵施加 Schatten P-范数约束，学习视图间的共享一致性信息。

(3) 利用阈值选择方法来减少数据中的冗余信息。此外，通过融合策略捕获原始数据中的固有结构信息，以生成更高质量的亲和矩阵

(4) 本章节使用 ADMM 方法来优化 CMSC。在五个基准数据集上的实验结果表明，CMSC 优于其他九种算法。

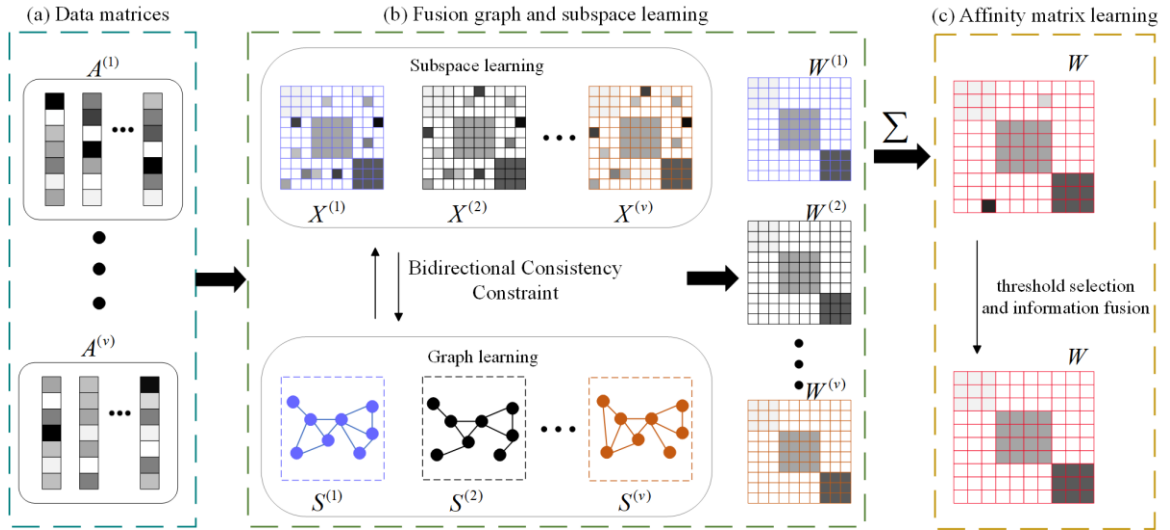


图 3-1. CMSC 框架示意图

Fig.3-1 CMSC algorithm framework

3.1 基于一致性约束的多视图子空间聚类

3.1.1 CMSC 模型构建

给定样本数据 $A^v \in R^{m \times n}$ ，其中 n 表示样本数， m 表示特征数。通过对多视图数据进行自表示，使不同数据点之间线性相关。其公式如下：

$$\begin{aligned} \min_{X^v, E^v} \sum_{v=1}^V \gamma \|X^v\|_* + \sum_{v=1}^V \|E^v\|_{2,1} \\ \text{s.t. } A^v = A^v X^v + E^v, v=1, 2, \dots, V \end{aligned} \quad (3.1)$$

其中, X^v 是系数矩阵, E^v 是噪声项, γ 是平衡参数。

式 (3.1) 未能充分考虑到视图间的一致性信息。视图间一致性反映了不同视图之间共享的基本属性, 即所有视图应具备相同的表示。为了更有效地利用视图间的一致性, 可以对系数矩阵施加秩一致性约束, 并将其分解为三因子形式, 从而确保系数矩阵具有统一的结构。即:

$$\begin{aligned} \min_{X^v, E^v, C} \gamma \|C\|_* + \sum_{v=1}^V \|E^v\|_{2,1} \\ \text{s.t. } A^v = A^v X^v + E^v, X^v = F^v C H^{v^T} \\ F^{v^T} F^v = I, H^{v^T} H^v = I \end{aligned} \quad (3.2)$$

其中 F^v 和 $H^v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 表示系数矩阵 X^v 所在的两个展开方向上的基向量。通过对 F^v 和 H^v 施加正交约束, 避免了算法的平凡解。 $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 可以看作是一个共享系数矩阵, 它保留了系数矩阵的主要信息, 所有的系数矩阵都可以共享这个结构。为了使共享系数矩阵 C 更逼近原始数据的一致性信息, 可以通过利用 Schatten P-范数来替代矩阵核范数。具体形式如下所示:

$$\begin{aligned} \min_{X^v, E^v, C} \gamma \|C\|_{S_p}^p + \sum_{v=1}^V \|E^v\|_{2,1} \\ \text{s.t. } A^v = A^v X^v + E^v, X^v = F^v C H^{v^T} \\ F^{v^T} F^v = I, H^{v^T} H^v = I \end{aligned} \quad (3.3)$$

最后, 通过在模型中引入图学习方法, 能够有效利用视图内部的局部结构信息, 并结合双向一致性约束, 实现视图内部局部结构与一致性信息的相互传播。最终的目标函数表示如下:

$$\begin{aligned} \min_{X^v, E^v, C, S^v} \gamma \|C\|_{S_p}^p + \|E^v\|_{2,1} + \sum_{v=1}^V \sum_{i,j=1}^N \|a_i^v - a_j^v\|_2^2 S_{ij}^v \\ + \frac{\beta}{2} \sum_{v=1}^V \|S^v\|_F^2 + \frac{\lambda}{2} \sum_{v=1}^V \|X^v - S^v\|_F^2 \\ \text{s.t. } A^v = A^v X^v + E^v, X^v = F^v C H^{v^T}, F^{v^T} F^v = I \\ H^{v^T} H^v = I, (S_i^v)^T \mathbf{1} = 1, S_{ij}^v \geq 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

3.1.2 CMSC 的优化

由于等式 (3.4) 具有非凸性, 采用 ADMM 方法对其进行重构。重构后的公式表示如下:

$$\begin{aligned} & L(X^v, E^v, S^v, C, F^v, H^v) \\ &= \gamma \|C\|_{S_p}^p + \sum_{v=1}^V \|E^v\|_{2,1} + \sum_{v=1}^V \sum_{i,j=1}^N \|a_i^v - a_j^v\|_2^2 S_{ij}^v + \frac{\beta}{2} \sum_{v=1}^V \|S^v\|_F^2 + \frac{\lambda}{2} \sum_{v=1}^V \|X^v - S^v\|_F^2 \quad (3.5) \\ &+ \frac{\mu}{2} \sum_{v=1}^V \left(\left\| A^v - A^v X^v - E^v + \frac{Q_1^v}{\mu} \right\|_F^2 + \left\| X^v - F^v C H^{v^T} + \frac{Q_2^v}{\mu} \right\|_F^2 \right) \end{aligned}$$

其中 μ 是惩罚参数, Q_1^v 和 Q_2^v 是拉格朗日乘子。此外, 通过交替最小化策略分别更新 X^v 、 E^v 、 S^v 、 C 、 F^v 和 H^v , 即固定其他无关变量, 依次更新单个变量。

(1) 更新 X^v

在固定其他变量后, 对 X^v 进行更新, 式 (3.5) 变成如下形式:

$$\begin{aligned} & \min_{X^v} \frac{\lambda}{2} \sum_{v=1}^V \|X^v - S^v\|_F^2 + \frac{\mu}{2} \sum_{v=1}^V \left\| A^v - A^v X^v - E^v + \frac{Q_1^v}{\mu} \right\|_F^2 \\ & + \frac{\mu}{2} \sum_{v=1}^V \left\| X^v - F^v C H^v + \frac{Q_2^v}{\mu} \right\|_F^2 \quad (3.6) \end{aligned}$$

直接取 X^v 的偏导数并使式 (3.6) 为零, 得到闭式解:

$$X^v = \left(\frac{\lambda}{\mu} I + A^{v^T} A^v + I \right)^{-1} \tilde{G}^v \quad (3.7)$$

其中, $\tilde{G}^v = A^{v^T} \left(A^v - E^v + \frac{Q_1^v}{\mu} \right) + \frac{\lambda}{\mu} S^v + F^v C H^v - \frac{Q_2^v}{\mu}$, I 是单位矩阵。

(2) 更新 E^v

在固定其他变量后, 对 E^v 进行更新, 式 (3.5) 变成如下形式:

$$\min_{E^v} \sum_{v=1}^V \|E^v\|_{2,1} + \frac{\mu}{2} \sum_{v=1}^V \left\| A^v - A^v X^v - E^v + \frac{Q_1^v}{\mu} \right\|_F^2 \quad (3.8)$$

令 $\Phi = A^v - A^v X^v + \frac{Q_1^v}{\mu}$, 根据文献^[45], 式 (3.8) 可以求解:

$$[E_v]_{:,i} = \begin{cases} \frac{\|\Phi_{:,i}\|_2 - \frac{1}{\mu}}{\|\Phi_{:,i}\|_2} \Phi_{:,i}, & \|\Phi_{:,i}\|_2 > \frac{1}{\mu} \\ 0, & otherwise \end{cases} \quad (3.9)$$

(3) 更新 S^v

在固定其他变量后，对 S^v 进行更新，式 (3.5) 变成如下形式：

$$\min_{S^v} \sum_{v=1}^V \sum_{i,j=1}^N \|a_i^v - a_j^v\|_2^2 S_{ij}^v + \frac{\beta}{2} \sum_{v=1}^V \|S^v\|_F^2 + \frac{\lambda}{2} \sum_{v=1}^V \|X^v - S^v\|_F^2 \quad (3.10)$$

根据文献^[46]，可以得到以下形式：

$$S_{ij}^v = \frac{\Theta_{i,w+1}^v - \Theta_{ij}^v}{w\Theta_{i,w+1}^v - \sum_{k=1}^w \Theta_{ik}^v}, \quad j \leq w. \quad (3.11)$$

其中， $\Theta_{ij}^v = \sum_{v=1}^V \sum_{i,j=1}^N \|a_i^v - a_j^v\|_2^2 - \lambda \sum_{v=1}^V \sum_{i,j=1}^N S_{ij}^v$ ，参数 w 表示自适应邻居的数量，并用于代替参数 β 和 λ 。因为 w 是整数，它比 β 和 λ 更容易更新。

(4) 更新 C

在固定其他变量后，对 C 进行更新，式 (3.5) 变成如下形式：

$$\min_C \gamma \|C\|_{S_p}^p + \frac{\mu}{2} \sum_{v=1}^V \left\| X^v - F^v C H^{v^T} + \frac{Q_2^v}{\mu} \right\|_F^2 \quad (3.12)$$

经过计算，可以将式 (3.12) 转换为以下形式：

$$\min_C \frac{\gamma}{V \cdot \mu} \|C\|_{S_p}^p + \frac{1}{2} \|C - \hat{C}\|_F^2 \quad (3.13)$$

其中 $\hat{C} = (1/V) \sum_{v=1}^V F^v (X^v + Q_2^v (1/\mu)) H^{v^T}$ 。 C 的解可以通过奇异值阈值算子得到，具体的求解步骤见^[47]。

(5) 更新 F^v 和 H^v

先更新 F^v ，在固定其他变量后，式 (3.5) 变成如下形式：

$$\min_{F^{v^T} F^v = I, R^{v^T} R^v = I} \left\| X^v - F^v C H^{v^T} + \frac{Q_2^v}{\mu} \right\|_F^2 \quad (3.14)$$

经过推导后，可以得到以下形式：

$$\min_{F^v, F^v=I} \|F^v - ((Q_2^v(1/\mu)) + X^v)H^v C^T\|_F^2 \quad (3.15)$$

这是一个正交的 Procrustes 问题，其封闭形式的解为^[48]:

$$F^v = \tilde{N}^v \tilde{M}^{v^T} \quad (3.16)$$

其中， $\tilde{N}^v$ 和 $\tilde{M}^v$ 分别表示 F^v 经过奇异值分解后得到的左奇异值矩阵和右奇异值矩阵。

H^v 的求解与 F^v 相似，可以得到以下形式:

$$H^v = \hat{N}^v \hat{M}^{v^T} \quad (3.17)$$

其中， $\hat{N}^v$ 和 $\hat{M}^v$ 分别表示 H^v 经过奇异值分解后得到的左奇异值矩阵和右奇异值矩阵。

(6) 更新 Q_1^v , Q_2^v 和 μ :

$$\begin{cases} Q_1^v = Q_1^v + \mu(A^v - A^v X^v - E^v) \\ Q_2^v = Q_2^v + \mu(X^v - F^v C H^{v^T}) \\ \mu = \min(\rho\mu, \mu_{\max}) \end{cases} \quad (3.18)$$

算法 1 总结了上述优化过程。然后，使用系数矩阵 X^v 来构造亲和矩阵:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^V (X^v + X^{v^T}) \quad (3.19)$$

3.1.3 CMSC 亲和矩阵优化

通常情况下，在获得亲和矩阵后，会直接使用谱聚类算法来得到最终的聚类结果。然而，如式 (3.19) 所示，直接将系数矩阵堆叠成亲和矩阵可能会导致信息冗余，从而影响聚类性能。为了解决这一问题，我们提出了一种信息阈值选择方法，旨在减少信息冗余并保留亲和矩阵中的关键结构信息。该方法基于一个核心假设：亲和矩阵中的样本数量与信息量保留率成反比，即样本数越多，保留的比例就越低。我们定义信息保留率 ρ 来量化信息阈值选择的程度:

$$\rho = \frac{1}{\beta_1 n - \beta_2} + \beta_3 \quad (3.20)$$

其中 β_1 , β_2 和 β_3 是常数, 并且所设置的值在不同的数据集之间是一致的。具体来说, 我们选择亲和矩阵 W 的每列中 $\rho\%$ 的最大值, 并将该列的其他元素设置为 0。该方法有效地保持了数据的块对角结构, 增强了矩阵的稀疏性。然而, 通过这种策略获得的亲和矩阵的一些条目可能对噪声或离群值敏感, 并且可能不能准确地反映数据点之间的真实关系。受 eLRRSC^[49] 方法的启发: 系数矩阵中的行和列受到具有小误差的低秩约束, 它们的角度信息通常不受影响。也就是说, 利用数据主方向的角度信息重构亲和矩阵, 可以有效降低噪声对数据的影响, 更准确地描述数据点之间的相关性。因此, 我们决定通过直接利用数据的主方向的角度信息来重建亲和矩阵。具体地, 计算 $W = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^V (X^v + X^{v^T})$ 并执行亲和矩阵 W 的 SVD 分解, 即 $W = U \Sigma V^T$ 。然后, 定义 $M = U \Sigma^{1/2}$, 并使用 M 的所有行向量上的角度信息来重建亲和矩阵 W :

$$[W]_{ij} = \left(\frac{m_i^T m_j}{\|m_i\|_2 \|m_j\|_2} \right)^2 \quad (3.21)$$

其中 m_i 和 m_j 分别表示矩阵 M 的第 i 行和第 j 行。此外, 使用 $()^2$ 来保证 W 中的值都是正的。算法 1 总结了 CMSC 的完整算法流程。

3.1.4 算法复杂度分析

CMSC 算法的算法更新复杂度主要由七个子问题构成。对于 X^v , 其作用于所有视图的复杂度为 $\mathcal{O}(Vn^3)$ 。 E^v 有一个闭式解更新方法, 其对所有视图的复杂度为 $\mathcal{O}(Vmn^2 + Vmn)$ 。对于 S^v , 需要对 $\Theta_i^v, i=1, \dots, n$ 进行排序, 其复杂度为 $\mathcal{O}(Vn^2 \log(n))$ 。对于 C , 需要通过 SVD 方法来进行更新, 其复杂度为 $\mathcal{O}(n^3)$ 。更新 F^v 与 H^v 是相似的, 均需要 $\mathcal{O}(Vn^3)$ 的复杂度。最后需要对亲和矩阵作 SVD 分解与谱聚类, 其复杂度为 $\mathcal{O}(n^3 + n^2)$ 。此外, 由于视图数量 $V \ll \min(m, n)$, 可省去。CMSC 算法的总复杂度为 $\mathcal{O}(n^3 + mn^2 + mn)$ 。

算法 1: CMSC 算法优化**输入:** 多视图数据 $\{A^{(v)}\}$, 可调参数 γ, p, λ 和 w

1. 初始化: $Q_1^v = Q_2^v = X^v = F^v = H^v = C = S^v = 0, \mu = 0.01, \mu_{\max} = 10^8, \rho = 2.8, \varepsilon = 0.01$.
2. **While not converged do:**
3. 根据式(3.7)更新 X^v ;
4. 根据式(3.9)更新 E^v ;
5. 根据式(3.11)更新 S^v ;
6. 根据式(3.13)更新 C ;
7. 根据式(3.16)更新 F^v ;
8. 根据式(3.17)更新 H^v ;
9. 根据式(3.18)更新 Q_1^v, Q_2^v 和 μ ;
10. 直到收敛: $\{\|X^v - C\|_{\infty} < \varepsilon \mid v=1, 2, \dots, V\}$;
11. **end**
12. 得到更新后的系数矩阵 X^v ;
13. 计算亲和矩阵 $W = \sum_{v=1}^V X^v$;
14. 根据式(3.20)完成信息约简策略;
15. 计算 skinny SVD: $W = U\Sigma V^T$, 并计算 $M = U\Sigma^{1/2}$;
16. 重构亲和矩阵: $[W]_{ij} = \left(\frac{m_i^T m_j}{\|m_i\|_2 \|m_j\|_2} \right)^2$;
17. W 进行谱聚类.

输出: 聚类结果

3.2 实验

本节选取了五个公开数据集进行实验, 将 CMSC 的聚类结果与其他九种最先进的聚类算法进行了对比分析。同时, 详细分析了实验结果, 并探讨了 CMSC 的收敛性。

3.2.1 实验数据集

为验证 CMSC 的性能, 实验采用五个基准数据集进行评估。以下是每个数据集的简要概述:

3Sources 数据集: 包含来自 Reuters、BBC 和 Guardian 三大新闻网站的 169 个样本。

MSRCV1 数据集: 涵盖 7 个类别, 由 6 个不同的视图组成, 共 210 个样本。

COIL-20 数据集: 包含 20 个类别, 每个类别 72 幅灰度图像, 共计 1440 幅。实验提取了三个不同的特征 (强度、LBP 和 Gabor)。

UCI 数据集: 包含 0-9 共 10 类手写数字的 2000 个样本。实验提取了三种不同的特征 (像素平均值、傅里叶系数和形态特征)。

YaleB 数据集：由三个视图组成，每个视图包含 10 个个体，总计 650 个人脸样本。

表 3-1 简要地总结了上述数据集的信息：

表 3-1 数据集简介

Table 3-1 Introduction to the dataset

数据集名称	样本数	类数	视图数
3Sources	169	6	3
MSRCV1	210	7	6
COIL-20	1440	20	3
UCI	2000	10	3
YaleB	650	10	3

3.2.2 对比算法

为评估 CMSC 的性能，本章选取了九种最先进的聚类算法与 CMSC 作比较，分别是：

- (1) GMC^[12]：通过自适应视图权重策略，为每个视图分配合适的权重。
- (2) UOMvSC^[50]：将谱嵌入与 k-means 聚类相结合，直接生成聚类结果。
- (3) RC-MS^[51]：采用秩一致性约束方法，确保多视图系数矩阵保持统一的低秩结构。
- (4) CBF-MS^[43]：使用双线性分解方法来利用不同视图之间的一致性信息。
- (5) LT-MS^[35]：引入张量低秩约束，探索视图间的高阶相关性。
- (6) MvCSD^[52]：旨在探索视图的潜在空间，以获得视图间的共识信息。
- (7) CGD^[53]：将跨视图扩散技术融入多视图聚类框架，增强视图间信息传递。
- (8) SMVSC^[54]：通过图构造与锚点学习的统一优化框架，精确揭示数据潜在分布。
- (9) liAGLMC^[55]：结合子空间学习与包容性诱导正则化器，实现视图结构的自适应重建。

3.2.3 聚类性能比较

在实验阶段，通过参数调优确定各算法最优值后，运行最优参数 10 次，计算性能指标均值及标准差。聚类性能比较如表 3-2 所示，表格中以粗体标注最优结果，次优结果以下划线标识。CMSC 与其他九种算法的性能对比如下：

1) CMSC 在五个数据集上均取得最优性能,其优势主要体现在:在 3Sources 数据集上,较次优算法 IiAGLMC 提升超 10%。在 MSRCV1 数据集上,各项指标较 CBF-MSC 分别提升 4.78%, 8.58%, 9.17%。在 COIL-20 数据集上,所有评估指标均达 99%以上。在 UCI 数据集上,基于秩一致性约束算法的 CMSC、RC-MSC 和 CBF-MSC 均取得了优异的聚类性能。在 YaleB 数据集上,仅有 CMSC 和 MvCSD 两种算法取得了优异的聚类结果。其中,CMSC 比 MvCSD 的性能提高分别为 5.39%, 6.02%, 12.28%。这些结果进一步表明,CMSC 具有出色的聚类性能。

2) RC-MSC 和 CBF-MSC 的聚类性能在大多数数据集上表现不佳,主要归因于其只考虑了通过秩一致性约束来学习视图间一致性信息,而未能有效捕捉视图内部的局部数据结构。相比之下,MvCSD 通过潜在子空间学习方法探索视图的全局一致性信息,在多数数据集上取得相对较好的性能。但其直接将亲和矩阵应用于谱聚类,未能有效处理亲和矩阵中潜在的冗余信息,导致性能仍落后于 CMSC。近期提出的 IiAGLMC 采用自适应图学习方法,通过重构视图特定信息来获取一致性表示,但该方法存在秩函数偏移问题,导致核范数约束难以准确逼近原始秩一致性矩阵的秩结构。基于图学习的 GMC 和 CGD 的性能不佳,因为它们不能同时挖掘视图之间和视图内部的结构信息,仍有改进的空间。

3) 相较之下,CMSC 算法整合了三个关键要素:1) 多视图一致性约束与局部结构保留的协同优化方法;2) 一致性矩阵的秩函数逼近策略;3) 基于双重正则化的高质量亲和矩阵学习框架。有效地解决了现有方法在信息利用视图一致性、秩函数迁移以及矩阵优化等方面的问题,从而在展现出显著的聚类优势。

表 3-2 算法聚类性能比较

Table3-2 Comparison of clustering performance

数据集	方法	ACC	NMI	F-Score
3Sources	GMC	69.23±0.00	62.16±0.00	60.46±0.00
	UOMvSC	68.64±0.00	58.88±0.00	65.01±0.00
	RC-MSC	68.28±2.36	52.01±1.32	63.33±1.78
	CBF-MSC	62.18±2.37	62.58±0.50	59.85±1.83
	LT-MSC	71.00±0.00	61.29±0.00	69.20±0.00
	MvCSD	69.82±0.00	62.24±0.00	63.67±0.00
	CGD	79.88±0.00	70.85±0.00	73.77±0.00
	SMVSC	69.82±0.01	59.91±0.02	67.10±0.02
	IiAGLMC	<u>84.02±0.12</u>	<u>71.42±0.08</u>	<u>74.53±0.07</u>

	CMSC	92.89±0.00	82.00±0.00	88.07±0.00
MSRCV1	GMC	89.52±0.00	81.99±0.00	79.97±0.00
	UOMvSC	84.29±0.00	77.61±0.00	73.41±0.00
	RC-MSC	78.00±0.10	67.88±0.12	66.22±0.12
	CBF-MSC	<u>91.34±0.18</u>	<u>83.77±0.39</u>	<u>83.59±0.33</u>
	LT-MSC	77.61±0.00	71.54±0.00	67.59±0.00
	MvCSD	73.80±0.00	64.44±0.00	62.33±0.00
	CGD	90.00±0.00	83.48±0.00	80.45±0.00
	SMVSC	90.95±0.01	83.31±0.00	82.35±0.03
	IiAGLMC	80.47±0.14	76.86±0.23	71.63±0.09
	CMSC	95.71±0.00	90.95±0.00	91.26±0.00
COIL-20	GMC	78.68±0.00	94.01±0.00	79.20±0.00
	UOMvSC	84.03±0.00	93.82±0.00	81.07±0.00
	RC-MSC	76.40±0.06	84.00±0.02	73.58±0.01
	CBF-MSC	75.06±0.79	82.23±0.63	71.11±1.12
	LT-MSC	75.27±0.02	84.35±0.21	69.64±0.14
	MvCSD	<u>91.80±0.00</u>	<u>95.78±0.00</u>	<u>89.46±0.00</u>
	CGD	84.23±0.00	93.07±0.00	81.71±0.00
	SMVSC	78.81±0.02	85.29±0.01	74.35±0.06
	IiAGLMC	82.98±0.02	91.04±0.14	80.46±0.23
	CMSC	99.65±0.00	99.49±0.00	99.30±0.00
UCI	GMC	73.55±0.00	81.53±0.00	71.34±0.00
	UOMvSC	<u>94.00±0.00</u>	<u>90.14±0.00</u>	<u>89.04±0.00</u>
	RC-MSC	88.40±0.00	79.73±0.00	79.05±0.00
	CBF-MSC	91.13±0.04	83.38±0.11	83.44±0.07
	LT-MSC	90.65±0.00	82.27±0.00	82.45±0.00
	MvCSD	25.70±0.03	28.40±0.01	22.77±0.02
	CGD	71.55±0.00	72.51±0.00	65.17±0.00
	SMVSC	91.75±0.02	84.95±0.12	84.45±0.06
	IiAGLMC	87.40±0.11	79.85±0.21	77.67±0.16
	CMSC	97.60±0.00	94.61±0.00	95.18±0.00
YaleB	GMC	43.38±0.00	44.89±0.00	26.51±0.00
	UOMvSC	40.00±0.00	41.21±0.00	27.45±0.00
	RC-MSC	56.15±0.21	56.21±0.04	41.72±0.31
	CBF-MSC	57.10±0.20	56.01±0.20	39.95±0.29
	LT-MSC	46.21±0.10	47.34±0.40	34.68±0.43
	MvCSD	<u>92.00±0.02</u>	<u>90.77±0.16</u>	<u>87.58±0.23</u>
	CGD	46.76±0.00	45.64±0.00	30.01±0.00
	SMVSC	37.69±0.00	32.23±0.00	28.03±0.00
	IiAGLMC	45.23±0.15	42.57±0.08	27.90±0.04
	CMSC	96.56±0.22	93.22±0.43	92.95±0.47

3.2.4 参数分析

CMSC 模型包含四个关键超参数： γ ， λ ， p 和 w 。 γ 和 λ 的调节范围在 $[0.00001, 0.0001, 0.001, \dots, 100]$ 之间。参数 p 的值为 $[0.01, 0.2, 0.3, \dots, 0.9]$ ，自适应邻居的数量 w 从 $[10, 30, 50]$ 中选择。

图 3-2 展示了 MSRCV1 数据集中参数 γ ， λ 和 p 对 ACC 的影响。结果显示， γ 和 λ 在大范围的参数变化下表现出较好的稳定性。选择不同的 p 值对聚类性能的最佳值影响不大，但对算法的整体性能有一定的影响。图 3-3 展示了自适应邻居数量 w 对聚类性能的影响。可以发现，随着自适应邻居数量的增加，聚类性能也趋于提高。

对于 3Sources、MSRCV1、COIL-20、UCI 和 YaleB 数据集，每个数据集中 γ ， λ ， p 和 w 的最优参数如下： $(10, 10, 0.8, 50)$ ， $(1, 0.01, 0.8, 10)$ ， $(1, 0.1, 0.5, 50)$ ， $(100, 100, 0.5, 30)$ 和 $(0.1, 0.001, 0.01, 50)$ 。

3.2.5 亲和矩阵的可视化

理想的亲和矩阵应具备清晰的块对角线结构，同时保持非对角线区域的纯净性，这反映了类内样本的紧密连接与类间样本的完全分离。本研究采用阈值选择和信息融合策略，对比分析了原始亲和矩阵与优化后的亲和约简矩阵 W 的结构差异。同时，基于秩一致性约束的共性，选取 RC-MSc 作为 CMSC 的对比基准进行可视化分析。

如图 3-4 所示，顶部展示了 RC-MSc 的亲和矩阵可视化结果，其块对角线结构较为模糊，这主要归因于该方法过度关注视图间全局结构信息而忽视了视图内局部结构特征。中间部分呈现的原始亲和矩阵虽具有明显的块对角结构，但存在显著的噪声干扰。相比之下，底部展示的 CMSC 结果在保持清晰块对角结构的同时，有效抑制了噪声信息，验证了所提方法的优越性。

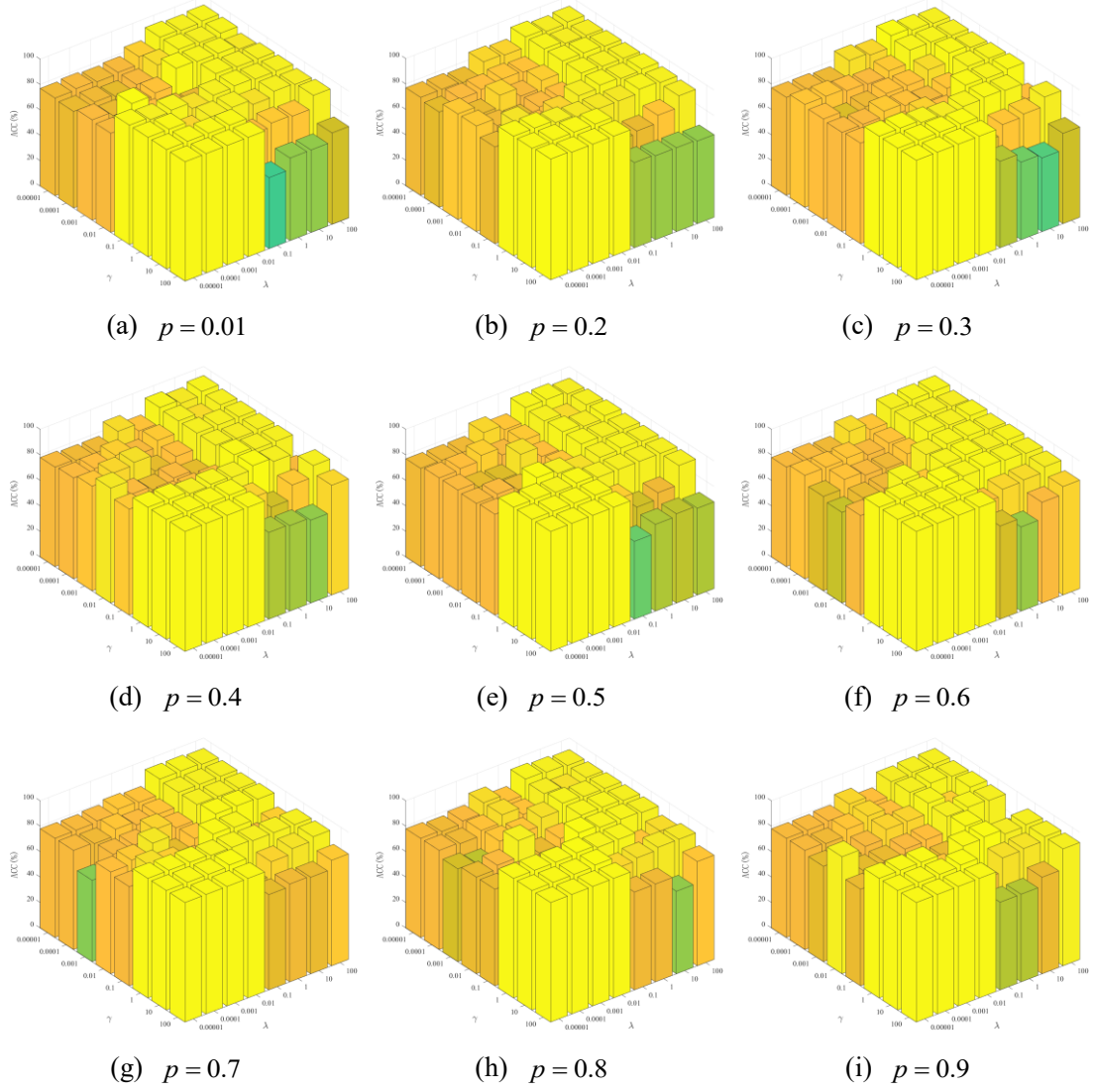


图 3-2 MSRCV1 数据集上的参数 γ , λ 和 p 对 ACC 的影响

Fig.3-2 The impact of parameters γ , λ and p on ACC in the MSRCV1 dataset.

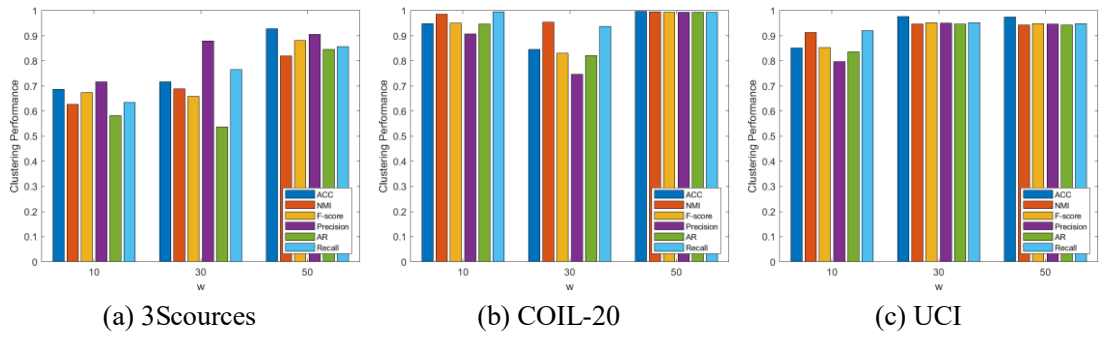


图 3-3 对于 3Ssources, COIL-20 和 UCI 数据集, 参数 w 对聚类性能的影响

Fig.3-3 For 3Ssources, COIL-20, and UCI datasets, the impact of parameters w on clustering performance.

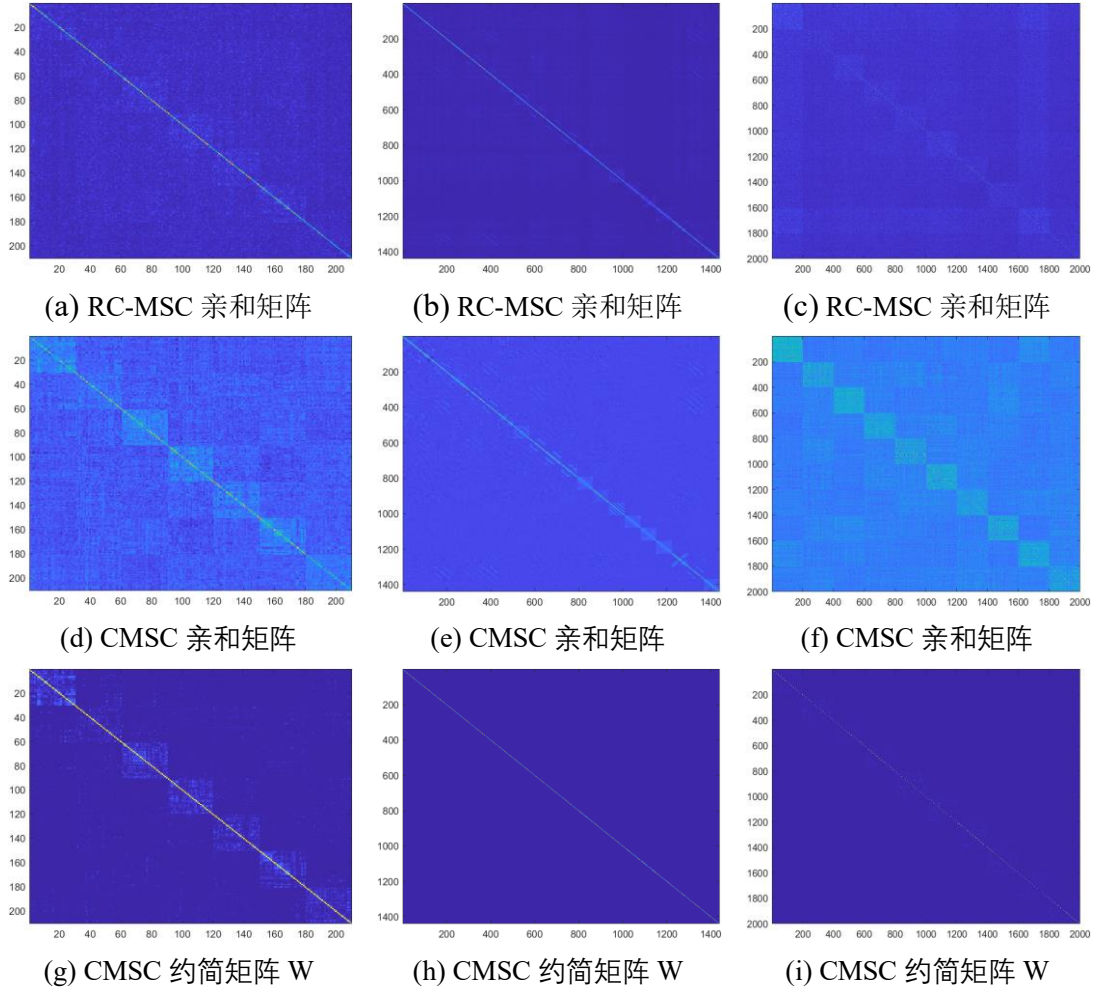


图 3-4 在 3Sources, COIL-20 和 UCI 数据集上的亲和矩阵可视化。(a), (d)和(g) 3Sources. (b), (e)和(h) COIL-20. (c), (f)和(i) UCI.

Fig.3-4 Visualization of affinity matrices on the 3Sources, COIL-20, and UCI datasets. (a), (d) and (g) 3Sources. (b), (e) and (h) COIL-20. (c), (f) and (i) UCI.

3.2.6 收敛性分析

本节绘制了所有数据集的迭代误差曲线，从实验角度证明了 CMSC 的收敛性，实验结果见图 3-5。重建误差定义为：

$$Error = \frac{1}{V} \sum_{v=1}^V \|X^v - F^v C H^{v^T}\|_{\infty} \quad (3.22)$$

从图 3-5 中的迭代曲线可以看出，在经过大约 15 次迭代后，误差下降到几乎为 0，这表明 CMSC 在一定次数的迭代后开始趋于稳定并收敛。实验结果表明，CMSC 算法具有优异的收敛性能。

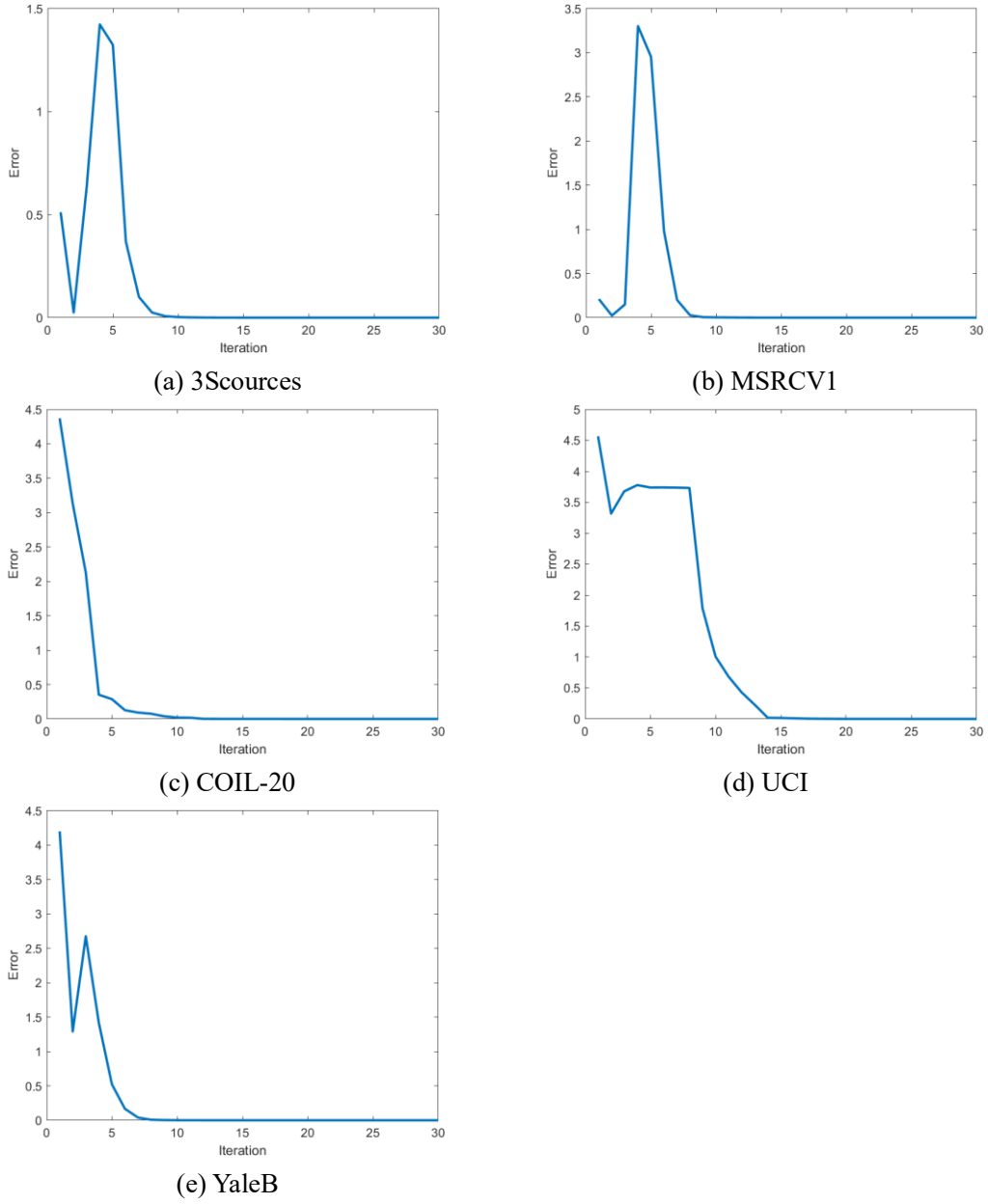


图 3-5 CMSC 在所有数据集上的收敛曲线

Fig.3-5 Convergence curves of CMSC on all datasets

3.3 本章小结

本章提出了一种新的 MSC 方法，即 CMSC。该方法构建了子空间学习与图学习的联合优化框架，以捕获视图的一致性和局部信息。此外，引入秩一致性约束和 Schatten P-范数正则化策略，实现对原始一致性秩信息的精确逼近。为进一步增强表征能力，设计了阈值选择和融合策略来提取更全面的样本信息。实验结果表明，该方法在五个基准数据集上性能对比、参数敏感性分析、可视化展示和收敛性验证均展现出显著优势，证实了 CMSC 具有优秀的聚类性能。

第四章 增强张量 Schatten P-范数的多视图子空间聚类

子空间聚类因其出色的聚类能力而被广泛使用。在子空间聚类框架中，稀疏子空间聚类（SSC）^[56]与低秩表示（LRR）^[57]作为代表性算法，主要通过单视图数据建模揭示潜在子空间结构。然而，单视图学习难以应对多源异构数据场景，其聚类性能易受噪声干扰、异常值影响以及复杂数据分布的多重影响。

针对单视图学习在复杂数据场景下的局限性，MSC 通过融合跨视图局部结构信息成为研究热点。其核心在于整合多源异构数据的结构特征，通过协同表征学习提升聚类性能。例如，Guo^[58]提出了一种凸表示 MISC 方法，该方法通过构建共识矩阵，来确保视图的一致性信息。Wang 等人^[59]提出将稀疏和低秩约束相结合，通过多重正则化约束策略来探索视图的有效信息。

随着研究的深入，MSC 方法逐渐从传统的矩阵建模向张量分析范式演进，以更充分地捕捉视图间的高阶耦合关系。例如，Zhang 等人^[35]将多视图系数矩阵视为张量的横向切片，并使用 TNN 最小化策略实现视图间高阶信息的有效提取。Xie 等人^[36]进一步提出了基于张量奇异值分解的 MSC 方法。通过将多视图系数矩阵拼接为张量并施加 TNN 约束，实现了视图间高阶特征的联合学习，并结合谱聚类获得聚类结果。

然而，上述 MSC 方法大多采用 $l_{2,1}$ -范数来约束噪声信息，这一假设仅适用于特定噪声分布，难以准确刻画现实场景中复杂多样的噪声特性。此外，现有研究表明^[37]，较大的奇异值往往包含着数据中最为重要的结构信息，而较小的奇异值通常是由噪声数据组成的。平等地对待所有奇异值信息，会忽略矩阵先验信息对聚类性能的影响。

为了解决上述问题，本章提出了一种增强张量 Schatten P-范数的多视图子空间聚类算法（ETSPMSC）。具体来说，该算法首先对噪声数据进行建模，通过同时考虑数据中拉普拉斯噪声（ l_1 -范数表示损失）和高斯噪声（ $l_{2,1}$ -范数表示损失），有效地去除了数据中的噪声污染，得到更为干净的张量结构。随后，对去噪后的

张量施加加权张量 Schatten P-范数，不仅更逼近张量的原始信息，还充分考虑到了奇异值对聚类性能的贡献。该方法框架图如图 3-1 所示。

ETSPMSC 的贡献如下：

(1) 该方法将张量去噪模型和加权张量 Schatten P-范数整合到统一框架中，不仅实现对复杂数据的有效分析，还对不同奇异值赋予不同的权重，从而突出数据中显著的结构特征。

(2) ETSPMSC 通过引入马尔可夫链表示学习，有效降低算法的计算复杂度。

(3) 设计了一种基于 ADMM 方法的优化策略，确保目标函数的高效求解。

(4) 在五个基准数据集上的实验结果表明，ETSPMSC 优于其他十种最先进的算法。

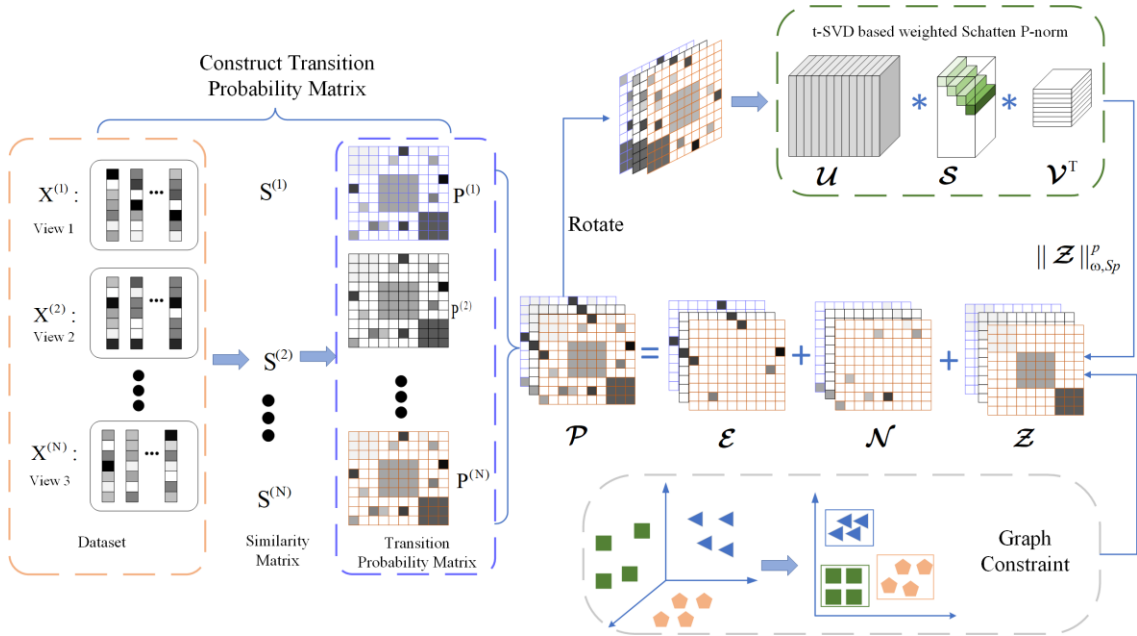


图 4-1. ETSPMSC 框架示意图

Fig.4-1 ETSPMSC algorithm framework

4.1 增强张量 Schatten P-范数的多视图子空间聚类

4.1.1 ETSPMSC 模型构建

在基于马尔可夫链的 MSC 框架中，首先构造相似性矩阵 $S^v \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ，并通过 $P^v = D^{v-1} S^v$ 构造概率转移矩阵 P^v ，其中 D^v 是对角矩阵， $D_{ii}^v = \sum_j S_{ij}^v$ 。为处理视

图中的冗余信息，将概率转移矩阵 P^v 分解为两个部分：共享概率矩阵 Z 和误差矩阵 E^v 。同时，对 Z 施加低秩约束，其公式如下所示：

$$\min_{Z, E^v} \|Z\|_* + \lambda \sum_{v=1}^V \|E^v\|_{2,1}, \quad s.t. P^v = Z + E^v \quad (4.1)$$

在此基础上，将式(4.1)拓展至张量学习中，以探索视图之间的高阶相关性。此外，式(4.1)不能充分去除数据中的噪声信息。为此，我们构建了一个去噪模型，更好地表示噪声信息。与仅考虑拉普拉斯噪声的张量低秩表示方法不同，我们同时考虑了拉普拉斯和高斯噪声，来更准确地揭示样本张量的子空间结构：

$$\min_{Z, \mathcal{E}, \mathcal{N}} \|Z\|_{TNN} + \lambda_1 \|\mathcal{E}\|_{2,1} + \lambda_2 \|\mathcal{N}\|_1 \quad s.t. \mathcal{P} = Z + \mathcal{E} + \mathcal{N} \quad (4.2)$$

其中，其中 $\mathcal{E}$ 表示高斯噪声张量， $\mathcal{N}$ 表示稀疏噪声张量（拉普拉斯噪声张量）， Z 表示概率张量， $\mathcal{P}$ 为概率转移张量。

此外，使用加权张量 Schatten P-范数代替 TNN，能够更好地学习视图的先验知识。并通过流形学习来保持概率矩阵的整体结构：

$$\begin{aligned} \min_{Z, \mathcal{E}, \mathcal{N}} & \|Z\|_{\omega, S_p}^p + \lambda_1 \|\mathcal{E}\|_{2,1} + \lambda_2 \|\mathcal{N}\|_1 + \lambda_3 \sum_{v=1}^V \text{tr}(Z^v L^v Z^{v^T}) \\ s.t. & \mathcal{P} = Z + \mathcal{E} + \mathcal{N} \end{aligned} \quad (4.3)$$

4.1.2 ETSPMSC 的优化

为简化 Z 的求解过程，引入辅助张量 $\mathcal{T}$ ，式(4.3)可等价转化为如下形式：

$$\begin{aligned} \min_{Z, \mathcal{E}, \mathcal{N}, \mathcal{T}} & \|\mathcal{T}\|_{\omega, S_p}^p + \lambda_1 \|\mathcal{E}\|_{2,1} + \lambda_2 \|\mathcal{N}\|_1 + \lambda_3 \sum_{v=1}^V \text{tr}(Z^v L^v Z^{v^T}) \\ s.t. & \mathcal{P} = Z + \mathcal{E} + \mathcal{N}, \mathcal{T} = Z \end{aligned} \quad (4.4)$$

由于式(4.4)是非凸的，可以采用 ADMM 进行求解，具体公式为：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(Z, \mathcal{T}, \mathcal{E}, \mathcal{N}) = & \|\mathcal{T}\|_{\omega, S_p}^p + \lambda_1 \|\mathcal{E}\|_{2,1} + \lambda_2 \|\mathcal{N}\|_1 \\ & + \lambda_3 \sum_{v=1}^V \text{tr}(Z^v L^v Z^{v^T}) + \langle C, \mathcal{P} - Z - \mathcal{E} - \mathcal{N} \rangle \\ & + \langle A, Z - \mathcal{T} \rangle + \frac{\mu}{2} \|\mathcal{P} - Z - \mathcal{E} - \mathcal{N}\|_F^2 + \frac{\mu}{2} \|Z - \mathcal{T}\|_F^2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

其中, μ 是惩罚参数, $\mathcal{C}$ 和 Λ 是拉格朗日乘子。使用 ADMM 更新 $\mathcal{Z}, \mathcal{T}, \mathcal{E}$ 和 $\mathcal{N}$, 即固定其他无关变量, 依次更新单个变量。

(1) 更新 $\mathcal{Z}$

在固定其他变量后, 对 $\mathcal{Z}$ 进行更新, 式 (4.5) 变成如下形式:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{k+1} = \arg \min_{\mathcal{Z}} \mathcal{L}(\mathcal{Z}, \mathcal{T}, \mathcal{E}, \mathcal{N}; \mathcal{C}, \Lambda, \mu) = \arg \min_{\mathcal{Z}} \lambda_3 \sum_{v=1}^V \text{tr}(\mathcal{Z}^v \mathcal{L}^v \mathcal{Z}^{v^T}) \\ + \frac{\mu}{2} \|\mathcal{P} - \mathcal{Z} - \mathcal{E} - \mathcal{N} + \frac{\mathcal{C}}{\mu}\|_F^2 + \frac{\mu}{2} \|\mathcal{Z} - \mathcal{T} + \frac{\Lambda}{\mu}\|_F^2 \end{aligned} \quad (4.6)$$

对 $\mathcal{Z}^v$ 求偏导后, 并令其为 0, 可以得到闭式解:

$$\mathcal{Z}_{k+1}^v = (\mathcal{A}^v + \mathcal{B}^v) \left(\frac{\lambda_3}{\mu} (\mathcal{L}^v + \mathcal{L}^{v^T}) + 2\mathcal{I} \right)^{-1} \quad (4.7)$$

其中, $\mathcal{A}^v = \mathcal{P}^v - \mathcal{E}^v - \mathcal{N}^v + \frac{\mathcal{C}^v}{\mu}$ 和 $\mathcal{B}^v = \mathcal{T}^v - \frac{\Lambda^v}{\mu}$ 。

(2) 更新 $\mathcal{T}$

在固定其他变量后, 对 $\mathcal{T}$ 进行更新, 式 (4.5) 变成如下形式:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{k+1} &= \arg \min_{\mathcal{T}} \mathcal{L}(\mathcal{Z}, \mathcal{T}, \mathcal{E}, \mathcal{N}; \mathcal{C}, \Lambda, \mu), \\ &= \arg \min_{\mathcal{T}} \|\mathcal{T}\|_{\omega, S_p}^p + \langle \Lambda, \mathcal{Z} - \mathcal{T} \rangle + \frac{\mu}{2} \|\mathcal{Z} - \mathcal{T}\|_F^2 \\ &= \arg \min_{\mathcal{T}} \|\mathcal{T}\|_{\omega, S_p}^p + \frac{\mu}{2} \|\mathcal{Z} - \mathcal{T} + \frac{\Lambda}{\mu}\|_F^2 \end{aligned} \quad (4.8)$$

该问题难点在于求解加权张量 Schatten P-范数。可以通过文献^[60]进行求解:

$$\mathcal{T}_{k+1} = \Gamma_{\frac{1}{\mu}, n_3, \omega} \left(\mathcal{Z} + \frac{1}{\mu} \cdot \Lambda \right) \quad (4.9)$$

(3) 更新 $\mathcal{E}$

在固定其他变量后, 对 $\mathcal{E}$ 进行更新, 式 (4.5) 变成如下形式:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \arg \min_{\mathcal{E}} \mathcal{L}(\mathcal{Z}, \mathcal{T}, \mathcal{E}, \mathcal{N}; \mathcal{C}, \Lambda, \mu) \\ &= \arg \min_{\mathcal{E}} \lambda_1 \|\mathcal{E}\|_{2,1} + \frac{\mu}{2} \|\mathcal{E} - (\mathcal{P} - \mathcal{E} - \mathcal{N} + \frac{\mathcal{C}}{\mu})\|_F^2 \end{aligned} \quad (4.10)$$

根据文献^[45], 可得闭式解:

$$E_{:,i}^{k+1} = \begin{cases} \frac{\|D_{:,i}\|_2 - \frac{\lambda_1}{\mu}}{\|D_{:,i}\|_2} D_{:,i}, & \|D_{:,i}\|_2 > \frac{\lambda_1}{\mu} \\ 0, & otherwise \end{cases} \quad (4.11)$$

其中, $D = \mathcal{P} - \mathcal{E} - \mathcal{N} + \frac{\mathcal{C}}{\mu}$ 。

(4) 更新 $\mathcal{N}$

在固定其他变量后, 对 $\mathcal{N}$ 进行更新, 式 (4.5) 变成如下形式:

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \arg \min_{\mathcal{N}} \mathcal{L}(\mathcal{Z}, \mathcal{T}, \mathcal{E}, \mathcal{N}; \mathcal{C}, \Lambda, \mu), \\ &= \arg \min_{\mathcal{N}} \lambda_2 \|\mathcal{N}\|_1 + \frac{\mu}{2} \|\mathcal{N} - (\mathcal{P} - \mathcal{Z} - \mathcal{E} + \frac{\mathcal{C}}{\mu})\|_F^2 \end{aligned} \quad (4.12)$$

令 $\mathcal{G} = \mathcal{P} - \mathcal{Z} - \mathcal{E} + \frac{\mathcal{C}}{\mu}$ 。式 (4.12) 的解可以通过使用元素收缩算子 $\sum_n(\cdot)$ 来

获得:

$$\mathcal{N} = \sum_{\lambda_2/\mu}(\mathcal{G}) \quad (4.13)$$

(5) 更新 $\mathcal{C}, \Lambda$ 和 μ :

$$\begin{cases} \mathcal{C} = \mathcal{C} + \mu(\mathcal{P} - \mathcal{Z} - \mathcal{E} - \mathcal{N}) \\ \Lambda = \Lambda + \mu(\mathcal{Z} - \mathcal{J}) \\ \mu = \min(\rho * \mu, \mu_{\max}) \end{cases} \quad (4.14)$$

其中, $\rho = 2$ 以加速收敛。 $\mu_{\max}$ 表示惩罚参数的最大值。

4.1.3 算法复杂度分析

对于 ETSPMSC 算法, 其算法复杂度主要集中在 $\mathcal{Z}, \mathcal{E}, \mathcal{N}$ 和 $\mathcal{T}$ 这四个子问题的更新上。对于 $\mathcal{Z}$, 复杂度主要集中在矩阵求逆上, 其对于所有视图的复杂度为 $\mathcal{O}(VN^3)$ 。对于 $\mathcal{N}$, 其作用于所有视图的复杂度为 $\mathcal{O}(VN^2)$ 。 $\mathcal{E}$ 有闭式解, 其对所有视图的复杂度为 $\mathcal{O}(VN^2)$ 。对于 $\mathcal{T}$, 需要进行加权张量 Schatten P-范数最小化策略,

其对所有视图的复杂度为 $\mathcal{O}(VN^2 \log(VN) + V^2 N^2)$ 。考虑到迭代次数 K 与 $1 \leq V \leq \log(N) \leq N$ 总条件，总时间复杂度为 $\mathcal{O}(KVN^2(N + \log(VN)))$ 。

算法 2 总结了 ETSPMSC 的完整优化过程。

算法 2: ETSPMSC 算法优化

输入: 多视图数据 A^v , 可调参数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \omega$ 和 p

1. 初始化: $\mu_0 = 10^{-3}$, $\mu_{\max} = 10^{10}$, $\varepsilon = 10^{-7}$, $p = 2$, $\mathcal{Z} = \mathcal{E} = \mathcal{N} = \mathcal{C} = \mathbf{A} = \mathbf{T} = 0$,
2. **While not converged do:**
3. 根据式(4.7)更新 $\mathcal{Z}$;
4. 根据式(4.9)更新 $\mathbf{T}$;
5. 根据式(4.11)更新 $\mathcal{E}$;
6. 根据式(4.13)更新 $\mathcal{N}$;
7. 根据式(4.14)更新 $\mathcal{C}, \mathbf{A}$ 和 μ ;
8. 直到收敛: $\|\mathcal{P} - \mathcal{Z} - \mathcal{E} - \mathcal{N}\|_{\infty} < \varepsilon, \|\mathcal{Z} - \mathbf{T}\|_{\infty} < \varepsilon$
9. **end**

输出: 概率矩阵 Z^v

4.2 实验

4.2.1 实验数据集

为了验证 ETSPMSC 的性能，本章选取了五个不同的数据集，以下是这五个数据集的简要介绍：

BBCsport 和 BBC4view 数据集: 这两个数据集均采集自 BBC 新闻网站的体育新闻板块。其中，BBC4view 数据集包含 685 篇体育新闻文档，每篇文档提取了四种不同类型的特征；BBCsport 数据集则包含 544 篇体育新闻文档，每篇文档提取了两种特征表示。

COIL-20: 该数据集由 20 个类别，每个对象类别包含 72 幅图像，共计 1440 张灰度图像。实验提取了三种不同类型的特征（强度、LBP 和 Gabor）。

UCI: 该数据集包含 0-9 共 10 个类别的 2000 个手写数字样本。实验采用三种特征表示方法：像素平均值特征、傅里叶系数特征以及数据的形态特征。

Prokaryotic: 该数据集包含 551 种原核生物样本。实验提取了三类特征用于表征, 包括文本特征、基因报告特征和蛋白质组比较特征。

表 4-1 简要地总结了上述数据集的内容:

表 4-1 数据集简介

Table 4-1 Introduction to the datasets

数据集名称	样本数	类数	视图数
BBCsport	544	5	2
BBC4view	685	5	4
COIL-20	1440	20	3
UCI	2000	10	3
Prokaryotic	551	4	3

4.2.2 对比算法

为全面评估 ETSPMSC 算法的性能, 本研究选取了十种经典聚类算法作为对比基准。以下是对比算法的简要介绍:

(1) SSC^[56]: 通过稀疏约束对单视图数据进行聚类, 有效捕捉数据的稀疏结构。

(2) LRR^[57]: 利用低秩表示恢复原始数据的子空间结构, 从而更好地揭示数据的内在低秩特性。

(3) WTNM^[37]: 引入加权张量核范数, 以探索视图之间的高阶相关性, 增强多视图数据的表示能力。

(4) ETLMSC^[61]: 结合概率转移张量和稀疏约束, 深入挖掘视图信息, 提升多视图聚类性能。

(5) LT-MSC^[35]: 通过低秩张量约束增强和改进传统的 MSC, 进一步提升聚类效果。

(6) t-SVD-MSC^[36]: 结合张量奇异值分解, 学习高阶张量子空间, 有效处理高维多视图数据。

(7) HLR-MVS^[62]: 利用超图结构捕捉视图之间的相关性以及局部流形结构, 为多视图聚类提供更丰富的结构信息。

(8) RMSC^[63]: 借助马尔可夫链方法优化概率转移矩阵, 从而更好地建模数据之间的概率关系, 提升聚类性能。

(9) LSGMC^[64]: 采用对称约束和矩阵分解方法, 探索视图之间的一致性, 进一步优化多视图聚类结果。

(10) liAGLMC^[55]: 基于子空间学习方法构建视图结构, 并引入包容性诱导正则化器重建图结构, 提升多视图聚类的鲁棒性。

4.2.3 聚类性能比较

本节通过参数调优为所有对比算法选取了最优参数。表 4-2 展示了在五种基准数据集上的聚类性能对比结果, 其中粗体标记最优性能, 下划线标记次优性能。ETSPMSC 与其他十种算法的性能对比如下:

1) ETSPMSC 在所有数据集上均展现出显著的性能优势。具体而言: 在 BBCsport 数据集上实现零误差聚类。在 BBC4view 数据集上, ACC, NMI 和 F-Score 指标分别较次优方法 WTNNM 提升 2.7%, 5.6%和 5.0%。在 COIL-20 数据集上, 聚类指标较 LSGMC 平均提升约 3%。在 UCI 数据集上, 基于张量学习的方法整体表现优异。在 Prokaryotic 数据集上, 较同为马尔可夫链方法的 RMSC 在聚类指标上分别提升 4.9%, 22.3%和 9.5%。

2) ETSPMSC 优于 SSC、LRR 等单视图方法, 这得益于 MSC 算法能够更全面地利用不同视图之间的关联属性。

3) 相较于 RMSC、ELTMS 等马尔可夫链方法, ETSPMSC 通过双噪声建模(拉普拉斯+高斯)和流形正则化策略, 有效降低了复杂噪声干扰并保持了局部结构特征。

4) LSGMC 和 liAGLMC 是基于矩阵的方法, 不能充分探索视图间的高阶相关性。

5) ETSPMSC 相较于其他张量方法的性能优势主要源于其充分考虑到奇异值之间的显著差异, 以及通过 Schatten P-范数约束实现的系数矩阵对原始信息的精确逼近。

表 4-2 算法聚类性能比较

Table4-2 Comparison of clustering performance

数据集	方法	ACC	NMI	F-Score
BBCsport	SSR	61.95	56.59	62.40
	LRR	77.21	68.27	73.38
	WTNNM	<u>99.70</u>	<u>99.10</u>	<u>99.60</u>
	ETLMSC	98.10	98.99	98.97
	LT-MSC	72.43	59.54	67.80
	t-SVD-MSC	97.61	92.86	96.40
	HLR-MVS	97.43	91.58	94.92
	RMSC	61.39	49.94	53.32
	LSGMC	90.81	79.43	80.79
	IiAGLMC	96.87	89.96	93.77
	ETSPMSC	100.00	100.00	100.00
BBC4view	SSR	68.18	53.78	63.14
	LRR	61.46	39.90	57.03
	WTNNM	<u>96.35</u>	91.41	<u>93.43</u>
	ETLMSC	82.18	77.74	77.21
	LT-MSC	57.23	36.68	48.34
	t-SVD-MSC	89.92	84.13	83.68
	HLR-MVS	95.04	90.41	92.29
	RMSC	49.63	28.52	40.45
	LSGMC	85.49	<u>96.04</u>	84.28
	IiAGLMC	90.94	77.06	84.91
	ETSPMSC	98.98	96.58	98.15
COIL-20	SSR	65.97	87.78	65.00
	LRR	64.85	77.26	60.18
	WTNNM	83.47	89.70	82.44
	ETLMSC	89.72	95.75	89.40
	LT-MSC	64.72	75.49	57.86
	t-SVD-MSC	80.06	88.69	78.51
	HLR-MVS	85.56	90.85	84.61
	RMSC	68.75	89.44	66.88
	LSGMC	<u>92.92</u>	<u>98.27</u>	<u>93.93</u>
	IiAGLMC	80.83	89.63	78.78
	ETSPMSC	99.03	99.26	98.31
	SSR	67.15	68.12	63.00
	LRR	70.13	74.45	67.79
	WTNNM	91.28	95.47	91.82
	ETLMSC	95.65	95.32	94.49
	LT-MSC	71.05	61.70	57.85

UCI	t-SVD-MS	99.12	<u>98.90</u>	<u>99.20</u>
	HLR-MVS	<u>99.25</u>	98.11	98.50
	RMSC	80.40	77.55	73.03
	LSGMC	93.30	87.84	87.44
	liAGLMC	87.40	79.85	77.67
	ETSPMSC	99.80	99.48	99.60
Prokaryotic	SSR	51.72	8.63	48.34
	LRR	32.18	5.70	37.66
	WTNNM	54.44	19.38	43.85
	ETLMS	62.12	39.27	53.38
	LT-MS	40.83	15.93	36.08
	t-SVD-MS	52.26	21.41	40.85
	HLR-MVS	62.79	21.64	51.66
	RMSC	<u>68.05</u>	<u>39.39</u>	56.18
	LSGMC	65.70	28.84	<u>57.84</u>
	liAGLMC	65.33	36.45	56.65
	ETSPMSC	71.52	48.21	61.56

4.2.4 参数分析

ETSPMSC 方法涉及五个关键参数的优化,具体包括正则化参数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, Schatten P-范数参数 p 以及权重系数 ω 。各参数的调优范围如下: 正则化参数 λ_1, λ_2 和 λ_3 在离散值集[0.001, 0.005, 0.01, 0.03, 0.05, 0.1, 1, 10, 100]中进行选择; Schatten P-范数参数 p 在[0.1, 0.2, ..., 1]区间内以 0.1 为步长进行取值; 权重系数 ω 则在[0, 100]区间内取值。

图 4-2 是参数 λ_1, λ_2 和 λ_3 的参数敏感性分析,从图中能看出, ETSPMSC 在较大的参数变化范围内表现出稳定性。此外,图 4-3 显示了奇异值权重的选择对性能的影响,从中可以看出,当较大的奇异值缩放较少时,聚类性能往往更好。图 4-4 展示了不同 p 下聚类性能的影响,通过使用不同的 p 值进行缩放,可以使结果更接近原始秩函数。

对于 BBCsport, BBC4view, COIL-20, UCI 和 Prokaryotic 数据集,每个数据集中 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 和 p 的最优参数如下: (10,0.01,10,0.7), (0.1,0.001,1,0.6),

(0.001,0.005,0.1,0.6)，(0.03,0.001,100,0.9)和(0.03,0.001,100,1)。每个数据集的最佳参数 ω 为：[1,10], [0.1,1,10,100], [0.1,100,0.1], [1,1,1]和[1,0.1,10]。

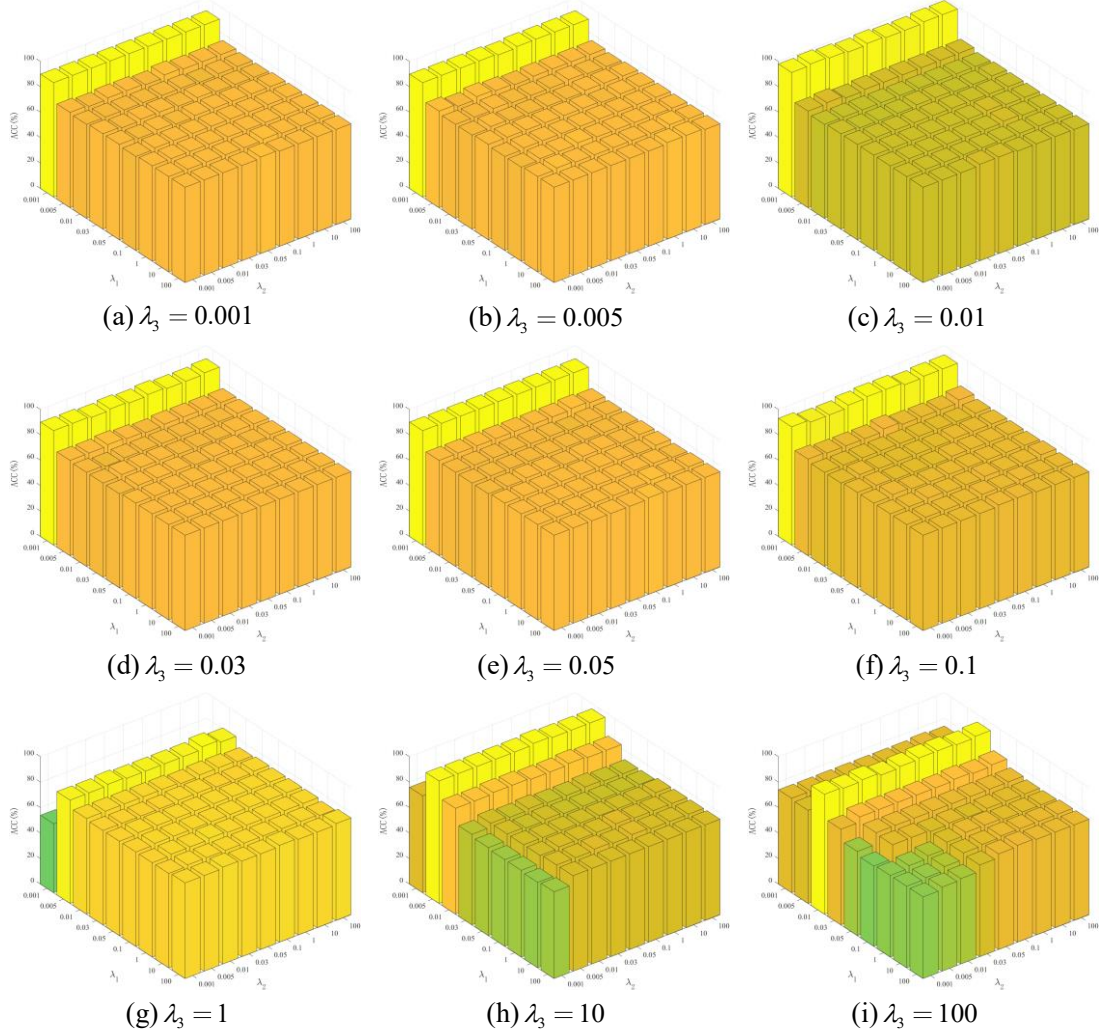


图 4-2 COIL-20 数据集上的参数 λ_1 ， λ_2 和 λ_3 对 ACC 的影响

Fig.4-2 The impact of parameters λ_1 ， λ_2 and λ_3 on ACC in the COIL-20 dataset

4.2.5 耗时分析

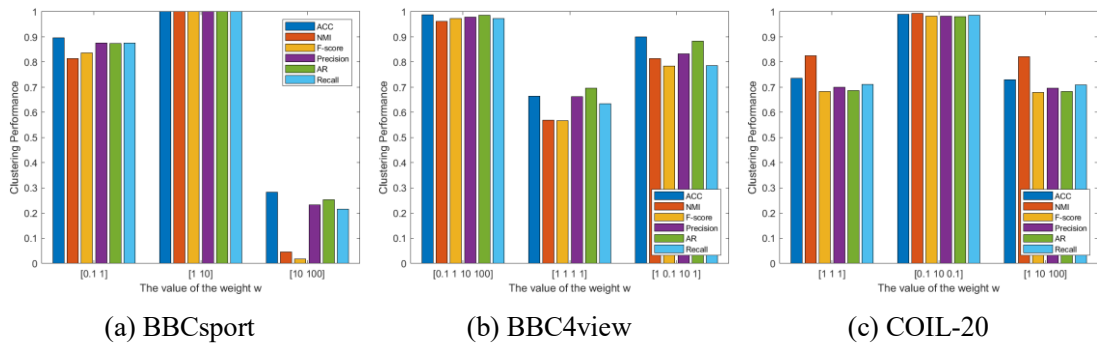
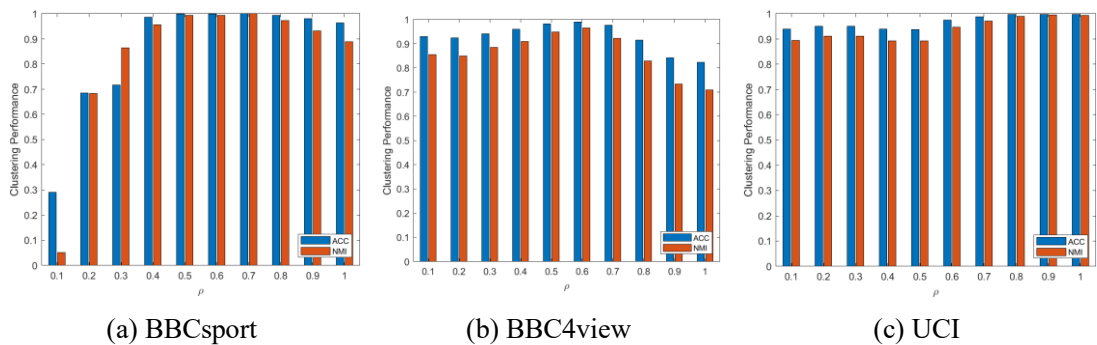
在实验中，我们将八种多视图聚类算法与 ETSPMSC 进行了对比，表 4-3 记录了它们在五个数据集上的运行时间。实验结果表明：首先，liAGLMC 在这些数据集中展现出最短的运行时间和最低的算法复杂度。其次，RMSC 由于其较低的计算复杂度，能够实现快速执行和较短的运行时间。此外，LT-MSC 通过矩阵核范数进行聚类，虽然算法复杂度较低，但其运行时间相对较长。相比之下，ETSPMSC 方法的运行时间处于中等水平，这主要是由于 ETSPMSC 需要处理更

多的数据并执行更多的计算步骤,从而导致运行时间增加。尽管如此,ETSPMSC 的算法复杂性与 t-SVD-MSC 相近,但其运行速度和效率显著优于 t-SVD-MSC。

表 4-3 多视图聚类算法的运行时间

Table4-3 The running time of multi view clustering algorithm

Method	BBCsport	BBC4view	COIL-20	UCI	Prokaryotic	Mean (time)
WTNNM	41.913	96.250	581.030	631.214	16.945	273.470
ETLMSC	1.541	30.26	15.120	48.338	14.310	21.913
LT-MSC	14.003	72.396	104.321	136.265	4.101	66.217
t-SVD-MSC	14.944	62.574	272.350	89.191	5.396	88.891
HLR-MVS	8.587	74.645	325.365	371.888	8.187	157.734
RMSC	5.354	8.355	31.634	76.859	3.355	25.111
LSGMC	2.125	33.570	42.120	66.446	8.112	30.474
IiAGLMC	0.514	1.557	3.836	6.258	0.356	2.504
ETSPMSC	4.199	12.998	103.895	81.984	3.208	41.256

图 4-3 权重参数 w 在 BBCsport, BBC4view 和 COIL-20 上聚类性能的影响Fig.4-3 The impact of weighting parameter w on clustering performance in the BBCsport, BBC4view and COIL-20 datasets图 4-4 参数 p 在 BBCsport, BBC4view 和 UCI 上对 ACC 和 NMI 的影响Fig.4-4 The impact of parameter p on ACC and NMI in the BBCsport, BBC4view and UCI datasets

4.2.6 收敛性分析

本章绘制了 ETSPMSC 算法在 COIL-20、UCI 和 Prokaryotic 这三个基准数据集上的收敛曲线。从图 4-5 可以看出，目标函数在第 20 次迭代前后能够快速趋近于零，这表明该算法能够在有限次迭代后进入稳定收敛阶段。

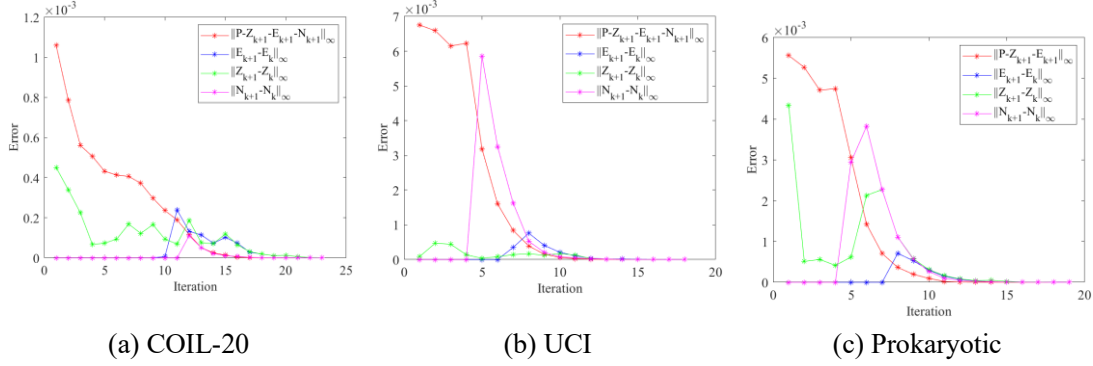


图 4-5 ETSPMSC 在 COIL-20, UCI 和 Prokaryotic 数据集上的收敛图

Fig.4-5 Convergence of ETSPMSC on COIL-20, UCI, and Prokaryotic datasets

4.2.7 消融研究

为了深入研究 ETSPMSC，本章节进行了一项消融研究，以探索每个正则化项对聚类性能的影响。具体来说，为了研究每个正则化分量对聚类性能的影响，通过从模型中删除某些正则化项来进行消融实验。这些术语包括高斯约束、拉普拉斯约束、加权张量 Schatten p-范数约束和图正则化。

(a) 高斯噪声约束的作用

为了验证该组件的有效性，去除了高斯噪声约束，该方法命名为 ETSPMSC-E。ETSPMSC-E 的目标公式如下：

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{Z}, \mathcal{E}, \mathcal{N}} & \|\mathcal{Z}\|_{\omega, S_p}^p + \lambda_2 \|\mathcal{E}\|_1 + \lambda_3 \sum_{v=1}^V \text{tr}(\mathcal{Z}^{(v)} L^{(v)} \mathcal{Z}^{(v)T}) \\ \text{s.t. } & \mathcal{P} = \mathcal{Z} + \mathcal{N} \end{aligned} \quad (4.15)$$

(b) 拉普拉斯噪声约束的作用

为了验证拉普拉斯噪声对消融实验中聚类性能的影响，去除了拉普拉斯噪声约束，该方法命名为 ETSPMSC -N。ETSPMSC -N 的目标方程如下：

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{Z}, \mathcal{E}, \mathcal{N}} & \|\mathcal{Z}\|_{\omega, S_p}^p + \lambda_1 \|\mathcal{E}\|_{2,1} + \lambda_3 \sum_{v=1}^V \text{tr}(\mathcal{Z}^{(v)} L^{(v)} \mathcal{Z}^{(v)T}) \\ \text{s.t. } & \mathcal{P} = \mathcal{Z} + \mathcal{E} \end{aligned} \quad (4.16)$$

(c) 加权张量 Schatten p-范数约束的作用

为了验证加权张量 Schatten p-范数约束的效果, 使用 TNN 约束代替加权张量 Schatten p-范数, 该方法命名为 ETSPMSC-p。ETSPMSC-p 的目标方程如下:

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{Z}, \mathcal{E}, \mathcal{N}} & \|\mathcal{Z}\|_{TNN} + \lambda_1 \|\mathcal{E}\|_{2,1} + \lambda_2 \|\mathcal{N}\|_1 + \lambda_3 \sum_{v=1}^V \text{tr}(\mathcal{Z}^{(v)} \mathcal{L}^{(v)} \mathcal{Z}^{(v)T}) \\ \text{s.t.} & \mathcal{P} = \mathcal{Z} + \mathcal{E} + \mathcal{N} \end{aligned} \quad (4.17)$$

(d) 图正则化项的作用

为了验证图正则化在模型中的作用, 同时保持其他变量不变, 本节删除了图正则化项, 该方法命名为 ETSPMSC-L。ETSPMSC-L 的目标函数公式如下:

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{Z}, \mathcal{E}, \mathcal{N}} & \|\mathcal{Z}\|_{\omega, S_p}^p + \lambda_1 \|\mathcal{E}\|_{2,1} + \lambda_2 \|\mathcal{N}\|_1 \\ \text{s.t.} & \mathcal{P} = \mathcal{Z} + \mathcal{E} + \mathcal{N} \end{aligned} \quad (4.18)$$

此外, 通过在五个基准数据集上详细评估了上述四种变体, 所有实验结果的 ACC 值记录在表 4-4 中。从表 4-4 可以看出, 图正则化对 BBCsport 和 BBC4view 数据集的聚类结果影响最大。就 COIL-20 数据集而言, 每个正则化项都有显著影响, 高斯噪声约束起着最突出的作用。由于 UCI 是一个相对简单的手写数据集, 数据包含的污染信息较少, 因此正则化项对它的影响相对较小。在 Prokaryotic 数据集上, 加权张量 Schatten p-范数约束对聚类性能的提升最为显著, 约为 10.8%。总体而言, ETSPMSC 的所有正则化项都可以有效地提高算法的聚类性能。

表 4-4 消融研究: ACC 中 ETSPMSC 及其消融变体的结果

Table4-4 Ablation Study: results of ETSPMSC and its ablation variants in ACC

	BBCsport	BBC4view	COIL-20	UCI	Prokaryotic
ETSPMSC	100.00	98.48	99.03	99.80	71.87
ETSPMSC-E	98.90	97.81	86.67	997.0	70.42
ETSPMSC-N	99.08	96.64	93.19	98.70	69.69
ETSPMSC-P	100.00	98.25	94.58	96.30	64.85
ETSPMSC-L	96.88	94.01	95.97	99.60	69.51

4.3 本章小结

本章节提出了一种增强张量 Schatten P-范数的多视图子空间聚类算法，旨在挖掘视图中的高阶信息。在该方法中，首先通过构建转移概率矩阵的三阶张量并对其进行旋转操作，以探索多视图数据中的高阶相关性。在此基础上，对张量进行奇异值加权与秩函数逼近，有效地学习视图的先验知识。同时，为了更有效去除样本噪声并获得更清晰的聚类张量，对噪声进行建模，有效地考虑了不同噪声类型对聚类性能的影响。此外，在五个数据集上进行了全面的实验评估，包括性能比较、参数分析、收敛性分析和运行时间对比，实验结果充分证明了 ETSPMSC 模型的优异的聚类性能。

第五章 基于信息融合的多视图子空间聚类

MSC 的核心在于通过跨视图学习视图间的一致性关联与互补性信息来优化聚类性能,这一目标常通过构建高阶张量,施加低秩约束等结构化学习方式实现。例如, Cai 等人^[65]提出了一种增强视图的自加权方法。通过整合所有原始矩阵,生成了一个增强视图矩阵,并将增强视图矩阵与原始矩阵同时进行自表示,生成系数矩阵。随后,将得到的系数矩阵堆叠成三阶张量,并使用低秩约束和自加权方法来学习不同视图之间的一致性信息。Zheng 等人^[43]提出了一种约束线性双分解 MSC 方法,旨在确保所有系数矩阵具有相同的聚类特性。Zhang 等人^[38]提出了一种两步亲和矩阵学习方法。通过同时进行子空间学习和图学习,探索了视图的一致性和局部结构信息,并采用了一种好邻居后处理方法来获得高质量的亲和矩阵。Wu 等人^[66]提出了一种多级特征选择方法。从全局层面导出拓扑矩阵,从视图内部导出局部几何结构,有效地利用了利用视图中的固有的一致性信息。

尽管上述方法在一定程度上捕获视图的全局结构信息,但它们更侧重于研究视图间的共享属性。在表征视图多样性方面,通常依赖于矩阵的自表示方法,这可能不足以学习跨视图多样性信息。此外,上述方法往往分别学习视图的一致性和多样性,未能从整体角度学习视图的结构信息。

针对上述问题,本章节提出了基于信息融合的多视图子空间聚类算法(IFMSC)。该方法可以在整体层面同时学习视图的一致性和多样性结构。具体流程图如图 5-1 所示。具体来说,IFMSC 通过自表示将各视图分解为一致性矩阵和多样性矩阵两部分。一方面,对一致性矩阵施加秩一致性约束,并将其分解为三因子矩阵形式,以保证聚类结构的一致性;另一方面,IFMSC 引入了 Hilbert-Schmidt 独立准则(HSIC),它可以学习视图之间的多样信息。在学习到视图的全局结构信息后,将共享一致性矩阵和多样性矩阵叠加成一个张量。并通过加权张量 Schatten P-范数约束,更逼近于矩阵的原始信息,从整体层面掌握视图间的全局结构。

IFMSC 的贡献如下所示:

(1) IFMSC 对所有一致性矩阵施加秩相等约束，以保证不同的一致性矩阵包含相同的样本信息。同时，该算法采用流形学习的方法来获取跨视图多样性信息。

(2) 通过将两种不同类型的矩阵集成到一个张量中，并利用加权张量 Schatten P-范数约束，更有助于促进视图信息的相互传播。

(3) 提出了一种 ALM 的优化框架，实现了目标函数的有效优化。

(4) 在六个基准数据集上进行实验，实验结果表明，IFMSC 优于其他七种最先进的算法。

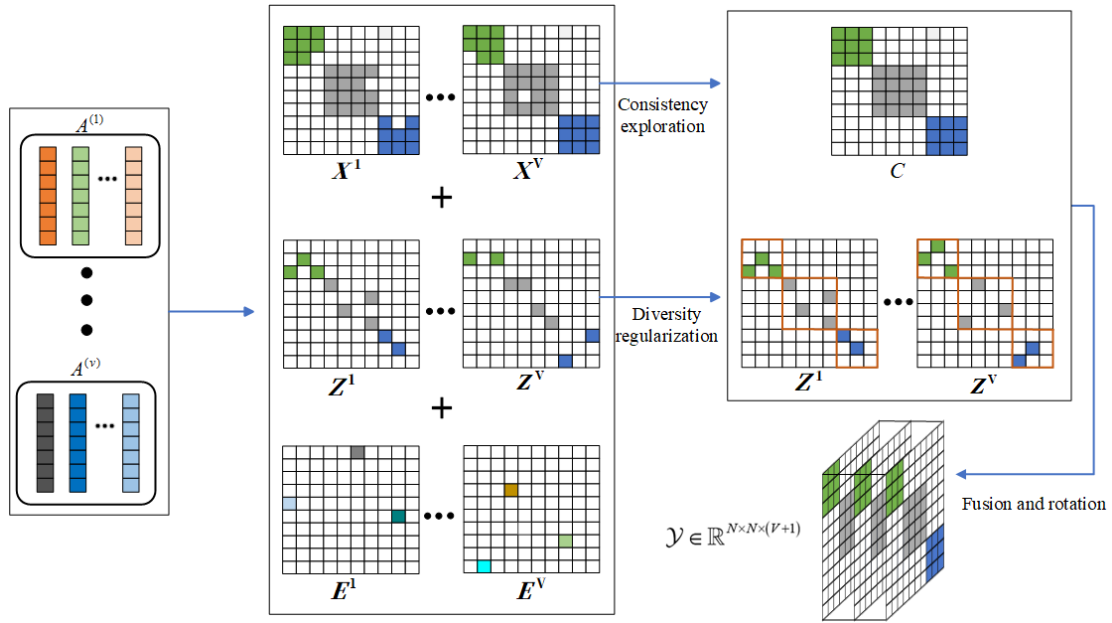


图 5-1. IFMSC 框架示意图

Fig. 5-1 IFMSC algorithm framework

5.1 基于信息融合的多视图子空间聚类

5.1.1 IFMSC 模型构建

在处理原始数据 $A^v \in R^{m \times n}$ 时，首先需要通过自表示将高维数据映射到低维子空间中，并得到系数矩阵 $X^v \in R^{n \times n}$ 。接着，进一步将系数矩阵分解为视图间一致性与多样性两部分矩阵。具体公式如下：

$$\begin{aligned} \min_{X^v, Z^v, E^v} \sum_{v=1}^V \|X^v\|_* + \alpha \sum_{v=1}^V \|E^v\|_{2,1} \\ s.t. \quad A^v = A^v (X^v + Z^v) + E^v \end{aligned} \quad (5.1)$$

其中 X^v 和 Z^v 分别用于学习视图间的一致性和多样性信息。

然而，在分析视图之间的固有 consistency 时，式 (5.1) 只生成了一致性矩阵，没有充分考虑视图间的一致性信息。视图间一致性反映了不同视图之间共享的基本属性，这意味着所有视图都应该具有相同的表示形式。为了更有效地利用视图间的一致信息，通过对矩阵 X^v 施加秩一致性约束，以确保所有一致性矩阵 X^v 具有相同的结构信息。具体公式如下：

$$\begin{aligned} \min_{X^v, Z^v, E^v, F^v, C, H^v} & \sum_{v=1}^V \|X^v\|_* + \alpha \sum_{v=1}^V \|E^v\|_{2,1} \\ \text{s.t. } & A^v = A^v (X^v + Z^v) + E^v, X^v = F^v C H^{v^T} \\ & F^{v^T} F^v = I, H^{v^T} H^v = I \end{aligned} \quad (5.2)$$

其中 F^v 和 $H^v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 表示一致性矩阵 X^v 的两个展开方向上的基向量。 $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 表示共享一致性矩阵，用以学习视图间的一致性信息。

此外，为了更好地捕获视图间的多样性信息，本文引入了 HSIC 特征表示。公式如下：

$$\begin{aligned} \min_{X^v, Z^v, E^v, F^v, C, H^v} & \sum_{v=1}^V \|X^v\|_* + \alpha \sum_{v=1}^V \|E^v\|_{2,1} + \beta \sum_{i=1, i \neq j}^V \text{HSIC}(Z^i, Z^j) \\ \text{s.t. } & A^v = A^v (X^v + Z^v) + E^v, X^v = F^v C H^{v^T} \\ & F^{v^T} F^v = I, H^{v^T} H^v = I \end{aligned} \quad (5.3)$$

式 (5.3) 是从矩阵层面学习视图间一致性和多样性结构信息，这两种结构学习是分开进行的。这不利于从整体角度学习视图之间的结构信息。为此，我们将共享一致性矩阵与多样性矩阵融合为一个整体，并将其表示为张量的形式。在此基础上，对张量施加加权张量 Schatten P-范数约束，能够更有效地学习视图间的结构特征：

$$\begin{aligned} \min_{X^v, Z^v, E^v, F^v, C, H^v, \mathcal{Y}} & \|\mathcal{Y}\|_{\omega, S_p}^p + \sum_{v=1}^V \|X^v\|_* + \alpha \sum_{v=1}^V \|E^v\|_{2,1} + \beta \sum_{i=1, i \neq j}^V \text{HSIC}(Z^i, Z^j) \\ \text{s.t. } & A^v = A^v (X^v + Z^v) + E^v, X^v = F^v C H^{v^T} \\ & F^{v^T} F^v = I, H^{v^T} H^v = I, \mathcal{Y} = \{Z^1, \dots, Z^V, C\} \end{aligned} \quad (5.4)$$

5.1.2 IFMSC 的优化

考虑到公式 (5.4) 是非凸的, 我们用 ALM 方法对其进行重构, 重构后的目标函数如下:

$$\begin{aligned}
 & L(X^v, Z^v, E^v, P^v, C, F^v, H^v, \mathcal{G}) \\
 &= \|\mathcal{G}\|_{\omega, S_p}^p + \sum_{v=1}^V \|P^v\|_* + \alpha \sum_{v=1}^V \|E^v\|_{2,1} + \beta \sum_{i=1, i \neq j}^V \text{HSIC}(Z^i, Z^j) \\
 &+ \langle Q_1^v, A^v - A^v X^v - A^v Z^v - E^v \rangle + \frac{\mu}{2} \|A^v - A^v X^v - A^v Z^v - E^v\|_F^2 \\
 &+ \langle Q_2^v, X^v - F^v C H^{v^T} \rangle + \frac{\mu}{2} \|X^v - F^v C H^{v^T}\|_F^2 \\
 &+ \langle Q_3, \mathcal{Y} - \mathcal{G} \rangle + \frac{\mu}{2} \|\mathcal{Y} - \mathcal{G}\|_F^2 + \langle Q_4, X^v - P^v \rangle + \frac{\mu}{2} \|X^v - P^v\|_F^2
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

其中 μ 是惩罚参数, Q_1^v , Q_2^v , Q_3 和 Q_4^v 是拉格朗日乘子。 $\mathcal{G}$ 和 P^v 分别是用于简化 $\mathcal{Y}$ 和 X^v 解的辅助变量。通过使用交替最小化策略分别更新 X^v , Z^v , E^v , P^v , C , F^v , H^v 和 $\mathcal{G}$, 即通过固定其他七个变量来单独更新目标变量。

(1) 更新 X^v

在固定其他变量后, 对 X^v 进行更新, 式 (5.5) 变成如下形式:

$$\begin{aligned}
 & \min_{X^v} \frac{\mu}{2} \left\| A^v - A^v X^v - A^v Z^v - E^v + \frac{Q_1^v}{\mu} \right\|_F^2 + \frac{\mu}{2} \left\| X^v - F^v C H^{v^T} + \frac{Q_2^v}{\mu} \right\|_F^2 \\
 & + \frac{\mu}{2} \left\| X^v - P^v + \frac{Q_4^v}{\mu} \right\|_F^2
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

直接对 X^v 求偏导并使其为零, 可以得到闭式解:

$$X^v = \left(\mu A^{v^T} A^v + 2\mu I \right)^{-1} \tilde{W}^v \tag{5.7}$$

其中 $\tilde{W}^v = A^{v^T} Q_1^v + \mu A^{v^T} A^v - \mu A^{v^T} A^v Z^v - \mu A^{v^T} E^v - Q_2^v + \mu F^v C H^{v^T} - Q_4^v + \mu P^v$, I 表示单位矩阵。

(2) 更新 Z^v

在固定其他变量后, 对 Z^v 进行更新, 式 (5.5) 变成如下形式:

$$\begin{aligned} \min_{Z^v} & \beta \sum_{i=1, i \neq j}^V HSIC(Z^i, Z^j) + \langle Q_3^v, Z^v - G^v \rangle + \frac{\mu}{2} \|Z^v - G^v\|_F^2 \\ & \langle Q_1^v, A^v - A^v X^v - A^v Z^v - E^v \rangle + \frac{\mu}{2} \|A^v - A^v X^v - A^v Z^v - E^v\|_F^2 \end{aligned} \quad (5.8)$$

通过直接求解 Z^v 的偏导数并使式 (5.8) 为 0, 可以得到以下方程:

$$T_A Z^v + Z^v T_B = T_C \quad (5.9)$$

其中 T_A , T_B 和 T_C 表示为:

$$\begin{aligned} T_A &= \mu A^{v^T} A^v + \mu I \\ T_B &= \beta K^T + \beta K \\ T_C &= A^{v^T} Q_1^v + \mu A^{v^T} A^v - \mu A^{v^T} A^v X^v - \mu A^{v^T} E^v - Q_3^v + \mu G^v \end{aligned} \quad (5.10)$$

其中, $K^i = Z^{i^T} Z^j$, $K = \sum_{i=1, j \neq i}^V L K^j L$ 。

(3) 更新 E^v

在固定其他变量后, 对 E^v 进行更新, 式 (5.5) 变成如下形式:

$$\min_{E^v} \alpha \sum_{v=1}^V \|E^v\|_{2,1} + \frac{\mu}{2} \left\| A^v - A^v X^v - A^v Z^v - E^v + \frac{Q_1^v}{\mu} \right\|_F^2 \quad (5.11)$$

令 $\Phi = A^v - A^v X^v - A^v Z^v + (Q_1^v / \mu)$, 可以得到闭式解:

$$[E^v]_{:,i} = \begin{cases} \frac{\|\Phi_{:,i}\|_2 - \frac{\alpha}{\mu}}{\|\Phi_{:,i}\|_2} \Phi_{:,i}, & \|\Phi_{:,i}\|_2 > \frac{\alpha}{\mu} \\ 0, & otherwise \end{cases} \quad (5.12)$$

(4) 更新 P^v

在固定其他变量后, 对 P^v 进行更新, 式 (5.5) 变成如下形式:

$$\min_{P^v} \sum_{v=1}^V \|P^v\|_* + \frac{\mu}{2} \left\| X^v - P^v + \frac{Q_4^v}{\mu} \right\|_F^2 \quad (5.13)$$

式 (5.13) 可以通过文献^[57]得到。

(5) 更新 C

在固定其他变量后, 对 C 进行更新, 式 (5.5) 变成如下形式:

$$\min_C \frac{\mu}{2} \left\| X^v - F^v C H^{v^T} + \frac{Q_2^v}{\mu} \right\|_F^2 + \frac{\mu}{2} \left\| C - G^{V+1} + \frac{Q_3^{V+1}}{\mu} \right\|_F^2 \quad (5.14)$$

对于式 (5.14)，需要取参数 C 的偏导数并使其为零：

$$C = \frac{1}{2\mu} \left(\sum_{v=1}^V \left(F^{v^T} Q_2^v H^v + \mu F^{v^T} X^v H^v \right) + \mu G^{V+1} - Q_3^{V+1} \right) \quad (5.15)$$

(6) 更新 F^v 和 H^v

先更新 F^v ，在固定其他变量后，式 (5.5) 变成如下形式：

$$\min_{F^{v^T} \substack{F^v=L, R^{v^T} \\ R^v=L}} \left\| X^v - F^v C H^{v^T} + \frac{Q_2^v}{\mu} \right\|_F^2 \quad (5.16)$$

这是一个正交的 Procrustes 问题，其封闭形式解为^[48]：

$$F^v = \tilde{N}^v \tilde{M}^{v^T} \quad (5.17)$$

其中， $\tilde{N}^v$ 和 $\tilde{M}^v$ 分别表示 F^v 经过奇异值分解后得到的左奇异值矩阵和右奇异值矩阵。

H^v 的求解与 F^v 相似，可以得到以下形式：

$$H^v = \hat{N}^v \hat{M}^{v^T} \quad (5.18)$$

(7) 更新 $\mathcal{G}$

在固定其他变量后，对 $\mathcal{G}$ 进行更新，式 (5.5) 变成如下形式：

$$\min_{\mathcal{G}} \left\| \mathcal{G} \right\|_{\omega, S_p}^p + \frac{\mu}{2} \left\| \mathcal{Y} - \mathcal{G} + \frac{Q_3}{\mu} \right\|_F^2 \quad (5.19)$$

其闭式解可以通过文献^[60]得到。

(8) 更新 Q_1^v , Q_2^v , Q_3 , Q_4^v 和 μ ：

$$\begin{cases} Q_1^v = Q_1^v + \mu(A^v - A^v X^v - A^v Z^v - E^v) \\ Q_2^v = Q_2^v + \mu(X^v - F^v C H^{v^T}) \\ Q_3 = Q_3 + \mu(\mathcal{Y} - \mathcal{G}) \\ Q_4^v = Q_4^v + \mu(X^v - P^v) \\ \mu = \min(\eta\mu, \mu_{\max}) \end{cases} \quad (5.20)$$

算法 3 总结了 IFMSC 的完整优化过程。

算法 3: IFMSC 算法优化

输入: 多视图数据 $\{A^{(v)}\}$, 可调参数 α, β, p 和 ω

1. 初始化: $Q_1^v = Q_2^v = Q_3 = Q_4^v = X^v = Z^v = F^v = H^v = P^v = \mathcal{Y} = C = 0, E^v = 0, \mu = 10^{-5}, \mu_{\max} = 10^{10}, \eta = 2, \varepsilon = 10^{-4}$.
2. **While not converged do**
3. 根据式(5.7)更新 X^v ;
4. 根据式(5.10)更新 Z^v ;
5. 根据式(5.12)更新 E^v ;
6. 根据式(5.13)更新 P^v ;
7. 根据式(5.15)更新 C ;
8. 根据式(5.17)更新 F^v ;
9. 根据式(5.18)更新 H^v ;
10. 根据式(5.19)更新 $\mathcal{G}$;
11. 根据式(5.20)更新 Q_1^v, Q_2^v, Q_3, Q_4^v 和 μ ;
12. 直到收敛: $\|A^v - A^v X^v - A^v Z^v - E^v\|_F^2 < \varepsilon, \|X^v - F^v C H^{v^T}\|_F^2 < \varepsilon;$
 $\|\mathcal{Y} - \mathcal{G}\|_F^2 < \varepsilon, \|X^v - P^v\|_F^2 < \varepsilon$

End

输出: 聚类结果

5.1.3 算法复杂度分析

IFMSC 算法的算法更新复杂度主要由七个子问题构成。对于 X^v , 其对所有视图的复杂度为 $\mathcal{O}(Vn^3)$ 。对于 Z^v , 采用 Sylvester 方程进行来更新, 其复杂度为 $\mathcal{O}(Vn^3)$ 。 E^v 有一个闭式解更新方法, 其对所有视图的复杂度为 $\mathcal{O}(Vmn^2 + Vmn)$ 。对于 P^v , 需要通过 Singular Value Threshold (SVT) 方法解决, 其对所有视图的复杂度为 $\mathcal{O}(Vn^3)$ 。对于 C , 需要通过 SVD 方法来进行更新, 其复杂度为 $\mathcal{O}(n^3)$ 。更新 F^v 与 H^v 是相似的, 均需要 $\mathcal{O}(Vn^3)$ 的复杂度。对于 $\mathcal{G}$, 其算法复杂度为需要

进行加权 Schatten P-范数最小化策略，其对所有视图的复杂度为 $\mathcal{O}(Vn^2 \log(Vn) + V^2 n^2)$ 。由于视图数量 $V \ll \min(m, n)$ ，可省去。IFMSC 算法的总复杂度为 $\mathcal{O}(n^3 + mn^2 + mn)$ 。

5.2 实验

5.2.1 实验数据集

BBCsport 和 BBC4view 数据集：均源自 BBC 新闻平台，分别包含 544 和 685 个体育新闻主题文档。BBCsport 对每个文档提取两种特征视图，而 BBC4view 则构建了四种特征视图。

ORL 数据集：包含 40 个不同个体的面部图像，每个个体提供 10 张不同特征的照片，共计 400 张图像。数据集提取了 LBP 纹理、灰度强度、Gabor 滤波三种特征视图。

UCI 数据集：该数据集涵盖了从 0 到 9 的 10 个数字类别，共有 2000 个数字图像样本。为了满足多视图数据，在三个视图中选择了三个不同的特征（像素平均值、傅里叶系数和形态特征）。

Yale 数据集：包含 15 位受试者在 11 种不同光照条件下的 165 张面部图像，每受试者样本数为 11 张，重点考察光照变化下的特征表达。

NGs 数据集：该数据集包含 500 个新闻文本样本和关于三种不同视图的信息。

表 5-1 简要地总结了上述数据集的内容：

表 5-1 数据集简介
Table 5-1 Introduction to the dataset

数据集名称	样本数	类数	视图数
BBCsport	544	5	2
BBC4view	685	5	4
ORL	400	40	3
UCI	2000	10	3
Yale	165	15	3
NGs	500	5	3

5.2.2 对比算法

本研究将 IFMSC 与以下方法进行了比较：

(1) SMVSC^[54]：通过锚点选择与图学习的协同优化，构建统一表征框架，更准确地表征数据的真实分布。

(2) LSGMC^[64]：基于对称约束的矩阵分解框架，实现视图间潜在一致性的挖掘。

(3) SL-MVGC^[15]：融合样本特征与图拓扑学习，构建统一的多视图流形表征模型。

(4) ETLMSC^[61]：构建概率转移张量模型，结合稀疏正则化，有效捕获跨视图高阶特征。

(5) DV-MSC^[11]：将数据信息分为两个维度，从低维度到高维度分别探索视图互补性和一致性信息。

(6) LT-MSC^[35]：基于张量核范数约束的高阶关联，深入挖掘多视图数据的高阶潜在信息。

(7) t-SVD-MSC^[36]：引入 t-SVD 框架，提供了一种更直观的方法来学习视图之间的高阶信息。

5.2.3 聚类性能比较

1) 在实验阶段，通过为每种算法选择最佳参数并分别运行 10 次以计算其平均值和标准差。如表 5-2 所示，IFMSC 算法与另外七种算法的聚类性能对比结果表明，IFMSC 在聚类性能上具有显著优势（最佳结果以粗体显示，次优结果以下划线标注）。

2) CHMSCH 在所有数据集上均展现出最优聚类性能，其各项指标均显著优于对比算法。值得注意的是，在 BBCsport 和 NG 数据集上，CHMSCH 在所有聚类性能指标上都达到了 100%，表明模型在这两类数据集上实现了零错误分类。在 ORL 和 UCI 数据集上，CHMSCH 的聚类性能接近 t-SVD-MSC、DV-MSC 和 ETLMSC，它们都取得了优异的性能。这可能是由于这些数据集中的信息特征有限，这使得聚类任务相对容易。Yale 数据集是在各种光照和其他条件下收集的人脸数据集，包含更多的噪声信息。尽管如此，CHMSCH 算法在这个数据集上仍然表现出色，比第二好的 DV-MSC 算法分别高出 14.09%，10.06%和 18.52%。

BBC4view 数据集来源于 BBC 新闻网站, CHMSCH 在该数据集上也取得了出色的结果, 比次佳的 t-SVD-MSVC 算法提高了约 4%。

3) 基于矩阵的 SMVSC 和 LSGMC 聚类算法主要在矩阵层面探索视图之间的一致性信息, 但未能充分考虑视图之间的高阶信息, 导致大多数数据集的聚类性能有限。SL-MVGC 是一种基于拓扑流形和样本特征学习相结合的图学习方法, 其聚类性能不足。这是因为它主要侧重于研究视图内的局部流形信息, 而忽略了视图之间的多样性和一致性信息。

4) DV-MSVC 是最近提出的一种双层视图学习 MSVC 方法, 它从低阶到高阶学习视图的全局结构信息, 在大多数数据集上表现优异。然而, 与 IFMSVC 相比, 它仍然存在一些局限性, 因为它单独学习全局信息, 而不是从整体层面探索视图的结构特征。

5) 虽然 t-SVD-MSVC、ETLMSVC 使用 TNN 来学习视图的高阶信息结构, 但它们未能充分考虑到原始视图的先验知识, 导致聚类性能受限。

6) CHMSCH 不仅通过加权张量 Schatten P-范数约束学习视图之间的高阶信息, 而且从整体的角度充分考虑了视图之间的多样性和一致性结构, 并在实验过程中获得了最佳的实验结果。

5.2.4 亲和矩阵的可视化

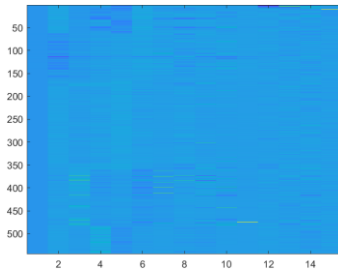
为了更直观地展示亲和矩阵的块对角结构特征, 本文在 BBCsport 数据集上对所有算法的亲和矩阵进行了可视化实验, 结果如图 5-2 所示。从图中可以清晰地观察到, IFMSVC 生成的亲和矩阵具有最显著的块对角结构, 其类内连接紧密, 而其他算法的亲和矩阵的块对角结构均不够突出。这也证明了从整体层面探索视图的结构信息, 能够有效地提升算法的性能。

表 5-2 算法聚类性能比较

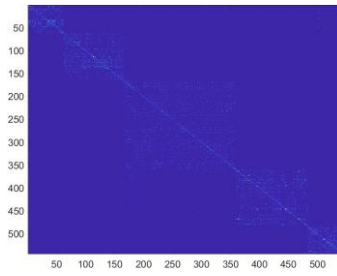
Table5-2 Comparison of clustering performance

数据集	方法	ACC	NMI	F-Score
BBCsport	SMVSC	87.68±0.00	70.72±0.00	77.89±0.00
	LSGMC	97.61±0.00	91.71±0.00	95.25±0.00
	SL-MVGC	76.45±0.05	63.29±0.07	63.10±0.08
	ETLMSC	98.90±0.00	96.88±0.00	98.50±0.00
	DV-MSC	<u>99.63±0.00</u>	<u>98.84±0.00</u>	<u>99.48±0.00</u>
	LT-MSC	56.38±5.07	32.23±4.47	49.05±3.09
	t-SVD-MSC	97.06±0.00	90.49±0.00	93.71±0.00
	IFMSC	100.00±0.00	100.00±0.00	100.00±0.00
BBC4view	SMVSC	87.59±0.00	69.39±0.00	78.55±0.00
	LSGMC	83.80±1.76	<u>92.75±0.53</u>	78.60±1.52
	SL-MVGC	49.53±0.09	23.89±0.10	38.89±0.09
	ETLMSC	66.23±0.07	54.12±0.05	53.38±0.09
	DV-MSC	<u>96.50±0.00</u>	88.58±0.00	93.40±0.00
	LT-MSC	91.09±0.00	75.66±0.00	84.04±0.00
	t-SVD-MSC	96.35±0.00	92.33±0.00	<u>93.44±0.00</u>
	IFMSC	99.42±0.00	97.92±0.00	99.05±0.00
ORL	SMVSC	80.75±0.00	92.04±0.00	76.61±0.00
	LSGMC	79.80±3.15	93.22±0.69	76.39±3.16
	SL-MVGC	81.95±0.77	90.17±0.51	75.07±1.07
	ETLMSC	95.03±1.76	98.68±0.57	94.79±1.91
	DV-MSC	<u>97.10±1.90</u>	99.36±0.47	96.85±2.42
	LT-MSC	81.30±1.76	91.51±1.23	75.78±2.95
	t-SVD-MSC	97.05±1.08	<u>99.40±0.21</u>	<u>97.07±1.04</u>
	IFMSC	97.20±1.50	99.45±0.29	97.33±1.41
UCI	SMVSC	92.40±0.00	85.55±0.00	85.62±0.00
	LSGMC	93.30±0.00	87.84±0.00	87.44±0.00
	SL-MVGC	96.45±0.00	91.92±0.00	93.05±0.00
	ETLMSC	99.25±0.00	98.24±0.00	98.51±0.00
	DV-MSC	99.05±0.00	97.58±0.00	98.11±0.00
	LT-MSC	79.85±0.92	77.00±1.00	74.64±1.28
	t-SVD-MSC	<u>99.60±0.00</u>	<u>98.91±0.00</u>	<u>99.20±0.00</u>
	IFMSC	99.95±0.00	99.86±0.00	99.90±0.00
Yale	SMVSC	76.36±0.00	78.06±0.00	63.85±0.00
	LSGMC	71.58±2.48	75.77±1.17	59.28±2.17
	SL-MVGC	73.21±0.26	74.79±0.54	60.94±0.65
	ETLMSC	68.91±4.62	72.85±4.00	58.61±5.35
	DV-MSC	<u>85.15±5.35</u>	<u>88.26±3.96</u>	<u>79.99±6.21</u>
	LT-MSC	73.45±0.38	76.34±0.67	61.85±1.02
	t-SVD-MSC	83.33±3.54	88.15±2.30	79.10±3.72
	IFMSC	97.15±3.13	97.14±2.28	94.81±4.48

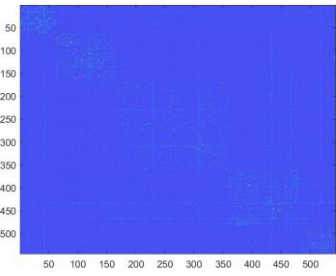
NGs	SMVSC	86.80±0.00	73.58±0.00	77.71±0.00
	LSGMC	94.60±0.00	85.07±0.00	89.62±0.00
	SL-MVGC	57.58±1.41	35.56±0.91	42.47±1.13
	ETLMSC	51.90±1.62	39.20±0.52	43.74±0.88
	DV-MSC	99.00±0.00	96.86±0.00	97.99±0.00
	LT-MSC	99.00±0.00	96.52±0.00	97.99±0.00
	t-SVD-MSC	<u>99.20±0.00</u>	<u>97.22±0.00</u>	<u>98.40±0.00</u>
	IFMSC	100.00±0.00	100.00±0.00	100.00±0.00



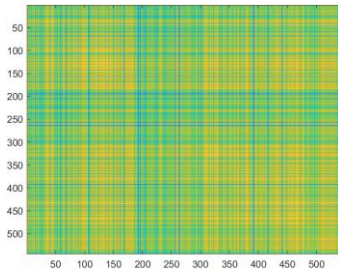
(a) SMVSC



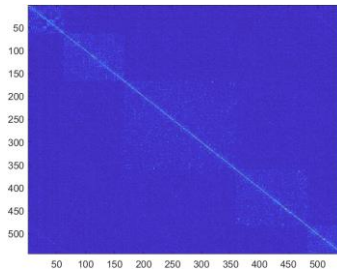
(b) LSGMC



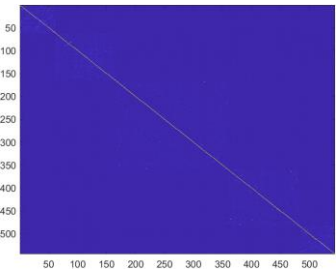
(c) SL-MVGC



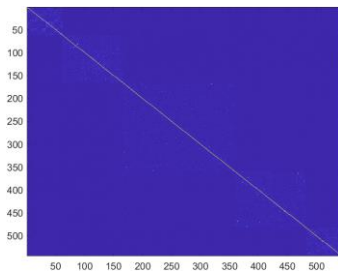
(d) ETLMSC



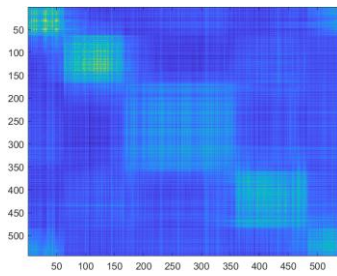
(e) DV-MSC



(f) LT-MSC



(g) t-SVD-MSC



(h) IFMSC

图 5-2 所有算法在 BBCsport 数据集上可视化

Fig.5-2 Visualization of all algorithms on the BBCsport dataset

5.2.5 参数分析

在 IFMSC 算法中，有四个参数需要调整，即： α ， β ， p 和 ω ，各参数调优范围如下：参数 α 和 β 调参范围在 $[0.00001, 0.0001, \dots, 100]$ 之间。参数 p 在 $[0.1, 0.2, \dots, 1]$ 区间内以 0.1 为步长进行取值，权重系数 ω 调参范围在 $[0, 100]$ 之间。

图 5-3 表示 IFMSC 在 BBC4view 数据集上，三个参数 α ， β 和 p 的灵敏度分析，其中 ω 设置为最佳值。从图中可以看出，所有参数均对性能有着较大的影响，这说明数据的噪声信息，多样性结构特征与秩函数逼近共同影响着聚类性能。图 5-4 展示了奇异值权重 ω 对聚类性能的影响。对于噪声较多的数据集，如 Yale 和 ORL， ω 对性能的影响较大，对于较为简单的文本数据集，如 BBCsport， ω 的取值不同对聚类性能的影响较小。

对于 BBCsport, BBC4view, ORL, UCI, Yale 和 NGs 数据集，每个数据集中 α ， β 和 p 的最优参数如下：(0.001,1,0.7)，(0.001,1,0.3)，(1,1,0.6)，(0.00001,0.00001,0.1) 和 (10,0.00001,0.3) 和 (0.0001,0.01,0.2)。 ω 的最优参数如下：[10 1 10], [0.1 1 10 100 100], [1 10 100 10], [0.1 1 10 100], [1 1 100 10] 和 [0.5 1 10 100]。

5.2.6 收敛性分析

本节通过绘制所有数据集的重构误差曲线来验证 IFMSC 模型的收敛性。重构误差定义为：

$$\max \begin{cases} error1 = \frac{1}{V} \sum_{v=1}^V \|A^v - A^v X^v - A^v Z^v - E^v\|_{\infty} \\ error2 = \frac{1}{V} \sum_{v=1}^V \|X^v - F^v C H^{v^T}\|_{\infty} \\ error3 = \frac{1}{V+1} \sum_{v=1}^{V+1} \|Y^v - G^v\|_{\infty} \\ error4 = \frac{1}{V} \sum_{v=1}^V \|X^v - P^v\|_{\infty} \end{cases} \quad (5.21)$$

图 5-5 展示了所有数据集的收敛曲线。从中可以看出，在大约 15-20 次迭代后，IFMSC 的误差开始稳定并趋近零。实验结果表明，IFMSC 算法具有优异的收敛性能。

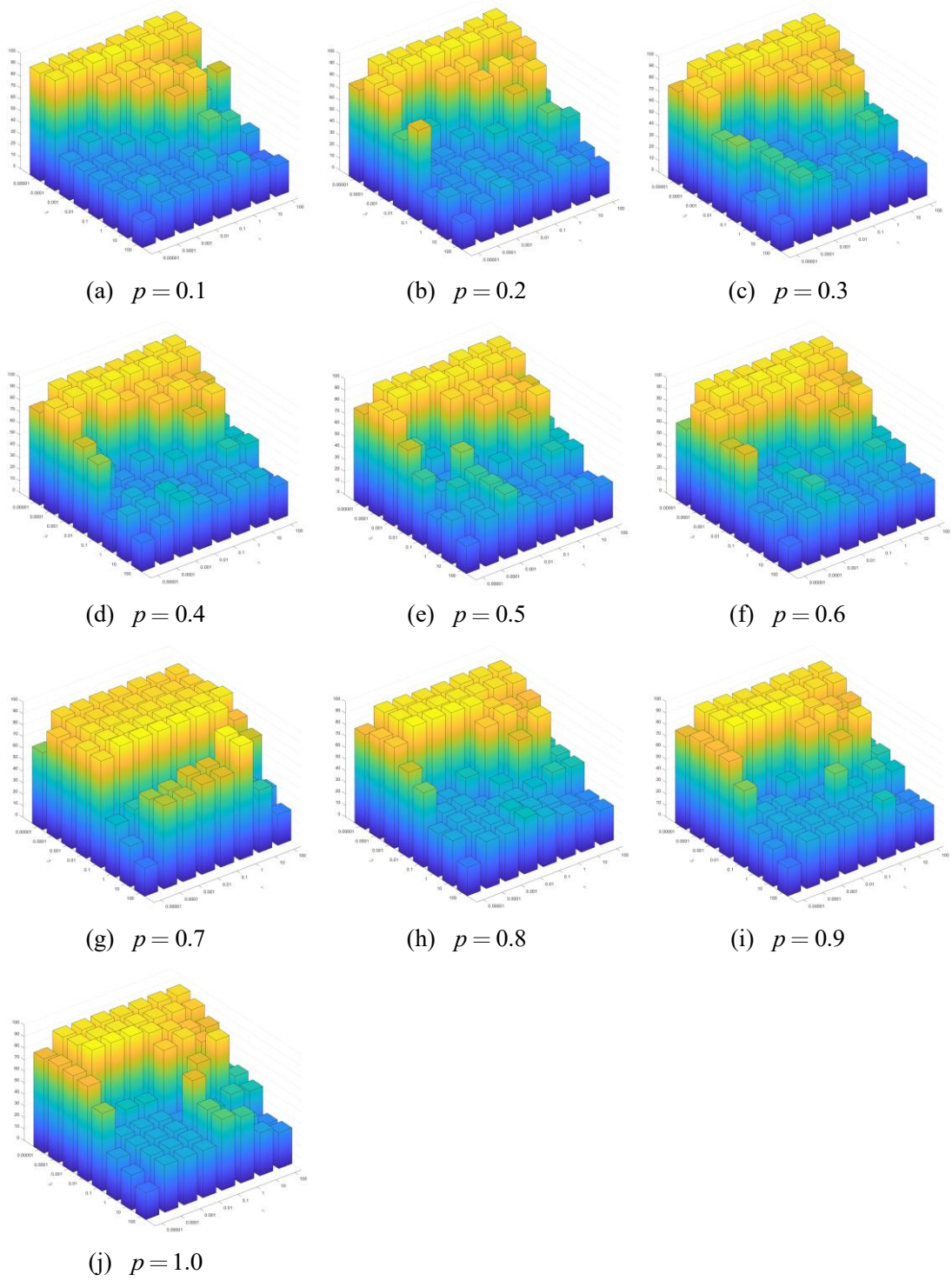


图 5-3 BBC4view 数据集上的参数 α , β 和 p 对 ACC 的影响

Fig. 5-3 The impact of parameters α , β and p on ACC in the BBC4view dataset.

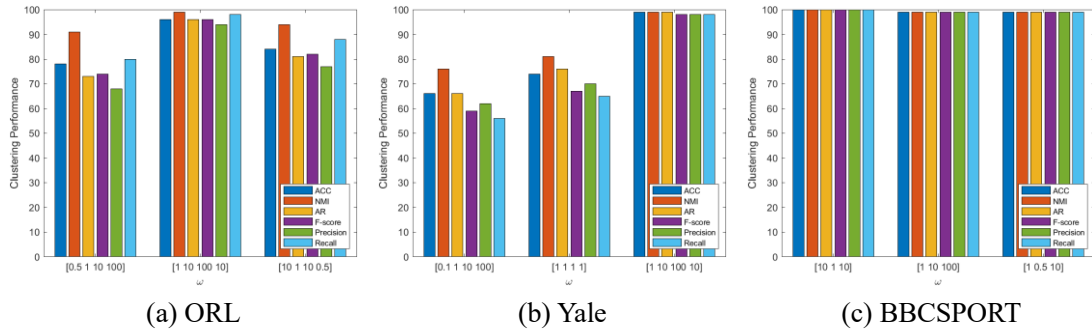


图 5-4 权重参数 ω 在 ORL, Yale 和 BBCSPORT 上聚类性能的影响

Fig.5-4 The impact of weighting parameter ω on clustering performance in the ORL, Yale and BBCSPORT datasets

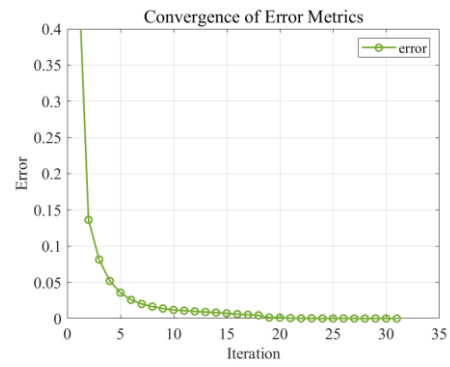
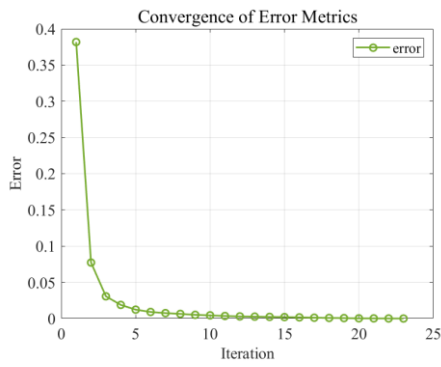
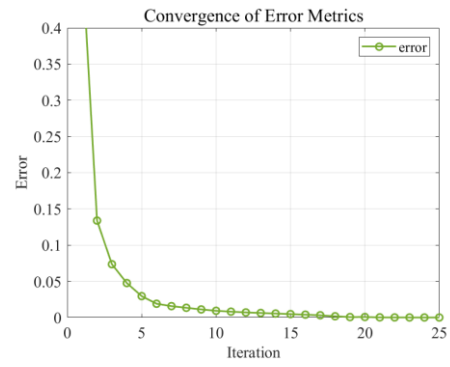
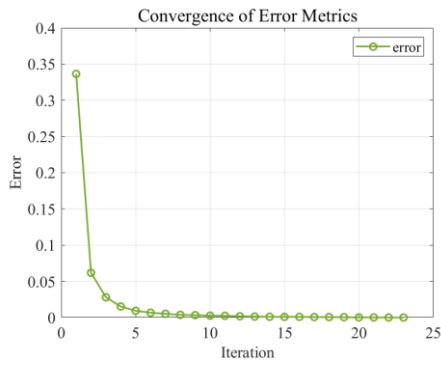
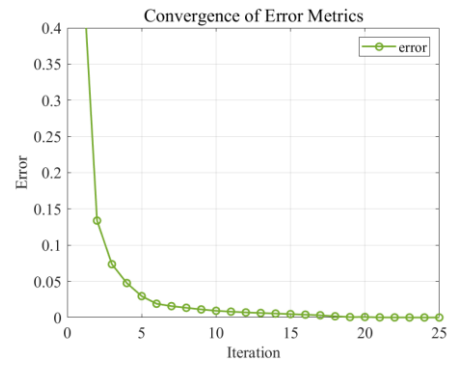
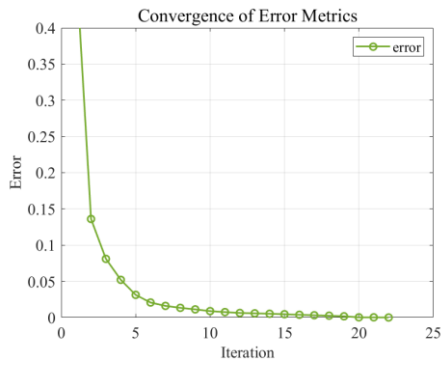


图 5-5 IFMSC 在所有数据集上的收敛曲线

Fig.5-5 Convergence curves of IFMSC on all datasets

5.3 本章小结

本文提出了一种新的 MSC 方法，即基于信息融合的多视图子空间聚类（IFMSC）。该方法从整体角度出发，通过融合多视图数据的多样性和一致性，深入研究视图之间的关联特征。首先，将一致性和多样性表示集成到一个自表示学习框架中。然后，通过秩一致性约束将一致性矩阵转换为共享一致性矩阵，该矩阵可以表征所有视图之间的共享信息。对于多样性学习，引入 HSIC 方法来衡量特征空间中视图的多样性。此外，通过将共享一致性矩阵和多样性矩阵融合到同一张量中，并使用加权张量 Schatten P-范数，有助于在视图之间传播数据结构信息，从而获得更好的聚类结果。此外，本研究在六个数据集进行了性能比较、参数分析和收敛性分析，证明 IFMSC 具有卓越的聚类性能。

第六章 总结与展望

6.1 总结

在多视图子空间聚类研究领域，加权张量 Schatten P-范数能够有效地捕获数据的原始特征与先验信息而受到广泛关注。本文以加权张量 Schatten P-范数为基础，深入探讨了数据间的一致性结构特征，数据中的噪声污染和信息融合三个方面，并将其应用到了文本、人脸等多种数据集中。具体如下所示：

（1）基于一致性约束的多视图子空间聚类：该方法利用秩相等约束来捕获视图间的共享属性，并利用 Schatten P-范数约束，有效地逼近原始数据的共享一致性信息。此外，视图内部的局部特征对矩阵质量有着直接影响，通过引入图学习方法来强化矩阵的结构特征。实验结果证明，该算法能够有效地捕获视图间的局部与一致性信息，取得了卓越的聚类性能。

（2）增强张量 Schatten P-范数的多视图子空间聚类：该方法考虑到了数据中存在着不同类型的噪声，通过构建噪声模型，对不同的噪声使用不同范数约束，有效去除数据中的噪声信息并得到干净的张量子空间结构。此外，利用 Schatten P-范数约束来更好地逼近张量的秩函数，并通过对张量的奇异值加权来增强数据中重要的特征信息。最后，在五个常用的数据集上进行实验，实验结果证明 ETSPMSC 表现出卓越的聚类性能和干净的结构特征。

（3）基于信息融合的多视图子空间聚类：该方法首先将系数矩阵分解为一致性与多样性两种类型矩阵，并利用一致性约束与流形学习分别探索视图间的一致与多样信息。此外，将共享一致性矩阵与多样性矩阵拼接为一个张量，并对其施加加权张量 Schatten P-范数来从整体层面利用数据的全局特征。最后，在六个基准数据集上证明了 IFMSC 能够准确地从整体层面学习视图的一致与多样性结构。

6.2 展望

本文所提出的三种多视图子空间聚类方法有效解决了部分多视图子空间方法中存在的问题，并在实验中取得了卓越的聚类性能。然而，在使用加权张量 Schatten P-范数时，参数 p 和 ω 需要进行调参才能达到最优效果，这会增加算法

的运行时间，也会增加调参的难度。在未来的工作中，我们计划采用自适应参数的方法，无需手动调参即可得到最适合该数据集的参数 p 和 ω 。此外，本文所提出的方法是基于完整视图的，无法直接用于处理不完整视图场景，因为不完整视图中信息的缺失会严重降低算法的聚类性能。未来，我们会考虑将所提出的方法应用于不完整视图中，增强算法的可扩展性。

参考文献

- [1] 柳源, 安俊秀, 杨林旺. 多角度语义标签引导的自监督多视图聚类[J]. 计算机应用研究, 2024, 41(11): 3357-3363.
- [2] 吴杰, 万源, 刘秋杰. 一致块对角和限定的多视角子空间聚类算法[J]. 计算机科学, 2025, 51(06): 1-11.
- [3] 任奇泽, 贾洪杰, 陈东宇. 融合局部结构学习的大规模子空间聚类算法[J]. 计算机应用, 2023, 43(12): 3747-3754.
- [4] Li Z, Tang C, Zheng X, et al. High-order correlation preserved incomplete multi-view subspace clustering[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2022, 31: 2067-2080.
- [5] Chen Z, Wu X-J, Xu T, et al. Fast self-guided multi-view subspace clustering[J]. IEEE transactions on image processing, 2023, 32: 6514-6525.
- [6] Chen Y, Xiao X, Peng C, et al. Low-rank tensor graph learning for multi-view subspace clustering[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology, 2021, 32(1): 92-104.
- [7] 曹付元, 陈晓惠. 共享和特定表示的多视图属性图聚类[J]. 软件学报, 2025, 36(03): 1254-1267.
- [8] Huang S, Ren Y, Xu Z. Robust multi-view data clustering with multi-view capped-norm k-means[J]. Neurocomputing, 2018, 311: 197-208.
- [9] Yang M, Li Y, Hu P, et al. Robust multi-view clustering with incomplete information[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2022, 45(1): 1055-1069.
- [10] Bickel S, Scheffer T. Multi-view clustering[C]. ICDM, 2004: 19-26.
- [11] Lan S, Zheng Q, Yu Y. Double-level view-correlation multi-view subspace clustering[J]. Knowledge-Based Systems, 2024, 284: 111271.
- [12] Wang H, Yang Y, Liu B. GMC: Graph-based multi-view clustering[J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2019, 32(6): 1116-1129.
- [13] Zhan K, Zhang C, Guan J, et al. Graph learning for multiview clustering[J]. IEEE transactions on cybernetics, 2017, 48(10): 2887-2895.
- [14] Wang Y, Pei X, Zhan H. Fine-grained graph learning for multi-view subspace clustering[J]. IEEE Transactions on Emerging Topics in Computational Intelligence, 2023, 8(4): 2804-2815.
- [15] Tan Y, Liu Y, Huang S, et al. Sample-level multi-view graph clustering[C]. Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 2023: 23966-23975.
- [16] Li X, Ren Z, Sun Q, et al. Auto-weighted tensor Schatten p-norm for robust multi-view graph clustering[J]. Pattern Recognition, 2023, 134: 109083.
- [17] Kang Z, Pan H, Hoi S C, et al. Robust graph learning from noisy data[J]. IEEE transactions on cybernetics, 2019, 50(5): 1833-1843.
- [18] Tang C, Zheng X, Zhang W, et al. Unsupervised feature selection via multiple graph fusion and feature weight learning[J]. Science China Information Sciences, 2023, 66(5): 152101.
- [19] Shu X, Zhang X, Gao Q, et al. Self-weighted anchor graph learning for multi-view clustering[J]. IEEE Transactions on Multimedia, 2022, 25: 5485-5499.

- [20] Kumar A, Daumé H. A co-training approach for multi-view spectral clustering[C]. Proceedings of the 28th international conference on machine learning (ICML-11), 2011: 393-400.
- [21] Zhang X, Ren Z, Sun H, et al. Multiple kernel low-rank representation-based robust multi-view subspace clustering[J]. Information Sciences, 2021, 551: 324-340.
- [22] Tzortzis G, Likas A. Kernel-based weighted multi-view clustering[C]. 2012 IEEE 12th international conference on data mining, 2012: 675-684.
- [23] Wang C-D, Chen M-S, Huang L, et al. Smoothness regularized multiview subspace clustering with kernel learning[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2020, 32(11): 5047-5060.
- [24] Hotelling H. Relations between two sets of variates[M]. Springer, 1992: 162-190.
- [25] Kang Z, Guo Z, Huang S, et al. Multiple partitions aligned clustering[J]. arXiv preprint arXiv:1909.06008, 2019.
- [26] Kang Z, Zhao X, Peng C, et al. Partition level multiview subspace clustering[J]. Neural Networks, 2020, 122: 279-288.
- [27] Liu J, Wang C, Gao J, et al. Multi-view clustering via joint nonnegative matrix factorization[C]. Proceedings of the 2013 SIAM international conference on data mining, 2013: 252-260.
- [28] Wang H, Yang Y, Li T. Multi-view clustering via concept factorization with local manifold regularization[C]. 2016 IEEE 16th International Conference on Data Mining (ICDM), 2016: 1245-1250.
- [29] Zheng Q, Zhu J, Li Z, et al. Feature concatenation multi-view subspace clustering[J]. Neurocomputing, 2020, 379: 89-102.
- [30] Zhao J, Lu G-F. Clean affinity matrix learning with rank equality constraint for multi-view subspace clustering[J]. Pattern Recognition, 2023, 134: 109118.
- [31] Guo X. Robust subspace segmentation by simultaneously learning data representations and their affinity matrix[C]. Twenty-fourth international joint conference on artificial intelligence, 2015: 3547-3553.
- [32] Gao H, Nie F, Li X, et al. Multi-view subspace clustering[C]. Proceedings of the IEEE international conference on computer vision, 2015: 4238-4246.
- [33] Li H, Zhang J, Wang C, et al. Manifold regularized non-negative matrix factorization with label information[J]. Journal of Electronic Imaging, 2016, 25(2): 023023-023023.
- [34] Zhuge W, Hou C, Jiao Y, et al. Robust auto-weighted multi-view subspace clustering with common subspace representation matrix[J]. PloS one, 2017, 12(5): e0176769.
- [35] Zhang C, Fu H, Liu S, et al. Low-rank tensor constrained multiview subspace clustering[C]. Proceedings of the IEEE international conference on computer vision, 2015: 1582-1590.
- [36] Xie Y, Tao D, Zhang W, et al. On unifying multi-view self-representations for clustering by tensor multi-rank minimization[J]. International Journal of Computer Vision, 2018, 126: 1157-1179.
- [37] Gao Q, Xia W, Wan Z, et al. Tensor-SVD based graph learning for multi-view subspace clustering[C]. Proceedings of the AAAI conference on artificial intelligence, 2020: 3930-3937.
- [38] Zhang T, Yuan Y, Shen X, et al. Two-step affinity matrix learning for multi-view subspace clustering[J]. Expert Systems with Applications, 2024, 242: 122765.
- [39] Fan J, Yang J, Ai D, et al. Convex hull indexed Gaussian mixture model (CH-GMM) for 3D point set registration[J]. Pattern Recognition, 2016, 59: 126-141.

- [40] Shi D, Wang J, Cheng D, et al. A global-local affinity matrix model via EigenGap for graph-based subspace clustering[J]. *Pattern Recognition Letters*, 2017, 89: 67-72.
- [41] Tang C, Zhu X, Liu X, et al. Learning a joint affinity graph for multiview subspace clustering[J]. *IEEE Transactions on Multimedia*, 2018, 21(7): 1724-1736.
- [42] Chen J, Yang S, Mao H, et al. Multiview subspace clustering using low-rank representation[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2021, 52(11): 12364-12378.
- [43] Zheng Q, Zhu J, Tian Z, et al. Constrained bilinear factorization multi-view subspace clustering[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2020, 194: 105514.
- [44] Duan Y-Q, Yuan H-L, Lai L L, et al. Multi-view subspace clustering with local and global information[C]. *2021 International Conference on Wavelet Analysis and Pattern Recognition (ICWAPR)*, 2021: 1-6.
- [45] Ding Z, Fu Y. Low-rank common subspace for multi-view learning[C]. *2014 IEEE international conference on Data Mining*, 2014: 110-119.
- [46] Nie F, Wang X, Huang H. Clustering and projected clustering with adaptive neighbors[C]. *Proceedings of the 20th ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining*, 2014: 977-986.
- [47] Zuo W, Meng D, Zhang L, et al. A generalized iterated shrinkage algorithm for non-convex sparse coding[C]. *Proceedings of the IEEE international conference on computer vision*, 2013: 217-224.
- [48] Schönemann P H. A generalized solution of the orthogonal procrustes problem[J]. *Psychometrika*, 1966, 31(1): 1-10.
- [49] Chen J, Mao H, Sang Y, et al. Subspace clustering using a symmetric low-rank representation[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2017, 127: 46-57.
- [50] Tang C, Li Z, Wang J, et al. Unified one-step multi-view spectral clustering[J]. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 2022, 35(6): 6449-6460.
- [51] Guo J, Sun Y, Gao J, et al. Rank consistency induced multiview subspace clustering via low-rank matrix factorization[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2021, 33(7): 3157-3170.
- [52] Meng M, Lan M, Yu J, et al. Multiview consensus structure discovery[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, 52(5): 3469-3482.
- [53] Tang C, Liu X, Zhu X, et al. CGD: Multi-view clustering via cross-view graph diffusion[C]. *Proceedings of the AAAI conference on artificial intelligence*, 2020: 5924-5931.
- [54] Sun M, Zhang P, Wang S, et al. Scalable multi-view subspace clustering with unified anchors[C]. *Proceedings of the 29th ACM international conference on multimedia*, 2021: 3528-3536.
- [55] Zou X, Tang C, Zheng X, et al. Inclusivity induced adaptive graph learning for multi-view clustering[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2023, 267: 110424.
- [56] Elhamifar E, Vidal R. Sparse subspace clustering: Algorithm, theory, and applications[J]. *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 2013, 35(11): 2765-2781.
- [57] Liu G, Lin Z, Yan S, et al. Robust recovery of subspace structures by low-rank representation[J]. *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 2012, 35(1): 171-184.
- [58] Guo Y. Convex subspace representation learning from multi-view data[C]. *Proceedings of the AAAI conference on artificial intelligence*, 2013: 387-393.
- [59] Wang S, Chen Y, Cen Y, et al. Nonconvex low-rank and sparse tensor representation for multi-view subspace clustering[J]. *Applied Intelligence*, 2022, 52(13): 14651-14664.

- [60] Xia W, Zhang X, Gao Q, et al. Multiview subspace clustering by an enhanced tensor nuclear norm[J]. IEEE Transactions on cybernetics, 2021, 52(9): 8962-8975.
- [61] Wu J, Lin Z, Zha H. Essential tensor learning for multi-view spectral clustering[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2019, 28(12): 5910-5922.
- [62] Xie Y, Zhang W, Qu Y, et al. Hyper-Laplacian regularized multilinear multiview self-representations for clustering and semisupervised learning[J]. IEEE transactions on cybernetics, 2018, 50(2): 572-586.
- [63] Xia R, Pan Y, Du L, et al. Robust multi-view spectral clustering via low-rank and sparse decomposition[C]. Proceedings of the AAAI conference on artificial intelligence, 2014: 2149-2155.
- [64] Lan W, Yang T, Chen Q, et al. Multiview subspace clustering via low-rank symmetric affinity graph[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2023, 35(8): 11382 - 11395.
- [65] Cai B, Lu G-F, Wan J, et al. Auto-weighted multi-view clustering with the use of an augmented view[J]. Signal Processing, 2024, 215: 109286.
- [66] Wu J-S, Gong J-X, Liu J-X, et al. Multi-level correlation learning for multi-view unsupervised feature selection[J]. Knowledge-Based Systems, 2023, 281: 111073.

攻读学位期间发表的学术论文目录

研究生期间发表的期刊:

- [1] **Ao Li**, Yong Wang et al. Auto-weighted multi-view subspace clustering with consistency learning, **Journal of Internet Technology**, (2025) (SCI,EI) (第一作者) (已录用)
- [2] Yong Wang, **Ao Li** et al. Nonconvex low-rank tensor approximation with denoising model for multi-view subspace clustering, **Applied Intelligence** (返修中, 通讯作者)

致谢

文末搁笔，思绪繁杂。转眼间研究生学习生涯进入了尾声，二十多载的求学经历在此刻都凝结成了宝贵的回忆，过去奋斗岁月中的汗水与喜悦都将承载着我继续一路向前。

首先由衷地感谢我的导师王勇老师，王勇老师严谨的治学态度与渊博的专业学识深深感染了我，让我在科研的道路上受益匪浅，同时也为我树立了追求卓越的榜样。在研究生阶段成为王勇老师的学生是一种莫大的幸运，他不仅是学业上的导师，更是人生中的益友。我是一个做事速度相对较慢的人，但我的导师却从来不嫌弃我，一直以来都是给予我最大的鼓励与支持，我一直铭记于心。老师豁达的人生态度以及谦和的处事作风总是为我带来许多人生意义上的启发，这些启发也都将成为我今后面对困难时的底气与助力，让我得以在今后的人生道路上披荆斩棘，勇往直前。

感谢 PRiSE 研究组的全体老师和同学们。实验室浓厚的学术氛围和团结协作的精神，使我收获颇丰。感谢卢桂馥老师，每次遇到困难老师总会竭尽所能地帮助我，为我解答生活中的困惑。同时感谢李钧老师，唐肝翌老师在科研工作中对我的悉心教导。

感谢余先育老师在我实习期间给予我的帮助，让我收获良多。

感谢我亲爱的师兄师姐们（周芑，王雪，王守杭，乐文革，查方慧，陈林俊），无论是在科研还是生活中，师兄师姐们都时刻照顾着我，在我困惑时为我提供建议，在我迷茫时为我树立信心。感谢五位师弟（张一凡，周华东，杨利好，马孜壮，孟帅），他们善于思考的品质值得我学习。同时还要感谢我的室友同学们，他们的陪伴与包容让我的校园生活乐趣无穷，失意之时，予我希望。

感谢我的女孩陈明月一直以来对我的支持，在艰难的日子里有她的陪伴我才能不断前行。愿一同携手共进，奔赴未来！

特别感谢我的父母和我的两位姐姐，漫漫求学路中正是有他们一路的保驾护航，我才能安心完成学业，并取得进步，他们永远是我坚强的后盾，也是我不断进步的动力。

最后，非常感谢对我论文提出宝贵意见的评审专家和老师。

由衷地祝愿一直以来帮助我的各位老师、家人以及朋友们身体健康，万事顺遂。论文停留在致谢，人生还要续写。感恩所有相遇，来日方长，后会有期!