

分类号: F830.59; F840.3; O211.63

单位代码: 10363

密 级: 公开

学号: 2221010104

题 目 随机环境下考虑相对绩效的
均衡再保险-投资策略研究

英文并列

题 目 Research on Equilibrium Reinsurance-Investment
Strategy under Stochastic Environment
with Relative Performance Concern

学生姓名: 李九敏

指导教师: 夏登峰 教授

专 业: 金融

研究方向: 金融风险管理

论文答辩日期: 2025 年 5 月 14 日

安徽工程大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：我恪守学术道德，崇尚严谨学风。所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已明确注明和引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品及成果的内容。论文为本人亲自撰写，我对所写的内容负责，并完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

学位论文作者签名：李九敏

日期：2025 年 5 月 14 日

安徽工程大学学位论文版权使用授权书

学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅或借阅。本人授权可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保密 ☐，在 _____ 年解密后适用本版权书。

本学位论文属于

不保密 ☒。

学位论文作者签名：李九敏

指导教师签名：夏雪峰

日期：2025 年 5 月 14 日

日期：2025 年 5 月 14 日

随机环境下考虑相对绩效的均衡再保险-投资策略研究

摘 要

风险管理是保险公司的重要工作,再保险是转移保险风险的一种有效手段.同时,在金融市场上的投资能够帮助保险公司有效管理盈余.因此,再保险和投资问题是保险精算领域的重要问题.考虑到现实市场中各类不确定因素的影响以及保险公司与再保险公司之间既竞争又合作的对立统一关系,随机环境下考虑相对绩效的均衡再保险-投资策略研究具有一定的现实意义和应用价值.

本文首先研究了 CEV (Constant Elasticity of Variance) 模型下考虑相对绩效的保险公司和再保险公司的再保险-投资博弈问题.再保险合同的设计考虑双方利益,保险公司确定风险分担策略,再保险公司确定再保险价格,二者共同确定最终的再保险费.两公司均可在金融市场上投资一种无风险资产和一种价格过程服从 CEV 模型的风险资产.通过相对绩效量化保险公司和再保险公司的竞争.二者均旨在均值-方差准则下最大化自身终端相对财富.为求得时间一致策略,结合博弈论思想建模,利用动态规划原理建立扩展 HJB (Hamilton-Jacobi-Bellman) 方程,借助 Feynman-Kac 公式求解,得到最优再保险合同和最优时间一致投资策略的解析解.最后进行数值模拟,结果表明在考虑相对绩效后,保险公司的再保险购买意愿降低,再保险

公司会调低再保险价格，最终的再保险费减少；同时双方在考虑相对绩效后都更愿意增加风险资产投资。

其次，本文进一步放宽假设条件，研究了随机环境中一家保险公司与一家再保险公司的再保险-投资博弈，兼顾双方利益制定再保险合同，以相对绩效关注量化二者竞争。在 Stackelberg 博弈问题中同时考虑利率风险与波动率风险，并引入滚动债券以对冲利率风险。金融市场中有无风险资产、滚动债券和风险资产可投资。保险公司和再保险公司都希望找到使得自身终端相对财富在均值-方差准则下最大化的再保险-投资策略。利用随机最优控制理论，在 Stackelberg 博弈框架下建立并求解扩展 HJB 方程，得到最优策略的解析解。最后，通过数值模拟分析了主要模型参数对最优策略的影响，研究结果对保险公司的实践具有一定的理论指导意义。

关键词：再保险-投资，均值方差准则，相对绩效，Stackelberg 博弈，最优控制

RESEARCH ON EQUILIBRIUM
REINSURANCE-INVESTMENT STRATEGY UNDER
STOCHASTIC ENVIRONMENT WITH RELATIVE
PERFORMANCE CONCERN

ABSTRACT

Risk management is a crucial task for insurance companies. Reinsurance serves as an effective modality of transferring insurance risks. Meanwhile, investments in the financial market can facilitate the effective management of surpluses for insurance companies. Hence, reinsurance and investment issues are significant matters in the domain of actuarial science in insurance. Given the impact of various uncertain factors in the real market and the unity of opposites, that is, the competitive and cooperative relationship between the insurer and the reinsurer, the study on equilibrium reinsurance-investment strategies

considering relative performance in a stochastic environment possesses certain practical significance and application value.

This paper firstly studies the reinsurance and investment game between an insurer and a reinsurer with relative performance concern under CEV (Constant Elasticity of Variance) model. The design of the reinsurance contract considers the interests of both sides. The insurer determines the risk-sharing strategy, and the reinsurer determines the reinsurance price. The two jointly determine the final reinsurance premium. To increase their respective wealth, the insurer and the reinsurer can invest in the same risk-free asset and risky asset which follows CEV model. We quantify the competition between the insurer and the reinsurer through their relative performances. Both of them are intended to maximize their own terminal relative wealth under the mean-variance criterion. To obtain the time-consistent strategy, our model is constructed by integrating the thoughts of game theory, and the extended HJB (Hamilton-Jacobi-Bellman) equation is established by employing the principle of dynamic programming. With the aid of the Feynman-Kac formula for solution, the analytical solutions of the optimal reinsurance contract and the optimal time-consistent investment strategy are derived. And then, numerical simulations show that with relative performance concerns, the insurer would probably spend less on reinsurance, the reinsurer tends to lower the reinsurance price, and the

final reinsurance premium decreases. Besides, both insurer and reinsurer would invest more in risky asset with relative performance concerns.

Secondly, this paper further eases the assumption conditions and investigates the reinsurance-investment game between an insurer and a reinsurer in a stochastic environment. In the design of the reinsurance contract, the interests of both the insurer and the reinsurer are taken into account. The competition between the insurer and the reinsurer is quantified through the relative performance. Moreover, both interest rate risk and volatility risk are considered simultaneously in the Stackelberg game problem. To hedge the interest risk, rolling bond is included in the market. The financial market consists of risk-free asset, rolling bond and risky asset. Both the insurer and the reinsurer aspire to identify reinsurance-investment strategies that maximize their own terminal relative wealth under the mean-variance criterion. By using the stochastic optimal control technique, we formulate and solve extended HJB equations under the Stackelberg game framework. And the optimal reinsurance contract as well as the optimal time-consistent investment strategies are derived analytically. Finally, the impact of the main model parameters on the optimal strategy is analyzed via numerical simulation. The research findings bear certain theoretical guiding implications for the practice of insurance companies.

KEY WORDS: Reinsurance and investment, Mean-variance criterion,
Relative performance, Stackelberg game, Optimal control

目 录

摘 要.....	I
ABSTRACT.....	III
第 1 章 绪 论.....	1
1.1 选题背景及意义.....	1
1.2 国内外研究现状.....	2
1.3 研究方法与创新点.....	4
1.3.1 研究方法.....	4
1.3.2 创新点.....	5
1.4 论文内容和安排.....	5
第 2 章 基础知识介绍.....	7
2.1 再保险模型.....	7
2.1.1 经典 C-L (Cramér-Lundberg) 模型.....	7
2.1.2 扩散模型.....	7
2.2 随机利率模型.....	8
2.2.1 Vasicek 模型.....	8
2.2.2 CIR 模型.....	9
2.3 风险资产价格模型.....	9
2.3.1 GBM (Geometric Brownian Motion) 模型.....	9
2.3.2 CEV 模型.....	9
2.3.3 Heston 模型.....	10
2.4 均值-方差问题.....	10
第 3 章 CEV 模型下考虑相对绩效的保险公司与再保险公司再保险-投资博弈.....	12
3.1 模型建立.....	12
3.2 模型求解.....	16
3.2.1 保险公司的最优响应策略.....	16
3.2.2 再保险公司的最优时间一致策略.....	18

3.2.3 最优再保险合同以及保险公司的最优时间一致投资策略.....	20
3.3 数值模拟.....	22
3.3.1 模型参数对最优再保险合同的影响.....	22
3.3.2 模型参数对最优时间一致投资策略的影响.....	28
3.4 本章小结.....	32
第 4 章 随机利率与随机波动模型下考虑相对绩效的保险公司与再保险公司再保 险-投资博弈	33
4.1 模型建立.....	33
4.2 模型求解.....	38
4.2.1 保险公司的最优响应策略.....	38
4.2.2 再保险公司的最优时间一致策略.....	43
4.2.3 最优再保险合同及保险公司的最优时间一致投资策略.....	47
4.3 数值模拟.....	49
4.3.1 模型参数对最优再保险合同的影响.....	49
4.3.2 模型参数对最优时间一致投资策略的影响.....	55
4.4 本章小结.....	60
第 5 章 总结和展望.....	61
参考文献.....	63
附录 A 定理 3.3 的证明.....	68
附录 B 定理 4.6 的证明	72
硕士期间发表的论文.....	77
致 谢.....	78

第 1 章 绪 论

1.1 选题背景及意义

再保险作为风险管理的“二次分散”机制，不仅实现了风险的有效转移，而且通过多层次的风险重构和资本优化，成为维护现代经济体系稳定运行的基本手段。一方面，再保险通过跨区域、跨周期的风险分散，防止单一巨灾事件(如飓风、地震等)导致原保险公司破产，避免风险向金融系统传导，缓释系统性风险。另一方面，再保险释放了原保险公司资本金，提升其承保能力，驱动保险业服务实体经济规模扩张。再保险的意义已从传统的“风险批发商”升级为现代风险治理架构的设计者，其价值创造正在从损失补偿向风险预防、资本优化和可持续发展多维延伸。这一进程不仅重塑保险业生态，更深度嵌入国家治理能力现代化的核心理程。

目前，全球再保险市场规模庞大，中国原保险市场规模全球第二，但再保险渗透率显著低于发达国家，市场潜力巨大。近年来，我国再保险市场在政策扶持、行业规范化以及国际化进程的推动下，展现出迅猛的发展势头，逐步在全球再保险领域中占据重要地位。国务院 2024 年 9 月颁布的保险业“国十条”进一步支持我国再保险市场发展，推动上海国际再保险中心建设，完善风险分散机制，健全风险管理制度。我国实行开放政策促进市场多元化发展，国内再保险公司深耕本土市场，同时加快海外布局；国际再保险公司依托全球网络和技术优势，为中国市场提供复杂风险解决方案。

保费管理是保险公司稳健经营的一个重要方面，除购买再保险分散风险，帮助其在面临大额赔付时仍保持财务稳定，优化其财务健康状况，增强市场竞争力外，保险公司可以在金融市场上进行投资，有效管理盈余，实现股东价值最大化。而金融市场中存在诸多不确定源影响着资产价格和投资收益，例如利率风险、波动风险等。因此最优再保险-投资问题成为保险公司实践中的重要议题。基于现

实背景，本文在随机环境下进行均衡再保险-投资策略研究具有一定的现实意义和应用价值.

1.2 国内外研究现状

目前，海内外学者们已经针对不同的风险模型研究了各类目标函数下保险公司的最优决策问题. 例如，Browne^[1]在盈余过程的连续时间扩散模型下，分别研究了使得终端财富期望效用最大和破产风险最小的最优投资策略. Bai 和 Guo^[2]以最大化终端财富的预期指数效用或最小化破产概率为目标，研究了考虑多重风险资产的最优投资再保险问题. Brachetta 和 Ceci^[3]、Ceci 等^[4]也在不同的市场假设下研究了最大化保险人终端财富期望效用的最优再保险-投资策略. Landriault 等^[5]、Yener^[6]分别在不同情况下研究了破产概率最小准则下的最优再保险-投资策略.

此外，还有许多学者在均值-方差准则下研究保险公司的最优再保险-投资策略，例如[7-9]. 由于动态均值-方差问题具有时间不一致性，贝尔曼最优原理无法直接应用. 上述相关文献主要关注动态均值-方差问题的预承诺策略，这些策略仅在初始时刻是最优的，并非全局最优. 然而，在多数情况下策略的时间一致性是理性投资者的基本要求. 因此，为了解决均值-方差准则下最优策略的时间不一致问题，受到 Basak 和 Chabakauri^[10]、Björk 等^{[11][12]}的启发，许多学者都在博弈论框架下重新考虑该问题并寻找时间一致的纳什均衡策略，如[13-17]. 最近，作为经典均值-方差准则的修正版本，单调均值-方差准则被应用于优化问题的研究中，见 Li 等^[18].

然而，很多文章都仅从保险公司的角度研究最优化问题而忽略了再保险公司的利益. 显然，再保险公司是再保险合同的利益相关者，并且作为再保险合同的当事双方，保险公司和再保险公司的利益通常是不一致的. 因此在最优化问题中，再保险公司的影响不可忽视. Borch^[19]首次在再保险合同的设计中考虑了保险公司和再保险公司的共同利益. Cai 等^[20]研究了保险公司和再保险公司共同生存概率和共同盈利概率最大化的最优再保险合同. Li 等^[21]、Chen 等^[22]分别研究了保险公司和再保险公司目标函数加权总和最大化以及共同指数效用最大化的

最优再保险投资策略。朱怀念等^[23]构建了保险公司与再保险公司之间的非零和投资与再保险博弈模型，研究保险公司与再保险公司的均衡投资与再保险策略。这些研究虽然考虑了再保险公司的影响，但未能反映现实中再保险公司动态调整再保险价格的事实。

在保险实践中，再保险合同由索赔风险分担策略(由保险公司决定)和再保险价格(由再保险公司确定)构成。大部分学者的研究重点落在索赔风险分担策略上，少有学者考虑再保险定价问题，而确定合理的再保险价格是再保险合同设计的重点之一。定价过高会损害保险公司的利益，反之损害再保险公司的利益，因此再保险合同设计中的再保险定价问题应该得到重视。近年来，^[24-29]或依赖于再保险公司的相对安全负荷，或依赖于期望值保费准则，研究了再保险价格的确定。但是这些研究或忽视了再保险价格的上下限，或局限性较强，因此我们希望考虑一个更加一般化的再保险价格区间。

现实中，为了稳健投资，投资者不仅关心自身的财富，还关注其竞争者的财富。当投资者的财富值很大但是却少于其竞争者的财富值时，投资者可能会内心不平衡。为了体现这种心理，参考^[30-33]，我们可以通过相对绩效模型来量化两个投资者之间的竞争：

$$(1-\tau_i)X_i(t)+\tau_i(X_i(t)-X_j(t)), \tau_i \in [0,1], i \neq j \in \{1,2\}.$$

其中 $X_i(t)$ 表示投资者 i 在 t 时刻的财富， $X_j(t)$ 表示投资者 i 的竞争者 j 在 t 时刻的财富， $\tau_i, i=1,2$ 描述了投资者对对方财富的关注度。大量研究表明相对绩效广泛存在于个人、投资者、管理者以及金融机构之间。Abel^[34]证明，当个人的消费高于他人的消费时，个人会获得更多的效用。DeMarzo^[35]等详细论证了相对绩效对个人的决策有显著影响。Hu 和 Wang^[36]将相对绩效关注纳入均值方差效用，研究了两家风险厌恶型保险公司在竞争环境下的动态均衡再保险与投资策略。Zhu 等^[37]考虑波动风险的影响，在 Heston 模型和均值方差准则下研究两个保险公司考虑相对绩效时的最优时间一致性投资和再保险策略。Yang 等^[38]研究了在一种新交互机制和一般投资框架下 n 个保险公司之间的相对绩效。Gu 等^[39]研究了委托代理模型中考虑模糊厌恶和相对绩效关注的再保险定价问题。

大量实证研究表明，风险资产价格的波动率既非常数也非确定性函数。当我们考虑更现实的市场环境时，风险资产价格的波动率的变化、利率风险、通货膨

胀风险等因素都不可忽视. 国内外学者们也针对这些现实因素做了许多研究. Heston 提出了随机波动率模型, 该模型至今仍被广泛用于期权定价或资产定价. 此外, CEV 模型也是常用的模型之一. 例如, Lin 和 Qian^[40]以及 Sun 等^[41]在再保险-投资问题的研究中使用了这些模型. 常见的随机利率模型, 如 Vasicek 模型、CIR (Cox-Ingersoll-Ross) 模型等在研究中被广泛应用. 例如, Yuan 等^[42]在均值-方差框架下研究了跳-扩散市场中具有随机利率和依赖风险的保险公司的最优投资再保险问题. 近来, 一些论文研究了同时考虑随机利率和随机波动率的最优投资问题, 如[43-46].

1.3 研究方法与创新点

1.3.1 研究方法

首先, 本文用 CEV 模型刻画金融市场中风险资产的价格过程, 研究考虑相对绩效的保险公司与再保险公司的再保险-投资博弈问题. 再保险合同的设计考虑双方利益, 保险公司确定风险分担策略, 再保险公司确定再保险价格 (其上、下限不取决于任何保费准则, 可根据文章的假设条件求得), 二者共同确定最终的再保险费. 通过相对绩效量化保险公司和再保险公司的竞争. 两公司均可在金融市场上投资无风险资产和风险资产. 二者均旨在基于均值-方差最大化自身终端相对财富. 为求得时间一致策略, 结合博弈论思想建模, 构建保险公司与再保险公司的 Stackelberg (动态) 博弈框架, 利用动态规划原理先后建立两公司相对终端财富满足均值-方差准则的扩展 HJB 方程, 随后借助 Feynman-Kac 公式求解, 得到最优再保险合同和最优时间一致投资策略的解析解. 运用数值模拟分析参数对最优再保险-投资策略的影响.

其次, 放宽假设条件, 研究了随机环境中一家保险公司与一家再保险公司的再保险-投资博弈, 兼顾双方利益制定再保险合同, 以相对绩效关注量化二者竞争. 考虑利率风险与波动率风险, 并引入滚动债券以对冲利率风险. 金融市场中有无风险资产、滚动债券和风险资产可投资. 保险公司和再保险公司都希望在均值-方差准则下找到使得自身终端相对财富最大化的再保险-投资策略. 利用随机最优控制理论, 基于 Stackelberg (动态) 博弈框架分别建立保险公司和再保险公

司的扩展 HJB 方程. 引入一个辅助过程, 采用分离变量法求得最优策略的解析解. 最后, 通过数值模拟分析了主要模型参数对最优策略的影响.

1.3.2 创新点

1. 研究相对绩效关注下保险公司与再保险公司之间博弈的文章较少, 主要假设风险资产价格服从几何布朗运动, 本文考虑投资者的心理因素, 先后在更加贴合现实的风险资产价格模型—CEV 模型和 Heston 模型下研究保险公司与再保险公司考虑相对绩效时的再保险-投资博弈问题, 扩大了研究结果的应用范围;

2. 在 CEV 模型下考虑相对绩效的随机优化问题中, HJB 方程的建立和求解比较复杂, 本文结合博弈论思想建模, 并借助 Feynman-Kac 公式求解方程;

3. 为了更加贴合真实市场, 在模型中同时考虑随机利率与随机波动, 得到了均衡策略的解析解.

1.4 论文内容和安排

本文分为五章.

第 1 章为绪论, 主要介绍本文的研究背景和意义、整理本方向的国内外研究现状并简述本文框架安排.

第 2 章为基础知识介绍.

第 3 章研究了 CEV 模型下考虑相对绩效的保险公司与再保险公司的再保险-投资博弈问题. 兼顾双方利益制定再保险合同, 以相对绩效关注量化二者竞争. 假设金融市场中可投资无风险资产和风险资产. 在终端相对财富的均值-方差最大化目标下, 结合博弈论思想, 利用动态规划原理建立扩展 HJB 方程并求解, 得到最优再保险-投资策略的解析解. 最后运用数值模拟分析参数对最优策略的影响.

第 4 章考虑利率风险与波动率风险, 研究了随机环境中一家保险公司与一家再保险公司的再保险-投资博弈问题. 引入滚动债券以对冲利率风险. 金融市场中有无风险资产、滚动债券和风险资产可投资. 仍以均值-方差准则下最大化终端相对财富为目标, 利用随机最优控制理论, 在 Stackelberg 博弈框架下建立并求

解扩展 HJB 方程, 得到最优策略的解析解. 最后, 通过数值模拟分析了主要模型参数对最优策略的影响.

第 5 章总结全文, 并展望今后的研究方向和议题.

最后在附录中给出了本文的部分推导证明.

第 2 章 基础知识介绍

本章主要介绍再保险-投资相关的基本模型，为后文的研究铺垫理论基础.

2.1 再保险模型

2.1.1 经典 C-L (Cramér-Lundberg) 模型

一百多年前，Lundberg 提出了保险人的经典风险模型，后由 Cramér 对该模型进行完善得到经典的 C-L 模型，用数学模型简洁而深刻地描述了保险人的赔付过程，后诸多学者在该模型的基础上展开研究.

C-L 模型定义保险公司的盈余过程为：

$$dR(t) = cdt - d \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i,$$

其中 $c > 0$ 为保险公司收取的保费率，可由期望保费准则、方差保费准则等计算得到. $\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ 为复合泊松过程，表示保险人在时间区间 $[0, t]$ 上的赔付总额， $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ 是强度为 λ 的齐次泊松过程，代表时间 $[0, t]$ 内发生的赔付次数， $Y_i, i = 1, 2, 3$ 表示第 i 次赔付金额的大小，假设 $Y_1, Y_2, Y_3, \dots$ 是独立同分布的正随机变量，且具有相同的分布函数 $F(y)$ ，满足 $F(0) = 0$ 和 $\int_0^\infty y^2 F(dy) < \infty$. Y_i 具有有限一阶矩和二阶矩： $E[Y_i] = \mu_Y$ 和 $E[Y_i^2] = \sigma_Y^2$.

2.1.2 扩散模型

鉴于在 C-L 模型下展开的研究时常难以求得解析解，Grandell 提出用一般的布朗运动近似替代保险人赔付中的复合泊松过程，即

$$dL(t) = d \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i = a dt - b dW(t),$$

则保险人的盈余过程为

$$dR(t) = (c - a)dt + b dW(t),$$

其中 $a = \lambda \mu_Y$, $b = \sqrt{\lambda \sigma_Y^2}$, $\{W(t)\}_{t \geq 0}$ 是一维标准布朗运动。布朗运动的良好性质，如路径连续，便于分析和处理连续时间下的金融问题，这使得扩散模型提出后在保险研究领域得到广泛应用。本文所使用的再保险模型也是该模型的推广。

2.2 随机利率模型

随机利率模型可分为均衡模型和无套利模型，本小节主要介绍均衡利率模型，其参数具有稳定性，不受市场期限结构变化的影响。

2.2.1 Vasicek 模型

Vasicek 模型是一种单因素短期利率模型，主要用于刻画在单一市场风险来源情形下的利率变化。该模型表明瞬时利率服从

$$dr(t) = k_1(k_2 - r(t))dt + \sigma_r dW_r(t),$$

其中利率回复均值的速度 k_1 、利率均值 k_2 和波幅 σ_r 均为正常数， $\{W_r(t)\}_{t \geq 0}$ 为一维标准布朗运动。 $r(t)$ 围绕着 k_2 波动，并受到噪声 $\sigma_r dW_r(t)$ 的冲击。当 $r(t)$ 偏离 k_2 时会立刻被拉回，以速度 k_1 回到均值 k_2 。该模型又称均值回归利率模型，在金融研究中有广泛应用。

然而，该模型无法避免负利率出现的情况。此外，Vasicek 模型假设所有参数都是常数，不受时间变化的影响，忽略了利率水平对波动率产生的影响以及波动率的随机性。

2.2.2 CIR 模型

为了解决 Vasicek 模型中利率可能出现负值的问题, Cox、Ingersoll 和 Ross 在 1985 年提出了单因子 CIR 模型. 该模型假设短期利率的风险中性动态遵循以下方程:

$$dr(t) = (\mu - \eta r(t))dt - k\sqrt{r(t)}dW_r(t),$$

其中 μ, η, k 为正常数, 且 $2\mu > k$ (确保利率非负). 瞬时利率的波动率与瞬时利率平方根的大小成正比, 这意味着当利率增加时, 其波动性也会随之增强. 基于这一假设, 在 CIR 模型中, 利率服从非中心卡方分布. 当 $2\mu > k$ 时, 该模型能够确保利率始终大于 0.

CIR 模型的优势在于其产生于经济中的内生变量与总体均衡, 能够纳入风险等多重因素, 然而, 该模型的参数估计过程较为复杂, 给现实预测带来了一定的挑战. 本文第四章采用了 CIR 模型来描述随机利率.

2.3 风险资产价格模型

2.3.1 GBM (Geometric Brownian Motion) 模型

几何布朗运动模型是最简单的风险资产价格模型, 模型的系数均为常数, 该模型假设风险资产价格满足如下方程:

$$dS(t) = \hat{\mu}S(t)dt + \sigma_s S(t)dW_s(t),$$

其中 $\hat{\mu}$ 为风险资产的预期收益率、 σ_s 为风险资产价格的瞬时波动率, $\{W_s(t)\}_{t \geq 0}$ 为一维标准布朗运动. 该模型虽然便于计算, 但是假设条件过于理想化, 与现实情况偏差较大.

2.3.2 CEV 模型

CEV 模型将风险资产价格的幂函数放入波动率中, 认为风险资产的价格由如下随机过程驱动:

$$dS(t) = \hat{\mu}S(t)dt + \sigma_s S^{\beta+1}(t)dW_s(t), \quad S(0) = S_0,$$

其中常数 $\hat{\mu}$ 为风险资产的预期收益率, $\sigma_s S^\beta(t)$ 为风险资产价格的瞬时波动率, β 为弹性系数. CEV 模型生动刻画了标的资产价格与波动率的关系, 当 $\beta = 0$ 时, CEV 模型退化为 GBM 模型; 当 $\beta > 0$ ($\beta < 0$) 时, 瞬时波动率 $\sigma_s S^\beta(t)$ 随着风险资产价格的上涨(下跌)而增大. 资产价格变动时, 波动率也随之调整, 从而更灵活地反映市场动态. 本文第三章采用 CEV 模型刻画风险资产的价格过程.

2.3.3 Heston 模型

Heston 模型将波动率设定为一个平方根过程, 同时给予其模型参数特定约束条件, 保证了波动率的正定性. 该模型假设风险资产的价格过程满足:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{S(t)} = rdt + \sqrt{\alpha(t)} \left(\phi \sqrt{\alpha(t)} dt + dW_s(t) \right), & S(0) = S_0, \\ d\alpha(t) = \beta(\delta - \alpha(t))dt + \sigma_\alpha \sqrt{\alpha(t)} dW_\alpha(t), & \alpha(0) = l_0, \end{cases}$$

其中 β , δ , σ_α , ϕ 为正常数, 且 $2\beta\delta > \sigma_\alpha^2$. 一维标准布朗运动 $W_s(t)$ 和 $W_\alpha(t)$ 满足 $dW_s(t)dW_\alpha(t) = \rho dt$. β 为波动率回复到均值的速度, δ 为波动率的均值回复水平, $\phi\sqrt{\alpha(t)}$ 代表资产价格波动风险 $W_s(t)$ 的市场价格, $\sigma_\alpha\sqrt{\alpha(t)}$ 为风险资产价格波动率的波动率.

Heston 模型考虑了波动率的均值回归特性, 允许波动率与标的资产之间存在杠杆效应, 能够更加合理地捕捉市场特点. 本文第四章中风险资产的价格过程由 Heston 模型描述.

2.4 均值-方差问题

假设 U 为所有可行策略 u 组成的集合, 保险人的目标是寻找最优策略组合 u^* , 使得其终端财富 $X(T)$ 在均值-方差准则下达到最大 (即本文所研究的策略). 我们将均值-方差最优化问题表示为:

$$J(t, x; u^*) := \max_{u \in U} \left(E_{t,x} [X^u(T)] - \frac{\gamma}{2} \text{Var}_{t,x} [X^u(T)] \right),$$

其中 $E_{t,x}[\cdot] = E[\cdot | X^u(t) = x]$, $Var_{t,x}[\cdot] = Var[\cdot | X^u(t) = x]$, $\gamma > 0$ 表示保险人的风险厌恶系数, γ 越大, 保险人越厌恶风险, 用方差量化的风险在模型中的影响越大.

第3章 CEV 模型下考虑相对绩效的保险公司与再保险公司

再保险-投资博弈

本章研究了 CEV 模型下考虑相对绩效的保险公司和再保险公司的再保险-投资博弈问题。保险公司决定再保险比例，再保险公司决定再保险价格，二者博弈后确定最终的再保险费。两公司均可在金融市场上投资无风险资产和价格过程服从 CEV 模型的风险资产。通过相对绩效量化两个公司的竞争。在均值-方差准则下，二者均旨在最大化自身终端相对财富。结合博弈论思想建模，根据随机最优控制理论建立并求解扩展 HJB 方程，得到最优再保险合同和最优时间一致投资策略的解析解。最后进行数值模拟反映模型参数对最优策略的影响。

3.1 模型建立

给定完备的带流概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$ ，其中 $T > 0$ 为决策制定的终端时刻， $\mathbb{P}$ 为现实的概率测度， $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$ 为域流，表示在 t 时刻所有可获得的信息，在 t 时刻所作的任何决定都是基于这些信息的。

令 $p(t) > 0$ 和 $q(t) > 0$ 为一致有界的确定性函数，分别表示保险公司索赔过程 $R(t)$ 的均值和波动。索赔过程 $R(t)$ 满足以下随机微分方程：

$$dR(t) = p(t)dt + q(t)dW(t). \quad (3.1)$$

其中， $W(t)$ 为完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$ 上的标准布朗运动。Grandell^[47] 认为，对于那些金额大到使得单笔索赔额相对于总保险准备金而言较小的保险组合，方程(3.1)可以很好地描述其索赔过程。为了确保在任意时间段内实现负索赔金额的概率足够小，参考 Yang 和 Chen^[16]，我们假设对任意给定的 $t \in [0, T]$ ，比率 $\frac{p(t)}{q(t)}$ 都足够大(例如 $\frac{p(t)}{q(t)} > 3$)。

假设保险公司收取的保费 $c(t)$ 由期望值保费准则决定, 即 $c(t) = (1 + \theta)p(t)$, 其中 $\theta > 0$ 为保险公司的安全负荷. 为了降低索赔风险, 保险公司可与再保险公司签订再保险合同购买比例再保险, 假设 t 时刻保险公司的自留比例为 $a(t) \in [0, 1]$, 则每一笔索赔额的 $1 - a(t)$ 由再保险公司承担. 为此, 保险公司向再保险公司支付再保险费 $(1 - a(t))b(t)$, 这里 $b(t)$ 为 t 时刻的再保险价格. $a(t)$ 由保险公司决定, $b(t)$ 由再保险公司决定. 考虑到双方的议价博弈, 再保险公司会动态调整再保险价格 $b(t)$. 假设 $b(t) \in (\underline{b}(t), \bar{b}(t))$, 且 $\bar{b}(t)$ 和 $\underline{b}(t)$ 不依赖于具体的保费准则. 考虑到保险公司的利益, 设 $\bar{b}(t)$ 为 $a(t) = 1$ 时的再保险价格. 从再保险公司的角度出发, 设 $\underline{b}_1(t)$ 为 $a(t) = 0$ 时的再保险价格, $\underline{b}(t) = \underline{b}_1(t) \vee c(t)$. $b(t) \geq c(t)$ 表明再保险价格至少是保险公司收取的保费, 这与现实相符.

考虑索赔风险分担策略和再保险价格后, 保险公司和再保险公司的盈余过程 $X_1(t)$, $X_2(t)$ 分别满足下列随机微分方程:

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= [c(t) - (1 - a(t))b(t)]dt - a(t)dL(t) \\ &= [\theta p(t) - (1 - a(t))(b(t) - p(t))]dt - a(t)q(t)dW(t), \\ dX_2(t) &= (1 - a(t))b(t)dt - (1 - a(t))dL(t) \\ &= (1 - a(t))(b(t) - p(t))dt - (1 - a(t))q(t)dW(t). \end{aligned}$$

保险公司和再保险公司可在金融市场中投资, 假设金融市场无摩擦, 不考虑交易成本和税收, 且限制卖空. 市场中只有两种资产: 无风险资产和风险资产. 无风险资产的价格过程 $P(t)$ 满足 $dP(t) = rP(t)dt$, 其中 $r > 0$ 为无风险利率. 风险资产的价格过程服从 CEV 模型:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S^{\beta+1}(t)dW_s(t),$$

其中 $\mu > r$ 为风险资产的瞬时期望收益率, σ 为正常数, β 为弹性系数, $\sigma S^{\beta}(t)$ 为风险资产的瞬时波动, $W_s(t)$ 为标准布朗运动, 且与 $W(t)$ 独立.

令 $\pi_1(t), \pi_2(t)$ 分别为保险公司和再保险公司对风险资产的投资额, 保险公司和再保险公司的策略分别为 $u_1 := (a(t), \pi_1(t)), u_2 := (b(t), \pi_2(t))$. 考虑投资后, 保险公司的财富过程 $X_1^{u_1}(t)$ 和再保险公司的财富过程 $X_2^{u_2}(t)$ 分别可以描述为:

$$\begin{aligned} dX_1^{u_1}(t) &= [rX_1^{u_1}(t) + \theta p(t) + \pi_1(t)(\mu - r) - (1 - a(t))(b(t) - p(t))]dt \\ &\quad - a(t)q(t)dW(t) + \pi_1(t)\sigma S^{\beta}(t)dW_s(t), \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} dX_2^{u_2}(t) = & \left[rX_2^{u_2}(t) + \pi_2(t)(\mu - r) + (1 - a(t))(b(t) - p(t)) \right] dt \\ & - (1 - a(t))q(t)dW(t) + \pi_2(t)\sigma S^\beta(t)dW_s(t). \end{aligned} \quad (3.3)$$

根据方程(3.2)和(3.3)，保险公司和再保险公司都非常关注再保险保费 $(1 - a(t))b(t)$ ，前者希望 $(1 - a(t))b(t)$ 尽可能小，后者反之，双方博弈后共同确定一个合适的 $(1 - a(t))b(t)$ 。本文采用相对绩效量化二者的博弈：

$$(1 - \tau_i)X_i^{u_i}(t) + \tau_i(X_i^{u_i}(t) - X_j^{u_j}(t)), i \neq j, i, j \in \{1, 2\}.$$

其中 $\tau_1 \in [0, 1], \tau_2 \in [0, 1]$ 表示二者的竞争强度，刻画了他们对对方业绩的敏感度。 τ_i 增大代表他们对对方绩效表现的关注度增加，同时更加关心自身相对财富的增长。当 $\tau_i = 0$ 时，他们仅关注自身。

令

$$Y^{u_1, u_2}(t) := (1 - \tau_1)X_1^{u_1}(t) + \tau_1(X_1^{u_1}(t) - X_2^{u_2}(t))$$

和

$$Z^{u_1, u_2}(t) := (1 - \tau_2)X_2^{u_2}(t) + \tau_2(X_2^{u_2}(t) - X_1^{u_1}(t))$$

分别为保险公司和再保险公司的相对财富过程，则有：

$$\begin{aligned} dY^{u_1, u_2}(t) = & [(\mu - r)(\pi_1(t) - \tau_1\pi_2(t)) - (1 + \tau_1)(1 - a(t))(b(t) - p(t)) \\ & + rY^{u_1, u_2}(t) + \theta p(t)]dt + (\pi_1(t) - \tau_1\pi_2(t))\sigma S^\beta(t)dW_s(t) \\ & + [\tau_1 - (1 + \tau_1)a(t)]q(t)dW(t), \end{aligned} \quad (3.4)$$

和

$$\begin{aligned} dZ^{u_1, u_2}(t) = & [(\mu - r)(\pi_2(t) - \tau_2\pi_1(t)) + (1 + \tau_2)(1 - a(t))(b(t) - p(t)) \\ & + rZ^{u_1, u_2}(t) - \tau_2\theta p(t)]dt + (\pi_2(t) - \tau_2\pi_1(t))\sigma S^\beta(t)dW_s(t) \\ & + [a(t)(1 + \tau_2) - 1]q(t)dW(t). \end{aligned} \quad (3.5)$$

假设 $Y^{u_1, u_2}(0) = y_0, Z^{u_1, u_2}(0) = z_0$ 。

定义 3.1 对任意给定的 $t \in [0, T]$ ，策略 $u_1 = (a(t), \pi_1(t))_{t \in [0, T]}$ 和 $u_2 = (b(t), \pi_2(t))_{t \in [0, T]}$ 被称为是可容许的，如果满足：

1) $a(t) \in [0, 1]$ ， $b(t) \in (\underline{b}(t), \bar{b}(t))$ ， $\pi_1(t)$ 和 $\pi_2(t)$ 是 $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ -循序可测的，并且满足 $E \left\{ \int_0^T [\pi_1^4(t) + \pi_2^4(t)] dt \right\} < +\infty$ ；

2) 在策略 u_1, u_2 下，方程(3.4)和(3.5)分别有唯一强解 $Y^{u_1, u_2}(t)$ 和 $Z^{u_1, u_2}(t)$ 。

保险公司和再保险公司所有可容许策略的集合分别记为 $\mathcal{A}_T$ 和 $\mathcal{A}_R$.

受 Yang 和 Chen^[16]启发, 接下来建立保险公司与再保险公司之间的 Stackelberg 博弈框架.

首先, 对任意给定的 $u_2 \in \mathcal{A}_R$, 保险公司的目标是找到策略 $\bar{u}_1^* := (\bar{a}^*(t), \bar{\pi}_1^*(t)) \in \mathcal{A}_T$ 使得

$$J_1(t, y, s; \bar{u}_1^*, u_2) := \max_{u_1 \in \mathcal{A}_T} J_1(t, y, s; u_1, u_2), \quad (3.6)$$

其中

$$J_1(t, y, s; u_1, u_2) := E_{t,y,s} [Y^{u_1, u_2}(T)] - \frac{\gamma_1}{2} \text{Var}_{t,y,s} [Y^{u_1, u_2}(T)],$$

$$E_{t,y,s} [\cdot] = E [\cdot | Y^{u_1, u_2}(t) = y, S(t) = s],$$

$$\text{Var}_{t,y,s} [\cdot] = \text{Var} [\cdot | Y^{u_1, u_2}(t) = y, S(t) = s],$$

$\gamma_1 > 0$ 为保险公司的风险厌恶系数, $\bar{a}^*(t) = \xi_1^*(t, b(t))$ 和 $\bar{\pi}_1^*(t) = \xi_2^*(t, \pi_2(t))$ 为保险公司的最优响应策略.

其次, 针对保险公司的最优响应策略 $\bar{u}_1^* \in \mathcal{A}_T$, 再保险公司的目标是找到策略 $u_2^* = (b^*(t), \pi_2^*(t)) \in \mathcal{A}_R$ 使得

$$J_2(t, z, s; \bar{u}_1^*, u_2^*) := \max_{u_2 \in \mathcal{A}_R} J_2(t, z, s; \bar{u}_1^*, u_2), \quad (3.7)$$

其中

$$J_2(t, z, s; \bar{u}_1^*, u_2) := E_{t,z,s} [Z^{\bar{u}_1^*, u_2}(T)] - \frac{\gamma_2}{2} \text{Var}_{t,z,s} [Z^{\bar{u}_1^*, u_2}(T)],$$

$$E_{t,z,s} [\cdot] = E [\cdot | Z^{\bar{u}_1^*, u_2}(t) = z, S(t) = s],$$

$$\text{Var}_{t,z,s} [\cdot] = \text{Var} [\cdot | Z^{\bar{u}_1^*, u_2}(t) = z, S(t) = s],$$

$\gamma_2 > 0$ 为再保险公司的风险厌恶系数.

最后, 保险公司根据再保险公司的最优再保险价格 $b^*(t)$ 和最优投资策略 $\pi_2^*(t)$ 调整其最优响应策略 $\bar{u}_1^*(t) = (\bar{a}^*(t), \bar{\pi}_1^*(t)) = (\xi_1^*(t, b(t)), \xi_2^*(t, \pi_2(t)))$, 得到最终的最优策略 $u_1^*(t) = (a^*(t), \pi_1^*(t)) = (\xi_1^*(t, b^*(t)), \xi_2^*(t, \pi_2^*(t)))$.

称 (u_1^*, u_2^*) 为问题(3.6)和(3.7)的最优策略, $\bar{J}_1(t, y, s) := J_1(t, y, s; u_1^*, u_2^*)$ 为保险公司的最优值函数, $\bar{J}_2(t, z, s) := J_2(t, z, s; \bar{u}_1^*, u_2^*)$ 为再保险公司的最优值函数.

由于问题(3.6)和(3.7)中含有的方差项不满足期望的迭代性, 导致贝尔曼最优性原理不成立, 因此问题(3.6)和(3.7)是时间不一致的, 即 t 时刻得到的最优策略和 $t + \Delta t$ 时刻得到的最优策略不一致. 因此在 3.2 节, 我们将在博弈论的框架下重述问题以寻找时间一致策略.

3.2 模型求解

3.2.1 保险公司的最优响应策略

定义 3.2 考虑 $\bar{u}_1^*(k) \in \mathcal{A}_T$ (一个候选的均衡策略), 对任意固定的 $u_2 \in \mathcal{A}_R, u_1(k) \in \mathcal{A}_T$ 和实数 $\varepsilon > 0$, 定义如下策略:

$$u_1^\varepsilon(k) = \begin{cases} u_1(k), & t \leq k < t + \varepsilon, \\ \bar{u}_1^*(k), & t + \varepsilon \leq k \leq T. \end{cases}$$

如果满足

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J_1(t, y, s; \bar{u}_1^*, u_2) - J_1(t, y, s; u_1^\varepsilon, u_2)}{\varepsilon} \geq 0,$$

那么称 $\bar{u}_1^*(k)$ 为均衡策略, 相应的均衡值函数为 $J_1(t, y, s; \bar{u}_1^*, u_2)$.

由 Björk 等^[11]可知定义 3.2 所给的均衡策略是时间一致的. 在后文中, 分别称均衡策略和均衡值函数为最优时间一致策略和最优值函数.

记 $C^{1,2,2}([0, T] \times R \times R^+) := \{\phi(t, y, s) \mid \phi(t, \cdot, \cdot) \text{ 在 } [0, T] \text{ 上一阶连续可微, } \phi(\cdot, y, s) \text{ 在 } [0, T] \times R \times R^+ \text{ 上二阶连续可微}\}$, $D^{1,2,2}([0, T] \times R \times R^+) := \{\phi(t, y, s) \mid \phi(t, y, s) \in C^{1,2,2}([0, T] \times R \times R^+) \text{ 且所有一阶偏导满足多项式增长条件}\}$. 对任意 $\phi(t, y, s) \in C^{1,2,2}([0, T] \times R \times R^+)$, 相对财富过程(3.4)的一般无穷小生成元 $\mathcal{B}^{u_1, u_2}$ 定义为:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{u_1, u_2} \phi(t, y, s) = & \phi_t + [(\mu - r)(\pi_1(t) - \tau_1 \pi_2(t)) - (1 + \tau_1)(1 - a(t))(b(t) - p(t)) + yr \\ & + \theta p(t)] \phi_y + \mu s \phi_s + \sigma^2 s^{2\beta+1} (\pi_1(t) - \tau_1 \pi_2(t)) \phi_{ys} + \frac{1}{2} \sigma^2 s^{2\beta+2} \phi_{ss} \\ & + \frac{1}{2} [\sigma^2 s^{2\beta} (\pi_1(t) - \tau_1 \pi_2(t))^2 + q^2(t) (\tau_1 - (1 + \tau_1) a(t))^2] \phi_{yy}. \end{aligned}$$

定理 3.3 针对问题 (3.6)，假设 $Y^{u_1, u_2}(k), k \in [t, T], u_1 \in \mathcal{A}_T, u_2 \in \mathcal{A}_R$ 满足 $E_{t, y, s} [\sup_{k \in [t, T]} |Y^{u_1, u_2}(k)|^8] < +\infty, \forall (t, y, s) \in [0, T] \times R \times R^+$ 。存在两个实函数 $V(t, y, s), h(t, y, s) \in D^{1,2,2}([0, T] \times R \times R^+)$ ，对于任意固定的 $(t, y, s) \in [0, T] \times R \times R^+$ 和 $u_2 \in \mathcal{A}_R$ ，下列扩展 HJB 方程成立：

$$\sup_{u_1 \in \mathcal{A}_T} \left\{ \mathcal{B}^{u_1, u_2} V(t, y, s) - \frac{1}{2} \gamma_1 \mathcal{B}^{u_1, u_2} h^2(t, y, s) + \gamma_1 h(t, y, s) \mathcal{B}^{u_1, u_2} h(t, y, s) \right\} = 0 \quad (3.8)$$

$$\mathcal{B}^{\bar{u}_1^*, u_2} h(t, y, s) = 0. \quad (3.9)$$

边界条件分别为 $V(T, y, s) = y$ 和 $h(T, y, s) = y$ ，这里

$$\begin{aligned} \bar{u}_1^* &= (\bar{a}^*(t), \bar{\pi}_1^*(t)) = (\xi_1^*(t, b(t)), \xi_2^*(t, \pi_2(t))) \\ &= \arg \sup_{u_1 \in \mathcal{A}_T} \left\{ \mathcal{B}^{u_1, u_2} V(t, y, s) - \frac{1}{2} \gamma_1 \mathcal{B}^{u_1, u_2} h^2(t, y, s) + \gamma_1 h(t, y, s) \mathcal{B}^{u_1, u_2} h(t, y, s) \right\}. \end{aligned}$$

则 $\bar{u}_1^*$ 为最优时间一致策略， $V(t, y, s) = J_1(t, y, s; \bar{u}_1^*, u_2)$ 为最优值函数， $h(t, y, s) = E_{t, y, s} [h(T, Y^{\bar{u}_1^*, u_2}, S(T))]$ 为终端盈余的期望。故保险公司的最优响应索赔风险分担策略为 $\xi_1^*(t, b(t)) = (0 \vee a^0(t, b(t))) \wedge 1$ ，其中

$$a^0(t, b(t)) = \frac{\tau_1}{1 + \tau_1} + \frac{b(t) - p(t)}{\gamma_1(1 + \tau_1)q^2(t)e^{r(T-t)}}. \quad (3.10)$$

保险公司的最优响应投资策略为：

当 $\beta \neq 0$ 时，

$$\bar{\pi}_1^*(t) = \frac{\mu - r}{\gamma_1 \sigma^2 s^{2\beta} e^{r(T-t)}} \left[1 - \frac{(\mu - r)(e^{-2\beta r(T-t)} - 1)}{r} \right] + \tau_1 \pi_2(t), \quad (3.11)$$

当 $\beta = 0$ 时，

$$\bar{\pi}_1^*(t) = \frac{\mu - r}{\gamma_1 \sigma^2 e^{r(T-t)}} + \tau_1 \pi_2(t). \quad (3.12)$$

证明：证明过程见附录 A. 证毕.

由定理 3.3 可推导出再保险价格的上限和下限.

性质 3.4 再保险价格的上限和下限分别为

$$\bar{b}(t) = p(t) + \gamma_1 q^2(t) e^{r(T-t)}, \quad (3.13)$$

和

$$\underline{b}(t) = (1 + \theta) p(t). \quad (3.14)$$

证明：当 $\xi_1^*(t, b(t)) = a^0(t, b(t)) = 1$ 时, 解得再保险价格的上限为式(3.13). 当 $\xi_1^*(t, b(t)) = a^0(t, b(t)) = 0$ 时, 解得 $b_1(t) = p(t) - \tau_1 \gamma_1 q^2(t) e^{r(T-t)} \leq p(t)$, 而 $c(t) = (1 + \theta) p(t) > p(t)$, 又 $\underline{b}(t) = b_1(t) \vee c(t)$, 因此再保险价格的下限为式(3.14). 证毕.

3.2.2 再保险公司的最优时间一致策略

定义 3.5 考虑 $u_2^*(k) \in \mathcal{A}_{\mathcal{R}}$ (一个候选的均衡策略), 对任意固定的 $u_2(k) \in \mathcal{A}_{\mathcal{R}}$ 和实数 $\varepsilon > 0$, 定义如下策略

$$u_2^\varepsilon(k) = \begin{cases} u_2(k), & t \leq k < t + \varepsilon, \\ u_2^*(k), & t + \varepsilon \leq k \leq T. \end{cases}$$

对于定理 3.3 所给的 $\bar{u}_1^* = (\bar{a}^*(t), \bar{\pi}_1^*(t)) = (\xi_1^*(t, b(t)), \xi_2^*(t, \pi_2(t)))$, 如果满足

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J_2(t, z, s; \bar{u}_1^*, u_2^*) - J_2(t, z, s; \bar{u}_1^*, u_2^\varepsilon)}{\varepsilon} \geq 0,$$

则称 u_2^* 为再保险公司的均衡策略, $J_2(t, z, s; \bar{u}_1^*, u_2^*)$ 为相应的均衡值函数.

在保险公司选择策略 $\bar{u}_1^*$ 的假设下, 对于任意 $\psi(t, z, s) \in C^{1,2,2}([0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$, 相对财富过程(3.5)的一般无穷小生成元定义为:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{\bar{u}_1^*, u_2^*} \psi(t, z, s) = & [(\mu - r)(\pi_2(t) - \tau_2 \bar{\pi}_1^*(t)) + (1 + \tau_2)(1 - \bar{a}^*(t))(b(t) - p(t)) + zr - \tau_2 \theta p(t)] \psi_z \\ & + \psi_t + \mu s \psi_s + \frac{1}{2} [(\pi_2(t) - \tau_2 \bar{\pi}_1^*(t))^2 \sigma^2 s^{2\beta} + q^2(t)((1 + \tau_2) \bar{a}^*(t) - 1)^2] \psi_{zz} \\ & + (\pi_2(t) - \tau_2 \bar{\pi}_1^*(t)) \sigma^2 s^{2\beta+1} \psi_{zs} + \frac{1}{2} \sigma^2 s^{2\beta+2} \psi_{ss}. \end{aligned}$$

定理 3.6 针对问题(3.7), 定理 3.3 所给出的 $\bar{u}_1^* = (\xi_1^*(t, b(t)), \xi_2^*(t, \pi_2(t)))$ 和 $u_2 \in \mathcal{A}_R$, 假设 $Z^{\bar{u}_1^*, u_2}(k), k \in [t, T]$ 满足 $E_{t,z,s} \left[\sup_{k \in [t, T]} |Z^{\bar{u}_1^*, u_2}(k)|^8 \right] < +\infty, \forall (t, z, s) \in [0, T] \times R \times R^+$ 且存在两个实函数 $\tilde{V}(t, z, s), \tilde{h}(t, z, s) \in D^{1,2,2}([0, T] \times R \times R^+)$, 对于任意固定的 $(t, z, s) \in [0, T] \times R \times R^+$ 和 $u_2 \in \mathcal{A}_R$, 下列扩展 HJB 方程成立:

$$\sup_{u_2 \in \mathcal{A}_R} \left\{ C^{\bar{u}_1^*, u_2} \tilde{V}(t, z, s) - \frac{1}{2} \gamma_2 C^{\bar{u}_1^*, u_2} \tilde{h}^2(t, z, s) + \gamma_2 \tilde{h}(t, z, s) C^{\bar{u}_1^*, u_2} \tilde{h}(t, z, s) \right\} = 0,$$

$$C^{\bar{u}_1^*, u_2} \tilde{h}(t, z, s) = 0.$$

边界条件分别为 $\tilde{V}(T, z, s) = z$ 和 $\tilde{h}(T, z, s) = z$, 这里

$$\bar{u}_2^* = \sup_{u_2 \in \mathcal{A}_R} \left\{ C^{\bar{u}_1^*, u_2} \tilde{V}(t, z, s) - \frac{1}{2} \gamma_2 C^{\bar{u}_1^*, u_2} \tilde{h}^2(t, z, s) + \gamma_2 \tilde{h}(t, z, s) C^{\bar{u}_1^*, u_2} \tilde{h}(t, z, s) \right\}.$$

则 $\bar{u}_2^*$ 为最优时间一致策略, $\tilde{V}(t, z, s) = J_2(t, z, s; \bar{u}_1^*, \bar{u}_2^*)$ 为最优值函数, $\tilde{h}(t, z, s) = E_{t,z,s}[\tilde{h}(T, Z^{\bar{u}_1^*, \bar{u}_2^*}(T), S(T))]$ 为终端盈余的期望值. 故再保险公司的最优时间一致再保险价格为 $b^*(t) = ((1+\theta)p(t)) \vee b^0(t)$, 其中

$$b^0(t) = \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)(1 + \tau_1) - \gamma_2 \tau_1(1 + \tau_2)}{2\gamma_1(1 + \tau_1) + \gamma_2(1 + \tau_2)} \gamma_1 q^2(t) e^{r(T-t)} + p(t).$$

再保险公司的最优时间一致投资策略为:

当 $\beta \neq 0$ 时,

$$\pi_2^*(t) = \frac{\mu - r}{\sigma^2 s^{2\beta} e^{r(T-t)}} \left[1 - \frac{(\mu - r)(e^{-2\beta r(T-t)} - 1)}{r} \right] \frac{\gamma_2 \tau_2 + \gamma_1}{(1 - \tau_1 \tau_2) \gamma_1 \gamma_2}, \quad (3.15)$$

当 $\beta = 0$ 时,

$$\pi_2^*(t) = \frac{\mu - r}{(1 - \tau_1 \tau_2) \sigma^2 e^{r(T-t)}} \left(\frac{1}{\gamma_2} + \frac{\tau_2}{\gamma_1} \right). \quad (3.16)$$

定理 3.6 的证明与定理 3.3 的证明方法类似, 故略去证明.

3.2.3 最优再保险合同以及保险公司的最优时间一致投资策略

定理 3.7 基于前文假设及推导，得最优再保险合同如下：

情形 1：当

$$\frac{(\gamma_1 + \gamma_2)(1 + \tau_1) - \gamma_2 \tau_1(1 + \tau_2)}{2\gamma_1(1 + \tau_1) + \gamma_2(1 + \tau_2)} \gamma_1 q^2(t) e^{r(T-t)} \geq \theta p(t),$$

最优再保险合同为：

$$a^*(t) = \frac{1}{1 + \tau_1} \left[\tau_1 + \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)(1 + \tau_1) - \gamma_2 \tau_1(1 + \tau_2)}{2\gamma_1(1 + \tau_1) + \gamma_2(1 + \tau_2)} \right], \quad (3.17)$$

$$b^*(t) = \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)(1 + \tau_1) - \gamma_2 \tau_1(1 + \tau_2)}{2\gamma_1(1 + \tau_1) + \gamma_2(1 + \tau_2)} \gamma_1 q^2(t) e^{r(T-t)} + p(t). \quad (3.18)$$

情形 2：当

$$\frac{(\gamma_1 + \gamma_2)(1 + \tau_1) - \gamma_2 \tau_1(1 + \tau_2)}{2\gamma_1(1 + \tau_1) + \gamma_2(1 + \tau_2)} \gamma_1 q^2(t) e^{r(T-t)} < \theta p(t),$$

最优再保险合同为：

$$a^*(t) = \frac{\tau_1}{1 + \tau_1} + \frac{\theta p(t)}{\gamma_1(1 + \tau_1) q^2(t)} e^{-r(T-t)}, \quad (3.19)$$

$$b^*(t) = (1 + \theta) p(t). \quad (3.20)$$

证明： 当

$$\frac{(\gamma_1 + \gamma_2)(1 + \tau_1) - \gamma_2 \tau_1(1 + \tau_2)}{2\gamma_1(1 + \tau_1) + \gamma_2(1 + \tau_2)} \gamma_1 q^2(t) e^{r(T-t)} \geq \theta p(t)$$

时， $b^0(t) \geq \underline{b}(t)$ ，由定理 3.7 得最优时间一致再保险价格为式(3.18)，将式(3.18)

带入式(3.10)，并且 $0 < \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)(1 + \tau_1) - \gamma_2 \tau_1(1 + \tau_2)}{2\gamma_1(1 + \tau_1) + \gamma_2(1 + \tau_2)} < 1$ ，得最优时间一致索赔风险

分担策略为式(3.17).

当

$$\frac{(\gamma_1 + \gamma_2)(1 + \tau_1) - \gamma_2 \tau_1(1 + \tau_2)}{2\gamma_1(1 + \tau_1) + \gamma_2(1 + \tau_2)} \gamma_1 q^2(t) e^{r(T-t)} < \theta p(t)$$

时, $b^0(t) < \underline{b}(t)$, 由定理 3.7 得最优时间一致再保险价格为 $b^*(t) = (1 + \theta)p(t)$. 由性质 3.4 得 $\gamma_1 q^2(t)e^{r(T-t)} > \theta p(t)$, 即 $0 < \frac{\theta p(t)}{\gamma_1 q^2(t)e^{r(T-t)}} < 1$, 将式(3.20)代入式(3.10)得最优时间一致索赔风险分担策略为式(3.19). 证毕.

注 3.8 在情形 1 中, 由式(3.10)可知, 若 $p(t)$, $q(t)$, $b(t)$ 为已知常数, 则保险公司的风险分担策略 $a^0(t, b(t))$ 随着时间 t 的推移而增加, 其再保险需求下降, 再保险公司的利润减少. 这种情况只发生在再保险公司仅作为价格接收者的完备再保险市场中. 本章中再保险公司具备一定的议价能力. 为了获得更高的利润, 再保险公司不再被动接受保险公司再保险需求的下降, 而是动态地调低再保险价格以争取更多的再保险份额. 最终保险公司会确定一个合适的再保险比例, 该比例只依赖于双方的风险厌恶系数和相对绩效参数. 在情形 2 中, 再保险价格取最小值, 因此保险公司无需议价. 对应的最优索赔风险分担策略(3.19)与式(3.10)形式相似.

定理 3.9 基于前文假设及推导, 得保险公司的最优时间一致投资策略如下:

当 $\beta \neq 0$ 时,

$$\pi_1^*(t) = \frac{\mu - r}{\sigma^2 s^{2\beta} e^{r(T-t)}} \left[1 - \frac{(\mu - r)(e^{-2\beta r(T-t)} - 1)}{r} \right] \frac{\gamma_1 \tau_1 + \gamma_2}{(1 - \tau_1 \tau_2) \gamma_1 \gamma_2}, \quad (3.21)$$

当 $\beta = 0$ 时,

$$\pi_1^*(t) = \frac{\mu - r}{(1 - \tau_1 \tau_2) \sigma^2 e^{r(T-t)}} \left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{\tau_1}{\gamma_2} \right), \quad (3.22)$$

证明: 将定理 3.6 中的 $\pi_2^*(t)$, 即式(3.15)、(3.16)分别带入式(3.11)、(3.12)中, 对保险公司的最优响应策略进行调整, 可得保险公司最终的最优时间一致投资策略如式(3.21)和(3.22)所示. 证毕.

3.3 数值模拟

本节通过数值模拟分析模型主要参数对最优策略的影响. 参考 Yang 和 Chen^[16]、Zheng 等^[48]、Zhao 等^[49], 并结合参数实际的经济含义, 本节基本参数设定如下.

表 3-1 参数表

参数	τ_1	τ_2	p	q^2	γ_1	γ_2	T
取值	0.6	0.4	6800	11500	5	2	12
参数	t	r	μ	σ	s	β	
取值	0	0.02	0.12	0.2	3	0.9	

3.3.1 模型参数对最优再保险合同的影响

由于定理 3.7 中的情形 2 属于特殊情况, 本小节只考虑定理 3.7 中的情形 1. 在确定再保险合同的博弈中, 保险公司希望减少再保险费, 而再保险公司希望提高再保险费. 因此, 我们分析了模型参数对最优索赔风险分担策略 $a^*(t)$ 、最优再保险价格 $b^*(t)$ 以及最优再保险费 $(1-a^*(t))b^*(t)$ 的影响.

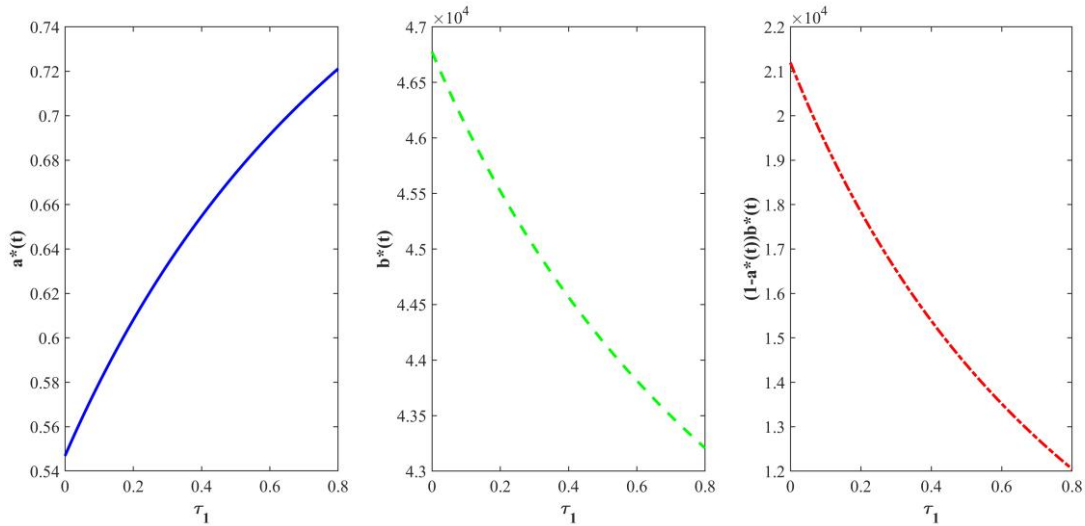


图 3-1 τ_1 对最优再保险合同的影响

由图 3-1 可知, $a^*(t)$, $b^*(t)$ 和 $(1-a^*(t))b^*(t)$ 分别是 τ_1 的增函数, 减函数和减函数. τ_1 越大, 保险公司越在意自身相对财富的大小. 虽然购买再保险可以降低其索赔风险, 但保险公司需要向再保险公司支付再保险费, 意味着其相对财富

的减少. 这种情况下, 保险公司更倾向于减少其再保险支出, 增加自留比例, 故 $a^*(t)$ 随着 τ_1 的增大而增大. 对于再保险公司而言, 当意识到保险公司的再保险意愿降低, 他就会适当调低再保险价格. 这场价格博弈由保险公司发起, 因此保险公司相对主动, 再保险公司相对被动, 最终导致再保险费 $(1-a^*(t))b^*(t)$ 减少.

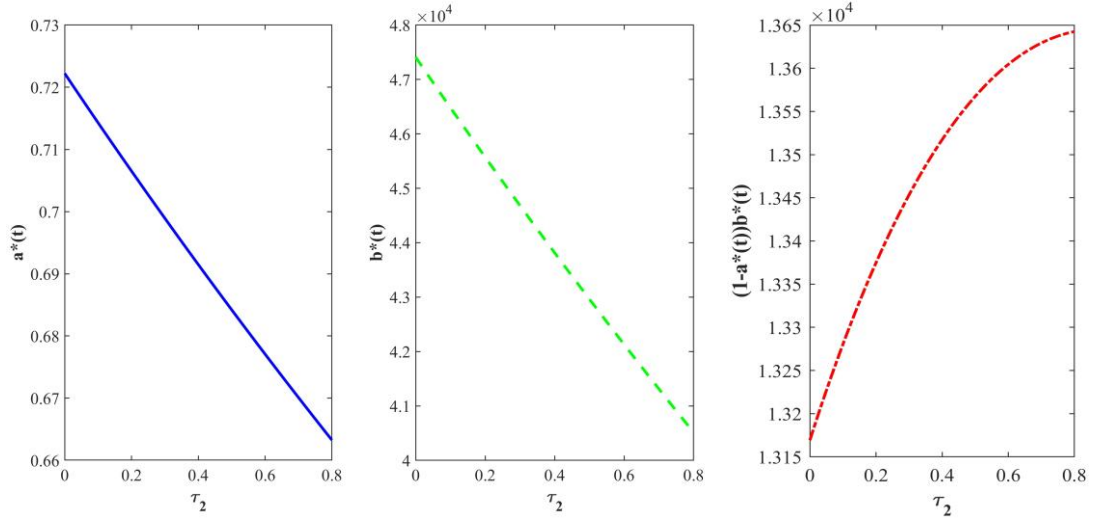
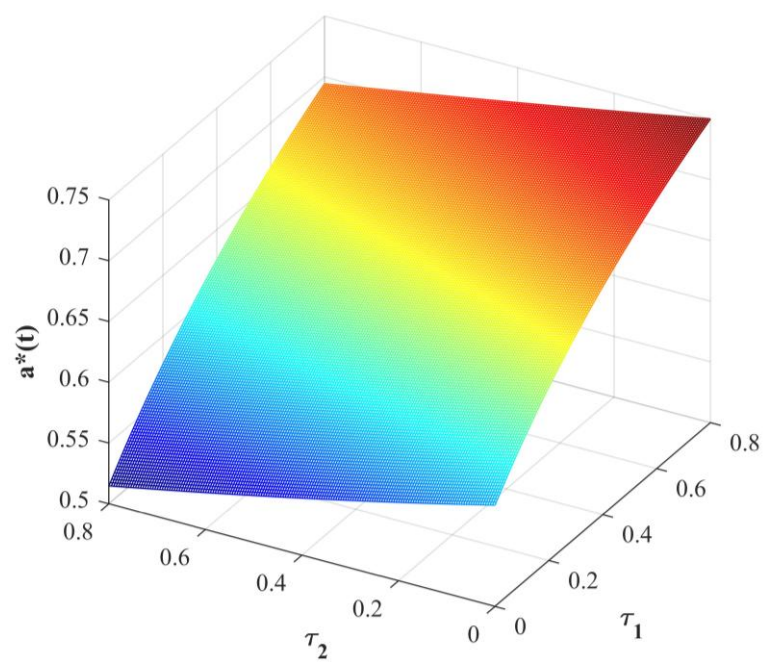
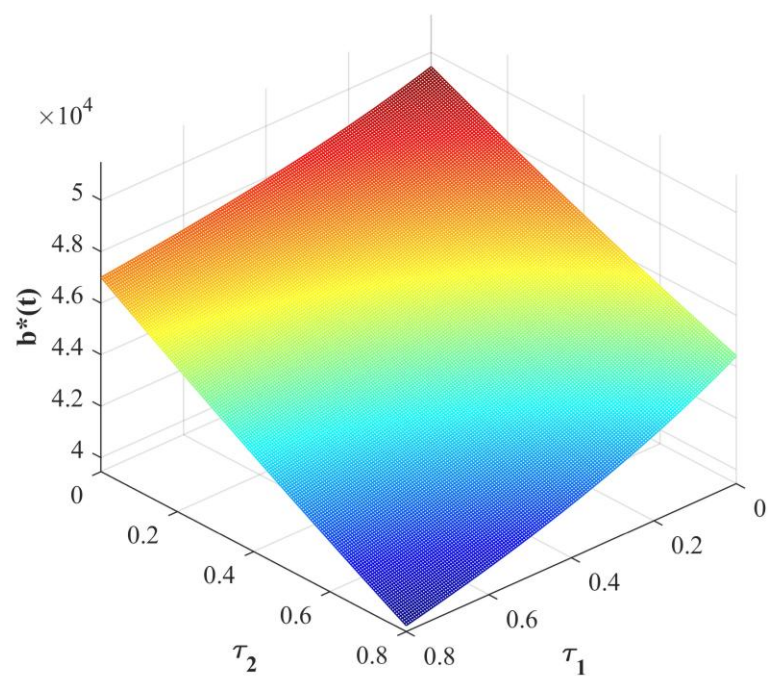


图 3-2 τ_2 对最优再保险合同的影响

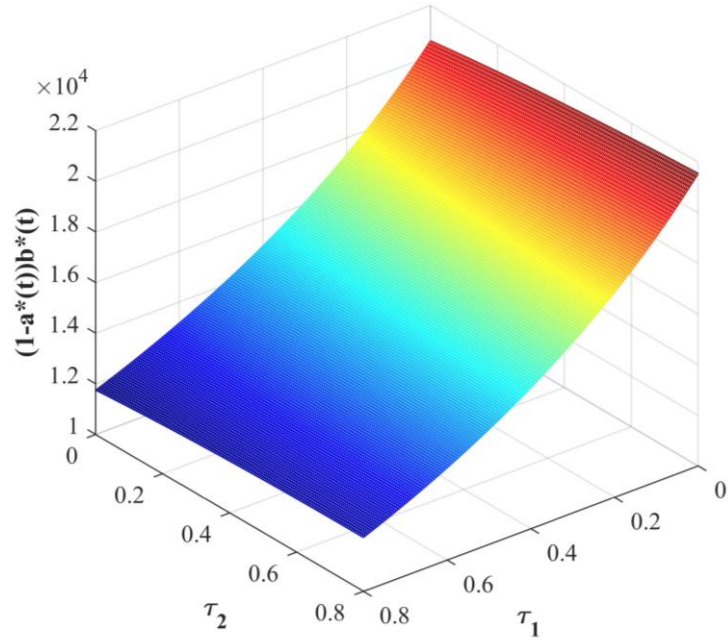
图 3-2 表明 $a^*(t)$, $b^*(t)$ 和 $(1-a^*(t))b^*(t)$ 分别是 τ_2 的减函数, 减函数和增函数. τ_2 越大意味着再保险公司越关心自身相对财富值. 在这场博弈中, 再保险公司希望增加再保险费 $(1-a^*(t))b^*(t)$. 而从式(3.10)可知再保险价格的提高必然导致保险公司自留比例 $a(t)$ 的增加, 再保险费可能减少. 因此, 再保险公司会适当调低再保险价格以增加保险公司购买再保险的意愿. 最终的博弈结果是保险公司增加了再保险费 $(1-a^*(t))b^*(t)$.



3-3(a) τ_1, τ_2 对最优索赔风险分担策略 $a^*(t)$ 的共同影响



3-3(b) τ_1, τ_2 对最优再保险价格 $b^*(t)$ 的共同影响



3-3(c) τ_1, τ_2 对最优再保险费 $(1-a^*(t))b^*(t)$ 的共同影响

图 3-3 τ_1, τ_2 对最优再保险合同的影响

由图 3-3 可知, $a^*(t)$ 对 τ_1 的变化更敏感, 而 $b^*(t)$ 对 τ_2 的变化更敏感, 说明保险公司和再保险公司都对自身的相对绩效参数更加敏感. 此外, $(1-a^*(t))b^*(t)$ 也对 τ_1 的变化更敏感, 这是因为保险公司是再保险费的支付方, 而再保险公司是再保险费的接受方. 图 3-3 表明在考虑相对绩效后, 保险公司购买再保险的意愿下降, 再保险公司愿意调低再保险价格, 最终均衡再保险费降低.

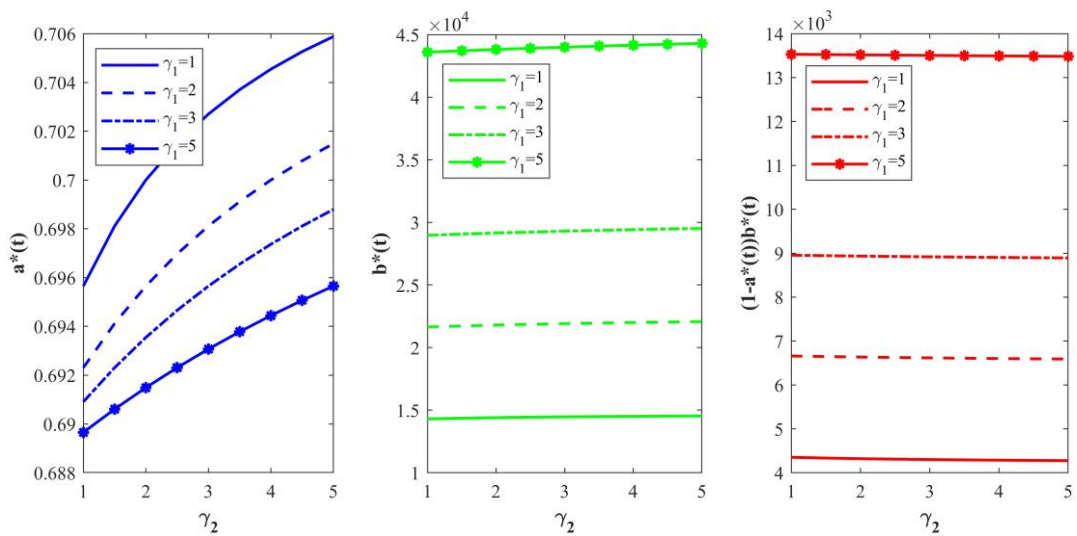
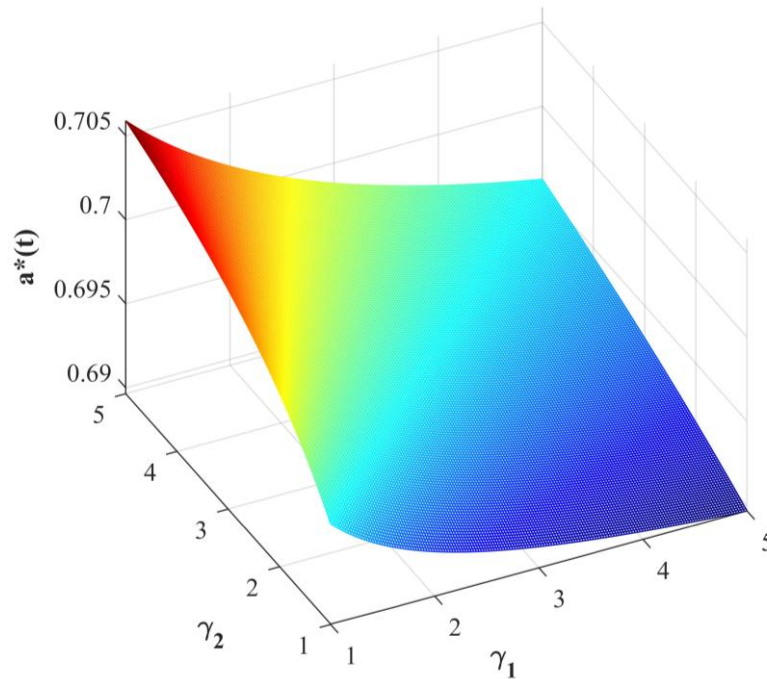


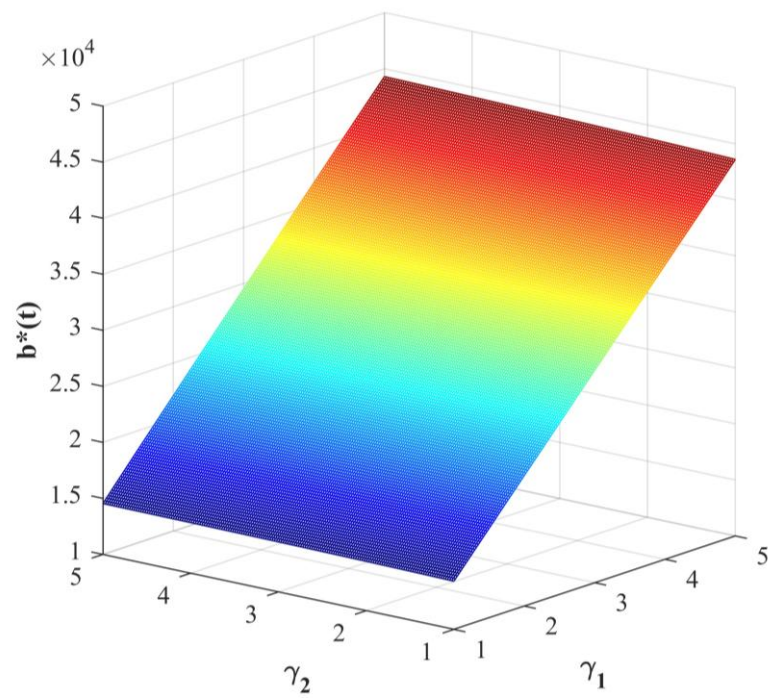
图 3-4 γ_1, γ_2 对最优再保险合同的影响

由图 3-4, $a^*(t)$, $b^*(t)$ 和 $(1-a^*(t))b^*(t)$ 分别是 γ_1 的减函数, 增函数和增函数. 保险公司的风险厌恶系数 γ_1 越大, 保险公司越倾向于购买更多的再保险以分散潜在风险. 再保险公司意识到保险公司会转移更多的风险, 就会提高再保险价格 $b^*(t)$. 这种情况下价格博弈的结果是再保险费 $(1-a^*(t))b^*(t)$ 增加.

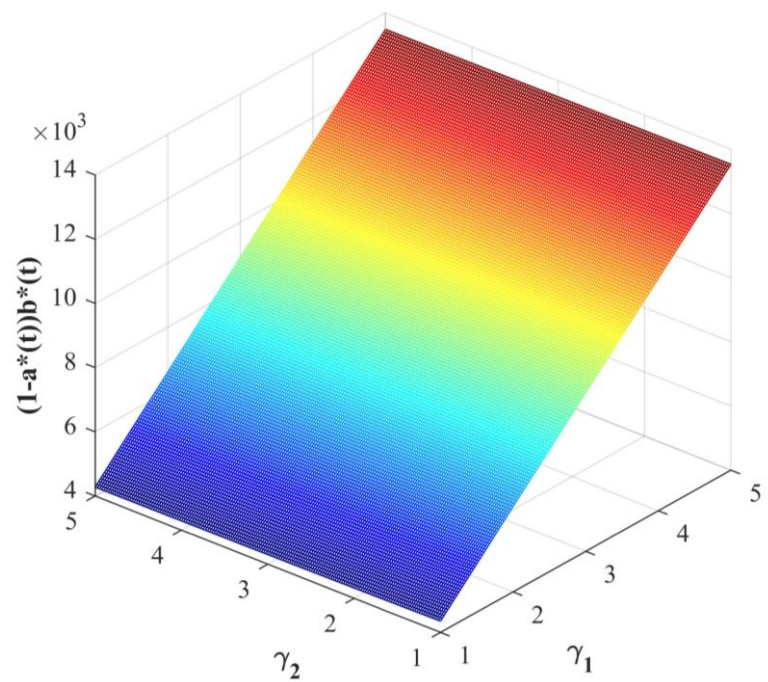
图 3-4 也表明 $a^*(t)$, $b^*(t)$ 和 $(1-a^*(t))b^*(t)$ 分别是 γ_2 的增函数, 增函数和减函数. γ_2 增大, 再保险公司希望降低潜在风险, 因此他会主动提高再保险价格以增加保险公司风险转移的成本. 意识到再保险公司提价后, 保险公司会降低再保险购买意愿, 提高自留比例. 这种情况下价格博弈的结果是再保险费 $(1-a^*(t))b^*(t)$ 降低.



3-5(a) γ_1, γ_2 对最优索赔风险分担策略 $a^*(t)$ 的共同影响



3-5(b) γ_1, γ_2 对最优再保险价格 $b^*(t)$ 的共同影响



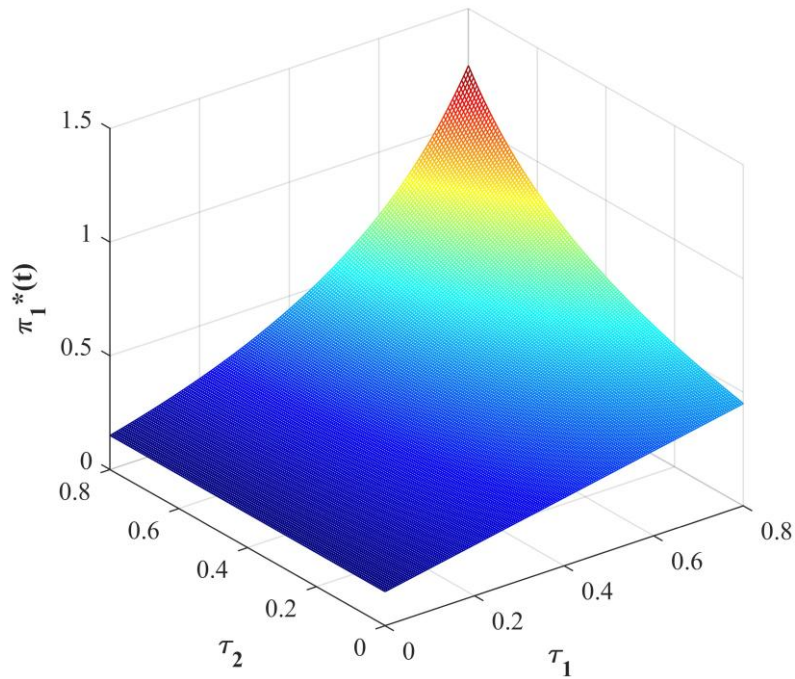
3-5(c) γ_1, γ_2 对最优再保险费 $(1-a^*(t))b^*(t)$ 的共同影响

图 3-5 γ_1, γ_2 对最优再保险合同的影响

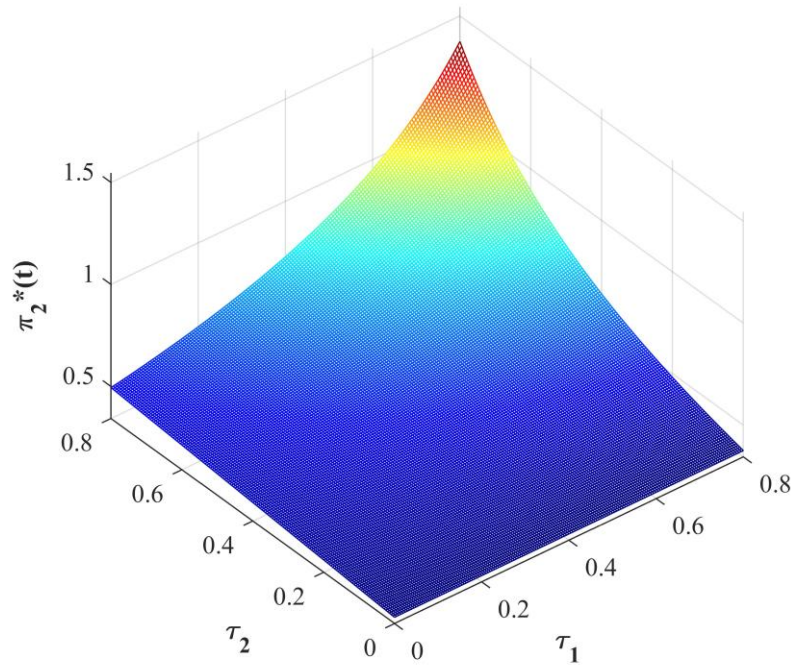
由图 3-5, $a^*(t)$ 对 γ_2 的变化更敏感, 而 $b^*(t)$ 对 γ_1 的变化更敏感, 表明保险公司和再保险公司都对对方的风险厌恶系数更为敏感, 因为双方都很关心再保险费, 而对方的风险厌恶系数是再保险保费的不确定性源之一. 同时, 图 3-5 表明 $(1-a^*(t))b^*(t)$ 对 γ_1 的变化更敏感, 因为保险公司是再保险费的支付方, 而再保险公司是再保险费的接受方.

3.3.2 模型参数对最优时间一致投资策略的影响

本小节主要分析模型参数对式(3.21)和式(3.15)所给出的最优时间一致策略 $\pi_1^*(t)$, $\pi_2^*(t)$ 的影响.



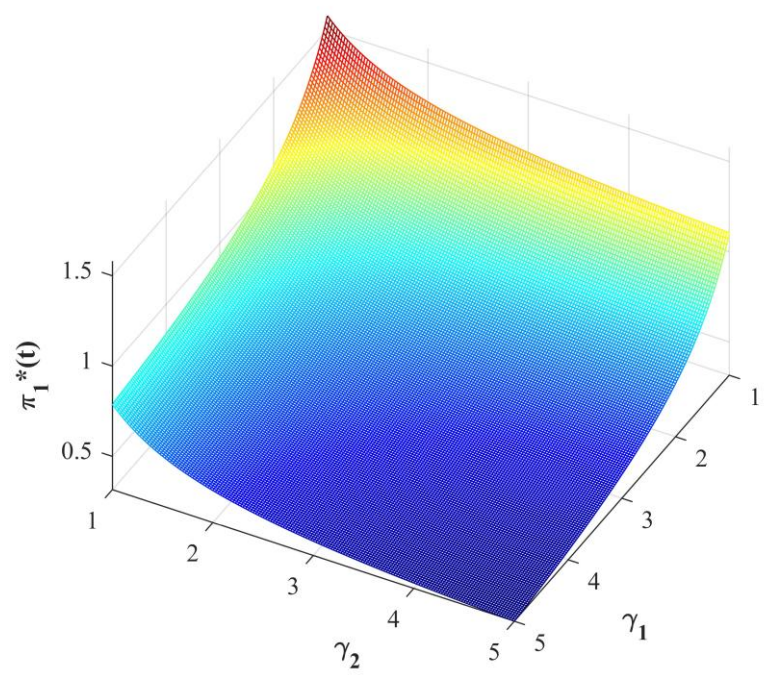
3-6(a) τ_1, τ_2 对最优时间一致投资策略 $\pi_1^*(t)$ 的共同影响



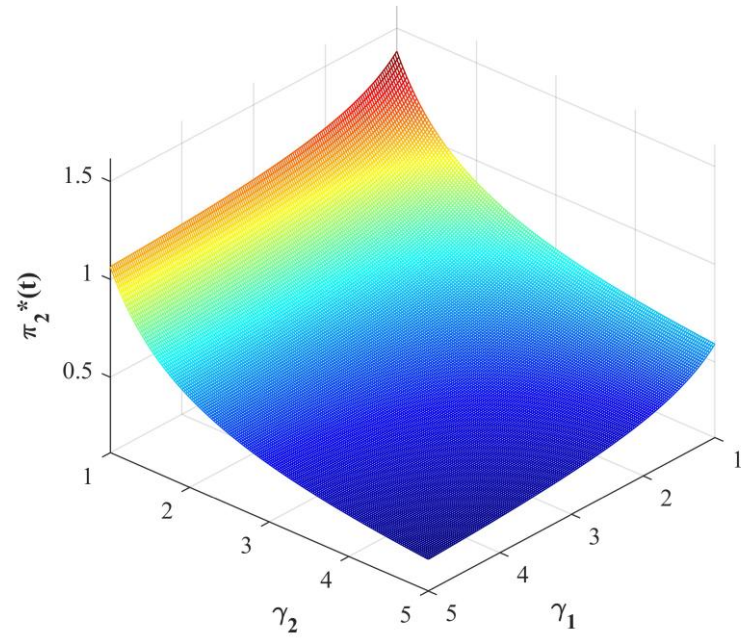
3-6(b) τ_1, τ_2 对最优时间一致投资策略 $\pi_2^*(t)$ 的共同影响

图 3-6 τ_1, τ_2 对最优时间一致投资策略的共同影响

图 3-6 表明, $\pi_1^*(t)$ 是 τ_1 的增函数, 也是 τ_2 的增函数, 并且对 τ_1 的变化更敏感. τ_1 越大, 保险公司越希望获得高收益, 增加自身相对财富, 因此更愿意投资风险资产. 而当 τ_2 增加时, 再保险公司也将投资更多的风险资产, 即 $\pi_2(t)$ 增大. 由式(3.11)和定理 3.9 可知, $\pi_2(t)$ 的增加必然导致 $\pi_1^*(t)$ 的增加. 保险公司自身的相对绩效参数对其最优投资策略的影响更大. 同理可以解释 $\pi_2^*(t)$ 是 τ_2 的增函数, 也是 τ_1 的增函数, 并且对 τ_2 的变化更敏感. 由图 3-6 可知在考虑相对绩效后, 保险公司和再保险公司都愿意增加风险投资.



3-7(a) γ_1, γ_2 对最优时间一致投资策略 $\pi_1^*(t)$ 的共同影响



3-7(b) γ_1, γ_2 对最优时间一致投资策略 $\pi_2^*(t)$ 的共同影响

图 3-7 γ_1, γ_2 对最优时间一致投资策略的共同影响

由图 3-7, $\pi_1^*(t)$ 是 γ_1 的减函数, 也是 γ_2 的减函数, 并且对 γ_1 的变化更敏感. γ_1 越大, 保险公司厌恶风险, 其风险资产投资额减少. 当 γ_2 增加, 再保险公司减少对风险资产的投资, 并通过式(3.11)导致 $\pi_1^*(t)$ 的减少. 保险公司自身的风险厌恶系数对其投资策略的影响更明显. 同理可以解释 $\pi_2^*(t)$ 是 γ_2 的减函数, 也是 γ_1 的减函数, 并且对 γ_2 的变化更敏感.

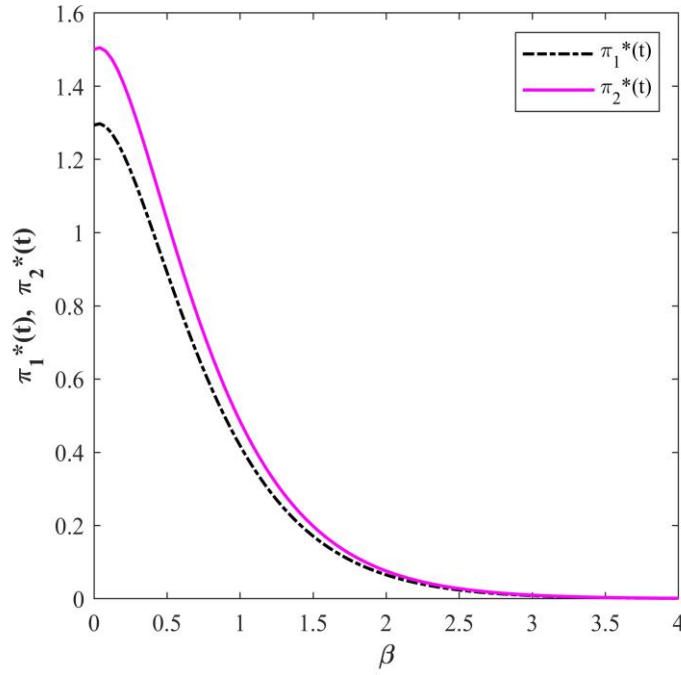


图 3-8 β 对最优时间一致投资策略的影响

在 CEV 模型中, $\sigma S^\beta(t)$ 表示风险资产的瞬时波动, 在其他变量确定的情况下, $\sigma S^\beta(t)$ 与 β 正相关, 意味着弹性系数的增加会带来波动的增加, 风险增大, 相应地, 收益也会增加. 图 3-8 中, 当 β 从 0 开始略微增加时, 资产的风险虽然增加, 但仍在投资者的接受范围内, 他们愿意承担一定的风险获取较高的收益, 因此 $\pi_1^*(t)$ 和 $\pi_2^*(t)$ 略微上升. 当 β 继续增大时, 资产的风险逐渐超出了投资者的接受范围, 故投资额减少. 当 β 增大到 4 左右时, 资产的风险达到投资者无法承受的程度, 投资者不再进行风险资产投资.

3.4 本章小结

本章通过相对绩效量化保险公司与再保险公司的竞争,研究了 CEV 模型下二者的再保险-投资博弈. 保险公司和再保险公司分别决定索赔风险分担策略和再保险价格. 二者均可在金融市场上投资无风险资产和风险资产以增加财富. 他们的目标是找到使自身相对财富终值满足均值-方差准则的最优策略. 我们在博弈论框架下对问题进行处理,得到了最优时间一致投资策略,确定了最优再保险合同. 最后通过数值模拟检验了主要参数对最优策略的影响. 结果表明考虑相对绩效后,双方博弈后的再保险费减少,博弈双方都愿意增加风险投资. 本章的前提假设比较贴合现实,应用范围较广,研究结果可以为保险人和再保险人的实践提供理论指导.

第 4 章 随机利率与随机波动模型下考虑相对绩效的保险公司与再保险公司再保险-投资博弈

本章在第 3 章的基础上进一步放宽假设条件,研究了随机环境中一家保险公司与一家再保险公司的再保险-投资博弈. 考虑利率风险与波动率风险,并引入滚动债券以对冲利率风险. 金融市场中有无风险资产、滚动债券和风险资产可投资. 保险公司和再保险公司都希望在均值-方差准则下找到使得自身终端相对财富的最大化的再保险-投资策略. 利用随机最优控制理论,在 Stackelberg 博弈框架下建立并求解扩展 HJB 方程,得到最优策略的解析解. 最后,通过数值模拟分析了主要模型参数对最优策略的影响.

4.1 模型建立

本章部分假设和模型类似第 3 章,为了便于阅读和章节内容的完整性,这里仍然详细列出.

给定完备的带流概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$, 其中 $[0, T]$ 是一个固定的投资期限, $T > 0$ 为决策制定的终端时刻, $\mathbb{P}$ 为现实的概率测度, $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$ 为域流, 表示在 t 时刻所有可获得的信息, 在 t 时刻所作的任何决定都是基于这些信息的. 假设本章所有的随机过程都是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$ 上定义良好的适应过程.

令 $p(t) > 0$ 和 $q(t) > 0$ 为一致有界的确定性函数, 分别表示保险公司索赔过程 $R(t)$ 的均值和波动. 索赔过程 $R(t)$ 满足以下随机微分方程:

$$dR(t) = p(t)dt + q(t)dW(t), \quad (4.1)$$

其中, $W(t)$ 为完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$ 上的标准布朗运动. 为了确保在任意时间段内实现负索赔金额的概率足够小, 假设对任意给定的 $t \in [0, T]$, 比率 $\frac{p(t)}{q(t)}$ 都足够大 (例如 $\frac{p(t)}{q(t)} > 3$).

假设保险公司收取的保费 $c(t)$ 由期望值保费准则决定, 即 $c(t) = (1 + \theta)p(t)$, 其中 $\theta > 0$ 为保险公司的安全负荷. 为了降低索赔风险, 保险公司可与再保险公司签订再保险合同购买比例再保险, 假设 t 时刻保险公司的自留比例为 $a(t) \in [0, 1]$, 则每一笔索赔额的 $1 - a(t)$ 由再保险公司承担. 为此, 保险公司向再保险公司支付再保险费 $(1 - a(t))b(t)$, 这里 $b(t)$ 为 t 时刻的再保险价格. $a(t)$ 由保险公司决定, $b(t)$ 由再保险公司决定. 考虑到双方的议价博弈, 再保险公司会动态调整再保险价格 $b(t)$. 假设 $b(t) \in (\underline{b}(t), \bar{b}(t))$, 且 $\bar{b}(t)$ 和 $\underline{b}(t)$ 不依赖于具体的保费准则. 考虑到保险公司的利益, 设 $\bar{b}(t)$ 为 $a(t) = 1$ 时的再保险价格. 从再保险公司的角度出发, 设 $\underline{b}_1(t)$ 为 $a(t) = 0$ 时的再保险价格, $\underline{b}(t) = \underline{b}_1(t) \vee c(t)$. $b(t) \geq c(t)$ 表明再保险价格至少是保险公司收取的保费, 这与现实相符.

在考虑索赔风险分担策略和再保险价格后, 保险公司和再保险公司的盈余过程 $X_1(t)$, $X_2(t)$ 分别满足下列随机微分方程:

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= [c(t) - (1 - a(t))b(t)]dt - a(t)dL(t) \\ &= [\theta p(t) - (1 - a(t))(b(t) - p(t))]dt - a(t)q(t)dW(t), \\ dX_2(t) &= (1 - a(t))b(t)dt - (1 - a(t))dL(t) \\ &= (1 - a(t))(b(t) - p(t))dt - (1 - a(t))q(t)dW(t). \end{aligned}$$

保险公司和再保险公司可在无摩擦且限制卖空的金融市场中投资. 考虑利率风险, 假设金融市场中有三种可获得的资产: 无风险资产、债券和风险资产. 利率的动态过程满足:

$$dr(t) = (\mu - \eta r(t))dt - \sqrt{kr(t)}dW_r(t), \quad r(t) = r_0.$$

其中 μ , η , k 为正常数, $W_r(t)$ 是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$ 上的另一个标准布朗运动, 且与 $W(t)$ 相互独立. 此外, 要求满足条件 $2\mu > k$ 以确保 $r(t) > 0$.

无风险资产的价格过程 $P(t)$ 满足 $dP(t) = r(t)P(t)dt$.

为了对冲利率风险，在金融市场中引入零息债券 $B(t, \nu)$ 。零息债券在到期日 ν 的面值是 1，在到期日之前债券没有利息收入。根据 Guan 和 Liang^[50]， $B(t, \nu)$ 满足如下的倒向随机微分方程：

$$\begin{cases} \frac{dB(t, \nu)}{B(t, \nu)} = r(t)dt + \sigma_B(\nu - t)\sqrt{kr(t)}\left(\lambda_r\sqrt{kr(t)}dt + dW_r(t)\right), \\ B(\nu, \nu) = 1, \end{cases} \quad (4.3)$$

其中 λ_r 为正常数， $\sigma_B(t) = \frac{2(e^{mt} - 1)}{m - (\eta - k\lambda_r) + e^{mt}(m + \eta - k\lambda_r)}$ ， $m = \sqrt{(\eta - k\lambda_r)^2 + 2k}$ 。

通过在 $t - dt$ 时刻卖出 $B(t - dt, \nu)$ ，在 t 时刻买入 $B(t, \nu)$ ，可以对零息债券进行投资。因此，我们进行投资的到期时间会随着时间变化而变化。然而，如 Boulier 等^[51]所述，零息债券 $B(t, \nu)$ 距离到期日的剩余期限 $\nu - t$ 是连续变化的，在金融市场中无法找到此类零息债券进行投资，实际可投资的债券是具有恒定剩余期限 K 的滚动债券 $B_K(t)$ ，其价格过程可描述如下：

$$\frac{dB_K(t)}{B_K(t)} = r(t)dt + \sigma_B(K)\sqrt{kr(t)}\left(\lambda_r\sqrt{kr(t)}dt + dW_r(t)\right).$$

且 $B_K(t)$ 与 $B(t, T)$ 的关系满足下列方程：

$$\frac{dB(t, \nu)}{B(t, \nu)} = \left(1 - \frac{\sigma_B(\nu - t)}{\sigma_B(K)}\right) \frac{dP(t)}{P(t)} + \frac{\sigma_B(\nu - t)}{\sigma_B(K)} \cdot \frac{dB_K(t)}{B_K(t)}.$$

风险资产的价格过程由 Heston 随机波动模型驱动：

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{S(t)} = r(t)dt + \sigma_s\sqrt{kr(t)}\left(\lambda_r\sqrt{kr(t)}dt + dW_r(t)\right) + \phi L(t)dt + \sqrt{L(t)}dW_s(t), & S(0) = S_0, \\ dL(t) = \beta(\delta - L(t))dt + \sigma_L\sqrt{L(t)}dW_L(t), & L(0) = l_0, \end{cases}$$

其中 β ， δ ， σ_s ， σ_L ， ϕ 为正常数，标准布朗运动 $W_s(t)$ 和 $W_L(t)$ 满足 $dW_s(t)dW_L(t) = \rho dt$ ，且 $W(t)$ 和 $W_r(t)$ 都与 $W_s(t)$ 以及 $W_L(t)$ 独立。为了确保 $L(t) > 0$ ，假设 $2\beta\delta > \sigma_L^2$ 。

令 $\pi_1(t)$ 、 $\pi_2(t)$ 分别代表保险公司投资于滚动债券和风险资产的投资额，令 $\pi_3(t)$ 、 $\pi_4(t)$ 分别代表再保险公司投资于滚动债券和风险资产的投资额。令 $u_I := (a(t), \pi_1(t), \pi_2(t))$ 和 $u_R := (b(t), \pi_3(t), \pi_4(t))$ 。保险公司的财富过程 $X_I^{u_I}(t)$ 和再保险公司的财富过程 $X_R^{u_R}(t)$ 分别满足下列方程：

$$\begin{aligned} dX_I^{u_I}(t) = & [X_I^{u_I}(t)r(t) + \theta p(t) - (1-a(t))(b(t) - p(t)) + \pi_1(t)\sigma_B(K)\lambda_r kr(t) \\ & + \pi_2(t)\sigma_S\lambda_r kr(t) + \pi_2(t)\varphi L(t)]dt + \pi_2(t)\sqrt{L(t)}dW_S(t) \\ & + (\pi_1(t)\sigma_B(K) + \pi_2(t)\sigma_S)\sqrt{kr(t)}dW_r(t) - a(t)q(t)dW(t), \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} dX_R^{u_R}(t) = & [X_R^{u_R}(t)r(t) + (1-a(t))(b(t) - p(t)) + \pi_3(t)\sigma_B(K)\lambda_r kr(t) \\ & + \pi_4(t)\sigma_S\lambda_r kr(t) + \pi_4(t)\varphi L(t)]dt + \pi_4(t)\sqrt{L(t)}dW_S(t) \\ & + (\pi_3(t)\sigma_B(K) + \pi_4(t)\sigma_S)\sqrt{kr(t)}dW_r(t) - (1-a(t))q(t)dW(t). \end{aligned} \quad (4.5)$$

根据方程(4.4)和(4.5)，显然保险公司和再保险公司都非常关注再保险保费 $(1-a(t))b(t)$ ，前者希望 $(1-a(t))b(t)$ 尽可能小，后者反之，双方博弈后共同确定一个合适的 $(1-a(t))b(t)$ 。采用相对绩效量化二者的博弈：

$$(1-\tau_i)X_i^{u_i}(t) + \tau_i(X_i^{u_i}(t) - X_j^{u_j}(t)), i \neq j, i, j \in \{I, R\}.$$

其中 $\tau_I \in [0,1], \tau_R \in [0,1]$ 表示二者的竞争强度，刻画了他们对对方业绩的敏感度。 τ_i 增大代表他们对对方绩效表现的关注度增加，同时更加关心自身相对财富的增长。当 $\tau_i = 0$ 时，他们仅关注自身。

令

$$Y^{u_I, u_R}(t) := (1-\tau_I)X_I^{u_I}(t) + \tau_I(X_I^{u_I}(t) - X_R^{u_R}(t))$$

和

$$Z^{u_I, u_R}(t) := (1-\tau_R)X_R^{u_R}(t) + \tau_R(X_R^{u_R}(t) - X_I^{u_I}(t))$$

分别为保险公司和再保险公司的相对财富过程，则有：

$$\begin{aligned} dY^{u_I, u_R}(t) = & [-(1+\tau_I)(1-a(t))(b(t) - p(t)) + (\pi_1(t) - \tau_I\pi_3(t))\sigma_B(K)\lambda_r kr(t) \\ & + (\pi_2(t) - \tau_I\pi_4(t))(\sigma_S\lambda_r kr(t) + \varphi L(t)) + Y^{u_I, u_R}(t)r(t) + \theta p(t)]dt \\ & + [(\pi_1(t) - \tau_I\pi_3(t))\sigma_B(K) + (\pi_2(t) - \tau_I\pi_4(t))\sigma_S]\sqrt{kr(t)}dW_r(t) \\ & + (\pi_2(t) - \tau_I\pi_4(t))\sqrt{L(t)}dW_S(t) + [\tau_I - (1+\tau_I)a(t)]q(t)dW(t), \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} dZ^{u_I, u_R}(t) = & [(1+\tau_R)(1-a(t))(b(t) - p(t)) + (\pi_3(t) - \tau_R\pi_1(t))\sigma_B(K)\lambda_r kr(t) \\ & + (\pi_4(t) - \tau_R\pi_2(t))(\sigma_S\lambda_r kr(t) + \varphi L(t)) + Z^{u_I, u_R}(t)r(t) - \tau_R\theta p(t)]dt \\ & + [(\pi_3(t) - \tau_R\pi_1(t))\sigma_B(K) + (\pi_4(t) - \tau_R\pi_2(t))\sigma_S]\sqrt{kr(t)}dW_r(t) \\ & + (\pi_4(t) - \tau_R\pi_2(t))\sqrt{L(t)}dW_S(t) + [(1+\tau_R)a(t) - 1]q(t)dW(t). \end{aligned} \quad (4.7)$$

假设 $Y^{u_I, u_R}(0) = y_0$ 和 $Z^{u_I, u_R}(0) = z_0$ 。

定义 4.1 (可容许策略) 如果对任意给定的 $t \in [0, T]$ ，策略 $u_I = (a(t), \pi_1(t), \pi_2(t))_{t \in [0, T]}$ 和 $u_R = (b(t), \pi_3(t), \pi_4(t))_{t \in [0, T]}$ 被称为是可容许的，如果满足：

1) $a(t) \in [0, 1]$ ， $b(t) \in (\underline{b}(t), \bar{b}(t))$ ， $\pi_1(t)$ ， $\pi_2(t)$ ， $\pi_3(t)$ 和 $\pi_4(t)$ 是 $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ - 循序可测的，并且满足 $E \left\{ \int_0^T [\pi_1^4(t) + \pi_2^4(t) + \pi_3^4(t) + \pi_4^4(t)] dt \right\} < +\infty$ ；

2) 在策略 u_I, u_R 下，方程(4.6)和(4.7)分别有唯一强解 $Y^{u_I, u_R}(t)$ 和 $Z^{u_I, u_R}(t)$ 。

保险公司和再保险公司所有可容许策略的集合分别记为 $\mathcal{A}_I$ 和 $\mathcal{A}_R$ 。

接下来建立保险公司与再保险公司之间的 Stackelberg 博弈框架。

首先，对任意给定的 $u_R \in \mathcal{A}_R$ ，保险公司的目标是找到策略 $\bar{u}_I^* := (\bar{a}^*(t), \bar{\pi}_1^*(t), \bar{\pi}_2^*(t)) \in \mathcal{A}_I$ 使得

$$J_I(t, y, r, l; \bar{u}_I^*, u_R) := \max_{u_I \in \mathcal{A}_I} J_I(t, y, r, l; u_I, u_R), \quad (4.8)$$

其中

$$J_I(t, y, r, l; u_I, u_R) := E_{t, y, r, l} [Y^{u_I, u_R}(T)] - \frac{\gamma_I}{2} \text{Var}_{t, y, r, l} [Y^{u_I, u_R}(T)],$$

$$E_{t, y, r, l} [\cdot] = E[\cdot | Y^{u_I, u_R}(t) = y, r(t) = r, L(t) = l],$$

$$\text{Var}_{t, y, r, l} [\cdot] = \text{Var}[\cdot | Y^{u_I, u_R}(t) = y, r(t) = r, L(t) = l],$$

$\gamma_I > 0$ 为保险公司的风险厌恶系数， $\bar{a}^*(t) = \xi_0^*(t, b(t))$ ， $\bar{\pi}_1^*(t) = \xi_1^*(t, \pi_3(t))$ 和 $\bar{\pi}_2^*(t) = \xi_2^*(t, \pi_4(t))$ 为保险公司的最优响应策略。

其次，针对保险公司的最优响应策略 $\bar{u}_I^* \in \mathcal{A}_I$ ，再保险公司的目标是找到策略 $u_R^* = (b^*(t), \pi_3^*(t), \pi_4^*(t)) \in \mathcal{A}_R$ 使得

$$J_R(t, z, r, l; \bar{u}_I^*, u_R^*) := \max_{u_R \in \mathcal{A}_R} J_R(t, z, r, l; \bar{u}_I^*, u_R), \quad (4.9)$$

其中

$$J_R(t, z, r, l; \bar{u}_I^*, u_R) := E_{t, z, r, l} [Z^{\bar{u}_I^*, u_R}(T)] - \frac{\gamma_R}{2} \text{Var}_{t, z, r, l} [Z^{\bar{u}_I^*, u_R}(T)],$$

$$E_{t, z, r, l} [\cdot] = E[\cdot | Z^{\bar{u}_I^*, u_R}(t) = z, r(t) = r, L(t) = l],$$

$$\text{Var}_{t, z, r, l} [\cdot] = \text{Var}[\cdot | Z^{\bar{u}_I^*, u_R}(t) = z, r(t) = r, L(t) = l],$$

$\gamma_R > 0$ 为再保险公司的风险厌恶系数.

最后, 根据再保险公司的最优再保险价格 $b^*(t)$ 和最优时间一致投资策略 $\pi_3^*(t)$ 、 $\pi_4^*(t)$, 保险公司调整其最优响应策略 $\bar{u}_I^*(t) = (\bar{a}^*(t), \bar{\pi}_1^*(t), \bar{\pi}_2^*(t)) = (\xi_0^*(t, b^*(t)), \xi_1^*(t, \pi_3^*(t)), \xi_2^*(t, \pi_4^*(t)))$, 得到最终的最优策略 $u_I^*(t) = (a^*(t), \pi_1^*(t), \pi_2^*(t)) = (\xi_0^*(t, b^*(t)), \xi_1^*(t, \pi_3^*(t)), \xi_2^*(t, \pi_4^*(t)))$.

称 (u_I^*, u_R^*) 为问题(4.8)和(4.9)的最优策略, $\bar{J}_I(t, y, r, l) := J_I(t, y, r, l; u_I^*, u_R^*)$ 为保险公司的最优值函数, $\bar{J}_R(t, z, r, l) := J_R(t, z, r, l; \bar{u}_I^*, u_R^*)$ 为再保险公司的最优值函数.

由于问题(4.8)和(4.9)中含有的方差项不满足期望的迭代性, 导致贝尔曼最优性原理不成立, 因此问题(4.8)和(4.9)是时间不一致的, 即 t 时刻得到的最优策略和 $t + \Delta t$ 时刻得到的最优策略不一致. 因此在 4.2 节, 我们将在博弈论的框架下重述问题以寻找时间一致策略.

4.2 模型求解

4.2.1 保险公司的最优响应策略

保险公司的保费收入和赔付支出使得优化问题(4.8)不是经典的自融资问题. 参考 Guan 和 Liang^[43], 我们引入一个辅助过程来求解问题(4.8). 令 $\pi_I(t) = (\tau_I - (1 + \tau_I)a(t), \pi_1(t) - \tau_I\pi_3(t), \pi_2(t) - \tau_I\pi_4(t))^T$, 方程(4.6)可改写为:

$$dY^{u_I, u_R}(t) = [Y^{u_I, u_R}(t)r(t) + \theta p(t) - b(t) + p(t)]dt + (\pi_I(t))^T \sigma [\Lambda dt + d\bar{W}(t)],$$

其中

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\frac{b(t) - p(t)}{q(t)} \\ \lambda_r \sqrt{kr(t)} \\ \varphi \sqrt{L(t)} \end{pmatrix}, \quad d\bar{W}(t) = \begin{pmatrix} dW(t) \\ dW_r(t) \\ dW_s(t) \end{pmatrix},$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} q(t) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_B(K)\sqrt{kr(t)} & 0 \\ 0 & \sigma_S\sqrt{kr(t)} & \sqrt{L(t)} \end{pmatrix}.$$

引理 4.2 令

$$H(t) = \exp \left\{ \int_0^t (r(v) + \frac{1}{2} \|\Lambda\|^2) dv + \int_0^t \Lambda^\top d\bar{W}(v) \right\}, \quad (4.10)$$

则 $H(t)$ 满足:

$$\frac{dH(t)}{H(t)} = (r(t) + \Lambda^\top \Lambda) dt + \Lambda^\top d\bar{W}(t), \quad H(0) = 1. \quad (4.11)$$

且 $Y^{u_I, u_R}(t)$ 可表示为:

$$Y^{u_I, u_R}(t) = E \left[- \int_t^T \frac{[(\theta+1)p(v) - b(v)]H(t)}{H(v)} dv + \frac{Y^{u_I, u_R}(T)H(t)}{H(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad t \in [t, T]. \quad (4.12)$$

证明: 对方程(4.10)直接求微分可得方程(4.11). 对过程 $\left\{ \frac{Y^{u_I, u_R}(t)}{H(t)} \right\}$ 利用伊藤

引理有:

$$d \left(\frac{Y^{u_I, u_R}(t)}{H(t)} \right) = \frac{(\theta+1)p(t) - b(t)}{H(t)} dt + \left[\frac{(\pi_I(t))^\top \sigma}{H(t)} - \frac{Y^{u_I, u_R}(t) \Lambda^\top}{H(t)} \right] d\bar{W}(t),$$

因此有:

$$d \left[\frac{Y^{u_I, u_R}(t)}{H(t)} - \int_0^t \frac{(\theta+1)p(v) - b(v)}{H(v)} dv \right] = \left[\frac{(\pi_I(t))^\top \sigma}{H(t)} - \frac{Y^{u_I, u_R}(t) \Lambda^\top}{H(t)} \right] d\bar{W}(t).$$

由鞅表示定理知, $\left\{ \frac{Y^{u_I, u_R}(t)}{H(t)} - \int_0^t \frac{(\theta+1)p(v) - b(v)}{H(v)} dv, 0 \leq t \leq T \right\}$ 为局部鞅. 两边求积分可得:

$$\int_t^T d \left(\frac{Y^{u_I, u_R}(v)}{H(v)} \right) - \int_t^T \frac{(\theta+1)p(v) - b(v)}{H(v)} dv = \int_t^T \left[\frac{(\pi_I(v))^\top \sigma}{H(v)} - \frac{Y^{u_I, u_R}(v) \Lambda^\top}{H(v)} \right] d\bar{W}(v),$$

进一步对两边求条件期望得方程(4.12). 证毕.

根据引理 4.2, $H(t)$ 是保险市场与金融市场的风险集合. 记

$$F(t) = E \left[\int_t^T \frac{[(\theta+1)p(v) - b(v)]H(t)}{H(v)} dv \middle| \mathcal{F}_t \right], \text{ 为了计算 } F(t), \text{ 推导出如下引理.}$$

引理 4.3 $F(t) = \int_t^T [(\theta+1)p(v) - b(v)]B(t, v)dv$, 且 $F(t)$ 满足:

$$\begin{cases} dF(t) = -[(\theta+1)p(t) - b(t)]dt + F(t)[r(t) + \lambda_r kr(t)\sigma_F(t, T)]dt \\ \quad + F(t)\sigma_F(t, T)\sqrt{kr(t)}dW_r(t), \\ F(T) = 0, \end{cases} \quad (4.13)$$

$$\text{其中 } \sigma_F(t, T) = \int_t^T \frac{[(\theta+1)p(v) - b(v)]\sigma_B(v-t)B(t, v)}{F(t)} dv.$$

证明: 由 $F(t) = E\left[\int_t^T \frac{[(\theta+1)p(v) - b(v)]H(t)}{H(v)} dv \middle| \mathcal{F}_t\right]$, 可通过计算得到

$$E\left[\frac{[(\theta+1)p(v) - b(v)]H(t)}{H(v)} \middle| \mathcal{F}_t\right]. \text{ 由于 } W(t), W_r(t), W_s(t) \text{ 相互独立, 且 } B(t, v) \text{ 满}$$

足方程(4.3), 可得:

$$\begin{aligned} & E\left[\frac{[(\theta+1)p(v) - b(v)]H(t)}{H(v)} \middle| \mathcal{F}_t\right] \\ &= [(\theta+1)p(v) - b(v)]E\left[\exp\left(-\int_t^v \left(r(s) + \frac{1}{2}\|\Lambda\|^2\right)ds - \int_t^v \Lambda^\top d\bar{W}(S)\right) \middle| \mathcal{F}_t\right] \\ &= [(\theta+1)p(v) - b(v)]\mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_t^v r(s)ds\right) \middle| \mathcal{F}_t\right] \\ &= [(\theta+1)p(v) - b(v)]B(t, v), \end{aligned}$$

其中 $\mathbb{E}$ 为风险中性测度 $\mathbb{P}$ 下的数学期望, 且 $\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}} = \exp\left(-\int_0^T \frac{1}{2}\|\Lambda\|^2 ds - \int_0^T \Lambda^\top d\bar{W}(s)\right)$.

因此, $F(t) = \int_t^T [(\theta+1)p(v) - b(v)]B(t, v)dv$, 对 $F(t)$ 求微分可得方程(4.13). 证毕.

为求解优化问题(4.8), 令 $\hat{Y}^{u_I, u_R}(t) = Y^{u_I, u_R}(t) + F(t)$. 根据有方程(4.6)和方程

(4.13)有:

$$\begin{aligned} \hat{Y}^{u_I, u_R}(t) &= [\hat{Y}^{u_I, u_R}(t)r(t) - (\tau_I - (1 + \tau_I)a(t))(b(t) - p(t)) + \varphi L(t)(\pi_2(t) - \tau_I \pi_4(t)) \\ &\quad + (\sigma_B(K)(\pi_1(t) - \tau_I \pi_3(t)) + (\pi_2(t) - \tau_I \pi_4(t))\sigma_S)\lambda_r kr(t) + F(t)\lambda_r kr(t) \\ &\quad \cdot \sigma_F(t, T)]dt + [(\pi_1(t) - \tau_I \pi_3(t))\sigma_B(K) + (\pi_2(t) - \tau_I \pi_4(t))\sigma_S \\ &\quad + F(t)\sigma_F(t, T)]\sqrt{kr(t)}dW_r(t) + (\pi_2(t) - \tau_I \pi_4(t))\sqrt{L(t)}dW_s(t) \\ &\quad + (\tau_I - (1 + \tau_I)a(t))q(t)dW(t). \end{aligned} \quad (4.14)$$

由 $F(T) = 0$ 得 $\hat{Y}^{u_I, u_R}(T) = Y^{u_I, u_R}(T)$, 则 $E[\cdot | \hat{Y}^{u_I, u_R}(t) = \hat{y}, r(t) = r, L(t) = l]$

$$= E \left[\cdot | Y^{u_I, u_R}(t) + F(t) = y + F(t), r(t) = r, L(t) = l \right] = E \left[\cdot | Y^{u_I, u_R}(t) = y, r(t) = r, L(t) = l \right],$$

因此问题(4.8)可改写为:

$$\begin{aligned} J_I(t, \hat{y}, r, l; \bar{u}_I^*, u_R) &:= \max_{u_I \in \mathcal{A}_I} J_I(t, \hat{y}, r, l; u_I, u_R) \\ &= \max_{u_I \in \mathcal{A}_I} \left\{ E_{t, \hat{y}, r, l} [\hat{Y}^{u_I, u_R}(T)] - \frac{\gamma_I}{2} \text{Var}_{t, \hat{y}, r, l} [\hat{Y}^{u_I, u_R}(T)] \right\}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

为了得到时间一致策略, 定义保险公司的均衡策略和均衡值函数如下:

定义 4.4 考虑 $\bar{u}_I^*(s) \in \mathcal{A}_I$ (一个候选的均衡策略), 对任意给定的 $u_R \in \mathcal{A}_R$,

$u_I(s) \in \mathcal{A}_I$ 和实数 $\varepsilon > 0$, 定义如下策略:

$$u_I^\varepsilon(s) = \begin{cases} u_I(s), & t \leq s < t + \varepsilon, \\ \bar{u}_I^*(s), & t + \varepsilon \leq s \leq T. \end{cases}$$

如果满足

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J_I(t, \hat{y}, r, l; \bar{u}_I^*, u_R) - J_I(t, \hat{y}, r, l; u_I^\varepsilon, u_R)}{\varepsilon} \geq 0,$$

那么称 $\bar{u}_I^*(s)$ 为均衡策略, 相应的均衡值函数为 $J_I(t, \hat{y}, r, l; \bar{u}_I^*, u_R)$.

由 Björk 等^[11]可知定义 4.4 所给的均衡策略是时间一致的. 在后文中, 分别称均衡策略和均衡值函数为最优时间一致策略和最优值函数.

记 $C^{1,2,2,2}([0, T] \times R \times R^+ \times R^+) := \{\phi(t, \hat{y}, r, l) | \phi(t, \cdot, \cdot, \cdot) \text{ 在 } [0, T] \text{ 上一阶连续可微, } \phi(\cdot, \hat{y}, r, l) \text{ 在 } [0, T] \times R \times R^+ \times R^+ \text{ 上二阶连续可微}\}$, $D^{1,2,2,2}([0, T] \times R \times R^+ \times R^+) := \{\phi(t, \hat{y}, r, l) | \phi(t, \hat{y}, r, l) \in C^{1,2,2,2}([0, T] \times R \times R^+ \times R^+) \text{ 且所有一阶偏导满足多项式增长条件}\}$. 对任意 $\phi(t, \hat{y}, r, l) \in C^{1,2,2,2}([0, T] \times R \times R^+ \times R^+)$, 相对财富过程(4.14)的一般无穷小生成元 $\mathcal{B}^{u_I, u_R} \phi(t, \hat{y}, r, l)$ 定义为:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}^{u_I, u_R} \phi(t, \hat{y}, r, l) := & \phi_t + \phi_{\hat{y}} [\hat{y}r - (\tau_I - (1 + \tau_I)a(t))(b(t) - p(t)) + \lambda_r kr ((\pi_1(t) - \tau_I \pi_3(t)) \\
 & \cdot \sigma_B(K) + (\pi_2(t) - \tau_I \pi_4(t)) \sigma_S) + \phi_l (\pi_2(t) - \tau_I \pi_4(t)) + F(t) \lambda_r kr \\
 & \cdot \sigma_F(t, T)] + \phi_r (\mu - \eta r) + \phi_l \beta (\delta - l) + \frac{1}{2} \phi_{\hat{y}\hat{y}} \{ (\pi_2(t) - \tau_I \pi_4(t))^2 l \\
 & + [(\pi_1(t) - \tau_I \pi_3(t)) \sigma_B(K) + F(t) \sigma_F(t, T) + (\pi_2(t) - \tau_I \pi_4(t)) \sigma_S]^2 kr \\
 & + q^2(t) (\tau_I - (1 + \tau_I)a(t))^2 \} - \phi_{\hat{y}r} kr [(\pi_1(t) - \tau_I \pi_3(t)) \sigma_B(K) \\
 & + (\pi_2(t) - \tau_I \pi_4(t)) \sigma_S + F(t) \sigma_F(t, T)] + \phi_{\hat{y}l} (\pi_2(t) - \tau_I \pi_4(t)) \rho \sigma_L l \\
 & + \frac{1}{2} \phi_{rr} kr + \frac{1}{2} \phi_{ll} \sigma_L^2 l,
 \end{aligned}$$

其中 $\phi_t, \phi_{\hat{y}}, \phi_r, \phi_l, \phi_{\hat{y}\hat{y}}, \phi_{\hat{y}r}, \phi_{\hat{y}l}, \phi_{rr}$ 和 ϕ_{ll} 表示相关变量的一阶导数和二阶导数.

定理 4.5 (验证定理) 对于优化问题(4.15), 如果存在两个实值函数 $V(t, \hat{y}, r, l), h(t, \hat{y}, r, l) \in D^{1,2,2,2}([0, T] \times R \times R^+ \times R^+)$ 满足:

$$\sup_{u_I \in \mathcal{A}_I} \left\{ \mathcal{B}^{u_I, u_R} V(t, \hat{y}, r, l) - \frac{\gamma_I}{2} \mathcal{B}^{u_I, u_R} h^2(t, \hat{y}, r, l) + \gamma_I h(t, \hat{y}, r, l) \mathcal{B}^{u_I, u_R} h(t, \hat{y}, r, l) \right\} = 0, \quad (4.16)$$

$$\mathcal{B}^{\bar{u}_I^*, u_R} h(t, \hat{y}, r, l) = 0, \quad (4.17)$$

边界条件分别为 $V(T, \hat{y}, r, l) = \hat{y}$ 和 $h(T, \hat{y}, r, l) = \hat{y}$, 其中

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_I^* = & (\bar{a}^*(t), \bar{\pi}_1^*(t), \bar{\pi}_2^*(t)) = (\xi_0^*(t, b(t)), \xi_1^*(t, \pi_3(t)), \xi_2^*(t, \pi_4(t))) \\
 = & \arg \sup_{u_I \in \mathcal{A}_I} \left\{ \mathcal{B}^{u_I, u_R} V(t, \hat{y}, r, l) - \frac{\gamma_I}{2} \mathcal{B}^{u_I, u_R} h^2(t, \hat{y}, r, l) + \gamma_I h(t, \hat{y}, r, l) \mathcal{B}^{u_I, u_R} h(t, \hat{y}, r, l) \right\}.
 \end{aligned}$$

则 $\bar{u}_I^*$ 为最优时间一致策略, $V(t, \hat{y}, r, l) = J_I(t, \hat{y}, r, l; \bar{u}_I^*, u_R)$ 为最优值函数, 且

$$h(t, \hat{y}, r, l) = E_{t, \hat{y}, r, l} [\hat{Y}^{\bar{u}_I^*, u_R}(T)].$$

定理 4.5 的证明过程类似 Yang 和 Chen^[16], 故略去证明.

由定理 4.5 经计算推导, 可得如下结论:

定理 4.6 对任意 $u_R \in \mathcal{A}_I$, 保险公司的最优响应风险分担策略为

$\bar{a}^*(t) = \xi_0^*(t, b(t)) = (0 \vee a^0(t, b(t))) \wedge 1$, 其中

$$a^0(t, b(t)) = \frac{\tau_I}{1 + \tau_I} + \frac{b(t) - p(t)}{\gamma_I (1 + \tau_I) q^2(t) e^{\mu \int_t^T g(s) ds + g(t)r}}. \quad (4.18)$$

保险公司的最优响应投资策略为

$$\bar{\pi}_1^*(t) = \frac{\lambda_r - \varphi\sigma_s - g(t) + \epsilon(t) + \rho\sigma_L\sigma_s j(t)}{\gamma_I\sigma_B(K)e^{\mu\int_t^T g(s)ds + g(t)r}} + \frac{g(t)\hat{y} - F(t)\sigma_F(t, T)}{\sigma_B(K)} + \tau_I\pi_3(t), \quad (4.19)$$

$$\bar{\pi}_2^*(t) = \frac{\varphi - \rho\sigma_L j(t)}{\gamma_I e^{\mu\int_t^T g(s)ds + g(t)r}} + \tau_I\pi_4(t), \quad (4.20)$$

其中

$$g(t) = \frac{\zeta_1\zeta_2(1 - e^{\frac{k}{2}(\zeta_1 - \zeta_2)(T-t)})}{\zeta_1 - \zeta_2 e^{\frac{k}{2}(\zeta_1 - \zeta_2)(T-t)}}, \quad (4.21)$$

$$\zeta_1 = \frac{\lambda_r k - \eta + \sqrt{(\lambda_r k - \eta)^2 + 2k}}{k}, \quad \zeta_2 = \frac{\lambda_r k - \eta - \sqrt{(\lambda_r k - \eta)^2 + 2k}}{k},$$

$$\epsilon(t) = e^{\int_t^T (\lambda_r k - \eta - kg(s))ds} \int_t^T \left([\lambda_r^2 k - 2\lambda_r kg(s) + g^2(s)k] e^{-\int_s^T (\lambda_r k - \eta - kg(v))dv} \right) ds, \quad (4.22)$$

$$j(t) = \frac{\varphi^2 (1 - e^{(\beta + \varphi\rho\sigma_L)(t-T)})}{\beta + \varphi\rho\sigma_L}. \quad (4.23)$$

证明：见附录 B. 证毕.

根据定理 4.6 可以推导出再保险价格的上限和下限.

性质 4.7 再保险价格的上限和下限分别为

$$\bar{b}(t) = \gamma_I q^2(t) e^{\mu\int_t^T g(s)ds + g(t)r} + p(t) \quad (4.24)$$

和

$$\underline{b}(t) = (1 + \theta)p(t) \quad (4.25)$$

证明：当 $a^0(t, b(t)) = 1$ 时，解得再保险价格的上限为式 (4.24). 当

$a^0(t, b(t)) = 0$ 时，解得 $b_1(t) = p(t) - \tau_I \gamma_I q^2(t) e^{\mu\int_t^T g(s)ds + g(t)r} \leq p(t)$ ，而 $c(t) = (1 + \theta)p(t)$ ，又 $\underline{b}(t) = b_1(t) \vee c(t)$ ，因此再保险价格的下限为式 (4.25). 证毕.

4.2.2 再保险公司的最优时间一致策略

针对保险公司实施的最优响应策略 $\bar{u}_I^*$ ，再保险公司将寻找自己的最优时间一致再保险价格和投资策略. 类似 4.2.1，我们引入一个辅助过程以求解优化问

题(4.9). 令 $\pi_R(t) = \left((1 + \tau_R)a^0(t) - 1, \pi_3(t) - \tau_R \bar{\pi}_1^*(t), \pi_4(t) - \tau_R \bar{\pi}_2^*(t) \right)^\top$, 方程(4.7)可改写为:

$$dZ^{\bar{u}_I^*, u_R}(t) = \left[Z^{\bar{u}_I^*, u_R}(t)r(t) - \tau_R \theta p(t) + \tau_R (b(t) - p(t)) \right] dt + (\pi_R(t))^\top \sigma [\Lambda dt + d\bar{W}(t)].$$

引理 4.8 令

$$H(t) = \exp \left\{ \int_0^t (r(v) + \frac{1}{2} \|\Lambda\|^2) dv + \int_0^t \Lambda^\top d\bar{W}(v) \right\},$$

则 $H(t)$ 满足:

$$\frac{dH(t)}{H(t)} = (r(t) + \Lambda^\top \Lambda) dt + \Lambda^\top d\bar{W}(t), \quad H(0) = 1.$$

且 $Z^{\bar{u}_I^*, u_R}(t)$ 可表示为:

$$Z^{\bar{u}_I^*, u_R}(t) = E \left[\int_t^T \frac{\tau_R [\theta p(v) - b(v) + p(v)] H(t)}{H(v)} dv + \frac{Z^{\bar{u}_I^*, u_R}(T) H(t)}{H(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad t \in [t, T].$$

引理 4.8 的证明类似引理 4.2 的证明, 这里省略.

记 $\hat{F}(t) = E \left[\int_t^T \frac{\tau_R [b(v) - \theta p(v) - p(v)] H(t)}{H(v)} dv \middle| \mathcal{F}_t \right]$. 为了计算 $\hat{F}(t)$, 推导出如下引理.

引理 4.9 $\hat{F}(t) = \int_t^T \tau_R [-p(v) + b(v) - \theta p(v)] B(t, v) dv$, 且 $\hat{F}(t)$ 满足:

$$\begin{cases} d\hat{F}(t) = \tau_R [\theta p(t) - b(t) + p(t)] dt + \hat{F}(t) [r(t) + \lambda_r k r(t) \sigma_{\hat{F}}(t, T)] dt \\ \quad + \hat{F}(t) \sigma_{\hat{F}}(t, T) \sqrt{k r(t)} dW_r(t), \\ \hat{F}(T) = 0, \end{cases} \quad (4.26)$$

其中 $\sigma_{\hat{F}}(t, T) = \int_t^T \frac{\tau_R [-\theta p(v) + b(v) - p(v)] \sigma_B(v - t) B(t, v)}{\hat{F}(t)} dv$.

引理 4.9 的证明类似引理 4.3 的证明, 此处省略.

为求解优化问题(4.9), 令 $\hat{Z}^{\bar{u}_I^*, u_R}(t) = Z^{\bar{u}_I^*, u_R}(t) + \hat{F}(t)$. 根据有方程(4.7)和方程(4.26)有:

$$\begin{aligned}
 d\hat{Z}^{\bar{u}_I^*, u_R}(t) = & \left[Z^{\bar{u}_I^*, u_R}(t)r(t) - \left((1+\tau_R)a^0(t) - 1 \right) (b(t) - p(t)) + \sigma_B(K)\lambda_r kr(t) \right. \\
 & \cdot \left(\pi_3(t) - \tau_R \bar{\pi}_1^*(t) \right) + \left(\pi_4(t) - \tau_R \bar{\pi}_2^*(t) \right) \left(\sigma_S \lambda_r kr(t) + \varphi L(t) \right) \\
 & + \hat{F}(t)\lambda_r kr(t)\sigma_{\hat{F}}(t, T) \Big] dt + \left[\left(\pi_3(t) - \tau_R \bar{\pi}_1^*(t) \right) \sigma_B(K) \right. \\
 & + \left(\pi_4(t) - \tau_R \bar{\pi}_2^*(t) \right) \sigma_S + \hat{F}(t)\sigma_{\hat{F}}(t, T) \Big] \sqrt{kr(t)} dW_r(t) \\
 & + \left(\pi_4(t) - \tau_R \bar{\pi}_2^*(t) \right) \sqrt{L(t)} dW_S(t) + \left[(1+\tau_R)a^0(t) - 1 \right] q(t) dW(t).
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{由 } \hat{F}(T) = 0 \text{ 得 } \hat{Z}^{\bar{u}_I^*, u_R}(T) = Z^{\bar{u}_I^*, u_R}(T), \text{ 则 } E \left[\cdot \mid \hat{Z}^{\bar{u}_I^*, u_R}(t) = \hat{z}, r(t) = r, L(t) = l \right] \\
 & = E \left[\cdot \mid Z^{\bar{u}_I^*, u_R}(t) + \hat{F}(t) = z + \hat{F}(t), r(t) = r, L(t) = l \right] = E \left[\cdot \mid Z^{\bar{u}_I^*, u_R}(t) = z, r(t) = r, L(t) = l \right],
 \end{aligned}$$

因此问题(4.9)可改写为:

$$\begin{aligned}
 J_R(t, \hat{z}, r, l; \bar{u}_I^*, u_R^*) &:= \max_{u_R \in \mathcal{A}_R} J_R(t, \hat{z}, r, l; \bar{u}_I^*, u_R) \\
 &= \max_{u_R \in \mathcal{A}_R} \left\{ E_{t, \hat{z}, r, l} \left[\hat{Z}^{\bar{u}_I^*, u_R}(T) \right] - \frac{\gamma_R}{2} \text{Var}_{t, \hat{z}, r, l} \left[\hat{Z}^{\bar{u}_I^*, u_R}(T) \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

为了得到时间一致策略, 定义保险公司的均衡策略和均衡值函数如下:

定义 4.10 考虑 $u_R^*(s) \in \mathcal{A}_R$ (一个候选的均衡策略), 对任意给定的 $u_R \in \mathcal{A}_R$

和实数 $\varepsilon > 0$, 定义如下策略:

$$u_R^\varepsilon(s) = \begin{cases} u_R(s), & t \leq s < t + \varepsilon, \\ u_R^*(s), & t + \varepsilon \leq s \leq T. \end{cases}$$

对于定理 4.6 所给出的策略 $\bar{u}_I^* = (\bar{a}^*(t), \bar{\pi}_1^*(t), \bar{\pi}_2^*(t)) = (\xi_0^*(t, b(t)), \xi_1^*(t, \pi_3(t)),$

$\xi_2^*(t, \pi_4(t)))$, 如果满足

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J_R(t, \hat{z}, r, l; \bar{u}_I^*, u_R^*) - J_R(t, \hat{z}, r, l; \bar{u}_I^*, u_R^\varepsilon)}{\varepsilon} \geq 0,$$

那么称 u_R^* 为均衡策略, 相应的均衡值函数为 $J_R(t, \hat{z}, r, l; \bar{u}_I^*, u_R^*)$.

对于任意 $\psi(t, \hat{z}, r, l) \in C^{1,2,2,2}([0, T] \times R \times R^+ \times R^+)$, 相对财富过程(4.27)的一般

无穷小生成元 $\mathcal{C}^{\bar{u}_I^*, u_R}$ 定义为:

$$\begin{aligned}
 C^{\bar{u}_I^*, u_R} \psi(t, \hat{z}, r, l) := & \psi_t + \psi_{\hat{z}} \left[\hat{z}r - \left((1 + \tau_R) a^0(t) - 1 \right) (b(t) - p(t)) + \varphi l \left(\pi_4(t) - \tau_R \bar{\pi}_2^*(t) \right) \right. \\
 & + \hat{F}(t) \lambda_r k r \sigma_{\hat{F}}(t, T) + \lambda_r k r \left(\left(\pi_3(t) - \tau_R \bar{\pi}_1^*(t) \right) \sigma_B(K) + \left(\pi_4(t) - \tau_R \bar{\pi}_2^*(t) \right) \right. \\
 & \cdot \sigma_S) \left. \right] + \psi_r (\mu - \eta r) + \psi_l \beta (\delta - l) + \frac{1}{2} \psi_{\hat{z}\hat{z}} \left\{ \left(\pi_4(t) - \tau_R \bar{\pi}_2^*(t) \right)^2 l \right. \\
 & + \left[\left(\pi_3(t) - \tau_R \bar{\pi}_1^*(t) \right) \sigma_B(K) + \left(\pi_4(t) - \tau_R \bar{\pi}_2^*(t) \right) \sigma_S + \hat{F}(t) \sigma_{\hat{F}}(t, T) \right]^2 k r \\
 & + q^2(t) \left((1 + \tau_R) a^0(t) - 1 \right)^2 \left. \right\} - \psi_{\hat{z}r} k r \left[\left(\pi_3(t) - \tau_R \bar{\pi}_1^*(t) \right) \sigma_B(K) \right. \\
 & + \left(\pi_4(t) - \tau_R \bar{\pi}_2^*(t) \right) \sigma_S + \hat{F}(t) \sigma_{\hat{F}}(t, T) \left. \right] + \psi_{\hat{z}l} \left(\pi_4(t) - \tau_R \bar{\pi}_2^*(t) \right) \rho \sigma_L l \\
 & + \frac{1}{2} \psi_{rr} k r + \frac{1}{2} \psi_{ll} \sigma_L^2 l,
 \end{aligned}$$

其中 ψ_t , $\psi_{\hat{z}}$, ψ_r , ψ_l , $\psi_{\hat{z}\hat{z}}$, $\psi_{\hat{z}r}$, $\psi_{\hat{z}l}$, ψ_{rr} 和 ψ_{ll} 分别表示相关变量的一阶导数和二阶导数.

定理 4.11 (验证定理) 对于优化问题(4.28), 如果存在两个实函数 $\tilde{V}(t, \hat{z}, r, l)$,

$\tilde{h}(t, \hat{z}, r, l) \in D^{1,2,2,2}([0, T] \times R \times R^+ \times R^+)$ 满足

$$\sup_{u_R \in \mathcal{A}_R} \left\{ C^{\bar{u}_I^*, u_R} \tilde{V}(t, \hat{z}, r, l) - \frac{\gamma_R}{2} C^{\bar{u}_I^*, u_R} \tilde{h}^2(t, \hat{z}, r, l) + \gamma_R \tilde{h}(t, \hat{z}, r, l) C^{\bar{u}_I^*, u_R} \tilde{h}(t, \hat{z}, r, l) \right\} = 0, \quad (4.29)$$

$$C^{\bar{u}_I^*, u_R^*} \tilde{h}(t, \hat{z}, r, l) = 0, \quad (4.30)$$

边界条件分别为 $\tilde{V}(T, \hat{z}, r, l) = \hat{z}$ 和 $\tilde{h}(T, \hat{z}, r, l) = \hat{z}$, 这里

$$u_R^* = \arg \sup_{u_R \in \mathcal{A}_R} \left\{ C^{\bar{u}_I^*, u_R} \tilde{V}(t, \hat{z}, r, l) - \frac{\gamma_R}{2} C^{\bar{u}_I^*, u_R} \tilde{h}^2(t, \hat{z}, r, l) + \gamma_R \tilde{h}(t, \hat{z}, r, l) C^{\bar{u}_I^*, u_R} \tilde{h}(t, \hat{z}, r, l) \right\}.$$

则 u_R^* 为最优时间一致策略, $\tilde{V}(t, \hat{z}, r, l) = J_R(t, \hat{z}, r, l; \bar{u}_I^*, u_R^*)$ 为最优值函数, 且

$$\tilde{h}(t, \hat{z}, r, l) = E_{t, \hat{z}, r, l} \left[\hat{Z}^{\bar{u}_I^*, u_R^*}(T) \right].$$

定理 4.11 的证明类似定理 4.5 的证明, 故略去.

基于定理 4.11, 可推导出再保险公司的最优时间一致再保险-投资策略的解析解.

定理 4.12 针对保险公司的最优响应策略 $\bar{u}_I^*$, 再保险公司的最优时间一致再保险价格为 $b^*(t) = ((1 + \theta)p(t)) \vee b^0(t)$, 其中

$$b^0(t) = \frac{(1 - \tau_I \tau_R) [\gamma_I (1 + \tau_I) + \gamma_R (1 + \tau_R)] \gamma_I q^2(t) e^{\mu \int_t^T g(s) ds + g(t)r}}{(1 + \tau_R) [2\gamma_I (1 + \tau_I) + \gamma_R (1 + \tau_R)]} + p(t).$$

且再保险公司的最优时间一致投资策略为

$$\pi_3^*(t) = \frac{\lambda_r - \varphi\sigma_s - g(t) + \epsilon(t) + \rho\sigma_L\sigma_s j(t)}{\sigma_B(K)e^{\mu\int_t^T g(s)ds + g(t)r}} \cdot \frac{\gamma_I + \tau_R\gamma_R}{\gamma_I\gamma_R(1 - \tau_I\tau_R)} + \frac{g(t)(\hat{z} + \tau_R\hat{y})}{(1 - \tau_I\tau_R)\sigma_B(K)} - \frac{\hat{F}(t)\sigma_{\hat{F}}(t, T) + \tau_R F(t)\sigma_F(t, T)}{(1 - \tau_I\tau_R)\sigma_B(K)}, \quad (4.31)$$

$$\pi_4^*(t) = \frac{\gamma_I + \gamma_R\tau_R}{\gamma_I\gamma_R(1 - \tau_I\tau_R)} \cdot \frac{\varphi - \rho\sigma_L j(t)}{e^{\mu\int_t^T g(s)ds + g(t)r}}, \quad (4.32)$$

其中 $g(t)$ 、 $\epsilon(t)$ 和 $j(t)$ 分别由式(4.21)、(4.22)和(4.23)给出.

定理 4.12 的证明过程类似定理 4.6 的证明, 这里省略.

4.2.3 最优再保险合同及保险公司的最优时间一致投资策略

根据 4.1 节所构建的保险公司与再保险公司之间的 Stackelberg 博弈框架, 保险公司会根据再保险公司的最优再保险价格 $b^*(t)$ 和最优时间一致投资策略 $\pi_3^*(t)$ 、 $\pi_4^*(t)$ 调整其最优响应赔付风险分担策略 $\bar{a}^*(t) = \xi_0^*(t, b(t))$ 和最优响应投资策略 $\bar{\pi}_1^*(t) = \xi_1^*(t, \pi_3(t))$ 以及 $\bar{\pi}_2^*(t) = \xi_2^*(t, \pi_4(t))$, 从而得到最终的最优时间一致策略 $u_i^*(t) = (a^*(t), \pi_1^*(t), \pi_2^*(t)) = (\xi_0^*(t, b^*(t)), \xi_1^*(t, \pi_3^*(t)), \xi_2^*(t, \pi_4^*(t)))$.

定理 4.13 基于 4.1 节的假设以及 4.2.1 和 4.2.2 小节的计算推导, 可得最优再保险合同如下:

情形 1: 当

$$\frac{(1 - \tau_I\tau_R)[\gamma_I(1 + \tau_I) + \gamma_R(1 + \tau_R)]\gamma_I q^2(t)e^{\mu\int_t^T g(s)ds + g(t)r}}{(1 + \tau_R)[2\gamma_I(1 + \tau_I) + \gamma_R(1 + \tau_R)]} \geq \theta p(t),$$

最优再保险合同为:

$$a^*(t) = \frac{1}{1 + \tau_I} \left[\tau_I + \frac{(1 - \tau_I\tau_R)(\gamma_I(1 + \tau_I) + \gamma_R(1 + \tau_R))}{(1 + \tau_R)(2\gamma_I(1 + \tau_I) + \gamma_R(1 + \tau_R))} \right], \quad (4.33)$$

$$b^*(t) = \frac{(1 - \tau_I\tau_R)[\gamma_I(1 + \tau_I) + \gamma_R(1 + \tau_R)]}{(1 + \tau_R)[2\gamma_I(1 + \tau_I) + \gamma_R(1 + \tau_R)]} \cdot \gamma_I q^2(t)e^{\mu\int_t^T g(s)ds + g(t)r} + p(t). \quad (4.34)$$

情形 2: 当

$$\frac{(1 - \tau_I\tau_R)[\gamma_I(1 + \tau_I) + \gamma_R(1 + \tau_R)]\gamma_I q^2(t)e^{\mu\int_t^T g(s)ds + g(t)r}}{(1 + \tau_R)[2\gamma_I(1 + \tau_I) + \gamma_R(1 + \tau_R)]} < \theta p(t),$$

最优再保险合同为:

$$a^*(t) = \frac{1}{1+\tau_I} \left[\tau_I + \frac{\theta p(t)}{\gamma_I q^2(t) e^{\mu \int_t^T g(s) ds + g(t)r}} \right], \quad (4.35)$$

$$b^*(t) = (1+\theta)p(t). \quad (4.36)$$

证明：当

$$\frac{(1-\tau_I\tau_R)[\gamma_I(1+\tau_I)+\gamma_R(1+\tau_R)]\gamma_I q^2(t) e^{\mu \int_t^T g(s) ds + g(t)r}}{(1+\tau_R)[2\gamma_I(1+\tau_I)+\gamma_R(1+\tau_R)]} \geq \theta p(t)$$

时, $b^0(t) \geq \underline{b}(t)$. 由定理 4.12 可得最优时间一致再保险价格如式(4.34)所示. 将式(4.34)代入式(4.18), 且

$$0 < \frac{(1-\tau_I\tau_R)[\gamma_I(1+\tau_I)+\gamma_R(1+\tau_R)]}{(1+\tau_R)[2\gamma_I(1+\tau_I)+\gamma_R(1+\tau_R)]} < 1,$$

可得最优时间一致赔付风险分担策略如式(4.33)所示.

当

$$\frac{(1-\tau_I\tau_R)[\gamma_I(1+\tau_I)+\gamma_R(1+\tau_R)]\gamma_I q^2(t) e^{\mu \int_t^T g(s) ds + g(t)r}}{(1+\tau_R)[2\gamma_I(1+\tau_I)+\gamma_R(1+\tau_R)]} < \theta p(t)$$

时, $b^0(t) < \underline{b}(t)$, 由定理 4.12 可得最优时间一致再保险价格如式(4.36)所示. 由性质 4.1 有

$$\gamma_I q^2(t) e^{\mu \int_t^T g(s) ds + g(t)r} > \theta p(t),$$

即

$$0 < \frac{\theta p(t)}{\gamma_I q^2(t) e^{\mu \int_t^T g(s) ds + g(t)r}} < 1.$$

再将式(4.36)代入式(4.18)可得最优时间一致赔付风险分担策略如式(4.35)所示. 证毕.

定理 4.14 基于上述假设以及计算推导, 可得保险公司的最优时间一致投资策略:

$$\begin{aligned} \pi_1^*(t) = & \frac{\lambda_r - \varphi\sigma_S - g(t) + \epsilon(t) + \rho\sigma_L\sigma_S j(t)}{\sigma_B(K) e^{\mu \int_t^T g(s) ds + g(t)r}} \cdot \frac{\gamma_R + \tau_I\gamma_I}{\gamma_I\gamma_R(1-\tau_I\tau_R)} + \frac{g(t)(\hat{y} + \tau_I\hat{z})}{(1-\tau_I\tau_R)\sigma_B(K)} \\ & - \frac{F(t)\sigma_F(t, T) + \tau_I\hat{F}(t)\sigma_{\hat{F}}(t, T)}{(1-\tau_I\tau_R)\sigma_B(K)}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\pi_2^*(t) = \frac{\gamma_R + \gamma_I \tau_I}{\gamma_I \gamma_R (1 - \tau_I \tau_R)} \cdot \frac{\varphi - \rho \sigma_L j(t)}{e^{\mu \int_t^T g(s) ds + g(t)r}}. \quad (4.38)$$

证明:分别将式(4.31)、(4.32)代入式(4.19)、(4.20),对保险公司的最优响应策略进行调整,可得保险公司最终的最优时间一致投资策略如式(4.37)和(4.38)所示.证毕.

4.3 数值模拟

本节通过数值模拟分析模型主要参数对最优再保险合同以及最优时间一致投资策略的影响.基于中国平安保险公司2018-2023年度财报,可得日均赔付的均值(p)和方差(q^2)分别为人民币7亿元和人民币98.1亿元.其余参数设定参考Guan和Liang^[50]以及Yang和Chen^[16],本节基本参数假设如下表所示:

表 4-1 模型参数取值

参数	τ_I	τ_R	p	q^2	γ_I	γ_R	T	t
取值	0.6	0.4	0.7	9.81	5	2	12	0
参数	X_I	X_R	K	ρ	μ	k	η	r
取值	200	100	20	0.5	0.019	0.007	0.234	0.05
参数	σ_S	σ_L	φ	λ_r	δ	β		
取值	0.02	0.03	1.5	1	0.04	0.03		

4.3.1 模型参数对最优再保险合同的影响

鉴于定理 4.13 中的情形 2 属于特殊情况,本节仅分析定理 4.13 中的情形 1.

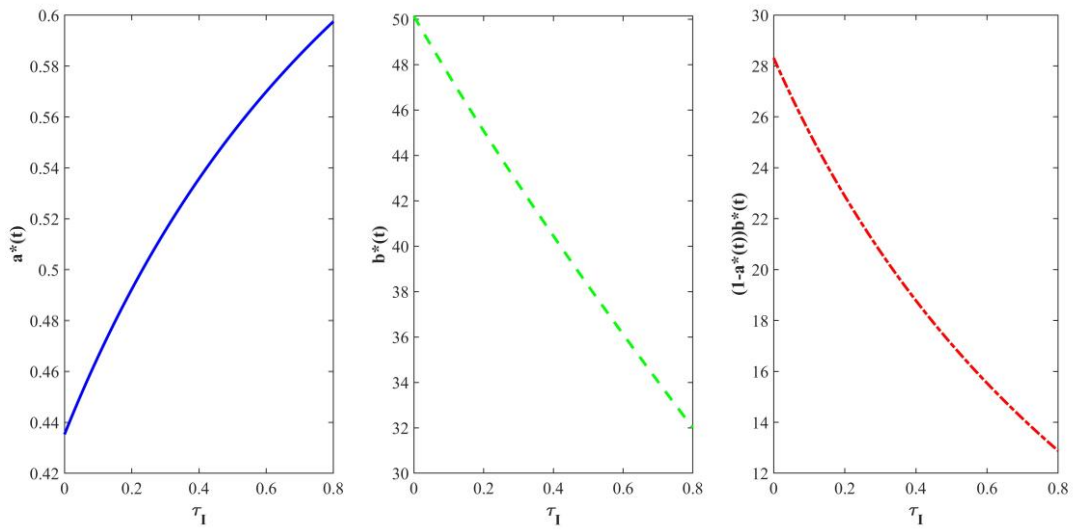


图 4-1 τ_I 对最优再保险合同的影响

图 4-1 表明, $a^*(t)$, $b^*(t)$ 和 $(1-a^*(t))b^*(t)$ 分别是 τ_I 的增函数, 减函数和减函数. 当 τ_I 增大时, 保险公司更加在意自身相对财富的大小. 虽然购买再保险可以分散其风险, 但保险公司需要向再保险公司支付再保险费, 意味着其相对财富的减少. 这种情况下, 保险公司更倾向于减少其再保险支出, 增加自留比例, 故 $a^*(t)$ 随着 τ_I 的增大而增大. 对于再保险公司而言, 当意识到保险公司的再保险意愿降低, 他就会适当调低再保险价格. 双方博弈后再保险费 $(1-a^*(t))b^*(t)$ 减少.

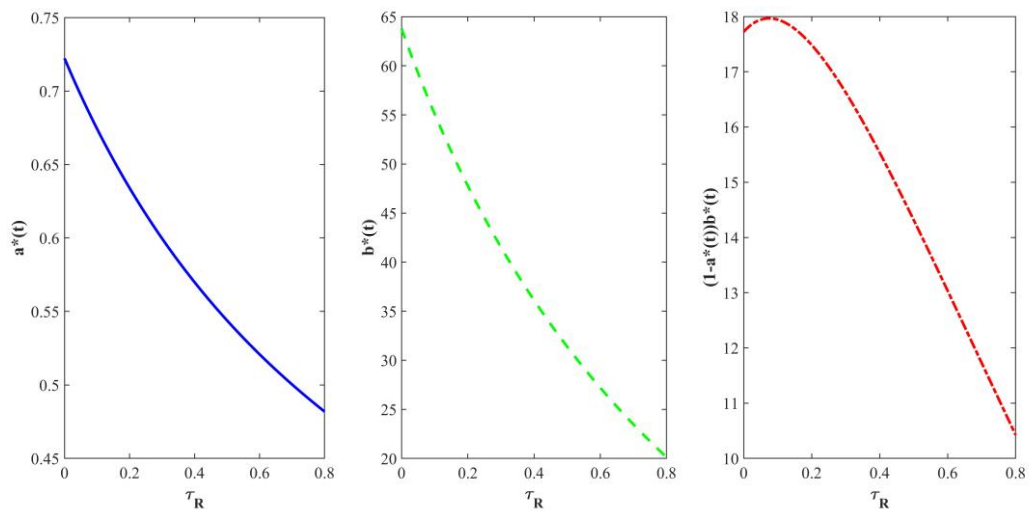
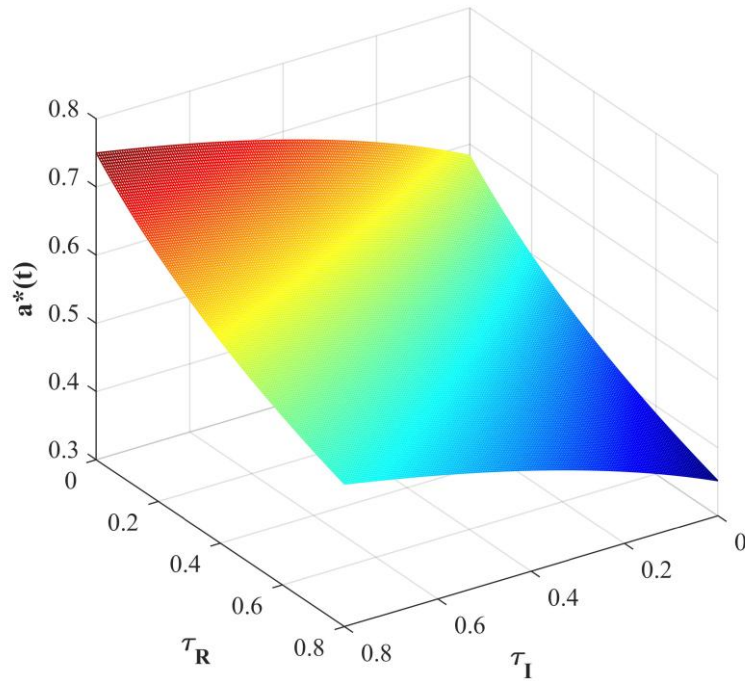
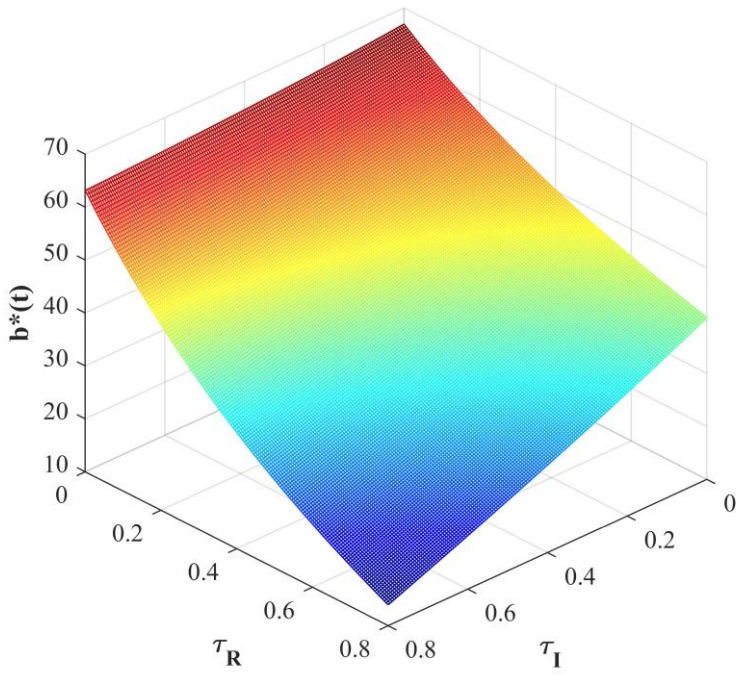


图 4-2 τ_R 对最优再保险合同的影响

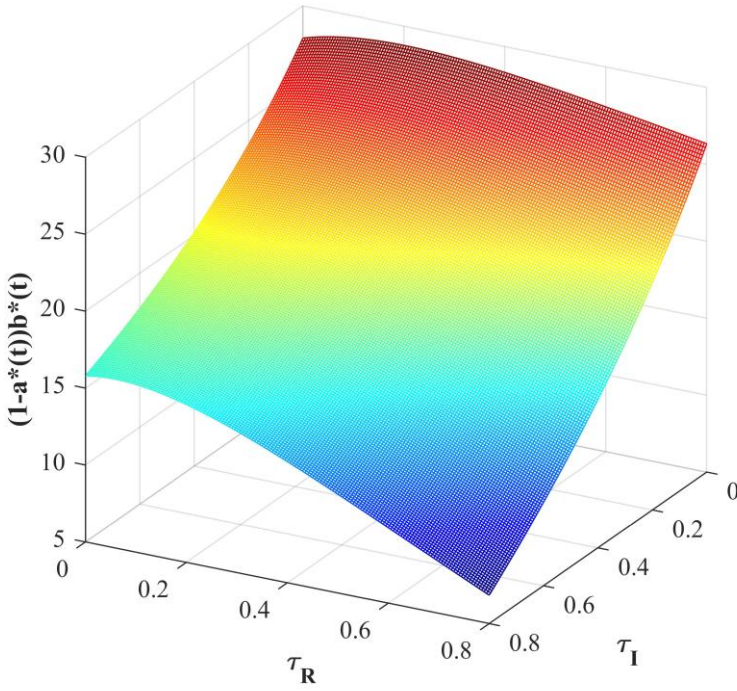
由图 4-2 可知, 当 τ_R 增大时, $a^*(t)$ 和 $b^*(t)$ 减小, 而 $(1-a^*(t))b^*(t)$ 在小幅度增大后逐步减小. τ_R 越大意味着再保险公司越关心自身相对财富值, 他希望通过提高再保险价格以增加其再保险费收入 $(1-a^*(t))b^*(t)$. 而从式(4.18)可知再保险价格的提高必然导致保险公司自留比例 $a(t)$ 的增加, 再保险费可能减少, 因此, 再保险公司会适当调低再保险价格以增加保险公司购买再保险的意愿. 最终的博弈结果是当再保险公司开始调低再保险价格时, 保险公司增购的再保险相对较多, 体现为再保险费 $(1-a^*(t))b^*(t)$ 的上涨. 而随着再保险价格的持续下调, 对于再保险费而言, 保险公司增购再保险的影响小于再保险价格下降的影响, 最终体现为再保险费 $(1-a^*(t))b^*(t)$ 的下降.



4-3(a) τ_I, τ_R 对最优索赔风险分担策略 $a^*(t)$ 的共同影响



4-3(b) τ_I, τ_R 对最优再保险价格 $b^*(t)$ 的共同影响



4-3(c) τ_I, τ_R 对最优再保险费 $(1-a^*(t))b^*(t)$ 的共同影响

图 4-3 τ_I, τ_R 对最优再保险合同的共同影响

由图 4-3 可知, $a^*(t)$ 和 $b^*(t)$ 对 τ_R 的变化更敏感, 说明再保险合同(即索赔风险分担策略和再保险价格)对再保险公司的相对绩效参数更加敏感. 此外, $(1-a^*(t))b^*(t)$ 对 τ_I 的变化更敏感, 这是因为保险公司是再保险费的支付方, 而再保险公司是再保险费的接受方. 图 4-3 表明在考虑相对绩效后, 保险公司购买再保险的意愿总体下降, 再保险公司愿意调低再保险价格, 最终均衡再保险费降低.

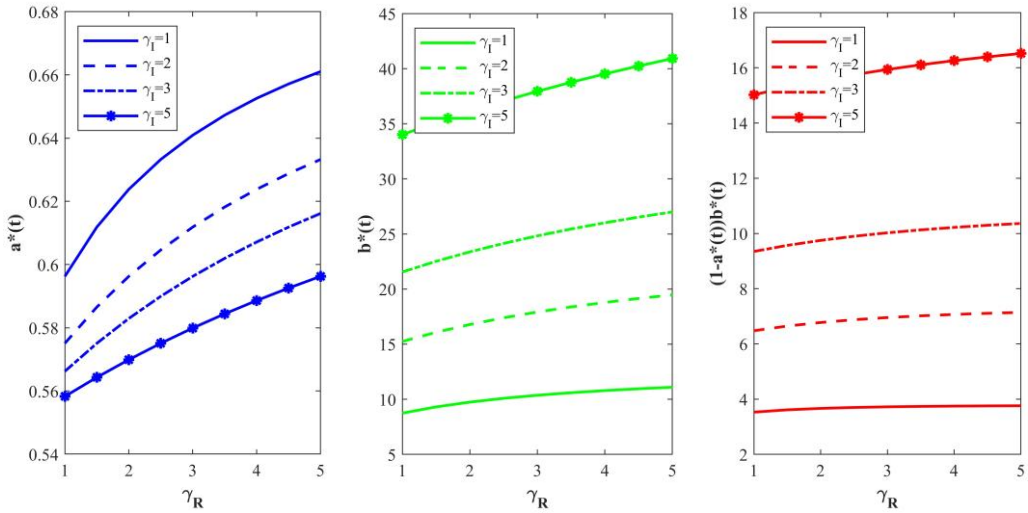
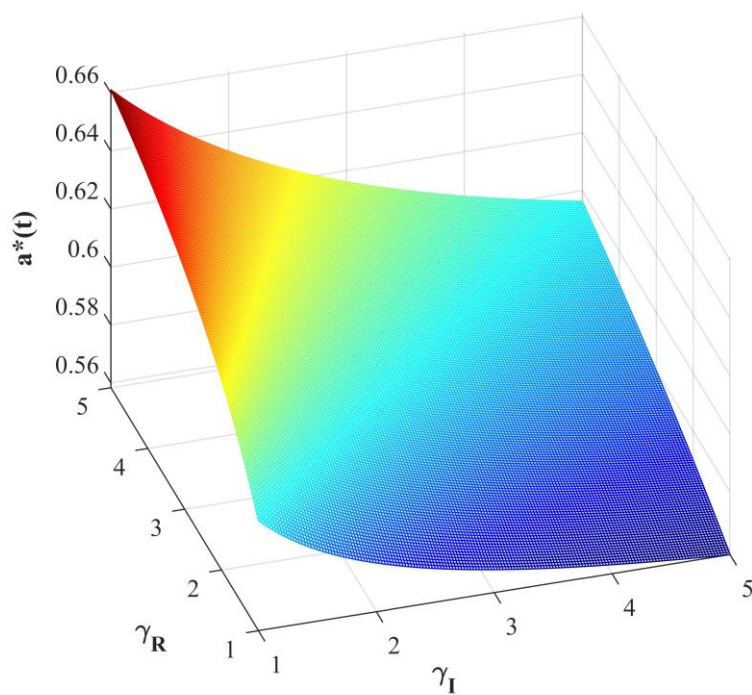


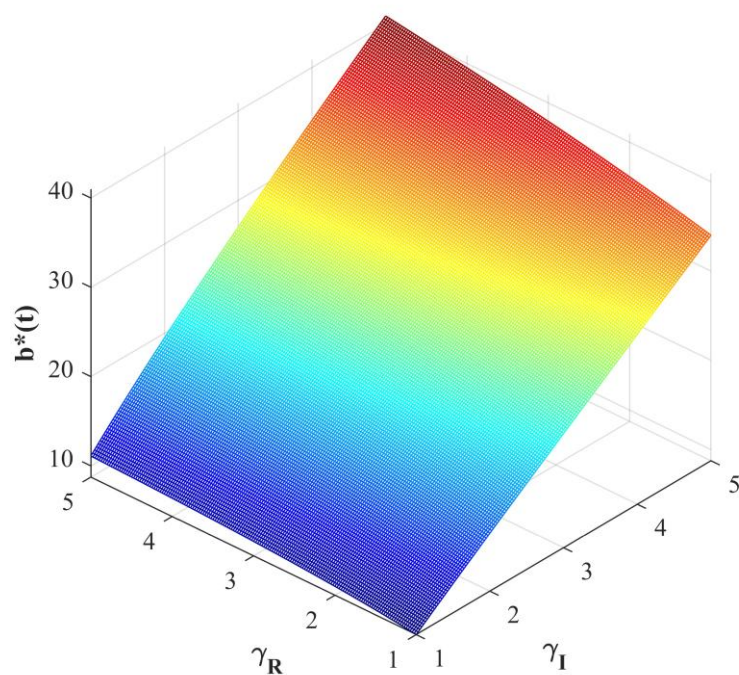
图 4-4 γ_I, γ_R 对最优再保险合同的影响

由图 4-4, $a^*(t)$, $b^*(t)$ 和 $(1-a^*(t))b^*(t)$ 分别是 γ_I 的减函数, 增函数和增函数. 保险公司的风险厌恶系数 γ_I 越大, 保险公司越倾向于购买更多的再保险以分散潜在风险, 即 $a^*(t)$ 减小. 再保险公司意识到保险公司会转移更多的风险, 就会提高再保险价格 $b^*(t)$. 这种情况下价格博弈的结果是再保险费 $(1-a^*(t))b^*(t)$ 增加.

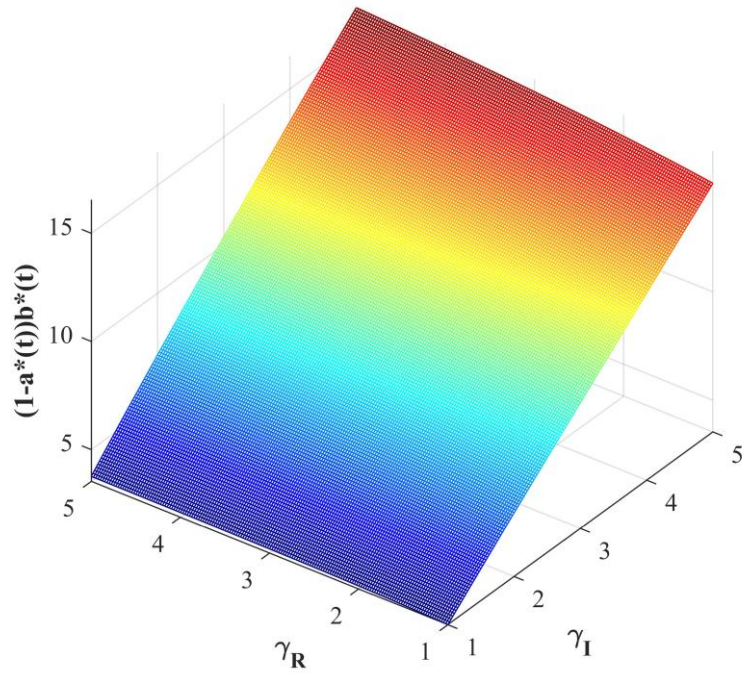
图 4-4 也表明 $a^*(t)$, $b^*(t)$ 和 $(1-a^*(t))b^*(t)$ 均为 γ_R 的增函数. γ_R 增大, 再保险公司更加厌恶风险, 希望降低潜在风险, 因此他会主动提高再保险价格以增加保险公司风险转移的成本. 意识到再保险公司提价后, 保险公司会降低再保险购买意愿, 提高自留比例. 这种情况下价格博弈的结果是再保险费 $(1-a^*(t))b^*(t)$ 增加.



4-5(a) γ_I, γ_R 对最优索赔风险分担策略 $a^*(t)$ 的共同影响



4-5(b) γ_I, γ_R 对最优再保险价格 $b^*(t)$ 的共同影响



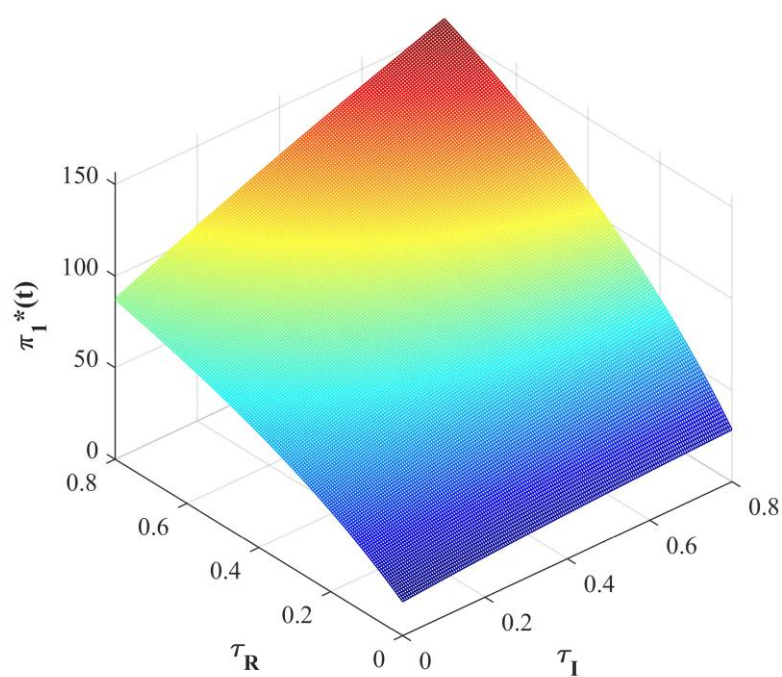
4-5(c) γ_I, γ_R 对最优再保险费 $(1-a^*(t))b^*(t)$ 的共同影响

图 4-5 γ_I, γ_R 对最优再保险合同的影响

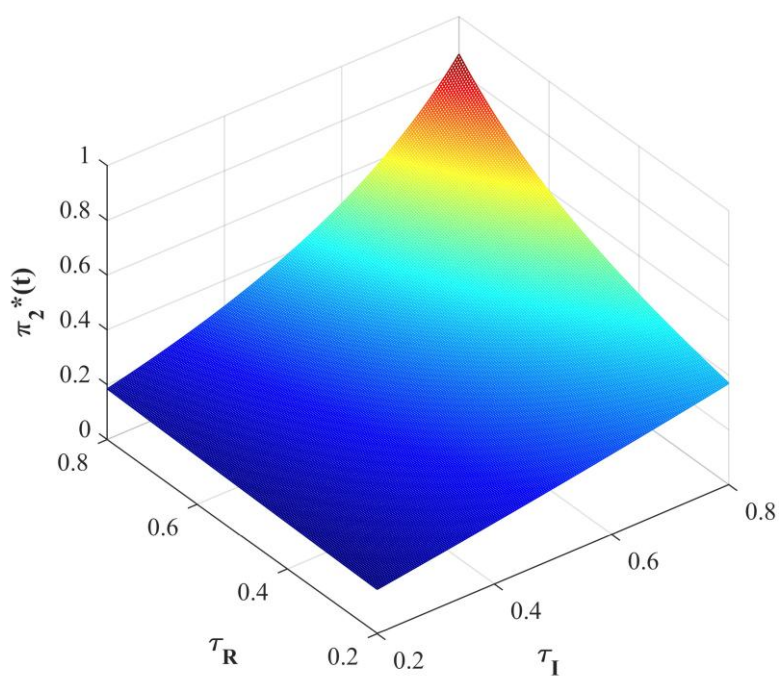
由图 4-5, $a^*(t)$ 对 γ_R 的变化更敏感, 而 $b^*(t)$ 对 γ_I 的变化更敏感, 表明保险公司和再保险公司都对对方的风险厌恶系数更为敏感, 因为双方都很关心再保险费, 而对方的风险厌恶系数是再保险保费的不确定性源之一. 同时, 图 4-5 表明 $(1-a^*(t))b^*(t)$ 对 γ_I 的变化更敏感, 因为保险公司是再保险费的支付方, 而再保险公司是再保险费的接受方.

4.3.2 模型参数对最优时间一致投资策略的影响

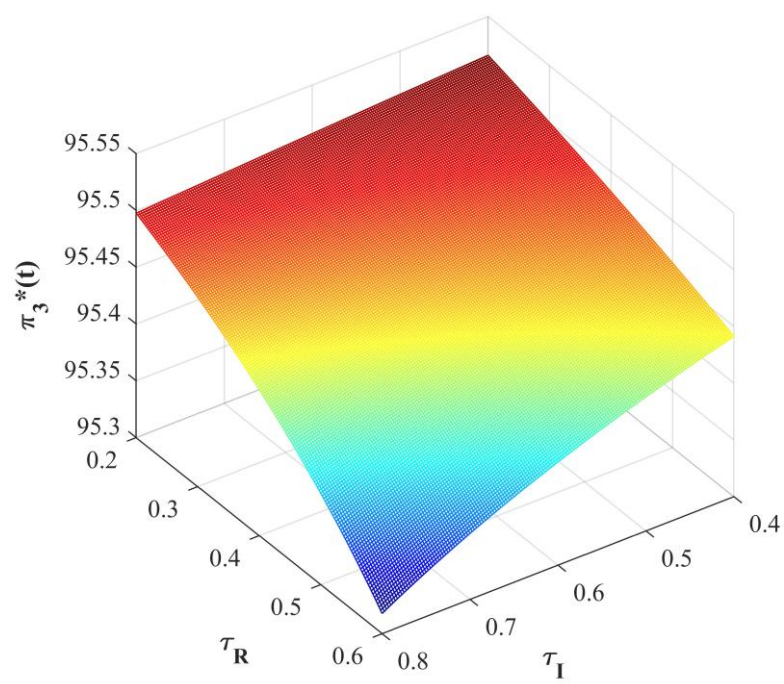
本小节主要分析模型参数对式(4.37)、(4.38)、(4.31)和式(4.32)所给出的最优时间一致策略 $\pi_1^*(t)$ 、 $\pi_2^*(t)$ 、 $\pi_3^*(t)$ 、 $\pi_4^*(t)$ 的影响.



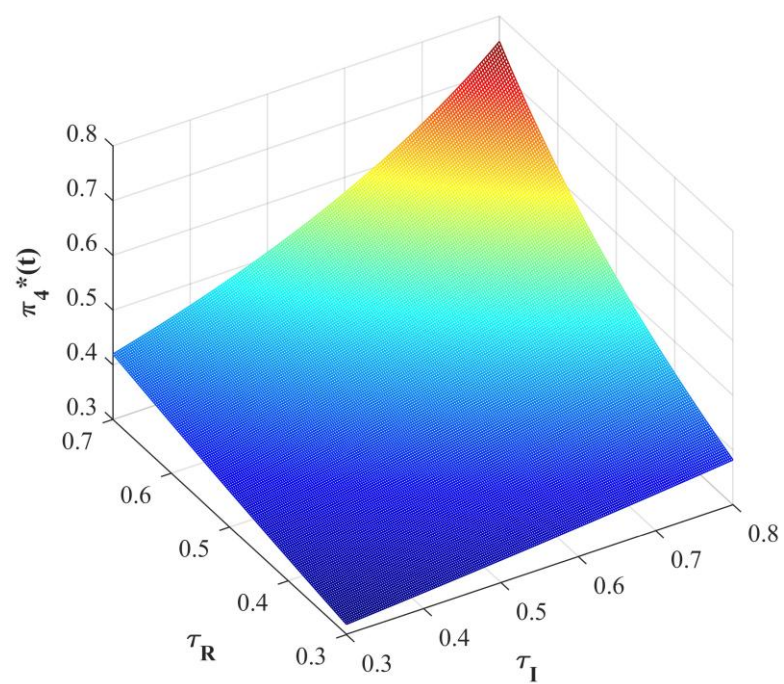
4-6(a) τ_I, τ_R 对最优时间一致投资策略 $\pi_1^*(t)$ 的共同影响



4-6(b) τ_I, τ_R 对最优时间一致投资策略 $\pi_2^*(t)$ 的共同影响



4-6(c) τ_I, τ_R 对最优时间一致投资策略 $\pi_3^*(t)$ 的共同影响



4-6(d) τ_I, τ_R 对最优时间一致投资策略 $\pi_4^*(t)$ 的共同影响

图 4-6 τ_I, τ_R 对最优时间一致投资策略的共同影响

图 4-6 描绘了相对绩效参数对保险公司和再保险公司的最优时间一致投资策略的影响. 由图 4-1 可知, 再保险费 $(1-a^*(t))b^*(t)$ 随着 τ_I 的增大而减小, 意味着 τ_I 增大时保险公司所支付的金额减少, 可用于金融市场投资的金额增加. 同时, τ_I 越大, 保险公司越关注其相对财富, 故而增加对滚动债券和风险资产的投资, 即 $\pi_1^*(t)$ 和 $\pi_2^*(t)$ 增加. 此外, 由图 4-2 可知, 再保险费 $(1-a^*(t))b^*(t)$ 随着 τ_R 的增大而减小, 表明再保险公司所收到的再保险费减少, 其可用于金融市场投资的金额也相应减少. 同时, τ_R 的增大意味着再保险公司更加重视其相对财富, 于是再保险公司希望获得更高的投资收益, 故而减少其对收益较低的滚动债券的投资额、增加其对收益较高的风险资产的投资额, 即 $\pi_3^*(t)$ 减少而 $\pi_4^*(t)$ 增加.

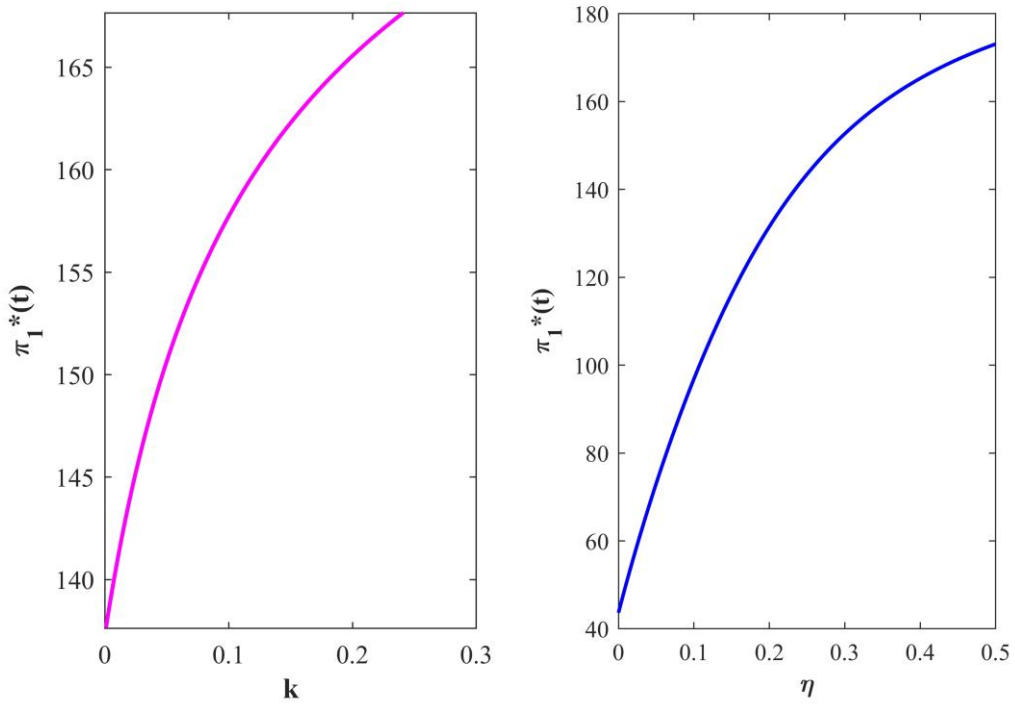


图 4-7 k, η 对最优投资策略 $\pi_1^*(t)$ 的影响

图 4-7 刻画了随机利率模型中的两个参数对最优投资策略 $\pi_1^*(t)$ 的影响. $\pi_1^*(t)$ 与 k 正相关. 当 k 增大, 即利率的波动率增大时, 表明利率风险增加, 因此, 为了对冲利率风险, 保险公司会增加其在滚动债券上的投资额, 即 $\pi_1^*(t)$ 增大. 此

外, $\pi_1^*(t)$ 与 η 正相关. η 越大表示随机利率回复均值的速度越快, 意味着利率在其长期均值附近频繁波动, 甚至基本稳定在长期均值附近, 因此滚动债券的投资收益更加可预测, 保险公司会增加对该类资产的投资, 即 $\pi_1^*(t)$ 增大.

鉴于参数 k 和 η 对再保险公司的滚动债券投资策略 $\pi_3^*(t)$ 影响与其对 $\pi_1^*(t)$ 的影响类似, 故略去对 $\pi_3^*(t)$ 的分析.

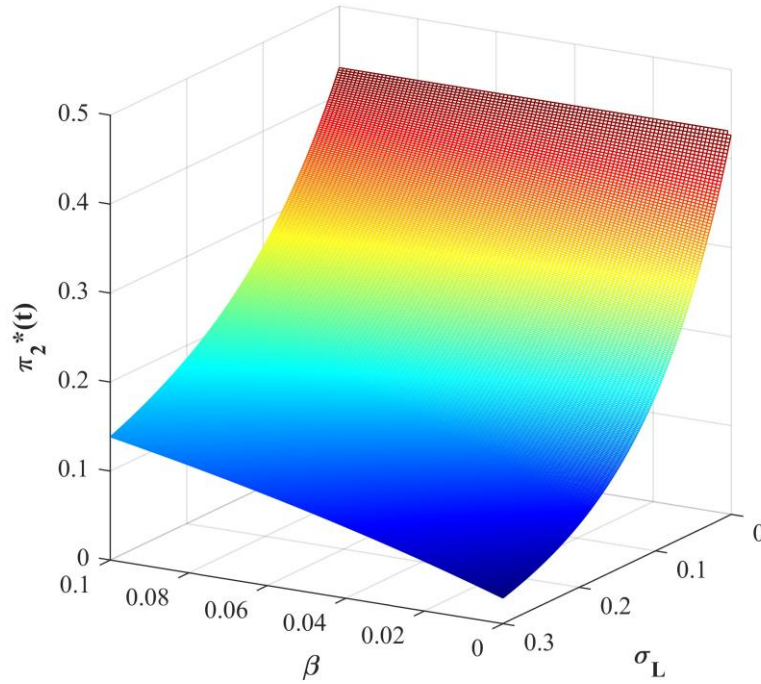


图 4-8 β, σ_L 对最优投资策略 $\pi_2^*(t)$ 的影响

在图 4-8 中, 可以看到最优投资策略 $\pi_2^*(t)$ (保险公司对风险资产的投资额) 是 β 的增函数. 参数 β 描绘了风险资产波动率 $L(t)$ 回复到长期水平 δ 的速度, β 越大意味着波动率回复均值越快, 风险资产的价格变化幅度越小, 其回报越可预测, 故而保险公司愿意增加风险资产投资额, 即 $\pi_2^*(t)$ 增大. 同时, $\pi_2^*(t)$ 是 σ_L 的减函数. σ_L 增大表示风险资产的波动风险增加, 投资者会减少风险资产的持有, 即 $\pi_2^*(t)$ 减小.

鉴于参数 β 和 σ_L 对再保险人的风险资产投资策略 $\pi_4^*(t)$ 的影响与其对 $\pi_2^*(t)$ 的影响类似, 故略去对 $\pi_4^*(t)$ 的分析.

4.4 本章小结

本章研究了在随机利率与随机波动率环境下一个保险公司与一个再保险公司的再保险-投资博弈问题. 在再保险合同的确定方面, 赔付风险分担策略(再保险的购买比例)由保险公司确定, 再保险价格由再保险公司决定, 双方共同确定最终的再保险费用. 为了对冲利率风险, 在金融市场中引入滚动债券投资, 除此之外, 两公司还可投资无风险资产和风险资产以增加自身财富. 二者都以均值-方差准则下终端相对财富的最大化为目标寻找最优策略. 为了解决时间不一致问题, 我们在博弈论框架下讨论上述问题, 利用随机最优控制理论分析求解, 得到了最优时间一致投资策略和最优再保险合同. 最后, 通过数值模拟分析主要模型参数对最优策略的影响. 本章的随机环境假设更加贴合现实市场, 扩大了模型的应用范围, 研究结果可为保险公司和再保险公司的实践提供理论指导.

第 5 章 总结和展望

本文主要研究了随机环境下考虑相对绩效的均衡再保险-投资策略,围绕一个保险公司与一个再保险公司的再保险-投资动态博弈展开工作,将不同的现实因素纳入考虑范围.首先采用 CEV 模型刻画风险资产价格,保险公司与再保险公司分别控制再保险购买比例(即索赔风险分担策略)和再保险价格,二者进行议价博弈,共同设计再保险合同.双方均可在金融市场中投资无风险资产和风险资产以管理盈余,增强实力.通过相对绩效量化他们的竞争,结合博弈论思想建模,寻找均值-方差准则下各自的最优时间一致策略.根据动态规划原理建立 HJB 方程,通过降阶化简,辅以 Feynman-Kac 公式求解,得到最优策略的解析解并进行数值模拟分析.其次,本文在再保险假设和动态博弈框架不变的基础上,同时考虑利率风险和波动风险,假设随机利率的动态过程受到 CIR 模型的驱动,风险资产价格的动态过程由 Heston 模型刻画.为了对冲利率风险,在金融市场中引入滚动债券投资.通过随机控制理论和分离变量方法求得最优再保险合同和最优时间一致投资策略,使得保险公司和再保险公司终端相对财富在均值-方差准则下达到最大化.再通过数值模拟分析模型主要参数对最优策略的影响.本文主要结论如下:

1. 在第 3 章的研究中,我们发现在考虑相对绩效后,保险公司的再保险购买意愿降低,再保险公司会调低再保险价格,最终的再保险费减少;同时双方在考虑相对绩效后都更愿意增加风险资产投资.

2. 在第 4 章的研究中,可以发现利率的波动率越大,随机利率回复均值的速度越快,保险公司和再保险公司对滚动债券的投资额越多.二者对风险资产的配置与其波动率回复到长期水平的速度正相关,与风险资产波动率的波动负相关.

3. 由图 3-3(c)与图 4-3(c)的变化趋势对比可知,在同时考虑利率风险和波动风险后,再保险费对再保险公司的相对绩效参数变得敏感,但仍对保险公司的相

对绩效参数更加敏感. 随着双方相对绩效参数的增大, 最终的再保险费虽然也在减小但下降速度明显变缓.

本文在已有研究的基础上进行了一定的拓展和创新. 未来的研究可以在以下几个方面进一步深入探讨:

1. 保险人与再保险人在金融市场中投资同种资产的假设过于严苛, 未来可研究二者分别投资于不同种资产情形下的均衡再保险-投资策略.
2. 在再保险-投资策略研究中考虑金融市场与保险市场的部分相关性.
3. 放宽金融市场的无摩擦假设, 考虑交易费用和税收的影响.

参考文献

- [1] Browne S. Optimal investment policies for a firm with a random risk process: exponential utility and minimizing the probability of ruin[J]. Mathematics of Operations Research, 1995, 20(4): 937-958.
- [2] Bai L H, Guo J Y. Optimal proportional reinsurance and investment with multiple risky assets and no-shorting constraint[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2008, 42(3): 968-975.
- [3] Brachetta M, Ceci C, Optimal proportional reinsurance and investment for stochastic factor models[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2019, 87: 15-33.
- [4] Ceci C, Colaneri K, Cretarola A, Optimal reinsurance and investment under common shock dependence between financial and actuarial markets[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2022, 105: 252-278.
- [5] Landriault D, Li B, Li D P, etc. A pair of optimal reinsurance-investment strategies in the two-sided exit framework[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2016, 71: 284-294.
- [6] Yener H. Proportional reinsurance and investment in multiple risky assets under borrowing constraint[J]. Scandinavian Actuarial Journal, 2020, 2020(5): 396-418.
- [7] Bäuerle N. Benchmark and mean-variance problems for insurers[J]. Mathematical Methods of Operations Research, 2005, 62(1): 159-165.
- [8] Bai L H, Zhang H Y. Dynamic mean-variance problem with constrained risk control for the insurers[J]. Mathematical Methods of Operations Research, 2008, 68(1): 181-205.
- [9] Bi J N, Guo J Y. Optimal mean-variance problem with constrained controls in a jump-diffusion financial market for an insurer[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2013, 157(1): 252-275.

- [10] Basak S, Chabakauri G. Dynamic mean-variance asset allocation[J]. The Review of Financial Studies, 2010, 23(8): 2970-3016.
- [11] Björk T, Murgoci A, Zhou X Y. Mean–variance portfolio optimization with state-dependent risk aversion[J]. Mathematical Finance: An International Journal of Mathematics, Statistics and Financial Economics, 2014, 24(1): 1-24.
- [12] Björk T, Khapko M, Murgoci A. On time-inconsistent stochastic control in continuous time[J]. Finance and Stochastics, 2017, 21(2): 331-360.
- [13] Bi J N, Cai J. Optimal investment-reinsurance strategies with state dependent risk aversion and VaR constraints in correlated markets[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2019, 85: 1-14.
- [14] Wang S X, Rong X M, Zhao H. Optimal time-consistent reinsurance-investment strategy with delay for an insurer under a defaultable market[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2019, 474(2): 1267-1288.
- [15] Zhu J Q, Li S H. Time-consistent investment and reinsurance strategies for mean-variance insurers under stochastic interest rate and stochastic volatility[J]. Mathematics, 2020, 8(12): 2183.
- [16] Yang P, Chen Z P. Optimal reinsurance pricing, risk sharing and investment strategies in a joint reinsurer-insurer framework[J]. IMA Journal of Management Mathematics, 2023, 34(4): 661-694.
- [17] Yang Y, Wang G J, Yao J. Time-consistent reinsurance-investment games for multiple mean-variance insurers with mispricing and default risks[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2024, 114: 79-107.
- [18] Li B H, Guo J Y, Tian L L. Optimal investment and reinsurance policies for the Cramér–Lundberg risk model under monotone mean-variance preference[J]. International Journal of Control, 2024, 97(6): 1296-1310.
- [19] Borch K. Reciprocal reinsurance treaties[J]. ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA, 1960, 1(4): 170-191.
- [20] Cai J, Fang Y, Li Z, etc. Optimal reciprocal reinsurance treaties under the joint survival probability and the joint profitable probability[J]. Journal of Risk and Insurance, 2013, 80(1): 145-168.

- [21] Li D P, Rong X M, Zhao H. Time-consistent reinsurance–investment strategy for an insurer and a reinsurer with mean–variance criterion under the CEV model[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2015, 283: 142-162.
- [22] Chen L, Hu X, Chen M. Optimal investment and reinsurance for the insurer and reinsurer with the joint exponential utility under the CEV model[J]. *AIMS Mathematics*, 2023, 8(7): 15383-15410.
- [23] 朱怀念, 张成科, 曹铭. Heston 模型下保险公司和再保险公司的投资与再保险博弈[J]. *中国管理科学*, 2021, 29(6): 48-59.
- [24] Hu D N, Chen S, Wang H L. Robust reinsurance contracts in continuous time[J]. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2018, 2018(1): 1-22.
- [25] Hu D N, Chen S, Wang H L. Robust reinsurance contracts with uncertainty about jump risk[J]. *European Journal of Operational Research*, 2018, 266(3): 1175-1188.
- [26] Chen L, Shen Y. On a new paradigm of optimal reinsurance: a stochastic Stackelberg differential game between an insurer and a reinsurer[J]. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 2018, 48(2): 905-960.
- [27] Chen L, Shen Y. Stochastic Stackelberg differential reinsurance games under time-inconsistent mean-variance framework[J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2019, 88: 120-137.
- [28] Gu A L, Viens F G, Shen Y. Optimal excess-of-loss reinsurance contract with ambiguity aversion in the principal-agent model[J]. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2020, 2020(4): 342-375.
- [29] 江五元, 杨招军. 保险与再保险及市场对冲稳健均衡策略[J]. *系统科学与数学*, 2023, 43(5): 1331-1345.
- [30] Garcia D, Strobl G. Relative wealth concerns and complementarities in information acquisition[J]. *The Review of Financial Studies*, 2011, 24(1): 169-207.
- [31] Espinosa G E, Touzi N. Optimal investment under relative performance concerns[J]. *Mathematical Finance*, 2015, 25(2): 221-257.
- [32] Bensoussan A, Siu C C, Yam S C P, etc. A class of non-zero-sum stochastic

- differential investment and reinsurance games[J]. Automatica, 2014, 50(8): 2025-2037.
- [33] Pun C S, Wong H Y. Robust non-zero-sum stochastic differential reinsurance game[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2016, 68: 169-177.
- [34] Abel A B. Asset prices under habit formation and catching up with the Joneses[J]. American Economic Review, 1990, 80(2): 38-42.
- [35] DeMarzo P M, Kaniel R, Kremer I. Relative wealth concerns and financial bubbles[J]. The Review of Financial Studies, 2008, 21(1): 19-50.
- [36] Hu D N, Wang H L. Time-consistent investment and reinsurance under relative performance concerns[J]. Communications in Statistics-Theory and Methods, 2018, 47(7): 1693-1717.
- [37] Zhu H N, Cao M, Zhang C K. Time-consistent investment and reinsurance strategies for mean-variance insurers with relative performance concerns under the Heston model[J]. Finance Research Letters, 2019, 30: 280-291.
- [38] Yang P, Chen Z P, Xu Y. Time-consistent equilibrium reinsurance-investment strategy for n competitive insurers under a new interaction mechanism and a general investment framework[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2020, 374: 112769.
- [39] Gu A L, Chen S M, Li Z F, etc. Optimal reinsurance pricing with ambiguity aversion and relative performance concerns in the principal-agent model[J]. Scandinavian Actuarial Journal, 2022, 2022(9): 749-774.
- [40] Lin X, Qian Y P. Time-consistent mean-variance reinsurance-investment strategy for insurers under CEV model[J]. Scandinavian Actuarial Journal, 2016, 2016(7): 646-671.
- [41] Sun Z Y, Yuen K C, Guo J Y. A BSDE approach to a class of dependent risk model of mean-variance insurers with stochastic volatility and no-short selling[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2020, 366: 112413.
- [42] Yuan Y, Mi H, Chen H. Mean-variance problem for an insurer with dependent risks and stochastic interest rate in a jump-diffusion market[J]. Optimization, 2022, 71(10): 2789-2818.

- [43] Guan G H, Liang Z X. Optimal reinsurance and investment strategies for insurer under interest rate and inflation risks[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2014, 55: 105-115.
- [44] Li D P, Rong X M, Zhao H. Time-consistent reinsurance–investment strategy for a mean–variance insurer under stochastic interest rate model and inflation risk[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2015, 64: 28-44.
- [45] Shao Y Y, Xia D F, Fei W Y. Optimal investment strategy for DC pension plan with inflation risk under the hybrid stochastic volatility model[J]. Systems Science and Control Engineering, 2023, 11(1): 2186962.
- [46] Bei H H, Wang Q, Wang Y J, etc. Optimal reinsurance–investment strategy based on stochastic volatility and the Stochastic Interest Rate Model[J]. Axioms, 2023, 12(8): 736.
- [47] Grandell J. Aspects of Risk Theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1991.
- [48] Zheng X X, Zhou J M, Sun Z Y. Robust optimal portfolio and proportional reinsurance for an insurer under a CEV model[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2016, 67: 77-87.
- [49] Zhao H, Weng C G, Shen Y, etc. Time-consistent investment-reinsurance strategies towards joint interests of the insurer and the reinsurer under CEV models[J]. Science China Mathematics, 2017, 60: 317-344.
- [50] Guan G H, Liang Z X. Optimal management of DC pension plan in a stochastic interest rate and stochastic volatility framework[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2014, 57: 58-66.
- [51] Boulier J F, Huang S, Taillard G. Optimal management under stochastic interest rates: the case of a protected defined contribution pension fund[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2001, 28: 173-189.
- [52] 刘小涛, 刘海龙. CEV 模型下考虑风险相关性的保险组合时间一致性投资策略[J]. 系统管理学报, 2022, 31(1): 53-65.

附录 A 定理 3.3 的证明

拓展 HJB 方程(3.8)和(3.9)分别可以具体写为:

$$\begin{aligned} \sup_{u_1 \in \mathcal{A}_I} \{ & V_t + [yr + (\mu - r)(\pi_1(t) - \tau_1 \pi_2(t)) + \theta p(t) - (1 + \tau_1)(1 - a(t))(b(t) - p(t))]V_y \\ & + \mu s V_s + \frac{1}{2} [(\pi_1(t) - \tau_1 \pi_2(t))^2 \sigma^2 s^{2\beta} + (\tau_1 - (1 + \tau_1)a(t))^2 q^2(t)] \\ & \cdot [V_{yy} - \gamma_1(h_y)^2] + (\pi_1(t) - \tau_1 \pi_2(t)) \sigma^2 s^{2\beta+1} (V_{ys} - \gamma_1 h_s h_y) \\ & + \frac{1}{2} \sigma^2 s^{2\beta+2} (V_{ss} - \gamma_1(h_s)^2) \} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

和

$$\begin{aligned} & h_t + [yr + (\mu - r)(\bar{\pi}_1^*(t) - \tau_1 \pi_2(t)) + \theta p(t) - (1 + \tau_1)(1 - \bar{a}^*(t))(b(t) - p(t))]h_y \\ & + \mu s h_s + \frac{1}{2} [(\bar{\pi}_1^*(t) - \tau_1 \pi_2(t))^2 \sigma^2 s^{2\beta} + q^2(t)(\tau_1 - (1 + \tau_1)\bar{a}^*(t))^2]h_{yy} \\ & + \sigma^2 s^{2\beta+1} (\bar{\pi}_1^*(t) - \tau_1 \pi_2(t))h_{ys} + \frac{1}{2} \sigma^2 s^{2\beta+2} h_{ss} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

参考文献[52], 我们猜测拓展 HJB 方程(3.8)和(3.9)解的形式分别为:

$$\begin{aligned} V(t, y, s) &= ye^{r(T-t)} + A(t, s) - B(t, s), \\ h(t, y, s) &= ye^{r(T-t)} + A(t, s), A(T, s) = B(T, s) = 0. \end{aligned}$$

其中 $A(t, s)$, $B(t, s)$ 均为 t 和 s 的确定性函数.

将猜测解的一阶和二阶偏导数分别带入式(A.1)、(A.2)并化简得

$$\begin{aligned} & A_t - B_t + \theta p(t)e^{r(T-t)} + \mu s A_s - \mu s B_s + \frac{1}{2} \sigma^2 s^{2\beta+2} (A_{ss} - B_{ss} - \gamma_1(A_s)^2) \\ & + \sup_{a(t) \in \mathcal{A}_I} f_1(t, a(t)) + \sup_{\pi_1(t) \in \mathcal{A}_I} f_2(t, \pi_1(t)) = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} & A_t + \theta p(t)e^{r(T-t)} + (\mu - r)(\bar{\pi}_1^*(t) - \tau_1 \pi_2(t))e^{r(T-t)} + \mu s A_s + \frac{1}{2} \sigma^2 s^{2\beta+2} A_{ss} \\ & - (1 + \tau_1)(1 - \bar{a}^*(t))(b(t) - p(t))e^{r(T-t)} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

其中,

$$f_1(t, a(t)) = -(1 + \tau_1)(1 - a(t))(b(t) - p(t))e^{r(T-t)} - \frac{\gamma_1}{2} e^{2r(T-t)} (\tau_1 - (1 + \tau_1)a(t))^2 q^2(t),$$

$$f_2(t, \pi_1(t)) = (\mu - r)(\pi_1(t) - \tau_1 \pi_2(t)) e^{r(T-t)} - \frac{\gamma_1}{2} e^{2r(T-t)} (\pi_1(t) - \tau_1 \pi_2(t))^2 \sigma^2 s^{2\beta} - \gamma_1 A_s e^{r(T-t)} (\pi_1(t) - \tau_1 \pi_2(t)) \sigma^2 s^{2\beta+1}.$$

令 $\frac{df_1(t, a(t))}{da(t)} = 0$ 得到函数 $f_1(t, a(t))$ 的最大值点

$$a^0(t) = \frac{\tau_1}{1 + \tau_1} + \frac{b(t) - p(t)}{\gamma_1(1 + \tau_1)q^2(t)e^{r(T-t)}}, \quad (\text{A.5})$$

则 $\bar{a}^*(t) = \xi_1^*(t, b(t)) = (0 \vee a^0(t)) \wedge 1$.

令 $\frac{df_2(t, \pi_1(t))}{d\pi_1(t)} = 0$ 得到函数 $f_2(t, \pi_1(t))$ 的最大值点

$$\bar{\pi}_1^*(t) = \frac{\mu - r}{\gamma_1 \sigma^2 s^{2\beta} e^{r(T-t)}} - \frac{sA_s}{e^{r(T-t)}} + \tau_1 \pi_2(t).$$

将(A.5)和(A.6)代入(A.3)、(A.4)后消去了状态变量 y ，得

$$A_t + rsA_s + \frac{1}{2} \sigma^2 s^{2\beta+2} A_{ss} - B_t - \mu s B_s - \frac{1}{2} \sigma^2 s^{2\beta+2} B_{ss} + \theta p(t) e^{r(T-t)} + \frac{(\mu - r)^2}{2\gamma_1 \sigma^2 s^{2\beta}} + \frac{(b(t) - p(t))^2}{2\gamma_1 q^2(t)} - (b(t) - p(t)) e^{r(T-t)} = 0, \quad (\text{A.7})$$

$$A_t + rsA_s + \frac{1}{2} \sigma^2 s^{2\beta+2} A_{ss} + \theta p(t) e^{r(T-t)} + \frac{(\mu - r)^2}{\gamma_1 \sigma^2 s^{2\beta}} + \frac{(b(t) - p(t))^2}{\gamma_1 q^2(t)} - (b(t) - p(t)) e^{r(T-t)} = 0. \quad (\text{A.8})$$

(A.7)和(A.8)作差后得

$$B_t + \mu s B_s + \frac{1}{2} \sigma^2 s^{2\beta+2} B_{ss} + \frac{(\mu - r)^2}{2\gamma_1 \sigma^2 s^{2\beta}} + \frac{(b(t) - p(t))^2}{2\gamma_1 q^2(t)} = 0. \quad (\text{A.9})$$

接下来求解方程(A.8)和(A.9).

对于方程(A.9)，根据 Feynman-Kac 公式， $B(t, s)$ 可表示为如下条件期望：

$$B(t, s) = \mathbb{E} \left[\int_t^T \left(\frac{(\mu - r)^2}{2\gamma_1 \sigma^2} S(m)^{-2\beta} + \frac{(b(m) - p(m))^2}{2\gamma_1 q^2(m)} \right) dm \mid S(t) = s \right],$$

其中 $\mathbb{E}[\cdot \mid S(t) = s]$ 为原始概率测度 $\mathbb{P}$ 下的条件期望， $S(m)$ 满足

$$dS(m) = \mu S(m) dm + \sigma S^{\beta+1}(m) dW_s(m), \quad t < m < T. \text{化简得}$$

$$B(t, s) = \frac{(\mu - r)^2}{2\gamma_1\sigma^2} \int_t^T \mathbb{E}[S(m)^{-2\beta} | S(t) = s] dm + \frac{1}{2\gamma_1} \int_t^T \frac{(b(m) - p(m))^2}{q^2(m)} dm. \quad (\text{A.10})$$

当 $\beta = 0$ 时,

$$B(t, s) = \frac{(\mu - r)^2(T - t)}{2\gamma_1\sigma^2} + \frac{1}{2\gamma_1} \int_t^T \frac{(b(m) - p(m))^2}{q^2(m)} dm. \quad (\text{A.11})$$

当 $\beta \neq 0$ 时, 根据文献[52]中的定理 5, 将 $\mathbb{E}[S(m)^{-2\beta} | S(t) = s]$ 带入(A.10)得

$$\begin{aligned} B(t, s) = & \frac{(\mu - r)^2(2\beta + 1)}{8\gamma_1\beta\mu^2} [2\beta\mu(T - t) + e^{-2\beta\mu(T-t)} - 1] - \frac{(\mu - r)^2}{4\gamma_1\sigma^2\beta\mu s^{2\beta}} \\ & \cdot (e^{-2\beta\mu(T-t)} - 1) + \frac{1}{2\gamma_1} \int_t^T \frac{(b(m) - p(m))^2}{q^2(m)} dm. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

对于方程(A.8), 根据 Feynman-Kac 公式, $A(t, s)$ 可表示为如下条件期望:

$$\begin{aligned} A(t, s) = \mathbb{E} \left[\int_t^T \left(\theta p(m) e^{r(T-m)} + \frac{(\mu - r)^2}{\gamma_1\sigma^2} \tilde{S}(m)^{-2\beta} + \frac{(b(m) - p(m))^2}{\gamma_1 q^2(m)} \right. \right. \\ \left. \left. - (b(m) - p(m)) e^{r(T-m)} \right) dm \mid \tilde{S}(t) = s \right], \end{aligned}$$

其中 $\mathbb{E}[\cdot | \tilde{S}(t) = s]$ 为新概率测度 $\mathbb{P}$ 下的条件期望, $\tilde{S}(m)$ 满足 $d\tilde{S}(m) = r\tilde{S}(m)dm + \sigma\tilde{S}^{\beta+1}(m)d\tilde{W}_s(m)$, $t < m < T$, 这里 $\tilde{W}_s(m)$ 为 $\mathbb{P}$ 测度下的标准布朗运动. 化简得

$$\begin{aligned} A(t, s) = & \int_t^T \left[\theta p(m) e^{r(T-m)} + \frac{(b(m) - p(m))^2}{\gamma_1 q^2(m)} - (b(m) - p(m)) e^{r(T-m)} \right] dm \\ & + \frac{(\mu - r)^2}{\gamma_1\sigma^2} \int_t^T \mathbb{E}[\tilde{S}(m)^{-2\beta} | \tilde{S}(t) = s] dm. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

当 $\beta = 0$ 时,

$$\begin{aligned} A(t, s) = & \int_t^T \left[\theta p(m) e^{r(T-m)} + \frac{(b(m) - p(m))^2}{\gamma_1 q^2(m)} - (b(m) - p(m)) e^{r(T-m)} \right] dm \\ & + \frac{(\mu - r)^2(T - t)}{\gamma_1\sigma^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

当 $\beta \neq 0$ 时, 根据文献[52]中的定理 5, 将 $\mathbb{E}[S(m)^{-2\beta} | S(t) = s]$ 带入(A.13)得

$$\begin{aligned}
 A(t, s) = & \frac{(\mu - r)^2 (2\beta + 1)(T - t)}{2\gamma_1 r} + \frac{(\mu - r)^2 (e^{-2\beta r(T-t)} - 1)}{2\beta r \gamma_1 \sigma^2} \left(\frac{(2\beta + 1)\sigma^2}{2r} - s^{-2\beta} \right) \\
 & + \int_t^T \left[\theta p(m) e^{r(T-m)} + \frac{(b(m) - p(m))^2}{\gamma_1 q^2(m)} - (b(m) - p(m)) e^{r(T-m)} \right] dm.
 \end{aligned} \tag{A.15}$$

将 $A(t, s)$ 对 s 求偏导后代入(A.6)得式(3.11)和(3.12), 即为保险公司的最优响应投资策略. 最优值函数为 $V(t, y, s) = ye^{r(T-t)} + A(t, s) - B(t, s)$, 其中当 $\beta = 0$ 时 $A(t, s)$ 、 $B(t, s)$ 分别由(A.14), (A.11)给出. 当 $\beta \neq 0$ 时, $A(t, s)$ 、 $B(t, s)$ 分别由(A.15), (A.12)给出. 证毕.

附录 B 定理 4.6 的证明

拓展 HJB 方程(4.16)和(4.17)可分别重写为

$$\begin{aligned} & V_t + V_{\hat{y}} [\hat{y}r + F(t)\lambda_r kr \sigma_F(t, T)] - (V_{\hat{y}r} - \gamma_I h_r h_{\hat{y}}) kr F(t) \sigma_F(t, T) \\ & + V_r (\mu - \eta r) + V_l \beta (\delta - l) + \frac{1}{2} kr [V_{rr} - \gamma_I (h_r)^2] + \frac{1}{2} l \sigma_L^2 [V_{ll} - \gamma_I (h_l)^2] \\ & + \sup_{a(t) \in \mathcal{A}_T} \{f_3(t, a(t))\} + \sup_{\pi_1(t), \pi_2(t) \in \mathcal{A}_T} \{f_4(\pi_1(t), \pi_2(t))\} = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

其中

$$\begin{aligned} f_3(t, a(t)) &= -V_{\hat{y}} [\tau_I - (1 + \tau_I) a(t)] (b(t) - p(t)) + \frac{1}{2} [V_{\hat{y}\hat{y}} - \gamma_I (h_{\hat{y}})^2] [\tau_I - (1 + \tau_I) a(t)]^2 q^2(t), \\ f_4(\pi_1(t), \pi_2(t)) &= V_{\hat{y}} [((\pi_1(t) - \tau_I \pi_3(t)) \sigma_B(K) + (\pi_2(t) - \tau_I \pi_4(t)) \sigma_S) \lambda_r kr + (\pi_2(t) - \tau_I \pi_4(t)) \phi l] \\ &+ \frac{1}{2} [V_{\hat{y}\hat{y}} - \gamma_I (h_{\hat{y}})^2] [(\pi_2(t) - \tau_I \pi_4(t))^2 l + ((\pi_1(t) - \tau_I \pi_3(t)) \sigma_B(K) \\ &+ (\pi_2(t) - \tau_I \pi_4(t)) \sigma_S + F(t) \sigma_F(t, T))^2 kr] - (V_{\hat{y}r} - \gamma_I h_r h_{\hat{y}}) kr \\ &\cdot [(\pi_1(t) - \tau_I \pi_3(t)) \sigma_B(K) + (\pi_2(t) - \tau_I \pi_4(t)) \sigma_S] \\ &+ (V_{\hat{y}l} - \gamma_I h_l h_{\hat{y}}) \phi l \sigma_L (\pi_2(t) - \tau_I \pi_4(t)), \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} & h_l + h_{\hat{y}} [\hat{y}r - (\tau_I - (1 + \tau_I) a^0(t)) (b(t) - p(t)) + ((\bar{\pi}_1^*(t) - \tau_I \pi_3(t)) \sigma_B(K) \\ & + (\bar{\pi}_2^*(t) - \tau_I \pi_4(t)) \sigma_S) \lambda_r kr + (\bar{\pi}_2^*(t) - \tau_I \pi_4(t)) \phi l + F(t) \sigma_F(t, T) \lambda_r kr] \\ & + h_r (\mu - \eta r) + h_l \beta (\delta - l) - h_{\hat{y}r} kr [(\bar{\pi}_1^*(t) - \tau_I \pi_3(t)) \sigma_B(K) + F(t) \sigma_F(t, T) \\ & + (\bar{\pi}_2^*(t) - \tau_I \pi_4(t)) \sigma_S] + \frac{1}{2} h_{rr} kr = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

令 $\frac{\partial f_3(t, a(t))}{\partial a(t)} = 0$ 得函数 $f_3(t, a(t))$ 的最大值点

$$a^0(t) = \frac{\tau_I}{1 + \tau_I} - \frac{V_{\hat{y}} (b(t) - p(t))}{[V_{\hat{y}\hat{y}} - \gamma_I (h_{\hat{y}})^2] q^2(t) (1 + \tau_I)}. \quad (\text{B.3})$$

令

$$\begin{cases} \frac{\partial f_4(\pi_1(t), \pi_2(t))}{\partial \pi_1(t)} = 0, \\ \frac{\partial f_4(\pi_1(t), \pi_2(t))}{\partial \pi_2(t)} = 0, \end{cases}$$

得函数 $f_4(\pi_1(t), \pi_2(t))$ 的最大值点

$$\bar{\pi}_1^*(t) = \frac{V_{\hat{y}}(\varphi\sigma_s - \lambda_r) + (V_{\hat{y}r} - \gamma_I h_r h_{\hat{y}}) + (V_{\hat{y}l} - \gamma_I h_l h_{\hat{y}})\rho\sigma_L\sigma_s}{[V_{\hat{y}\hat{y}} - \gamma_I (h_{\hat{y}})^2]\sigma_B(K)} \quad (B.4)$$

$$- \frac{F(t)\sigma_F(t, T)}{\sigma_B(K)} + \tau_I \pi_3(t),$$

$$\bar{\pi}_2^*(t) = - \frac{V_{\hat{y}}\varphi + (V_{\hat{y}l} - \gamma_I h_l h_{\hat{y}})\rho\sigma_L}{V_{\hat{y}\hat{y}} - \gamma_I (h_{\hat{y}})^2} + \tau_I \pi_4(t). \quad (B.5)$$

将(B.3)、(B.4)和(B.5)代入(B.1)得

$$\begin{aligned} & V_t + V_{\hat{y}} \cdot \hat{y}r + V_r(\mu - \eta r) + V_l(\delta - l) + \frac{1}{2}kr[V_{rr} - \gamma_I (h_r)^2] + \frac{1}{2}l\sigma_L^2[V_{ll} - \gamma_I (h_l)^2] \\ & - \frac{V_{\hat{y}}^2 \cdot (b(t) - p(t))^2}{2[V_{\hat{y}\hat{y}} - \gamma_I (h_{\hat{y}})^2]q^2(t)} - \frac{V_{\hat{y}}^2 \cdot \lambda_r^2 \cdot kr + V_{\hat{y}}^2 \cdot \varphi^2 l}{2[V_{\hat{y}\hat{y}} - \gamma_I (h_{\hat{y}})^2]} - \frac{(V_{\hat{y}l} - \gamma_I h_l h_{\hat{y}})\rho\sigma_L V_{\hat{y}}\varphi l}{V_{\hat{y}\hat{y}} - \gamma_I (h_{\hat{y}})^2} \\ & + \frac{V_{\hat{y}}\lambda_r kr(V_{\hat{y}r} - \gamma_I h_r h_{\hat{y}})}{V_{\hat{y}\hat{y}} - \gamma_I (h_{\hat{y}})^2} - \frac{(V_{\hat{y}r} - \gamma_I h_r h_{\hat{y}})^2 kr + (V_{\hat{y}l} - \gamma_I h_l h_{\hat{y}})^2 \rho^2 \sigma_L^2 l}{2[V_{\hat{y}\hat{y}} - \gamma_I (h_{\hat{y}})^2]} = 0. \end{aligned} \quad (B.6)$$

假设拓展 HJB 方程(4.16)和(4.17)解的形式为

$$\begin{cases} V(t, \hat{y}, r, l) = A(t)e^{g(t)r}\hat{y} + \frac{B(t)}{\gamma_I} + \frac{C(t)}{\gamma_I}l + \frac{D(t)}{\gamma_I}r, \\ V(T, \hat{y}, r, l) = \hat{y}, \quad A(T) = 1, \quad g(T) = B(T) = C(T) = D(T) = 0, \\ h(t, \hat{y}, r, l) = m(t)e^{g(t)r}\hat{y} + \frac{n(t)}{\gamma_I} + \frac{j(t)}{\gamma_I}l + \frac{\epsilon(t)}{\gamma_I}r, \\ h(T, \hat{y}, r, l) = \hat{y}, \quad m(T) = 1, \quad g(T) = n(T) = j(T) = \epsilon(T) = 0, \end{cases}$$

其中 $g(t)$, $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$, $m(t)$, $n(t)$, $j(t)$, $\epsilon(t)$ 均为时间 t 的确定函数.

将 $V(t, \hat{y}, r, l)$ 和 $h(t, \hat{y}, r, l)$ 的一阶偏导和二阶偏导代入方程(B.6)得

$$\begin{aligned}
 & A'(t)e^{g(t)r} \cdot \hat{y} + A(t)e^{g(t)r} \cdot g'(t)\hat{y}r + \frac{B'(t)}{\gamma_I} + \frac{C'(t)}{\gamma_I}l + \frac{D'(t)}{\gamma_I}r + A(t)e^{g(t)r} \cdot \hat{y}r \\
 & + A(t)e^{g(t)r} \cdot \mu g(t)\hat{y} - A(t)e^{g(t)r} \cdot \eta g(t)\hat{y}r + \frac{D(t)}{\gamma_I}\mu - \frac{D(t)}{\gamma_I}\eta r + \frac{C(t)}{\gamma_I}\beta\delta \\
 & - \frac{C(t)}{\gamma_I}\beta l - \frac{j^2(t)\sigma_L^2}{2} \cdot \frac{l}{\gamma_I} + \frac{A^2(t) \cdot (b(t) - p(t))^2}{2\gamma_I m^2(t)q^2(t)} + \frac{A^2(t) \cdot \lambda_r^2 \cdot kr}{2\gamma_I m^2(t)} \\
 & - \frac{A^2(t) \cdot g(t)\lambda_r kr}{\gamma_I m^2(t)} + e^{g(t)r} \cdot g(t)A(t)\lambda_r k\hat{y}r + \frac{\epsilon(t)A(t)\lambda_r kr}{\gamma_I m(t)} + \frac{A^2(t) \cdot \varphi^2 l}{2\gamma_I m^2(t)} \\
 & - \frac{j(t)\rho\sigma_L A(t)\varphi l}{\gamma_I m(t)} + \frac{A^2(t) \cdot g^2(t)kr}{2\gamma_I m^2(t)} - \frac{1}{2}kA(t)g^2(t)e^{g(t)r} \cdot \hat{y}r \\
 & - \frac{A(t)g(t)\epsilon(t)kr}{\gamma_I m(t)} + \frac{j^2(t) \cdot \rho^2 \sigma_L^2 l}{2\gamma_I} = 0
 \end{aligned} \tag{B.7}$$

针对方程(B.7)，分别对 $\hat{y}$ ， r ， l 和 $\hat{y}r$ 分离变量得

$$A'(t) + A(t)g(t)\mu = 0, \tag{B.8}$$

$$g'(t) + 1 - g(t)\eta + g(t)k\lambda_r - \frac{k}{2}g^2(t) = 0, \tag{B.9}$$

$$B'(t) + D(t)\mu + C(t)\beta\delta + \frac{A^2(t) \cdot (b(t) - p(t))^2}{2m^2(t)q^2(t)} = 0, \tag{B.10}$$

$$C'(t) - C(t)\beta - \frac{1}{2}\sigma_L^2 \cdot j^2(t)(1 - \rho^2) + \frac{A^2(t) \cdot \varphi^2}{2m^2(t)} - \frac{j(t)\rho\sigma_L A(t)\varphi}{m(t)} = 0, \tag{B.11}$$

$$D'(t) - D(t)\eta + \frac{A^2(t)\lambda_r^2 k}{2m^2(t)} - \frac{A^2(t)g(t)\lambda_r k}{m^2(t)} + \frac{\epsilon(t)A(t)\lambda_r k}{m(t)} + \frac{kA^2(t)g^2(t)}{2m^2(t)} - \frac{kA(t)g(t)\epsilon(t)}{m(t)} = 0. \tag{B.12}$$

将式(B.3)-(B.5)以及 $V(t, \hat{y}, r, l)$ 和 $h(t, \hat{y}, r, l)$ 的一阶偏导和二阶偏导代入方程(B.2)得

$$\begin{aligned}
 & m'(t)e^{g(t)r} \cdot \hat{y} + m(t)e^{g(t)r} \cdot g'(t)\hat{y}r + \frac{n'(t)}{\gamma_I} + \frac{j'(t)}{\gamma_I}l + \frac{\epsilon'(t)}{\gamma_I}r + m(t)e^{g(t)r} \cdot \hat{y}r \\
 & + \frac{A(t) \cdot (b(t) - p(t))^2}{\gamma_I m(t) q^2(t)} + \frac{A(t) \lambda_r^2 \cdot kr}{\gamma_I m(t)} + e^{g(t)r} \cdot g(t)m(t) \lambda_r k \hat{y}r + \frac{\epsilon(t) \lambda_r kr}{\gamma_I} \\
 & + \frac{A(t) \phi^2 l}{\gamma_I m(t)} - \frac{j(t) \rho \sigma_L \phi l}{\gamma_I} + m(t)e^{g(t)r} \cdot \mu g(t) \hat{y} - m(t)e^{g(t)r} \cdot \eta g(t) \hat{y}r + \frac{\epsilon(t)}{\gamma_I} \mu \\
 & - \frac{\epsilon(t)}{\gamma_I} \eta r + \frac{j(t)}{\gamma_I} \beta \delta - \frac{j(t)}{\gamma_I} \beta l - \frac{2A(t)g(t) \lambda_r kr}{\gamma_I m(t)} + \frac{A(t)g^2(t)kr}{\gamma_I m(t)} - \frac{g(t)\epsilon(t)kr}{\gamma_I} \\
 & - \frac{1}{2} km(t)g^2(t)e^{g(t)r} \cdot \hat{y}r = 0.
 \end{aligned} \tag{B.13}$$

针对方程(B.13)，分别对 $\hat{y}$ ， r ， l 和 $\hat{y}r$ 分离变量得

$$m'(t) + m(t)g(t)\mu = 0, \tag{B.14}$$

$$g'(t) + 1 - g(t)\eta + g(t)k\lambda_r - \frac{k}{2}g^2(t) = 0,$$

$$n'(t) + \epsilon(t)\mu + j(t)\beta\delta + \frac{A(t)(b(t) - p(t))^2}{m(t)q^2(t)} = 0, \tag{B.15}$$

$$j'(t) - j(t)\beta - j(t)\rho\sigma_L\phi + \frac{A(t)\phi^2}{m(t)} = 0, \tag{B.16}$$

$$\epsilon'(t) - \epsilon(t)\eta + \frac{A(t)\lambda_r^2 k}{m(t)} - \frac{2A(t)g(t)\lambda_r k}{m(t)} + \epsilon(t)\lambda_r k + \frac{kA(t)g^2(t)}{m(t)} - kg(t)\epsilon(t) = 0. \tag{B.17}$$

解微分方程(B.8)和(B.14)得

$$A(t) = m(t) = e^{\mu \int_t^t g(s) ds}. \tag{B.18}$$

为了求解方程(B.9)，将之改写为

$$g'(t) = \frac{k}{2} \left(g^2(t) - \frac{2(\lambda_r k - \eta)}{k} g(t) - \frac{2}{k} \right) = \frac{k}{2} (g(t) - \zeta_1)(g(t) - \zeta_2),$$

其中 ζ_1 ， ζ_2 为

$$\zeta_1 = \frac{\lambda_r k - \eta + \sqrt{(\lambda_r k - \eta)^2 + 2k}}{k}, \quad \zeta_2 = \frac{\lambda_r k - \eta - \sqrt{(\lambda_r k - \eta)^2 + 2k}}{k}.$$

则有

$$\frac{1}{\zeta_1 - \zeta_2} \left(\frac{1}{g(t) - \zeta_1} - \frac{1}{g(t) - \zeta_2} \right) dg(t) = \frac{k}{2} dt.$$

对上式两边求积分得

$$g(t) = \frac{\zeta_1 \zeta_2 (1 - e^{\frac{k}{2}(\zeta_1 - \zeta_2)(T-t)})}{\zeta_1 - \zeta_2 e^{\frac{k}{2}(\zeta_1 - \zeta_2)(T-t)}}. \quad (\text{B.19})$$

解方程(B.16)和(B.17)得

$$j(t) = \frac{\varphi^2 (1 - e^{(\beta + \varphi \rho \sigma_L)(t-T)})}{\beta + \varphi \rho \sigma_L}, \quad (\text{B.20})$$

和

$$\epsilon(t) = e^{\int_t^T (\lambda_r k - \eta - kg(s)) ds} \int_t^T \left([\lambda_r^2 k - 2\lambda_r kg(s) + g^2(s)k] e^{-\int_s^T (\lambda_r k - \eta - kg(v)) dv} \right) ds. \quad (\text{B.21})$$

解方程(B.15)得

$$n(t) = \int_t^T \left[\mu \epsilon(s) + \beta \delta j(s) + \frac{(b(s) - p(s))^2}{q^2(s)} \right] ds. \quad (\text{B.22})$$

解方程(B.10)-(B.12)得

$$C(t) = e^{\beta t} \int_t^T \left[\left(\frac{\varphi^2}{2} - \rho \varphi j(s) \sigma_L - \frac{\sigma_L^2 (1 - \rho^2) j^2(s)}{2} \right) e^{-\beta s} \right] ds, \quad (\text{B.23})$$

$$D(t) = e^{\eta t} \int_t^T \left[\left(\frac{\lambda_r^2 k}{2} - \lambda_r kg(s) + \frac{k}{2} g^2(s) - (g(s) - \lambda_r) k \epsilon(s) \right) e^{-\eta s} \right] ds, \quad (\text{B.24})$$

$$B(t) = \int_t^T \left[\mu D(s) + \beta \delta C(s) + \frac{(b(s) - p(s))^2}{2q^2(s)} \right] ds. \quad (\text{B.25})$$

将式(B.18)-(B.25)代入方程(B.3)-(B.5)，可得 $a^0(t)$ 、 $\bar{\pi}_1^*(t)$ 和 $\bar{\pi}_2^*(t)$ 如式(4.18)-(4.20)所示。证毕。

硕士期间发表的论文

- [1] 李九敏, 夏登峰, 费为银, 等. CEV 模型下考虑相对绩效的保险公司与再保险公司再保险—投资博弈 [J/OL]. 系统科学与数学 .
<https://link.cnki.net/urlid/11.2019.O1.20240719.1005.014>
- [2] Li J M, Xia D F, Fei W Y. Reinsurance and investment game between an insurer and a reinsurer with relative performance concerns under stochastic interest rate and stochastic volatility. 正在投稿.
- [3] 李冠军, 夏登峰, 李九敏, 等. 考虑不动产投资和随机工资的 DC 养老金最优投资策略[J]. 湖南工程学院学报(自然科学版), 2024, 34(03): 50-56.
- [4] 卢康威, 夏登峰, 李九敏, 等. 基于 CEV 模型考虑随机消费和随机利率的最优投资策略[J]. 宁波工程学院学报, 2024, 36(04): 18-25.

致 谢

时光飞逝，入学的场景还在眼前，转眼就要毕业离校。我非常幸运能在这三年里遇到各位好老师、好室友、好同学，给予我许多帮助和陪伴。良好的人际关系让我在日常的学习、科研和生活中更加开朗自信，从而拥有了一段美好的学习时光。

首先感谢我的导师夏登峰老师这三年来给予我的指导和帮助，夏老师总是和蔼可亲，在我科研遇到困难时积极讨论，给出建议；在我焦虑担忧时温柔鼓励，缓解紧张心情；在我放松懒惰时加以鞭策，把握大局。感谢费为银老师对我的论文进行指导，提出关键的问题和意见，让我学术进步、受益良多。感谢学院其他老师的倾力教学和答疑解惑，如潘海峰老师、姜培华老师、沈明轩老师、张伟老师等等，让我掌握了较为扎实的理论知识，为科研工作的展开奠定了良好的基础。

其次感谢我的室友们给予我的日常陪伴和支持鼓励，感谢各位同学的善意和帮助，让我的校园生活温馨快乐。感谢王维家传递给我的精神力量，“只要我还在奔跑着，他还是飞扬的披风”，希望我们在成长的路上与自己和解的同时还能保留一些冒险精神。

最后感谢我的家人一直以来的关心和无条件支持，让我一路走到今天，看见更广阔的天地。

毕业在即，希望我在无数个选择中成为更好的自己。

2025 年 3 月