

分类号: O231.5

密 级: 公开

单位代码: 10363

学 号: 2221020103

题 目 时变符号社会网络上的观念动力学研究

英文并列

题 目 Research on Opinion Dynamics in Time-Vary
Signed Social Networks

学生姓名: 杨露

指导教师: 何广 教授

专 业: 数学

研究方向: 随机控制理论及应用

论文答辩日期: 2025 年 5 月 14 日

安徽工程大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：我恪守学术道德，崇尚严谨学风。所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已明确注明和引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品及成果的内容。论文为本人亲自撰写，我对所写的内容负责，并完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

学位论文作者签名： 

日期：2025 年 5 月 14 日

安徽工程大学学位论文版权使用授权书

学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅或借阅。本人授权可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保密 ☐，在 ____ 年解密后适用本版权书。

本学位论文属于

不保密 ☒。

学位论文作者签名：杨露

日期：2025 年 5 月 14 日

指导教师签名：193

日期：2025 年 5 月 14 日

时变符号社会网络上的观念动力学研究

摘要

在当今社会,个体观念和态度在社会网络中的形成与演变是一个复杂且动态的过程。这一过程不仅受到个体间互动的影响,还受到社会压力、信息传播、文化背景和心理因素的综合作用。随着社交媒体的兴起和信息传播方式的多样化,社会网络的拓扑结构呈现出时变特性,即网络中的个体连接关系会随时间动态变化。针对社会网络拓扑结构的时变特性,本文提出了一种具有时变拓扑的多维观念动力学模型。该模型综合考虑了时变网络结构、异构信念系统、社会压力、个体私人观念与表达观念等关键因素,以提高对社会网络中观念动态的模拟和预测能力。具体而言,模型通过异构逻辑矩阵刻画不同话题间的依赖关系,同时区分个体在多个话题上的私人观念和公开表达观念,并引入竞争机制来模拟观念演化过程中的冲突与协调。这些机制的整合使模型能够更真实地反映现实社会网络的复杂动态。

本文首先介绍了社会网络观念动力学的研究背景与意义,系统回顾了相关理论基础和现有模型,并指出现有研究的局限性。在此基础上,我们详细阐述了所提出的新模型,包括模型的数学表达式、参数设置以及初始条件。随后,运用图论和矩阵分析方法,深入研究了模型的动力学特性,重点探讨了系统稳定性、收敛性以及模一致性条件等关键问题,并探讨了不同网络结构和参数设置下观念的收敛、分歧与极化现象。最后,通过仿真实验验证模型的有效性,结果表明,该

模型能够准确预测社会观念的动态演化过程,包括收敛与极化等典型现象。

关键词: 观念动力学, 时变拓扑, 稳定性, 异构信念系统, 模一
致性

Research on Opinion Dynamics in Time-Vary Signed Social Networks

ABSTRACT

In contemporary society, the formation and evolution of individual opinions and attitudes within social networks constitute a complex and dynamic process. This process is influenced not only by interpersonal interactions but also by the combined effects of social pressure, information dissemination, cultural background, and psychological factors. With the rise of social media and the diversification of information diffusion channels, the topological structure of social networks exhibits time-varying characteristics—that is, the connections between individuals in the network change dynamically over time. To address the time-varying nature of social network topologies, this paper proposes a multidimensional opinion dynamics model with time-varying network structures. The model integrates key factors such as dynamic network topology, heterogeneous belief systems, social pressure, and the distinction between individuals' private and expressed opinions, thereby enhancing its capability to simulate and predict opinion dynamics in social networks. Specifically, the model employs a heterogeneous logic matrix to capture interdependencies among different topics, distinguishes between privately held and publicly expressed opinions across multiple issues, and

incorporates a competition mechanism to simulate conflict and coordination during opinion evolution. The integration of these mechanisms enables the model to more accurately reflect the complex dynamics observed in real-world social networks.

This paper first introduces the research background and significance of opinion dynamics in social networks, systematically reviews relevant theoretical foundations and existing models, and identifies the limitations of current research. Building upon this, we elaborate on the proposed new model, including its mathematical formulation, parameter settings, and initial conditions. Subsequently, employing graph theory and matrix analysis methods, we conduct an in-depth investigation into the dynamical characteristics of the model, with a focus on key issues such as system stability, convergence, and modal consensus conditions. Furthermore, we examine how opinions converge, diverge, or polarize under different network structures and parameter configurations. Finally, simulation experiments are conducted to validate the model's effectiveness, with results demonstrating that the proposed model can accurately predict the dynamic evolution of social opinions, including typical phenomena such as consensus and polarization.

KEY WORDS : Opinion Dynamics, Time-Varying Topology, Stability, Heterogeneous Belief Systems, Modulus Consensus

目录

摘要.....	I
ABSTRACT.....	III
第 1 章：绪论.....	1
1.1 研究背景和意义.....	1
1.2 国内外研究现状.....	2
1.3 主要研究内容和论文结构.....	4
第 2 章：预备知识.....	6
2.1 符号.....	6
2.2 图论.....	6
2.3 DeGroot 模型简介.....	7
2.4 竞争概念.....	8
2.5 时变拓扑概念.....	9
第 3 章：合作机制下具有时变拓扑模型的动力学分析.....	11
3.1 模型描述.....	11
3.2 定义、假设及引理.....	14
3.3 主要结论.....	15
3.4 数值模拟.....	20
3.5 章节小结.....	22
第 4 章：竞争机制下具有时变拓扑模型的动力学分析.....	24
4.1 模型描述.....	24
4.2 假设及引理.....	25
4.3 主要结论.....	26
4.4 数值模拟.....	29
4.5 章节小结.....	31
第 5 章：总结与展望.....	33
参考文献.....	34
硕士期间发表的论文.....	38
致谢.....	39

第 1 章：绪论

1.1 研究背景和意义

观念动力学（opinion dynamics）^[1-7]是研究个体和群体如何形成、传播和演化观念的跨学科领域，涉及社会学、心理学、政治学、经济学、物理学等多个学科。在社会学和心理学领域^[8]，观念动力学有助于理解群体决策、社会规范的形成及社会影响力的作用；在政治学中，它被用于分析选民行为、公共舆论的演化以及政策制定过程^[9]；在经济学中，该理论为市场预测、消费者行为分析提供了理论支持^[10]；在物理学和计算科学中，观念动力学模型^[11-13]被用于模拟复杂系统的演化。随着时代的变迁，信息传播方式的变化极大地影响了观念动力学的研究，从早期基于面对面传播的研究，到现代互联网时代的复杂网络传播，研究方法和理论模型不断演进，以更精准地描述现实世界中的观念演化。

社会网络是观念传播的重要载体，其结构和功能在不同历史阶段经历了显著变化。传统社会网络主要依赖于面对面交流、书籍、广播和电视等媒介，信息传播具有较强的层级性和地域性。随着互联网的兴起，尤其是社交媒体的普及，信息传播的方式^[14-16]发生了根本性变革，去中心化的传播模式使个体能够直接获取和发布信息，大幅降低了信息扩散的成本，同时也增强了观念传播的速度和范围。此外，算法推荐、信息茧房和回音室效应进一步影响了观念的形成和演化，使得社会网络中的个体观念更加分化，甚至出现极化现象。因此，理解现代社会网络的结构及其对观念传播的影响，对于观念动力学的研究至关重要。

在现实社会中，个体的观念往往涉及多个相互关联的话题^[17-20]，而非单一议题的独立讨论。例如，政治立场、经济政策和社会价值观等不同话题可能存在内在的逻辑联系，因此个体在某一话题上的观点可能会受到其他话题的影响。这种多话题相互依存关系使得观念演化过程更加复杂。异构信念系统（heterogeneous belief systems）进一步加剧了这一复杂性，不同个体由于认知差异、社会背景和信息接收方式的不同，在多个话题上的信念可能存在高度异质性。研究这种异构信念系统如何影响观念的传播^[21-23]、共识的形成^[24-28]以及群体极化现象^[29-32]，对于理解现实社会中的群体决策和社会动态至关重要^[33-38]。

本研究的理论意义在于构建一个能够更真实刻画现实社会中观念演化过程的模型，弥补传统观念动力学模型在处理多话题相互依存性、异构信念系统以及竞争机制等方面的局限性。通过引入时变拓扑结构、异构逻辑矩阵以及竞争机制，本研究能够更深入地揭示个体如何在多话题环境中调整其私人观念与表达观念，进而影响整个社会网络的观念演化。在实践层面，本研究可为社会治理、舆论引导、政策制定等提供理论支持。例如，政府和组织可以利用该模型分析不同政策话题之间的相互作用，以优化公共宣传策略；社交媒体平台可以基于观念动力学模型改进信息推荐算法，以减少回音室效应和极化现象。此外，该研究还可应用于市场营销和消费者行为分析，帮助企业更精准地预测和引导消费者的观念变迁。

通过本研究的模型改进和理论分析，我们可以更全面地理解观念动力学过程，并为现实社会中的观念演化提供新的解释框架和预测工具。

1.2 国内外研究现状

在观念动力学领域内，一系列经典模型^[39-45]为理解观念动态提供了理论基础。最早的观点动力学研究可以追溯到 DeGroot 在 1974 年提出的基于邻居信息的观念更新模型（D-G 模型^[21]）。该模型假设每个个体的观念是其邻居观念的加权平均值，并在迭代过程中逐渐趋向一致，从而实现群体共识。这一模型的核心思想类似于金融市场中投资者对市场信息的采纳过程，或是组织决策中成员观点的趋同。然而，该模型存在局限性，未能解释群体观念极化的现象，即使在沟通顺畅的条件下，个体之间仍可能存在较大分歧。在现实社会中，例如政治选举、公共政策讨论等场景中，人们往往无法达成单一共识，而是形成不同的意见群体。为了解决这一局限，Friedkin 和 Johnse 在 D-G 模型的基础上引入了外部环境因素，提出了 F-J 模型^[23]。F-J 模型的核心在于个体观念的更新不仅受到邻居观念的影响，还受到个体对自身初始观念的坚持程度（固执性，stubbornness）的影响。这种固执性反映了个体在社会互动中的独立性，使其在更新观念时仍保留对原有观点的一定坚持。例如，在商业市场中，品牌忠诚度可以视为一种固执性，使得消费者不会轻易改变其对品牌的偏好。F-J 模型能够更好地解释现实社会网络中难以达成完全共识的现象，特别是在社会分裂严重的情况下，例如宗教信仰、意

意识形态冲突等场景。随后, Hegselmann 和 Krause 提出了有界置信区间模型 (H-K 模型^[24]), 进一步拓展了观念演化的研究范式。H-K 模型的核心在于个体仅与观点差异在特定置信阈值内的其他个体进行交流, 即个体不会轻易接受与自己观念相差过大的观点。该模型揭示了在不同置信水平下可能出现的观念一致性、极化或分簇现象。例如, 在社交媒体环境下, 用户往往更愿意关注与自身观点相似的群体, 这种现象被称为“信息茧房”, 它容易导致意见逐渐趋于同质化, 甚至走向极端化。此外, H-K 模型强调了个体间互动的状态依赖性, 即个体的交流对象和观念更新受到其当前观念的影响。

然而, 上述模型均假设个体间的观念演化发生在一个静态的社会网络结构中, 而现实世界中的社会网络往往是动态变化的。因此, 研究逐渐转向时变拓扑, 即社会网络结构和个体间的联系随时间变化^[8,22]。例如, 在社交平台上, 人们的社交关系并非固定不变, 而是随着兴趣、时事热点和社交互动不断调整。这种网络结构的变化会深刻影响观念的传播和演化, 使得观念动力学的研究变得更加复杂。进一步地, Shang^[46]的研究揭示, 在社交媒体环境下, 个体的公共表达与其私人观念可能存在差异, 这种差异对观念演化的影响是显著的。例如, 在职场或政治环境中, 人们可能会因社会压力或主流舆论的影响而调整其公开表达的观念, 而非真实反映其内心想法。这可能导致观念的极化和分裂, 使得社会群体内部形成表面上的一致性, 而实际观念仍然存在较大分歧。此外, Ye^[42]等在强连通的社会网络下提出了包含表达观念和私人观念的模型, 并分析了其收敛性, 揭示了社交环境中不同观念的动态演变。

在多维观念动力学的研究中, 学者们进一步探讨了观念的动态演变过程。Anderson^[47]等人通过研究个体在多个逻辑上相互依赖的话题上的观念形成过程, 揭示了多话题讨论如何导致观念的共识或分歧。例如, 在现实背景下, 政治、经济和社会等议题往往是交织在一起的, 个体在某一话题上的观点可能会影响其对其他话题的看法。与传统观念动力学模型不同, 多维观念动力学模型能够更全面地描述话题之间的相互依赖关系, 从而更贴近现实。这种模型不仅考虑了个体在单一话题上的观念演化, 还深入分析了多个话题之间的相互作用如何影响整体观念的形成和变化。

此外, 符号社会网络 (signed social network)^[48-50]研究逐渐成为观念动力学

的重要方向。符号图中的正边表示合作关系，负边则表示竞争关系。例如，在国际关系中，不同国家之间的外交互动往往充满竞争，而不仅仅是合作。已有研究表明，竞争关系可能导致观念的极化、波动或双一致性。然而，当前符号网络的研究大多依赖于结构平衡假设，忽略了现实世界中普遍存在的结构不平衡网络。在这些不平衡网络中，个体之间的关系更加复杂，观念演化的数学分析也更具挑战性。

综上所述，传统的观念动力学模型主要集中在静态网络、单一话题讨论和非竞争环境中。近年来的研究逐渐扩展至时变拓扑、多维观念和符号社会网络。本文基于这一研究趋势，提出了一种基于时变符号社会网络的异构信念系统观念动力学模型。

1.3 主要研究内容和论文结构

本文聚焦于私人观念和表达观念的模型，深入探讨时变符号社会网络上的观念动力学。在经典模型基础上，构建包含私人观念和表达观念的新型动力学模型，融入时变拓扑、异构信念系统及竞争机制，使模型更契合复杂社会网络。分析竞争机制对观念演化的影响，探讨合作与竞争如何共同塑造个体观念变化，特别是在表达观念时的谨慎性和信息传播的不对称性。探讨多话题讨论中话题间的逻辑依赖关系，分析其对观念共识或分歧的影响，揭示个体观念变化的内在逻辑。研究模型的稳定性和收敛性条件，特别是模一致性条件，分析网络拓扑和参数设置对观念收敛、分歧或极化的影响。通过数值模拟验证理论分析的有效性，展示模型在不同网络结构和参数设置下的动力学行为，为理论结论提供直观支持。

本文结构安排如下：

第一章：介绍研究背景、意义、国内外研究现状，明确研究内容与目标，为后续研究奠定基础。

第二章：规定数学符号，解释专有名词，介绍相关理论和经典模型，为深入研究做好理论准备。

第三章：在本章中，我们介绍了一个创新性的观念动力学模型，该模型综合了时变网络拓扑结构和个体间异构的逻辑依赖关系。我们从理论角度出发，对该模型在结构平衡和结构不平衡的网络条件下进行了详尽的分析，推导出确保模型

达到模一致性的一系列充分条件。此外，通过开展数值模拟实验，我们进一步验证了理论分析的准确性和模型的有效性。

第四章：引入竞争关系，分析其对模型动力学特性的影响，包括稳定性、收敛性和模一致性条件，并通过数值模拟验证理论分析的有效性。

第五章：总结研究成果，提炼创新点，同时对未来研究方向进行展望，提出进一步研究的建议和思考。

第 2 章：预备知识

2.1 符号

在本篇文章中， $\mathbb{R}^n$ 表示 n 维实向量空间， $\mathbb{R}^{m \times n}$ 表示 $m \times n$ 维实矩阵空间。 $\mathbf{1}_n$ 代表全 1 的 n 维列向量，而 $\mathbf{0}_n$ 代表全 0 的 n 维列向量。 I_n 表示 n 阶单位矩阵， a_{ij} 表示矩阵 A 中第 i 行第 j 列的元素。若矩阵 A 中所有元素 a_{ij} 非负，则记作 $A \geq 0$ 。 $|A|$ 表示 a_{ij} 取绝对值。若两个矩阵 A_1 和 A_2 的非零元素位置相同，则称它们同型，记作 $A_1 \sim A_2$ 。符号 $\otimes$ 表示克罗内克积。

2.2 图论

在本研究中，我们利用图论的工具来构建和分析社会网络中的观念动态。我们首先定义了一个有向图 $G(V, E, W)$ ，其中 $V = (v_1, v_2, \dots, v_N)$ 表示网络中的个体节点集； $E \subseteq V \times V$ 表示有向边集，代表个体间的连接关系； $W = \{w_{ij}\}$ 表示加权邻接矩阵，它代表了个体间的影响力，如果 $w_{ij} \neq 0$ ，则表示存在从节点 v_j 到节点 v_i 的有向边，即 v_j 对 v_i 有直接影响。每个节点 v_i 都有一个自环，象征着个体的自我观念。

图的连通性是通过有向路径和节点间的可达性来描述的，这包括了支撑树和强连通图的概念。如果存在一个节点 i ，使得节点 i 到其他所有节点都存在至少一条路径，那么我们称图包含支撑树，其中节点 i 是根节点。如果每个节点都是根节点，则称这个图是强连通的。

对于具有相同节点的无限有向图序列 $G(W(1)), G(W(2)), \dots$ 来说，如果存在两个正整数 η 以及 ς ，使得每个有限序列 $G(W(\varsigma + k\eta)), G(W(\varsigma + k\eta + 1)), \dots, G(W(\varsigma + (k+1)\eta - 1))$ 的并图包含支撑树，那么这个无限的有向图序列被称为反复联合强连通，记作 $RJQSC$ (repeatedly jointly quasi-strongly connected)^[31]，如果这个并图是强连通的，则称无限的有向图序列被称为反复联合强连通，记作 $RJSC$ (repeatedly jointly strongly connected)。

如果对角 Γ 的对角元素只在 1 和 -1 中取值，我们称 Γ 是一个正规置换矩阵。

如果存在正规置换矩阵 Γ 使得 $\Gamma W \Gamma \geq 0$ ，则称图 $G(W)$ 是结构平衡的。对于具有相同节点的无限有向图序列 $G(W(1)), G(W(2)), \dots$ 来说, 如果存在两个正整数 η 以及 ς ，使得每个有限序列 $G(W(\varsigma + k\eta)), G(W(\varsigma + k\eta + 1)), \dots, G(W(\varsigma + (k+1)\eta - 1))$ 的并是结构不平衡的，那么这个无限的有向图序列被称为反复联合结构不平衡 (repeatedly jointly structurally unbalanced) [31]。

2.3 DeGroot 模型简介

在人类自我认知的过程中，探索社会网络中个体观念的演化一直是一个重要的研究课题。随着社会控制理论的发展，社会网络的研究焦点逐渐从静态结构转向了动态分析，特别是个体行为和观念在社会网络中的演化。这一变化催生了观念动力学的概念。最早提出观念动力学模型的是 DeGroot^[21]，该模型是一个基于固定网络拓扑结构的离散模型，通常称为 DeGroot 模型。该模型形象地描绘了在特定话题下，个体在社会网络中如何互动，并最终达成观念的一致。该模型的数学表达形式如下：

$$x_i(k+1) = \sum_{j=1}^n w_{ij} x_j(k), \quad (2.1)$$

其中， w_{ij} 表示社会网络的邻接矩阵 W 中的元素，反映了个体 i 和 j 之间的互动和耦合关系，并且满足 $\sum_{j=1}^n w_{ij} = 1$ 。 $x_i(k)$ 表示在时刻 k 个体 i 对特定话题的观念，其中 $k \in \mathbb{N}$ 表示时间步长。从公式 (2.1) 可以看出，在由 n 个个体构成的网络中，个体在下一时刻的观念由自身的观念以及与其相连的邻居个体观念的加权平均值决定。为了便于表达，定义 $x(k) = (x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k))^T \in \mathbb{R}^n$ 表示时刻 k 时 n 个个体在某一特定话题上的观念，自然地我们可以将系统 (2.1) 写成以下紧凑的形式：

$$x(k+1) = Wx(k), \quad (2.2)$$

其中， W 是一个行随机矩阵。 $G(W)$ 清晰地刻画了 n 个个体之间的信息交互以及人际影响，因此也被人称为影响网络。DeGroot 模型包含固定的网络拓扑，所有同质个体采用加权平均的决策方式进行观念的更新。学者们对这一描述社会网络

中个体观念演化的基本的模型进行广泛而深入地研究,创造出了很多完整的结论和优秀的成果。接下来我们给出模型 (2.2) 的一个一致性的结果。

定理 2.3.1 如果图 $G(W)$ 有生成树, 并且至少存在一个根节点, 其所有回路长度的最大公约数为 1, 那么模型 (2.2) 能够实现观念的一致。

由图论的相关知识可知, 定理 2.3.1 的条件等价于: $G(W)$ 仅有一个非周期的独立强连通分支。从实现一致性的条件可以看出, 模型 (2.2) 的一致性和边的权值的大小无关, 仅仅与人际影响网络中的拓扑结构有关。

2.4 竞争概念

在经典的 DeGroot 模型中, 个体通过与邻居的观念进行加权平均来更新他们的观念, 通常假设个体之间的交互是合作性的。然而, 在许多实际情境中, 个体之间的交互不仅仅是合作的, 还有可能是敌对的, 尤其是在多个话题相互依赖的情况下, 个体的观念可能发生冲突。为此, 一些学者扩展了 DeGroot 模型, 考虑了带有敌对性交互的竞争性信念系统。在这种模型中, 个体之间的观念更新不仅受到合作性交互的影响, 还受到竞争性交互的抑制。

在带有竞争性交互的社会网络中, 个体的观念通过加权平均的方式进行更新, 其中加权系数既可以是正的 (合作), 也可以是负的 (竞争)。这使得我们的模型能够捕捉到多个话题下的竞争性信念动态。具体来说, 个体的观念更新规则为:

$$x_i(k+1) = \sum_{j=1}^n w_{ij} x_j(k), \quad (2.3)$$

其中, w_{ij} 可以是负值, 表示竞争性交互的影响。

在带有竞争性交互的社会网络中, 若网络拓扑结构满足结构平衡条件, 即将个体分为两个群体, 且同一群体内的交互为正权重, 群体间的交互为负权重, 则系统最终会收敛到两个对立的群体。每个群体内的个体意见相同, 但符号相反, 这种现象被称为双极共识。

定理 2.4.1^[38] 若社会网络中的网络拓扑结构是结构平衡的, 则该网络能够实现双极共识, 个体的观念最终将收敛到两个对立的群体中, 每个群体的个体意见

一致，但符号相反。

2.5 时变拓扑概念

在社会网络中，实现信息共识通常依赖于个体之间的交互拓扑结构。传统的共识模型（例如 DeGroot 模型）一般假设网络拓扑固定且所有个体间的信息交换是双向的，但在实际应用中，由于通信故障、传感器范围限制以及环境干扰，个体之间的交互拓扑往往是动态变化的。为此，Beard^[22]等人提出了在时变拓扑下实现共识的模型，并证明只要在一定时间间隔内各时刻图的联合图具有生成树，系统就能实现共识。

在时变拓扑条件下，网络中每个个体在离散时刻 t 的观念更新以表示为：

$$x(t+1) = \sum_{j=1}^n W(t)x_j(t), \quad (2.4)$$

其中 $x(t)$ 表示时刻 t 时所有个体的观念状态， $W(t)$ 是时刻 t 下的权重矩阵，其 w_{ij}

元素表示个体 j 对个体 i 的影响权重，并且满足： $\sum_{j=1}^n w_{ij}(t) = 1$ 。

与经典 DeGroot 模型不同的是，这里的权重矩阵 $W(t)$ 会随着时间演化而改变，体现了网络拓扑和个体交互强度的动态变化。当网络中出现通信失效、干扰或者个体移动时，就会导致时变拓扑的出现。

Beard 等人证明了以下定理：

定理 2.5.1 设网络的交互拓扑随时间变化，令 $G(t) = (V, E(t))$ 表示时刻 t 的网络图。若存在一个无限序列的均匀有界、互不重叠的时间区间 $[t_j, t_j + T_j]$

($j=1, 2, \dots$)，使得在每个区间内，所有时刻 $t \in [t_j, t_j + T_j]$ 的联合图 $\bigcup_{t=t_j}^{t_j+T_j} G(t)$

具有强连通性，则对于初始状态 $x(0) \in \mathbb{R}^n$ ，系统 $x_i(t+1) = \sum_{j=1}^n w_{ij}(t)x_j(t)$ ，能够实现共识，即随着 $t \rightarrow \infty$ ，个体的观念状态收敛到 $x_i(t) \rightarrow c$ ， $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ，其中

c 为某个常数。

这一结论表明，即使某些时刻的拓扑结构是不连通的，只要在一定时间内整

体网络保持生成树结构，就能够保证全局信息传递，从而实现系统共识。这一理论结果为研究社会网络在动态变化条件下的共识问题提供了坚实的理论基础。

第 3 章：合作机制下具有时变拓扑模型的动力学分析

在本章中，我们对经典的 DeGroot 模型进行了扩展，引入了一个创新的多维观念动力学模型，该模型整合了异构逻辑矩阵，用以模拟个体在不同话题上的观念如何相互影响。我们特别关注了社会网络中时变拓扑结构对多个话题依赖性的影响，并区分了个体的私人观念和他们在社会中的表达观念。通过一个实例，我们阐释了异构逻辑矩阵如何描绘个体在不同话题上的相互依赖，并分析了这种依赖性对观念演变的作用。进一步地，我们对这一模型进行了深入的动力学特性分析，从结构平衡与不平衡两个维度探讨了模型的稳定性和收敛性。我们推导出了一系列条件，这些条件决定了在多样化的网络结构和个体互动模式下，观念如何达到稳定状态或实现一致性。为了实证我们的理论发现，我们开展了一系列数值仿真实验，这些实验结果强有力地证实了我们模型预测社会观念动态的准确性和可靠性。

3.1 模型描述

在社会网络中，个体的观念受多个话题的交织影响，且这些话题之间往往存在复杂的相互依赖关系。随着信息交流方式的进步，现代社会中话题的传播越来越复杂，个体的观念变化不再局限于单一话题，而是受到多个相互依赖话题的共同作用。例如，环保话题、经济发展话题、社会文化话题等，彼此间的互动日益复杂，这要求我们在建模时考虑到这些相互依赖关系的异构性。为此，本文引入了异构逻辑矩阵的概念，来描述不同话题间的依赖性，并利用该模型分析个体在多个话题上观念的演化。为了更好地理解这一模型的作用，我们将通过一个具体的例子，展示异构逻辑矩阵如何影响个体观念变化。

例 3.1 我们考虑以下场景：假设在一个社会网络中，一组人正在讨论两个紧密相关的话题：话题 1：应该鼓励更多人步行。话题 2：应该减少私家车的使用。在这些人中，我们分别用逻辑矩阵 C_i 和 C_j 来代表其中个体 i 和个体 j 在这两个话题上的逻辑依赖关系，并且个体 i 和 j 在这两个话题上的初始观念为 $x_i(0) = x_j(0) = [1, -0.3]^T$ 。初始观念 $x(0) = [1, -0.3]^T$ 这意味着，个体 i 和个体 j 最初

都完全支持话题 1（即鼓励步行），但在话题 2（即减少私家车使用）上存在一定程度的反对。接下来，我们定义两个逻辑矩阵 C_i 和 C_j 如下：

$$C_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}, \quad C_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0.4 & 0.6 \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

逻辑矩阵 C_i 表明，对于个体 i 来说，话题 1（步行）不受话题 2（减少私家车使用）的影响，并且话题 1 与话题 2 具有正相关关系。个体 i 可能认为减少私家车使用能够改善步行环境，例如减少空气污染、降低交通事故概率等，因此对减少私家车使用的态度随时间变化可能逐渐趋向支持。在忽略人际影响的情况下，个体 i 的观念会根据其逻辑矩阵进行更新，更新规则为：

$$x_i(k+1) = C_i x_i(k), \quad x_j(k+1) = C_j x_j(k). \quad (3.2)$$

最终，我们可以得到 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_i(k) = [1, 1]^T$ ， $\lim_{k \rightarrow \infty} x_j(k) = [1, -1]^T$ 。这表明，最终个体 i 完全支持话题 1 和话题 2，即不仅继续支持步行，还转变为支持减少私家车的使用。而个体 j 仍然完全支持话题 1（步行），但最终完全反对话题 2（减少私家车使用）。通过对比 C_i 和 C_j ，不难看出， C_j 促使个体 j 在话题 2（减少私家车使用）上的观念向着与个体 i 相反的方向移动。具体而言，逻辑矩阵 C_j 反映了个体 j 在这两个话题上的依赖关系。个体 j 可能认为步行和减少私家车使用之间存在一定的竞争关系，即减少私家车使用可能会带来诸多不便，例如影响出行效率、增加通勤时间等。因此，个体 j 在步行上仍然保持支持赞同，但随着时间推移，其对减少私家车使用的态度变得更加负面。尽管个体 i 和个体 j 在两话题上的初始观念相同，但由于各自的逻辑矩阵不同，最终形成了两个截然不同的观念。这个例子清楚地展示了异构逻辑矩阵如何刻画个体在不同话题上的依赖关系，以及这些关系如何影响个体观念的演变。个体的逻辑矩阵是其信念系统的外在表现，反映了个体如何根据话题间的逻辑依赖关系调整自己的立场和态度，以保持信念系统的一致性。由于不同个体可能拥有不同的社会背景，他们在多个话题上的信念系统可能存在显著差异，从而导致逻辑矩阵的异构性。因此，正如文献[36]所述，我们假定逻辑矩阵是异构的。

在本文中，我们提出了一个多维度的观念动力学模型，该模型用来处理多个相互依赖的主题。该模型旨在模拟现实社会网络中个体观念的形成、演变与表达，

尤其是探讨个体的私人观念与其表达的观念之间是如何共演的。在现实社会中，个体往往会因为社交压力、文化规范以及群体思维的影响，而不完全公开表达其内心的真实观念。因此，本模型不仅考虑了私人观念的动态变化，还描述了个体在外部环境影响下的表达观念的演化过程。考虑一个由 $n \geq 2$ 个个体组成的群体，这些个体同时讨论 $m \geq 1$ 个话题。个体的索引集合为 $\mathcal{I} = \{1, \dots, n\}$ ，话题的索引集合为 $\mathcal{P} = \{1, \dots, m\}$ 。每个个体 i 在时间 $t = 0, 1, \dots$ 对 m 个话题的私人观念和表达观念分别用 $y_i(t) = [y_{1i}, y_{2i}, \dots, y_{mi}]^T$ 和 $\hat{y}_i(t) = [\hat{y}_{1i}, \hat{y}_{2i}, \dots, \hat{y}_{mi}]^T$ 表示。

个体的私人观念（即个体真实观念）根据以下系统进行更新：

$$y_i(t+1) = w_{ii}(t)C_i y_i(t) + \sum_{j \neq i} w_{ij}(t)\hat{y}_j(t), \quad (3.3)$$

表达观念的演化由下面的系统给出：

$$\hat{y}_i(t) = \phi_i(t)C_i y_i(t) + (1 - \phi_i(t))C_i \sum_{j=1}^n m_{ij}(t-1)\hat{y}_j(t-1), \quad (3.4)$$

其中， $w_{ii}(t)$ 表示个体 i 在时间 t 对其自身观念的权重。该权重体现了个体在观念更新过程中对自己过去观念的依赖程度。系数 $C_i \in \mathbb{R}^m$ 被称为逻辑矩阵，它表示个体 i 的信念系统，即个体对当前所进行的话题态度。此外， $w_{ij}(t)$ 是时间 t 时个体 j 对个体 i 施加的社交影响权重，反映了个体 j 的表达观念对个体 i 私人观念更新的影响力。表达观念 $\hat{y}_j(t)$ 代表个体 j 在时间 t 公开表达的观念，并在个体 i 的私人观念更新过程中作为外部输入。 $W(t) = [w_{ij}(t)]$ 表示 t 时刻私人观念更新的网络拓扑结构， $M(t) = [m_{ij}(t)]$ 表示表达观念更新的网络拓扑结构。由于个体在更新无论是私人观念还是表达观念他的邻居是固定的，因此，在这篇文章中我们要求 $W(t) \sim M(t)$ 。

$\phi_i(t) \in (0, 1)$ 是一个关键参数，用于表征个体 i 在 t 时刻时顺应群体观念的程度。若 $\phi_i(t)$ 趋向于 1，则个体更倾向于表达其私人观念；反之，若 $\phi_i(t)$ 趋向于 0，个体则更依赖于社交圈内其他成员的观念，以适应周围的环境压力。

注 3.1.1：系统(3.3)和(3.4)是对文献[22,30,42]所建模型的推广。在文献[30]，虽然考虑了个体的信念系统，但文献假设所有个体的信念系统是同构的，即对所有的 i 和 j ， $C_i = C_j$ ，而本文假设信念系统是异构的。另外，文献[30]所考虑的网络拓扑是静态的。文献[22]忽略了私人观念和表达观念的差异，文献[42]承认这种

差异的存在,但个体的信念系统未被充分考虑,而且所考虑的网络拓扑是静态的。综上所述,本文所建立的模型考虑了更多的社会和心理,更能真实的刻画社会网络的特性,因此有更广泛的应用范围。

3.2 定义、假设及引理

定义 3.2.1^[36] 如果在社会网络中,存在个体 i 和 j ,对于某个话题 $p \in \mathcal{P}$,如果这些个体在其他话题 $q \in \mathcal{P} \setminus \{p\}$ 上的逻辑矩阵 C_i 和 C_j 有非零项 $c_{pq,i}$ 和 $c_{pq,j}$ 并且这些项的符号相反,那么我们说系统中存在具有话题竞争依赖的个体(individuals with competing logical interdependencies on topic)。

定义 3.2.2^[38] 对于所有 $i \in \mathcal{I}$ 和 $p \in \mathcal{P}$,和任意的初始观念,如果 $\lim_{t \rightarrow \infty} |y_{pi}(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} |\hat{y}_{pi}(t)| = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$,那么我们称系统(3.3)和(3.4)能够实现“关于话题的模一致”(modulus consensus)。特别地,当 $\alpha = 0$ 时,系统(3.3)和(3.4)是稳定的。当 $\alpha \neq 0$ 时,私人观念和表达观念能够实现话题的双一致(bipartite consensus)。

假设 3.2.1 对于所有 $i \in \mathcal{I}$ 和所有时间 t ,有 $w_{ii}(t) > 0$ 且 $\sum_{j=1}^N w_{ij}(t) = 1$ 和 $m_{ii}(t) > 0$ 且 $\sum_{j=1}^N m_{ij}(t) = 1$ 。存在 $\delta > 0$,对于 $W(t)$ 和 $M(t)$ 的任意非零元 $w_{ij}(t)$ 和 $m_{ij}(t)$,使得 $w_{ij}(t) \geq \delta$, $m_{ij}(t) \geq \delta$ 。

假设 3.2.1 是关于时变拓扑结构的常规假设,例如文献[47]都采用了这一假设。

假设 3.2.2 对于所有 $i \in \mathcal{I}$ 和所有时间 t ,个体 i 在时间 t 时 $\phi_i(t)$ 满足以下条件: $0 < \underline{\phi} \leq \phi_i(t) \leq \bar{\phi} < 1$ 。

假设 3.2.3^[48] 对于所有 $i \in \mathcal{I}$,图 $G(C_i)$ 是强连通的, $|C_i|$ 是具有正的对角元素的行随机矩阵,且对于所有 $i, j \in \mathcal{I}$,有 $C_i \sim C_j$ 。

引理 3.2.1^[22] 如果假设 3.2.1 满足时,并且有向图序列 $G(W(1)), G(W(2)), \dots$ 是反复联合强连通的,则 $\lim_{t \rightarrow \infty} W(1)W(2) \dots W(t) = \mathbf{1}_n \alpha^T$, 在这里 $\alpha \in \mathbb{R}^n$ 。

3.3 主要结论

为了更好的研究系统 (3.3) 和 (3.4), 我们将把系统 (3.3) 和 (3.4) 改写成更加紧凑的形式。让 $y(t) = [y_1^T(t), y_2^T(t), \dots, y_n^T(t)]^T$ 和 $\hat{y}(t) = [\hat{y}_1^T(t), \hat{y}_2^T(t), \dots, \hat{y}_n^T(t)]^T$ 表示影响网络中 n 个社会个体的私人观念和表达观念的列向量, 让 $W(t) = \tilde{W}(t) + \hat{W}(t)$, 其中 $\tilde{W} = \text{diag}[w_{11}(t), \dots, w_{nn}(t)]$, 令 $\Phi(t) = \text{diag}[\phi_1(t), \dots, \phi_n(t)]$, $C = \text{diag}[C_1, \dots, C_n]$ 将系统 (3.4) 带入系统 (3.3), 可以得到

$$\begin{aligned} y_i(t+1) = & w_{ii}(t)C_i y_i(t) + \sum_{j \neq i}^n w_{ij}(t)\phi_j(t)C_j y_j(t) \\ & + \sum_{j \neq i}^n w_{ij}(t)(1-\phi_j(t))C_j \sum_{k \in \mathcal{N}_j} m_{jk}(t-1)\hat{y}_k(t-1), \end{aligned} \quad (3.5)$$

从等式 (3.4) 和等式 (3.5), 可以得到:

$$\begin{bmatrix} y(t+1) \\ \hat{y}(t) \end{bmatrix} = P(t) \begin{bmatrix} y(t) \\ \hat{y}(t-1) \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

其中

$$P(t) = \begin{bmatrix} P_{11}(t) & P_{12}(t) \\ P_{21}(t) & P_{22}(t) \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} P_{11}(t) &= (\tilde{W}(t) \otimes I_m)C + [(\hat{W}(t)\Phi(t)) \otimes I_m]C \\ P_{12}(t) &= (\hat{W}(t) \otimes I_m)C[(I_N - \Phi(t))M(t-1) \otimes I_m] \\ P_{21}(t) &= C(\Phi(t) \otimes I_m) \\ P_{22}(t) &= C[(I_N - \Phi(t))M(t-1) \otimes I_m] \end{aligned}$$

为了获得我们主要结果, 我们还需要下面的引理。

引理 3.3.1^[48] I) 如果假设 3.2.3 成立, 系统 (3.3) 和 (3.4) 中不存在具有话题竞争依赖的个体, 图 $G(C(M(t) \otimes I_m))$ 是结构平衡的, 当且仅当图 $G(C_i)$ 是结构平衡的。

II) 如果假设 3.2.3 成立, 系统 (3.3) 和 (3.4) 中存在具有话题竞争依赖的个体, 并且图 $G(M(t-1))$ 具有生成树, 则图 $G(C(M(t) \otimes I_m))$ 是结构不平衡的。

引理 3.3.2 I) 如果假设 3.2.3 成立, 系统 (3.3) 和 (3.4) 中不存在具有话题竞争依赖的个体, 则图 $G(P(t))$ 结构平衡的, 当且仅当图 $G(C_i)$ 是结构平衡的。

II) 如果系统 (3.3) 和 (3.4) 中存在具有话题竞争依赖的个体且 $G(W(t))$ 有支撑树, 或者存在某些 $G(C_i)$ 是结构不平衡的, 则图 $G(P(t))$ 将是结构不平衡的。

证明: I) 充要性: 假设系统中不存在具有话题竞争依赖的个体, 如果图 $G(C_i)$ 是结构平衡的, 则存在正规置换矩阵 Γ_1 , 使得对于所有 $i \in \mathcal{I}$, 满足 $\Gamma_1 C_i \Gamma_1 \geq 0$ 。由此可得: $(I_N \otimes \Gamma_1)C(I_N \otimes \Gamma_1) = \text{diag}[\Gamma_1 C_1 \Gamma_1, \Gamma_1 C_2 \Gamma_1, \dots, \Gamma_1 C_n \Gamma_1] \geq 0$ 。

考虑到 I_m 和 $\Phi(t)$ 是非负对角矩阵, 并且 C 是分块对角矩阵, 通过简单的计算可得:

$$\begin{aligned}
 & (I_N \otimes \Gamma_1)P_{11}(t)(I_N \otimes \Gamma_1) \\
 &= (I_N \otimes \Gamma_1)[(\tilde{W}(t) \otimes I_m)C + (\hat{W}(t)\Phi(t)) \otimes I_m]C(I_N \otimes \Gamma_1) \\
 &= (I_N \otimes \Gamma_1)[(\tilde{W}(t) \otimes I_m)C](I_N \otimes \Gamma_1) + (I_N \otimes \Gamma_1)[(\hat{W}(t)\Phi(t)) \otimes I_m]C(I_N \otimes \Gamma_1) \\
 &= (I_N \otimes \Gamma_1)(\tilde{W}(t) \otimes I_m)(I_N \otimes \Gamma_1)(I_N \otimes \Gamma_1)C(I_N \otimes \Gamma_1) \\
 &+ (I_N \otimes \Gamma_1)[(\hat{W}(t)\Phi(t)) \otimes I_m](I_N \otimes \Gamma_1)(I_N \otimes \Gamma_1)C(I_N \otimes \Gamma_1) \\
 &= (\tilde{W}(t) \otimes I_m)(I_N \otimes \Gamma_1)C(I_N \otimes \Gamma_1) \\
 &+ (\hat{W}(t)\Phi(t)) \otimes I_m)(I_N \otimes \Gamma_1)C(I_N \otimes \Gamma_1) \geq 0 \\
 & (I_N \otimes \Gamma_1)P_{12}(t)(I_N \otimes \Gamma_1) \\
 &= (I_N \otimes \Gamma_1)\{(\hat{W}(t) \otimes I_m)C[(I_N - \Phi(t))M(t-1) \otimes I_m]\}(I_N \otimes \Gamma_1) \\
 &= (I_N \otimes \Gamma_1)[(\hat{W}(t) \otimes I_m)C](I_N \otimes \Gamma_1)(I_N \otimes \Gamma_1)[[(I_N - \Phi(t))M(t-1) \otimes I_m]](I_N \otimes \Gamma_1) \\
 &= (I_N \otimes \Gamma_1)(\hat{W}(t) \otimes I_m)(I_N \otimes \Gamma_1)(I_N \otimes \Gamma_1)C(I_N \otimes \Gamma_1)(I_N \otimes \Gamma_1) \\
 &\quad [[(I_N - \Phi(t))M(t-1) \otimes I_m]](I_N \otimes \Gamma_1) \\
 &= (\hat{W}(t) \otimes I_m)(I_N \otimes \Gamma_1)C(I_N \otimes \Gamma_1) \\
 &\quad [(I_N - \Phi(t))M(t-1)] \otimes I_m \geq 0 \\
 & (I_N \otimes \Gamma_1)P_{21}(t)(I_N \otimes \Gamma_1) \\
 &= (I_N \otimes \Gamma_1)C(I_N \otimes \Gamma_1)(\Phi(t) \otimes I_m) \geq 0 \\
 & (I_N \otimes \Gamma_1)P_{22}(t)(I_N \otimes \Gamma_1) \\
 &= (I_N \otimes \Gamma_1)C(I_N \otimes \Gamma_1)(I_N \otimes \Gamma_1)[[(I_N - \Phi(t))M(t-1) \otimes I_m]](I_N \otimes \Gamma_1) \\
 &= (I_N \otimes \Gamma_1)C(I_N \otimes \Gamma_1)[[(I_N - \Phi(t))M(t-1)] \otimes I_m] \geq 0
 \end{aligned}$$

这意味着 $\text{diag}[I_n \otimes \Gamma_1, I_n \otimes \Gamma_1]P(t)\text{diag}[I_n \otimes \Gamma_1, I_n \otimes \Gamma_1] \geq 0$ 。即矩阵 $P(t)$ 是结构平衡的。

必要性: 如果 $G(P(t))$ 是结构平衡的, 则显然子图 $G(P_{22}(t))$ 是结构平衡的。由引理 3.3.1 可知, $G(C_i)$ 也是结构平衡的。

II) 如果系统 (3.3) 和 (3.4) 中存在具有话题竞争依赖的个体, 根据引理

3.3.2, 图 $G(P(t))$ 的子图 $G(P_{22}(t))$ 是结构不平衡的, 所有图 $G(P(t))$ 也是结构不平衡的, 如果存在 $G(C_i)$ 是结构不平衡的, 注意到图 $G((1-\phi_i(t)m_{ii}(t-1)C_i))$ 是图 $G(P(t))$ 的一个子图, 且图 $G((1-\phi_i(t)m_{ii}(t-1)C_i))$ 是结构不平衡的, 所有图 $G(P(t))$ 也是结构不平衡的。

引理 3.3.3 如果假设 3.2.3 成立, 有向图序列 $\{G(W(t))\}_{t=1}^{\infty}$ 是 $RJQSC$, 则有向图序列 $\{G(P(t))\}_{t=1}^{\infty}$ 也是 $RJQSC$ 。如果有向图序列 $\{G(W(t))\}_{t=1}^{\infty}$ 是 $RJSC$, 则有向图序列 $\{G(P(t))\}_{t=1}^{\infty}$ 也是 $RJSC$ 。

证明: 假设有向图序列 $\{G(W(t))\}_{t=1}^{\infty}$ 是 $RJQSC$ 。根据 $RJSC$ 的定义, 存在正整数 θ 和 ι , 使得对于每个有限子序列的有向图 $G(W(\iota+k\theta)), G(W(\iota+k\theta+1)), \dots, G(W(\iota+(k+1)\theta-1))$ (对于所有 $k \geq 0$) 的并包含支撑树。定义矩阵 $\bar{C}$ 使其与所有 C_i 具有相同零项和非零项。根据假设 3.2.2, 所有的 $G(C_i)$ 具有相同的网络拓扑。因此

$$\begin{aligned} P_{11}(t) &= (\tilde{W}(t) \otimes I_m)C + [(\hat{W}(t)\Phi(t)) \otimes I_m]C \\ &\sim (\tilde{W}(t) \otimes I_m)C + ((\hat{W}(t) \otimes I_m)C \\ &\sim W(t) \otimes \bar{C} \end{aligned}$$

由于 $G(C_i)$ 都是强联通的, 根据文献[48]的结论, 当有向图序列 $\{G(W(t))\}_{t=1}^{\infty}$ 是 $RJQSC$, 则 $\{G(P_{11}(t))\}_{t=1}^{\infty}$ 也是 $RJQSC$, 由于 $P_{21}(t)$ 的对角元素皆非零, 因此, 子图 $G(P_{11}(t))$ 到子图 $G(P_{22}(t))$ 的每个顶点都有一条边, 这意味着子图 $G(P_{11}(t))$ 的根节点也还是图 $G(P(t))$ 的根节点, 因此, 有向图序列 $\{G(P(t))\}_{t=1}^{\infty}$ 也是 $RJQSC$ 。

如果有向图序列 $\{G(W(t))\}_{t=1}^{\infty}$ 是 $RJSC$, 则根据以上的分析可得, 有向图序列 $\{G(P_{11}(t))\}_{t=1}^{\infty}$ 和 $\{G(P_{22}(t))\}_{t=1}^{\infty}$ 是 $RJSC$ 。 $P_{21}(t)$ 显然不等于零, 通过简单的计算可得 $P_{12}(t) \neq 0$, 因此, 当有向图序列 $\{G(W(t))\}_{t=1}^{\infty}$ 是 $RJSC$, 则有向图序列 $\{G(P(t))\}_{t=1}^{\infty}$ 也是 $RJSC$ 。证毕。

定理 3.3.1 如果假设 3.2.1-3.2.3 成立, 系统 (3.3) 和 (3.4) 中不存在具有话题竞争依赖的个体, 有向图序列 $\{G(W(t))\}_{t=1}^{\infty}$ 是 $RJQSC$, $G(C_i)$ 是结构平衡的, 则系统 (3.3) 和 (3.4) 能够实现关于话题的模一致。

证明: 首先, 我们将证明 $|P(t)|$ 是行随机矩阵。通过简单的计算可得

$$\begin{aligned}
 |P_{11}(t)| &= (\tilde{W}(t) \otimes I_m) |C| + [(\hat{W}(t)\Phi(t)) \otimes I_m] |C| \\
 |P_{12}(t)| &= (\hat{W}(t) \otimes I_m) |C| [(I_N - \Phi(t))M(t-1) \otimes I_m] \\
 |P_{21}(t)| &= |C| (\Phi(t) \otimes I_m) \\
 |P_{22}(t)| &= |C| [(I_N - \Phi(t))M(t-1) \otimes I_m]
 \end{aligned}$$

注意到 $W(t)$, $M(t-1)$ 和 $|C|$ 都是行随机矩阵, 因此

$$\begin{aligned}
 [|P_{11}(t)|, |P_{12}(t)|] \mathbf{1}_{2Nm} &= |P_{11}(t)| \mathbf{1}_{Nm} + |P_{12}(t)| \mathbf{1}_{Nm} \\
 &= (\tilde{W}(t) \otimes I_m) |C| \mathbf{1}_{Nm} + [(\hat{W}(t)\Phi(t)) \otimes I_m] |C| \mathbf{1}_{Nm} \\
 &\quad + (\hat{W}(t) \otimes I_m) |C| [(I_N - \Phi(t))M(t-1) \otimes I_m] \mathbf{1}_{Nm} \\
 &= (\tilde{W}(t) \otimes I_m) \mathbf{1}_{Nm} + [(\hat{W}(t)\Phi(t)) \otimes I_m] \mathbf{1}_{Nm} \\
 &\quad + (\hat{W}(t) \otimes I_m) |C| (M(t-1) \otimes I_m) \mathbf{1}_{Nm} \\
 &\quad - (\hat{W}(t) \otimes I_m) |C| [(\Phi(t)M(t-1)) \otimes I_m] \mathbf{1}_{Nm} \\
 &= (\tilde{W}(t) \otimes I_m) \mathbf{1}_{Nm} + (\hat{W}(t) \otimes I_m) \mathbf{1}_{Nm} = \mathbf{1}_{Nm}, \\
 [|P_{21}(t)|, |P_{22}(t)|] \mathbf{1}_{2Nm} &= |P_{21}(t)| \mathbf{1}_{Nm} + |P_{22}(t)| \mathbf{1}_{Nm} \\
 &= |C| (\Phi(t) \otimes I_m) \mathbf{1}_{Nm} + |C| [(I_N - \Phi(t))M(t-1) \otimes I_m] \mathbf{1}_{Nm} \\
 &= |C| (\Phi(t) \otimes I_m) \mathbf{1}_{Nm} + |C| (M(t-1) \otimes I_m) \mathbf{1}_{Nm} \\
 &\quad - |C| [(\Phi(t)M(t-1)) \otimes I_m] \mathbf{1}_{Nm} \\
 &= |C| (M(t-1) \otimes I_m) \mathbf{1}_{Nm} \\
 &= \mathbf{1}_{Nm}.
 \end{aligned}$$

这说明 $|P(t)|$ 是行随机矩阵。由于假设 3.2.3 满足, $W(t)$ 和 $M(t-1)$ 中非零元有非零的下界, 因此 $|P(t)|$ 的非零元也具有非零的下界。由于有向图序列 $\{G(W(t))\}_{t=1}^{\infty}$ 是 *RJQSC*, 根据引理 3.3.3, 有向图序列 $\{G(P(t))\}_{t=1}^{\infty}$ 也是 *RJSC*。
 $G(C_i)$ 是结构平衡的, 根据引理 3.3.2, $P(t)$ 也是结构平衡的, 且

$$diag[I_n \otimes \Gamma_1, I_n \otimes \Gamma_1] P(t) diag[I_n \otimes \Gamma_1, I_n \otimes \Gamma_1] = |P(t)| \geq 0。$$

令

$$z(t) = diag[I_n \otimes \Gamma_1, I_n \otimes \Gamma_1] \begin{bmatrix} y(t+1) \\ \hat{y}(t) \end{bmatrix}.$$

则

$$\begin{aligned}
 z(t) &= \text{diag}[I_n \otimes \Gamma_1, I_n \otimes \Gamma_1] \begin{bmatrix} y(t+1) \\ \hat{y}(t) \end{bmatrix} \\
 &= \text{diag}[I_n \otimes \Gamma_1, I_n \otimes \Gamma_1] P(t) \text{diag}[I_n \otimes \Gamma_1, I_n \otimes \Gamma_1] \text{diag}[I_n \otimes \Gamma_1, I_n \otimes \Gamma_1] \begin{bmatrix} y(t) \\ \hat{y}(t-1) \end{bmatrix} \\
 &= \text{diag}[I_n \otimes \Gamma_1, I_n \otimes \Gamma_1] P(t) \text{diag}[I_n \otimes \Gamma_1, I_n \otimes \Gamma_1] z(t-1) \\
 &= |P(t)| z(t-1).
 \end{aligned}$$

根据以上分析, $|P(t)|$ 是行随机矩阵, 它的非零元有非零下界, $\{G(|P(t)|)\}_{t=1}^{\infty}$ 是 *RJSC*, 根据引理 3.2.1, $\lim_{t \rightarrow \infty} |P(1)||P(2)| \dots |P(t)| = 1_{2nm} \beta, \beta \in \mathbb{R}^{2nm}$, 因此 $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 1_{2nm} \beta^T z(0) = (\beta^T z(0)) 1_{2nm}$, 故 $\lim_{t \rightarrow \infty} y_i(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{y}_i(t) = (\beta^T z(0)) (I_N \otimes \Gamma_1) 1_{nm}$, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} |y_{pi}(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} |\hat{y}_{pi}(t)| = |(\beta^T z(0))|$, 因此系统 (3.3) 和 (3.4) 能够实现关于话题的模一致。

注 3.3.1: 如果不考虑时变的拓扑结构和时变的社会压力并且只有一个话题在网络上传播, 网络拓扑是强联通的, 则根据定理 3.3.1, $\lim_{t \rightarrow \infty} y_i(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{y}_i(t) = \vartheta$, 即系统 (3.3) 和 (3.4) 实现了一致, 这个结论与文献[42]的推理 1 的结论是一致的, 因此, 本文的结果是对文献[42]进行了拓广, 无疑具有更广泛的应用范围。

定理 3.3.2 如果假设 3.2.1-3.2.3 成立, 系统 (3.3) 和 (3.4) 中存在具有话题竞争依赖的个体或者存在 $G(C_i)$ 是结构不平衡的, 有向图序列 $\{G(W(t))\}_{t=1}^{\infty}$ 是 *RJSC*, 则系统 (3.3) 和 (3.4) 是稳定的, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} y_i(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{y}_i(t) = \mathbf{0}_m$ 。

证明: 根据定理 3.3.1 的证明, 可知 $|P(t)|$ 是行随机矩阵, 它的非零元也具有非零的下界。根据引理 3.3.3, 当有向图序列 $\{G(W(t))\}_{t=1}^{\infty}$ 是 *RJSC*, 有向图序列 $\{G(P(t))\}_{t=1}^{\infty}$ 也是 *RJSC*。另一方面, 由引理 3.3.2 可知, 有向图序列 $\{G(P(t))\}_{t=1}^{\infty}$ 是反复结构不平衡的。根据文献[31]定理 2 的结论可知, $\lim_{t \rightarrow \infty} |P(1)||P(2)| \dots |P(t)| = 0_{2nm}$, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} y_i(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{y}_i(t) = \mathbf{0}_m$ 。

注 3.3.2: 根据定理 3.3.1 和 3.3.2, 只要社会网络的是反复联合连通的, 在一些温和的假设下, 系统总是能够实现模一致的, 当网络是结构平衡的时候, 系统能够达到双一致, 当网络是结构不平衡时, 所有的观念都收敛到零。但是无论如何, 最终的私人观念和表达观念总是相等的, 尽管在观念共演的过程他们之间的

差异是存在的。

3.4 数值模拟

在这一部分将通过数值仿真来说明本文所得结果的有效性。考虑一个 12 个体构成的社会网络。这些个体围绕 3 个相互依赖的话题进行讨论。我们的目标是分析在不同条件下,个体的观念如何演化以及社会网络如何达到观念的平衡或稳定。我们分别对存在具有话题竞争依赖的个体和不存在具有话题竞争依赖的个体进行仿真。整个仿真以时间步为单位进行,期间每个个体的私人观念和表达观念都随着时间动态更新。为了方便仿真,我们假设 $W(t)$ 只在如图 3-1 所示三个图中进行周期切换,这种周期性的切换过程可以描述如下:

时间步 $t = 3m + 1$ 时: 网络的连接矩阵 $W(t)$ 被设置为 W_1 。

时间步 $t = 3m + 2$ 时: 网络的连接矩阵 $W(t)$ 被切换到 W_2 。

时间步 $t = 3m$ 时: 网络的连接矩阵 $W(t)$ 被切换回 W_3 。

根据图 3-1 所示,虽然每个子图在各自的时间点上都不具备强连通性,但这三个子图的并图形成了强连通网络。

当系统中不存在具有话题竞争依赖的个体时,我们首先随机生成了满足假设 3.2.3 的 12 个结构平衡的逻辑矩阵,同时生成了 12 个满足假设 3.2.2 的 $\phi(t)$,显然在这种情况下,系统的相关参数是满足定理 3.3.1 的,即系统能够实现双一致。根据图 3-2,我们可以明显的看出,系统达到了双一致。我们尝试改变其中的一些逻辑矩阵,使得他们变得结构不平衡的,在这种情况下,系统的相关参数是满足定理 3.3.2 的,即系统是稳定的,从图 3-3 也能够看出这一点。最后,我们重置这 12 个逻辑矩阵,使得系统中存在具有话题竞争依赖的个体,在这种情况下,系统的参数是满足定理 3.3.2 的,即所有的观念都将收敛到零,从图 3-4 也能够明显的看出这一点。因此,这个例子进一步印证了本文所得结果的正确性。

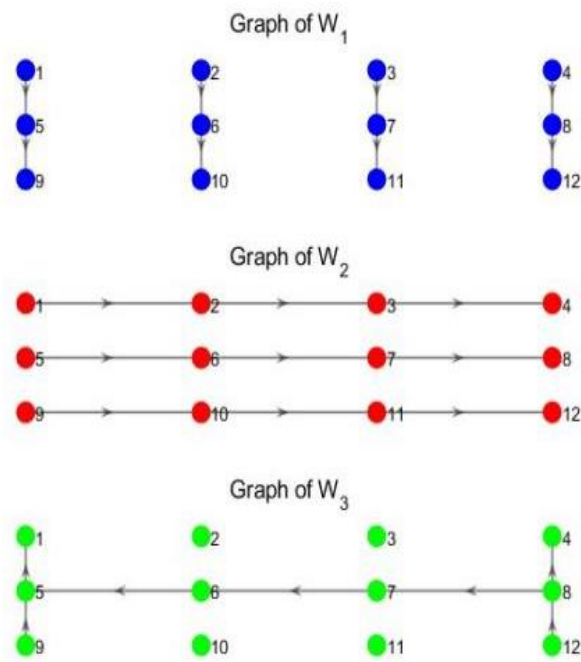


图 3-1 社会网络的拓扑结构

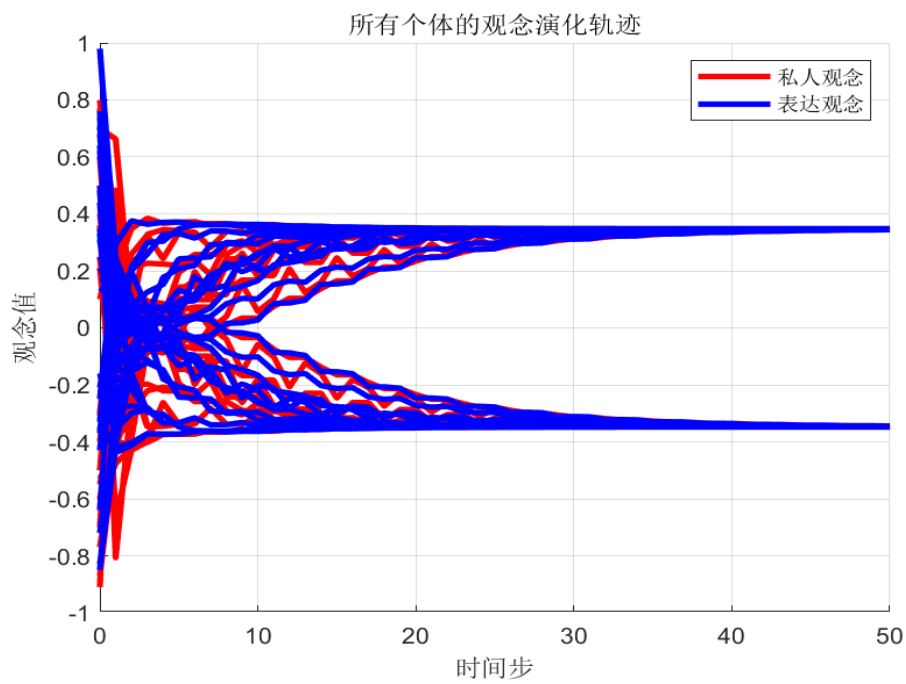


图 3-2 当所有 $G(C_i)$ 是结构平衡时，观念的演化轨迹。

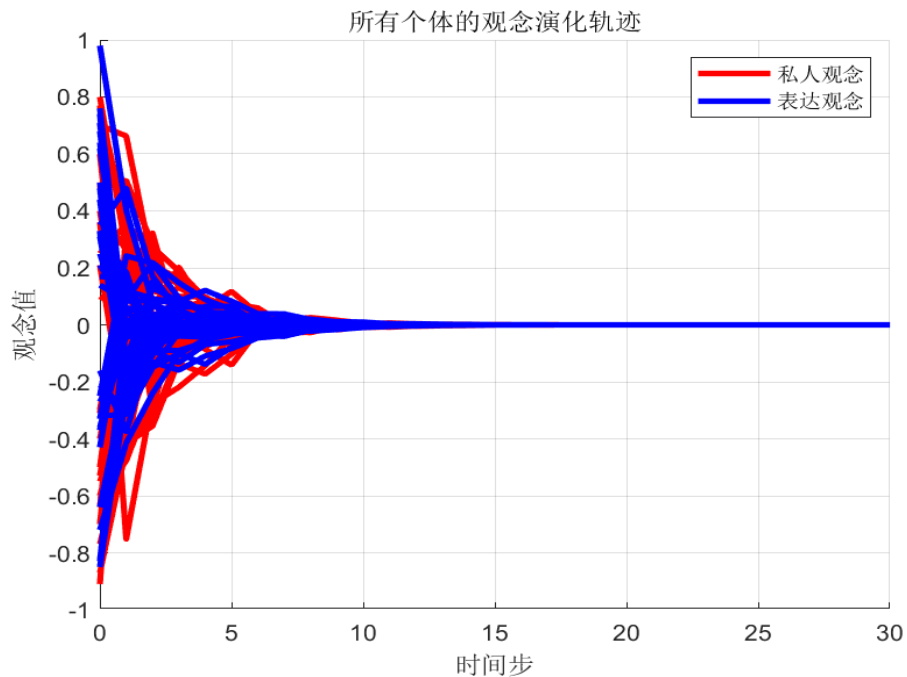


图 3-3 当存在 $G(C_i)$ 是结构不平衡时，观念的演化轨迹。

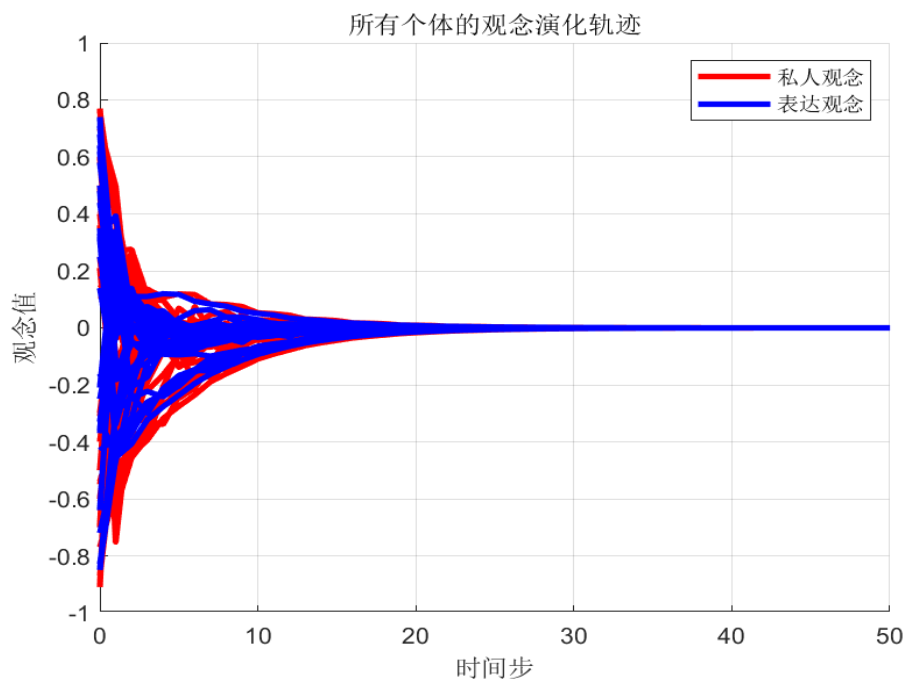


图 3-4 系统存在具有话题竞争依赖的个体时，观念的演化轨迹。

3.5 章节小结

在本章中，我们提出了一个基于合作性互动的多维观念演化模型，旨在捕捉个体在多个相互依赖话题上的私人观念和表达观念的演化。我们引入了异构逻辑

矩阵来描述个体在不同话题上的依赖关系,这使得模型能够更细致地模拟个体观念的动态变化。我们的理论分析聚焦于模型实现模一致的条件,发现当网络拓扑结构反复联合拟强连通时,模型能够达到模一致,即个体观念在话题上的一致性。

数值模拟结果进一步验证了理论分析的准确性。结果显示,在结构平衡的网络中,个体的私人观念和表达观念最终能够收敛到相同的值,实现了双一致。而在结构不平衡的网络环境中,尽管个体观念可能不会完全一致,但模型仍然展现出稳定性,观念趋于稳定。这些结果具体展示了网络拓扑和话题间依赖关系对私人观念和表达观念演化的影响,为我们理解社会网络中观念动态提供了新的视角。

第 4 章：竞争机制下具有时变拓扑模型的动力学分析

在第四章中，我们基于第三章的研究成果，进一步引入了个体间的竞争关系，以探究竞争机制对观念演化的影响。具体而言，竞争关系的引入使得个体在表达观点时，不仅要考虑社会网络中的互动，还要关注与自己存在竞争关系的个体。这种竞争关系会促使个体在表达观念时更加谨慎，避免因观点的冲突而处于劣势。同时，竞争可能导致信息传播的不对称，使得某些观念更容易被接受，而另一些观念则被边缘化。这种不对称性会改变观念的传播路径，进而影响观念的演化方向。因此，本章致力于揭示竞争机制在观念动态演化中的具体作用。接下来，我们将详细讨论引入竞争关系后，模型所依赖的基本假设、数学证明过程，以及相关定理对观念演化的影响。

4.1 模型描述

在第四章中，我们继续使用第三章中提出的基于合作性互动的观念演化模型，现通过引入个体间的竞争关系来拓展模型。个体的私人观念 $y_i(t)$ 和表达观念 $\hat{y}_i(t)$ 的演化遵循以下更新规则：

私人观念更新规则：

$$y_i(t+1) = w_{ii}(t)C_i y_i(t) + \sum_{j \neq i} w_{ij}(t) \hat{y}_j(t), \quad (4.1)$$

表达观念更新规则：

$$\hat{y}_i(t) = \phi_i(t)C_i y_i(t) + (1 - \phi_i(t))C_i \sum_{j=1}^n m_{ij}(t-1) \hat{y}_j(t-1), \quad (4.2)$$

其中， $w_{ij}(t)$ 和 $m_{ij}(t-1)$ 表示个体间的交互权重，这些权重可以取正值或负值。正值通常代表合作性质的互动，而负值则代表竞争性质的互动。这种设计允许模型捕捉社会网络中个体间复杂的互动关系，包括合作与竞争。

进一步地，这两个方程可以合并为一个矩阵形式的动态更新规则：

$$\begin{bmatrix} y(t+1) \\ \hat{y}(t) \end{bmatrix} = P(t) \begin{bmatrix} y(t) \\ \hat{y}(t-1) \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

其中，更新矩阵 $P(t)$ 由四个子矩阵组成：

$$P(t) = \begin{bmatrix} P_{11}(t) & P_{12}(t) \\ P_{21}(t) & P_{22}(t) \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

其中

$$\begin{aligned} P_{11}(t) &= (\tilde{W}(t) \otimes I_m)C + [(\hat{W}(t)\Phi(t)) \otimes I_m]C \\ P_{12}(t) &= (\hat{W}(t) \otimes I_m)C[(I_N - \Phi(t))M(t-1) \otimes I_m] \\ P_{21}(t) &= C(\Phi(t) \otimes I_m) \\ P_{22}(t) &= C[(I_N - \Phi(t))M(t-1) \otimes I_m] \end{aligned}$$

4.2 假设及引理

假设 4.2.1 对于所有 $i \in \mathcal{I}$ 和所有时间 t ，有 $w_{ii}(t) > 0$ 且 $\sum_{j=1}^N |w_{ij}(t)| \leq 1$ 和 $m_{ii}(t) > 0$ 且 $\sum_{j=1}^N |m_{ij}(t-1)| \leq 1$ 。存在 $\delta > 0$ ，对于 $W(t)$ 和 $M(t)$ 的任意非零元 $w_{ij}(t)$ 和 $m_{ij}(t)$ ，使得 $|w_{ij}(t)| \geq \delta$ ， $|m_{ij}(t)| \geq \delta$ 。

引理 4.2.1^[48] 对于任意 $W \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ，有 $\rho(W) \leq \rho(|W|)$ 成立。

引理 4.2.2^[31] 假设 $|W|$ 是一个行随机矩阵，并且有向图 $G(W)$ 含有一棵生成树但不是强连通的。如果由 $G(W)$ 的根节点组成的子图是结构不平衡的，那么 $\rho(W) < 1$ 。

引理 4.2.3 假设 3.2.3 成立时，图 $G(P(t))$ 是结构平衡的，当且仅当图 $G(W(t))$ 和图 $G(C_i)$ 都是结构平衡的。如果 $G(W(t))$ 是结构不平衡的，或者在 C_i 中存在具有竞争逻辑依赖性（CLI）的个体，那么 $G(P(t))$ 是结构不平衡的。

证明：我们先证明引理 4.2.3 的第一部分。

充要性：当假设 3.2.3 成立时，假设系统中不存在具有话题竞争依赖的个体，如果图 $G(C_i)$ 是结构平衡的，则存在正规置换矩阵 Γ_1 与 Γ_2 ，使得对于所有 $i \in \mathcal{I}$ ，满足 $\Gamma_1 W(t) \Gamma_1 \geq 0, \Gamma_1 M(t) \Gamma_1 \geq 0, \Gamma_2 C_i \Gamma_2 \geq 0$ 。通过简单的计算可得：

$$\begin{bmatrix} \Gamma_1 \otimes \Gamma_2 & \\ & \Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11}(t) & P_{12}(t) \\ P_{21}(t) & P_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_1 \otimes \Gamma_2 & \\ & \Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 & (\Gamma_1 \otimes \Gamma_2)P_{11}(t)(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2) \\
 &= (\Gamma_1 \otimes \Gamma_2)[[(\tilde{W}(t) \otimes I_m)C + (\hat{W}(t)\Phi(t)) \otimes I_m]C](\Gamma_1 \otimes \Gamma_2) \\
 &= (\Gamma_1 \otimes \Gamma_2)[(\tilde{W}(t) \otimes I_m)C](\Gamma_1 \otimes \Gamma_2) + (\Gamma_1 \otimes \Gamma_2)[[(\hat{W}(t)\Phi(t)) \otimes I_m]C](\Gamma_1 \otimes \Gamma_2) \\
 &= (\Gamma_1 \otimes \Gamma_2)(\tilde{W}(t) \otimes I_m)(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2)(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2)C(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2) \\
 &\quad + (\Gamma_1 \otimes \Gamma_2)[(\hat{W}(t)\Phi(t)) \otimes I_m](\Gamma_1 \otimes \Gamma_2)(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2)C(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2) \\
 &= (\Gamma_1 \hat{W}(t) \Gamma_1) \otimes (\Gamma_2 I_m \Gamma_2)(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2)C(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2) \\
 &\quad + (\Gamma_1 \hat{W}(t)\Phi(t) \Gamma_1) \otimes (\Gamma_2 I_m \Gamma_2)(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2)C(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2) \geq 0 \\
 & (\Gamma_1 \otimes \Gamma_2)P_{12}(t)(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2) \\
 &= (\Gamma_1 \otimes \Gamma_2)(\hat{W}(t) \otimes I_m)C[(I_N - \Phi(t))M(t-1) \otimes I_m](\Gamma_1 \otimes \Gamma_2) \\
 &= (\Gamma_1 \otimes \Gamma_2)(\hat{W}(t) \otimes I_m)C(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2)(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2)[(I_N - \Phi(t))M(t-1) \otimes I_m](\Gamma_1 \otimes \Gamma_2) \\
 &= (\Gamma_1 \otimes \Gamma_2)(\hat{W}(t) \otimes I_m)(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2)(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2)C(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2) \\
 &\quad (\Gamma_1 \otimes \Gamma_2)[[(I_N - \Phi(t))M(t-1) \otimes I_m](\Gamma_1 \otimes \Gamma_2) \\
 &= (\Gamma_1 \hat{W}(t) \Gamma_1) \otimes (\Gamma_2 I_m \Gamma_2)(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2)C(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2) \\
 &\quad [\Gamma_1(I_N - \Phi(t))M(t-1)\Gamma_1] \otimes (\Gamma_2 I_m \Gamma_2) \geq 0 \\
 & (\Gamma_1 \otimes \Gamma_2)P_{21}(t)(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2) \\
 &= (\Gamma_1 \otimes \Gamma_2)C(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2)(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2)(\Phi(t) \otimes I_m)(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2) \geq 0 \\
 & (\Gamma_1 \otimes \Gamma_2)P_{22}(t)(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2) \\
 &= (\Gamma_1 \otimes \Gamma_2)C(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2)(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2)[[(I_N - \Phi(t))M(t-1) \otimes I_m](\Gamma_1 \otimes \Gamma_2) \\
 &= (\Gamma_1 \otimes \Gamma_2)C(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2)[\Gamma_1(I_N - \Phi(t))M(t-1)\Gamma_1] \otimes (\Gamma_2 I_m \Gamma_2) \geq 0
 \end{aligned}$$

这意味着 $\text{diag}[\Gamma_1 \otimes \Gamma_2, \Gamma_1 \otimes \Gamma_2]P(t)\text{diag}[\Gamma_1 \otimes \Gamma_2, \Gamma_1 \otimes \Gamma_2] \geq 0$ 。即矩阵 $P(t)$ 是结构平衡的。

必要性：如果 $G(P(t))$ 是结构平衡的，则显然子图 $G(P_{22}(t))$ 是结构平衡的。由引理 3.3.2 可知， $G(C_i)$ 也是结构平衡的。

对于引理的第二部分，即如果 $G(W(t))$ 是结构不平衡的，或者 C_i 中存在具有 CLI 的个体，那么 $G(P(t))$ 是结构不平衡的，这一部分在第三章中已给出证明。

4.3 主要结论

定理 4.3.1 如果假设 4.2.1 与假设 3.2.2-3.2.3 成立，且系统 (4.1) 和 (4.2) 中不存在具有话题竞争依赖的个体时，有向图序列 $\{G(W(t))\}_{t=1}^{\infty}$ 是 RJSC， $G(W(t))$ 与 $G(C_i)$ 是结构平衡的，则系统 (4.1) 和 (4.2) 能够实现关于话题的模一致。

证明：首先，我们将证明 $|P(t)|$ 是行随机矩阵。通过简单的计算可得

$$\begin{aligned} |P_{11}(t)| &= (\tilde{W}(t) \otimes I_m) |C| + [(\hat{W}(t) | \Phi(t)) \otimes I_m] |C| \\ |P_{12}(t)| &= (\hat{W}(t) | \otimes I_m) |C| [(I_N - \Phi(t)) | M(t-1) | \otimes I_m] \\ |P_{21}(t)| &= |C| (\Phi(t) \otimes I_m) \\ |P_{22}(t)| &= |C| [(I_N - \Phi(t)) | M(t-1) | \otimes I_m] \end{aligned}$$

注意到 $|W(t)|$ ， $|M(t-1)|$ ， $|C|$ 都是行随机矩阵，因此

$$\begin{aligned} [|P_{11}(t)|, |P_{12}(t)|] \mathbf{1}_{2Nm} &= |P_{11}(t)| \mathbf{1}_{Nm} + |P_{12}(t)| \mathbf{1}_{Nm} \\ &= (\tilde{W}(t) \otimes I_m) |C| \mathbf{1}_{Nm} + [(\hat{W}(t) | \Phi(t)) \otimes I_m] |C| \mathbf{1}_{Nm} \\ &\quad + (\hat{W}(t) | \otimes I_m) |C| [(I_N - \Phi(t)) | M(t-1) | \otimes I_m] \mathbf{1}_{Nm} \\ &= (\tilde{W}(t) \otimes I_m) \mathbf{1}_{Nm} + [(\hat{W}(t) | \Phi(t)) \otimes I_m] \mathbf{1}_{Nm} \\ &\quad + (\hat{W}(t) | \otimes I_m) |C| (|M(t-1)| \otimes I_m) \mathbf{1}_{Nm} \\ &\quad - (\hat{W}(t) | \otimes I_m) |C| [(\Phi(t) | M(t-1)) \otimes I_m] \mathbf{1}_{Nm} \\ &= (\tilde{W}(t) \otimes I_m) \mathbf{1}_{Nm} + (\hat{W}(t) | \otimes I_m) \mathbf{1}_{Nm} = \mathbf{1}_{Nm}, \\ [|P_{21}(t)|, |P_{22}(t)|] \mathbf{1}_{2Nm} &= |P_{21}(t)| \mathbf{1}_{Nm} + |P_{22}(t)| \mathbf{1}_{Nm} \\ &= |C| (\Phi(t) \otimes I_m) \mathbf{1}_{Nm} + |C| [(I_N - \Phi(t)) | M(t-1) | \otimes I_m] \mathbf{1}_{Nm} \\ &= |C| (\Phi(t) \otimes I_m) \mathbf{1}_{Nm} + |C| (|M(t-1)| \otimes I_m) \mathbf{1}_{Nm} \\ &\quad - |C| [(\Phi(t) | M(t-1)) \otimes I_m] \mathbf{1}_{Nm} \\ &= |C| (|M(t-1)| \otimes I_m) \mathbf{1}_{Nm} \\ &= \mathbf{1}_{Nm}. \end{aligned}$$

这说明 $|P(t)|$ 是行随机矩阵。由于假设 3.2.3 满足， $|W(t)|$ 和 $|M(t-1)|$ 中非零元有非零的下界，因此 $|P(t)|$ 的非零元也具有非零的下界。由于有向图序列 $\{G(W(t))\}_{t=1}^{\infty}$ 是 *RJSC*，根据引理 3.3.3，有向图序列 $\{G(P(t))\}_{t=1}^{\infty}$ 也是 *RJSC*。 $G(C_i)$ 是结构平衡的，根据引理 3.3.2， $|P(t)|$ 也是结构平衡的，且

$$\text{diag}[\Gamma_1 \otimes \Gamma_2, \Gamma_1 \otimes \Gamma_2] P(t) \text{diag}[\Gamma_1 \otimes \Gamma_2, \Gamma_1 \otimes \Gamma_2] = |P(t)| \geq 0.$$

令

$$z(t) = \text{diag}[\Gamma_1 \otimes \Gamma_2, \Gamma_1 \otimes \Gamma_2] \begin{bmatrix} y(t+1) \\ \hat{y}(t) \end{bmatrix}.$$

则

$$\begin{aligned}
 z(t) &= \text{diag}[\Gamma_1 \otimes \Gamma_2, \Gamma_1 \otimes \Gamma_2] \begin{bmatrix} y(t+1) \\ \hat{y}(t) \end{bmatrix} \\
 &= \text{diag}[\Gamma_1 \otimes \Gamma_2, \Gamma_1 \otimes \Gamma_2] P(t) \text{diag}[\Gamma_1 \otimes \Gamma_2, \Gamma_1 \otimes \Gamma_2] \text{diag}[\Gamma_1 \otimes \Gamma_2, \Gamma_1 \otimes \Gamma_2] \begin{bmatrix} y(t) \\ \hat{y}(t-1) \end{bmatrix} \\
 &= \text{diag}[\Gamma_1 \otimes \Gamma_2, \Gamma_1 \otimes \Gamma_2] P(t) \text{diag}[\Gamma_1 \otimes \Gamma_2, \Gamma_1 \otimes \Gamma_2] z(t-1) \\
 &= |P(t)| z(t-1).
 \end{aligned}$$

根据以上分析, $|P(t)|$ 是行随机矩阵, 它的非零元有非零下界, $\{G(|P(t)|)\}_{t=1}^{\infty}$ 是 *RJSC*, 根据引理 3.2.1, $\lim_{t \rightarrow \infty} |P(1)| |P(2)| \dots |P(t)| = 1_{2nm} \beta, \beta \in \mathbb{R}^{2nm}$, 因此 $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 1_{2nm} \beta^T z(0) = (\beta^T z(0)) 1_{2nm}$, 故 $\lim_{t \rightarrow \infty} y_i(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{y}_i(t) = (\beta^T z(0)) (I_N \otimes \Gamma_1) 1_{nm}$, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} |y_{pi}(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} |\hat{y}_{pi}(t)| = |(\beta^T z(0))|$, 因此系统 (4.1) 和 (4.2) 能够实现关于话题的模一致。

定理 4.3.2 如果假设 4.2.1 与假设 3.2.2- 3.2.3 成立, 系统 (4.1) 和 (4.2) 中存在具有话题竞争依赖的个体或者存在 $G(C_i)$ 是结构不平衡的, 有向图序列 $\{G(W(t))\}_{t=1}^{\infty}$ 是 *RJSC*, 则系统 (4.1) 和 (4.2) 是稳定的, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} y_i(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{y}_i(t) = 0_m$ 。

证明: 根据定理 3.3.1 的证明, 可知 $|P(t)|$ 是行随机矩阵, 它的非零元也具有非零的下界。根据引理 3.3.3, 当有向图序列 $\{G(W(t))\}_{t=1}^{\infty}$ 是 *RJSC*, 有向图序列 $\{G(P(t))\}_{t=1}^{\infty}$ 也是 *RJSC*。另一方面, 由引理 3.3.2 可知, 有向图序列 $\{G(P(t))\}_{t=1}^{\infty}$ 是反复结构不平衡的。根据文献[31]定理 2 的结论可知, $\lim_{t \rightarrow \infty} |P(1)| |P(2)| \dots |P(t)| = 0_{2nm}$, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} y_i(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{y}_i(t) = 0_m$ 。

注 4.3.1: 如果假设 4.2.1 成立, 若 $W(t)$ 呈现结构不平衡性, 则矩阵 $|P(t)|$ 在时间序列上表现为行弱随机性。当 $\{G(W(t))\}_{t=1}^{\infty}$ 满足 *RJSC* 反复联合强连通) 条件时, 系统随时间推移渐近地收敛于 M^* , 从而实现模一致性。

该定理的严格数学证明将在未来的研究中进一步探讨, 但本文将通过数值模拟来验证其有效性。

4.4 数值模拟

为了验证上述定理的有效性，本研究设计了一系列数值模拟实验。实验设置与第三章的仿真保持一致，以确保研究的连贯性和可比性。仿真中，我们考虑一个由 12 个个体组成的社会网络，这些个体围绕 3 个相互依赖的话题进行讨论。具体设置如下：首先，网络拓扑结构为时变，并在某些情况下呈现结构不平衡性。我们确保其满足 RJSC（反复联合强连通）条件，如图 4-1 所示，以符合定理的假设。图中展示了网络在不同时间步的综合拓扑结构，其中黑色边表示合作关系，红色边表示竞争关系。竞争关系意味着个体在表达观念时受到其他竞争个体的影响，并可能调整自身表达以对抗对方的观点，而合作关系则表示个体之间的信息交换具有正向促进作用。其次，个体的适应性因子 $\phi_i(t)$ 在 $(0,1)$ 区间内随机分布，并满足定理的约束条件，以确保模型的有效性和仿真结果的可靠性。最后，个体的初始私人观念 $y_i(0)$ 与表达观念 $\hat{y}_i(0)$ 在 $[-1,1]$ 范围内随机生成。

定理 4.3.1 与定理 4.3.2 仿真结果如图 4-2 至图 4-4 所示。图 4-2 展示了当所有逻辑矩阵是结构平衡时，观念的演化轨迹，系统达到了双一致。图 4-3 展示了当存在逻辑矩阵是结构不平衡时，观念的演化轨迹，系统呈现稳定状态。图 4-4 则展示了系统中存在具有话题竞争依赖的个体时，观念的演化轨迹，所有观念最终收敛到零。这些仿真结果进一步印证了本文所得结果的正确性。注 4.3.1 的仿真结果如图 4-5 所示，结果验证了注 4.3.1 的有效性。

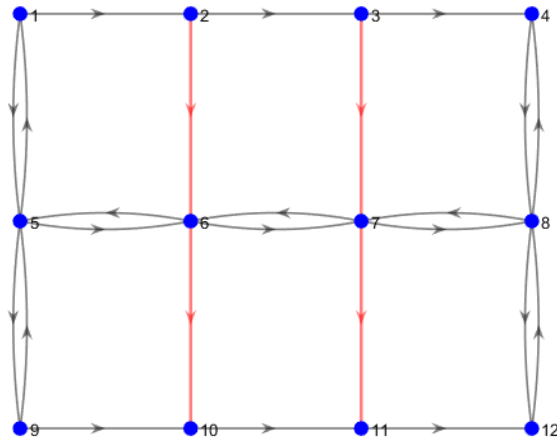


图 4-1 社会网络的拓扑结构

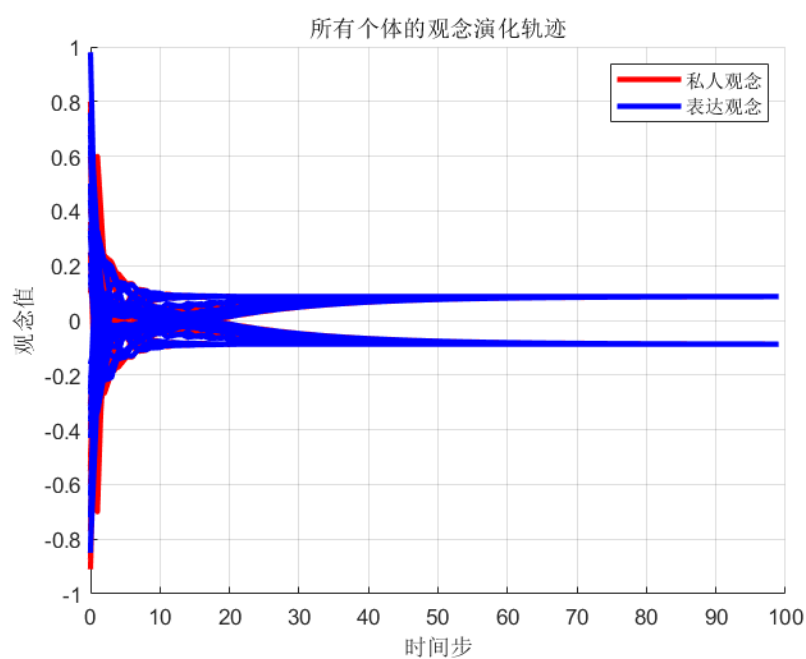


图 4-2 当 $G(W(t))$ 与 $G(C_i)$ 都是结构平衡时，观念的演化轨迹。

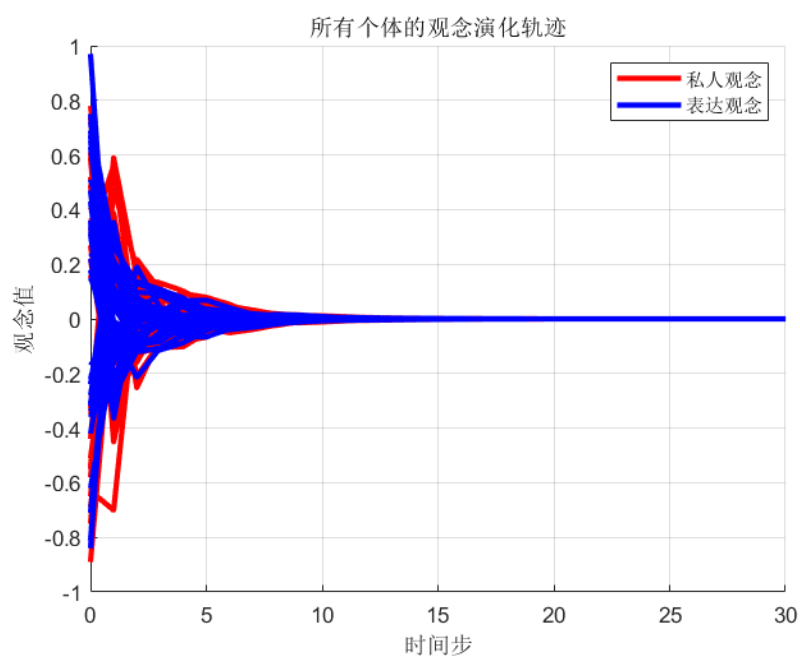


图 4-3 当 $G(W(t))$ 平衡但 $G(C_i)$ 是结构不平衡时，观念的演化轨迹。

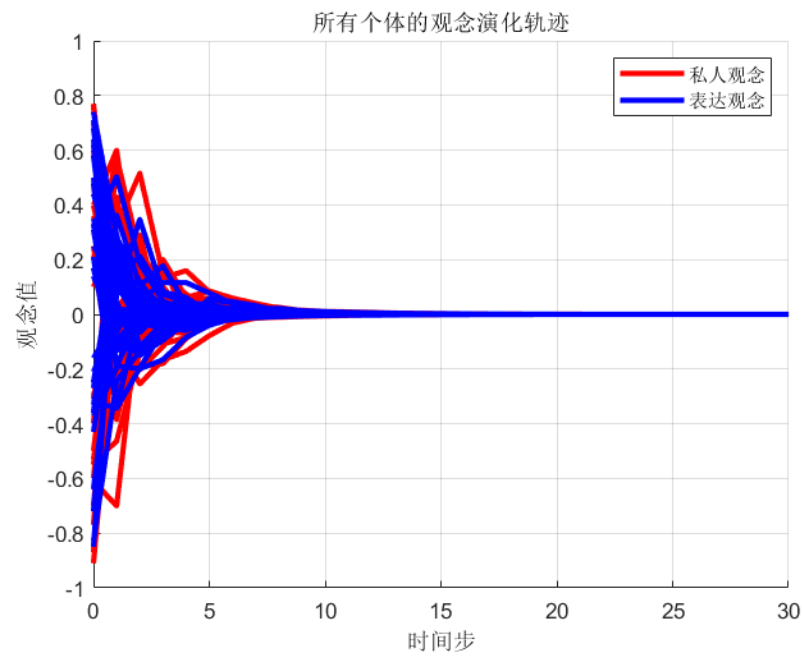


图 4-4 系统存在具有话题竞争依赖的个体时，观念的演化轨迹。

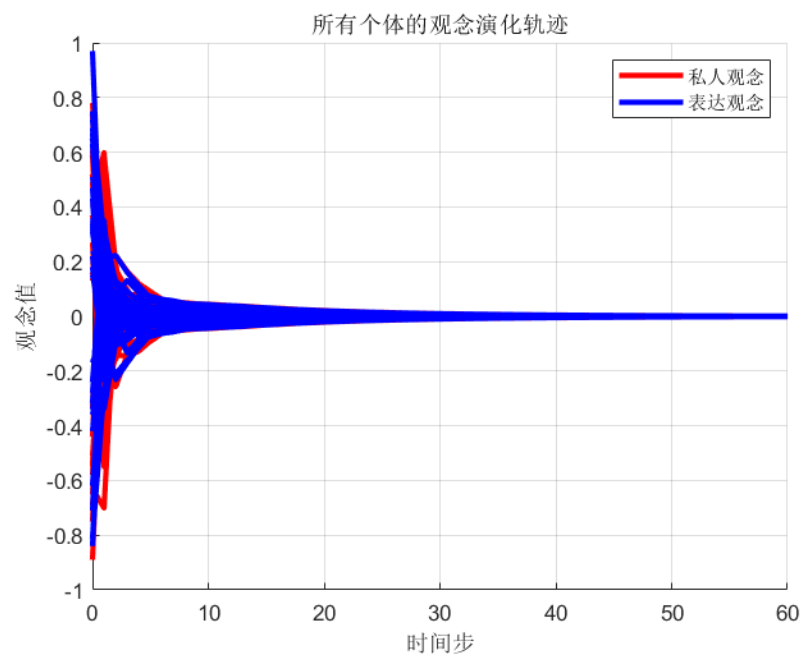


图 4-5 当 $G(W(t))$ 是结构不平衡时，观念的演化轨迹。

4.5 章节小结

在本章中，我们在第三章的模型基础上，引入了竞争关系，使模型能够更真

实地反映复杂社会网络中的观念演化。模型的更新规则不仅考虑了个体间的合作与竞争，同时继续考虑时变拓扑和异构逻辑矩阵。我们对模型进行了全面的理论分析，推导出在不同条件下的稳定性和收敛性条件。特别是，我们分析了网络拓扑结构对模一致性的影响，发现当网络拓扑反复联合强连通且结构平衡时，系统能够实现模一致；而在结构不平衡或存在话题竞争依赖的个体时，系统呈现稳定性，观念收敛到零。这些结论揭示了竞争机制在观念动力学中的重要作用，以及它如何影响社会网络中个体观念的形成和演化。为了验证理论分析的有效性，我们设计并实施了数值模拟实验。通过设置不同的网络拓扑结构和参数，我们展示了模型在各种条件下的动力学行为。仿真结果与理论推导高度一致，进一步证实了模型的准确性和可靠性。例如，当网络结构平衡时，个体观念趋向于双一致；而当网络结构不平衡或存在竞争依赖关系时，观念则稳定于零。这些结果不仅验证了理论分析，还为理解现实社会网络中的观念传播提供了新的视角。

第 5 章：总结与展望

本文深入研究了时变符号社会网络上的观念动力学，构建了包含私人观念和表达观念的新型动力学模型，并引入竞争机制以更真实地反映复杂社会网络中的观念演化。模型考虑了时变拓扑、异构信念系统及竞争关系，通过理论分析推导出模型稳定性和收敛性的条件，特别是模一致性条件。研究发现，当网络拓扑反复联合拟强连通且结构平衡时，系统可实现模一致；而在结构不平衡或存在话题竞争依赖的个体时，系统呈现稳定性，观念收敛到零。数值模拟验证了理论分析的有效性，展示了模型在不同网络结构和参数设置下的动力学行为，揭示了网络拓扑和话题间依赖关系对私人观念与表达观念演化的影响。

与现有模型相比，本研究的创新点在于：（1）考虑了个体在多个逻辑上相互依赖话题上的观念演化，观察了多维观念之间的相互影响；（2）引入了动态权重和时变网络结构，模拟了现实社交网络的动态特征；（3）分析了竞争机制对观念收敛性的影响，突破了传统模型只考虑合作关系的局限；（4）研究了结构不平衡网络对观念极化、分裂及双一致性的影响，填补了现有符号社会网络研究中的空白。

本文通过构建具有时变拓扑的多维观念动力学模型，深入研究了社会网络中个体观念的演化过程。尽管取得了一定的研究成果，但仍有许多值得进一步探索的方向。未来的研究可以从以下几个方面展开：

（1）将模型应用于更多现实场景，如市场营销、政策制定、舆情监测等，探索其在不同领域的适用性和有效性。这将有助于更好地理解观念动态在实际问题中的作用，并为相关领域提供理论支持和决策依据。

（2）在第四章中，我们提出了一个假设：如果网络呈现结构不平衡性，则矩阵在时间序列上表现为行弱随机性。当网络满足 RJSC（反复联合强连通）条件时，系统随时间推移渐近地收敛于 M^* ，从而实现模一致性。这一假设尚未得到严格的数学证明，未来的研究可以专注于严格证明这一假设。

（3）引入更多现实因素，如个体的异质性、信息传播的延迟、社会反馈机制等，使模型更加贴近现实。这些因素的引入将使模型能够更准确地反映现实社会网络中的复杂情况，提高模型的预测能力和解释力。

参考文献

- [1] Dong Y, Zhan M, Kou G, and Ding Z. A survey on the fusion process in opinion dynamics[J]. *Information Fusion*, 2018, 43: 57-65.
- [2] Chen G, Duan X, Friedkin N E, and Bullo F. Social power dynamics over switching and stochastic influence networks[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, 64(2): 582-597.
- [3] Tang Y, Qian F, Gao H, and Kurths J. Synchronization in complex networks and its application—a survey of recent advances and challenges[J]. *Annual Reviews in Control*, 2014, 38(2): 184-198.
- [4] 马振, 贾保先. 基于观点动力学的社交网络观点共识达成研究[J]. *中国传媒大学学报:自然科学版*, 2023, 30(2): 56-67.
- [5] Frasca P, Tarbouriech S, Zaccarian L. Hybrid models of opinion dynamics with opinion-dependent connectivity[J]. *Automatica*, 2019, 100: 153-161.
- [6] 刁苏蒙. 社交网络中个体交互行为和观点演化模式研究[D]. 北京交通大学, 2016.
- [7] Friedkin N E, Johnsen E C. *Social Influence Network Theory: A Sociological Examination Of Small Group Dynamics*[M]. Cambridge University Press, 2011.
- [8] Zhang W, Han Q L, Tang Y, and Liu Y. Sampled-data control for a class of linear time-varying systems[J]. *Automatica*, 2019, 103: 126-134.
- [9] 邓舒予. 突发事件微博舆情意见领袖对网民情感倾向影响研究[D]. 哈尔滨理工大学, 2024.
- [10] 杨燚. 基于多 Agent 的社会网络社区发现方法[D]. 吉林大学, 2015.
- [11] He G, Ruan H, Wu Y, and Liu J. Opinion dynamics with competitive relationship and switching topologies[J]. *IEEE Access*, 2020, 9: 3016-3025.
- [12] 王龙, 田野, 杜金铭. 社会网络上的观念动力学[J]. *中国科学:信息科学*, 2018, 48(01): 3-23.
- [13] Wang X, Jiang B, Li B. Opinion dynamics on social networks[J]. *Acta*

- Mathematica Scientia, 2022, 42(6): 2459-2477.
- [14] Dong Y, Zha Q, Zhang H, Kou G, Fujita H , Chiclana F, and Herrera-Viedma E. Consensus reaching in social network group decision making: Research paradigms and challenges[J]. Knowledge-Based Systems, 2018, 162: 3-13.
- [15] Wu X, Tang Y, Cao J, and Mao X. Stability analysis for continuous-time switched systems with stochastic switching signals[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 63(9): 3083-3090.
- [16] Zhang W, Han Q L, Tang Y, and Liu Y. Sampled-data control for a class of linear time-varying systems[J]. Automatica, 2019, 103: 126-134.
- [17] Bauso D, Cannon M. Consensus in opinion dynamics as a repeated game[J]. Automatica, 2018, 90: 204-211.
- [18] Zou Y. Bipartite consensus of opinion dynamics through delivering credible information[J]. IEEE Transactions on Control of Network Systems, 2020, 8(2): 781-790.
- [19] Wu H, Zeng Y, Ma J, Yang L, Huang Q, and Liu Z. On the control of opinion dynamics in social networks[J]. Physica A. Statistical Mechanics and its Applications, 2014, 409: 183-198.
- [20] Shao J, Zheng W X, Shi L, and Cheng Y. Bipartite tracking consensus of generic linear agents with discrete-time dynamics over cooperation–competition networks[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2020, 51(11): 5225-5235.
- [21] DeGroot M H. Reaching a consensus[J]. Journal of the American Statistical Association, 1974, 69(345): 118-121.
- [22] Ren W, Beard R W. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50(5): 655-661.
- [23] Friedkin N E, Johnsen E C. Social influence and opinions[J]. Journal of mathematical sociology, 1990, 15(3-4): 193-206.
- [24] Friedkin N E, Johnsen E C. Social Influence Networks and Opinion Change[J]. Advances in Group Processes, 1999, 16(1) : 1-29.
- [25] Hegselmann R. Opinion dynamics and bounded confidence: models, analysis and

- p>simulation[J]. Journal of Artificial Societies and Social Simulation, 2002,5(3):34-38.
- [26] Bindel D, Kleinberg J, Oren S. How bad is forming your own opinion?[J]. Games and Economic Behavior, 2015, 92: 248-265.
- [27] Ghaderi J, Srikant R. Opinion dynamics in social networks with stubborn agents: Equilibrium and convergence rate[J]. Automatica, 2014, 50(12): 3209-3215.
- [28] Ravazzi C, Frasca P, Tempo R, and Ishii H. Ergodic randomized algorithms and dynamics over networks[J]. IEEE transactions on control of network systems, 2014, 2(1): 78-87.
- [29] 刘举胜, 何建佳, 韩景倜, 等. 观点动力学研究现状及进展述评[J]. 复杂系统与复杂性科学, 2021, 18(2): 9-20.
- [30] 刘青松, 李明鹏, 柴利. 具有遗忘个体的社会网络多维观点动力学分析与应用[J]. 自动化学报, 2023, 49(10): 2201-2210.
- [31] J. Liu, X. Chen, T. Basar, and M. A. Belabbas. Exponential convergence of the discrete- and continuous-time altafini models[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62(12):6168-6182.
- [32] Rainer H, Krause U. Opinion dynamics and bounded confidence: models, analysis and simulation[J]. 2002: 1-33.
- [33] Dittmer J C. Consensus formation under bounded confidence[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2001, 47(7): 4615-4621.
- [34] Parsegov S E, Proskurnikov A V, Tempo R, et al. Novel multidimensional models of opinion dynamics in social networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2016, 62(5): 2270-2285.
- [35] Jia P, Mirtabatabaei A, Friedkin N E, and Bullo F. Opinion dynamics and the evolution of social power in influence networks[J]. SIAM review, 2015, 57(3): 367-397.
- [36] Ye M, Liu J, Wang L, et al. Consensus and disagreement of heterogeneous belief systems in influence networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2019, 65(11): 4679-4694.
- [37] Zhu Y, Li S, Ma J, and Zheng Y. Bipartite consensus in networks of agents with antagonistic interactions and quantization[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2018, 65(12): 2012-2016.
- [38] Altafini C. Consensus problems on networks with antagonistic interactions[J].

- IEEE transactions on Automatic Control, 2012, 58(4): 935-946.
- [39] Xue D, Hirche S, Cao M. Evolution of social power over influence networks containing antagonistic interactions[J]. Information Sciences, 2020, 540: 449- 468.
- [40] Meng Z, Shi G, Johansson K H, Cao M, and Hong Y. Behaviors of networks with antagonistic interactions and switching topologies[J]. Automatica, 2016, 73: 110-116.
- [41] Lin X, Jiao Q, Wang L. Competitive diffusion in signed social networks: A game-theoretic perspective[J]. Automatica, 2020, 112: 108656.
- [42] Ye M, Qin Y, Govaert A. An influence network model to study discrepancies in expressed and private opinions[J]. Automatica, 2019, 107: 371-381.
- [43] Waters N L, Hans V P. A jury of one: Opinion formation, conformity, and dissent on juries[J]. Journal of Empirical Legal Studies, 2009, 6(3): 513-540.
- [44] Karlin S. A first course in stochastic processes[M]. Academic press, 2014.
- [45] Horn R A, Johnson C R. Matrix analysis[M]. Cambridge university press, 2012.
- [46] Shang Y. Resilient consensus for expressed and private opinions[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2019, 51(1): 318-331.
- [47] Anderson B D O, Ye M. Recent advances in the modelling and analysis of opinion dynamics on influence networks[J]. International Journal of Automation and Computing, 2019, 16(2): 129-149.
- [48] He G, Shen Z, Huang T, et al. Opinion dynamics with heterogeneous multiple interdependent topics on the signed social networks[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2023, 53(10): 6181-6193.
- [49] Doreian P, Mrvar A. Partitioning signed social networks[J]. Social Networks, 2009, 31(1): 1-11.
- [50] Tian Y, Lambiotte R. Spreading and structural balance on signed networks[J]. SIAM Journal on Applied Dynamical Systems, 2024, 23(1): 50-80.

硕士期间发表的论文

- [1] 杨露, 袁飞, 沈明轩, 何广. 具有时变拓扑的观念动力学模型[J]. 东莞理工学院学报, 2025. (已录用)

致谢

时光荏苒，岁月如梭。在安徽工程大学的这段学习旅程即将结束之际，回首过往，心中满是感慨与感恩。在这段充满挑战与收获的日子里，我有幸得到了许多人的帮助与支持，他们如同熠熠星辰，照亮了我前行的道路，让我得以顺利完成学业，尤其是这篇毕业论文的撰写。

首先，我要衷心感谢我的导师何广教授。导师不仅在学术上给予了我悉心指导，更在为人处世方面为我树立了榜样。从论文的选题构思，到资料的收集整理，再到论证的严谨推敲，导师始终耐心地为我的答疑解惑，每一次的讨论都让我受益匪浅。导师严谨的治学态度、渊博的学识以及对学术的执着追求，深深感染着我，让我在学术探索的道路上不敢有丝毫懈怠。在此，我向导师致以最崇高的敬意和最真挚的感谢！

其次，我要感谢我的父母。他们是我坚实的后盾，在我遇到困难和挫折时，总是给予我无条件的支持与鼓励。无论是在学业上的压力，还是在生活中遇到的种种不如意，他们总是用温暖的话语和包容的怀抱，让我重新振作起来，继续前行。没有他们的理解和支持，我不可能全身心地投入到学习和研究中。我爱我的家人，也感谢他们一直以来的陪伴。

我还要感谢 507 实验室的同学们。在读研的这段时光里，我们一起度过了无数个日夜，共同学习、共同成长。在论文写作过程中，他们为我提供了许多宝贵的建议和思路，我们一起讨论问题、分享资料，相互激励、相互支持。感谢他们让我在读研生活中不再孤单，让我感受到了友情的温暖和力量。

最后，我要感谢我的学校和学院。这里有着优秀的师资队伍、丰富的学术资源和良好的学习环境，为我的成长提供了广阔的平台。在这里，我不仅学到了专业知识，更培养了独立思考和解决问题的能力。感谢学校和学院为我提供了这么好的学习机会，让我在这里度过了充实而有意义的读研时光。

感恩相遇，感恩这段旅程中的每一个人。未来，我会带着这份感恩，继续努力前行，不辜负大家对我的期望。再次感谢所有帮助过我的人！

2025 年 4 月 30 日