

分类号: O212.7

密 级: 公开

单位代码: 10363

学 号: 2221020120

题 目 半参数空间自回归模型的统计推断与
应用研究

题 目 Statistical Inference and Application
Research of Semiparametric Spatial
Autoregressive Models

学生姓名: 杨 颖

指导教师: 何帮强 教授

专 业: 数 学

研究方向: 半参数模型

论文答辩日期: 2025 年 5 月 14 日

安徽工程大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：我恪守学术道德，崇尚严谨学风。所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已明确注明和引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品及成果的内容。论文为本人亲自撰写，我对所写的内容负责，并完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

学位论文作者签名：杨颖

日期：2025 年 5 月 14 日

安徽工程大学学位论文版权使用授权书

学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅或借阅。本人授权安徽工程大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保密 ☐，在 _____ 年解密后适用本版权书。

本学位论文属于

不保密 ☒。

学位论文作者签名：杨颖

日期：2025 年 5 月 14 日

指导教师签名：何帮强

日期：2025 年 5 月 14 日

半参数空间自回归模型的统计推断与应用研究

摘 要

半参数模型因其能有效解决非参数模型中“维数灾难”问题，同时减少模型误差假设带来的不良影响，近年来受到学术界的广泛关注。然而，在不同领域的研究实践中，由于测量工具存在局限、测量方法不够精准或其他客观原因，致使数据出现测量误差，若忽略误差这一问题，将导致参数估计结果不准确甚至无效。而半参数面板数据是通过追踪给定个体在不同时间点的观测值所获得的数据集，能够捕捉个体异质性、时间动态性、空间依赖性以及非线性关系，从而提升模型估计的稳健性和准确性。因此，本文考虑半参数空间自回归模型，分别探讨固定效应附加约束条件时与协变量存在测量误差时的统计推断问题。

本文首先阐述了半参数空间自回归模型的研究背景与意义，梳理了半参数面板数据模型的国内外研究现状，并简要介绍了论文所运用到的核估计、局部多项式估计、B 样条估计以及空间权重矩阵的构造。

其次，探讨带固定效应部分线性空间自回归面板数据模型，在参数部分受附加约束时的估计问题，利用 B 样条函数逼近未知函数，通过最小二乘虚拟变量法消除个体效应。结合最小二乘法得到参数部分受到附加约束条件时的约束估计量，并在适当正则条件下，证明了约束估计量的样本性质。Monte Carlo 模拟研究在不同样本容量和空间

自回归系数下,通过比较参数和非参数估计量的偏差与均方误差,得到所提约束估计量优于无约束估计量,从而验证所提估计方法的有效性。

最后,本文进一步研究了协变量存在测量误差的部分线性单指标空间自回归模型。为了估计未知参数和连接函数,引入基于局部线性方法的校正剖面极大似然方法,并在适当正则条件下,得到了所提出的估计量的渐近分布。**Monte Carlo** 模拟结果表明,纠偏估计量相较于未纠偏估计量具有较小的偏差与均方误差。同时通过对波士顿房价数据进行分析,验证了所提估计方法的有效性。

关键词: 部分线性空间自回归模型, 面板数据, 固定效应, 约束估计, 测量误差

Statistical Inference and Application Research of Semiparametric Spatial Autoregressive Models

ABSTRACT

The semiparametric models have received considerable academic attention in recent years due to their effectiveness in addressing the "curse of dimensionality" in nonparametric models while reducing the negative impacts of model error assumptions. However, in research practice across various disciplines, limitations in measurement instruments, imprecise measurement methodologies, or other objective factors may introduce measurement errors into datasets. Neglecting these errors could render parameter estimation results inaccurate or even statistically invalid. Semiparametric panel data, obtained by tracking observations of specific individuals at different time points, can capture individual heterogeneity, temporal dynamics, spatial dependence, and nonlinear relationships, thereby enhancing the robustness and accuracy of model estimation. Therefore, this thesis considers semiparametric spatial autoregressive models and investigates statistical inference under two scenarios: when fixed effects are subject to additional constraints and when covariates contain measurement errors.

In this thesis, we first present the research background and

significance of semiparametric spatial autoregressive models, review domestic and international research on semiparametric panel data models, and briefly introduce the methodologies employed, including kernel estimation, local polynomial estimation, B-spline estimation, and the construction of spatial weight matrices.

Next, we examine the estimation problem in a partially linear spatial autoregressive panel data model with fixed effects under additional constraints on the parametric component. We approximate the unknown function using B-splines and eliminate individual effects through the least squares dummy variable method. By combining constrained least squares estimation, we obtain constrained estimators for the parametric component and establish their sample properties under appropriate regularity conditions. Through Monte Carlo simulations with varying sample sizes and spatial autoregressive coefficients, we compare the bias and mean squared error of parametric and nonparametric estimators. The results demonstrate that our proposed constrained estimators outperform unconstrained ones, thereby validating the effectiveness of our estimation method.

Finally, we further investigate a partially linear single-index spatial autoregressive model with measurement errors in covariates. To estimate the unknown parameters and link function, we introduce a corrected profile maximum likelihood method based on local linear approximation and

derive the asymptotic distribution of the proposed estimators under suitable regularity conditions. Monte Carlo simulations show that our bias-corrected estimators exhibit smaller bias and mean squared error compared to uncorrected estimators. Additionally, we validate our proposed estimation method through an analysis of Boston housing price data.

Yang Ying (Mathematics)

Supervised by He Bangqiang

KEY WORDS: Partially linear spatial autoregressive model, Panel data, Fixed effects, Restricted estimation, Measurement error

目 录

摘要.....	I
ABSTRACT.....	III
第 1 章 绪论.....	1
1.1 研究背景与研究意义	1
1.2 国内外研究现状	1
1.3 主要研究内容	4
第 2 章 估计方法.....	6
2.1 核估计	6
2.2 局部多项式估计	7
2.3 B 样条估计	8
2.4 空间权重矩阵	9
第 3 章 带固定效应部分线性空间自回归面板数据模型的约束估计.....	11
3.1 模型框架	11
3.2 最小二乘虚拟变量法	12
3.3 渐近结果	14
3.4 数值模拟	15
3.5 主要结果的证明	17
3.6 本章小结	22
第 4 章 具有测量误差的部分线性单指标空间自回归模型的统计推断.....	23
4.1 模型框架	23
4.2 校正剖面极大似然法	24
4.3 渐近结果	27
4.4 数值模拟	29
4.5 实际例子	39
4.6 主要结果的证明	42
4.7 本章小结	47
第 5 章 总结与展望.....	49

5.1 总结	49
5.2 展望	49
参考文献.....	51
硕士期间发表的论文.....	56
致谢.....	57

第 1 章 绪论

1.1 研究背景与研究意义

在经济统计分析中，相邻区域的经济变量常具有空间相关性，如房地产、疾病防控、环境生态等常存在区域聚集的特征，并且这些变量受到线性和非线性因素共同影响。因此，有效运用空间相关性处理数据的规律和特征，具有重要理论意义与实用价值。

为解决非参数回归模型的“维数灾难”问题，研究者们提出了单指标、变系数及可加回归等具备降维功能的非参数回归模型。由于半参数回归模型的统计推断的复杂性，近年来随着大数据分析、计算机技术迅速发展，研究者们提出了多种估计方法，并对相关估计量的大样本性质展开了深入研究，有力促进了非参数回归模型的理论的深化与完善。

在现实经济现象中，解释变量间往往并非相互独立，这与传统回归模型的假设不符。例如在环境生态、社会及经济等领域，诸多经济变量在不同区域具有空间相关性，若能有效利用这些空间相关性，便能够精确地刻画和处理空间数据之间的关联性。另一方面，数据获取过程中易受到诸多因素干扰而产生测量误差。例如，测量仪器精度有限、测量方法存在缺陷、技术水平尚未成熟，以及环境条件不利等，均有可能导致所获取数据偏离真实值。我们把此类含测量误差的数据所对应的模型称为 EV 模型。相对于理想状态下无误差的数据模型，测量误差模型能更好地反映现实情况，更真实地拟合所研究的实际模型，因此在实际情况分析中是具有重要价值的。总的来说，研究半参数空间自回归模型不但具有理论意义，也能够更贴切地反映实际情况的分析。

1.2 国内外研究现状

Cliff和Ord^[1]将空间相关性与多元线性回归模型结合，提出了空间自回归模型，下面给出空间自回归(SAR)模型的形式

$$Y_n = \lambda W_n Y_n + X_n \beta + \varepsilon_n, \quad (1.1)$$

其中 Y_n 是响应变量, X_n 为解释变量, λ 是空间自回归系数, 反应的是响应变量受其空间邻近单元的影响程度, β 是回归系数向量, W_n 是空间权重矩阵, ε_n 是随机误差项。Anselin^[2]提出了线性空间自回归模型的估计方法; Kelejian和Prucha^[3]针对线性空间自回归模型, 提出了GS2LSL估计方法; Kelejian和Prucha^[4]提出了GMM估计方法, 并讨论了估计量的样本性质; Lee^[5]研究了该模型的拟极大似然估计的渐近性质, 得到估计量的收敛速度与空间权重矩阵相关; 在混合空间自回归模型方面, Lee^[6]对于混合空间自回归模型, 提出 2SLS估计方法和GMM估计方法; Lee和Liu^[7]在基础上考虑具有空间自回归扰动项的高阶SAR模型, 并得出了GMM在计算方面优于传统ML方法; Lee和Liu^[8]研究存在异方差的SAR模型, 并得出GMM估计量样本性质优于 2SLS估计量; Badinger和Egger^[9]研究了扰动过程SAR参数的GM估计过程, 并证明了所提估计量的一致性; Lee和Yu^[10]针对固定效应的空间动态面板数据模型, 研究了GMM估计量的样本性质; Qu和Lee^[11]利用内生空间权重矩阵对SAR模型进行估计, 并且证明了估计量的相合性和渐近正态性; Gupta和Robinson^[12]讨论了高阶SAR模型的参数估计的相合性和渐近正态性; Gupta^[13]对具有随机外生空间权重矩阵的高阶SAR模型进行研究, 讨论了权重矩阵归一化对样本性能的影响, 并给出了估计方法一致性和渐近正态性的充分条件。

空间自回归模型结合了线性模型和一阶SAR模型的优势, 但是忽略了数据的非线性特征。半参数模型则能同时捕捉数据的线性与非线性特征。基于半参数模型的优势, 将其加入空间自回归模型, 构建了半参数空间自回归模型, 模型一般形式如下

$$Y_n = \lambda W_n Y_n + X_n \beta + m(t) + \varepsilon_n, \quad (1.2)$$

其中 Y_n 是响应变量, X_n 为解释变量, λ 是空间自回归系数, β 是回归系数向量, W_n 是空间权重矩阵, ε_n 为模型的随机误差, $m(t)$ 是未知参数向量。对此模型 Gress^[14]提出当存在空间效应时, 半参数空间自回归模型能够有效处理高维数据, 并且得到参数一致估计量; Robinson^[15]基于SAR模型提出了有效的半参数和参数

估计,并讨论了估计量的有限样本性能; Su和Jin^[16]提出了部分线性SAR模型的剖面拟极大似然估计,得到空间参数估计量的收敛速度与权重矩阵相关; Su^[17]提出了弱矩条件下半参数SAR模型的GMM估计,并且在误差项中考虑了异方差性和空间依赖性,证明了参数和非参数的渐近性质; Sun等^[18]拓展了普通的SAR模型,提出了半参数空间动态模型,并运用剖面似然的估计方法,论证了估计量的渐近正态性; Krisztin^[19]针对半参数SAR模型,利用B样条函数逼近非参数部分; 李坤明和陈建宝^[20]考虑半参数变系数空间滞后模型,推导出模型的截面极大似然估计,证明了估计量的一致性; Koch和Krisztin^[21]基于样条对部分线性SAR模型进行估计; Chen等^[22]提出了半参数SAR模型的两步贝叶斯估计方法; Du等^[23]运用基函数近似非参数函数,提出了部分线性可加SAR模型的GMM估计方法,并给出了估计量的渐近性质。

面板数据是通过在不同时间点追踪一组特定的个体而收集的数据集,其中包含了每个个体在多个时期的观测值。部分线性空间自回归面板数据模型如下

$$Y_{it} = \rho \sum_{i \neq j} W_{ij} Y_{jt} + X_{it}^T \beta + \eta(Z_{it}) + \xi_i + \varepsilon_{it}, \quad i=1,2,\dots,n; t=1,2,\dots,T, \quad (1.3)$$

其中 Y_{it} 是响应变量, X_{it} 是解释变量, $|\rho| < 1$ 是空间自回归系数, W_{ij} 是已知的空间权重矩阵, $\eta(\cdot)$ 是未知连接函数, β 是未知参数, ξ_i 是不可观测的固定效应, ε_{it} 是随机误差项。近年来面板数据模型受到中外学者的关注。例如,Hu^[24]考虑具有固定效应的面板数据的半变系数模型,提出了基于剖面似然的估计方法,并证明了该方法具有良好的收敛速度; He等^[25]将分块经验似然应用于带固定效应部分线性面板数据模型; Yu等^[26]对所提估计量提出一种基于偏差校正的方法,当时间周期 T 增长快于个体数 $n^{1/3}$ 时,该校正将渐近消除偏差并产生以真实值为中心的置信区间。由于地理分布与时间上的变化,产生大量的考虑了变量间相互影响空间面板数据。Lee等^[27]提出一种基于转换的替代估计方法考虑带固定效应空间自回归面板数据模型的估计; Li等^[28]在此基础上引入了固定效应部分线性变系数SAR模型,构建模型的剖面拟极大似然估计量,证明了所提估计量在有限样本情况下的良好性能; Hu等^[29]基于差分技术,将多项式样条级数逼近和半参数最小二乘法结合,构造了空间模型自回归系数的广义矩估计量; Su等^[30]研究了具有固定效应部分线性面板数据的一致估计问题,并证明了其收敛速度和渐

近正态性；Zhang 等^[31]提出了惩罚分位数回归方法，并通过惩罚方法减少个体固定效应的变异性；丁飞鹏等^[32]对于半参数空间面板模型提出了截面二次推断函数法，在考虑个体内相关性时，证明了该估计方法优于两阶段最小二乘法。

在实际研究中，测量到的数据往往不是真实的数据，由于测量工具或其他客观因素而带有测量误差，如果忽略这些测量误差进行统计分析往往将导致结果的偏倚性。因此，测量误差模型旨在利用可观测到数据进行有效的统计分析和推断，简单的线性测量误差模型一般形式如下

$$\begin{cases} Y_n = X_n \beta + \varepsilon_n \\ W_n = X_n + U_n \end{cases} \quad (1.3)$$

其中 Y_n 是因变量， X_n 是不可直接观测的协变量， β 是未知参数向量， W_n 是自变量的观测值，对应的 ε_n 和 U_n 是随机误差项。变量测量误差模型最早由 Adcock R J^[33] 开始研究；Kummel^[34] 将 Adcock R J^[33] 的结果拓展到已知误差方差的情况下；Fuller^[35] 讨论了具有测量误差的线性回归模型的统计方法；Wang 和 Cheng^[36] 讨论了带有测量误差的删失数据回归模型，提出了一种结合将工具变量法与最小距离估计的 2SLS，并且得到了估计量的相合性和渐近正态性；Nakamura^[37] 研究了通过校正似然函数来纠正测量误差对参数估计的影响，并获得了广义线性模型的校正似然函数；张征宇和朱平芳^[38] 研究了对于空间自回归模型，当因变量存在测量误差时，忽略测量误差与模型本随机扰动项的相关性，那么采用的极大似然估计是不一致的，当零假设被拒绝时，用 2SLS 可以得到参数的一致估计；Suesse^[39] 研究了当因变量带有测量误差时的空间自回归模型估计问题；Luo 和 Wu 等^[40] 研究了对协变量具有测量误差的空间自回归模型进行了讨论，提出了三阶段最小二乘法，并证明了在两种不同类型工具变量下所提出的估计量的渐近正态性。

综上所述，由于半参数空间自回归模型存在空间相依项，使得模型的估计方法不同于传统的回归模型。因此考虑半参数空间自回归模型，分别研究在具有固定效应附加约束下和协变量具有测量误差时的统计推断问题具有实际应用价值。

1.3 主要研究内容

本文分别探讨了带固定效应的部分线性空间自回归面板数据模型在参数部

分受附加约束条件下的估计问题,以及部分线性单指标空间自回归模型在协变量存在测量误差时的统计推断问题。

具体内容如下:

1、研究了针对带固定效应的部分线性空间自回归面板数据模型,在参数部分受到附加约束的条件下,利用样条函数逼近未知函数,并通过最小二乘虚拟变量法消除个体效应。结合最小二乘法,构建了约束条件下的参数估计量,并在适当的正则条件下证明了其样本性质。通过数值模拟验证了所提估计方法的有效性。

2、探讨了具有测量误差的部分线性单指标空间自回归模型,为了准确估计未知参数和连接函数,引入了一种基于局部线性方法的校正剖面最大似然估计方法。在适当的正则条件下,推导出了估计量的渐近分布。数值模拟结果表明,所提方法在有限样本中表现良好,并通过真实数据示例展示了其实际应用价值。

第 2 章 估计方法

本章将简要介绍论文运用到的主要研究方法，具体包括核估计、局部多项式估计、B 样条估计以及空间权重矩阵的构造。

2.1 核估计

核密度估计是一种非参数密度估计方法之一，由 Rosenblatt^[41]和 Parzen^[42]提出，也被称作 Parzen 窗方法。该方法的核心思想是将每个数据点及其对应的带宽视为核函数的参数，每个数据点生成一个核函数，随后将这些核函数进行线性组合并标准化，从而估计概率密度函数。假设 U 是一个随机变量， F 是其分布函数。设 $u_1, u_2, \dots, u_n$ 是从 F 中抽取的 n 个独立同分布的样本点，且它们的概率密度函数为 f ，则核密度估计为

$$\hat{f}_h(u) = n^{-1} \sum_{i=1}^n K_h(u - u_i) = (nh)^{-1} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{u - u_i}{h}\right), \quad (2.1)$$

其中 $K(\cdot)$ 为核函数， h 为设定的带宽，核函数 $K(\cdot)$ 通常取概率密度函数。常见的核函数如下：

Uniform 核：

$$K(t) = \frac{1}{2} I(|t| \leq 1),$$

Epanechnikov 核：

$$K(t) = \frac{3}{4} (1 - t^2) I(|t| \leq 1),$$

Gaussian 核：

$$K(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right),$$

Quartic 核：

$$K(t) = \frac{15}{16} (1 - t^2)^2 I(|t| \leq 1).$$

Nadaraya^[43]和 Waston^[44]分别提出了非参数函数 $g(x)$ 的核估计：

$$\hat{g}_{NW}(u) = \frac{\sum_{i=1}^n n^{-1} K\left(\frac{u-u_i}{h}\right) Y_i}{\sum_{i=1}^n n^{-1} K\left(\frac{u-u_i}{h}\right)} = \frac{\sum_{i=1}^n n^{-1} K_h(u-u_i) Y_i}{\sum_{i=1}^n n^{-1} K_h(u-u_i)}, \quad (2.2)$$

则称 $\hat{g}_{NW}(u)$ 为 $g(u)$ 的 Nadaraya-Waston 估计, 简称为 N-W 估计。

在一定的正则性条件下, N-W 估计是相合的, 即当 $h \rightarrow 0$ 且 $nh \rightarrow \infty$ 时,

$$\hat{g}_{NW}(u) \xrightarrow{P} g(u).$$

2.2 局部多项式估计

由于核估计方法存在边界效应问题, 具体表现为在边界区域, 其收敛于实际函数的速度相较于内点处较慢。此外, 核估计本质上属于局部加权平均, 偏差较大, 并且偏差受协变量密度函数影响。相比之下, 局部多项式估计通过 Taylor 展开式进行局部多项式近似, 有效降低了偏差并消除了边界效应, 因此在统计研究中得到广泛应用。该部分更详细内容可见 Fan 和 Gijbels^[45]和 Ruppert^[46]。

假设未知连接函数 $g(u)$ 在 u_0 的邻域内具有连续的 $p+1$ 阶导数, 根据 Taylor 展开式近似该函数, 即

$$\begin{aligned} g(u) &\approx g(u_0) + g'(u_0)(u-u_0) + \frac{g''(u_0)}{2!}(u-u_0)^2 + \cdots + \frac{g^{(p)}(u_0)}{p!}(u-u_0)^p \\ &\approx \sum_{j=0}^p \frac{g^{(j)}(u_0)}{j!} (u-u_0)^j \\ &= \sum_{j=0}^p \beta_j (u-u_0)^j, \end{aligned} \quad (2.3)$$

其中 u_0 为 u 邻域内的点。因此, 根据加权最小二乘法求 $g(u)$ 的估计量, 即最小化

$$\sum_{i=1}^n \left[Y_i - \sum_{j=0}^p \beta_j (u-u_0)^j \right]^2 K_h(u-u_0), \quad (2.4)$$

其中 $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p)^\tau$ 为系数向量, $K_h(\cdot) = h^{-1}K(\cdot/h)$, $K(\cdot)$ 是核函数, h 是带宽。

设 $\hat{\beta}_j$ 是(2.4)式最小时的解, 即未知连接函数 $g(u)$ 的局部线性多项式估计为

$$\hat{g}(u) = \sum_{j=0}^p \hat{\beta}_j (u - u_0)^j. \quad (2.5)$$

2.3 B 样条估计

局部多项式估计是一种在数据点附近进行多项式拟合的方法，它能够在边界点处表现出良好的性能。然而，这种方法需要假设函数存在连续的 $p+1$ 阶导数，这在实际应用中可能并不总是成立。相比之下，B 样条估计则不依赖于这样的假设，它通过节点的合理选择来精细调控非参数函数的光滑性与数据拟合精度之间的平衡。

B 样条估计的核心在于节点数的合理选择。节点是 B 样条函数中的关键点，它们决定了函数的形状和光滑性。通过调整节点的数量和位置，我们可以灵活地控制 B 样条函数对数据的拟合程度。此外，B 样条估计所需的节点数目相对较少，且对节点数量的敏感性不高。这一特性显著提升了 B 样条估计的计算效率，使其在处理大规模数据集时能够表现出较好的逼近稳定性和数值可靠性。设 $t = (t_1, t_2, \dots, t_k)$ ， $a < t_1 < \dots < t_k < k$ 为 $[a, b]$ 上的节点， $B(u) = (B_1(u), \dots, B_m(u))^T$ 为 l 次 B 样条函数的基， $S(l, t) = \{B^T(u)\alpha : \alpha \in R^m\}$ 为 l 次 B 样条函数空间，其中 $m = l + k + 1$ ， k 为节点数。由 Schumaker^[47]可知，则未知连接函数 $g(u)$ 可近似为 B 样条函数的线性组合

$$g(u) \approx B^T(u)\alpha, \quad (2.6)$$

其中， α 为样条系数，其决定了 B 样条函数对数据的拟合程度。为了求解该系数，定义最小二乘目标函数

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - B^T(u)\alpha)^2, \quad (2.7)$$

最小化上式得 α 的估计为 $\hat{\alpha}$ ，则未知连接函数 $g(u)$ 的 B 样条估计为

$$\hat{g}(u) = B^T(u)\hat{\alpha}. \quad (2.8)$$

2.4 空间权重矩阵

空间权重矩阵是空间自回归模型的重要组成部分,用于量化观测值间的空间依赖关系。空间权重矩阵反映了不同单元之间的空间依赖程度,若假定有 n 个不同的空间单元,则空间权重矩阵一般形式如下

$$W_n = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} & \cdots & W_{1n} \\ W_{21} & W_{22} & \cdots & W_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ W_{n1} & W_{n2} & \cdots & W_{nn} \end{pmatrix},$$

其中, W_{ij} 表示空间单元 i 对空间单元 j 之间的影响程度。一般假设空间单元 i 对自身无直接影响,空间单元 i 对空间单元 j 的影响与 j 对 i 的影响是对称的,因此 W_n 的对角线元素为 0,且为对称矩阵。

关于构造空间权重矩阵,需要考虑空间相关性与“距离”之间的负向关联性,即空间相关性会伴随“距离”的增大而减弱。这里的距离不仅局限于空间单元间的地理距离,还覆盖了反应经济合作紧密度、关系亲疏等多个维度所定义的距离。空间权重矩阵主要可分为两大类:一类是简单的二元邻接矩阵,另一类则是基于地理距离的二元关系矩阵,其矩阵的 (i, j) 元素分别为:

$$W_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{当区域 } i \text{ 与区域 } j \text{ 相邻,} \\ 0 & \text{其他,} \end{cases}$$

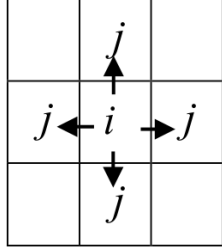
$$W_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{当区域 } i \text{ 与区域 } j \text{ 的距离小于某个常数时,} \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

相邻关系分为以下几种,详见图 2-1。

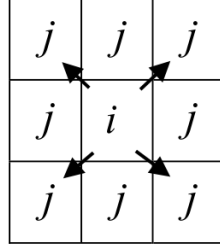
- (1) 相邻区域有公共的边,相应的定义为 **Rook** 空间权重矩阵
- (2) 相邻区域有公共的顶点,相应的定义为 **Bishop** 空间权重矩阵
- (3) 相邻区域有公共的边和顶点,相应的定义为 **Queen** 空间权重矩阵

为便于处理,通常会对空间权重矩阵进行标准化,即将每一行元素除以其所在行的绝对值之和,使每一行的元素总和为 1。这种处理方式有助于确保空间权重在分析中保持一致性,避免由于权重大小差异导致的偏差。因此本文根据空间近邻法构造本文空间权重矩阵 W_n ,假设存在 R 个不同区域,每个区域内

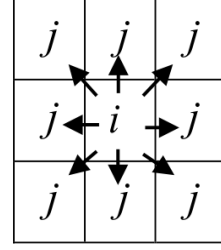
包含 m 个成员，同一区域的成员作为相邻点，且对于同一区域内的成员具有相同的权重， $W_n = I_R \otimes B_m$ ，其中 $B_m = (E_m E_m^T - I_m) / (m-1)$ ， E_m 是 m 阶元素均为 1 的矩阵， I_R 是 R 阶单位矩阵， $\otimes$ 是 Kronecher 内积。



(1)



(2)



(3)

图 2-1 相邻关系图

第3章 带固定效应部分线性空间自回归面板数据模型的约束估计

本章主要研究带固定效应部分线性空间自回归面板数据模型在参数部分受到附加约束条件时的估计问题，首先利用B样条函数逼近未知函数，通过最小二乘虚拟变量法消除个体效应。其次采用最小二乘法，在参数部分受到附加约束条件下，推导出约束估计量。在适当正则假设条件下，证明了约束估计量具有良好的样本性质。最后通过Monte Carlo模拟，验证了所提估计方法的稳定性和有效性。

3.1 模型框架

考虑如下带固定效应部分线性空间自回归面板数据模型：

$$Y_{it} = \rho \sum_{i \neq j} W_{ij} Y_{jt} + X_{it}^T \beta + \eta(Z_{it}) + \xi_i + e_{it}, \quad i=1,2,\dots,n; \quad t=1,2,\dots,T, \quad (3.1)$$

其中 Y_{it} 是响应变量， X_{it} 是解释变量， $|\rho| < 1$ 是空间自回归系数， W_{ij} 是已知的空间权重矩阵， $\eta(\cdot) = (\eta_1(\cdot), \eta_2(\cdot), \dots, \eta_q(\cdot))^T$ 是 q 维未知连接函数， $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)^T$ 是 $p \times 1$ 维未知参数， ξ_i 是不可观测的固定效应， e_{it} 是随机误差项，且满足 $E(e_{it} | X_{it}, Z_{it}) = 0$ ， $Var(e_{it}) = \sigma^2$ 。

在统计模型中附加约束条件，使得模型参数和变量之间的关系更加明确，从而有效提高模型的适用性和可靠性。如罗国旺等^[48]结合 sieve 两阶段最小二乘和拉格朗日乘子法，并证明了约束估计量的渐近性质；Li 等^[49]提出了两部迁移学习方法和基于交叉验证的可迁移源检验算法，并通过线性约束提高模型的估计性能；Zhang 等^[50]研究了在附加约束条件下部分线性变系数 EV 模型，基于修正的 profile 最小二乘法，构造了修正拉格朗日乘子检验统计量，并证明了该统计量服从卡方分布。因此，将参数部分的约束条件考虑到模型(3.1)中

$$H\theta = d, \quad (3.2)$$

其中 H 是已知的 $k \times p$ 约束矩阵， d 是已知的 $k \times 1$ 约束向量。在此基础上，本

章考虑带固定效应部分线性空间自回归面板数据模型的约束估计问题, 结合 B 样条函数与最小二乘方法, 讨论基于约束估计量的渐近性质。最后通过数值模拟, 对比分析了在不同样本容量以及空间自回归系数下, 参数与非参数部分的偏差和均方误差。

3.2 最小二乘虚拟变量法

首先使用 B 样条基函数逼近模型(3.1)中的未知函数 $\eta(\cdot)$ I_n , 表示阶数为 l , 内结点数为 k 的 B 样条基函数, 其中 $m=1+l+k$, $u = Z_{it}$ 。则

$$\eta(u) = \sum_{j=1}^{1+l+k} B_j(u) \alpha_j = B^T(u) \alpha, \quad (3.3)$$

其中 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)^T$ 为样条基函数向量, 则模型(3.1)近似为

$$Y_{it} = \rho \sum_{i \neq j} W_{ij} Y_{jt} + X_{it}^T \beta + B^T(Z_{it}) \alpha + \xi_i + e_{it}, \quad (3.4)$$

模型(3.4)中综合考虑了个体间的空间内生性、相关性和固定效应等多重因素, 增强了模型估计的实用性。然而, 这也相应地增加了构建有效估计方法的复杂性。对于空间内生性问题, 即在某个特定区域的响应变量 Y_{it} 会依赖于周边区域的响应变量 Y_{jt} , 若忽视其相关性, 将导致估计偏差。此外, 当固定时期数 T 时, 参数 ξ_i 将会干扰模型的估计, 从而导致无法获得其它参数的一致估计量。类似于 Lee 等^[27], 根据最小二乘虚拟变量法消除个体效应。 $H_T = I_n - i_T i_T^T / n$, 其中 i_T 表示元素为 1 的 T 维向量, 表示 n 阶单位矩阵。并且记 $[E_{T,T-1}, 1/\sqrt{T} i_T]$ 为 H_T 的标准正交特征向量矩阵, 其中 $E_{T,T-1}$ 是特征值为 1 的 $T \times (T-1)$ 子矩阵, 则经过简单计算可得

$$Y_{it}^* = \rho W Y_{it}^* + X_{it}^{*T} \beta + B^{*T}(Z_{it}) \alpha + e_{it}^*, \quad (3.5)$$

将上式按时间堆砌, 上式可改写为

$$Y^* = \rho(W \otimes I_{T-1}) Y^* + X^* \beta + B^*(Z) \alpha + e^*, \quad (3.6)$$

其中, 定义变换后的矩阵 $Y^* = (Y_{i1}^{*T}, \dots, Y_{iT-1}^{*T})^T = (E_{T,T-1}^T \otimes I_1)(Y_{i1}^T, \dots, Y_{iT}^T)^T$,

$\mathbb{W} = W \otimes I_{T-1}$ ，由于

$$\begin{aligned}
 & E[(e_{i1}^{*\tau}, \dots, e_{iT-1}^{*\tau})(e_{i1}^{*\tau}, \dots, e_{iT-1}^{*\tau})^\tau] \\
 &= E(e^* e^{*\tau}) \\
 &= E[(E_{T,T-1}^\tau \otimes I_i)(e_{i1}^\tau, \dots, e_{iT}^\tau)^\tau (e_{i1}^\tau, \dots, e_{iT}^\tau)(E_{T,T-1} \otimes I_i)] \\
 &= \sigma_0^2 (E_{T,T-1}^\tau \otimes I_i)(E_{T,T-1} \otimes I_i) \\
 &= \sigma_0^2 I_{i(T-1)},
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

因此，由上式可知 e_{iT}^* 中所有元素式不相关的。

记 $B = B^*(Z)\alpha$ ， $P_B = B(B^\tau B)^{-1}B^\tau$ ，则将(3.6)式左乘 $(I - P_B)$ 得

$$\begin{aligned}
 (I - P_B)Y^* &= (I - P_B)(\rho \mathbb{W}Y^* + X^*\beta) + (I - P_B)B + (I - P_B)e^* \\
 &= (I - P_B)(\rho \mathbb{W}Y^* + X^*\beta) + (I - P_B)e^*.
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

记 $M = (\mathbb{W}Y^*, X^*)$ ， $\theta = (\rho, \beta^\tau)^\tau$ ， $\tilde{Y} = (I - P_B)Y^*$ ， $\tilde{M} = (I - P_B)M$ ， $\tilde{e} = (I - P_B)e^*$ ，

则上式改写为

$$\tilde{Y} = \tilde{M}\theta + \tilde{e}, \tag{3.9}$$

定义 $\tilde{M}$ 如下式

$$\tilde{M} = SV + U, \tag{3.10}$$

其中 V 是系数向量， U 是误差项。通过最小二乘方法得系数向量 V 的估计

$\hat{V} = (S^\tau S)^{-1}S^\tau M$ ，将其代入(3.10)式可得

$$\tilde{M} = S\hat{V} = S(S^\tau S)^{-1}S^\tau M, \tag{3.11}$$

再将 $\tilde{M}$ 代入(3.9)式中得

$$\begin{aligned}
 \hat{\theta} &= (\tilde{M}^\tau \tilde{M})^{-1} \tilde{M}^\tau \tilde{Y} \\
 &= (\tilde{M}^\tau S(S^\tau S)^{-1}S^\tau \tilde{M})^{-1} \tilde{M}^\tau S(S^\tau S)^{-1}S^\tau \tilde{Y} \\
 &= (\tilde{M}^\tau P_S \tilde{M})^{-1} \tilde{M}^\tau P_S \tilde{Y},
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

其中 S 是 M 的工具变量矩阵，考虑 M 的内生性问题，通过最佳工具变量矩阵与

最小二乘结合得 $S = (\mathbb{W}(I - \rho)^{-1}(X^* \ddot{\beta} + B^* \ddot{\alpha}), X^*)$, $\ddot{\theta} = (\ddot{\rho}, \ddot{\beta})^\tau$ 。

基于(3.2)式约束条件, 构造如下辅助函数

$$G(\theta, \lambda) = \|P_s(\tilde{Y} - \tilde{M}\theta)\|^2 + 2\lambda^\tau(H\theta - d), \quad (3.13)$$

对 $G(\theta, \lambda)$ 关于 θ, λ 求偏导可得

$$\begin{cases} \frac{\partial G(\theta, \lambda)}{\partial \theta} = -2\tilde{M}^\tau P_s(\tilde{Y} - P_s \tilde{M}\theta) + 2H^\tau \lambda, \\ \frac{\partial G(\theta, \lambda)}{\partial \lambda} = H\theta - d, \end{cases} \quad (3.14)$$

令上式偏导为零, 即 $\frac{\partial G(\theta, \lambda)}{\partial \theta} = 0, \frac{\partial G(\theta, \lambda)}{\partial \lambda} = 0$, 因此可得出关于 θ 和 λ 的解分别为

$$\begin{cases} \hat{\theta}_H = \hat{\theta} - (\tilde{M}^\tau P_s \tilde{M})^{-1} H^\tau \hat{\lambda}, \\ \hat{\lambda} = (H(\tilde{M}^\tau P_s \tilde{M})^{-1} H^\tau)^{-1} (H\hat{\theta} - d), \end{cases} \quad (3.15)$$

其中 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无约束估计量, 对应的未知函数 $\eta(u)$ 的约束估计为 $\hat{\eta}_H(u) = B^\tau(u)\hat{\alpha}_H$,

其中 $\hat{\alpha}_H = (B^\tau B)^{-1} B(Y - M\hat{\theta}_H)$ 。定义 σ^2 约束估计为

$$\hat{\sigma}^2 = n^{-1} \|Y^* - \hat{\rho}_H \mathbb{W}Y^* - X^* \hat{\beta}_H - B^*(Z)\hat{\alpha}_H\|^2. \quad (3.16)$$

3.3 渐近结果

为了获得约束估计量的渐近性质, 给出如下正则假设条件:

(A1) 序列 $\{e_{it}\}_{i=1}^n$ 是独立同分布的, 且满足对于任意 $\gamma > 2$, $E|(e_{it} | X_{it}, Z_{it})|^{\gamma+2} < \infty$ 。

(A2) 对于参数 β 在其真值 β_0 的领域内满足 $|x_{it}^\tau \beta| \leq C$, 其中 C 表示正常数。

(A3) 矩阵 $\mathbb{W}$, $(I - \rho \mathbb{W})^{-1}$ 的行和列和是一致有界的。

(A4) 对于矩阵 $\Upsilon = \mathbb{W}(I - \rho \mathbb{W})^{-1}$, 存在一常数 λ_Υ , 使得对于所有的 n , $\lambda_\Upsilon I - \Upsilon \Upsilon^\tau$ 都是正半定矩阵。

(A5) u_i 的密度函数 $f(\cdot) > 0$, 并且在 u_0 领域内满足一阶 Lipschitz 连续条件的; 同时, u_i 在 U 上有一正的有界密度函数 $f(U)$, 其中 $U = \{u = z_i, z_i \in \mathbb{R}^q\}$; $f(U)$ 在 z_i

处具有二阶可微性，并且在 $\mathbb{R}^q$ 上一致有界远离零。

(A6) 定义 $\bar{M} = (\mathbb{W}(I - \rho\mathbb{W})^{-1}(X^*\beta + M), X^*)$ ，以及 $N^\tau = \bar{M}^\tau(I - P_B)P_S(I - P_B)$ ， $Q^\tau = \bar{M}^\tau(I - P_B)P_S$ ，则当 $n \rightarrow \infty$ 时，存在正定矩阵 Ω 和 Ξ 使得 $n^{-1}N^\tau N \xrightarrow{P} \Omega$ ， $n^{-1}Q^\tau Q \xrightarrow{P} \Xi$ 。存在常数 λ_{γ^*} ，使得对所有的 n ， $\lambda_{\gamma^*}I - \bar{M}\bar{M}^\tau$ 都是正半定矩阵。

定理 3.1 当假设条件(A1)-(A6)成立时， $\hat{\theta}$ 和 $\hat{\theta}_H$ 是 θ 的相合估计，则当 $n \rightarrow \infty$ 时，

$$\begin{aligned}\hat{\theta} &\rightarrow \theta, & a.s., \\ \hat{\theta}_H &\rightarrow \theta, & a.s.\end{aligned}$$

定理 3.2 当假设条件(A1)-(A6)成立时，则 $\hat{\theta}_H$ 满足渐近正态性质，即

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_H - \theta) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2 \Sigma_1 \Phi^{-1} \Sigma_1^{-1}),$$

其中 $\Sigma_1 = I - \Phi^{-1}H^\tau(H\Phi^{-1}H^\tau)^{-1}H$ ， $\Phi = n^{-1}\tilde{M}^\tau P_S \tilde{M}$ ，“ $\xrightarrow{D}$ ”表示依分布收敛。

定理 3.3 当假设条件(A1)-(A6)成立，有

$$\|\hat{\eta}_{HK}(Z) - \eta_K(Z)\|^2 = o_p(1),$$

其中 $\hat{\eta}_{HK}(u) = B^\tau(u)\hat{\alpha}_{HK}$ 是 $\hat{\eta}_H(u)$ 得第 K 个分量， $\|\eta_K(u)\| = \left| \int \eta_K^2(u) du \right|^{1/2}$ 。

定理 3.4 当假设条件(A1)-(A6)成立时，有 $\hat{\sigma} \xrightarrow{P} \sigma$ 。

3.4 数值模拟

本节利用数值模拟来评估所提方法在有限样本条件下的表现，采用样本偏差 Bias 和均方误差 MSE 作为评价标准。

$$MSE = n^{-1} \sum_{i=1}^n (\hat{\theta}_i - \theta_0)^2,$$

其中 $\hat{\theta}_i (i=1, 2, \dots, n)$ 是每次模拟的估计值， θ_0 是对应的真实值。模拟中的数据由如下模型生成：

$$Y_{it} = \rho \sum_{i \neq j} W_{ij} Y_{jt} + X_{it,1} \beta_1 + X_{it,2} \beta_2 + \sin(2\pi Z_{it}) + \xi_i + e_{it}, \quad i=1, 2, \dots, n; \quad t=1, 2, \dots, T,$$

其中 $(\beta_1, \beta_2)^\tau = (1, 2)^\tau$ ， $X_{it,1} \sim U(0, 1)$ ， $X_{it,2} \sim N(0, 1)$ ， $Z_{it} \sim U(0, 1)$ ， $\xi_i = 0.5\bar{Z}_i + \nu_i$ ，

$\nu_i \sim N(0, 0.1)$ ， $\bar{Z}_i = T^{-1} \sum_{t=1}^T Z_{it}$ ，随机误差 $e_{it} \sim N(0, 1)$ ，空间自回归系数 $\rho = 0.5$ ，

选取 Epanechnikov 核 $K(u) = 3/4(1-u^2)I\{|u| \leq 1\}$ ，其中带宽 h 是通过交叉验证方法选择的。根据空间近邻法构造本文空间权重矩阵 W_n ，假设存在 R 个不同区域，每个区域内包含 m 个成员，在同一区域的成员作为相邻点，且对于同一区域内的成员具有相同的权重， $W_n = I_R \otimes B_m$ ，其中 $B_m = (E_m E_m^T - I_m) / (m-1)$ ， E_m 是 m 阶元素均为 1 的矩阵， I_R 是 R 阶单位矩阵， $\otimes$ 是 Kronecher 内积。考虑约束条件 $H\beta = d$ ，其中 $H = (0.5, 1)$ ， $d = 2.5$ 。数值模拟过程中，设定样本容量 (n, T) 为 $(50, 4)$ 和 $(100, 4)$ ，并每种样本容量下进行 500 次重复模拟，模拟结果如表 3-1 和表 3-2 所示。表 3-1 是空间自回归系数 $\rho = 0.5$ ，空间权重的阈值 $m = 10$ ，参数部分估计结果的偏差和均方误差。表 3-2 是非参数部分估计结果的均方误差。

表 3-1 参数部分估计结果的偏差和均方误差

(n, T)	参数	$\hat{\theta}$		$\hat{\theta}_H$	
		Bias	MSE	Bias	MSE
(50, 4)	ρ	0.0648	0.0067	0.0512	0.0048
	β_1	0.0343	9.9962e-04	0.0316	9.4671e-04
	β_2	0.0519	0.0027	0.0506	0.0026
(100, 4)	ρ	0.0449	0.0037	0.03295	0.0028
	β_1	0.0285	8.1406e-04	0.0273	7.4432e-04
	β_2	0.0509	0.0026	0.0491	0.0024

表 3-2 非参数部分估计结果的均方误差

(n, T)	非参数	$\hat{\eta}(u)$		$\hat{\eta}_H(u)$	
		$\rho = 0.5$	$\rho = 0.8$	$\rho = 0.5$	$\rho = 0.8$
(50, 4)	$\eta_1(u)$	0.0649	0.0671	0.0632	0.0630
	$\eta_2(u)$	0.0652	0.0693	0.0648	0.0679
(100, 4)	$\eta_1(u)$	0.0348	0.0354	0.0346	0.0352
	$\eta_2(u)$	0.0359	0.0363	0.0348	0.0359

由表 3-1 和表 3-2 可知，估计的偏差和均方误差都随着样本数量的增大而减小，但约束估计量 $\hat{\theta}_H$ 比无约束估计量 $\hat{\theta}$ 具有较小的偏差和均方误差，说明估计方

法的相合性。当空间权重阈值 m 固定时，空间自回归系数分别取 $\rho = 0.5$ 和 $\rho = 0.8$ ，非参数约束估计量 $\hat{\eta}_H(u)$ 比无约束估计量 $\hat{\eta}(u)$ 同样具有较小的均方误差。总体来说，在每种情况下，得出约束估计量的样本性质表现良好。

3.5 主要结果的证明

在对定理证明之前，先给出证明中所需的一些引理。

引理 3.1 在假设条件(A1)-(A5)成立下，其中 $P_{B1} = (I - P_B)^\tau (I - P_B)$ ，则

$$\begin{aligned} n^{-1/2} \tilde{M}^\tau P_S \tilde{\eta} &= o_p(1), \\ n^{-1/2} \tilde{M}^\tau P_S P_B e^* &= o_p(1), \\ n^{-1/2} \tilde{M}^\tau P_S e^* &= \Sigma_2 + o_p(1). \end{aligned}$$

证明

$$\begin{aligned} n^{-1/2} \tilde{M}^\tau P_S \tilde{\eta} &= n^{-1/2} \tilde{M}^\tau (I - \tilde{S}(\tilde{S}^\tau \tilde{S})^{-1} \tilde{S}^\tau)(I - P_B) \eta \\ &= n^{-1/2} M^\tau P_{B1} \eta - n^{-1/2} M^\tau P_{B1} S(S^\tau P_{B1} S)^{-1} S^\tau P_{B1} \eta \\ &= n^{-1/2} M^\tau P_{B1} \eta - n^{-1/2} M^\tau P_{B1} S(S^\tau S)^{-1} S^\tau P_{B1} \eta + o_p(1) \\ &\triangleq \Gamma_1 + \Gamma_2, \end{aligned}$$

根据 Su 等^[30]引理 4.5 可得 $\Gamma_1 = \Gamma_2 = o_p(1)$ ，因此上式 $n^{-1/2} \tilde{M}^\tau P_S \tilde{\eta} = o_p(1)$ 。

$$\begin{aligned} n^{-1/2} \tilde{M}^\tau P_S e^* &= n^{-1/2} \tilde{M}^\tau (I - \tilde{S}(\tilde{S}^\tau \tilde{S})^{-1} \tilde{S}^\tau) e^* \\ &= n^{-1/2} [(I - P_B) M]^\tau e^* \\ &\quad - n^{-1/2} [(I - P_B) M]^\tau [S^\tau (I - P_B)^\tau (I - P_B) S]^{-1} S^\tau (I - P_B)^\tau e^* \\ &= n^{-1/2} M^\tau (I - P_B)^\tau e^* - n^{-1/2} M^\tau (I - P_B)^\tau (S^\tau P_{B1} S)^{-1} S^\tau (I - P_B)^\tau e^* \\ &\triangleq \Sigma_2 + o_p(1), \end{aligned}$$

其中 $\Sigma_2 = n^{-1/2} M^\tau (I - P_B)^\tau e^*$ ，同理可得 $n^{-1/2} \tilde{M}^\tau P_S P_B e^* = o_p(1)$ ，证毕。

引理 3.2 在假设条件(A1)-(A5)成立下，则

$$n^{-1} \tilde{M}^\tau P_S \tilde{M} \xrightarrow{P} \Xi,$$

其中 $\Lambda_{11} = n^{-1} M^\tau P_{B1} M$ ， $\Lambda_{12} = n^{-1} M^\tau (I - P_B)^\tau S(S^\tau S)^{-1} S^\tau (I - P_B) M$ ， $\Xi = \Lambda_{11} - \Lambda_{12}$ ，

$$P_{B1} = (I - P_B)^\tau (I - P_B)。$$

证明 根据引理 3.1 可知

$$\begin{aligned}
 n^{-1}\tilde{M}^{\tau}P_S\tilde{M} &= n^{-1}\tilde{M}^{\tau}(I - \tilde{S}(\tilde{S}^{\tau}\tilde{S})^{-1}\tilde{S}^{\tau})\tilde{M} \\
 &= n^{-1}\{[(I - P_B)M]^{\tau}[(I - P_B)M] - [(I - P_B)M]^{\tau}(I - P_B)S \\
 &\quad [S^{\tau}(I - P_B)^{\tau}(I - P_B)S]^{-1}S^{\tau}(I - P_B)^{\tau}(I - P_B)M\} \\
 &= n^{-1}\{M^{\tau}P_{B1}M - M^{\tau}P_{B1}S(S^{\tau}P_{B1}S)^{-1}S^{\tau}P_{B1}M\} \\
 &= n^{-1}M^{\tau}P_{B1}M - [n^{-1}M^{\tau}(I - P_B)^{\tau}S(S^{\tau}S)^{-1}S^{\tau}(I - P_B)M \\
 &\quad - n^{-1}M^{\tau}(I - P_B)^{\tau}S(S^{\tau}S)^{-1}S^{\tau}P_B^{\tau}(I - P_B)M \\
 &\quad - n^{-1}M^{\tau}(I - P_B)^{\tau}P_BS(S^{\tau}S)^{-1}S^{\tau}(I - P_B)M \\
 &\quad + n^{-1}M^{\tau}(I - P_B)^{\tau}P_BS(S^{\tau}S)^{-1}S^{\tau}P_B^{\tau}(I - P_B)M] \\
 &\triangleq \Lambda_{11} - \Lambda_{12} + \Lambda_{13} + \Lambda_{14} - \Lambda_{15},
 \end{aligned}$$

根据 Hu^[29]引理 4.3 可知, $\Lambda_{13} \xrightarrow{P} o_p(1)$, 同理可得, Λ_{14} 和 Λ_{15} 均依概率收敛到

$o_p(1)$ 。则上式 $n^{-1}\tilde{M}^{\tau}P_S\tilde{M} \xrightarrow{P} \Lambda_{11} - \Lambda_{12} \triangleq \Xi$, 证毕。

引理 3.3 在假设条件(A1)-(A5)成立下, 有

$$\hat{\theta} - \theta \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2 \Sigma),$$

其中 $\Sigma = \Xi^{-1}\Omega\Xi^{-1}$, Ω 为正定矩阵。

证明 由(3.12)式可得

$$\begin{aligned}
 \hat{\theta} - \theta &= (\tilde{M}^{\tau}P_S\tilde{M})^{-1}\tilde{M}^{\tau}P_S\tilde{Y} - \theta \\
 &= (\tilde{M}^{\tau}P_S\tilde{M})^{-1}\tilde{M}^{\tau}P_S(I - P_B)Y^* - \theta \\
 &= (\tilde{M}^{\tau}P_S\tilde{M})^{-1}\tilde{M}^{\tau}P_S(I - P_B)(M\theta + B^*(Z)\alpha + e^*) - \theta \\
 &= (\tilde{M}^{\tau}P_S\tilde{M})^{-1}\tilde{M}^{\tau}P_S(\tilde{\eta} + \tilde{e}^*) \\
 &= (\tilde{M}^{\tau}P_S\tilde{M})^{-1}(\tilde{M}^{\tau}P_S\tilde{\eta} + \tilde{M}^{\tau}P_S\tilde{e}^*) \\
 &= (n^{-1}\tilde{M}^{\tau}P_S\tilde{M})^{-1}n^{-1/2}\tilde{M}^{\tau}P_S\tilde{\eta} + (n^{-1}\tilde{M}^{\tau}P_S\tilde{M})^{-1}n^{-1/2}\tilde{M}^{\tau}P_S\tilde{e}^* \\
 &= (n^{-1}\tilde{M}^{\tau}P_S\tilde{M})^{-1}n^{-1/2}\tilde{M}^{\tau}P_S\tilde{\eta} + (n^{-1}\tilde{M}^{\tau}P_S\tilde{M})^{-1}n^{-1/2}\tilde{M}^{\tau}P_Se^* \\
 &\quad - (n^{-1}\tilde{M}^{\tau}P_S\tilde{M})^{-1}n^{-1/2}\tilde{M}^{\tau}P_SP_Be^*,
 \end{aligned}$$

根据上述引理 3.1, 引理 3.2 和引理 3.3 得

$$\hat{\theta} - \theta \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2 \Sigma),$$

证毕。

定理 3.1 的证明

由 (A6) 可知 $\bar{M} = (\mathbb{W}(I - \rho\mathbb{W})^{-1}(X^*\beta + M), X^*)$, 记 $\bar{e}^* = (\mathbb{W}(I - \rho\mathbb{W})^{-1}e^*, 0)$

$M = \bar{M} + \bar{e}^*$, 则

$$\begin{aligned}
 \tilde{M}^\tau P_S \tilde{M} &= [(I - P_B)M]^\tau P_S [(I - P_B)M] \\
 &= M^\tau (I - P_B) P_S (I - P_B) M \\
 &= (\bar{M} + \bar{e}^*)^\tau (I - P_B) P_S (I - P_B) (\bar{M} + \bar{e}^*) \\
 &= \bar{M}^\tau (I - P_B) P_S (I - P_B) \bar{M} + \bar{M}^\tau (I - P_B) P_S (I - P_B) \bar{e}^* \\
 &\quad + \bar{e}^{*\tau} (I - P_B) P_S (I - P_B) \bar{M} + \bar{e}^{*\tau} (I - P_B) P_S (I - P_B) \bar{e}^* \\
 &= \bar{M}^\tau (I - P_B) P_S (I - P_B) \bar{M} + L_{11} + L_{12} + L_{13},
 \end{aligned}$$

其中 $L_{11} = \bar{M}^\tau (I - P_B) P_S (I - P_B) \bar{e}^*$, $L_{12} = \bar{e}^{*\tau} (I - P_B) P_S (I - P_B) \bar{M}$, $L_{13} = \bar{e}^{*\tau} (I - P_B) P_S (I - P_B) \bar{e}^*$, 则根据(A4)可知

$$\begin{aligned}
 &E(\|\bar{M}^\tau (I - P_B) P_S (I - P_B) \bar{e}^*\|^2) \\
 &= E[e^{*\tau} \Upsilon^\tau (I - P_B) P_S (I - P_B) \bar{M} \bar{M}^\tau (I - P_B) P_S (I - P_B) \Upsilon e^*] \\
 &= \sigma^2 E[\text{tr}(\Upsilon^\tau (I - P_B) P_S (I - P_B) \bar{M} \bar{M}^\tau (I - P_B) P_S (I - P_B) \Upsilon)] \\
 &\leq \lambda_\Upsilon \lambda_{\Upsilon^*} \sigma^2 E[\text{tr}((I - P_B) P_S (I - P_B))] \\
 &= O(1),
 \end{aligned}$$

故 $L_{11} = O_p(1)$, 类似于 L_{11} 的证明, 可得 $L_{12} = O_p(1)$ 。又因为

$$\begin{aligned}
 &E(e^{*\tau} \Upsilon^\tau (I - P_B) P_S (I - P_B) \Upsilon e^*) \\
 &= E[\text{tr}(e^{*\tau} \Upsilon^\tau (I - P_B) P_S (I - P_B) \Upsilon e^*)] \\
 &= \sigma^2 E[\text{tr}(\Upsilon^\tau (I - P_B) P_S (I - P_B) \Upsilon)] \\
 &\leq \lambda_\Upsilon \sigma^2 E[\text{tr}((I - P_B) P_S (I - P_B))] \\
 &= O(1),
 \end{aligned}$$

故 $L_{13} = O_p(1)$, 结合上式可得 $\tilde{M}^\tau P_S \tilde{M} = \bar{M}^\tau (I - P_B) P_S (I - P_B) \bar{M} + O_p(1) \rightarrow n\Xi$ a.s.

同理可得 $\tilde{M}^\tau P_S \tilde{Y} \rightarrow n\Xi\theta$ a.s. 由(3.12)可知 $\hat{\theta} = (\tilde{M}^\tau P_S \tilde{M})^{-1} \tilde{M}^\tau P_S \tilde{Y} \rightarrow \theta$ a.s. 则

$$H\hat{\theta} = d \rightarrow H\theta = d \text{ a.s.}$$

再结合(3.15)可得

$$\begin{aligned}
 \hat{\theta}_H &= \hat{\theta} - (\tilde{M}^\tau P_S \tilde{M})^{-1} H^\tau \hat{\lambda} \\
 &= \hat{\theta} - (\tilde{M}^\tau P_S \tilde{M})^{-1} H^\tau (H(\tilde{M}^\tau P_S \tilde{M})^{-1} H^\tau)^{-1} (H\hat{\theta} - d) \\
 &\rightarrow \theta - (n\Xi)^{-1} H^\tau (H(n\Xi)^{-1} H^\tau)^{-1} (H\theta - d) \text{ a.s.} \\
 &= \theta,
 \end{aligned}$$

证毕。

定理 3.2 的证明

结合(3.12)式和(3.15)式，可得

$$\begin{aligned}
 \hat{\theta}_H - \theta &= \hat{\theta} - (\tilde{M}^\tau P_S \tilde{M})^{-1} H^\tau \hat{\lambda} - \theta \\
 &= \hat{\theta} - (\tilde{M}^\tau P_S \tilde{M})^{-1} H^\tau (H(\tilde{M}^\tau P_S \tilde{M})^{-1} H^\tau)^{-1} (H\hat{\theta} - d) - \theta \\
 &= \hat{\theta} - (n^{-1} \tilde{M}^\tau P_S \tilde{M})^{-1} H^\tau (H(n^{-1} \tilde{M}^\tau P_S \tilde{M})^{-1} H^\tau)^{-1} H(\hat{\theta} - \theta) - \theta \\
 &= [I - \Phi^{-1} H^\tau (H\Phi^{-1} H^\tau)^{-1} H](\hat{\theta} - \theta),
 \end{aligned}$$

记 $\Psi = I - \Phi^{-1} H^\tau (H\Phi^{-1} H^\tau)^{-1} H$ ，由引理 3.3 可得

$$\begin{aligned}
 \Psi &= I - \Phi^{-1} H^\tau (H\Phi^{-1} H^\tau)^{-1} H \\
 &= I - [n^{-1}(\Lambda_{11} - \Lambda_{12})]^{-1} H^\tau [H[n^{-1}(\Lambda_{11} - \Lambda_{12})]^{-1} H^\tau]^{-1} H,
 \end{aligned}$$

由于 $\Psi \xrightarrow{P} [n^{-1}(\Lambda_{11} - \Lambda_{12})]^{-1} H^\tau [H[n^{-1}(\Lambda_{11} - \Lambda_{12})]^{-1} H^\tau]^{-1} H \triangleq \Psi_1$ ，根据 Slutsky 引理和中心极限定理可得

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_H - \theta) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2 \Psi_1 \Xi^{-1} \Omega \Xi^{-1} \Psi_1^\tau),$$

证毕。

定理 3.2 的证明

由上文可知 $\hat{\alpha}_H = (B^\tau B)^{-1} B(Y - M\hat{\theta}_H)$ ，则

$$\begin{aligned}
 \hat{\alpha}_{HK} - \alpha_K &= (B^\tau B)^{-1} B^\tau (Y - M\hat{\theta}_H) - \alpha_K \\
 &= (B^\tau B)^{-1} B^\tau (M\theta + \eta + e + F\xi - M\hat{\theta}_H) - \alpha_K \\
 &= (B^\tau B)^{-1} B^\tau (M\theta + \eta - B\alpha_K + B\alpha_K + e + F\xi - M\hat{\theta}_H) - \alpha_K \\
 &= (B^\tau B)^{-1} B^\tau (M\theta + R + B\alpha_K + e + F\xi - M\hat{\theta}_H) - \alpha_K \\
 &= (B^\tau B)^{-1} B^\tau M(\theta - \hat{\theta}_H) + (B^\tau B)^{-1} B^\tau R + (B^\tau B)^{-1} B^\tau e + (B^\tau B)^{-1} B^\tau F\xi \\
 &\triangleq \Lambda_{21} + \Lambda_{22} + \Lambda_{23} + \Lambda_{24},
 \end{aligned}$$

经过简单计算可得

$$\begin{aligned}
 & (\theta - \hat{\theta}_H)^\tau M^\tau M (\theta - \hat{\theta}_H) \\
 &= (\theta - \hat{\theta}_H)^\tau (\mathbb{W}Y^*, X^*)^\tau (\mathbb{W}Y^*, X^*) (\theta - \hat{\theta}_H) \\
 &= (\theta - \hat{\theta}_H)^\tau \begin{pmatrix} Y^{*\tau} \mathbb{W}^\tau \mathbb{W} Y^* & Y^{*\tau} \mathbb{W}^\tau X^* \\ X^{*\tau} \mathbb{W} Y^* & X^{*\tau} X^* \end{pmatrix} (\theta - \hat{\theta}_H) \\
 &= (\theta - \hat{\theta}_H)^\tau \begin{pmatrix} (X^* \beta + B^*(Z) \alpha + e^*)^\tau \Upsilon^\tau \Upsilon (X^* \beta + B^*(Z) \alpha + e^*) & (X^* \beta + B^*(Z) \alpha + e^*)^\tau \Upsilon^\tau X^* \\ X^{*\tau} \Upsilon (X^* \beta + B^*(Z) \alpha + e^*) & X^{*\tau} X^* \end{pmatrix} \\
 & \quad (\theta - \hat{\theta}_H) \\
 &= (\theta - \hat{\theta}_H)^\tau \begin{pmatrix} (X^* \beta + B^*(Z) \alpha)^\tau \Upsilon^\tau \Upsilon (X^* \beta + B^*(Z) \alpha) & (X^* \beta + B^*(Z) \alpha)^\tau \Upsilon^\tau X^* \\ X^{*\tau} \Upsilon (X^* \beta + B^*(Z) \alpha) & X^{*\tau} X^* \end{pmatrix} \\
 & \quad (\theta - \hat{\theta}_H) + (\theta - \hat{\theta}_H)^\tau \begin{pmatrix} e^{*\tau} \Upsilon^\tau \Upsilon e^* & e^{*\tau} \Upsilon^\tau X^* \\ X^{*\tau} \Upsilon e^* & 0 \end{pmatrix} (\theta - \hat{\theta}_H) + o_p(1),
 \end{aligned}$$

因此，由上式可证得

$$E(\|\Lambda_{21}\|^2) = E[(\theta - \hat{\theta}_H)^\tau M^\tau B(B^\tau B)^{-1} (B^\tau B)^{-1} B^\tau M (\theta - \hat{\theta}_H)] = O_p(n^{-1}),$$

故有 $\Lambda_{21} = O_p(n^{-1/2})$ 。根据 Kim^[51]引理 A.4 可知 $Kn^{-1}B^\tau B$ 得特征值依概率有界，

$$E(\|\Lambda_{22}\|^2) = E[R^\tau B(B^\tau B)^{-1} (B^\tau B)^{-1} B^\tau R (\theta - \hat{\theta}_H)] = O(K^{-2r+1}), \text{ 故有 } \Lambda_{22} = O(K^{(-2r+1)/2}).$$

对于 Λ_{23} ,

$$\begin{aligned}
 E(\|\Lambda_{23}\|^2) &= E[e^\tau B(B^\tau B)^{-1} (B^\tau B)^{-1} B^\tau e] \\
 &\leq \frac{K}{n^2} E[\text{trace}(e^\tau B B^\tau e)] \\
 &\leq \frac{K}{n} E[\text{trace}[(B^\tau B)^{-\frac{1}{2}} B^\tau e e^\tau B (B^\tau B)^{-\frac{1}{2}}]] \\
 &= \sigma^2 \frac{K}{n} E[\text{trace}[(B^\tau B)^{-\frac{1}{2}} B^\tau B (B^\tau B)^{-\frac{1}{2}}]] \\
 &= \sigma^2 \frac{K^2}{n},
 \end{aligned}$$

故有 $\|\Lambda_{23}\| = o_p(Kn^{-1/2}) = o_p(1)$ ，类似于 Λ_{23} ，同理可得 $\|\Lambda_{24}\| = o_p(1)$ 。根据 B 样条

性质可得， $B_j(u) \geq 0$ ， $\sum_j B_j(u) = 1$ ，其中 $u \in [0, 1]$ 。存在正常数 a_1 和 a_2 使得

$$\frac{a_1}{K} \sum_{j=1}^K k_j^2 \leq \int_0^1 (\sum_{j=1}^K k_j B_j(u))^2 du \leq \frac{a_2}{K} \sum_{j=1}^K k_j^2,$$

则结合上式可得

$$\begin{aligned}
 \|\hat{\eta}_{HK}(u) - \eta_K(u)\|^2 &= \int_0^1 [\hat{\eta}_{HK}(u) - \eta_K(u)]^2 du \\
 &= \int_0^1 [B^\tau(u) \hat{\alpha}_{HK} - B^\tau(u) \alpha_K]^2 du \\
 &\leq 2 \int_0^1 [B^\tau(u) (\hat{\alpha}_{HK} - \alpha_K)]^2 du \\
 &\leq 2 \frac{a}{K} \|\hat{\alpha}_{HK} - \alpha_K\|^2 \\
 &= o_p(1),
 \end{aligned}$$

证毕。

定理 3.4 的证明

由(3.6)式可得

$$\begin{aligned}
 \hat{\sigma}^2 &= n^{-1} \|Y^* - \hat{\rho}_H \mathbb{W}Y^* - X^* \hat{\beta}_H - B^*(Z) \hat{\alpha}_H\|^2 \\
 &= n^{-1} \|\rho \mathbb{W}Y^* + X^* \beta + B^*(Z) \alpha + e^* - \hat{\rho}_H \mathbb{W}Y^* - X^* \hat{\beta}_H - B^*(Z) \hat{\alpha}_H\|^2 \\
 &= n^{-1} \|M(\theta - \hat{\theta}_H) + B^*(Z)(\alpha - \hat{\alpha}_H) + e^*\|^2,
 \end{aligned}$$

记 $Q = M(\theta - \hat{\theta}_H) + B^*(Z)(\alpha - \hat{\alpha}_H) + e^*$ ，则经过简单计算可得

$$\|Q\|^2 \leq 3\|e^*\|^2 + (\theta - \hat{\theta}_H)^\tau M^\tau M(\theta - \hat{\theta}_H) + 3(\alpha - \hat{\alpha}_H)^\tau B^{*\tau}(Z) B^*(Z)(\alpha - \hat{\alpha}_H),$$

又由定理 3.3 可知 $(\theta - \hat{\theta}_H)^\tau M^\tau M(\theta - \hat{\theta}_H) = o_p(1)$ ，根据 Du^[23]定理 3 可得 $\hat{\sigma} \xrightarrow{P} \sigma$ ，

证毕。

3.6 本章小结

本章主要研究了在约束条件下带固定效应部分线性空间自回归面板数据模型的统计推断问题，利用最小二乘虚拟变量法消除个体效应，并结合 B 样条基函数和最小二乘法得到 θ 与 $\eta(u)$ 的约束估计量 $\hat{\theta}_H$ 和 $\hat{\eta}_H(u)$ 。在适当的正则条件下，验证了所提约束估计量的渐近正态性。最后通过数值模拟，考虑在不同样本容量和空间自回归系数下，通过比较 $\hat{\theta}_H$ 、 $\hat{\theta}$ 、 $\hat{\eta}_H(u)$ 和 $\hat{\eta}(u)$ 的偏差与均方误差，得到所提约束估计量优于无约束估计量。

第 4 章 具有测量误差的部分线性单指标空间自回归模型的统计推断

本章主要研究具有协变量测量误差的部分线性单指标空间自回归模型。首先引入了一种基于局部线性方法的校正剖面极大似然方法，给出了未知参数和连接函数的估计量。在适当正则条件下，得到了所提出的估计量的渐近分布。最后通过 Monte Carlo 模拟和真实的数据示例验证所提出的方法在有限样本中表现良好。

4.1 模型框架

考虑解释变量具有测量误差的部分线性单指标空间自回归模型：

$$\begin{cases} Y_i = \rho \sum_{j \neq i} w_{ij} Y_j + X_i^\tau \beta + g(Z_i^\tau \alpha) + e_i, & i = 1, \dots, n, \\ U_i = X_i + \xi_i, \end{cases} \quad (4.1)$$

其中 Y_i 是响应变量， Z_i 是 $q \times 1$ 维协变量向量， w_{ij} 是已知的空间权重， $g(\cdot)$ 是未知连接函数， $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)^\tau$ 和 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q)^\tau$ 分别是 $p \times 1$ 和 $q \times 1$ 维未知参数。 e_i 是独立同分布的，满足 $E(e_i | X_i, Z_i) = 0$ ， $Var(e_i | X_i, Z_i) = \sigma^2$ ， X_i 和 U_i 是 $p \times 1$ 维协变量向量， U_i 是可观测的，并且 ξ_i 是测量误差。 $E(\xi_i | X_i) = 0$ ， $Var(\xi_i | X_i) = \Sigma$ ， Σ 表示测量误差的协方差矩阵。考虑模型的可识别性，现规定 $\|\alpha\| = 1$ ，并且 α_0 的第一个非零分量为正数。其中 $\|\cdot\|$ 是常规的欧式范数。 $|\rho| < 1$ 是空间自回归系数，当 $\rho = 0$ 时，该模型简化为部分线性单指标模型，Carroll 等^[52]、Zhu 和 Xue^[53]、Huang 等^[54]以及 Yu^[55]等研究了该模型。

本章在 Cheng 和 Chen^[56]的部分线性单指标空间自回归模型的结果推广到具有测量误差的适合研究空间数据的部分线性单指标空间自回归模型模型。模型 (4.1) 结合了单指标 SAR 模型和变系数模型的特点，具有更强的可解释性和更广泛的应用前景。对于相同的真实空间数据，我们考虑测量误差的模型比 Cheng 和 Chen^[56]更准确地拟合。该模型通过对估计方程、局部线性估计法和修正剖面最大

似然估计法的整合来驱动, 利用Nakamura^[37]提出的校正似然估计方法, 讨论了校正似然估计量的渐近性质。在此基础上, 提出了一种基于最大似然估计方法的修正剖面最小二乘估计, 用于构造未知参数和连接函数的估计量。在渐近性质和有限样本模拟方面给出良好的结果。

4.2 校正剖面极大似然法

给出以下向量和矩阵的符号, 设 $Y = (Y_1^\tau, \dots, Y_n^\tau)^\tau$, $X = (X_1^\tau, \dots, X_n^\tau)^\tau$, $Z = (Z_1^\tau, \dots, Z_n^\tau)^\tau$, $e = (e_1^\tau, \dots, e_n^\tau)^\tau$ 为向量。将模型(4.1)重新表述为矩阵形式得

$$Y = \rho WY + X\beta + g(Z\alpha) + e. \quad (4.2)$$

记 $S_n(\rho) = I_n - \rho W_n$, 并且假设 $S_n(\rho)$ 是非奇异的。根据 Nakamura^[37]提出的校正似然估计方法, 我们采用衰减校正方法来减轻由测量误差引起的偏差。于是可以得到解释变量具有测量误差的部分线性单指标 SAR 模型的校正似然函数为

$$\begin{aligned} \ln L_n(\Theta) = & -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 + \ln |S_n(\rho)| - \frac{1}{2\sigma^2} \{ (S_n(\rho)Y_n - U\beta - g(z^\tau \alpha))^\tau \\ & (S_n(\rho)Y_n - U\beta - g(z^\tau \alpha)) - n\beta^\tau \Sigma \beta \}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

其中 $\ln L_n(\Theta) = l^*(\rho, \beta, U, Y)$, $\Theta = (\beta^\tau, \lambda^\tau, \sigma^2)^\tau$, $\lambda_0 = (\alpha_0^\tau, \rho_0)^\tau$, $\Theta_0 = (\beta_0^\tau, \lambda_0^\tau, \sigma_0^2)^\tau$ 是参数向量的真值。表达式(4.3)中的最后一项 $-n\beta^\tau \Sigma \beta$ 是一个负项, 其目的是减轻测量误差带来的影响。

对于模型(4.1), 首要目标是估计未知参数 $\Theta = (\beta^\tau, \lambda^\tau, \sigma^2)^\tau$ 和非参数部分连接函数 $g(\cdot)$ 。由假设条件可知, $g(\cdot)$ 具有二阶可微性, 对于 v 领域内任意 v_i , 利用局部线性回归方法估计 $g(\cdot)$ 得

$$g(v_i) \approx g(v) + g'(v)(v_i - v) \triangleq a + b(v_i - v), \quad (4.4)$$

其中 $g'(v)$ 是 $g(v)$ 的一阶导数, $v_i = z_i^\tau \alpha$, 则通过极小化下式可以得到连接函数的估计

$$\sum_{i=1}^n \left[Y_i - \rho \sum_{j=1}^n W_{ij} Y_j - \sum_{m=1}^p U_{im} \beta_m - a - b(v_i - v) \right]^2 K_h(v_i - v), \quad (4.5)$$

其中 $K_h(\cdot) = K(\cdot/h)/h$, $K_h(\cdot)$ 是核函数, h 是带宽, 经过简单计算可得

$$\begin{pmatrix} \hat{g}(v) \\ h\hat{g}'(v) \end{pmatrix} = (Q_v^T K_v Q_v)^{-1} Q_v^T K_v (Y_n - \rho W_n Y_n - U\beta), \quad (4.6)$$

其中

$$Q_v = \begin{pmatrix} 1 & \frac{v_1 - v}{h} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{v_n - v}{h} \end{pmatrix}, \quad K_v = \begin{pmatrix} K_h(v_1 - v) & & \\ & \ddots & \\ & & K_h(v_n - v) \end{pmatrix}, \quad \text{则通过下式来估计 } g(v)$$

$$\hat{g}(v) = (1, 0) (Q_v^T K_v Q_v)^{-1} Q_v^T K_v (Y - \rho W_n Y - U\beta), \quad (4.7)$$

记 $a_n(v_i) = (1, 0) (Q_v^T K_v Q_v)^{-1} Q_v^T K_v$, 则

$$\hat{g}(v) = (\hat{g}(v_1), \hat{g}(v_2), \dots, \hat{g}(v_n)) = A_n(S_n(\rho)Y - U\beta), \quad (4.8)$$

其中 $A_n = (a_n^T(v_1), a_n^T(v_2), \dots, a_n^T(v_n))^T$ 。

对(4.3)式校正似然函数关于 β , σ^2 求偏导可得:

$$\frac{\partial \ln L_n(\Theta)}{\partial \beta} = -\frac{1}{2\sigma^2} \{2[S_n(\rho)Y - U\beta - \hat{g}(v)](-U) - 2n\Sigma\beta\}, \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L_n(\Theta)}{\partial \sigma^2} &= -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{(2\sigma^2)^2} \{[S_n(\rho)Y - U\beta - \hat{g}(v)]^T \\ &\quad \cdot [S_n(\rho)Y - U\beta - \hat{g}(v)] - n\beta^T \Sigma \beta\}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

对于给定 $\lambda = (\alpha^T, \rho)^T$, 令上式偏导为零, 即 $\frac{\partial \ln L_n(\Theta)}{\partial \beta} = 0, \frac{\partial \ln L_n(\Theta)}{\partial \sigma^2} = 0$, 因此

可得出关于 β 和 σ^2 的校正似然估计分别为

$$\hat{\beta}_{(1)} = (U^T P_n U - n\Sigma)^{-1} U^T P_n S(\rho)Y, \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{(1)}^2 &= \frac{1}{n} \left\{ [S(\rho)Y - U\hat{\beta} - \hat{g}(v)]^T [S(\rho)Y - U\hat{\beta} - \hat{g}(v)] - n\hat{\beta}_{(1)}^T \Sigma \hat{\beta}_{(1)} \right\} \\ &= \frac{1}{n} (S(\rho)Y)^T (I_n - A_n)^T M_n (I_n - A_n) S(\rho)Y, \end{aligned} \quad (4.12)$$

其中 $P_n = (I_n - A_n)^\tau (I_n - A_n)$, $M_n = F_u - n(I_n - A_n)U(U^\tau P_n U - n\Sigma)^{-1}\Sigma(U^\tau P_n U - n\Sigma)^{-1}(I_n - A_n)^\tau$, $F_u = I_n - (I_n - A_n)U(U^\tau P_n U - n\Sigma)^{-1}U^\tau(I_n - A_n)^\tau$ 。因此, 由上式可得出关于 $\hat{\lambda}$ 的集中似然函数为

$$\ln L_n(\hat{\lambda}) = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln \hat{\sigma}^2 - \frac{n}{2} + \ln |S_n(\rho)|. \quad (4.13)$$

通过最大化(4.13)得 λ 的校正剖面极大似然估计为 $\hat{\lambda} = \arg \max_{\lambda} \ln L_n(\hat{\lambda})$ 。因此, 得到最终估计

$$\hat{\beta} = (U^\tau P_n U - n\Sigma)^{-1} U^\tau P_n S(\hat{\rho}) Y, \quad (4.14)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} (S(\hat{\rho}) Y)^\tau (I_n - A_n)^\tau M_n (I_n - A_n) S(\hat{\rho}) Y. \quad (4.15)$$

为了研究校正似然估计的渐近性质, 则模型(4.1)可改写为

$$\begin{aligned} Y &= \rho W_n Y + X \beta + g(Z\alpha) + e_n \\ &= \rho W_n Y + (U - \xi_n) \beta + g(Z\alpha) + e_n \\ &= \rho W_n Y + U \beta + g(Z\alpha) + e_n - \xi_n \beta, \end{aligned} \quad (4.16)$$

记 $e_{n(u)} = e_n - \xi_n \beta$, 模型(4.16)进一步简化为

$$Y = \rho W_n Y + U \beta + g(Z\alpha) + e_{n(u)}, \quad (4.17)$$

显然, (4.17)式变为

$$Y = S_n^{-1}(\rho_0)(U \beta_0 + g(Z\alpha_0) + e_{n(u)}), \quad (4.18)$$

其中 $g(Z\alpha_0) = (g(Z_1^\tau \alpha_0), g(Z_2^\tau \alpha_0), g(Z_n^\tau \alpha_0))^\tau$, $S_n^{-1}(\rho_0) = I_n + \rho_0 R_n$, $R_n = W_n S_n^{-1}(\rho_0)$,

$S_n(\rho_0)$ 是非奇异的。类似于 Su and Jin^[16], 由(4.17)和(4.18)可得 Y 的简化形式为

$$Y = U \beta_0 + g(Z\alpha_0) + \rho_0 R_n (U \beta_0 + g(Z\alpha_0)) + S_n^{-1}(\rho_0) e_{n(u)}. \quad (4.19)$$

定义 $Q_n(\lambda) = \max_{\beta, \sigma^2} E(\ln L_n(\Theta))$, 极大化问题的最优解为

$$\beta^* = (U^\tau P_n U - n\Sigma)^{-1} U^\tau P_n S_n(\rho) S_n^{-1}(\rho_0) (U \beta_0 + g(Z\alpha_0)), \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \sigma^{*2} &= \frac{1}{n} E \left\{ \left[(I_n - A_n) (S_n(\rho) Y - U \beta^*) \right]^\tau \times \left[(I_n - A_n) (S_n(\rho) Y - U \beta^*) \right] - n \beta^{*\tau} \Sigma \beta^* \right\} \\ &= \frac{1}{n} \left[g(Z\alpha_0) + (\rho_0 - \rho) [R_n (U \beta_0 + g(Z\alpha_0))] \right]^\tau (I_n - A_n)^\tau M_n (I_n - A_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot [g(Z\alpha_0) + (\rho_0 - \rho)[R_n(U\beta_0 + g(Z\alpha_0))]] \\ & + \frac{\sigma_0^2}{n} \text{tr} \left\{ \left[(I_n - A_n)S_n(\rho)S_n^{-1}(\rho_0) \right]^\tau M_n \left[(I_n - A_n)S_n(\rho)S_n^{-1}(\rho_0) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.21)$$

因此, 可得到

$$Q_n(\lambda) = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln \sigma^{*2} - \frac{n}{2} + \ln |S_n(\rho)|. \quad (4.22)$$

为确保模型的可识别性和符号表述的简洁性, 假设 Σ 已知, 但在实际问题中, Σ 往往是未知的。根据 Liang^[57]等通过重复观测法, 即多次测量同一变量, 利用测量结果来估计测量误差的方差, 然后根据上述估计方法进一步对参数进行估计。假设 U 被重复观测了 s_i 次, 为了简便起见, 我们只考虑 $s_i \leq 2$ 的情况。则 $U_{ij} = X_i + \xi_{ij}$, $j = 1, \dots, s_i$, 设 $\bar{U}_i = s_i^{-1} \sum_{j=1}^{s_i} U_{ij}$ 为重复观测的样本均值。因此, Σ 的无偏矩估计量为

$$\hat{\Sigma} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{s_i} (U_{ij} - \bar{U}_i)^\tau (U_{ij} - \bar{U}_i)}{\sum_{i=1}^n (s_i - 1)}. \quad (4.23)$$

估计 Θ 和 $g(\cdot)$ 的具体算法如下

第一步, 给定初始值 $\lambda_0 = (\alpha_0^\tau, \rho_0)^\tau$ 和 $\Theta_0 = (\beta_0^\tau, \lambda_0^\tau, \sigma_0^2)^\tau$, 令 $\|\alpha\| = 1$ 且 α_0 的一个非零分量为正数。

第二步, 进行重复观测并应用(4.23)式计算 Σ 的无偏矩估计量。

第三步, 对于给定的 Θ , 通过最小化(4.5)式, 可以由(4.6)式估计出 $g(\cdot)$ 和 $g'(\cdot)$ 。

第四步, 通过最大化(4.3)式来更新 β 和 σ^2 , 从而得到 $\hat{\beta}_{(1)}$ 和 $\hat{\sigma}_{(1)}^2$ 。

第五步, 通过最大化(4.13)式来更新 λ 以得到 $\hat{\lambda}$ 。

第六步, 给定第四步的最终估计 $\hat{\lambda}$, σ^2 和 β 的最终估计分别为 $\hat{\sigma}^2$ 和 $\hat{\beta}$ 。 $g(v)$ 的最终估计为 $\hat{g}(v) = \hat{g}(v; \hat{\beta}, \hat{\lambda}, \hat{\sigma}^2)$ 。

4.3 渐近结果

为了证明修正似然估计的渐近性质, 我们给出了下列基本正则条件。

(A1) $\{e_i\}_{i=1}^n$ 和 $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ 是相互独立同分布的，且对任意的 $\gamma > 2$ 满足 $E(|e_i|^{\gamma+2} | X_i, Z_i) < \infty$, $E(|\xi_i|^{\gamma+2} | X_i) < \infty$ 。

(A2) $Z_i^\tau \alpha$ 的密度函数为 $f(\cdot)$ ，其中 $f(\cdot) > 0$ ，在 $Z_i^\tau \alpha_0$ 邻域内满足一阶 Lipschitz 连续。同时， $Z_i^\tau \alpha$ 在 T 上有一正的有界密度函数 $f(T)$ ，其中 $T = \{t = Z_i^\tau \alpha, Z_i \in \mathbb{R}^q\}$ 。 $f(T)$ 在 $Z_i^\tau \alpha_0$ 处具有二阶可微性，并且在 $\mathbb{R}^q$ 上一致有界远离零。

(A3) 对于参数 β 在其真值 β_0 的邻域内满足 $|x_i^\tau \beta| \leq C$ ，其中 C 表示正常数。

(A4) 矩阵 W_n 和 $S_n^{-1}(\rho_0)$ 的行和列和是一致有界的。

(A5) 矩阵 $S_n^{-1}(\rho)$ 行和列和均表现出一致有界性，这一特性在紧凸参数空间 Δ 内的所有 ρ 值上均保持一致。另外，参数的真实值 ρ_0 为 Δ 中的一个内点。

(A6) 对于空间权重矩阵 W_n 的元素 $W_{n,ij}$ 是非随机的， $W_{n,ii} = 0$ ，对任意的 $i, j = 1, 2, \dots, n$ ，都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n / n = 0$ 。

(A7) $\lim_{n \rightarrow \infty} [(I_n - A_n)U, -(I_n - A_n)\dot{g}_d(Z\alpha_0)U]^\tau [(I_n - A_n)U, -(I_n - A_n)\dot{g}_d(Z\alpha_0)U] / n$ 存在且是非奇异的，这是 Θ_0 全局可识别的条件，其中 $\dot{g}_d(Z\alpha_0) = \text{diag}\{\dot{g}(Z\alpha_0)\}$ ， $A_n = (a_n^\tau(v_1), a_n^\tau(v_2), \dots, a_n^\tau(v_n))^\tau$ 。

(A8) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} [n^{-1} \text{tr}(R_n^2) + n^{-1} \text{tr}(R_n^\tau P_0 R_n) - n^{-2} \text{tr}^2(R_n^\tau P_0)]$ 存在且是非奇异的。

(A9) 若 $n \rightarrow \infty$ ， $h \rightarrow 0$ ，带宽 h 满足 $nh \rightarrow \infty$ 。

注 4.3.1 假设条件(A1)-(A3)是关于误差项、未知函数和自变量的常用条件；假设(A1)排除了异方差性；假设(A2)是局部多项式估计中的标准。假设(A3)是关于线性部分的假设；假设(A4)-(A6)是空间权重矩阵的基本特征，可以在 Lee^[5]中找到。假设(A7-A8)是估计量相合性和渐近正态性的必要条件；假设(A9)关于带宽序列，是非参数模型中的常见假设。

定理 4.1 假设条件(A1)-(A9)成立， Θ_0 是全局可识别的，并且 $\hat{\Theta}_n$ 是 Θ_0 的一致估计量。

定理 4.2 假设条件(A1)-(A9)成立, 有

$$\sqrt{n}(\hat{\Theta}_n - \Theta_0) \xrightarrow{D} N(0, \Sigma_{\Theta}^{-1}),$$

其中 $\Sigma_{\Theta} = -\lim_{n \rightarrow \infty} E\left(\frac{1}{n} \frac{\partial^2 \ln l_n(\Theta)}{\partial \Theta \partial \Theta'}\right)$, $\xrightarrow{D}$ 表示依分布收敛。

定理 4.3 假设条件(A1)-(A9)成立, 有 $\hat{g}(v) \xrightarrow{P} \hat{g}(v_0)$ 。

4.4 数值模拟

在本节中, 通过数值模拟来评估所提方法在有限样本下的性能, 采用样本偏差 Bias 和均方误差 MSE 作为评价标准。

$$Bias = |\hat{\theta}_i - \theta_0|, \quad MSE = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t (\hat{\theta}_i - \theta_0)^2,$$

其中 t 为模拟次数, $\hat{\theta}_i (i=1, 2, \dots, t)$ 是每次模拟的估计值, θ_0 是对应的真实值。

DGP1: 模拟中的数据由如下模型生成:

$$\begin{cases} Y_i = \rho \sum_{j \neq i} w_{ij} Y_j + \beta X_i + \exp(\alpha Z_i) / (1 + \exp(\alpha Z_i)) + e_i, \\ U_i = X_i + \xi_i, \end{cases}$$

其中 $\beta=1$, $\alpha=1/\sqrt{3}$, $e_i \sim N(0, I_n)$, Z_i 各变量由 48 个在区间 $[-0.25, 0.25]$ 内随机分布的独立随机变量之和构成。由中心极限定理可知, Z_i 可以近似为在截断区间 $[-12, 12]$ 内正态分布的随机变量。根据 $X_i = 0.2Z_i^2 - Z_i + V_i$ 生成 X_i , 其中 V_i 独立同分布, 与 Z_i 生成方式相同。为了研究测量误差对估计结果的影响, 考虑两种具体情况: $\xi_i \sim N(0, 0.2^2)$ 和 $\xi_i \sim N(0, 0.4^2)$ 。为了比较不同空间相关性的影响, 我们考虑 SAR 系数 $\rho=0.25$ 和 $\rho=0.75$, 其中 $\rho=0.75$ 表示较强的空间依赖性。我们

选择核函数 $K(u) = \frac{3}{4} \sqrt{5} (1 - \frac{1}{5} u^2) I\{u^2 \leq 5\}$, 并通过交叉验证方法选择带宽 h 。根据

空间最近邻法构造空间权重矩阵 W_n , 设有 n 个区域, 每个区域有 m 成员, 同一区域与相邻点的权重相同 $W_n = I_n \otimes B_m$ 。其中 $B_m = (E_m E_m^T - I_m) / (m-1)$, E_m 为 $n \times 1$ 的

单位向量, I_n 为 $n \times n$ 单位矩阵, $\otimes$ 为 Kronecher 内积。在模拟过程中, 样本量 n 分别取 100 和 300。对于每个样本量, 模拟重复 500 次。我们对比并分析了忽略测量误差的直接估计方法与校正后的估计方法, 相应的估计结果如表 4-1 和表 4-2 所示。

表 4-1 忽略测量误差时 $\Sigma^2 = 0.2^2$ 和 $\Sigma^2 = 0.4^2$ 的估计结果的偏差和均方误差

ρ	n	参数	$\Sigma^2 = 0.2^2$		$\Sigma^2 = 0.4^2$	
			Bias	MSE	Bias	MSE
0.25	100	ρ	0.1075	0.0190	0.1167	0.0206
		β	0.0849	0.0117	0.0979	0.0159
		α	0.0936	0.0128	0.0994	0.0165
		σ^2	0.1126	0.0276	0.1305	0.0290
	300	ρ	0.0585	0.0054	0.0635	0.0067
		β	0.0475	0.0035	0.0531	0.0046
		α	0.0564	0.0051	0.0621	0.0062
		σ^2	0.0713	0.0121	0.0808	0.0179
0.75	100	ρ	0.0421	0.0033	0.0424	0.0035
		β	0.0888	0.0124	0.1019	0.0175
		α	0.0984	0.0134	0.1023	0.0176
		σ^2	0.1127	0.0277	0.1413	0.0297
	300	ρ	0.0223	0.0008	0.0225	0.0009
		β	0.0504	0.0040	0.0573	0.0050
		α	0.0573	0.0052	0.0634	0.0065
		σ^2	0.0710	0.0119	0.0811	0.0182

表 4-2 考虑测量误差时 $\Sigma^2 = 0.2^2$ 和 $\Sigma^2 = 0.4^2$ 的估计结果的偏差和均方误差

ρ	n	参数	$\Sigma^2 = 0.2^2$		$\Sigma^2 = 0.4^2$	
			Bias	MSE	Bias	MSE
0.25	100	ρ	0.1071	0.0187	0.1128	0.0192
		β	0.0837	0.0114	0.0937	0.0142

续表 4-2 考虑测量误差时 $\Sigma^2 = 0.2^2$ 和 $\Sigma^2 = 0.4^2$ 的估计结果的偏差和均方误差

ρ	n	参数	$\Sigma^2 = 0.2^2$		$\Sigma^2 = 0.4^2$	
			Bias	MSE	Bias	MSE
0.25	100	α	0.0914	0.0119	0.0972	0.0153
		σ^2	0.1094	0.0223	0.1273	0.0255
	300	ρ	0.0583	0.0053	0.0618	0.0064
		β	0.0471	0.0031	0.0516	0.0039
		α	0.0531	0.0048	0.0594	0.0056
		σ^2	0.0709	0.0103	0.0782	0.0165
0.75	100	ρ	0.0418	0.0031	0.0420	0.0032
		β	0.0874	0.0121	0.0984	0.0163
		α	0.0928	0.0127	0.1007	0.0169
		σ^2	0.1065	0.0217	0.1372	0.0281
	300	ρ	0.0215	0.0006	0.0218	0.0008
		β	0.0468	0.0037	0.0539	0.0042
		α	0.0516	0.0049	0.0574	0.0054
		σ^2	0.0694	0.0112	0.0780	0.0152

由表 4-1 和表 4-2 可知，表 4-2 中估计量的偏差（Bias）和均方误差（MSE）均小于表 4-1 中对应结果，验证了所提方法是有效的。忽略测量误差将导致统计推断不准确，因此，在 SAR 模型中考虑测量误差是至关重要的。

为了提升模型的普适性，我们增加了参数向量的维度，对应的测量误差协方差矩阵的维度也进行了扩展。

DGP2：模拟实验中的数据是通过以下模型生成的：

$$\begin{cases} Y_i = \rho \sum_{i \neq j} w_{ij} Y_j + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + 2 \sin(Z_{i1}^\tau \alpha_1 + Z_{i2}^\tau \alpha_2) + e_i, \\ U_{i1} = X_{i1} + \xi_{i1}, \\ U_{i2} = X_{i2} + \xi_{i2}, \end{cases}$$

其中 $(\beta_1, \beta_2)^\tau = (1, 2)^\tau$ ， $(\alpha_1, \alpha_2) = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{2})$ ， $X_{i1} \sim U(0, 1)$ ， $X_{i2} \sim N(0, 1)$ ， Z_{i1} 和 Z_{i2} 均匀分布为 $U(-3, 3)$ 。SAR 系数 $\rho = 0.5$ ， $e_i \sim N(0, \sigma^2)$ ， ξ_{i1} 和 $\xi_{i2} \sim N(0, \Sigma)$ 。

考虑以下两种情况：当测量误差方差 Σ 已知时，具体为 $\Sigma = 0.5 \otimes I_n$ ；当 Σ 未知时，

通过上述重复观测的方法来估计 Σ 。选择核函数 $K(u) = 3/4(1-u^2)I\{|u| \leq 1\}$ ，通过交叉验证方法选择带宽 h 。空间权重矩阵 W_n 的构建与 DGP1 中的构建方式相同。在模拟过程中，样本量 n 分别取 100 和 300。对于每个样本量，模拟重复 500 次，模拟结果如表 4-3 至表 4-7 所示。表 4-3 给出了在忽略测量误差的情况下，当 SAR 系数 $\rho = 0.25, 0.5, 0.75$ ，空间权重阈值 $m = 10$ 时，误差方差分为 $\sigma^2 = 1$ 和 $\sigma^2 = 1.4^2$ 时参数估计的偏差和均方误差；表 4-4 则给出了考虑测量误差时参数估计的偏差和均方误差。表 4-5 给出了在忽略测量误差的情况下，SAR 系数 $\rho = 0.5$ ， $\sigma^2 = 1$ 时，空间权重阈值 $m = 10$ 和 $m = 20$ 时参数估计的偏差和均方误差；表 4-6 则考虑测量误差时参数估计的偏差和均方误差。表 4-7 给出了在 SAR 系数 $\rho = 0.5$ ，误差方差 $\sigma^2 = 1$ ， $m = 10$ ， $s_i = 2$ 条件下，随机模拟进行 500 次，对比测量误差方差 $\Sigma = 0.5 \otimes I_n$ 和未知时的情况。

表 4-3 忽略测量误差时 $\sigma^2 = 1$ 和 $\sigma^2 = 1.4^2$ 的估计结果的偏差和均方误差

ρ	n	参数	$\sigma^2 = 1^2$		$\sigma^2 = 1.4^2$	
			Bias	MSE	Bias	MSE
0.25	100	ρ	0.0897	0.0133	0.0990	0.0166
		β_1	0.1175	0.0216	0.1404	0.0329
		β_2	0.1460	0.0356	0.1774	0.0493
		α_1	0.0723	0.0131	0.0846	0.0151
		α_2	0.0879	0.0153	0.0914	0.0157
		σ^2	0.1740	0.0831	0.2825	0.0937
	300	ρ	0.0494	0.0038	0.0588	0.0057
		β_1	0.0621	0.0065	0.0801	0.0103
		β_2	0.0736	0.0087	0.0898	0.0132
		α_1	0.0438	0.0046	0.0528	0.0059
		α_2	0.0562	0.0058	0.0627	0.0071
		σ^2	0.0937	0.0712	0.1577	0.0855

续表 4-3 忽略测量误差时 $\sigma^2 = 1$ 和 $\sigma^2 = 1.4^2$ 的估计结果的偏差和均方误差

ρ	n	参数	$\sigma^2 = 1^2$		$\sigma^2 = 1.4^2$	
			Bias	MSE	Bias	MSE
0.5	100	ρ	0.0695	0.0091	0.0754	0.0121
		β_1	0.1067	0.0188	0.1444	0.0318
		β_2	0.1380	0.0303	0.1807	0.0558
		α_1	0.0729	0.0131	0.0852	0.0148
		α_2	0.0931	0.0157	0.0986	0.0167
		σ^2	0.1748	0.0836	0.2702	0.0914
	300	ρ	0.0347	0.0020	0.0377	0.0023
		β_1	0.0644	0.0068	0.0822	0.0113
		β_2	0.0765	0.0091	0.0961	0.0149
		α_1	0.0594	0.0064	0.0613	0.0070
		α_2	0.0672	0.0089	0.0673	0.0092
		σ^2	0.1033	0.0725	0.1703	0.0861
0.75	100	ρ	0.0320	0.0020	0.0393	0.0034
		β_1	0.1107	0.0193	0.1380	0.0302
		β_2	0.1415	0.0336	0.1764	0.0527
		α_1	0.0859	0.0143	0.0924	0.0157
		α_2	0.0937	0.0157	0.0986	0.0167
		σ^2	0.1647	0.0872	0.2822	0.0940
	300	ρ	0.0169	0.0005	0.0195	0.0006
		β_1	0.0583	0.0054	0.0963	0.0114
		β_2	0.0715	0.0081	0.0966	0.0151
		α_1	0.0527	0.0059	0.0628	0.0071
		α_2	0.0613	0.0070	0.0684	0.0097
		σ^2	0.1047	0.0731	0.1698	0.0872

表 4-4 考虑测量误差时 $\sigma^2 = 1$ 和 $\sigma^2 = 1.4^2$ 的估计结果的偏差和均方误差

ρ	n	参数	$\sigma^2 = 1^2$		$\sigma^2 = 1.4^2$	
			Bias	MSE	Bias	MSE
0.25	100	ρ	0.0865	0.0130	0.0978	0.0164
		β_1	0.1074	0.0191	0.1292	0.0305
		β_2	0.1089	0.0343	0.1371	0.0428
		α_1	0.0689	0.0127	0.0758	0.0132
		α_2	0.0765	0.0135	0.0894	0.0154
		σ^2	0.1666	0.0801	0.2810	0.0906
	300	ρ	0.0486	0.0037	0.0584	0.0057
		β_1	0.0583	0.0061	0.0748	0.0102
		β_2	0.0594	0.0084	0.0763	0.0128
		α_1	0.0349	0.0038	0.0438	0.0046
		α_2	0.0468	0.0054	0.0547	0.0061
		σ^2	0.0927	0.0697	0.1559	0.0849
0.5	100	ρ	0.0677	0.0089	0.0751	0.0117
		β_1	0.0967	0.0170	0.1344	0.0299
		β_2	0.1093	0.0296	0.1378	0.0554
		α_1	0.0684	0.0126	0.0764	0.0138
		α_2	0.0868	0.0152	0.0913	0.0157
		σ^2	0.1690	0.0876	0.2650	0.0904
	300	ρ	0.0342	0.0020	0.0370	0.0022
		β_1	0.0592	0.0067	0.0779	0.0106
		β_2	0.0607	0.0087	0.0781	0.0135
		α_1	0.0468	0.0047	0.0576	0.0059
		α_2	0.0584	0.0063	0.0648	0.0074
		σ^2	0.0987	0.0682	0.1691	0.0849
0.75	100	ρ	0.0312	0.0019	0.0393	0.0031
		β_1	0.1006	0.0178	0.1294	0.0279

续表 4-4 考虑测量误差时 $\sigma^2 = 1$ 和 $\sigma^2 = 1.4^2$ 的估计结果的偏差和均方误差

ρ	n	参数	$\sigma^2 = 1^2$		$\sigma^2 = 1.4^2$	
			Bias	MSE	Bias	MSE
0.75	100	β_2	0.1061	0.0301	0.1387	0.0516
		α_1	0.0758	0.0132	0.0861	0.0143
		α_2	0.0856	0.0148	0.0947	0.0158
		σ^2	0.1566	0.0833	0.2810	0.0929
	300	ρ	0.0167	0.0005	0.0194	0.0006
		β_1	0.0536	0.0053	0.0741	0.0108
		β_2	0.0552	0.0079	0.0813	0.0140
		α_1	0.0446	0.0043	0.0574	0.0062
		α_2	0.0542	0.0061	0.0637	0.0071
		σ^2	0.0995	0.0699	0.1663	0.0831

表 4-5 忽略测量误差时 $m = 10$ 和 $m = 20$ 的估计结果的偏差和均方误差

n	参数	$m = 10$		$m = 20$	
		Bias	MSE	Bias	MSE
100	ρ	0.0699	0.0087	0.0703	0.0089
	β_1	0.1126	0.0191	0.1169	0.0291
	β_2	0.1393	0.0341	0.1567	0.0424
	α_1	0.0825	0.0147	0.0847	0.0156
	α_2	0.0927	0.0163	0.0948	0.0174
	σ^2	0.1790	0.0982	0.2192	0.0946
300	ρ	0.0331	0.0018	0.0339	0.0019
	β_1	0.0618	0.0063	0.0663	0.0117
	β_2	0.0751	0.0092	0.0823	0.0136
	α_1	0.0587	0.0064	0.0574	0.0068
	α_2	0.0642	0.0064	0.0658	0.0078
	σ^2	0.0967	0.0719	0.1323	0.0736

表 4-6 考虑测量误差时 $m=10$ 和 $m=20$ 的估计结果的偏差和均方误差

n	参数	$m=10$		$m=20$	
		Bias	MSE	Bias	MSE
100	ρ	0.0698	0.0082	0.0701	0.0087
	β_1	0.1011	0.0170	0.1101	0.0248
	β_2	0.1096	0.0297	0.1247	0.0301
	α_1	0.0766	0.0138	0.0812	0.0145
	α_2	0.0871	0.0154	0.0925	0.0162
	σ^2	0.1778	0.0877	0.2162	0.0890
300	ρ	0.0324	0.0017	0.0336	0.0018
	β_1	0.0572	0.0059	0.0625	0.0099
	β_2	0.0613	0.0090	0.0679	0.0122
	α_1	0.0471	0.0048	0.0516	0.0053
	α_2	0.0586	0.0064	0.0641	0.0066
	σ^2	0.0927	0.0687	0.1313	0.0712

表 4-7 Σ 未知和已知时估计结果的偏差和均方误差

n	参数	Σ 未知		Σ 已知	
		Bias	MSE	Bias	MSE
100	ρ	0.0543	0.0057	0.0526	0.0053
	β_1	0.0984	0.0139	0.0947	0.0128
	β_2	0.1095	0.0192	0.1072	0.0179
	α_1	0.0993	0.0144	0.0978	0.0138
	α_2	0.1057	0.0175	0.1034	0.0173
	σ^2	0.2153	0.0743	0.2139	0.0735
300	ρ	0.0407	0.0039	0.0395	0.0037
	β_1	0.0893	0.0124	0.0871	0.0120
	β_2	0.0972	0.0138	0.0950	0.0135
	α_1	0.0979	0.0139	0.0958	0.0136

续表 4-7 Σ 未知和已知时估计结果的偏差和均方误差

n	参数	Σ 未知		Σ 已知	
		Bias	MSE	Bias	MSE
300	α_2	0.1056	0.0175	0.1035	0.0172
	σ^2	0.2014	0.0684	0.1999	0.0655

从表 4-3 和表 4-4 可得，随着样本量 n 的增加，估计偏差 Bias 和 MSE 都减小。此外，当 SAR 系数 ρ 和空间权重阈值 m 一定时，估计量的偏差和均方误差随误差方差 σ^2 的增大而增大。由表 4-5 和表 4-6 可知，当 SAR 系数 ρ 和误差方差 σ^2 一定时，估计量的偏差和均方误差也随 m 的增大而增大，但增大幅度较小。表 4-7 揭示出一致的趋势：无论 Σ 是已知的还是未知的，随着样本量的增加，估计量的 Bias 和 MSE 逐渐减小，这证实了估计方法的一致性。尽管与已知 Σ 相比， Σ 未知时估计性能略有下降，但差异并不显著，这表明在 Σ 不确定的情况下，重复观测的方法是估计参数的一种可行方案。

下面给出在不同 SAR 系数下， $\sigma^2 = 1$ ， $m = 10$ ， $(\alpha_1, \alpha_2) = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{2})$ ，未知连接函数 $2\sin(Z_{i1}^\tau \alpha_1 + Z_{i2}^\tau \alpha_2)$ 的估计性能，并给出了相应的 95% 置信区间。

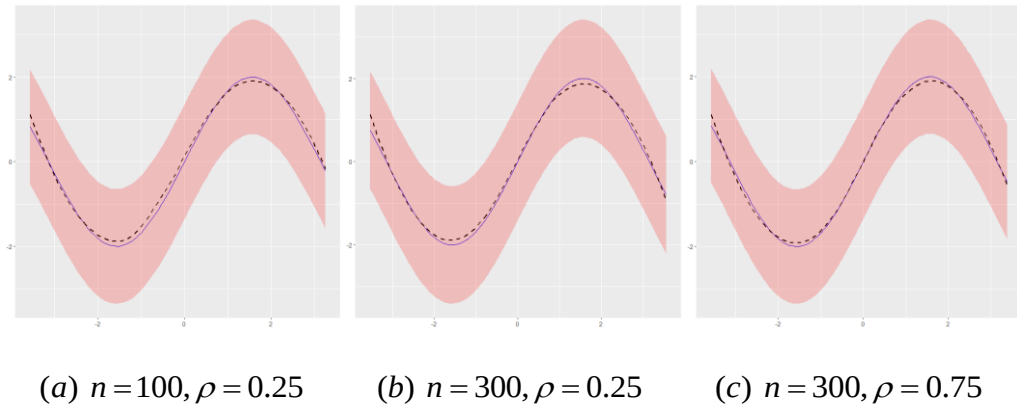
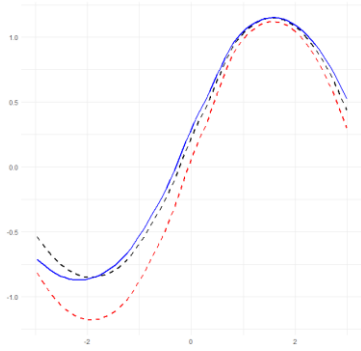


图 4-1 $2\sin(Z_{i1}^\tau \alpha_1 + Z_{i2}^\tau \alpha_2)$ 拟合结果

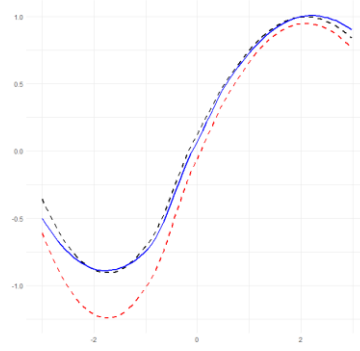
从图 4-1 可以看出，样本量的增加提升了拟合的质量，并且 ρ 对非参数估计的影响较小，从而验证了所采提估计方法的有效性和准确性。

图 4-2 为 SAR 系数 $\rho = 0.5, 0.75$ ，样本量 $n = 100, 300$ 时，未知连接函数 $g(\cdot)$ 的拟合结果。其中蓝线为真实曲线，黑线为校正后的估计曲线，红线为未校正的

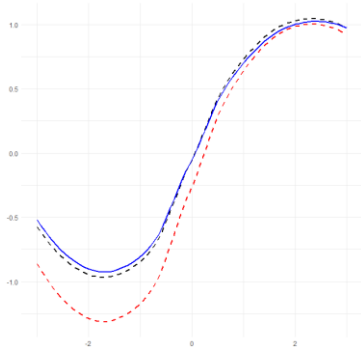
估计曲线。如图 4-2 所示，随着样本量的增加，拟合效果越好。



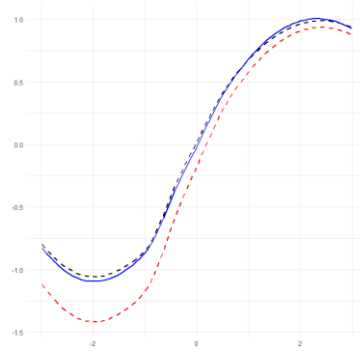
(a) $n=100, \rho=0.5$



(b) $n=100, \rho=0.75$



(c) $n=300, \rho=0.5$



(d) $n=300, \rho=0.75$

图 4-2 $g(\cdot)$ 的拟合结果

为了更深入研究高维数据情形，我们通过构建一个更为复杂的模型来拓展我们的分析。

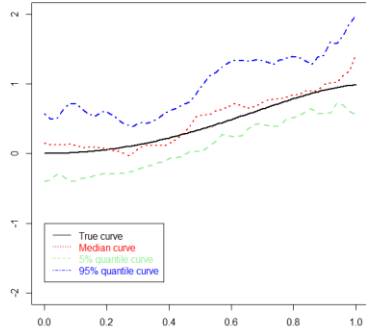
DGP3:高维数据模拟由以下模型生成：

$$\begin{cases} Y_{n,i} = \rho \sum_{i \neq j} w_{n,ij} Y_{n,j} + X_{n,i} \beta + \sin(2\alpha Z_{n,i}) + e_{n,i}, \\ U_{n,i} = X_{n,i} + \xi_{n,i}, \end{cases}$$

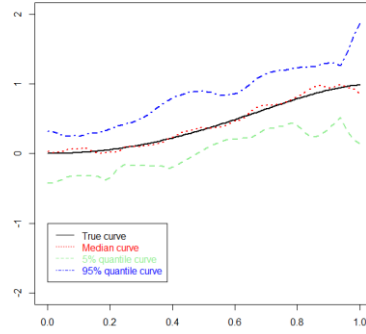
其中 $X_{n,i}$ 是独立同分布的，并且满足 $\text{cor}(x_{n,ij}, x_{n,ik}) = 0.5^{|i-k|}, i < k, k \leq p$ 。 p 维参数 β 的前 20 个非零分量服从(1,5)上的均匀分布， $\rho = 0.5$ ， $Z_{n,i} = (Z_{n,1i}, Z_{n,2i}, \dots, Z_{n,ni})^\top$ ， $Z_{n,i} \sim U(-1,1)$ ， $e_{n,i} \sim N(0,1)$ 。不失一般性，假设 $X_{n,i}$ 前两个分量存在测量误差，

误差协方差矩阵 $\Sigma_{\xi_{n,i}} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.125 \\ 0.125 & 0.25 \end{pmatrix}$ ，并且空间权重矩阵如上所述设定。在数值

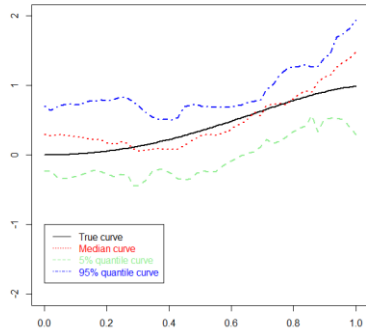
模拟中，设定 $n = 200$ ，参数向量的维数 $p = 400$ ，并重复模拟 200 次。



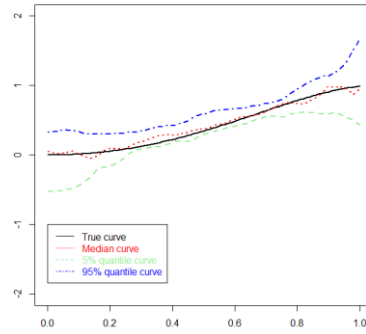
(a) 未校正



(b) 校正



(c) 未校正，偏斜误差



(d) 校正，偏斜误差

图 4-3 $\sin(2\alpha Z_{n,i})$ 的拟合结果

在图 4-3 中，黑色实线表示真是曲线，红色虚线表示中位数曲线，绿色双虚线表示 5%分位数曲线，蓝色点线表示 95%分位数曲线。考虑偏斜误差情形下，图 4-3(c)和(d)的误差项 $e_{n,i}$ 服从偏正态分布，记为 $e_{n,i} \sim SN(0, 0.5, 0.3)$ 。此外，图 4-3 直观表明，经过偏差校正后的估计结果优于未校正的结果。

4.5 实际例子

在本节中为了充分展示模型检验方法在实际数据分析中的实用性，我们将选取波士顿房价数据作为应用案例，以验证所提方法的有效性。该数据集可直接从 R 软件中导出，包含 14 个变量和 506 个观测值。一些统计学者对波士顿的住房数据进行了深入的研究和讨论，如 Wei 等^[58], Du 等^[23], Cheng and Chen^[56]等。

在该模型中，关注了几个关键变量：房价中位数(MEDV)、径向高速公路通行指数(RAD)、城镇师生比(PTRATIO)、人均犯罪率(CRIME)、一氧化氮水平(NOX)、住宅平均房间数(RM)、到波士顿五个职业中心的加权距离(DIS)、每 10000 美元的房地产税率(TAX)和低社会阶层人口比例(LSTAT)。基于 Du 等^[23]的分析，我们同样选择 MEDV 作为响应变量，RAD 和 PTRATIO 对 MEDV 具有线性影响，而 CRIME、NOX、RM、DIS、TAX 和 LSTAT 对 MEDV 具有非线性影响。利用以下模型进行数据拟合：

$$\begin{cases} Y = \rho W_n Y + X_1 \beta_1 + X_2 \beta_2 + g(\sum_{i=1}^6 Z_i \alpha_i) + e, \\ U_j = X_j + \xi_j, \end{cases}$$

其中 Y 表示 MEDV， X_1 和 X_2 表示 RAD 和 PTRATIO， $Z_i (i=1,2,...,6)$ 分别代表 CRIME、NOX、RM、DIS、 $\log(\text{TAX})$ 和 $\log(\text{LSTAT})$ 。在上述模型中，我们假设 X_1 和 X_2 存在测量误差，通过重复观测得到 Σ 的估计值。权重矩阵是通过计算经纬度之间的欧几里得距离生成，令 $W_n = (W_{ij})$ ，其中 $W_{ij} = \max(1 - D_{ij} / D_0, 0)$ ， D_{ij} 为欧几里得距离，阈值距离 D_0 设为 0.05，由此构建的空间权重矩阵 W_n 中，非零元素占比为 19.08%。然后，对该矩阵进行归一化处理，使得每一行的元素之和为 1，从而减轻微小权重对数据分析的潜在影响。

表 4-8 忽略测量误差时未知参数的估计

	ρ	β_1	β_2	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
Mean	0.4974	0.1472	-0.1813	-0.0931	0.1247	0.1842	-0.0157	-0.0349	-0.7938
SD	0.0826	0.0147	0.0394	0.0149	0.0037	0.0191	0.2937	0.0598	0.0381

表 4-9 考虑测量误差时未知参数的估计

	ρ	β_1	β_2	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
Mean	0.3257	0.0635	-0.1714	-0.0564	0.1486	0.1613	-0.0149	-0.0228	-0.7835
SD	0.0753	0.0136	0.0367	0.0138	0.0023	0.0174	0.2748	0.0567	0.0359

响应变量 Y 的均方预测误差(MSPE)定义为 $MSPE(\hat{Y}) = n^{-1} \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - Y_i)^2$ ，其中 Y_i 表示 MEDV 的第 i 个观测值， $\hat{Y}_i$ 表示 Y 的预测值。通过对真实数据的模拟分析，可以得到当考虑测量误差时， $MSPE(\hat{Y}) = 0.9672$ ；而当忽略测量误差时，

$MSPE(\hat{Y}) = 0.9863$ ，这表明所提出的估计方法具有一定的有效性和实用性。通过对比表 4-8 和表 4-9 可以看出，当忽略测量误差时，未知参数估计的相应标准差较大。由表 4-9 可知，SAR 系数 $\hat{\rho} = 0.3257$ ，说明空间相关性与响应变量之间存在一定的关系。RAD 的正回归系数表明该变量对房价有正向影响，即随着住宅离高速公路等便利设施越来越远，房价也会相应上涨。这种现象强调了购房者对交通便利的偏好，因为靠近高速公路通常会改善通勤条件，简化物流，并具有潜在的经济活力。相反，PTRATIO 的负回归系数表明，随着学生与教师比率 (PTRATIO) 的上升，即随着每名教师的学生人数的增加，房价也会下降。PTRATIO 的升高可能表明教师对学生需求的个人关注减少，可能导致教学质量下降，进而影响教育机构的声誉和吸引力。对于重视教育质量的家庭来说，这样的环境可能不符合他们的偏好，从而有助于降低相关地区的房价。这些发现与 Cheng 和 Chen^[56]、Du 等^[23]提出的分析结果一致。

此外，CRIM、DIS、TAX 和 LSTAT 变量的回归系数与房价呈负相关，说明这些因素的增加会导致房价的下降。相反，NOX 和 RM 的回归系数呈正相关，说明这些因素的增加会促进房价的上涨。这些结果都符合这些变量对房价影响的实际逻辑，验证了模型的有效性和现实意义。

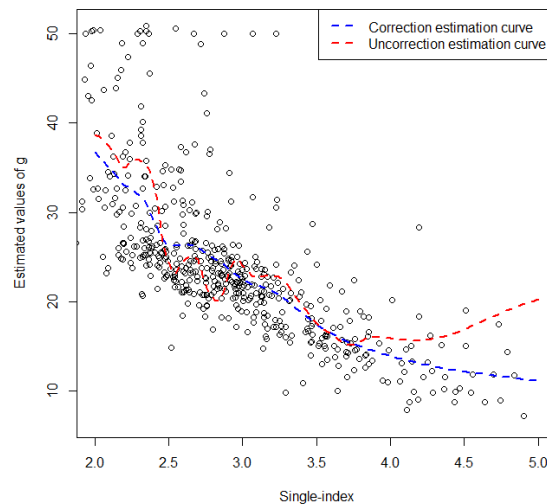


图 4-4 g 的拟合结果

在图 4-4 所示，非参数函数估计曲线清楚地表明，在考虑测量误差的情况下，模型的非参数估计曲线更符合实际数据。这一发现不仅验证了我们的方法的准确性和有效性，而且突出了其在实际应用中的实用价值。

4.6 主要结果的证明

引理 4.1 在假设条件(A1)-(A9)成立下, 记 $M_n^+ = (I_n - A_n)^\tau M_n (I_n - A_n)$, 则当 n 足够大时, M_n 与 M_n^+ 的行和和列和是一致有界的。

证明 类似 Su 和 Jin^[16]引理 5.1 可以得到本引理的证明。

引理 4.2 在假设条件(A1)-(A9)成立下, 有

$$\text{tr}((I_n - A_n)^\tau M_n (I_n - A_n)) = n - np + O(h^{-p}),$$

$$\text{tr}(P_n) / n = 1 + o(1).$$

其中 $P_n = (I_n - A_n)^\tau (I_n - A_n)$ 。

证明 由于 $M_n^+ = (I_n - A_n)^\tau M_n (I_n - A_n)$, 则

$$\text{tr}(M_n^+) = \text{tr}(M_n) + \text{tr}(A_n^\tau A_n) - 2\text{tr}(M_n A_n),$$

易得 $\text{tr}(M_n) = n - np$, 其中 A_n 中的元素是一致 $O(n^{-1}h^{-p})$, 则 $\text{tr}(A_n^\tau A_n) = O(h^{-p})$,

$\text{tr}(M_n A_n) = O(h^{-p})$, 所以 $\text{tr}(M_n^+) = n - np + O(h^{-p})$ 。

引理 4.3 在假设条件(A1)-(A9)成立下, 则

$$H_{1n}(\rho) = \frac{1}{n} [U\beta_0 + g(Z\alpha_0)]^\tau R_n^\tau M_n^+ S_n(\rho) S_n^{-1}(\rho_0) e_{n(u)} = o_p(1),$$

$$H_{2n}(\rho) = \frac{1}{n} [g(Z\alpha_0)]^\tau M_n^+ S_n(\rho) S_n^{-1}(\rho_0) e_{n(u)} = o_p(1),$$

$$H_{3n}(\rho) = \frac{1}{n} [S_n(\rho) S_n^{-1}(\rho_0) e_{n(u)}]^\tau M_n^+ [S_n(\rho) S_n^{-1}(\rho_0) e_{n(u)}] = \sigma^2 + o_p(1),$$

其中 $\sigma^2 = \frac{\sigma_0^2}{n} \text{tr} \left\{ [S_n(\rho) S_n^{-1}(\rho_0)]^\tau M_n^+ [S_n(\rho) S_n^{-1}(\rho_0)] \right\}$ 。

证明 根据引理 5.1 和定理 4.1 可知,

$$S_n(\rho) S_n^{-1}(\rho_0) e_{n(u)} = e_{n(u)} + (\rho_0 - \rho) R_n e_{n(u)},$$

$$H_{1n}(\rho) = \frac{1}{n} (U\beta_0 + g(Z\alpha_0))^\tau R_n^\tau M_n^+ e_{n(u)} + \frac{(\rho_0 - \rho)}{n} (U\beta_0 + g(Z\alpha_0))^\tau R_n^\tau R_n e_{n(u)} = o_p(1),$$

简单计算可得

$$H_{2n}(\rho) = \frac{1}{n} [g(Z\alpha_0)]^\tau M_n^+ S_n(\rho) S_n^{-1}(\rho_0) e_n = o_p(1).$$

由于 $E[H_{3n}(\rho)] = \frac{\sigma_0^2}{n} \text{tr} \left\{ \left[S_n(\rho) S_n^{-1}(\rho_0) \right]^\tau \left[S_n(\rho) S_n^{-1}(\rho_0) \right] \right\}$ ，并且根据参考文献

Mack 和 Silverman^[59]可知， $H_{3n}(\rho) \xrightarrow{P} E[H_{3n}(\rho)]$ 。因此 $H_{3n}(\rho) = \sigma^2 + o_p(1)$ 。

定理 4.1 的证明

根据 Lee^[5]，首先证明 $\hat{\lambda} \xrightarrow{P} \lambda_0$ 。下需证明以下两个条件：

$$(i) \frac{1}{n} (\ln L_n(\lambda) - Q_n(\lambda)) = o_p(1), \quad (4.24)$$

$$(ii) \limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{\lambda \in N_\varepsilon^c(\lambda_0)} \frac{1}{n} (\ln L_n(\lambda) - Q_n(\lambda)) < 0, \text{ 对 } \forall \varepsilon > 0, \quad (4.25)$$

其中 $N_\varepsilon^c(\lambda_0)$ 是 λ 在以 ε 为直径的开邻域的补集。

根据(4.13)和(4.22)可得， $\frac{1}{n} (\ln L_n(\lambda) - Q_n(\lambda)) = \frac{1}{2} (\sigma^{*2} - \hat{\sigma}^2)$ ，为了证明(4.24)，

只需证明

$$\hat{\sigma}^2 - \sigma^{*2} = o_p(1). \quad (4.26)$$

由(4.12)和(4.21)可得，

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{(1)}^2 &= \frac{1}{n} (S_n(\rho) Y_n)^\tau (I_n - A_n)^\tau M_n (I_n - A_n) S_n(\rho) Y_n \\ &= \frac{1}{n} \left\{ (\rho_0 - \rho) [R_n(U\beta_0 + g(Z\alpha_0))] + S_n(\rho) S_n^{-1}(\rho_0) e_{n(u)} + g(Z\alpha_0) \right\}^\tau (I_n - A_n)^\tau \\ &\quad M_n (I_n - A_n) \left\{ (\rho_0 - \rho) [R_n(U\beta_0 + g(Z\alpha_0))] + S_n(\rho) S_n^{-1}(\rho_0) e_{n(u)} + g(Z\alpha_0) \right\}, \\ \sigma^{*2} &= \frac{1}{n} \left\{ g(Z\alpha_0) + (\rho_0 - \rho) [R_n(U\beta_0 + g(Z\alpha_0))] \right\}^\tau (I_n - A_n)^\tau M_n (I_n - A_n) \\ &\quad \cdot \left\{ g(z^\tau \alpha_0) + (\rho_0 - \rho) [R_n(U\beta_0 + g(z^\tau \alpha_0))] \right\} \\ &\quad + \frac{\sigma_0^2}{n} \text{tr} \left\{ \left[(I_n - A_n) S_n(\rho) S_n^{-1}(\rho_0) \right]^\tau M_n \left[(I_n - A_n) S_n(\rho) S_n^{-1}(\rho_0) \right] \right\}, \quad (4.27) \end{aligned}$$

结合(4.26)和(4.27)可得，

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{(1)}^2 - \sigma^{*2} &= 2 \frac{1}{n} [g(Z\alpha_0)]^\tau (I_n - A_n)^\tau M_n (I_n - A_n) S_n(\rho) S_n^{-1}(\rho_0) e_{n(u)} \\ &\quad + 2(\rho_0 - \rho) \frac{1}{n} [R_n(U\beta_0 + g(Z\alpha_0))]^\tau (I_n - A_n)^\tau M_n (I_n - A_n) S_n(\rho) S_n^{-1}(\rho_0) e_{n(u)} \\ &\quad + \frac{1}{n} [S_n(\rho) S_n^{-1}(\rho_0) e_{n(u)}]^\tau (I_n - A_n)^\tau M_n (I_n - A_n) [S_n(\rho) S_n^{-1}(\rho_0) e_{n(u)}] - \sigma^2. \end{aligned}$$

根据引理 4.3 可得

$$\hat{\sigma}_{(1)}^2 - \sigma^{*2} = 2(\rho_0 - \rho)H_{1n}(\rho) + 2H_{2n}(\rho) + H_{3n}(\rho) - \sigma^2 = o_p(1).$$

为了证明(4.25), 根据 Su 和 Jin^[16]可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}[Q_n(\lambda) - Q_n(\lambda_0)] &= \frac{1}{n}[Q_{p,n}(\lambda) - Q_{p,n}(\lambda_0)] + \frac{1}{2}\ln\sigma_{p,n}^2(\lambda) - \frac{1}{2}\ln\sigma^{*2}(\lambda) \\ &\quad + \frac{1}{2}\ln\sigma^{*2}(\lambda_0) - \frac{1}{2}\ln\sigma_{p,n}^2(\lambda_0), \end{aligned}$$

其中 $Q_{p,n}(\lambda) = -\frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln\sigma_{p,n}^2 - \frac{n}{2} + \ln|S_n(\rho)|$ 。

由 Jensen 不等式可得, 为证明 $n^{-1}[Q_{p,n}(\lambda) - Q_{p,n}(\lambda_0)] \leq 0$ 在 Δ 上连续, 类似于参考文献 Su 和 Jin^[16]可得 $\sigma^{*2} \geq \sigma^2$ 。因此 $\ln\sigma^{*2}(\lambda_0) - \ln\sigma_{p,n}^2(\lambda_0) = o(1)$, 证毕。

定理 4.2 的证明

根据参考文献 Su 和 Jin^[16]定理 4.3, $\left. \frac{\partial \ln L_n(\Theta)}{\partial \Theta} \right|_{\Theta=\hat{\Theta}_n} = 0$ 在 Θ_0 处一阶 Taylor 展

开式为

$$\sqrt{n}(\hat{\Theta}_n - \Theta_0) = - \left(\frac{1}{n} \frac{\partial^2 \ln L_n(\tilde{\Theta}_n)}{\partial \Theta \partial \Theta'} \right)^{-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial \ln L_n(\Theta_0)}{\partial \Theta},$$

其中 $\tilde{\Theta}_n$ 属于 $\hat{\Theta}_n$ 和 Θ_0 之间, 因此根据定理 4.1 可知 $\tilde{\Theta}_n$ 依概率收敛于 Θ_0 。对数似然函数 $L_n(\Theta)$ 在 Θ_0 处的一阶导数为

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial \ln L_n(\Theta_0)}{\partial \beta} &= \frac{1}{\sqrt{n}\sigma_0^2} (U^\tau P_0 e_{n(u)} + 2n\Sigma\beta_0), \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial \ln L_n(\Theta_0)}{\partial \alpha} &= \frac{1}{\sqrt{n}\sigma_0^2} Z^\tau \dot{g}(Z\alpha_0) P_0 e_{n(u)}, \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial \ln L_n(\Theta_0)}{\partial \rho} &= \frac{1}{\sqrt{n}\sigma_0^2} (R_n e_{n(u)})^\tau P_0 e_{n(u)} - \frac{1}{\sqrt{n}} \text{tr}(R_n), \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial \ln L_n(\Theta_0)}{\partial \sigma^2} &= \frac{1}{2\sqrt{n}\sigma_0^4} e_{n(u)}^\tau P_0 e_{n(u)} - n\beta_0^\tau \Sigma \beta_0 - n\sigma_0^2, \end{aligned}$$

因此

$$\frac{\partial^2 \ln L_n(\Theta_0)}{\partial \beta \partial \beta'} = - \frac{1}{\sigma_0^2} (U^\tau P_0 U - 2n\Sigma),$$

$$\frac{\partial^2 \ln L_n(\Theta_0)}{\partial \beta \partial \alpha'} = -\frac{1}{\sigma_0^2} U^\tau P_0 \dot{g}(Z \alpha_0) Z,$$

$$\frac{\partial^2 \ln L_n(\Theta_0)}{\partial \beta \partial \rho'} = -\frac{1}{\sigma_0^2} U^\tau P_0 W_n Y,$$

$$\frac{\partial^2 \ln L_n(\Theta_0)}{\partial \beta \partial \sigma^2} = -\frac{1}{\sigma_0^4} U^\tau P_0 (S_n(\rho_0) Y - U \beta_0) - \frac{1}{\sigma_0^4} 2n \Sigma \beta_0,$$

$$\frac{\partial^2 \ln L_n(\Theta_0)}{\partial \alpha \partial \alpha'} = -\frac{1}{\sigma_0^2} Z^\tau \dot{g}(Z \alpha_0) P_0 Z^\tau \dot{g}(Z \alpha_0),$$

$$\frac{\partial^2 \ln L_n(\Theta_0)}{\partial \alpha \partial \rho} = -\frac{1}{\sigma_0^2} Z^\tau \dot{g}(Z \alpha_0) P_0 W_n Y,$$

$$\frac{\partial^2 \ln L_n(\Theta_0)}{\partial \alpha \partial \sigma^2} = \frac{1}{\sigma_0^4} Z^\tau \dot{g}(Z \alpha_0) P_0 (S_n(\rho_0) Y - U \beta_0),$$

$$\frac{\partial^2 \ln L_n(\Theta_0)}{\partial \rho^2} = -\frac{1}{\sigma_0^2} (W_n Y)^\tau P_0 (W_n Y) - \text{tr} [R_n^2(\rho)],$$

$$\frac{\partial^2 \ln L_n(\Theta_0)}{\partial \rho \partial \sigma^2} = -\frac{1}{\sigma_0^4} (W_n Y)^\tau P_0 (S_n(\rho_0) Y - U \beta_0),$$

$$\frac{\partial^2 \ln L_n(\Theta_0)}{\partial \alpha \partial \sigma^2} = \frac{n}{2\sigma_0^4} - \frac{1}{\sigma_0^6} (S_n(\rho_0) Y - U \beta_0)^\tau P_0 (S_n(\rho_0) Y - U \beta_0) + \frac{n \beta_0^\tau \Sigma \beta_0}{2\sigma_0^4}.$$

根据均值定理可得, $\text{tr} \{R_n^2(\tilde{\rho})\} = \text{tr}(R_n^2) + 2(\tilde{\rho} - \rho_0) \text{tr} \{R_n^3(\tilde{\rho}^*)\}$, 其中 $\tilde{\rho}^*$ 在 $\tilde{\rho}$

与 ρ_0 之间, $R_n = W_n S_n^{-1}(\rho_0)$, $R_n(\tilde{\rho}) = W_n S_n^{-1}(\tilde{\rho})$, $R_n(\tilde{\rho}^*) = W_n S_n^{-1}(\tilde{\rho}^*)$ 。因此可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \left(\frac{\partial^2 \ln L_n(\tilde{\Theta}_n)}{\partial \rho^2} - \frac{\partial^2 \ln L_n(\Theta_0)}{\partial \rho^2} \right) \\ &= \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{\tilde{\sigma}^2} (W_n Y)^\tau R_n W_n Y - \text{tr} \{R_n^2(\tilde{\rho})\} - \left[\frac{1}{\sigma_0^2} (W_n Y)^\tau R_n W_n Y - \text{tr} \{R_n^2(\rho)\} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{n} \left[\left(\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\tilde{\sigma}^2} \right) (W_n Y)^\tau R_n W_n Y - 2(\tilde{\rho} - \rho_0) \text{tr} \{R_n^3(\tilde{\rho}^*)\} \right] \\ &= \left(\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\tilde{\sigma}^2} \right) \frac{1}{n} (W_n Y)^\tau R_n W_n Y - \frac{2}{n} (\tilde{\rho} - \rho_0) \text{tr} \{R_n^3(\tilde{\rho}^*)\}. \end{aligned}$$

由引理 5.1 和假设 A5 可得, $\frac{Y^\tau W_n^\tau (I_n - A_n)^\tau (I_n - A_n) W_n Y}{n} = O_p\left(\frac{1}{l_n}\right),$

$\frac{tr\{R_n^3(\tilde{\rho}^*)\}}{n} = O_p\left(\frac{1}{l_n}\right)$, 则 $\frac{1}{n}\left(\frac{\partial^2 \ln L_n(\tilde{\Theta}_n)}{\partial \rho^2} - \frac{\partial^2 \ln L_n(\Theta_0)}{\partial \rho^2}\right) = o_p(1)$ 。同理可得其他项都

趋于 $o_p(1)$, 因此可得 $\frac{1}{n}\left(\frac{\partial^2 \ln L_n(\tilde{\Theta}_n)}{\partial \Theta \partial \Theta'} - \frac{\partial^2 \ln L_n(\Theta_0)}{\partial \Theta \partial \Theta'}\right) = o_p(1)$ 。

记

$$-E\left(\frac{1}{n} \frac{\partial^2 \ln L_n(\Theta_0)}{\partial \Theta \partial \Theta'}\right) = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \Lambda_{13} & \Lambda_{14} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \Lambda_{23} & \Lambda_{24} \\ \Lambda_{31} & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} & \Lambda_{34} \\ \Lambda_{41} & \Lambda_{42} & \Lambda_{43} & \Lambda_{44} \end{pmatrix},$$

其中

$$\Lambda_{11} = \frac{1}{n\sigma_0^2} U^\tau P_0 U - 2n\Sigma, \quad \Lambda_{12} = \Lambda_{21} = \frac{1}{n\sigma_0^2} U^\tau P_0 \dot{g}(Z\alpha_0)Z,$$

$$\Lambda_{13} = \Lambda_{31} = \frac{1}{n\sigma_0^2} U^\tau P_0 T_n, \quad \Lambda_{14} = \Lambda_{41} = \frac{1}{n\sigma_0^4} (U^\tau P_0 g(Z\alpha_0) + 2n\Sigma\beta_0),$$

$$\Lambda_{22} = \frac{1}{n\sigma_0^2} Z^\tau \dot{g}(Z\alpha_0) P_0 \dot{g}(Z\alpha_0) Z, \quad \Lambda_{23} = \Lambda_{32} = \frac{1}{n\sigma_0^2} Z^\tau \dot{g}(Z\alpha_0) P_0 T_n,$$

$$\Lambda_{24} = \Lambda_{42} = -\frac{1}{n\sigma_0^4} Z^\tau \dot{g}(Z\alpha_0) P_0 g(Z\alpha_0), \quad \Lambda_{33} = \frac{1}{n\sigma_0^2} T_n^\tau P_0 T_n + \frac{1}{n} tr(R_n^\tau P_0 R_n) + \frac{1}{n} tr(R_n^2),$$

$$\Lambda_{34} = \Lambda_{43} = \frac{1}{n\sigma_0^4} T_n^\tau P_0 g(Z\alpha_0) + \frac{1}{n\sigma_0^2} tr(R_n^\tau P_0),$$

$$\Lambda_{44} = -\frac{1}{2\sigma_0^4} + \frac{1}{n\sigma_0^6} [g(Z\alpha_0)]^\tau P_0 g(Z\alpha_0) + \frac{1}{n\sigma_0^4} tr(P_0) + \frac{\beta_0^\tau \Sigma \beta_0}{2\sigma_0^4}.$$

$$\text{简单计算得 } \Sigma_{\Theta_0} = -\lim_{n \rightarrow \infty} E\left(\frac{1}{n} \frac{\partial^2 \ln l_n(\Theta_0)}{\partial \Theta \partial \Theta'}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{n\sigma_0^2} U^\tau P_0 U - 2n\Sigma & \frac{1}{n\sigma_0^2} U^\tau P_0 \dot{g}(Z\alpha_0)Z & 0 & 0 \\ -\frac{1}{n\sigma_0^2} U^\tau P_0 \dot{g}(Z\alpha_0)Z & \frac{1}{n\sigma_0^2} Z^\tau \dot{g}(Z\alpha_0) P_0 \dot{g}(Z\alpha_0)Z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{n\sigma_0^2} T_n^\tau P_0 T_n + \frac{1}{n} tr(R_n^2) & \frac{1}{n\sigma_0^2} tr(R_n^\tau P_0) \\ 0 & 0 & \frac{1}{n\sigma_0^2} tr(R_n^\tau P_0) & \frac{1}{\sigma_0^4} + \frac{\beta_0^\tau \Sigma \beta_0}{2\sigma_0^4} \end{pmatrix},$$

其中 $T_n = R_n(U\beta_0 + g(Z\alpha_0))$ ，由切比雪夫大数定律得

$$\frac{1}{n} \frac{\partial^2 \ln L_n(\Theta_0)}{\partial \Theta \partial \Theta'} - E \left(\frac{\partial^2 \ln L_n(\Theta_0)}{\partial \Theta \partial \Theta'} \right) = o_p(1).$$

即 $\frac{1}{n} \frac{\partial^2 \ln L_n(\Theta_0)}{\partial \Theta \partial \Theta'} + \Sigma_{\Theta_0} = o_p(1)$ 。又因为 $\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial \ln L_n(\Theta_0)}{\partial \Theta}$ 的方差矩阵为

$$E \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial \ln L_n(\Theta_0)}{\partial \Theta} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial \ln L_n(\Theta_0)}{\partial \Theta'} \right) = -E \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial^2 \ln L_n(\Theta_0)}{\partial \Theta \partial \Theta'} \right),$$

根据中心极限定理得， $\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial \ln L_n(\Theta_0)}{\partial \Theta} \xrightarrow{D} N(0, \Sigma_{\Theta})$ 。由于 Σ_{Θ} 是非奇异的，因此可得

$\hat{\Theta}_n$ 的渐近分布，证毕。

注释 4.2 定理 4.2 证明了估计量 $\hat{\Theta}_n$ 服从渐近正态分布。定理中的 Σ_{Θ_0} 包含了与 Σ 相关的额外元素，这些元素被引入以捕捉和量化测量误差对估计过程的影响。具体而言， Σ 作为参数，用于衡量此类误差的变异性。在解释变量 X_n 可以直接且精确观测到（即不存在测量误差）的情况下， Σ 将简化为零矩阵，这一发现不仅展示了所提模型在处理测量误差方面的优势，还进一步验证了其在无误差条件下的理论一致性。

定理 4.3 的证明

根据假设 A(1)-A(9) 和定理 4.1 可知，

$$\begin{aligned} \hat{g}(v) &= D_v(S_n(\hat{\rho})Y - U\hat{\beta}) \\ &= D_v \left[(S_n(\hat{\rho})Y - U\hat{\beta}) + (S_n(\rho_0)Y - U\beta_0) - (S_n(\rho_0)Y - U\beta_0) \right] \\ &= D_v \left[(S_n(\hat{\rho})Y - S_n(\rho_0)Y) + U(\beta_0 - \hat{\beta}) + S_n(\rho_0)Y - U\beta_0 \right]. \end{aligned}$$

由定理 4.2 易得， $\hat{g}(v) = (1 + o_p(1))\hat{g}(v_0)$ ，即 $\hat{g}(v) \xrightarrow{P} \hat{g}(v_0)$ 。

4.7 本章小结

本章研究了协变量具有测量误差的部分线性单指标空间自回归模型，采用基于局部线性方法的校正剖面极大似然估计法。首先，推导出模型的校正似然函数，从而在该框架下实现对参数和非参数部分的估计。其次，在一定正则条件下，对

估计量的一致性和渐近正态性进行了分析。通过蒙特卡洛模拟验证了所提方法在有限样本量下的有效性。模拟结果揭示了以下两个关键发现：

(1) 随着误差方差 Σ 的增加，所考虑的相邻区域数量也随之增多，导致估计量的偏差(Bias)和均方误差(MSE)相应增大。

(2) 当测量误差方差 Σ 未知时，采用重复观测法先对 Σ 进行估计，然后再进行其他参数的估计。尽管在这种情况下获得的结果略逊于已知 Σ 时的结果，但差异微乎其微，这表明当 Σ 未知时，重复观测法可以有效地用于参数估计。最后，将所提的估计方法应用于波士顿房价数据的分析。实证结果表明：

(1) 波士顿房价存在正空间相关性。

(2) 含测量误差模型的非参数估计曲线与数据更吻合，验证了所提估计方法的有效性和实用性。

第5章 总结与展望

5.1 总结

半参数模型因其能够克服非参数模型中的“维数灾难”问题，并减少模型误差假设带来的不良影响，近年来受到了国内外学者的广泛关注。为了更全面地捕捉数据中的个体异质性、时间动态性、空间依赖性以及非线性关系，并提升模型估计的稳健性和准确性。本文考虑半参数空间自回归模型，分别研究在具有固定效应附加约束下和协变量具有测量误差时的统计推断问题。

首先研究了带固定效应的部分线性空间自回归面板数据模型在参数部分受到附加约束条件时的估计问题。利用样条函数逼近未知函数，通过最小二乘虚拟变量法有效消除了个体效应。在此基础上，结合最小二乘法，推导出了在附加约束条件下参数部分的约束估计量，并在适当的正则条件下，证明了约束估计量的样本性质。数值模拟进一步显示，随着样本数量的增加，估计量的偏差和均方误差都呈现出减小的趋势，同时约束估计量 $\hat{\theta}_H$ 比无约束估计量 $\hat{\theta}$ 具有较小的偏差和均方误差，说明估计方法的相合性。当空间权重阈值 m 固定时，空间自回归系数分别取 $\rho=0.5$ 和 $\rho=0.8$ ，非参数约束估计量 $\hat{\eta}_H(u)$ 比无约束估计量 $\hat{\eta}(u)$ 同样具有较小的均方误差。从而验证了所提估计方法的有效性和准确性。

其次研究了具有协变量测量误差的部分线性单指标空间自回归模型。为了准确估计未知参数和连接函数，引入了一种基于局部线性方法的校正剖面极大似然方法。在适当的正则条件下，推导出了所提估计量的渐近分布。Monte Carlo模拟结果显示，所提出的方法在有限样本中表现良好，具有较高的估计精度和稳定性。此外，给出了一个真实数据示例，进一步说明了所提方法在实际应用中的有效性和可行性。

5.2 展望

作者今后将对以下几个方面做进一步的研究：

1、本文可进一步探索如何在误差形式未知的情况下，通过构建更灵活的误差函数表示，来完善半参数模型的统计推断框架。

2、本文主要分析了协变量具有测量误差，可扩展到更广泛的半参数模型中，不仅限于单指标 SAR 模型，以全面评估测量误差对模型估计精度和预测性能的影响，并研究相应的校正方法。

3、本文主要考虑了半参数模型中的半参数单指标 SAR 模型与半参数 SAR 面板数据模型，后续可以研究部分线性变系数单指标 SAR 模型、SAR 可加模型等，在固定效应下的估计问题，为处理具有空间依赖性的复杂数据结构提供更加精细和灵活的工具。

参考文献

- [1] Cliff A D, Ord J K. Spatial processes: models and applications[M]. London: Pion, 1981.
- [2] Anselin L. Spatial econometrics: methods and models[M]. The Netherlands: Kluwer Academic publishers, 1988.
- [3] Kelejian H H, Prucha I R. A generalized spatial two-stage least squares procedure for estimating a spatial autoregressive model with autoregressive disturbances[J]. The Journal of Real Estate Finance and Economics, 1998, 17: 99-121.
- [4] Kelejian H H, Prucha I R. A generalized moments estimator for the autoregressive parameter in a spatial model[J]. International Economic Review, 1999, 40(2): 509-533.
- [5] Lee L F. Asymptotic distributions of quasi-maximum likelihood estimators for spatial autoregressive models[J]. Econometrica, 2004, 72(6): 1899-1925.
- [6] Lee L F. GMM and 2SLS estimation of mixed regressive, spatial autoregressive models[J]. Journal of Econometrics, 2007, 137(2): 489-514.
- [7] Lee L F, Liu X D. Efficient GMM estimation of high order spatial autoregressive models with autoregressive disturbances[J]. Econometric Theory, 2010, 26(1): 187-230.
- [8] Lin X, Lee L F. GMM estimation of spatial autoregressive models with unknown heteroskedasticity[J]. Journal of Econometrics, 2010, 157(1): 34-52.
- [9] Badinger H, Egger P. Estimation and testing of higher-order spatial autoregressive panel data error component models[J]. Journal of Geographical System, 2013, 15: 453-489.
- [10] Lee L F, Yu J H. Efficient GMM estimation of spatial dynamic panel data models with fixed effects[J]. Journal of Econometrics, 2014, 180(2): 174-197.
- [11] Qu X, Lee L. Estimating a spatial autoregressive model with an endogenous spatial weight matrix[J]. Journal of Econometrics, 2015, 184(2): 209-232.
- [12] Gupta A, Robinson P M. Inference on higher-order spatial autoregressive models

- with increasingly many parameters[J]. *Journal of Econometrics*, 2015, 186: 19-31.
- [13]Gupta A. Estimation of spatial autoregressive with stochastic weight matrices[J]. *Econometric Theory*, 2018, 35: 417-463.
- [14]Gress B. Using semi-parametric spatial autocorrelation models to improve hedonic housing price prediction[J]. *Working papers*, 2008.
- [15]Robinson P M. Efficient estimation of the semiparametric spatial autoregressive model[J]. *Journal of Econometrics*, 2010, 157: 6-17.
- [16]Su L, Jin S. Profile quasi-maximum likelihood estimation of partially linear spatial autoregressive models[J]. *Journal of Econometrics*, 2010, 157(1): 18-33.
- [17]Su L J. Semiparametric GMM estimation of spatial autoregressive models[J]. *Journal of Econometrics*, 2012, 167: 543-560.
- [18]Sun Y, Yan H J, Zhang W Y, Lu Z D. A semiparametric spatial dynamic model[J]. *The Annals of Statistics*, 2014, 42(2): 700-727.
- [19]Krisztin T. The determinants of regional freight transport: a spatial, semiparametric approach[J]. *Geographical Analysis*, 2017, 49(3): 268-308.
- [20]李坤明, 陈建宝. 半参数变系数空间滞后模型的截面极大似然估计[J]. *数量经济技术经济研究*, 2013, 4: 85-98.
- [21]Krisztin T. Semi-parametric spatial autoregressive models in freight generation modeling[J]. *Transportation research part E*, 2018, 114: 121-143.
- [22]Chen J, Wang R, Huang Y. Semiparametric spatial autoregressive model: a two-step bayesian approach[J]. *Annals of Public Health and Research*, 2015, 2(1): 1012-1024.
- [23]Du J, Sun X Q, Cao R Y, Zhang Z Z. Statistical inference for partially linear additive spatial autoregressive models[J]. *Spatial Statistics*, 2018, 25: 52-67.
- [24]Hu X M. Estimation in a semi-varying coefficient model for panel data with fixed effects[J]. *Journal of Systems Science and Complexity*, 2014, 27(3): 594-604.
- [25]He B Q, Hong X J, Fan G L. Block empirical likelihood for partially linear panel data models with fixed effects[J]. *Statistics & Probability Letters*, 2017, 123: 128-138.
- [26]Yu J H, De Jong R, Lee L F. Quasi-maximum likelihood estimators for spatial

- dynamic panel data with fixed effects when both n and T are large[J]. *Journal of Econometrics*, 2008, 146(1): 118-134.
- [27] Lee L F, Yu J H. Estimation of spatial autoregressive panel data models with fixed effects[J]. *Journal of econometrics*, 2010, 154(2): 165-185.
- [28] Li B G, Chen H. Estimation of fixed effects partially linear varying coefficient spatial autoregressive model with disturbances correlated in space and time[J]. *Finance Research Letters*, 2024, 59: 104819.
- [29] Hu J H, Liu F X, You J H. Panel data partially linear model with fixed effects, spatial autoregressive error components and unspecified intertemporal correlation[J]. *Journal of multivariate analysis*, 2014, 130: 64-89.
- [30] Su L J, Ullah A. Profile likelihood estimation of partially linear panel data models with fixed effects[J]. *Economics Letters*, 2006, 92(1): 75-81.
- [31] Zhang Y Q, Jiang J Y, Feng Y Q. Penalized quantile regression for spatial panel data with fixed effects[J]. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 2023, 52(4): 1287-1299.
- [32] 丁飞鹏, 丁松. 固定效应部分线性可加空间自回归面板模型的截面二次推断函数估计[J]. *系统科学与数学*, 2023, 43(09): 2404-2428.
- [33] Adcock R J. Note on the Method of Least Squares[J]. *Analyst*, 1877, 4(6): 183-184.
- [34] Kummell C H. Reduction of Observation Equations Which Contain More Than One Observed Quantity[J]. *Analyst*, 1879, 6(4): 97-105.
- [35] Fuller W A. *Measurement error models*[M]. Wiley, 1987.
- [36] Wang L, Cheng H. Two-stage estimation of limited dependent variable models with errors-in-variables[J]. *Econometrics Journal*, 2007, 10(2): 426-438.
- [37] Nakamura T. Corrected Score Function for Errors-in-Variables Models: Methodology and Application to Generalized Linear Models[J]. *Biometrika*, 1990, 77(1): 127-137.
- [38] 张征宇, 朱平芳. 有测量误差时空自回归模型的估计与检验[J]. *统计研究*, 2010, 27(4): 103-109.
- [39] Suesse T. Estimation of spatial autoregressive models with measurement error for large data sets[J]. *Computational Statistics*, 2018, 33: 1627-1648.

-
- [40]Luo G, Wu M, Pang Z. Estimation of spatial autoregressive models with covariate measurement errors[J]. *Journal of Multivariate Analysis*, 2022, 192: 105093.
 - [41]Rosenblatt M. Remarks on some nonparametric estimates of a density function[J]. *The Annals of Mathematical Statistics*, 1956, 27(6): 832-837.
 - [42]Parzen E. On estimation of probability density function and mode[J]. *The Annals of Mathematical Statistics*, 1962, 33(3): 1065-1076.
 - [43]Nadaraya E A. On estimating regression[J]. *Theory of Probability and Its Applications*, 1964, 9(1): 141–142.
 - [44]Watson G S. Smooth regression analysis[J]. *Sankhyā the Indian Journal of Statistics, Series A*, 1964, 26(4): 359-372.
 - [45]Fan J Q, Gijbels I. Data-driven bandwidth selection in local polynomial fitting: Variable bandwidth and spatial adaptation[J]. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Methodological)*, 1995, 57(2): 371-394.
 - [46]Ruppert D. Empirical-bias bandwidths for local polynomial nonparametric regression and density estimation[J]. *Journal of the American Statistical Association*, 1997, 92(439): 1049-1062.
 - [47]Schumaker L L. *Spline functions: basic theory*[M]. Wiley, 1981.
 - [48]罗国旺, 吴密霞. 部分线性可加空间自回归模型在约束条件下的统计推断[J]. *数理统计与管理*, 2020, 39(6): 1000-1009.
 - [49]Li J, Song Y Q. Incremental transfer learning for spatial autoregressive model with linear constraints[J]. *Spatial Statistics*, 2024, 61: 100833.
 - [50]Zhang W W, Li G R, Xue L G. Profile inference on partially linear varying-coefficient errors-in-variables models under restricted condition[J]. *Computational statistics & data analysis*, 2011, 55(11): 3027-3040.
 - [51]Kim M. Quantile regression with varying coefficients[J]. *The Annals of Statistics*, 2007, 35(1): 92-108.
 - [52]Carroll R J, Fan J Q, Gijbels I, et al. Generalized partially linear single-index models[J]. *Journal of the American Statistical Association*, 1997, 92(438): 477-489.
 - [53]Zhu L X, Xue L G. Empirical likelihood confidence regions in a partially linear single-index model[J]. *Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical*

- Methodology, 2006, 68(3): 549-570.
- [54]Huang Z S, Zhang R Q, Lv Y Z. Semiparametric inference on partially linear single-index model[J]. Communications in Statistics-Theory and Methods, 2016, 45(14): 4068-4085.
- [55]Yu P, Du J, Zhang Z. Single-index partially functional linear regression model[J]. Statistical papers, 2020, 61: 1107-1123.
- [56]Cheng S L, Chen J B. Estimation of partially linear single-index spatial autoregressive model[J]. Statistical Papers, 2021, 62(1): 495-531.
- [57]Liang H, Härdle W, Carroll R J. Estimation in a semiparametric partially linear errors-in-variables model[J]. The Annals of Statistics, 1999, 27(5): 1519-1535.
- [58]Wei C H, Guo S, Zhai S F. Statistical inference of partially linear varying coefficient spatial autoregressive models[J]. Economic Modelling, 2017, 64: 553-559.
- [59]Mack Y, Silverman B W. Weak and strong uniform consistency of kernel regression estimates[J]. Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete, 1982, 61(3): 405-415.

硕士期间发表的论文

- [1] 杨颖, 何帮强. 带固定效应部分线性空间自回归面板数据模型的约束估计[J]. 安徽工程大学学报(已录用待发表).
- [2] He BQ, Yang Y. Statistical inference of partially linear single-index spatial autoregressive models with measurement errors[J]. Computational Statistics (外审).

致 谢

随着研究生生涯的圆满落幕，我心怀无尽的感激，向这一路上给予我深切关怀与宝贵支持的每一个人表达最真挚的谢意。

首先，我要向我的导师何帮强教授致以最深的敬意与感激。何老师以其严谨治学的态度、细心耐心的指导，为我树立了学术研究的标杆。从选题到论文的撰写，乃至每一个细节的打磨，何老师都倾注了大量的心血，他的认真负责不仅体现在对我学术上的严格要求，更在于那份对学生全面发展的深切关怀。何老师不仅是我学术上的引路人，更是我人生旅途中的领航员，他的言传身教让我受益匪浅。在此，我衷心祝愿何老师身体健康，事业有成，家庭幸福！

其次，我要特别感谢王龙师兄和姚钰琦师兄。在我研究生学习期间，两位师兄如同灯塔一般照亮了我的前行之路。每当遇到难题或困惑，他们总是耐心倾听，悉心指导，无私分享他们的宝贵经验和解决策略。他们的帮助不仅让我在学术上少走了许多弯路，更在精神上给予了我莫大的支持与鼓励。在此，我衷心感谢两位师兄的慷慨相助，愿你们前程似锦，事业有成！

再次，我还要感谢我的同窗好友冯登宏同学。我们工位相邻，共同度过了无数个日夜。在学习上，我们相互切磋，共同探讨难题；在生活中，我们彼此鼓励，共同面对挑战。冯登宏同学乐观积极向上的生活态度，总是能在我不经意间灰心丧气时给予我无限的动力与勇气。他的笑容与坚持，是我研究生生涯中一道亮丽的风景线。在此，我衷心祝愿冯登宏同学未来一切顺利，前程光明！

最后，我要向我的家人表达最深的感激。是你们无私的付出与默默的支持，成为了我不断前行的坚强后盾。在我遇到挫折与困难时，是你们的鼓励与爱让我重拾信心，勇敢前行。家人的陪伴与关爱，是我人生中最宝贵的财富。在此，我衷心祝愿我的家人身体健康，幸福安康，愿我们的家庭永远充满爱与温暖！

愿我们都能在未来的日子里，继续怀揣梦想，勇往直前，书写属于自己的精彩篇章！

杨颖

2025 年 3 月