
分类号: O211.63

单位代码: 10363

密 级: 公开

学 号: 2221020114

题 目 几类随机微分方程的数值分析

题 目 Numerical Analysis of Several Types of
Stochastic Differential Equations

学生姓名: 冯登宏

指导教师: 李志民 教授

专 业: 数 学

研究方向: 金融数学

论文答辩日期: 2025 年 5 月 20 日

安徽工程大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：我恪守学术道德，崇尚严谨学风。所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已明确注明和引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品及成果的内容。论文为本人亲自撰写，我对所写的内容负责，并完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

学位论文作者签名：冯登宏

日期：2025 年 5 月 14 日

安徽工程大学学位论文版权使用授权书

学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅或借阅。本人授权安徽工程大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保密 ☐，在 _____ 年解密后适用本版权书。

本学位论文属于

不保密 ☒。

学位论文作者签名：冯登宏

日期：2025 年 5 月 14 日

指导教师签名：李超

日期：2025 年 5 月 14 日

几类随机微分方程的数值分析

摘 要

在金融数学的研究中, 鉴于金融市场固有的不确定性和随机波动特性, 随机微分方程(SDE)作为刻画此类随机动态过程的强大工具, 扮演着至关重要的角色。然而, 所涉及的随机微分方程的系数常常具有超线性, 其解析解难以直接求得, 因此有效的数值方法成为随机微分方程的应用的关键所在。本文旨在探讨构建不同类型的随机微分方程以捕捉金融资产价格的趋势、波动性及跳跃等复杂动态特征, 并研究了两类数值方法的收敛性。

首先, 介绍了随机微分方程与利率模型的研究背景与研究目的, 并回顾了随机微分方程与 Ait-Sahalia 模型的国内外研究现状。

其次, 研究了由 Poisson 跳驱动的 Ait-Sahalia 模型的数值解问题, 其中模型的跳跃系数满足线性增长条件。为了有效处理模型中的非线性特性, 采用部分截断 Euler-Maruyama(EM)数值方法。该方法通过截断漂移系数和扩散系数中的非线性部分, 同时保留其线性部分, 从而实现了对模型的有效近似。理论分析表明, 在适当的条件下, 部分截断的 EM 数值方法能够强收敛到模型的真实解, 且收敛速率接近 1。

最后, 研究了具有延迟波动率和 Poisson 跳驱动的 Ait-Sahalia 利率模型, 并引入了改进截断 Euler-Maruyama(EM)数值方法探究其动态特性。模型系数在满足局部 Lipschitz 条件和 Khasminskii 型条件的理

论框架下,对该数值方法的性质进行了深入研究。证明了改进截断 EM 数值方法所产生的数值解能够强收敛到模型的真实解。

关键词: 随机微分方程, Ait-Sahalia 模型, 改进截断 EM 法, 部分截断 EM 法, 强收敛性, Poisson 跳

Numerical Analysis of Several Types of Stochastic Differential Equations

ABSTRACT

In the research of financial mathematics, given the inherent uncertainty and stochastic volatility characteristics of financial markets, stochastic differential equations (SDEs) play a crucial role as powerful tools for modeling such stochastic dynamic processes. However, the coefficients of the involved SDEs often exhibit super-linear growth, making it difficult to obtain their analytical solutions directly. Therefore, the development of effective numerical methods has become essential for the application of SDEs. This paper aims to explore the construction of various types of SDEs to capture complex dynamic features of financial asset prices, such as trends, volatility, and jumps, and investigates the convergence of two types of numerical methods.

First, we introduce the research background and objectives of stochastic differential equations and interest rate models, and reviews the current research status of stochastic differential equations and the Ait-Sahalia model both domestically and internationally.

Next, we investigate the numerical solution problem for the Ait-Sahalia model driven by Poisson jumps, where the jump coefficients of the

model satisfy the linear growth condition. To effectively handle the nonlinear characteristics of the model, we employ a partially truncated Euler-Maruyama (EM) numerical method. This method truncates the nonlinear parts of the drift and diffusion coefficients while retaining their linear components, thereby achieving an effective approximation of the model. Theoretical analysis shows that, under appropriate conditions, the partially truncated EM method converges strongly to the true solution of the model, with a convergence rate close to 1.

Finally, we study the Ait-Sahalia interest rate model driven by delayed volatility and Poisson jumps, and introduce a modified truncated Euler-Maruyama (EM) numerical method to investigate its dynamic properties. Under the theoretical framework where the model coefficients satisfy the local Lipschitz condition and the Khasminskii-type condition, we conduct an in-depth analysis of the properties of this numerical method. It is proven that the numerical solutions generated by the modified truncated EM method converge strongly to the true solution of the model.

Feng Denghong (Mathematics)

Supervised by Li Zhimin

KEY WORDS: Stochastic differential equations, Ait-Sahalia model,

Modified truncated Euler-Maruyama (EM) method, Partially truncated Euler-Maruyama (EM) method, Strong convergence, Poisson jumps

目 录

第 1 章 绪论.....	1
1.1 研究背景与研究意义.....	1
1.2 国内外研究现状.....	2
1.3 主要研究内容.....	5
第 2 章 预备知识.....	6
2.1 符号说明.....	6
2.2 相关理论基础.....	7
第 3 章 带 Poisson 跳的 Ait-Sahalia 模型部分截断的数值分析.....	11
3.1 带 Poisson 跳的 Ait-sahalia 模型.....	11
3.2 部分截断 EM 数值方法.....	13
3.3 部分截断 EM 数值方法的性质.....	15
3.4 部分截断 EM 方法的强收敛性.....	19
3.5 本章小结.....	24
第 4 章 带 Poisson 跳的延迟利率模型数值解的收敛性分析.....	26
4.1 带 Poisson 跳的延迟 Ait-Sahalia 模型.....	26
4.2 改进截断的 EM 法.....	28
4.3 改进截断 EM 法的收敛性.....	33
4.4 本章小结.....	37
第 5 章 总结与展望.....	38
5.1 总结.....	38
5.2 展望.....	39
参考文献.....	40
硕士期间发表的论文.....	45
致谢.....	46

第 1 章 绪论

1.1 研究背景与研究意义

随机微分方程(SDEs)在生物学、化学、经济学、金融学以及控制论等多个学科领域内占据着重要地位，其深入的理论探讨与广泛应用研究引起了广泛关注。在实际问题中，事件的影响不仅仅局限于其发生时的当前状态，而是也会涉及到之前的状态。例如：Liu^[1]提出的具有非线性传输率和时滞的 SIR 传染病模型，模型描述如下：

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \Lambda - \mu S(t) - \beta e^{-\mu\tau} S(t)G(I(t-\tau)) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta e^{-\mu\tau} S(t)G(I(t-\tau)) - (\mu + \gamma + \alpha)I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) - \mu R(t), \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 τ 为常数，表示表示感染过程中的时滞效应。再例如 Bahar 和 Mao^[2]建立的随机延迟 Lotka-Volterra 模型：

$$dX(t) = \text{diag}(X_1(t), \dots, X_d(t))[b + AX(t-\tau)dt + \sigma X(t)dB(t)], \quad (1.2)$$

其中 $B(t)$ 为标准的布朗运动。在描述某种特定种群的增长情况时，时滞这一特点具有重要的地位。一般的时滞微分方程的格式为：

$$dx(t) = f(t, x(t), x(t-\tau))dt + g(t, x(t), x(t-\tau))dB(t), \quad (1.3)$$

其中 $t \geq 0$ ， τ 为正常数。

在许多现实场景中，系统的随机不仅源于布朗运动驱动随机微分方程，还会受到突发事件的影响。Dungey 和 Erdemlioglu^[3]研究了聚焦于金融市场中突发事件之间的相互影响，这些事件会通过相互激励机制引发连锁反应，进而造成市场的恐慌。经验研究已经明确表明，在金融市场的价格波动以及控制系统的动态变化中，普遍存在着一种被称为“跳跃”的现象，用以描述那些突然发生且对系统产生显著影响的事件^[4-8]。这些跳跃现象往往与市场的剧烈波动、政策的突然调整或重大新闻事件的发布等密切相关。在金融资产的定价过程中，跳跃风险作

为一个重要的考量因素，其存在性和影响性都是不容忽视的^[9,10]。跳跃风险不仅增加了资产价格的不确定性，还可能对投资者的预期收益和风险承受能力产生深远影响。

为了更准确地刻画利率模型中突发事件的影响，并有效捕捉这些不连续行为对资产价格的影响，学者们开始将跳扩散过程引入到资产价格的定价模型中。跳扩散过程结合了连续扩散过程和离散跳跃过程的特点，能够更全面地反映资产价格的动态变化。通过引入跳扩散过程，模型能够更准确地描述资产价格在突发事件发生时的剧烈波动，以及随后可能出现的价格回调或趋势反转等现象。如相关文献^[11-15]所述，跳扩散过程在金融资产定价中的应用已经取得了显著的成果，为投资者提供了更为准确和全面的风险评估和定价工具。

与此同时，随着跳扩散过程在金融资产定价中的广泛应用，关于带有跳跃的随机微分方程(SDEs)数值方法的收敛性和稳定性问题也日益受到人们的关注。由于跳跃现象的存在，传统的数值方法可能无法有效地处理带有跳跃的 SDEs，导致数值解的误差较大或稳定性较差。因此，研究适用于带有跳跃的 SDEs 的高效、稳定的数值方法，对于提高金融资产定价的准确性和可靠性具有重要意义。

1.2 国内外研究现状

1.2.1 随机微分方程数值方法收敛性的研究现状

在金融领域，对随机微分方程的数值方法进行收敛性分析是至关重要的，它有利于解决和预测金融市场出现的众多实际问题，一般的随机微分方程的形式为：

$$dX(t) = f(X(t))dt + g(X(t))dB(t), X(0) = X_0, 0 \leq t_0 \leq t \leq T, \quad (1.4)$$

其中 $X \in R^d$ ，漂移系数 $f: R^d \rightarrow R^d$ ，扩散系数 $g: R^d \rightarrow R^{d \times m}$ ， $B(t)$ 是定义在完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上 m 维布朗运动。在邓飞其文献^[16]中提出，对有限时间的收敛性，主要分为两类，即强收敛和弱收敛。Kloeden 在文献^[17]中给出了许多的数值方法的强、弱收敛性和收敛速率。目前对于强收敛的定义主要采用以下几种方式：

$$\mathbb{E}|X(N\Delta) - Y_N| \leq C\Delta^\alpha,$$

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq n \leq N} |X(n\Delta) - Y_n| \right] \leq C\Delta^\alpha, \quad (1.5)$$

$$\sup_{0 \leq n \leq N} \mathbb{E} |X(n\Delta) - Y_n| \leq C\Delta^\alpha,$$

其中 Δ 表示时间步长, $T = N\Delta$, $X(t)$ 表示 SDE (1) 的真实解, Y_n 表示某种数值方法在 $n\Delta$ 时对 $X(t)$ 的估计。 C 表示正常数且不依赖 Δ , α 表示对应数值方法的收敛阶。

对与求解微分方程的数值方法最典型、最基本的格式 Euler-Maruyama(EM) 格式。 Gikhman and Skorokhod^[18] 中表明在全局 Lipschitz 和线性生长条件, EM 方案有序收敛阶到精确到 SDE 的 0.5。然而, 在众多的金融模型中, 许多都无法满足全局 Lipschitz 条件和线性增长条件, 因此发展有效的数值方法成为了金融模型应用的关键所在。Mao^[19,20] 提出了截断 EM 法, 其形式为:

$$f_\Delta(x) = f(\pi_\Delta(x)), g_\Delta(x) = g(\pi_\Delta(x)), \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad (1.6)$$

其中 $\pi_\Delta(x)$ 为截断映射, Mao 证明了在局部 Lipschitz 和 Khasminskii 条件下强收敛阶为 0.5。此外, 许多学者在不同方面对截断 EM 方法进行了改进和扩展^[21-26]。Lan 和 Xie^[27] 提出了改进的截断 EM 法, 与截断的 EM 数值方法相比, 在较弱的条件下, 数值模拟能够强收敛于真实解。Lan 和 Wang^[28,29] 利用改进截断 Euler-Maruyama(EM) 数值方法分别研究了中立型随机延迟微分方程和 中立型随机时滞微分方程的渐进稳定性和强收敛性。Jiang 和 Lan^[30] 将改进截断 EM 法推广至高阶的 Milstein 情形。截断 EM 法和改进截断 EM 法均聚焦于对模型系数的近似处理, 其 Euler 型迭代都可以用以下格式表示:

$$\begin{cases} Y_{k+1} = Y_k + f_\Delta(Y_k)\Delta + g_\Delta(Y_k)\Delta B_k, k \geq 0, \\ Y_0 = X_0, \end{cases} \quad (1.7)$$

f_Δ 和 g_Δ 分别代表通过该数值方法得出的 f 和 g 的近似。

Guo, Liu 和 Mao^[31] 提出一种部分截断 EM 方法, 用于高度非线性的随机微分方程(SDEs)。不仅建立了部分截断 EM 方法的有限时间强收敛理论, 还证明了该方法能够保持基础 SDEs 的渐进稳定性和有界性。在此之后, Shi, Song 和 Liu^[32] 构建了一种改进的部分截断 Euler-Maruyama(EM) 方法, 并得出该数值方法收敛阶

为 0.5; Haghighi^[33]提出一种部分截断 Euler-Maruyama 方法(PTEMH), 用于求解具有超线性分段连续漂移系数和 Hölder 连续扩散系数的随机微分方程(SDEs), 并建立了 PTEMH 格式的强收敛理论。

1.2.2 Ait-Sahalia 模型及其数值方法

在金融风险管理和金融衍生产品投资中, 利率的随机模型展现出至关重要的作用。由于利率动态变化的复杂性, 众多学者利用随机模型模拟利率的动力学。Vasicek^[34]通过引入利率均值回归的特性, 建立了 Vasicek 模型, 其形式可用以下 SDEs 表示:

$$dx(t) = (\mu - \lambda x(t))dt + \sigma dB(t), \quad (1.8)$$

其中 $\mu, \lambda \geq 0$ 和 $\sigma > 0$ 。但该模型存在利率变为负值的情况, 这与实际情况并不吻合。John Cox, Stephen Ross 和 Robert Ingersoll^[35]提出了 CIR 模型: 该模型设定瞬时利率的波动率与瞬时利率的平方根成正比, 该设定保证了利率的非负性。Ait-Sahalia^[36]对几种连续时间的利率模型进行实证研究, 研究发现单变量线性漂移系数模型不能很好的解释利率的动态。因此, 提出了一类强非线性 Ait-Sahalia 模型, 其形式可用以下 SDEs 描述:

$$dx(t) = (a_{-1}x(t)^{-1} - a_0 + a_1x(t) + a_2x(t)^2)dt + \sigma x(t)^\theta dB(t), \quad (1.9)$$

$x(0) = x_0$, 对于任意的 $t > 0$, 这里的 $a_{-1}, a_0, a_1, a_2, x_0$ 都为正常数并且 $\theta > 1$ 。Szpruch, Mao 和 Higham^[37]针对具有高度非线性系数 Ait-Sahalia 模型:

$$dx(t) = (a_{-1}x(t)^{-1} - a_0 + a_1x(t) + a_2x(t)^\rho)dt + \sigma x(t)^\theta dB(t), \quad (1.10)$$

对于任意的 $t > 0$, 这里的 $\rho > 1$ 。该研究证明了模型(1.10)解的存在性和唯一性, 并提出了一种隐式数值方法, 该方法能够保持解的正性和矩的有界性, 强收敛于真实解。

在对 Ait-Sahalia 模型的讨论中, Deng^[38]提出了具有 Poisson 跳跃形式的广义 Ait-Sahalia 模型, 利用 Poisson 跳跃描述一类不可预测的金融事件, 并证明了该模型的 EM 数值解依概率的方式收敛到真实解。实证研究证明, 在大多数金融市场, 波动并不是恒定的, 因此 Mao^[39]在 Ait-Sahalia 模型的基础上, 引入了延迟波动率函数, 并证明截断的 EM 法的数值解依概率收敛到真解。Deng 等^[40]针对

广义 Ait-Sahalia 模型，建立了一种保正截断 Euler-Maruyama (EM) 方法，并在适当条件下证明了该方法的强收敛性，并得出收敛阶为 0.5。Zhao 等^[41]利用后向欧拉数值方法(BEM)证明在具有泊松跳跃的广义 Ait-Sahalia 利率模型中的均方收敛速为 0.5。Coffie 等^[42]利用分数布朗运动在金融领域中被广泛用于刻画“粗糙”波动率的特性。提出了分数布朗运动驱动的一种广义 Ait-Sahalia 型模型，并深入研究解的存在唯一性、Malliavin 可微性以及强解的高阶矩。

1.3 主要研究内容

本文主要研究了两类带 Poisson 跳的 Ait-Sahalia 型随机微分方程数值解的收敛性分析研究。具体内容如下：

1、研究了带Poisson跳的Ait-Sahalia模型

$$\begin{cases} dx(t) = (a_{-1}x^{-1}(t) - a_0 + a_1x(t) - a_2x^\gamma(t))dt + \sigma x^\theta(t)dB(t) + h(x(t^-))dN(t), t \geq 0 \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.11)$$

其中 $h(\cdot)$ 为线性增长函数， σ 为正常数， $\gamma > 1$ 其他系数与(1.12)的定义相同。本研究通过部分截断 Euler-Maruyama (EM)，仅截断 Ait-Sahalia 模型的漂移系数和扩散系数中的非线性系数，并证明了该数值方法的数值解强收敛到真实解，并获得了其收敛阶。

2、研究了带Poisson跳的延迟Ait-Sahalia模型

$$\begin{aligned} dx(t) &= (a_{-1}x^{-1}(t) - a_0 + a_1x(t) - a_2x^\rho(t))dt + D(x(t-\tau))x^\theta(t)dB(t) + \delta x(t^-)dN(t), t \geq 0, \\ x(t) &= \xi(t), t \in [-\tau, 0], \end{aligned} \quad (1.12)$$

其中 $a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \delta$ 均为正常数，参数 $\rho, \theta > 1$ ， $x(t^-) = \lim_{s \rightarrow t^-} x(s)$ ， $B(t)$ 是标准的布朗运动，且 $D(\cdot)$ 是一个依赖于 $x(t-\tau)$ 的波动率函数，其中 $\tau > 0$ 和 $x(t-\tau)$ 表示 $x(t)$ 中的延迟； $N(t)$ 是标准的 Poisson 过程，假设 $N(t)$ 与 $B(t)$ 相互独立。本研究首先分析了随机微分方程(1.12)解析解的性质，在此基础上，利用改进截断 Euler-Maruyama (EM) 数值方法，证明了该数值方法在有限时间区间内具有强收敛性。

第 2 章 预备知识

本章主要介绍一些后续研究涉及的符号和相关理论基础，这些预备知识主要参考 Øksendal^[43]、张波，张景肖^[44]、Cont, Tankov^[45]和 Mao^[46]。

2.1 符号说明

假定 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ 是一个完备的概率空间， Ω 是样本空间， $\mathcal{F}$ 是 Ω 上的 σ 代数， $\mathbb{P}$ 为 $\mathcal{F}$ 上的概率测度，域流 $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ 满足通常的条件（单调递增，右连续并且 $\mathcal{F}_0$ 包含所有的零测集）。

A^c ：表示集合 A 在样本空间中的补集。

$a \wedge b$ ：表示 a 和 b 中取最小值。

$a \vee b$ ：表示 a 和 b 中取最大值。

$\mathbb{E}X$ ：表示随机变量 X 的数学期望。

$\mathbb{R}_+$ ：表示 $[0, \infty)$ 的非负实数集合。

$\mathbb{R}^n$ ：表示 n 维的欧氏空间。

$\mathbb{I}_a$ ：表示 a 的指示函数，可表示为 $\mathbb{I}_{a(x)} = \begin{cases} 1, x \in a, \\ 0, x \notin a. \end{cases}$ 。

$|a|$ ：表示向量 a 的欧氏范数。

$C([- \tau, 0]; \mathbb{R}_+)$ ：表示所有从区间 $[- \tau, 0]$ 映射到非负实数集 $\mathbb{R}_+$ 的连续函数 ξ 所构成的空间，其范数定义为 $\|\xi\| = \sup_{- \tau \leq t \leq 0} \xi(t)$ 。

$L^q(\Omega; \mathbb{R})$ ：表示定义在集合 Ω 上取值为实数集 $\mathbb{R}$ 中，且 q 次可积函数的空间，一般表示为 L^q 。

a.s.：表示几乎必然或发生事件的概率为 1。

$\mathcal{L}^q(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$ ：表示对任意的 $T > 0$ ，满足 $\int_0^T |f(s)|^q dt < \infty$ a.s.，且取值范围为 $\mathbb{R}$

的 $\mathcal{F}_t$ 适应的随机过程 $f(t)_{t \geq 0}$ 所构成的集合。

C ：表示与步长 Δ 无关的正常数，其具体值无需明确给出， C 在不同位置可能代表不同的值。

2.2 相关理论基础

定义 2.1^[43]：给定样本空间 Ω ， $\mathcal{F}$ 是 Ω 的子集族并且满足以下性质：

- (1) $\phi \in \mathcal{F}$,
- (2) $F \in \mathcal{F} \Rightarrow F^C \in \mathcal{F}$, 其中 $F^C = \Omega \setminus F$ 是集合 F 的补集,
- (3) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow A := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$, 则称 $\mathcal{F}$ 为样本空间 Ω 上的 σ -代数, $(\Omega, \mathcal{F})$ 为一个可测空间。

定义 2.2^[43]：可测空间 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的函数 $P: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$, 满足：

- (1) $P(\phi) = 0, P(\Omega) = 1$;
- (2) 如果 $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ 并且对于互不相交的序列 $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ (即 $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \phi$), 满足

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

则 P 称为测度空间 $(\Omega, \mathcal{F})$ 概率测度, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为一个概率空间。如果 $\mathcal{F}$ 包括 Ω 中 P 外侧度为零的所有子集, 即 $P^*(G) = \inf \{P(F) : F \in \mathcal{F}, G \subset F\} = 0$, 则称 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为完备的概率空间。

定义 2.3^[43]：令任意函数 $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, X 在 Ω 上所有的开集 $X^{-1}(U)$ (其中 $U \in \mathbb{R}^n$ 为开集最小 σ -代数) 生成的 σ -代数 $\mathcal{H}_X$, 即：

$$\mathcal{H}_X = \{X^{-1}(B), B \in \mathcal{B}\},$$

其中 $\mathcal{B}$ 为 Borel σ -代数。

定义 2.4^[44]：随机过程 $\{N(t), t \geq 0\}$, 若 $N(t)$ 表示事件在时间区间 $[0, t]$ 发生的次数, 满足以下特性：

(1) $N(t) \geq 0$ 且 $N(t)$ 取值为整数

(2) $s < t$ 时, $N(s) \leq N(t)$ 并且 $N(t) - N(s)$ 表示 $(s, t]$ 时刻内发生的次数。

$\{N(t), t \geq 0\}$ 称为计数过程。

定义 2.5^[44]: 计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 称为参数 $\lambda (\lambda > 0)$ 的 Poisson 过程如果:

(1) $N(0) = 0$;

(2) 过程有独立增量;

(3) 对于任意的 $s, t \geq 0$,

$$P\{N(t-s) - N(s) = n\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, n = 0, 1, 2, \dots$$

定义 2.6^[44]: 若随机过程 $B(t)$ 满足以下条件:

(1) $B(0) = 0$;

(2) $B(t)$ 有独立平稳的增量;

(3) 对每个 $t > 0$, $B(t)$ 服从正态分布 $N(0, \sigma^2 t)$ 。

则称 $B(t)$ 为 Brown 运动, 也称为 Wiener 过程。

定义 2.7^[43]: 在 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的滤波 $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_t\}_{t \geq 0}$ 是 σ -代数 $\mathcal{M}_t \subset \mathcal{F}$ 的族, 满足 $0 \leq s < t \Rightarrow \mathcal{M}_s \subset \mathcal{M}_t$ ($\{\mathcal{M}_t\}$ 是递增的)。一个 n 维随机过程 $\{M_t\}_{t \geq 0}$ 被称为关于滤波 $\{\mathcal{M}_t\}_{t \geq 0}$ (以及 $\mathbb{P}$) 的鞅, 如果满足以下条件

(1) 对于任意的 t , M_t 是 $\mathcal{M}_t$ 可测的,

(2) 对于任意的 t , $\mathbb{E}|M_t| < \infty$,

(3) 对于全部的 $s \geq t$, 都有 $\mathbb{E}[M_s | \mathcal{M}_t] = M_t$ 。

引理 2.1^[45]: (带 Poisson 跳的 Itô 公式) 令 $X(t)$ 为 d 维的 Itô 过程, 满足:

$$X(t) = X_0 + \int_0^t f(s) ds + \int_0^t g(s) dB(s) + \int_0^t h(s^-) dN(s), t \geq 0,$$

其中 $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$, $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^{d \times m})$, $h \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$, $B(t)$ 为 m 维的 Brown 运动,

$N(t)$ 是一个标准的 Poisson 过程, 补偿的 Poisson 过程为 $\tilde{N}(t) = N(t) - \lambda t$, 其中 λ 表示跳的强度, $N(t)$ 与 $B(t)$ 相互独立。假定 $V \in C^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$, 有

$$\begin{aligned} V(X(t)) = & V(X_0) + \int_0^t \left(V_x(X(s)) f(s) + \frac{1}{2} \text{tr} \left[g^T(s) V_{xx}(X(s)) g(s) \right] \right) ds \\ & + \lambda \int_0^t (V(X(s) + h(s)) - V(X(s))) ds + \int_0^t V_x(X(s)) g(s) dB(s) \\ & + \int_0^t (V(X(s^-) + h(s^-)) - V(X(s^-))) d\tilde{N}(s), \end{aligned}$$

其中 $V_x = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_d} \right)$, $V_{xx} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{d \times d}$ 。

引理 2.2^[46]: (Hölder 不等式) 令 $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 当 $f \in L^p, g \in L^q$, 可以得到

到

$$\left| \int_{\Omega} f(s) g(s) ds \right| \leq \left(\int_{\Omega} |f(s)|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |g(s)|^q ds \right)^{\frac{1}{q}}.$$

引理 2.3^[46]: (Gronwall 不等式) 令 $u(t)$ 是一个非负函数且满足在 $[0, T]$ 上是 Borel 可测的, $v(t)$ 是 $[0, T]$ 上可积的非负函数。当 $T > 0, c > 0$, 对于任意的 $t \in [0, T]$

$$u(t) \leq c + \int_0^t v(s) u(s) ds,$$

可以得到对于任意的 $t \in [0, T]$

$$u(t) \leq c \exp \left(\int_0^t v(s) ds \right).$$

引理 2.4^[46]: (Doob 鞅不等式) 设 $\{M_s\}_{s \geq 0}$ 为鞅且取值为 $\mathbb{R}^d$, $[a, b]$ 为有界区间,

当 $r > 1$ 并且 $M_s \in L^p$, 则

$$\mathbb{E} \left[\sup_{a \leq s \leq b} |M_s|^r \right] \leq \left(\frac{r}{r-1} \right)^r \mathbb{E} |M_b|^r.$$

引理 2.5^[46]: (Burkholder-Davis-Gundy 不等式) 设 $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^{d \times m})$, 令 $t \geq 0$,

存在一个正常数 K_r (依赖于 r) 可得

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq t} \left| \int_0^s g(Z) dB(Z) \right|^r \right] \leq K_r \mathbb{E} \left(\int_0^t |g(Z)|^2 dZ \right)^{\frac{r}{2}}, \forall r > 0$$

其中 $K_r = \left(\frac{32}{r}\right)^{\frac{1}{2}}, r \in (0, 2); K_r = 4, r = 2; K_r = \left[\frac{r^{r+1}}{2(r-1)^{r-1}}\right]^{\frac{1}{2}}, r > 2$.

引理 2.6^[46] (指数鞅不等式) 若 $g = (g_1, \dots, g_m) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^{1 \times m})$,

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq T} \left[\int_0^t g(z) dB(z) - \frac{a}{2} \int_0^t |g(z)|^2 dz \right] > b \right) \leq \exp(-ab).$$

其中 T, a, b 为正常数。

第3章 带 Poisson 跳的 Ait-Sahalia 模型部分截断的数值分析

本章主要采用部分截断 Euler-Maruyama (EM) 数值方法对带 Poisson 跳的 Ait-Sahalia 模型进行数值分析。首先, 详细介绍了带 Poisson 跳的 Ait-Sahalia 模型, 并在适当的条件下, 分析了模型数值解的相关性质以及系数所需满足的条件。其次, 构建了部分截断 EM 数值方法, 并深入研究了其性质, 为后续强收敛性分析奠定基础。最后, 证明了该数值方法的数值解能够强收敛到模型的真实解, 且得到了收敛速率。

3.1 带 Poisson 跳的 Ait-Sahalia 模型

考虑以下带 Poisson 跳的 Ait-Sahalia 模型:

$$\begin{cases} dx(t) = (a_{-1}x^{-1}(t) - a_0 + a_1x(t) - a_2x^\gamma(t))dt + \sigma x^\theta(t)dB(t) + h(x(t^-))dN(t), t \geq 0 \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (3.1)$$

其中 $h(\cdot)$ 为线性增长函数, $a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \lambda, \gamma, \theta, x_0$ 均为正常数, 并且 $\theta > 1, \gamma > 1$ 。 $B(t)$ 是标准的布朗运动, $N(t)$ 是标准的 Poisson 过程, 补偿的 Poisson 过程为 $\tilde{N}(t) = N(t) - \lambda t$, 其中 λ 表示跳强度; $N(t)$ 与 $B(t)$ 相互独立。

定义模型(3.1)的系数:

$$f(x) = F_1(x) + F(x) = a_{-1}x^{-1} - a_0 + a_1x - a_2x^\gamma, \quad g(x) = \sigma x^\theta. \quad (3.2)$$

其中 $F_1(x) = a_{-1}x^{-1} - a_0$, $F(x) = a_1x - a_2x^\gamma$. 对于任意的 $x > 0$ 。

为了保证我们后续的分析, 我们需要对模型(3.1)的超线性系数做出以下假设。

假设 3.1 模型(3.1)的系数满足

$$1 + \gamma > 2\theta.$$

在后续证明默认假设 3.1 成立。以下是关于模型系数所需满足的条件, 以及模型数值解的有界性和停时存在性的分析。

引理 3.1 对于任意的 $R > 0$, 存在与 x, y 无关的正常数 L_R, α, β 使得

$$|F_1(x) - F_1(y)| \vee |h(x) - h(y)| \leq L_R |x - y| \quad (3.3)$$

$$|F(x) - F(y)| \vee |g(x) - g(y)| \leq L_R (1 + x^{\gamma-1} + x^{-2} + y^{\gamma-1} + y^{-2}) |x - y|, \quad (3.4)$$

其中 $x, y \in [\frac{1}{R}, R]$ 。

根据引理 3.1, 存在一个正常数 K_1 可得

$$|F_1(x)| \vee |h(x)| \leq K_1 (1 + |x|), \forall x \in [\frac{1}{R}, R],$$

根据(3.4), $x, y \in [\frac{1}{R}, R]$ 存在一个正常数 K_2 得到:

$$|F(x) - F(y)| \vee |g(x) - g(y)| \leq K_2 R^{\gamma-1\vee 2} |x - y|.$$

引理 3.2 (Khasminskii-型条件) 对于任意的 $r \geq 2$, 存在正常数 K_3 , 模型的系数满足

$$xf(x) + \frac{r-1}{2} |g(x)|^2 \leq K_3 (1 + |x|^2), \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

根据引理 3.2, 可以得出模型的非线性部分满足

$$xF(x) + \frac{r-1}{2} |g(x)|^2 \leq (K_\sigma + a_{-1}) (1 + |x|^2), \forall x \in \mathbb{R}^+,$$

其中 $K_3 = [a_{-1} + K_\sigma] \vee a_1$, $K_\sigma = -a_2 x^{\gamma+1} + \frac{r-1}{2} \sigma^2 x^{2\theta}$.

引理 3.3 当 $p \geq 2$ 使得

$$\langle x - y, f(x) - f(y) \rangle + \frac{p-1}{2} |g(x) - g(y)|^2 \leq L_1 |x - y|^2, \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

其中 L_1 为正常数, 参考文献^[40]。

引理 3.4 对于任意的 $r \geq 2$ 存在正常数 C_1 模型的数值解满足

$$\sup_{0 \leq t \leq T} (\mathbb{E} |x(t)|^r) \leq C_1.$$

在第 4 章定理 4.1 中证明, 同时可以得到引理 3.5。

引理 3.5 给定足够大的正整数 R 且满足条件: $\frac{1}{R} < x(0) < R$

定义停时：

$$\tau_R = \inf\{t > 0 : x(t) \notin [1/R, R]\}, \quad (3.5)$$

对于任意的 $\varepsilon \in (0, 1)$

$$\mathbb{P}(\tau_R \leq T) \leq \varepsilon.$$

3.2 部分截断 EM 数值方法

在部分截断 EM 方法中，我们采取仅截断 Ait-Sahalia 模型系数的非线性部分，即 F 和 g 。定义 $u: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ 的一个单调递增函数，当 $R \rightarrow \infty$ 时， $u(R) \rightarrow \infty$ ，并且模型的非线性部分与该函数满足

$$\sup_{1/R \leq x \leq R} |F(x)| \vee g(x) \leq u(R), \forall R \geq 1,$$

我们定义 u^{-1} 表示 u 的反函数。存在一个正常数 $\hat{h}$ 并定义一个严格递减的函数 $\psi: (0, 1] \rightarrow [u(1), +\infty)$ ，对于任意的 $\Delta \in (0, 1]$ ，能够得到

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \psi(\Delta) \rightarrow \infty, \Delta^{1/4} \psi(\Delta) \leq \hat{h}, \mu^{-1}(\psi(1)) \geq K_0, \quad (3.6)$$

其中 $K_0 := \frac{1}{X_0} \vee X_0 \vee \frac{1}{a_{-1}} \vee |a_2|^{1/\gamma}$ 。

给定 $\Delta \in (0, 1]$ ，定义截断映射

$$\pi_\Delta(x) = \frac{1}{u^{-1}(\psi(\Delta))} \vee (x \wedge u^{-1}(\psi(\Delta))), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3.7)$$

根据映射函数的定义，当 $x \in (0, \frac{1}{u^{-1}(\psi(\Delta))})$ ， $|\pi_\Delta(x)| = \frac{1}{u^{-1}(\psi(\Delta))} < 1$ 并且当

$x \geq u^{-1}(\psi(\Delta))$ 时， $|\pi_\Delta(x)| \leq |x|$ ，因此我们能够得到

$$|\pi_\Delta(x)| \leq \max(1, |x|), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3.8)$$

结合(3.7)，能够得到对于任意的 $p > 0$ ：

$$|\pi_\Delta(x)|^p \leq 1 + |x|^p. \quad (3.9)$$

定义部分截断函数：

$$F_{\Delta}(x) = F(\pi_{\Delta}(x)), g_{\Delta}(x) = g(\pi_{\Delta}(x)), \forall x \in \mathbb{R},$$

$$f_{\Delta}(x) = F_{\Delta}(x) + F_1(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

因此可得

$$|F_{\Delta}(x)| \vee |g_{\Delta}(x)| \leq \psi(\Delta), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3.10)$$

接下来我们根据截断函数来定义部分截断 EM 的格式。

给定 $\Delta \in \mathcal{T}_N, N \in \mathbb{N}$ ，定义部分截断 EM 数值方法：

$$\begin{aligned} X_{\Delta}(t_{k+1}) &= X_{\Delta}(t_k) + f_{\Delta}(X_{\Delta}(t_k))\Delta + g_{\Delta}(X_{\Delta}(t_k))\Delta B_k + h(X_{\Delta}(t_k^-))\Delta N_k, k \geq 0, \\ X_{\Delta}(0) &= X_0, \end{aligned} \quad (3.11)$$

其中 $k = 0, 1, 2, \dots$ ，这里的 $\Delta B_k = B(t_{k+1}) - B(t_k), \Delta N_k = N(t_{k+1}) - N(t_k), t_k = k\Delta$ 。

定义阶梯型的数值解：

$$\bar{x}_{\Delta}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_{\Delta}(t_k) \mathbb{I}_{[t_k, t_{k+1})}(t), \forall t \geq 0. \quad (3.12)$$

其中 $\mathbb{I}$ 表示示性函数。定义在 $t \geq 0$ 上的连续型截断 EM 解 $x_{\Delta}(t)$ ：

$$x_{\Delta}(t) = X_0 + \int_0^t f_{\Delta}(\bar{x}_{\Delta}(s))ds + \int_0^t g_{\Delta}(\bar{x}_{\Delta}(s))dB(s) + \int_0^t h(\bar{x}_{\Delta}(s^-))dN(s). \quad (3.13)$$

接下的引理说明截断函数 f_{Δ} 和 g_{Δ} 很好的保留了 Khasminskii-型条件。

引理 3.6 对于任意的 $r \geq 2$ 截断函数满足

$$xf_{\Delta}(x) + \frac{r-1}{2}|g_{\Delta}(x)|^2 \leq \bar{K}_3(1+|x|^2),$$

其中 $\bar{K}_3 = K_4 \vee 2K_3$ 是一个与 Δ 无关的正常数。

证明：对于任意的 $x \in \mathbb{R}$ ，当 $x \in (0, \frac{1}{u^{-1}(\psi(\Delta))})$ ，我们能够得到 $xu^{-1}(\psi(\Delta)) \in (0, 1)$ ，

此时 $|\pi_{\Delta}(x)| = \frac{1}{u^{-1}(\psi(\Delta))} < 1$ ，因此

$$xf_{\Delta}(x) + \frac{r-1}{2}|g_{\Delta}(x)|^2 = x(F_1(x) + F_{\Delta}(x)) + \frac{r-1}{2}|g(x)|^2$$

$$\leq |x| |F_1(x)| + xu^{-1}(\psi(\Delta)) \frac{1}{u^{-1}(\psi(\Delta))} f\left(\frac{1}{u^{-1}(\psi(\Delta))}\right) + \frac{r-1}{2} \left| g\left(\frac{1}{u^{-1}(\psi(\Delta))}\right) \right|^2. \quad (3.14)$$

根据引理 3.1 和引理 3.2 可得

$$\begin{aligned} xf_{\Delta}(x) + \frac{r-1}{2} |g_{\Delta}(x)|^2 &\leq \bar{K}_1(1+|x|^2) + 2K_3 + \frac{r-1}{2} \sigma^2 \left| \frac{1}{u^{-1}(\psi(\Delta))} \right|^{2\theta} \\ &\leq K_4(1+|x|^2). \end{aligned} \quad (3.15)$$

其中 $K_4 = \bar{K}_1 + 2K_3 + \frac{r-1}{2} \lambda^2$, K_3 为引理 3.2 中的正常数。

当 $x \in [\frac{1}{u^{-1}(\psi(\Delta))}, u^{-1}(\psi(\Delta))]$ 时, 根据(3.7)与引理 3.1 得

$$xf_{\Delta}(x) + \frac{r-1}{2} |g_{\Delta}(x)|^2 = xf(x) + \frac{r-1}{2} |g(x)|^2 \leq K_3(1+|x|^2).$$

当 $x > u^{-1}(\psi(\Delta))$ 时, 根据文献^[39]可得 $xf_{\Delta}(x) + \frac{r-1}{2} |g_{\Delta}(x)|^2 \leq 2K_3(1+|x|^2)$ 。

证毕。

3.3 部分截断 EM 数值方法的性质

建立数值方法收敛性分析的核心步骤是证明数值解的边界性。根据文献^[48]的引理 3.7, 我们同样可以证明引理 3.7 也成立。

引理 3.7 对于任意的 $r \geq 2$, 根据引理 3.1 和引理 3.3 可得:

$$\sup_{0 < \Delta < 1} \sup_{0 < t < T} \mathbb{E} |x_{\Delta}(t)|^r \leq C, \forall T > 0.$$

其中 C 为一个无关与 Δ 的正常数。

引理 3.8 对于任意 $\Delta \in (0, 1]$ 和 $t \in (0, \infty)$

$$\mathbb{E} |x_{\Delta}(t) - \bar{x}_{\Delta}(t)|^r \leq C_r (\Delta^r u^{-1}(\psi(\Delta))^r + \Delta^{\frac{r}{2}} + \Delta), r \geq 2,$$

$$\mathbb{E} |x_{\Delta}(t) - \bar{x}_{\Delta}(t)|^r \leq C_r (\Delta^r u^{-1}(\psi(\Delta))^r + \Delta^{\frac{r}{2}}), 0 < r < 2.$$

对于任意的 $r > 0$, 我们有

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \mathbb{E} |x_{\Delta}(t) - \bar{x}_{\Delta}(t)|^r = 0.$$

证明：结合(3.9)中易得

$$\pi_{\Delta}(x) \leq 1 + |x|, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3.16)$$

因此，

$$\begin{aligned} |f_{\Delta}(\bar{x}_{\Delta}(s))| &= |F_1(\bar{x}_{\Delta}(s)) + F(\pi_{\Delta}(\bar{x}_{\Delta}(s)))| \\ &\leq a_{-1} \frac{1}{\pi_{\Delta}(\bar{x}_{\Delta}(s))} + a_0 + a_1 \bar{x}_{\Delta}(s) + a_2 |\pi_{\Delta}(\bar{x}_{\Delta}(s))|^{\gamma} \\ &\leq a_{-1} u^{-1}(\psi(\Delta)) + a_0 + a_1 \bar{x}_{\Delta}(s) + a_2 |1 + \bar{x}_{\Delta}(s)|^{\gamma} \\ &\leq K_5 (u^{-1}(\psi(\Delta)) + |\bar{x}_{\Delta}(s)|^{\gamma}) \end{aligned} \quad (3.17)$$

其中 $K_5 = 2^{\gamma}(a_{-1} + a_0 + a_1 + a_2)$ 。

$$|g_{\Delta}(\bar{x}_{\Delta}(s))| = |g(\pi_{\Delta}(\bar{x}_{\Delta}(s)))| = \sigma |\pi_{\Delta}(\bar{x}_{\Delta}(s))|^{\theta}, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3.18)$$

给定 $t \in [t_k, t_{k+1})$ ，我们有 $\bar{x}_{\Delta}(t_k) = x_{\Delta}(t_k) = X_{\Delta}(t_k)$ 。对于任意的 $r \geq 2$ ，结合(3.17)、(3.18)和引理 3.7，

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}|x_{\Delta}(t) - \bar{x}_{\Delta}(t)|^r \\ &\leq 3^{r-1} (\mathbb{E} \left| \int_{t_k}^t f_{\Delta}(\bar{x}_{\Delta}(s)) ds \right|^r + \mathbb{E} \left| \int_{t_k}^t g_{\Delta}(\bar{x}_{\Delta}(s)) dB(s) \right|^r + \mathbb{E} \left| \int_{t_k}^t h(\bar{x}_{\Delta}(s)) dN(s) \right|^r) \\ &\leq C_r (\Delta^{r-1} \mathbb{E} \left| \int_{t_k}^t |f_{\Delta}(\bar{x}_{\Delta}(s))|^r ds + \Delta^{r-2} \mathbb{E} \left(\int_{t_k}^t |g_{\Delta}(\bar{x}_{\Delta}(s))|^r ds \right) + \mathbb{E} \left| \int_{t_k}^t h(\bar{x}_{\Delta}(s)) dN(s) \right|^r \right) \quad (3.19) \\ &\leq C_r (\Delta^r [u^{-1}(\psi(\Delta))]^r + |x_{\Delta}(s)|^{\gamma r}] + \Delta^{\frac{r}{2}} (1 + |x_{\Delta}(s)|^{\theta r}) + \Delta (1 + |x_{\Delta}(s)|^r)) \\ &\leq C_r (\Delta^r u^{-1}(\psi(\Delta))^r + \Delta^{\frac{r}{2}} + \Delta) \end{aligned}$$

对于任意的 $0 < r < 2$ 时，根据(3.19)和 Jensen 不等式可得：

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|x_{\Delta}(t) - \bar{x}_{\Delta}(t)|^r &\leq [\mathbb{E}(|x_{\Delta}(t) - \bar{x}_{\Delta}(t)|^2)]^{\frac{r}{2}} \\ &\leq C_r (\Delta^2 u^{-1}(\psi(\Delta))^2 + \Delta)^{\frac{r}{2}} (1 + |x_{\Delta}(t)|^r) \\ &\leq C_r (\Delta^r u^{-1}(\psi(\Delta))^r + \Delta^{\frac{r}{2}}) \end{aligned}$$

证毕。

引理 3.9 对于任意的实数 $R > K_0$ ，定义停时：

$$\rho_{\Delta,R} = \inf\{t \in [0, T] : x_{\Delta}(t) \notin (\frac{1}{R}, R)\}, \forall \Delta \in (0, 1). \quad (3.20)$$

对于每一个 $\Delta \in (0, 1)$

$$\mathbb{P}(\rho_{\Delta,R} \leq T) \leq \varepsilon.$$

证明：定义一个 C^2 函数 $H: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$H(x) = \frac{1}{x^2} + x^2. \quad (3.21)$$

其中

$$H'(x) = \frac{dH(x)}{dx}, H''(x) = \frac{d^2H(x)}{dx^2}. \quad (3.22)$$

根据函数 $x \rightarrow \infty$ 或 $x \rightarrow 0$ 时, $H(x) \rightarrow \infty$ 。对于任意 $t \in [0, T]$, 根据 *Itô* 公式可得:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[H(x_\Delta(t \wedge \rho_{\Delta,R}))] \\ &= H(X_0) + \mathbb{E} \int_0^{t \wedge \rho_{\Delta,R}} [H'(x_\Delta(s)) f_\Delta(\bar{x}_\Delta(s)) + \frac{1}{2} H''(x_\Delta(s)) |g_\Delta(\bar{x}_\Delta(s))|^2] \\ & \quad + \lambda H(x_\Delta(s) + h(\bar{x}_\Delta(s))) - H(x_\Delta(s))] ds \\ &\leq H(X_0) + \mathbb{E} \int_0^{t \wedge \rho_{\Delta,R}} [H'(x_\Delta(s)) f_\Delta(x_\Delta(s)) + \frac{1}{2} H''(x_\Delta(s)) |g_\Delta(x_\Delta(s))|^2] \\ & \quad + H'(x_\Delta(s)) [f_\Delta(x_\Delta(s)) - f_\Delta(\bar{x}_\Delta(s))] + \frac{1}{2} H''(x_\Delta(s)) [|g_\Delta(x_\Delta(s))|^2 - |g_\Delta(\bar{x}_\Delta(s))|^2] \\ & \quad + \lambda (H(x_\Delta(s) + h(\bar{x}_\Delta(s))) - H(x_\Delta(s)))] ds \end{aligned} \quad (3.23)$$

根据引理 3.1, 我们有对于任意的 $s \in [0, t \wedge \rho_{\Delta,R}]$

$$\begin{aligned} & |f_\Delta(x_\Delta(s)) - f_\Delta(\bar{x}_\Delta(s))| \\ &\leq |F_1(x_\Delta(s)) - F_1(\bar{x}_\Delta(s))| + |F(\pi_\Delta(x_\Delta(s))) - F(\pi_\Delta(\bar{x}_\Delta(s)))| \\ &\leq L_R |x_\Delta(s) - \bar{x}_\Delta(s)| + K_2 R^{\gamma-1\vee 2} |\pi_\Delta(x_\Delta(s)) - \pi_\Delta(\bar{x}_\Delta(s))|, \end{aligned} \quad (3.24)$$

结合(3.9)和(3.23)我们能够得到

$$K_2 R^{\gamma-1\vee 2} |\pi_\Delta(x_\Delta(s)) - \pi_\Delta(\bar{x}_\Delta(s))| \leq K_2 R^{\gamma-1\vee 2} |x_\Delta(s) - \bar{x}_\Delta(s)|. \quad (3.25)$$

同理

$$|g_\Delta(x_\Delta(s)) - g_\Delta(\bar{x}_\Delta(s))| \leq K_2 R^{\gamma-1\vee 2} |x_\Delta(s) - \bar{x}_\Delta(s)|. \quad (3.26)$$

因此,

$$\begin{aligned} & \left| |g_\Delta(x_\Delta(s))|^2 - |g_\Delta(\bar{x}_\Delta(s))|^2 \right| \\ &\leq |g_\Delta(x_\Delta(s)) + g_\Delta(\bar{x}_\Delta(s))| |g_\Delta(x_\Delta(s)) - g_\Delta(\bar{x}_\Delta(s))| \\ &\leq 2\mu(R) K_2 R^{\gamma-1\vee 2} |x_\Delta(s) - \bar{x}_\Delta(s)| \end{aligned} \quad (3.27)$$

依据函数 H 的定义和(3.22)

$$H'(x) = 2x - 2x^{-3} \leq CR^3, H''(x) = 2 + 6x^{-4} \leq CR^4, \forall x \in [1/R, R]. \quad (3.28)$$

结合(3.24)-(3.27)

$$\begin{aligned} & H'(x_\Delta(s))[f_\Delta(x_\Delta(s)) - f_\Delta(\bar{x}_\Delta(s))] + \frac{1}{2}H''(x_\Delta(s))[|g_\Delta(x_\Delta(s))|^2 - |g_\Delta(\bar{x}_\Delta(s))|^2] \\ & \leq [CR^3(L_R + K_2R^{\gamma-1\nu^2}) + 2CR^4(\mu(R)K_2R^{\gamma-1\nu^2})]|x_\Delta(s) - \bar{x}_\Delta(s)|. \end{aligned} \quad (3.29)$$

根据假设 3.1, 这里存在一个正常数 K 使得:

$$H'(x_\Delta(s))f_\Delta(x_\Delta(s)) + \frac{1}{2}H''(x_\Delta(s))|g_\Delta(x_\Delta(s))|^2 \leq K. \quad (3.30)$$

对于任意的 $x \in [\frac{1}{R}, R]$, 根据引理 3.1 有 $h(x) \leq CR$

$$\begin{aligned} & H(x_\Delta(s) + h(\bar{x}_\Delta(s))) - H(x_\Delta(s)) \\ & = |x_\Delta(s) + h(\bar{x}_\Delta(s))|^2 - |x_\Delta(s)|^2 + \frac{1}{|x_\Delta(s) + h(\bar{x}_\Delta(s))|^2} - \frac{1}{|x_\Delta(s)|^2} \\ & \leq |x_\Delta(s) + h(\bar{x}_\Delta(s))|^2 - |x_\Delta(s)|^2 + |h(\bar{x}_\Delta(s)) - h(x_\Delta(s))|^2 + \frac{1}{|x_\Delta(s)h(\bar{x}_\Delta(s))|^2} - \frac{1}{|x_\Delta(s)|^2} \\ & \leq CR^3(|\bar{x}_\Delta(s) - x_\Delta(s)|^2 + |\bar{x}_\Delta(s) - x_\Delta(s)|) \end{aligned} \quad (3.31)$$

根据引理 3.8, 对与 $\forall \Delta \in (0, 1]$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|\bar{x}_\Delta(s) - x_\Delta(s)|^2 & \leq C_r(\Delta^2 u^{-1}(\psi(\Delta))^2 + \Delta) \leq C\Delta, \\ \mathbb{E}|\bar{x}_\Delta(s) - x_\Delta(s)| & \leq C_r(\Delta^1 u^{-1}(\psi(\Delta))^1 + \Delta^{\frac{1}{2}}) \leq C\Delta^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

结合(3.29)-(3.32)得

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\rho_{\Delta, R} \leq T) \\ & \leq \frac{H(X_0) + KT + (CR^3(L_R + \hat{K}_2R^{\gamma-1\nu^2} + 1) + 2CR^4(\mu(R)\hat{K}_2R^{\gamma-1\nu^2}))\Delta^{\frac{1}{2}} + CR^3\Delta}{H(\frac{1}{R}) \wedge H(R)}. \end{aligned}$$

对于任意的 $\varepsilon \in (0, 1)$, 我们选择足够大的 R 使得

$$\frac{H(X_0) + KT}{H(\frac{1}{R}) \wedge H(R)} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

给定足够小的步长 $\Delta \in (0, 1]$ 使得

$$\frac{(CR^3(L_R + \hat{K}_2R^{\gamma-1\nu^2} + 1) + 2CR^4(\mu(R)\hat{K}_2R^{\gamma-1\nu^2}))\Delta^{\frac{1}{2}} + CR^3\Delta}{H(\frac{1}{R}) \wedge H(R)} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

证毕。

接下来是建立部分截断 EM 数值方法的强收敛理论以及强收敛阶。

3.4 部分截断 EM 方法的强收敛性

根据(3.5)和(3.20)的停时 τ_R 和 $\rho_{\Delta,R}$ ，对于任意的 $t \in [0, T]$ 定义

$$\nu_{\Delta,R} = \tau_R \wedge \rho_{\Delta,R}, e_{\Delta}(t) = X(t) - x_{\Delta}(t). \quad (3.33)$$

定理 3.1 存在一个常数 $r > 2$ 使得

$$r > \gamma \bar{q}, \quad (3.34)$$

令 $q \in [2, \bar{q})$ ，我们可以得到：

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|e_{\Delta}(t \wedge \nu_{\Delta,R})|^q &\leq C \left(u^{-1}(\psi(\Delta))^{-(r-\gamma q)} + u^{-1}(\psi(\Delta))^{(r-\gamma q)} + \Delta^{\frac{q}{2}} (u^{-1}(\psi(\Delta)))^{2q} \right. \\ &\quad \left. + \Delta^q u^{-1}(\psi(\Delta))^q + \Delta^{1-\frac{(\gamma-1)q}{r}} \right). \end{aligned} \quad (3.35)$$

我们取

$$\mu(R) = L_2 R^{\gamma}, R \geq K_0, \quad (3.36)$$

其中 $L_2 = (a_{-1} + a_2) \vee \sigma$ ，根据(3.6)取

$$\psi(\Delta) = \mu(\hat{K}_0) \Delta^{-\beta}, \beta \in (0, \frac{1}{4}], \quad (3.37)$$

其中

$$\hat{K}_0 \in (\frac{1}{X_0} \vee X_0 \vee \frac{1}{a_{-1}} \vee |a_2|^{\frac{1}{\gamma}}, \infty),$$

则

$$\mathbb{E}|X(t) - x_{\Delta}(T)|^q \leq C \Delta^{\frac{\beta(r-\gamma q)}{\gamma} \wedge \frac{q(1-\frac{4\beta}{\gamma})}{2} \wedge 1 - \frac{(\gamma-1)q}{r}}. \quad (3.38)$$

证明：根据 Itô 公式可得：

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}|e_{\Delta}(t \wedge \nu_{\Delta,R})|^q \\ &\leq \mathbb{E} \int_0^{t \wedge \nu_{\Delta,R}} q e_{\Delta}(s)^{q-2} (e_{\Delta}(s)(f(X(s)) - f_{\Delta}(\bar{x}_{\Delta}(s))) + \frac{q-1}{2} |g(X(s)) - g_{\Delta}(\bar{x}_{\Delta}(s))|^2 ds \\ &\quad + \lambda \mathbb{E} \int_0^{t \wedge \nu_{\Delta,R}} |e_{\Delta}(s) + (h(X(s)) - h(\bar{x}_{\Delta}(s)))|^q - |e_{\Delta}(s)|^q ds \\ &=: I_1 + I_2 \end{aligned} \quad (3.39)$$

我们先对 I_2 进行估计，根据引理 3.1

$$\begin{aligned}
 & |X(s) - x_\Delta(s) + (h(X(s)) - h(\bar{x}_\Delta(s)))|^q \\
 & \leq 2^{q-1}(|X(s) - x_\Delta(s)|^q + |h(X(s)) - h(\bar{x}_\Delta(s))|^q) \\
 & \leq 2^{q-1}(|X(s) - x_\Delta(s)|^q + L_R |X(s) - \bar{x}_\Delta(s)|^q) \\
 & \leq c_1(|X(s) - x_\Delta(s)|^q + |x_\Delta(s) - \bar{x}_\Delta(s)|^q),
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

其中 $c_2 = 2^{q-1}(1 + 2^{q-1}L_R^q)$ ，根据引理 3.8 可以得到

$$\begin{aligned}
 I_2 & \leq \lambda(c_1 - 1) \int_0^t \mathbb{E} |e_\Delta(s \wedge \nu_{\Delta,R})|^q ds + \lambda c_1 \int_0^T \mathbb{E} |x_\Delta(s) - \bar{x}_\Delta(s)|^q ds \\
 & \leq \lambda(c_1 - 1) \int_0^t \mathbb{E} |e_\Delta(s \wedge \nu_{\Delta,R})|^q ds + C(\Delta^q u^{-1}(\psi(\Delta))^q + \Delta^{\frac{q}{2}}).
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

对与 $p > q$ ，根据基本不等式

$$(a+b)^2 \leq (1+\alpha)a^2 + (1+\frac{1}{\alpha})b^2,$$

因此，

$$\begin{aligned}
 I_1 & = \mathbb{E} \int_0^{t \wedge \nu_{\Delta,R}} q e_\Delta(s)^{q-2} (e_\Delta(s)(f(X(s)) - f_\Delta(\bar{x}_\Delta(s))) + \frac{q-1}{2} |g(X(s)) - g_\Delta(\bar{x}_\Delta(s))|^2 ds \\
 & \leq \mathbb{E} \int_0^{t \wedge \nu_{\Delta,R}} (q e_\Delta(s)^{q-2} (e_\Delta(s)(f(X(s)) - f(x_\Delta(s))) + \frac{p-1}{2} |g(X(s)) - g(x_\Delta(s))|^2 ds \\
 & \quad + \mathbb{E} \int_0^{t \wedge \nu_{\Delta,R}} (q e_\Delta(s)^{q-2} (e_\Delta(s)(f(x_\Delta(s)) - f_\Delta(\bar{x}_\Delta(s))) \\
 & \quad + \frac{(q-1)(p-1)}{2(p-q)} |g(x_\Delta(s)) - g_\Delta(\bar{x}_\Delta(s))|^2 ds \\
 & =: I_{11} + I_{12}.
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

根据引理 3.3

$$I_{11} \leq q L_1 \int_0^t \mathbb{E} |e_\Delta(s \wedge \nu_{\Delta,R})|^q ds. \tag{3.43}$$

根据基本不等式：

$$\begin{aligned}
 I_{12} & \leq \int_0^{t \wedge \nu_{\Delta,R}} (q e_\Delta(s)^{q-2} (e_\Delta(s)(f(x_\Delta(s)) - f_\Delta(x_\Delta(s))) \\
 & \quad + \frac{(q-1)(p-1)}{2(p-q)} |g(x_\Delta(s)) - g_\Delta(x_\Delta(s))|^2 ds \\
 & \quad + \int_0^{t \wedge \nu_{\Delta,R}} (q e_\Delta(s)^{q-2} (e_\Delta(s)(f_\Delta(x_\Delta(s)) - f_\Delta(\bar{x}_\Delta(s))) \\
 & \quad + \frac{(q-1)(p-1)}{2(p-q)} |g_\Delta(x_\Delta(s)) - g_\Delta(\bar{x}_\Delta(s))|^2 ds \\
 & = I_3 + I_4.
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

根据截断 EM 的定义和引理 3.1

$$\begin{aligned}
 I_3 &\leq C \mathbb{E} \int_0^{t \wedge \nu_{\Delta,R}} |e_{\Delta}(s)|^q ds \\
 &\quad + C \mathbb{E} \int_0^{t \wedge \nu_{\Delta,R}} |f(x_{\Delta}(s)) - f_{\Delta}(x_{\Delta}(s))|^q + |g(x_{\Delta}(s)) - g_{\Delta}(x_{\Delta}(s))|^q ds \\
 &\leq C \mathbb{E} \int_0^t |e_{\Delta}(s \wedge \nu_{\Delta,R})|^q ds \\
 &\quad + C \mathbb{E} \int_0^{t \wedge \nu_{\Delta,R}} \left| a_{-1} \left(\frac{1}{x_{\Delta}(s)} - \frac{1}{\pi_{\Delta}(x_{\Delta}(s))} \right) + a_2(x_{\Delta}(s)^{\gamma} - \pi_{\Delta}(x_{\Delta}(s))^{\gamma}) \right|^q \\
 &\quad + |\pi_{\Delta}(x_{\Delta}(s))^{\theta} - \pi_{\Delta}(x_{\Delta}(s))^{\theta}|^q ds \\
 &\leq C \mathbb{E} \int_0^t |e_{\Delta}(s \wedge \nu_{\Delta,R})|^q ds + C \mathbb{E} \int_0^{t \wedge \nu_{\Delta,R}} \left| \left(\frac{1}{x_{\Delta}(s)} - \frac{1}{\pi_{\Delta}(x_{\Delta}(s))} \right) \right|^q ds \\
 &\quad + C \mathbb{E} \int_0^{t \wedge \nu_{\Delta,R}} |(x_{\Delta}(s)^{\gamma} - \pi_{\Delta}(x_{\Delta}(s))^{\gamma})|^q + |\pi_{\Delta}(x_{\Delta}(s))^{\theta} - \pi_{\Delta}(x_{\Delta}(s))^{\theta}|^q ds \quad (3.45) \\
 &= I_{31} + I_{32}.
 \end{aligned}$$

根据截断函数的定义和假设 3.1 以及 Hölder 不等式可得：

$$\begin{aligned}
 I_{32} &= C \int_0^T \mathbb{E} \left[(1 + x_{\Delta}(s)^{\gamma-1} + \pi_{\Delta}(x_{\Delta}(s))^{\gamma-1})^q |\pi_{\Delta}(x_{\Delta}(s)) - x_{\Delta}(s)|^q \right] ds \\
 &\leq C \int_0^T \mathbb{E} \left[(1 + |x_{\Delta}(s)|^r + |\pi_{\Delta}(x_{\Delta}(s))|^r)^{(\gamma-1)q/r} |\pi_{\Delta}(x_{\Delta}(s)) - x_{\Delta}(s)|^{rq/(r-(\gamma-1)q)} \right]^{r-(\gamma-1)q/r} ds \\
 &\leq C \int_0^T \mathbb{E} \left[\mathbb{I}_{[|x_{\Delta}(s)| > u^{-1}(\psi(\Delta))]} |x_{\Delta}(s)|^{rq/(r-(\gamma-1)q)} \right]^{r-(\gamma-1)q/r} \\
 &\quad + \mathbb{E} \left[\mathbb{I}_{[|x_{\Delta}(s)| \leq \frac{1}{u^{-1}(\psi(\Delta))}]} |x_{\Delta}(s)|^{rq/(r-(\gamma-1)q)} \right]^{r-(\gamma-1)q/r} ds \\
 &\leq C \int_0^T \left[\left(\mathbb{P}[|x_{\Delta}(s)| > u^{-1}(\psi(\Delta))] \right)^{(r-\gamma q)/(r-(\gamma-1)q)} \left(\mathbb{E}|x_{\Delta}(s)|^r \right)^{q/(r-(\gamma-1)q)} \right]^{r-(\gamma-1)q/r} \\
 &\quad + \left[\left(\mathbb{P}[|x_{\Delta}(s)| \leq \frac{1}{u^{-1}(\psi(\Delta))}] \right)^{(r-\gamma q)/(r-(\gamma-1)q)} \left(\mathbb{E}|x_{\Delta}(s)|^r \right)^{q/(r-(\gamma-1)q)} \right]^{r-(\gamma-1)q/r} ds \\
 &\leq C \int_0^T \left(\frac{\mathbb{E}|x_{\Delta}(s)|^r}{u^{-1}(\psi(\Delta))^r} \right)^{(r-\gamma q)/r} + \left(u^{-1}(\psi(\Delta))^r \mathbb{E}|x_{\Delta}(s)|^r \right)^{(r-\gamma q)/r} ds \quad (3.46) \\
 &\leq C \left(u^{-1}(\psi(\Delta))^{-(r-\gamma q)} + u^{-1}(\psi(\Delta))^{(r-\gamma q)} \right).
 \end{aligned}$$

对于任意的 $s \in [0, t \wedge \nu_{\Delta,R}]$ ，我们有

$$\frac{1}{u^{-1}(\psi(\Delta))} \leq x_{\Delta}(s) \leq u^{-1}(\psi(\Delta)), \frac{1}{u^{-1}(\psi(\Delta))} \leq \frac{1}{\pi_{\Delta}(x_{\Delta}(s))} \leq u^{-1}(\psi(\Delta)). \quad (3.47)$$

结合(3.9)和引理 3.7 可得

$$\begin{aligned}
 I_{31} &= C\mathbb{E}\int_0^{t\wedge\nu_{\Delta,R}}\left|\left(\frac{\pi_{\Delta}(x_{\Delta}(s))-x_{\Delta}(s)}{x_{\Delta}(s)\pi_{\Delta}(x_{\Delta}(s))}\right)\right|^q ds \\
 &\leq C\left(u^{-1}(\psi(\Delta))\right)^{2q}\mathbb{E}\int_0^{t\wedge\nu_{\Delta,R}}|\pi_{\Delta}(x_{\Delta}(s))-x_{\Delta}(s)|^q ds \\
 &\leq C\left(u^{-1}(\psi(\Delta))\right)^{2q}\int_0^T\mathbb{E}|\pi_{\Delta}(x_{\Delta}(s))|^q+\mathbb{E}|x_{\Delta}(s)|^q ds \\
 &\leq C\left(u^{-1}(\psi(\Delta))\right)^{2q}\int_0^T\mathbb{E}|x_{\Delta}(s)|^q ds\leq C\left(u^{-1}(\psi(\Delta))\right)^{2q}
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

下面我们对 I_4 进行估计:

$$\begin{aligned}
 I_4 &\leq \mathbb{E}\int_0^{t\wedge\nu_{\Delta,R}}q|e_{\Delta}(s)|^{q-2}\left(\frac{1}{2}|e_{\Delta}(s)|^2+\frac{1}{2}|f_{\Delta}(x_{\Delta}(s))-f_{\Delta}(\bar{x}_{\Delta}(s))|^2\right. \\
 &\quad \left.+\frac{(q-1)(p-1)}{2(p-q)}|g_{\Delta}(x_{\Delta}(s))-g_{\Delta}(\bar{x}_{\Delta}(s))|^2\right)ds \\
 &\leq C\mathbb{E}\int_0^{t\wedge\nu_{\Delta,R}}|e_{\Delta}(s)|^q ds \\
 &\quad +\mathbb{E}\int_0^{t\wedge\nu_{\Delta,R}}|e_{\Delta}(s)|^{q-1}\left|a_{-1}\left(\frac{1}{\pi_{\Delta}(x_{\Delta}(s))}-\frac{1}{\pi_{\Delta}(\bar{x}_{\Delta}(s))}\right)+a_2\left(\pi_{\Delta}(x_{\Delta}(s))^{\gamma}+\pi_{\Delta}(\bar{x}_{\Delta}(s))^{\gamma}\right)\right| \\
 &\quad +\frac{(q-1)(p-1)}{2(p-q)}\sigma^2|e_{\Delta}(s)|^{q-2}|\pi_{\Delta}(x_{\Delta}(s))^{\theta}-\pi_{\Delta}(\bar{x}_{\Delta}(s))^{\theta}|^2 ds.
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

根据 Young 不等式可得:

$$\begin{aligned}
 |e_{\Delta}(s)|^{q-2}|\pi_{\Delta}(x_{\Delta}(s))^{\theta}-\pi_{\Delta}(\bar{x}_{\Delta}(s))^{\theta}|^2 &\leq \frac{q-2}{q}|e_{\Delta}(s)|^q+\frac{2}{q}|\pi_{\Delta}(x_{\Delta}(s))^{\theta}-\pi_{\Delta}(\bar{x}_{\Delta}(s))^{\theta}|^q \\
 |e_{\Delta}(s)|^{q-1}\left|a_{-1}\left(\frac{1}{\pi_{\Delta}(x_{\Delta}(s))}-\frac{1}{\pi_{\Delta}(\bar{x}_{\Delta}(s))}\right)+a_2\left(\pi_{\Delta}(x_{\Delta}(s))^{\gamma}-\pi_{\Delta}(\bar{x}_{\Delta}(s))^{\gamma}\right)\right| & \\
 \leq \frac{q-1}{q}|e_{\Delta}(s)|^q+\frac{1}{q}\left|a_{-1}\left(\frac{1}{\pi_{\Delta}(x_{\Delta}(s))}-\frac{1}{\pi_{\Delta}(\bar{x}_{\Delta}(s))}\right)+a_2\left(\pi_{\Delta}(x_{\Delta}(s))^{\gamma}-\pi_{\Delta}(\bar{x}_{\Delta}(s))^{\gamma}\right)\right|^q &
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

根据基本不等式可得:

$$\begin{aligned}
 I_4 &\leq C(\mathbb{E}\int_0^{t\wedge\nu_{\Delta,R}}|e_{\Delta}(s)|^q ds \\
 &\quad +\mathbb{E}\int_0^{t\wedge\nu_{\Delta,R}}\left|a_{-1}\left(\frac{1}{\pi_{\Delta}(x_{\Delta}(s))}-\frac{1}{\pi_{\Delta}(\bar{x}_{\Delta}(s))}\right)+a_2\left(\pi_{\Delta}(x_{\Delta}(s))^{\gamma}-\pi_{\Delta}(\bar{x}_{\Delta}(s))^{\gamma}\right)\right|^q \\
 &\quad +|\pi_{\Delta}(x_{\Delta}(s))^{\theta}-\pi_{\Delta}(\bar{x}_{\Delta}(s))^{\theta}|^q ds \\
 &\leq C(\mathbb{E}\int_0^{t\wedge\nu_{\Delta,R}}|e_{\Delta}(s)|^q ds+\mathbb{E}\int_0^{t\wedge\nu_{\Delta,R}}\left|\frac{1}{\pi_{\Delta}(x_{\Delta}(s))}-\frac{1}{\pi_{\Delta}(\bar{x}_{\Delta}(s))}\right|^q ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \mathbb{E} \int_0^{t \wedge \nu_{\Delta, R}} \left| \pi_{\Delta}(x_{\Delta}(s))^{\gamma} - \pi_{\Delta}(\bar{x}_{\Delta}(s))^{\gamma} \right|^q + \left| \pi_{\Delta}(x_{\Delta}(s))^{\theta} - \pi_{\Delta}(\bar{x}_{\Delta}(s))^{\theta} \right|^q ds \\
 & = I_{41} + I_{42}.
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

对于任意的 $s \in [0, t \wedge \nu_{\Delta, R}]$, 能够得到

$$\pi_{\Delta}(x_{\Delta}(s)), \pi_{\Delta}(\bar{x}_{\Delta}(s)) \in \left[\frac{1}{u^{-1}(\psi(\Delta))}, u^{-1}(\psi(\Delta)) \right]. \tag{3.52}$$

因此, 根据引理 3.7 和截断性质可得

$$\begin{aligned}
 I_{41} & = C \mathbb{E} \int_0^{t \wedge \nu_{\Delta, R}} \left| \frac{\pi_{\Delta}(x_{\Delta}(s)) - \pi_{\Delta}(\bar{x}_{\Delta}(s))}{\pi_{\Delta}(x_{\Delta}(s)) \pi_{\Delta}(\bar{x}_{\Delta}(s))} \right|^q ds \\
 & \leq C(u^{-1}(\psi(\Delta)))^{2q} \mathbb{E} \int_0^{t \wedge \nu_{\Delta, R}} |x_{\Delta}(s) - \bar{x}_{\Delta}(s)|^q ds \\
 & \leq C(u^{-1}(\psi(\Delta)))^{2q} \int_0^T \mathbb{E} |x_{\Delta}(s) - \bar{x}_{\Delta}(s)|^q ds \\
 & \leq C \Delta^{\frac{q}{2}} (u^{-1}(\psi(\Delta)))^{2q}.
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

根据基本不等式

$$\begin{aligned}
 I_{42} & \leq \mathbb{E} \int_0^{t \wedge \nu_{\Delta, R}} \left| (1 + \pi_{\Delta}(x_{\Delta}(s))^{\gamma-1} + \pi_{\Delta}(\bar{x}_{\Delta}(s))^{\gamma-1}) (\pi_{\Delta}(x_{\Delta}(s)) - \pi_{\Delta}(\bar{x}_{\Delta}(s))) \right|^q ds \\
 & \leq C \int_0^T \mathbb{E} \left[(1 + x_{\Delta}(s)^{(\gamma-1)q} + \bar{x}_{\Delta}(s)^{(\gamma-1)q}) |x_{\Delta}(s) - \bar{x}_{\Delta}(s)|^q \right] ds
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

利用 Hölder 不等式

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \left[(1 + x_{\Delta}(s)^{(\gamma-1)q} + \bar{x}_{\Delta}(s)^{(\gamma-1)q}) |x_{\Delta}(s) - \bar{x}_{\Delta}(s)|^q \right] \\
 & \leq 3^{\frac{(\gamma-1)q(r-1)}{r}} \left(\mathbb{E} (1 + |x_{\Delta}(s)|^r + |\bar{x}_{\Delta}(s)|^r) \right) \left(\mathbb{E} |x_{\Delta}(s) - \bar{x}_{\Delta}(s)|^{\frac{qr}{r-(\gamma-1)q}} \right)^{\frac{r-(\gamma-1)q}{r}}.
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

根据(3.34)易得

$$\frac{rq}{r - (\gamma-1)q} < r,$$

根据引理 3.7 和 3.8, 我们有

$$\mathbb{E} \left[(1 + x_{\Delta}(s)^{(\gamma-1)q} + \bar{x}_{\Delta}(s)^{(\gamma-1)q}) |x_{\Delta}(s) - \bar{x}_{\Delta}(s)|^q \right] \leq C \left(\Delta^q u^{-1}(\psi(\Delta))^q + \Delta^{\frac{q}{2}} + \Delta^{\frac{r-(\gamma-1)q}{r}} \right) \tag{3.56}$$

结合(3.43), (3.44), (3.46), (3.48), (3.53)和(3.56)可得

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} |e_{\Delta}(t \wedge \nu_{\Delta, R})|^q & \leq C \int_0^t \mathbb{E} |e_{\Delta}(s \wedge \nu_{\Delta, R})|^q ds + C(u^{-1}(\psi(\Delta)))^{-(r-\gamma q)} + u^{-1}(\psi(\Delta))^{(r-\gamma q)} \\
 & \quad + \Delta^{\frac{q}{2}} (u^{-1}(\psi(\Delta)))^{2q} + \Delta^q u^{-1}(\psi(\Delta))^q + \Delta^{\frac{r-(\gamma-1)q}{r}}.
 \end{aligned}$$

根据 Gronmall 不等式

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|e_{\Delta}(t \wedge \nu_{\Delta,R})|^q &\leq C \left(u^{-1}(\psi(\Delta))^{-(r-\gamma q)} + u^{-1}(\psi(\Delta))^{(r-\gamma q)} + \Delta^{\frac{q}{2}} (u^{-1}(\psi(\Delta)))^{2q} \right. \\ &\quad \left. + \Delta^q u^{-1}(\psi(\Delta))^q + \Delta^{1-\frac{(\gamma-1)q}{r}} \right). \end{aligned}$$

下面的推论给出了部分截断 EM 数值方法的收敛速率。

推论 3.1 结合(3.34)和(3.35)给出的 μ 和 ψ ，我们可以得出

$$\mu^{-1}(\psi(\Delta)) = \hat{K}_0 \Delta^{-\frac{\beta}{\gamma}}, \forall \Delta \in (0, 1].$$

将其带入(3.35)

$$\mathbb{E}|X(t) - x_{\Delta}(T)|^q \leq C \Delta^{\frac{\beta(r-\gamma q)}{\gamma} \wedge \frac{q(1-\frac{4\beta}{\gamma})}{2} \wedge 1 - \frac{(\gamma-1)q}{r}}. \quad (3.57)$$

对于全部的

$$q \in [2, \bar{q}), r \in (\gamma q \vee \bar{q}, \infty) \text{ 并且 } \beta \in (0, \frac{1}{4}],$$

则

$$\mathbb{E}|X(t) - x_{\Delta}(T)|^q \leq C \Delta^{\left[\frac{q(1-\frac{4\beta}{\gamma})}{2}\right] \wedge [1-\frac{(\gamma-1)q}{r}]}. \quad (3.58)$$

证明：选取合适的 r 满足

$$r > \frac{q(1-\frac{4\beta}{\gamma})}{2\beta} + \frac{\gamma q}{\beta}.$$

因此，

$$\frac{\beta(r-\gamma q)}{\gamma} > \frac{q(1-\frac{4\beta}{\gamma})}{2}.$$

根据(3.57)，得到(3.58)。

从(3.58)中表明，部分截断 EM 数值方法的收敛速率接近 1，当没有 Poisson 跳过程时，对于任意的 $q \geq 2$ ，部分截断的收敛速率接近 $\frac{1}{2}$ 。

3.5 本章小结

本章基于带 Poisson 跳的 Ait-Sahalia 模型系数的特点，将模型系数分为线性部分和非线性部分。从有限时间收敛的角度来看，模型系数的线性部分不会对 EM 数值方法的收敛产生影响；从稳定性的角度来看，线性部分在确保数值方法的稳定性方面起着至关重要的作用。为此，我们采用部分截断 EM 数值方法，仅

对模型的非线性部分进行截断处理。此外，针对模型非线性部分的特点，我们对截断函数进行了优化设计，进一步提升数值方法的精度和稳定性。通过理论分析，我们证明了部分截断 EM 数值方法的数值解能够强收敛到模型的真实解，并得到该数值方法的收敛速率为 1。

第 4 章 带 Poisson 跳的延迟利率模型数值解的收敛性分析

本章采用改进截断EM数值方法对带Poisson跳的延迟Ait-Sahalia模型进行收敛性分析。首先,通过对模型施加适当的条件约束,分析了模型数值解的基本性质。其次,系统地引入改进截断EM数值方法,并对其关键性质进行了理论分析,为后续收敛性证明奠定理论基础。最后,基于模型的理论性质与数值方法的特性,证明了改进截断EM数值方法的数值解能够强收敛到模型的真实解。

4.1 带 Poisson 跳的延迟 Ait-Sahalia 模型

考虑以下带 Poisson 跳的延迟 Ait-Sahalia 模型:

$$\begin{aligned} dx(t) &= (a_{-1}x^{-1}(t) - a_0 + a_1x(t) - a_2x^\rho(t))dt + D(x(t-\tau))x^\theta(t)dB(t) + \delta x(t^-)dN(t), \quad t \geq 0, \\ x(t) &= \xi(t), t \in [-\tau, 0], \end{aligned} \quad (4.1)$$

其中 a_{-1} , a_0 , a_1 , a_2 , δ 为正常数, 超线性系数 $\rho, \theta > 1$, $x(t^-) = \lim_{s \rightarrow t^-} x(s)$ 。 $B(t)$ 是标准的布朗运动, $D(\cdot)$ 是一个依赖于 $x(t-\tau)$ 的波动率函数, 其中 $\tau > 0$ 并且 $x(t-\tau)$ 表示 $x(t)$ 中的延迟; $N(t)$ 是标准的 Poisson 过程, 补偿的 Poisson 过程为 $\tilde{N}(t) = N(t) - \lambda t$, 其中 λ 表示跳强度; $N(t)$ 与 $B(t)$ 相互独立。

为了方便证明, 我们将(4.1)的系数做以下处理:

$$f(x(t)) = a_{-1}x^{-1}(t) - a_0 + a_1x(t) - a_2x^\rho(t), \quad g(x(t)) = x(t)^\theta, \quad h(x(t^-)) = \delta x(t^-). \quad (4.2)$$

在金融建模领域内, 解 $x(t)$ 通常指代资产价格或利率的变化情况。因此确保解始终为正, 是模型有效性和实际应用中不可或缺的前提。在证明存在唯一的全局正解之前, 我们需要以下假设条件。在后续的证明中均默认下面两个假设成立。

假设 4.1 波动率函数 $D: R_+ \rightarrow R_+$ 是 Borel 可测的, 且以正常数 α 为边界, 则

$$D(y) \leq \alpha, \forall y \in R_+.$$

假设 4.2 随机微分方程(4.1)的参数满足:

$$1 + \rho > 2\theta.$$

定理 4.1 对于任意的初始值

$$\xi(t) = \{x(t) : t \in [-\tau, 0]\},$$

当 $t \geq 0$ 时, (4.1) 存在一个唯一的全局正解 $x(t)$ 。

证明: 对于足够大的正整数 n 且满足 $\frac{1}{n} < x(0) < n$, 定义停时:

$$\tau_n = \inf\{t \in [0, \tau_e) : x(t) \notin [\frac{1}{n}, n]\},$$

其中 τ_e 为爆炸时间。若假设 4.1 成立, $\xi(0)$ 为任意给定的初始值, 根据文献^[38], 我们可以证明存在一个唯一的局部解 $x(t) \in (0, \tau_e]$ 。下面我们只需要证明 $\tau_\infty = \infty$ 。

定义一个函数 $H : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ 为:

$$H(x) = x^{\beta-1} + (\beta-1)x^{-1}, \beta \in (0, 1),$$

根据假设 4.1, 可得:

$$\begin{aligned} & H'(x)f(x) + \frac{1}{2}H''(x)(D(y)g(x))^2 + \lambda(H(x+\delta x) - H(x)) \\ & \leq (\beta-1)[a_{-1}(x^{\beta-3} - x^{-3}) + a_0(x^{-2} - x^{\beta-2}) + a_1(x^{\beta-1} - x^{-1}) + a_2(x^{\rho-2} - x^{\beta+\rho-2})] \\ & \quad + (\alpha^2 x^{2\theta-3} - \frac{\alpha^2}{2}(2-\beta)x^{\beta+2\theta-3}) + \lambda[(1+\delta)^{\beta-1} - 1][(1-\beta)x^{-1} - x^{\beta-1}], \end{aligned} \quad (4.3)$$

由于 $\beta \in (0, 1)$, 可以推出上式是有界的, 将上界设为 K 。根据 Itô 公式:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}H(x(T \wedge \tau_n)) \\ & = H(x_0) + \int_0^{T \wedge \tau_n} H'(s)f(s) + \frac{1}{2}H''(s)(D(y)g(s))^2 + \lambda(H(s+\delta s) - H(s))ds \\ & \leq H(x_0) + KT, \end{aligned} \quad (4.4)$$

易得:

$$\mathbb{P}(\tau_n \leq T)[H(\frac{1}{n}) \wedge H(n)] \leq \mathbb{E}H(x(T \wedge \tau_n)) \leq H(x_0) + KT,$$

因此:

$$\mathbb{P}(\tau_n \leq T) \leq \frac{H(x_0) + KT}{H(\frac{1}{n}) \wedge H(n)}. \quad (4.5)$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $H(\frac{1}{n})$ 与 $H(n)$ 趋于 ∞ , 故 $\mathbb{P}(\tau_n \leq T) \rightarrow 0$ 。因此可以得到 $\tau_\infty = \infty$ 。

证毕。

引理 4.1^[38] (矩有界性) 对于 $p \geq 2$ 可得:

$$\sup_{0 \leq t \leq T} (\mathbb{E} |x(t)|^p) \leq C_1.$$

其中 C_1 为不依赖 Δ 的正常数。

在文献^[27]中, 建立改进截断 EM 数值方法, 随机微分方程的漂移系数和扩散系数需要满足局部 Lipschitz 和 Khasminskii 条件。根据假设 4.1 和 4.2, 我们注意到(4.1)的系数满足局部 Lipschitz 和 Khasminskii 条件, 即:

引理 4.2: (局部 Lipschitz 条件^[38]) 对于任意的 $R > 0$, $|x| \vee |y| \leq R$, 存在 $L_R > 0$ 依赖于 R , 使得:

$$|f(x) - f(y)| \vee |g(x) - g(y)| \leq L_R |x - y|.$$

引理 4.3: (Khasminskii-型条件^[39]) 对于任意的 $p \geq 2$, 这里存在 $K_1 > 0$, 对于任意的 $x, y \in \mathbb{R}_+$ 使得系数满足:

$$xf(x) + \frac{p-1}{2} |D(y)g(x)|^2 \leq K_1(1 + |x|^2).$$

4.2 改进截断的 EM 法

我们将经典的欧拉格式与改进的截断法结合, 来逼近模型的真实解。为了定义改进截断 EM 方法, 我们首先选择足够小的 $\Delta^* > 0$ 和一个严格递减的函数 $h: (0, \Delta^*) \rightarrow (0, \infty)$ 使得:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} h(\Delta) = \infty, \lim_{\Delta \rightarrow 0} L_{h(\Delta)}^2 \Delta = 0. \quad (4.6)$$

其中 $\Delta \in (0, \Delta^*)$, $L_{h(\Delta)}$ 是将局部 Lipschitz 条件的 L_R 中的 R 替换成 $h(\Delta)$ 。

对于任意的 $\Delta \in (0, \Delta^*)$, 我们定义 f, g 的改进的截断方程:

$$f_{\Delta}(x) = \begin{cases} f(x), & |x| \leq h(\Delta), \\ \frac{|x|}{h(\Delta)} f\left(\frac{h(\Delta)x}{|x|}\right), & |x| > h(\Delta). \end{cases} \quad (4.7)$$

$g_{\Delta}(x)$ 与 $f_{\Delta}(x)$ 的定义方式相同。

对于给定的延迟 τ ，存在一个正整数 m 使得 $\tau = m\Delta$ 。利用 f_Δ 与 g_Δ 可以定义改进截断 EM 方法：

$$\begin{aligned} X(t_{k+1}) &= X(t_k) + f_\Delta(X(t_k))\Delta + D(X(t_{k-m}))g_\Delta(X(t_k))\Delta B_k + h(X(t_k^-))\Delta N_k, \quad k \geq 0, \\ X(t_k) &= \xi(t_k) \quad k = -m, -m+1, \dots, 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

其中 $\Delta B_k = B(t_{k+1}) - B(t_k)$, $\Delta N_k = N(t_{k+1}) - N(t_k)$, $t_k = k\Delta$ 。

连续性改进截断 EM 的解，如下：

$$\begin{aligned} x_\Delta(t) &= \xi(0) + \int_0^t f_\Delta(\bar{x}_\Delta(s))ds + \int_0^t D(\bar{x}_\Delta(s-\tau))g_\Delta(\bar{x}_\Delta(s))dB(s) \\ &\quad + \int_0^t h_\Delta(\bar{x}_\Delta(s^-))dN(s), \end{aligned} \quad (4.9)$$

其中 $\bar{x}_\Delta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_\Delta(t_k) \mathbb{I}_{[k\Delta, (k+1)\Delta)}(t)$, $\forall t \geq 0$, $\mathbb{I}$ 表示指示函数。

在证明改进截断 EM 方法收敛到模型的真实解之前，先给出所需该数值方法的几条引理。

引理 4.5^[47] 模型(4.1)的系数满足局部 Lipschitz 条件下，对于任意固定的 $\Delta > 0$, $t > 0$, $x, y \in \mathbb{R}_+$ 改进截断 EM 系数满足以下条件：

$$|f_\Delta(x) - f_\Delta(y)| \vee |g_\Delta(x) - g_\Delta(y)| \leq 5L_{h(\Delta)}|x - y|.$$

引理 4.6^[28] 我们可得改进的截断系数满足：

$$xf_\Delta(x) + \frac{p-1}{2}|D(y)g_\Delta(x)|^2 \leq K_2(1+|x|^2).$$

其中 $K_2 = 2K_1$ 。

引理 4.7 若假设 4.1 和 4.2 条件成立， $p \geq 2$ ， C_2 代表正常数，则：

$$\sup_{0 < \Delta < \Delta^*} \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}|X_\Delta(t)|^p \leq C_2, \quad \forall T > 0.$$

证明：根据 Itô 公式：

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}|x_\Delta(t)|^p \\ &\leq |\xi(0)|^p + \mathbb{E} \int_0^t p|x_\Delta(s)|^{p-2} (x_\Delta(s)^T f_\Delta(\bar{x}_\Delta(s)) + \frac{p-1}{2}|D(\bar{x}_\Delta(s-\tau))g_\Delta(\bar{x}_\Delta(s))|^2) \\ &\quad + \lambda \mathbb{E} \left(\int_0^t |(x_\Delta(s^-)) + h(\bar{x}_\Delta(s^-))|^p - |x_\Delta(s^-)|^p \right) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq |\xi(0)|^p + \mathbb{E} \int_0^t p |x_\Delta(s)|^{p-2} (x_\Delta(s) - \bar{x}_\Delta(s))^T f_\Delta(\bar{x}_\Delta(s)) ds \\
 &\quad + \int_0^t p |x_\Delta(s)|^{p-2} (\bar{x}_\Delta(s))^T f_\Delta(\bar{x}_\Delta(s)) + \frac{p-1}{2} |D(\bar{x}_\Delta(s-\tau))g_\Delta(\bar{x}_\Delta(s))|^2 ds \\
 &\quad + \lambda \mathbb{E} \left(\int_0^t |(x_\Delta(s^-)) + h(\bar{x}_\Delta(s^-))|^p - |x_\Delta(s^-)|^p ds \right) \\
 &= J_1 + J_2 + J_3.
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

根据引理 4.6 以及 Young 不等式

$$\begin{aligned}
 J_2 &= \mathbb{E} \int_0^t p |x_\Delta(s)|^{p-2} (\bar{x}_\Delta(s))^T f_\Delta(\bar{x}_\Delta(s)) + \frac{p-1}{2} |D(\bar{x}_\Delta(s-\tau))g_\Delta(\bar{x}_\Delta(s))|^2 ds \\
 &\leq \mathbb{E} \int_0^t p |x_\Delta(s)|^{p-2} K_2 (1 + |\bar{x}_\Delta(s)|^2) ds \\
 &\leq C(1 + \int_0^t \mathbb{E} |\bar{x}_\Delta(s)|^p + \mathbb{E} |x_\Delta(s)|^p) ds.
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

同理可证

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \mathbb{E} \int_0^t p |x_\Delta(s)|^{p-2} (x_\Delta(s) - \bar{x}_\Delta(s))^T f_\Delta(\bar{x}_\Delta(s)) ds \\
 &\leq \mathbb{E} \int_0^t p |x_\Delta(s)|^{p-2} (x_\Delta(s) - \bar{x}_\Delta(s)) (L_{h(\Delta)} |\bar{x}_\Delta(s)| + |f_\Delta(0)|) ds \\
 &\leq C(1 + \int_0^t (\mathbb{E} |x_\Delta(s)|^p + \mathbb{E} |\bar{x}_\Delta(s)|^p) ds.
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

根据 $|x+y|^p \leq 2^{p-1}(|x|^p + |y|^p)$ 不等式可得

$$\begin{aligned}
 J_3 &= \mathbb{E} \left(\int_0^t |(x_\Delta(s^-)) + h(\bar{x}_\Delta(s^-))|^p - |x_\Delta(s^-)|^p ds \right) \\
 &\leq \mathbb{E} \left(\int_0^t 2^{p-1} (|x_\Delta(s^-)|^p + \delta^p |\bar{x}_\Delta(s^-)|^p) - |x_\Delta(s^-)|^p ds \right) \\
 &\leq C(p, \delta) (1 + \int_0^t \mathbb{E} |\bar{x}_\Delta(s)|^p + \mathbb{E} |x_\Delta(s)|^p) ds.
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

结合(4.11)(4.12)和(4.13), 可得

$$\mathbb{E} |x_\Delta(t)|^p \leq C(1 + \int_0^t (\mathbb{E} |x_\Delta(s)|^p + \mathbb{E} |\bar{x}_\Delta(s)|^p) ds) \leq C(1 + \int_0^t (\sup_{0 \leq i \leq s} \mathbb{E} |x_\Delta(i)|^p) ds),$$

根据 Gronwall 不等式可得:

$$\sup_{0 \leq i \leq T} \mathbb{E} |x_\Delta(i)|^p \leq C.$$

对于任意的 $\Delta \in (0, \Delta^*)$ 成立, 可得到 $\sup_{0 < \Delta < \Delta^*} \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E} |X_\Delta(t)|^p \leq C_2, \forall T > 0$ 。

引理 4.8 对于任意的 $\Delta \in (0, \Delta^*)$, $\varepsilon \in (0, 1)$ 和 $p \geq 2$, 存在 $C > 0$ (依赖于 n , 独立于 Δ), 可得:

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} |x_\Delta(t) - \bar{x}_\Delta(t)|^p \leq C(L_{h(\Delta)}^p \Delta^{\frac{p(1-\varepsilon)}{2}} \vee \Delta).$$

证明：根据不等式 $|x+y|^p \leq 2^{p-1}(|x|^p + |y|^p)$ 得

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} |x_\Delta(t) - \bar{x}_\Delta(t)|^p \\ &= \mathbb{E} \sup_{0 \leq k \leq \lfloor \frac{T}{\Delta} \rfloor} \left(\sup_{t_k \leq t \leq t_{k+1}} |x_\Delta(t) - \bar{x}_\Delta(t_k)|^p \right) \\ &\leq \mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq k \leq \lfloor \frac{T}{\Delta} \rfloor} \sup_{t_k \leq t \leq t_{k+1}} |f_\Delta(X(t_k))\Delta + D(X(t_k - \tau))g_\Delta(X(t_k))(B(t) - B(t_k)) \right. \\ &\quad \left. + h(X(t_k))(N(t) - N(t_k))|^p \right) \\ &\leq 3^{p-1} \left(\mathbb{E} \sup_{0 \leq k \leq \lfloor \frac{T}{\Delta} \rfloor} (|f_\Delta(X(t_k))\Delta|^p + |D(X(t_k - \tau))g_\Delta(X(t_k))(B(t) - B(t_k))|^p \right. \\ &\quad \left. + |h(X(t_k))(N(t) - N(t_k))|^p) \right), \end{aligned} \quad (4.14)$$

根据假设 4.1, Hölder 不等式以及 Doob 鞅不等式可得

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} |x_\Delta(t) - \bar{x}_\Delta(t)|^p \\ &\leq C_p \Delta^p L_{h(\Delta)}^p (\mathbb{E} \sup_{0 \leq k \leq \lfloor \frac{T}{\Delta} \rfloor} (|X(t_k)|^p + |f(0)|^p)) \\ &\quad + C_p L_{h(\Delta)}^p \alpha^p (\mathbb{E} \sup_{0 \leq k \leq \lfloor \frac{T}{\Delta} \rfloor} (|X(t_k)|^p + |g(0)|^p)) \times \mathbb{E} \sup_{0 \leq k \leq \lfloor \frac{T}{\Delta} \rfloor} \sup_{t_k \leq t \leq t_{k+1}} |B(t) - B(t_k)|^p \quad (4.15) \\ &\quad + C_p \delta^p (\mathbb{E} \sup_{0 \leq k \leq \lfloor \frac{T}{\Delta} \rfloor} (|X(t_k)|^p)) \times \mathbb{E} \sup_{0 \leq k \leq \lfloor \frac{T}{\Delta} \rfloor} \sup_{t_k \leq t \leq t_{k+1}} |N(t) - N(t_k)|^p, \end{aligned}$$

其中

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq k \leq \lfloor \frac{T}{\Delta} \rfloor} \sup_{t_k \leq t \leq t_{k+1}} |N(t) - N(t_k)|^p \leq C\Delta. \quad (4.16)$$

通过选取足够大的 $n > 3$ 使得 $(\frac{2n}{2n-1})^p (T+1)^{\frac{p}{2n}} \leq 2$, 并且 $n > \frac{1}{\varepsilon}$, 根据文献^[19]和

引理 4.7:

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} |x_\Delta(t) - \bar{x}_\Delta(t)|^p \leq C(L_{h(\Delta)}^p \Delta^{\frac{p(1-\varepsilon)}{2}} \vee \Delta),$$

得证。

引理 4.9 对于任意的实数 $n \geq |\xi(0)|$, 定义停时

$$\rho_n = \inf\{t \in (0, T) : |x_\Delta(t)| \geq n\},$$

则

$$\mathbb{P}(\rho_n \leq T) \leq \frac{C}{n^2}. \quad (4.17)$$

证明：根据 *Itô* 公式

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}|x_\Delta(t \wedge \rho_n)|^2 \\ &= |\xi(0)|^2 + \mathbb{E} \int_0^{t \wedge \rho_n} 2x_\Delta(s) f_\Delta(\bar{x}_\Delta(s)) + D(\bar{x}_\Delta(s - \tau))^2 g_\Delta(\bar{x}_\Delta(s))^2 ds \\ & \quad + \lambda \mathbb{E} \int_0^{t \wedge \rho_n} ((x_\Delta(s) + h(\bar{x}_\Delta(s)))^2 - (x_\Delta(s))^2) ds \\ &= |\xi(0)|^2 + \mathbb{E} \int_0^{t \wedge \rho_n} 2\bar{x}_\Delta(s)^T f_\Delta(\bar{x}_\Delta(s)) + D(\bar{x}_\Delta(s - \tau))^2 g_\Delta(\bar{x}_\Delta(s))^2 ds \\ & \quad + \mathbb{E} \int_0^{t \wedge \rho_n} 2(x_\Delta(s) - \bar{x}_\Delta(s)) f_\Delta(\bar{x}_\Delta(s)) ds \\ & \quad + \lambda \mathbb{E} \int_0^{t \wedge \rho_n} ((x_\Delta(s) + h(\bar{x}_\Delta(s)))^2 - (x_\Delta(s))^2) ds \\ &\leq |\xi(0)|^2 + \mathbb{E} \int_0^{t \wedge \rho_n} K_2(1 + |\bar{x}_\Delta(s)|^2) ds + \mathbb{E} \int_0^{t \wedge \rho_n} 2(x_\Delta(s) - \bar{x}_\Delta(s)) f_\Delta(\bar{x}_\Delta(s)) ds \\ & \quad + \lambda \mathbb{E} \int_0^{t \wedge \rho_n} ((x_\Delta(s) + h(\bar{x}_\Delta(s)))^2 - (x_\Delta(s))^2) ds. \end{aligned} \quad (4.18)$$

根据引理 4.5 和基本不等式可得

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \int_0^{t \wedge \rho_n} 2(x_\Delta(s) - \bar{x}_\Delta(s)) f_\Delta(\bar{x}_\Delta(s)) ds \\ &\leq \mathbb{E} \int_0^{t \wedge \rho_n} 10(x_\Delta(s) - \bar{x}_\Delta(s)) L_{h(\Delta)}(|\bar{x}_\Delta(s)| + |f_\Delta(0)|) ds \\ &\leq C(\mathbb{E} \int_0^{t \wedge \rho_n} |x_\Delta(s) - \bar{x}_\Delta(s)|^2 ds + \mathbb{E} \int_0^{t \wedge \rho_n} |\bar{x}_\Delta(s)|^2 ds + 1). \end{aligned} \quad (4.19)$$

依据基本不等式可得

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \int_0^{t \wedge \rho_n} ((x_\Delta(s) + h(\bar{x}_\Delta(s)))^2 - (x_\Delta(s))^2) ds \\ &\leq \mathbb{E} \int_0^{t \wedge \rho_n} |x_\Delta(s)|^2 + 2\delta^2 |\bar{x}_\Delta(s)|^2 ds \\ &\leq C(\int_0^t \mathbb{E} |x_\Delta(s \wedge \rho_n)|^2 ds + \mathbb{E} \int_0^{t \wedge \rho_n} |x_\Delta(s) - \bar{x}_\Delta(s)|^2 ds). \end{aligned} \quad (4.20)$$

依据引理 4.8 可得

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \int_0^{t \wedge \rho_n} |x_\Delta(s) - \bar{x}_\Delta(s)|^2 ds &\leq \int_0^T (\mathbb{E} |x_\Delta(s) - \bar{x}_\Delta(s)|^p)^{2/p} ds \\ &\leq T(C(L_{h(\Delta)}^p \Delta^{\frac{p(1-\varepsilon)}{2}} \vee \Delta))^{2/p} \leq C. \end{aligned} \quad (4.21)$$

根据(4.19)(4.20)和(4.21)可得

$$\mathbb{E}|x_\Delta(t \wedge \rho_n)|^2 \leq C(1 + \int_0^t \mathbb{E}|x_\Delta(s \wedge \rho_n)|^2 ds),$$

由 Gronwall 不等式可得

$$\mathbb{E}|x_{\Delta}(T \wedge \rho_n)|^2 \leq C,$$

故

$$\mathbb{P}(\rho_n \leq T) \leq \frac{C}{n^2}.$$

结论成立。

4.3 改进截断 EM 法的收敛性

为了在有限时间内数值解收敛到 L^q 空间中的真实解，需要满足以下假设条件。

假设 4.3 这里存在一个正常数 K_3 和 $\eta \in (0, 1]$ ，对于所有的 $-\tau \leq y \leq x \leq 0$ ，使得初始值 ξ 满足以下条件：

$$|\xi(x) - \xi(y)| \leq K_3 |x - y|^\eta.$$

假设 4.4 对于任意的 $r > 0$ ， $x, \bar{x}, y, \bar{y} \in [\frac{1}{R}, R]$ 存在正常数 L_r 使得波动率函数

$D()$ 满足：

$$|D(x)g(\bar{x}) - D(y)g(\bar{y})| \leq L_r(|x - y| + |\bar{x} - \bar{y}|).$$

为了建立改进的截断 EM 解的强收敛性，我们定义停时：

$$\varepsilon_n = \tau_n \wedge \rho_n.$$

这里的 τ_n 与 ρ_n 和(4.5)和(4.17)的定义相同。

定理 4.2 若假设(4.1-4.4)成立，对于任意的 $p \geq 2$ ， $T > 0$ ，对于足够大的 n ，

$R \leq h(\Delta^*)$ 可以得到

$$\mathbb{E}(\sup_{0 \leq t \leq T} |x_{\Delta}(t \wedge \varepsilon_n) - x(t \wedge \varepsilon_n)|^p) \leq (C_3 \Delta^{p(\frac{1-\varepsilon}{2})} + C_4 (L_{h(\Delta)}^p \Delta^{p(\frac{1-\varepsilon}{2})} \vee \Delta)) e^{C_5}.$$

其中

$$C_3 = 2^{p-1} C_p T^{\frac{p-2}{2}} K_3^p \tau,$$

$$C_4 = (6^{p-1}(T^{p-1}L_{h(\Delta)}^p + C_p T^{\frac{p-2}{2}} 2^{p-1} + 2^{p-1} \delta^p (\lambda^{\frac{p}{2}} T^{\frac{p-2}{2}} C_p + \lambda^p T^{p-1})) + 4^{p-1} C_p T^{\frac{p-2}{2}}) C,$$

$$C_5 = 6^{p-1}(T^{p-1}L_{h(\Delta)}^p + C_p T^{\frac{p-2}{2}} 2^{p-1} + 2^{p-1} \delta^p (\lambda^{\frac{p}{2}} T^{\frac{p-2}{2}} C_p + \lambda^p T^{p-1})) + 4^{p-1} C_p T^{\frac{p-2}{2}}.$$

证明：根据不等式 $|x+y|^p \leq 2^{p-1}(|x|^p + |y|^p)$ 可得

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(\sup_{0 \leq t \leq t_1} |x_{\Delta}(t_1 \wedge \varepsilon_n) - x(t_1 \wedge \varepsilon_n)|^p) \\ &= \mathbb{E} \left| \int_0^{t_1 \wedge \varepsilon_n} [f_{\Delta}(\bar{x}_{\Delta}(s)) - f(x(s))] ds + \sup_{0 \leq t \leq t_1} \int_0^{t_1 \wedge \varepsilon_n} [D(\bar{x}_{\Delta}(s-\tau))g_{\Delta}(\bar{x}_{\Delta}(s)) \right. \\ & \quad \left. - D(x(s-\tau))g(x(s))] dB(s) + \sup_{0 \leq t \leq t_1} \int_0^{t_1 \wedge \varepsilon_n} [h(\bar{x}_{\Delta}(s^-)) - h(x(s^-))] dN(s) \right|^p \quad (4.22) \\ &\leq 3^{p-1} (\mathbb{E} \left| \int_0^{t_1 \wedge \varepsilon_n} [f_{\Delta}(\bar{x}_{\Delta}(s)) - f(x(s))] ds \right|^p + \mathbb{E}(\sup_{0 \leq t \leq t_1} \left| \int_0^{t_1 \wedge \varepsilon_n} [D(\bar{x}_{\Delta}(s-\tau))g_{\Delta}(\bar{x}_{\Delta}(s)) \right. \\ & \quad \left. - D(x(s-\tau))g(x(s))] dB(s) \right|^p + \mathbb{E}(\sup_{0 \leq t \leq t_1} \left| \int_0^{t_1 \wedge \varepsilon_n} [h(\bar{x}_{\Delta}(s^-)) - h(x(s^-))] dN(s) \right|^p). \end{aligned}$$

对于任意的 $\Delta \in (0, \Delta^*)$ ，这里 $R \leq h(\Delta^*)$ ，此时 $|x| \vee |y| \leq R \leq h(\Delta)$ ，显然可得

$$f_{\Delta}(\bar{x}_{\Delta}(s)) = f(\bar{x}_{\Delta}(s)), g_{\Delta}(\bar{x}_{\Delta}(s)) = g(\bar{x}_{\Delta}(s)).$$

根据引理 4.5 和 Hölder 不等式

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\left| \int_0^{t_1 \wedge \varepsilon_n} [f_{\Delta}(\bar{x}_{\Delta}(s)) - f(x(s))] ds \right|^p \right) &\leq T^{p-1} \mathbb{E} \left(\int_0^{t_1 \wedge \varepsilon_n} |f_{\Delta}(\bar{x}_{\Delta}(s)) - f_{\Delta}(x(s))|^p ds \right) \\ &\leq T^{p-1} L_{h(\Delta)}^p \mathbb{E} \left(\int_0^{t_1 \wedge \varepsilon_n} |\bar{x}_{\Delta}(s) - x(s)|^p ds \right). \end{aligned} \quad (4.23)$$

利用 Hölder 不等式以及 Burkholder-Davis-Gundy 不等式，以及假设 4.4 可得

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(\sup_{0 \leq t \leq t_1} \left| \int_0^{t_1 \wedge \varepsilon_n} [D(\bar{x}_{\Delta}(s-\tau))g_{\Delta}(\bar{x}_{\Delta}(s)) - D(x(s-\tau))g(x(s))] dB(s) \right|^p) \\ &\leq C_p T^{\frac{p-2}{2}} \mathbb{E} \left(\int_0^{t_1 \wedge \varepsilon_n} |D(\bar{x}_{\Delta}(s-\tau))g_{\Delta}(\bar{x}_{\Delta}(s)) - D(x(s-\tau))g(x(s))|^p ds \right) \quad (4.24) \\ &\leq C_p T^{\frac{p-2}{2}} 2^{p-1} (\mathbb{E}(\int_0^{t_1 \wedge \varepsilon_n} |\bar{x}_{\Delta}(s-\tau) - x(s-\tau)|^p ds) + \mathbb{E}(\int_0^{t_1 \wedge \varepsilon_n} |\bar{x}_{\Delta}(s) - x(s)|^p ds)). \end{aligned}$$

根据(4.24)利用 Doob 鞅不等式和鞅等距性可得

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(\sup_{0 \leq t \leq t_1} \left| \int_0^{t_1 \wedge \varepsilon_n} [h(\bar{x}_{\Delta}(s^-)) - h(x(s^-))] d\tilde{N}(s) \right|^p) \\ &\leq \lambda^{\frac{p}{2}} C_p \mathbb{E}(\sup_{0 \leq t \leq t_1} \int_0^{t_1 \wedge \varepsilon_n} |h(\bar{x}_{\Delta}(s^-)) - h(x(s^-))|^2 d\tilde{N}(s))^{\frac{p}{2}} \quad (4.25) \\ &\leq \lambda^{\frac{p}{2}} T^{\frac{p-2}{2}} \delta^p C_p \mathbb{E}(\int_0^{t_1 \wedge \varepsilon_n} |\bar{x}_{\Delta}(s^-) - x(s^-)|^p ds). \end{aligned}$$

利用 Hölder 不等式可得

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq t_1} \left(\left| \int_0^{t \wedge \varepsilon_n} [h(\bar{x}_\Delta(s^-)) - h(x(s^-))] ds \right|^p \right) \leq T^{p-2} \delta^p \mathbb{E} \left(\int_0^{t_1 \wedge \varepsilon_n} |\bar{x}_\Delta(s^-) - x(s^-)|^p ds \right). \quad (4.26)$$

结合(4.24)、(4.25)和(4.26)可得

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(\sup_{0 \leq t \leq t_1} |x_\Delta(t_1 \wedge \varepsilon_n) - x(t_1 \wedge \varepsilon_n)|^p) \\ & \leq 3^{p-1} (T^{p-1} L_{h(\Delta)}^p + C_p T^{\frac{p-2}{2}} 2^{p-1} + C_p \lambda \delta^p) \mathbb{E} \left(\int_0^{t_1 \wedge \varepsilon_n} |\bar{x}_\Delta(s) - x(s)|^p ds \right) \\ & \quad + C_p T^{\frac{p-2}{2}} 2^{p-1} \mathbb{E} \left(\int_0^{t_1 \wedge \varepsilon_n} |\bar{x}_\Delta(s-\tau) - x(s-\tau)|^p ds \right). \end{aligned} \quad (4.27)$$

我们根据假设 4.3

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\int_0^{t_1 \wedge \varepsilon_n} |\bar{x}_\Delta(s-\tau) - x(s-\tau)|^p ds \right) \\ & \leq \mathbb{E} \int_{-\tau}^0 |\xi(\lfloor s/\Delta \rfloor \Delta) - \xi(s)|^p ds + \mathbb{E} \int_0^{t_1 \wedge \varepsilon_n} |\bar{x}_\Delta(s) - x(s)|^p ds \\ & \leq K_3^p \Delta^{p\eta} \tau + \mathbb{E} \int_0^{t_1 \wedge \varepsilon_n} |\bar{x}_\Delta(s) - x(s)|^p ds. \end{aligned} \quad (4.28)$$

根据不等式 $|x+y|^p \leq 2^{p-1}(|x|^p + |y|^p)$ 可得

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \int_0^{t_1 \wedge \varepsilon_n} |\bar{x}_\Delta(s) - x_\Delta(s) + x_\Delta(s) - x(s)|^p ds \\ & \leq 2^{p-1} \mathbb{E} \left(\int_0^{t_1 \wedge \varepsilon_n} [|\bar{x}_\Delta(s) - x_\Delta(s)|^p + |x_\Delta(s) - x(s)|^p] ds \right) \\ & \leq 2^{p-1} \left(\int_0^T \mathbb{E} |\bar{x}_\Delta(s) - x_\Delta(s)|^p ds + \mathbb{E} \int_0^{t_1} \sup_{0 \leq s \leq T} |x_\Delta(s \wedge \varepsilon_n) - x(s \wedge \varepsilon_n)|^p ds \right). \end{aligned} \quad (4.29)$$

结合(4.28)和(4.29)根据引理 4.8 可得:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(\sup_{0 \leq t \leq t_1} |x_\Delta(t_1 \wedge \varepsilon_n) - x(t_1 \wedge \varepsilon_n)|^p) \\ & \leq (6^{p-1} (T^{p-1} L_{h(\Delta)}^p + C_p T^{\frac{p-2}{2}} 2^{p-1} + 2^{p-1} \delta^p (\lambda^{\frac{p}{2}} T^{\frac{p-2}{2}} C_p + \lambda^p T^{p-1})) + 4^{p-1} C_p T^{\frac{p-2}{2}}) \\ & \quad \times \mathbb{E} \int_0^{t_1} \sup_{0 \leq s \leq T} |x_\Delta(s \wedge \varepsilon_n) - x(s \wedge \varepsilon_n)|^p ds \\ & \quad + (6^{p-1} (T^{p-1} L_{h(\Delta)}^p + C_p T^{\frac{p-2}{2}} 2^{p-1} + 2^{p-1} \delta^p (\lambda^{\frac{p}{2}} T^{\frac{p-2}{2}} C_p + \lambda^p T^{p-1})) + 4^{p-1} C_p T^{\frac{p-2}{2}}) \\ & \quad \times (CL_{h(\Delta)}^p \Delta^{\frac{p(1-\varepsilon)}{2}} \vee \Delta) + 2^{p-1} C_p T^{\frac{p-2}{2}} K_3^p \tau \Delta^{p\eta}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

利用 Grownwall 不等式:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\sup_{0 \leq t \leq T} |x_\Delta(t \wedge \varepsilon_n) - x(t \wedge \varepsilon_n)|^p) & \leq (C_3 \Delta^{p(\eta \wedge \frac{1-\varepsilon}{2})} + C_4 (L_{h(\Delta)}^p \Delta^{p(\eta \wedge \frac{1-\varepsilon}{2})} \vee \Delta)) e^{C_5} \\ & \leq (C_3 \Delta^{p(\frac{1-\varepsilon}{2})} + C_4 (L_{h(\Delta)}^p \Delta^{p(\frac{1-\varepsilon}{2})} \vee \Delta)) e^{C_5}, \end{aligned}$$

当 $\Delta \rightarrow 0$ 时, $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \mathbb{E}(\sup_{0 \leq t \leq T} |x_\Delta(t \wedge \varepsilon_n) - x(t \wedge \varepsilon_n)|^p) = 0$ 成立。

定理 4.3 假设(4.1-4.4)成立成立对于任意的 $q \in [2, p)$, 可得:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \mathbb{E}(\sup_{0 \leq t \leq T} |x_\Delta(t) - x(t)|^q) = 0.$$

证明: 根据 Young 不等式可以得到

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(\sup_{0 \leq t \leq T} |x(t) - x_\Delta(t)|^q) \\ &= \mathbb{E}(\sup_{0 \leq t \leq T} |x(t) - x_\Delta(t)|^q \mathbb{I}_{\{\varepsilon_n > T\}}) + \mathbb{E}(\sup_{0 \leq t \leq T} |x(t) - x_\Delta(t)|^q \mathbb{I}_{\{\varepsilon_n \leq T\}}) \\ &\leq \mathbb{E}(\sup_{0 \leq t \leq T} |x(t \wedge \varepsilon_n) - x_\Delta(t \wedge \varepsilon_n)|^q) + \frac{q\gamma}{p} \mathbb{E}(\sup_{0 \leq t \leq T} |x(t) - x_\Delta(t)|^p) + \frac{p-q}{p\gamma^{q/(p-q)}} \mathbb{P}(\varepsilon_n \leq T). \end{aligned} \quad (4.31)$$

根据引理 4.1 和引理 4.7 可得

$$\mathbb{E}(\sup_{0 \leq t \leq T} |x(t) - x_\Delta(t)|^p) \leq 2^{p-1} \mathbb{E}(\sup_{0 \leq t \leq T} (|x(t)|^p + |x_\Delta(t)|^p)) \leq 2^p (C_1 \vee C_2). \quad (4.32)$$

对于任意的 $\Delta \in (0, \Delta^*)$, 我们选择 $\gamma = (L_{h(\Delta)}^q \Delta^{\frac{p(1-\varepsilon)}{2}} \vee \Delta)$ 使得

$$\frac{q\gamma}{p} \mathbb{E}(\sup_{0 \leq t \leq T} |x(t) - x_\Delta(t)|^p) \leq \frac{q\gamma 2^p}{p} (C_1 \vee C_2) \leq (CL_{h(\Delta)}^q \Delta^{\frac{p(1-\varepsilon)}{2}} \vee \Delta). \quad (4.33)$$

根据定理 4.1 与引理 4.9, 存在 n_0 , 当 $n \geq n_0$ 时选择 $n_0 = C^1 (L_{h(\Delta)}^q \Delta^{\frac{p(1-\varepsilon)}{2}} \vee \Delta)^{-\frac{p}{2(p-q)}}$, 使得:

$$\begin{aligned} & \frac{p-q}{p\gamma^{q/(p-q)}} \mathbb{P}(\varepsilon_n \leq T) \\ &\leq \frac{p-q}{p\gamma^{q/(p-q)}} (\mathbb{P}(\tau_n \leq T) + \mathbb{P}(\rho_n \leq T)) \\ &\leq \frac{C(p-q)}{pn^2\gamma^{q/(p-q)}} \leq C(L_{h(\Delta)}^q \Delta^{\frac{p(1-\varepsilon)}{2}} \vee \Delta). \end{aligned} \quad (4.34)$$

根据(4.32)(4.33)和(4.34)定理 4.2

$$\mathbb{E}(\sup_{0 \leq t \leq T} |x_\Delta(t \wedge \varepsilon_n) - x(t \wedge \varepsilon_n)|^p) \leq (C_3 \Delta^{p(\frac{1-\varepsilon}{2})} + C_4 (L_{h(\Delta)}^p \Delta^{p(\frac{1-\varepsilon}{2})} \vee \Delta)) e^{C_5},$$

最后, 选择合适的 $\Delta \in (0, \Delta_1]$, 对于任意的 $\varepsilon_1 \in (0, 1)$,

$$\mathbb{E}(\sup_{0 \leq t \leq T} |x(t) - x_\Delta(t)|^q) \leq (C_5 + C_6 L_{h(\Delta)}^q) \Delta^{p(\eta \wedge \frac{1-\varepsilon}{2})} \leq \varepsilon_1.$$

当 $\Delta \rightarrow 0$ 时, 结论成立。

4.4 本章小结

本章将 Poisson 跳过程与延迟波动率融入 Ait-Sahalia 模型，构建了一个符合市场利率动态模型。该模型不仅继承了 Ait-Sahalia 模型在刻画利率动态方面的高度非线性优势，还通过引入 Poisson 跳机制，有效捕捉了金融市场中的突发事件和跳跃性变动特征。此外，通过引入延迟函数，模型进一步反映了实际金融数据受历史状态影响的特性，从而更准确地描述了利率的动态行为。针对模型中漂移项与扩散项的高度非线性问题，本研究采用改进的截断 Euler-Maruyama(EM)算法进行数值求解，并证明了该算法生成的数值解能够强收敛到模型的真实解。

第5章 总结与展望

5.1 总结

随机微分方程(SDEs)因其能够有效刻画金融市场的随机动态特性而受到广泛关注。金融市场的不确定性和波动性使得传统的确定性模型难以准确描述资产价格的动态行为,尤其是在面对价格随机波动、趋势变化以及跳跃性变动等复杂特征时,确定性模型的局限性尤为明显。通过引入随机微分方程,研究者能够将随机过程(如布朗运动)纳入建模框架,从而更准确地模拟金融资产价格的动态过程。然而,由于随机微分方程的系数通常具有高度非线性,其解析解往往难以直接求得。因此,发展高效的数值方法成为随机微分方程在金融领域应用的关键。在利率动态建模中,Ait-Sahalia模型因其对利率动态的高度非线性描述能力而备受关注,但其复杂的结构也使得数值求解面临巨大挑战。

针对带Poisson跳的Ait-Sahalia模型,构造了一种合适的部分截断Euler-Maruyama(EM)数值方法,并对其强收敛性及收敛速率进行了分析。在处理模型的非线性系数时,通过引入截断函数,有效控制了模型的上界与下界,从而确保了数值方法的稳定性。对于Poisson跳的处理,本研究结合带跳的随机微分方程理论及相关条件,对其进行了精确的近似估计。理论分析表明,带Poisson跳的模型数值解具有强收敛性,且收敛速率达到1;而不带Poisson跳的模型数值解同样表现出强收敛性。

基于上述数值方法的成功应用,本研究进一步针对利率动态建模问题,提出了一种结合Poisson跳过程与延迟波动率的改进型Ait-Sahalia模型。该模型通过引入延迟函数,能够更准确地反映实际金融数据受历史状态影响的特性,从而显著提升了对利率动态行为的刻画能力。同时,Poisson跳机制的加入使得模型能够有效捕捉金融市场中的突发事件和跳跃性变动,进一步增强了模型的实用性。针对模型中漂移项与扩散项的高度非线性问题,我们采用改进的截断Euler-Maruyama(EM)算法进行数值求解,并严格证明了该算法生成的数值解能够强收敛到模型的真实解。这一成果不仅保留了Ait-Sahalia模型在描述利率动态方面的高度非线性优势,还为利率动态模型的数值求解奠定了理论基础。

5.2 展望

作者今后将对以下几个方面做进一步的研究：

- 1、本文可以未来可以考虑将更多现实金融市场中的复杂因素（如随机波动率、多重跳跃或长记忆效应）引入模型，以进一步提升模型的适用性和准确性。探索其他类型的跳跃过程（如 Lévy 过程或 Hawkes 过程）对模型动态行为的影响。
- 2、将本研究提出的数值方法应用于实际金融市场数据，验证其在利率预测、期权定价及风险管理中的有效性。
- 3、针对更高维或更复杂的随机微分方程，研究更高效的数值方法以提高计算效率并降低误差。

参考文献

- [1] Liu Q, Jiang D, Shi N, Hayat T, Alsaedi A. Asymptotic behaviors of a stochastic delayed SIR epidemic model with nonlinear incidence[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2016, 40: 89-99.
- [2] Bahar A, Mao X. Stochastic delay lotka-volterra model[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2004, 292(2): 364-380.
- [3] Dungey M, Erdemlioglu D, Matei M, et al. Testing for mutually exciting jumps and financial flights in high frequency data[J]. Journal of Econometrics, 2018, 202(1): 18-44.
- [4] Aït-Sahalia Y, Jacod J. Testing for Jumps in a Discretely Observed Process[J]. The Annals of Statistics, 2009, 37(1): 184-222.
- [5] Aït-Sahalia Y, Jacod J. Estimating the Degree of Activity of Jumps in High Frequency Data[J]. The Annals of Statistics, 2009, 37(5A): 2202-2244.
- [6] Aït-Sahalia Y, Jacod J, Li J. Testing for jumps in noisy high frequency data[J]. Journal of Econometrics, 2012, 168(2): 207-222.
- [7] Ma L, Wang Z, Han QL, Liu Y. Dissipative control for nonlinear Markovian jump systems with actuator failures and mixed time-delays[J]. Automatica, 2018, 98: 358-362.
- [8] Li J, Dong H, Wang Z, Zhang W. Protocol-based state estimation for delayed Markovian jumping neural networks[J]. Neural Networks, 2018, 108: 355-364.
- [9] Perera S, Buckley W, Long H. Market-reaction-adjusted optimal central bank intervention policy in a forex market with jumps[J]. Annals of Operations Research, 2018, 262: 213-238.
- [10] Pillay E, O'Hara JG. FFT based option pricing under a mean reverting process with stochastic volatility and jumps[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2011, 235(12):3378-3384.
- [11] Merton RC. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous[J]. Journal of financial economics, 1976, 3(1-2): 125-144.

- [12] Jorion P. On jump processes in the foreign exchange and stock markets[J]. The Review of Financial Studies, 1988, 1(4): 427-445.
- [13] Ahn CM, Thompson HE. Jump-diffusion processes and the term structure of interest rates[J]. The journal of finance, 1988, 43(1): 155-174.
- [14] Bates DS. Jumps and stochastic volatility: Exchange rate processes implicit in deutsche mark options[J]. The Review of Financial Studies, 1996, 9(1): 69-107.
- [15] Henderson V, Hobson D. Coupling and option price comparisons in a jump-diffusion model[J]. Stochastics and Stochastic Reports, 2003, 75(3): 79-101.
- [16] 邓飞其, 莫浩艺. 随机微分方程数值解稳定性研究综述[J]. 南京信息工程大学学报: 自然科学版, 2017, 9(3):284-296.
- [17] Kloden P E, Platen E. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations[M]. Berlin Heidelberg: Springer Verlag, 1992.
- [18] Gikhman I, Skorokhod A. Stochastic Differential Equations[M]. Springer Verlag, Berlin, 1972.
- [19] Mao X. The truncated Euler–Maruyama method for stochastic differential equations[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2015, 290: 370-384.
- [20] Mao X. Convergence rates of the truncated Euler–Maruyama method for stochastic differential equations[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2016, 296: 362-375.
- [21] Guo Q, Liu W, Mao X, Yue R. The truncated Milstein method for stochastic differential equations with commutative noise[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2018, 338:298-310.
- [22] Li X, Yin G. Explicit Milstein schemes with truncation for nonlinear stochastic differential equations: Convergence and its rate[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2020, 374:112771.
- [23] Haghighi A. A truncated split-step forward Euler–Maruyama-based method for stochastic systems with non-globally Lipschitz coefficients[J]. Iranian Journal of Science, 2023, 47(1):137-153.
- [24] Haghighi A. An explicit two-stage truncated Runge–Kutta method for nonlinear

- hr/>
- stochastic differential equations[J]. *Mathematical Sciences*, 2024, 18(3):397-411.
- [25] Zhou S, Jin H. The truncated Euler-Maruyama method for highly nonlinear stochastic differential equations with multiple time delays[J]. *Numerical Algorithms*, 2023, 94(2):581-617.
- [26] Shi H, Song M, Liu M. Strong convergence of explicit numerical schemes for stochastic differential equations with piecewise continuous arguments[J]. *Numerical Algorithms*, 2024, 97(2):779-800.
- [27] Lan G, Xia F. Strong convergence rates of modified truncated EM method for stochastic differential equations[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2018, 334: 1-17.
- [28] Lan G, Wang Q. Strong convergence rates of modified truncated EM methods for neutral stochastic differential delay equations[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2019, 362:83-98.
- [29] Lan G, Wang G. Strong Convergence and Asymptotic Exponential Stability of Modified Truncated EM Method for Neutral Stochastic Differential Equations with Time-dependent Delay[J]. *Frontiers of Mathematics*, 2023, 18(6):1479-1504.
- [30] Jiang Y, Lan G. Convergence and exponential stability of modified truncated Milstein method for stochastic differential equations[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2024, 436:115288.
- [31] Guo Q, Liu W, Mao X, Yue R. The partially truncated Euler–Maruyama method and its stability and boundedness[J]. *Applied Numerical Mathematics*, 2017, 115:235-251.
- [32] Shi H, Song M, Liu M. Convergence and stability of modified partially truncated Euler-Maruyama method for stochastic differential equations with piecewise continuous arguments[J]. *International Journal of Computer Mathematics*, 2023 ,100(12):2269-2289.
- [33] Haghighi A. Convergence of a partially truncated Euler-Maruyama method for SDEs with super-linear piecewise continuous drift and Hölder diffusion coefficients[J]. *Numerical Algorithms*, 2024, 4:1-46.
- [34] Vasicek O. An equilibrium characterization of the term structure[J]. *Journal of*

- financial economics, 1977, 5(2): 177-188.
- [35] Cox JC, Ingersoll JE, Ross SA. A theory of the term structure of interest rates[J]. *Econometrica*, 1985, 53(2): 385-407.
- [36] Ait-Sahalia Y. Testing continuous-time models of the spot interest rate[J]. *The review of financial studies*, 1996, 9(2): 385-426.
- [37] Szpruch L, Mao X, Higham DJ, Pan J. Numerical simulation of a strongly nonlinear Ait-Sahalia-type interest rate model[J]. *BIT Numerical Mathematics*, 2011, 51:405-425.
- [38] Deng S, Fei C, Fei W, Mao X. Generalized Ait-Sahalia-type interest rate model with Poisson jumps and convergence of the numerical approximation[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2019, 533: 122057.
- [39] Emmanuel C, Mao X. Truncated EM numerical method for generalised Ait-Sahalia-type interest rate model with delay[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2021, 383:113-137.
- [40] Deng S, Fei C, Fei W, Mao X. Positivity-preserving truncated Euler–Maruyama method for generalised Ait-Sahalia-type interest model[J]. *BIT Numerical Mathematics*, 2023, 63(4):59.
- [41] Zhao Y, Wang X, Wang M. On the backward Euler method for a generalized Ait-Sahalia-type rate model with Poisson jumps[J]. *Numerical Algorithms*, 2021, 87:1321-1341.
- [42] Coffie E, Mao X, Proske F. On the analysis of Ait-Sahalia-type model for rough volatility modelling[J]. *Journal of Theoretical Probability*, 2024, 37(1): 744-767.
- [43] Øksendal B. *Stochastic Differential Equations*[M]. Springer Berlin Heidelberg, 2003.
- [44] 张波, 张景肖. *应用随机过程*[M]. 清华大学出版社有限公司, 2004.
- [45] Cont R, Tankov P. *Financial Modelling with Jump Processes*[M]. Chapman and Hall/CRC, 2003.
- [46] Mao X. *Stochastic Differential Equations and Applications*[M]. Elsevier, 2007.
- [47] Lan G. Asymptotic exponential stability of modified truncated EM method for neutral stochastic differential delay equations[J]. *Journal of Computational and*

Applied Mathematics, 2018, 340: 334-341.

- [48] Deng S, Fei W, Liu W, Mao X. The truncated EM method for stochastic differential equations with Poisson jumps[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2019, 355:232-257.

硕士期间发表的论文

- [1] 冯登宏, 李志民. 一类带 Poisson 跳的延迟利率模型数值解的收敛性分析[J].
吉首大学学报(已录用待发表).

致 谢

时光荏苒，三年的研究生生涯即将画上句号。回首这段充满挑战与成长的旅程，我心中充满了感激之情。在此，我想向所有在学术与生活中给予我支持与帮助的老师、同学和家人表达最诚挚的谢意。

首先，我要向我的导师李志民教授致以最深的敬意与感谢。李老师不仅在学术上给予了我悉心的指导，从论文的选题、框架设计到最终的修改定稿，每一个环节都倾注了他的智慧与心血；更在生活上给予了我无微不至的关怀，帮助我养成了良好的习惯与积极的生活态度。李老师的言传身教让我受益匪浅，这些宝贵的财富将伴随我一生。衷心祝愿某某老师未来工作顺利，生活幸福！

其次，我要感谢我的室友以及数学班的全体同学。三年来，我们共同学习、互相鼓励、携手前行，留下了无数珍贵的回忆。无论是学术上的探讨，还是生活中的点滴，大家的陪伴与支持让我倍感温暖。愿我们在未来的道路上继续追逐梦想，前程似锦！

再次，我要感谢我的工位邻桌，她总是能在我消极怠慢的时候，给我敲响警钟。每当我遇到困难或迷茫时，她的鼓励与陪伴总能让我重拾信心，继续前行。

最后，我要特别感谢我的家人。他们无私的爱与支持是我前进的动力源泉。每当我遇到困难与挫折时，他们的鼓励总能让我重拾信心，勇敢面对挑战。正是他们的默默付出，才让我能够心无旁骛地完成学业。未来，我将带着家人的期望与爱，继续努力，不断追求卓越。

三年的研究生生涯虽已接近尾声，但这段经历将成为我人生中永恒的财富。再次感谢所有帮助过我的人，愿我们在未来的道路上都能熠熠生辉！

冯登宏

2025 年 3 月