
分类号：O157.5

单位代码：10363

密 级：公开

学 号：2221020119

题 目 图的自同构群及特征值

题 目 The automorphism group and eigenvalues
of a graph

学 生 姓 名 : _____ 王鑫悦

指 导 教 师 : _____ 王伟 教授

专 业 : _____ 数学

研 究 方 向 : _____ 图论及其应用

论文答辩日期： 2025 年 5 月 14 日

安徽工程大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：我恪守学术道德，崇尚严谨学风。所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已明确注明和引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品及成果的内容。论文为本人亲自撰写，我对所写的内容负责，并完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

学位论文作者签名：王鑫悦

日期：2025 年 5 月 14 日

安徽工程大学学位论文版权使用授权书

学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅或借阅。本人授权安徽工程大学可以将本学位论文的全部内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保密 ☐，在 _____ 年解密后适用本版权书。

本学位论文属于

不保密 ☒。

学位论文作者签名：王鑫悦

日期：2025 年 5 月 14 日

指导教师签名：王伟

日期：2025 年 5 月 14 日

图的自同构群及特征值

摘 要

图的自同构群与特征值研究是图论领域的重要分支,具有丰富的理论内涵和广泛的应用前景。一个图的自同构群是由所有保持图的邻接关系的自同构组成的群,它刻画了图内在的对称程度。在图论中建立自同构群 $\Gamma(G)$ 和图 G 的特征值之间的联系是一个经典问题。1980 年, Criscuolo 等人证明了图 G 自同构群阶的上界为 2^{k-1} , 其中 k 是 $\chi(G; x)$ 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的不可约因子的个数, 图 G 所有特征值都是简单的。

本文主要是对 Criscuolo 等人的结果进行改进。我们引入与图 G 相关的平坦多项式, 它被定义为特征多项式与主多项式的商。对于一个图 G 其平坦多项式是无平方的, 我们建立了其自同构群阶的上界, 该上界与平坦多项式在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上不可约因子的数量有关。

记图 G 的平坦多项式为 $\nu(G; x) = \frac{\chi(G; x)}{\mu(G; x)}$, 本文研究了对于一个具有无平方平坦多项式的图 G , 其自同构群阶的上界的问题。具体结果如下:

1. 设 G 是一个具有 n 个顶点的图, 并且 $\nu(G; x)$ 是无平方的。假设 $\nu(G; x)$ 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上具有标准因子分解:

$$\nu(G; x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x),$$

其中不可约因子满足 $\deg p_1(x) \leq \cdots \leq \deg p_s(x)$ 。定义

$$\tau = \max \left\{ t : 1 \leq t \leq s \quad \text{且} \quad \sum_{i=1}^t \deg p_i(x) \leq \frac{n}{2} \right\}$$

则图的自同构群 $\Gamma(G)$ 是一个阶数至多为 2^r 的初等阿贝尔 2 群。

在对自同构群的自然推广下,平坦多项式 $\nu(G;x)$ 的不可约因子的数量与新群的阶之间存在直接联系,其结果如下所示:

2. 设 $\mathbb{F}$ 是实数 $\mathbb{R}$ 的一个子域, G 是一个具有 n 个顶点的图,并且 $\nu(G;x)$ 是无平方的。则 $\Gamma_{\mathbb{F}}(G)$ 是一个阶数为 2^s 的初等阿贝尔 2 群,其中 s 是平坦多项式 $\nu(G;x)$ 在 $\mathbb{F}$ 上的不同不可约因子的数量。

本文还研究了广义道矩阵下图的自同构群的上界问题。

关键词: 自同构群, 特征值, 主多项式, 特征多项式, 正交矩阵

The automorphism group and eigenvalues of a graph

ABSTRACT

The study of the automorphism group of a graph and its eigenvalues is an important branch of graph theory, with rich theoretical implications and broad application prospects. The automorphism group of a graph consists of all automorphisms that preserve the adjacency relations of the graph, characterizing the intrinsic degree of symmetry within the graph. It is a classic problem in spectral graph theory to establish connections between $\Gamma(G)$ and the eigenvalues of G . In 1980, Criscuolo et al. proved that the order of the automorphism group of graph G is upper-bounded by 2^{k-1} , where k is the number of irreducible factors of $\chi(G; x)$ over the rational numbers $\mathbb{Q}$, and all the eigenvalues of graph G are simple.

This paper mainly improves upon the results of Criscuolo et al. We introduce the plain polynomial associated with a graph G , which is defined to be the quotient of the characteristic polynomial and the main polynomial of G . For a graph G with a square-free plain polynomial, we establish an upper bound for the order of its automorphism group, which is related to the number of irreducible factors of the plain polynomial over the rational numbers $\mathbb{Q}$.

Let the plain polynomial of graph G is $\nu(G; x) = \frac{\chi(G; x)}{\mu(G; x)}$. This paper studies the issue of the upper bound for the order of the automorphism group of a graph G with a square-free plain polynomial. The specific results are as follows:

1. Let G be a graph with n vertices, and let $\nu(G; x)$ be square-free. Assume that $\nu(G; x)$ has a standard factorization over the rational numbers $\mathbb{Q}$:

$$\nu(G; x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x),$$

where the irreducible factors satisfy $\deg p_1(x) \leq \cdots \leq \deg p_s(x)$. Denote

$$\tau = \max \left\{ t : 1 \leq t \leq s \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^t \deg p_i(x) \leq \frac{n}{2} \right\}$$

Then the automorphism group $\Gamma(G)$ is an elementary Abelian 2-group of order at most 2^τ .

Under a natural generalization of automorphism group, there exists a direct connection between the number of irreducible $\nu(G; x)$ and the order of the new group, and the result is as follows:

2. Let $\mathbb{F}$ be a subfield of $\mathbb{R}$ and G be an n -vertex graph with $\nu(G; x)$ square-free. Then $\Gamma_{\mathbb{F}}(G)$ is an elementary Abelian 2-group of order 2^s , where s is the number of distinct irreducible factors of $\nu(G; x)$ over $\mathbb{F}$.

This article also studies the upper bound problem of the automorphism group of the graph under generalized path matrices.

Wang Xinyue (Applied Mathematics)

Supervised by Prof. Wang Wei

KEY WORDS: automorphism group, eigenvalues, main polynomial, characteristic polynomial, orthogonal matrix

目 录

摘 要	III
ABSTRACT	V
第 1 章 绪论	1
1.1 课题研究背景及意义	1
1.2 课题研究现状	2
1.3 研究内容和主要结果	4
第 2 章 预备知识	6
2.1 主要符号	6
2.2 基本概念	6
2.3 相关公式	9
第 3 章 图自同构群 $\Gamma(G)$ 的上界问题	10
3.1 引言	10
3.2 预备引理	10
3.3 主要结果的证明	13
3.3.1 自同构群 $\Gamma(G)$ 阶的上界	15
3.3.2 自然推广下的同构群 $\Gamma(G)$ 阶的上界	17
3.4 实验模拟	20
3.5 主要结论	22
第 4 章 广义道矩阵下自同构群 $\Gamma(G)$ 的上界	24

4.1 预备知识.....	24
4.2 预备引理.....	24
4.3 主要结果及其证明	26
第 5 章 总结与展望.....	29
5.1 回顾与总结	29
5.2 研究展望.....	30
参考文献.....	31
攻读硕士期间取得的学术成果	34
致 谢.....	35

第 1 章 绪论

1.1 课题研究背景及意义

1738 年, 瑞典数学家欧拉通过破解经典的柯尼斯堡七桥问题, 在其开创性论文中系统性地构建了图论研究框架。这篇具有里程碑意义的著作不仅标志着图论作为独立数学分支的诞生, 更确立了欧拉在数学领域的地位, 其开创性工作为现代图论发展奠定了坚实基础。

自从 Collatz^[1] 的文章以后, 图谱就经常出现在数学文献中, 关于此方面的经典著作参考^{[2][3]}. 图谱理论作为代数图论的核心研究方向, 深度关联着矩阵分析、组合数学、多项式代数与线性代数等多领域知识体系。该理论聚焦探索图的组合性质与相关矩阵代数特性间的内在关系。图的自同构群和特征值研究是图论中相互关联的两个重要方向。自同构群反映了图的对称性, 特征值提供了图结构的谱信息。将两者结合起来研究, 可以更全面、更深入地理解图的结构性质。利用图的谱信息来估计和刻画图的自同构群, 是当前研究的一个重要趋势。在图论中建立自同构群 $\Gamma(G)$ 与 G 的特征值之间的关系是一个经典问题。

Mowshowitz^[4] 以及 Petersdorf 和 Sachs^[5] 的一个著名结果指出, 如果 $\chi(G; x)$ 是平方自由的(即图 G 的所有特征值都是简单的), 那么 $\Gamma(G)$ 是一个初等阿贝尔 2 群, 即 $\Gamma(G)$ 中每个非单位元素的阶为 2。此外, 对于这样的图 G , Criscuolo 等人^[8] 证明了 $\Gamma(G)$ 阶的上界为 2^{k-1} , 其中 k 是 $\chi(G; x)$ 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的不可约因子的个数。特别地, 如果 $\chi(G; x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上是不可约的, 则 $\Gamma(G)$ 是平凡的, 这一结果最早在[6]中建立。

本文引入一个与图 G 相关的新的多项式, 它被定义为特征多项式与主多项式的商, 我们称它为平坦多项式。对于一个图 G 其平坦多项式是无平方的, 我们建立了其自同构群阶的上界, 该上界与平坦多项式在有理数 $\mathbb{Q}$ 上不可约因子的数量有关, 从而改进了之前 Criscuolo 等人基于特征多项式得出的上界。此

外，在第四章中对图 G 的道矩阵重新定义，研究广义道矩阵下图 G 的自同构群的上界问题。

1.2 课题研究现状

在图论中建立图 G 的自同构群 $\Gamma(G)$ 与特征值之间的关系是图论中的一个重要研究课题。自同构群提供了图的对称性的信息，而特征值则与图的代数性质密切相关。多年来有很多学者对图自同构群和特征值进行了深入的研究，并取得了一定的成果。

1969 年 Mowshowitz^[4] 讨论了在邻接矩阵特征值各不相同的情况下，图的性质如何影响其自同构群的结构。特征值的不同通常意味着图具有很强的“非对称性”。论文中指出，如果图的邻接矩阵的所有特征值两两互异，则图的自同构群 $\Gamma(G)$ 是一个阿贝尔群。

1970 年 Sachs^[5] 等人研究了图的谱（即特征值）和自同构群。论文探讨了图的邻接矩阵的特征值与图的自同构群之间的关系，以及如何通过这些特征值来分析自同构群的结构。他们探讨了图的自同构群及其与阿贝尔 2-群之间的关系。文章中指出如果 $\chi(G; x)$ 是平方自由的（即图 G 的所有特征值都是简单的），那么 $\Gamma(G)$ 是一个初等阿贝尔 2 群。

1973 年 Mowshowitz^[6] 探讨了图邻接矩阵及其特征多项式与自同构群之间的关系。特别地，他考虑了特征多项式在有理数域上的可约性如何影响图的自同构群。如果特征多项式在有理数域上是可约的（即可以表示为两个多项式的乘积），这通常意味着图存在对称性，从而可能导致自同构群非平凡的存在。如果特征多项式是不可约的，则自同构群是平凡的。Mowshowitz 的研究表明，图的特征多项式在有理数域上的可约性提供了一种有效的工具来分析图的自同构群。可约特征多项式与自同构群的复杂性之间的联系，为图的对称性和结构理解提供了重要的代数视角。

经过多年的发展，主特征值的研究成为刻画图以及研究图的性质的一个重要的方法。1978 年 Cvetković^[7] 中第一次提出了图的主特征值的概念，它在文献中提出了如何刻画恰有 k ($2 \leq k \leq n$) 个主特征值的图，同时说明恰有一个主特

征值的图是正则图。

图自同构群的上界问题涉及到图的结构特性和对称性，在组合数学和图论中具有重要意义。很多学者在这方面也取得了一定成果。1980 年 Criscuolo^[8]等人研究了图的特征多项式与自同构群之间的关系，特别关注特征多项式在有理数域上的不可约因子个数及其与自同构群阶的上界之间的关系。如果图 G 的所有特征值都是简单的，那么对于这样的图 G ，Criscuolo 等人证明了 $\Gamma(G)$ 的阶的上界为 2^{k-1} ，其中 k 是特征多项式 $\chi(G; x)$ 在有理数域上的不可约因子的个数。Criscuolo 等人的研究表明，特征多项式在有理数域上不可约因子个数的增加与图的自同构群的大小之间存在重要的结构性关系，这一发现为图论的发展提供了新的视角。

2002 年 Hagos^[9]证明了一个图 G 的主特征值的个数 k 等于图 G 的道矩阵的秩，即矩阵 $W(G)$ 的秩。这个条件为学者提供了一个新的思路去刻画主特征值的问题。由此国内外学者就开始了刻画了满足一定条件的图类。

侯耀平^[10]在 2005 年给出了的定义：对于整数 $\alpha \geq 2$ ， T_α 定义为一个顶点 v 的度为 $\alpha^2 - \alpha + 1$ ，而每个邻接点的度都是 α 而其他的点都是悬挂点的树。他在上述 Hagos 给出的恰有两个主特征值的图的一个充要条件的基础上给出了所有恰有两个主特征值的所有树。

许多研究表明，图的主特征值与图的结构有很大的关系，2010 年孙德荣^[12]发现图的主特征值与图的结构有很大关系，并且对其进行了讨论。接下来的一年孙德荣^[13]和汤自凯^[14]分别在恰有两个主特征值的一个充要条件做了进一步推广，并在此基础上给出了两个主特征值的图的一些性质和运算成果，并且后者运用相同的技巧刻画了恰有两个主特征值的三圈图。

2016 年 O'Rourke^[19]证明了几乎所有图的特征值均为单的且为主特征值，这说明主特征值对于刻画图以及研究图的性质都有着重要的意义。

在 2020 和 2021 年对于主特征值来说有很多重大的研究，2020 年 Feng^[26]在文章中给出了一个关于具有两个主特征值的图的猜想的简短证明，为后续文章提供了一些证明方面的便利结果。同时 Abreu^[27]探讨了图的主特征值研究的一些新方面，特别研究了强正则图和最小特征值非主要图上的锥的相关研究问题。与此同时 Vinagre 等^[28]证明了门槛图的主无符号拉普拉斯特征值的个数在

$n \geq 3$ 个顶点的时候是以 $n-2$ 为界的, 并且他们刻画了, 对于任意整数 $1 \leq k \leq n-2$, 所有这类图都具有精确的 k 个主无符号拉普拉斯特征值, 最后他们还确定了 n 个顶点的门槛图的 k 个主无符号拉普拉斯特征值的数目。

1.3 研究内容和主要结果

本文主要内容安排如下:

第二章主要介绍本文所需要的基础知识, 其中包括基础概念、基本定理以及基本公式, 第三章是本文的主要部分, 将介绍对于一个具有平方自由平坦多项式的图 G , 其自同构群阶的上界的, 第四章对图 G 的道矩阵重新定义, 研究广义道矩阵下图 G 的自同构群的上界问题。

本文主要的证明结果如下:

$$\text{记图 } G \text{ 的平坦多项式为 } \nu(G; x) = \frac{\chi(G; x)}{\mu(G; x)}$$

定理 1

设 G 是一个具有 n 个顶点的图, 并且 $\nu(G; x)$ 是无平方的。假设 $\nu(G; x)$ 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上具有标准因子分解:

$$\nu(G; x) = p_1(x)p_2(x) \cdots p_s(x),$$

其中不可约因子满足 $\deg p_1(x) \leq \cdots \leq \deg p_s(x)$ 。定义

$$\tau = \max \left\{ t : 1 \leq t \leq s \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^t \deg p_i(x) \leq \frac{n}{2} \right\}$$

则图的自同构群 $\Gamma(G)$ 是一个阶数至多为 2^τ 的初等阿贝尔 2 群。

推论 1

设 G 是一个具有 n 个顶点的图, 并且 $\chi(G; x)$ 是无平方的。假设 $\chi(G; x)$ 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上具有标准因子分解:

$$\chi(G; x) = q_1(x)q_2(x) \cdots q_k(x)$$

其中 $\deg q_1(x) \leq \cdots \leq \deg q_k(x)$ 。如果 $|\Gamma(G)| = 2^{k-1}$ 则以下情况成立:

(1) 主多项式 $\mu(G; x)$ 是不可约的

(2) $\deg \mu(G; x) = \deg q_k(x) \geq n/2$ 即 G 至少有 $n/2$ 个主特征值

定理 2

设 $\mathbb{F}$ 是实数 $\mathbb{R}$ 的一个子域, G 是一个具有 n 个顶点的图, 并且 $\nu(G; x)$ 是无平方的。则 $\Gamma_{\mathbb{F}}(G)$ 是一个阶数为 2^s 的初等阿贝尔 2 群, 其中 s 是平坦多项式 $\nu(G; x)$ 在 $\mathbb{F}$ 上的不同不可约因子的数量。

第2章 预备知识

本部分主要介绍本文中所涉及到的主要符号、基本概念、基本定理以及相关公式。同时我们称一个图为简单图当它既没有自环也没有两条连杆连接到同一对顶点，本文研究简单图。

2.1 主要符号

本部分主要总结介绍本文中出现的符号，方便阅读。

符号	含义
G	简单图
$\bar{G}$	图 G 的补图
$\mathbb{R}$	实数域
$\mathbb{Q}$	有理数域
$\mathbb{F}$	实数域中子环
$W(G)$	图 G 的道矩阵
$A(G)$	图 G 的邻接矩阵
$\Gamma(G)$	图 G 的自同构群
e	全一向量
J	全一矩阵
$\mu(G; x)$	矩阵 G 的主多项式
$\chi(G; x)$	矩阵 G 的特征多项式

本文中未标明的符号和术语可参考文献^[15-30]。

2.2 基本概念

设图 $G = (V(G), E(G))$ ，其中非空集合 $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 是 G 的顶点集， $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ 是 G 的边集。在 G 中若顶点 v_i 是边 e_j 的端点，则称顶点 v_i 是

边 e_j 关联。若顶点 v_i, v_j 是同一条边的两个端点, 则称顶点 v_i 与 v_j 相邻。若边 e_i 和 e_j 关联同一根顶点, 则称边 e_i 和 e_j 相邻。在图 G 中与顶点 v_i 关联的边的数目叫做顶点 v_i 的度, 记作 d_i , 通常用 $\Delta(G)$, $\delta(G)$ 分别表示图的顶点的最大度与最小度, 度为 i 的顶点称为 i -度点, 1-度点通常也称为悬挂点。若关联同一对顶点 v_i 与 v_j 的边不止一条, 则称这样的边为重边。若与边 e 关联的两个点重合于一点, 则称这样的边为环。若图 G 既没有重边也没有环, 则称图 G 为简单图。称图 G 中的两点 v_i 与 v_j 是连通的, 若它们之间至少存在一条路相连, 否则, 称点 v_i 与 v_j 是不连通的。若图 G 中任意两点都是连通的, 则称图 G 是连通图。本文以下所考虑的图都是简单图。

下面是本文所用到的定义:

定义 2.1 ^[40] 设图 $G = (V, E)$ 的顶点集为 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 并且边集为 $E = \{(v_i, v_j) | i, j = 1, 2, \dots, n; i \neq j\}$ 则它的邻接矩阵 $A(G) = (a_{ij})_{n \times n}$ 是一个 $n \times n$ (0,1)-矩阵, 其中:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{如果 } (v_i, v_j) \text{ 是图 } G \text{ 的一条边} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}.$$

一个图的邻接矩阵的特征值称为图的特征值, 图的所有特征值的多重集称为图的谱, 因而研究图的特征值问题就是研究其对应邻接矩阵的特征值问题。

定义 2.2 ^[39] 设图 G 的邻接矩阵为 $A(G)$, λ 为一个文字, 则图 G 的特征多项式 $\chi(G; x)$ 为:

$$\chi(G; x) = \det(xI - A)$$

定义 2.3 ^[40] 如果一个图 G 的邻接矩阵 A 的某个特征值 λ 所对应的特征子空间 $\varepsilon_A(\lambda)$ 不正交于全一向量 e , 那么称 λ 为图 G 的主特征值。

换句话说, 若图 G 的邻接矩阵 $A(G)$ 的特征值 λ 存在一个分向量之和不为零的特征向量, 则称 λ 为图的主特征值。同时由 Perron-Frobenius 定理知道: 任何一个图 G 至少有一个主特征值。我们已知一个事实: 图 G 是一个 r -正则图当且仅当图 G 只有一个主特征值 r 。

定义 2.4 ^[40] 设图 $G = (V, E)$ 的邻接矩阵为 A , e 为全一向量, 我们称矩阵 $W(G) = [e, Ae, \dots, A^{n-1}e]$ 为图 G 的道矩阵。其中 $W_k = [e, Ae, \dots, A^{k-1}e]$ 为图 G 的

$n \times k$ 阶道矩阵。图的道矩阵是本文研究的重要工具之一。

定义 2.5 ^[40] 对于任何一个整数 $n \times n$ 矩阵 M ，存在两个单模矩阵 U 和 V 使得 UMV 是一个对角矩阵 $\text{diag}[d_1, d_2, \dots, d_n]$ 并且其中 $d_i \mid d_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, n-1$ 。我们称这个对角矩阵 $\text{diag}[d_1, d_2, \dots, d_n]$ 是矩阵 M 的史密斯标准型，同时非零的 d_i 被称为第 i 个不变因子。

定义 2.6 一个集合和一个二元运算构成的代数结构，如果满足以下条件，则称为群：

1. 封闭性：集合中任意两个元素的运算结果仍然属于该集合。
2. 结合律：对于集合中的任意三个元素，运算的结合方式不影响结果。
3. 单位元：集合中存在一个特殊的元素，称为单位元，它与集合中任何元素运算的结果都是那个元素本身。
4. 逆元：集合中每个元素都有一个对应的逆元，与之运算的结果是单位元。

定义 2.7 阿贝尔 2 群 (Abelian 2-group) 是指既是阿贝尔群 (即满足交换律的群)，又是 2 群 (即所有元素的阶都是 2 的幂的群) 的一种特定类型的群。更具体地说，阿贝尔 2 群满足以下条件：

1. 对于群中的任意元素 a 和 b ，都有 $ab = ba$ ，意味着群运算是交换的。
2. 群中每个元素的阶 (即将该元素进行有限次群运算后得到单位元的最小正整数) 都是 2 的幂。

定义 2.8 图的自同构 (Graph Automorphism) 是图论中的重要概念，它指的是一种能够将图的结构保持不变的映射。具体来说，给定一个图 $G = (V, E)$ ，图的自同构是对图的顶点集 V 到 V 的一个映射，满足以下条件：

1. 一一对应：自同构是一个双射。
2. 保持邻接关系：如果顶点 u 和 v 在图 G 中相连 (即存在边 $(u, v) \in E$)，那么在自同构映射下，当且仅当它们的像也要相连。换句话说，如果 ϕ 是自同构，那么对任意 $u, v \in V$ 有：如果 $(u, v) \in E$ ，那么 $(\phi(u), \phi(v)) \in E$ ；如果 $(u, v) \notin E$ ，那么 $(\phi(u), \phi(v)) \notin E$ 。图的自同构可以用来研究图的对称性，理解图的结构特征。

图自同构群是所有这样的自同构的集合，对于无向图，其自同构群是所有保持邻接关系不变的置换构成的集合。自同构群具有封闭性，反映了图的对称性，

通过研究自同构群，可以更好的理解图的对称性质和结构，是一种重要的几何变换群，在本文中用 $\Gamma(G)$ 表示。

2.3 相关公式

为了建立图的自同构群及特征值之间的关系，需要对图的主多项式和特征值进行计算，本小节给出计算主多项式的公式。

主多项式的公式为：

$$\mu(G; x) = \frac{\chi(A; x)}{\gcd(\chi(A; x); \chi((A+J); x))},$$

其中 $\chi(A; x) = (x - \lambda_1)^{r_1} (x - \lambda_2)^{r_2} \dots (x - \lambda_m)^{r_m}$ 为特征多项式， $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 为图 G 的邻接矩阵 A 的特征值； $\gcd(\chi(A; x); \chi((A+J); x))$ 为 $\chi(A; x)$ 与 $\chi((A+J); x)$ 的最大公因式，其中 J 是全一矩阵，如下所示：

$$J = ee^T = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} (1 \quad \dots \quad 1)$$

根据上述主多项式的公式可以看出，特征多项式可能有重根但主多项式无重根，在本文中 $\mu(G; x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_p)$ ，其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ 为图 G 的主特征值，关于主特征值的定义在上一小节中已有说明。

第3章 图自同构群 $\Gamma(G)$ 的上界问题

3.1 引言

本文引入一个与图 G 相关的新的多项式,它被定义为特征多项式与主多项式的商,我们称它为平坦多项式。对于一个具有无平方平坦多项式的图 G ,我们建立了其自同构群阶的上界,该上界与平坦多项式在有理数 $\mathbb{Q}$ 上不可约因子的数量有关,从而改进了 Criscuolo 等人基于特征多项式得出的先前上界。并且在对自同构群的自然推广下,验证了平坦多项式 $\nu(G;x)$ 的不可约因子的数量与新群的阶之间存在直接联系。

3.2 预备引理

本小节,我们会给出几个重要的引理,这些引理在后续对问题的解决发挥着重要作用。在此之前首先引出几个定义。

设 G 具有 n 个顶点,邻接矩阵为 A 。图 G 的道矩阵为 $W = W(G) := [e, Ae, \dots, A^{n-1}e]$

设 $\mathbb{F}$ 是实数 $\mathbb{R}$ 的任意子域,我们用 $\mathbb{F}^n$ 表示 n 维线性空间

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n)^T : x_i \in \mathbb{F} \text{ for } i = 1, \dots, n\}$$

并且具有标准内积: $(u, v) = u^T v$ 。两个向量 u 和 v 如果满足 $u^T v = 0$, 则称为正交。

对于 $\mathbb{F}^n$ 的子空间 V , 我们用 $V^\perp$ 表示 V 的正交补, 即:

$$V^\perp = \{u \in \mathbb{F}^n : u^T v = 0 \text{ 对任意的 } v \in V\}$$

对于 $\mathbb{F}$ 上的一个 $n \times n$ 矩阵 M , 我们用 $\sigma(M)$ 表示在 $\mathbb{F}^n$ 上的线性变换:

$x \mapsto Mx$; 并用 $\text{col}(M)$ 表示 M 的列空间, 即 $\text{col}(M)$ 是 $\sigma(M)$ 的像。

引理 3.1 图的道矩阵 $W(G)$ 的秩等于图 G 的主特征值个数。

证明: 设 $x_1, x_2, \dots, x_m$ 是对应于 G 的主特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 的标准正交特征向

量, 使得 $e^T x_i > 0$ ($i=1, \dots, m$)。那么我们可以把 e 表示成一个线性组合的形式,

使得 $e = \sum_{i=1}^m c_i x_i$ 。很显然对于 $j \geq 0$ 有 $A^j e = \sum_{i=1}^m c_i \lambda_i^j x_i$ 因此

$\text{Span}(e, Ae, A^2 e, \dots, A^{n-1} e) \subseteq \text{Span}(x_1, x_2, \dots, x_m)$, 所以 $\text{rank}(W(G)) \leq m$ 。

为了完成证明, 接下来通过证明 $e, Ae, \dots, A^{m-1} e$ 是独立的来表明

$\text{rank}(W(G)) \geq m$ 。使 $c_1, c_2, \dots, c_m$ 是常数并且假设 $\sum_{j=1}^m c_j A^{j-1} e = 0$ 。注意到

$e^T x_i \neq 0$, 我们得到 $\sum_{j=1}^m c_j \lambda_i^{j-1} = 0, i=1, \dots, m$ 。因为主特征值不同所以 (i, j) 项系

数等于 λ_i^{j-1} 的 $m \times m$ 矩阵是非奇异范德蒙德矩阵。所以方程

$\sum_{j=1}^m c_j \lambda_i^{j-1} = 0, i=1, \dots, m$ 表明 $c_j = 0, j=1, \dots, m$, 所以 $e, Ae, \dots, A^{m-1} e$ 是独立的。

证毕 □

由引理 3.1 可知, 图的道矩阵 $W(G)$ 的秩等于图 G 的主特征值个数, 这样我们就可以把求主特征值个数问题转移到求 W 矩阵秩的问题上来, 就可以让问题简单很多。

引理 3.2 如果 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 是主特征值并且 $P = \prod_{i=1}^m (A - \lambda_i I)$, 那么 $Pe = 0$ 。

证明: $i=1, \dots, m$ x_i 是对应于主特征值的特征向量。把 e 表示成一个线性组合的形式, 使得 $e = \sum_{i=1}^m c_i x_i$ 。那么

$$Pe = \sum_{i=1}^m c_i \left(\prod_{k=1}^m (A - \lambda_k I) \right) x_i = \sum_{i=1}^m c_i x_i \prod_{k=1}^m (\lambda_i - \lambda_k) = 0$$

证毕 □

引理 3.3 子空间 $S := (\text{col} W)^\perp$ 是 $\sigma(A)$ 不变的, 且 $\chi(\sigma(A)|_S; x) = \nu(G; x)$ 。

证明: 设 r 为图 G 的主特征值数量, 并写 $\mu(G; x) = x^r + \sum_{i=1}^{r-1} a_i x^i$ 。已知 W 的秩为 r , 并且 W 的前 r 列构成 $\text{col}(W)$ 的一组基, 参见引理 3.1。通过引理 3.2 我们有 $(A^r + \sum_{i=0}^{r-1} a_i A^i) e = 0$, 即 $A^r e = -\sum_{i=0}^{r-1} a_i A^i e$ 。因此 $\text{col}(W)$ 是 $\sigma(A)$ 不变的, 矩阵 $\sigma(A)|_{\text{col}(W)}$ 在基 $\{e, Ae, \dots, A^{r-1} e\}$ 下具有以下形式

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{r-1} \end{pmatrix}$$

因此 $\chi(\sigma(A)|_{\text{col}W}; x) = x^r + \sum_{i=0}^{r-1} a_i x^i = \mu(G; x)$ 。由于 A 是对称的, 因此 $\sigma(A)$ 不变子空间的正交补也是 $\sigma(A)$ 不变的。因此 S 也是 $\sigma(A)$ 不变的。此外, 由于 $\mathbb{F}^n = (\text{col}W) \oplus S$ 我们得到 $\chi(G; x) = \chi(\sigma(A)|_{\text{col}W}; x) \chi(\sigma(A)|_S; x)$ 。因此

$$\chi(\sigma(A)|_S; x) = \frac{\chi(A; x)}{\chi(\sigma(A)|_{\text{col}W}; x)} = \frac{\chi(A; x)}{\mu(G; x)} = \nu(G; x)$$

证毕 □

引理 3.4 设 $\mathbb{F}$ 是实数 $\mathbb{R}$ 的任意子域。让 $Q \in \Gamma_F(G)$ 且 $S = (\text{col}W)^\perp$ 。则有以下结论:

- (i) $\sigma(Q)|_{\text{col}(W)} = id$ 即对于任何 $\xi \in \text{col}(W)$ 有 $Q\xi = \xi$
- (ii) S 是 $\sigma(A)$ 不变的
- (iii) 线性变换 $\sigma(A)|_S$ 和 $\sigma(Q)|_S$ 是可交换的。

证明: 由于 $QA = AQ$ 我们得到对于任何 $i \geq 0$ 有 $QA^i = A^iQ$ 。注意到 $Qe = e$, 我们有 $Q(A^i e) = A^i(Qe) = A^i e$, 因此 (i) 成立。设 η 是 S 的任意向量。因为 $S = (\text{col}W)^\perp$, 我们得到对于任何 $i \geq 0$ 都有 $A^i e \perp \eta$ 。结合 $QA^i = A^iQ$ 可得 $\langle A^i e, Q\eta \rangle = e^T A^i Q\eta = e^T QA^i \eta = e^T A^i \eta = \langle A^i e, \eta \rangle = 0$ 。因此, 由于 i 的任意性, $Q\eta \in S$, 这证明了 (ii)。最后一个结论是显然的, 因为 $\sigma(A)$ 和 $\sigma(Q)$ 在整个空间 $\mathbb{F}^n$ 作为线性变换是可交换的。

证毕 □

引理 3.5 设 V 是 $\mathbb{F}^n$ 上维数为 r 的任意子空间。则存在一个向量 $\xi \in V$ 其中 ξ 至少有 r 个非零项, 其中 $\mathbb{F}^n$ 是任意域。

证明：令 $\xi_1, \dots, \xi_r$ 为 V 中的一组基，定义一个矩阵

$$M = [\xi_1, \dots, \xi_r]^T = \begin{bmatrix} \xi_1^T \\ \vdots \\ \xi_r^T \end{bmatrix}.$$

设 R 为矩阵 M 的行最简形式。则存在一个 $r \times r$ 阶的可逆矩阵 S ，使得 $R = SM$ 。显然， $e^T R$ 至少有 r 个非零项。令 $\xi = (e^T R)^T = (e^T SM)^T = M^T (S^T e)$ 。我们可以看到 ξ 是一个在 V 中的向量，至少有 r 个非零项。

证毕

□

3.3 主要结果的证明

本小节中对结果的证明用到了准素分解的思想，在这一小节中首先给出准素分解的内容。我们用 $\mathbb{F}^n$ 表示带有标准内积的 n -维线性空间。设 u 和 v 是 $\mathbb{F}^n$ 中的两个向量，若满足 $u^T v = 0$ 我们称 u, v 正交且表示为 $u \perp v$ 。与之类似，若任意的 $u \in U$ 和 $v \in V$ 都有 $u^T v = 0$ ，则称两个空间是正交的并用 $U \perp V$ 来表示。若一个非零向量 $u \in \mathbb{F}^n$ 满足 $u^T u = 0$ ，即 $u \perp u$ 我们则称 u 是迷向向量。此外，对任意一个子空间 $V \subset \mathbb{F}^n$ ，它的正交补空间是

$$V^\perp = \{u \in \mathbb{F}^n : u^T v = 0 \text{ 对任意的 } v \in V\}.$$

设 A 是 $\mathbb{F}$ 中一个 $n \times n$ 的对称矩阵，我们可以将 A 看作一个线性变换。那么若在 $\mathbb{F}^n$ 中 A 的一个子空间 V 满足：任意 $x \in V$ 都有 $Ax \in V$ ，我们称 V 是 A 的不变子空间。另外，我们对任意 A 的不变子空间 V ，我们用 $A|_V$ 表示 A 限制在 V 中的线性变换。接下来我们给出准素分解定理。

引理 3.6 (准素分解定理) 设 $\chi(A; x) \in \mathbb{F}[x]$ 是矩阵 A 的特征多项式且

$$\chi(A; x) = \phi_1^{r_1}(x) \phi_2^{r_2}(x) \cdots \phi_k^{r_k}(x),$$

是 $\chi(A; x)$ 的标准分解式。设 $V_i = \ker \phi_i^{r_i}(A), i = 1, \dots, k$ 。可得到

- (i) $\mathbb{F}^n = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k$;
- (ii) 每一个 V_i 是 A 不变的;
- (iii) $A|_{V_i}$ 上的特征多项式为 $\phi_i^{r_i}(x)$;
- (iv) 存在多项式 $h_1(x), \dots, h_k(x)$ 使得 $h_i(A)$ 作用于 V_i 是单位变换, 作用于 V_j ($j \neq i$) 是零变换.
- (v) 对任意 A 不变子空间 U , 我们 $U = (U \cap V_1) \oplus (U \cap V_2) \oplus \dots \oplus (U \cap V_k)$;

引理 3.7 使用引理 3.6 的概念, 得到下面结论

- (i) $\ker \phi_i(A)$ 是 A 不变的, 且 $\{0\} \neq \ker \phi_i(A) \subset V_i$.
- (ii) 每一个非零的 A 不变子空间 U 被包含在某些 V_i 中, 且 $\dim U = r \cdot \deg \phi_i(x)$ $r \in \{1, 2, \dots, r_i\}$, 并因此有 $\dim U \geq \deg \phi_i(x)$.

证明: 由引理 3.6, 得到 V_i 非零. 因此 $\phi_i(A)$ 和 $\phi_i^{r_i}(A)$ 是奇异的. 这意味着 $\ker \phi_i(A)$ 非零. 此外, $\ker \phi_i(A) \subset \ker \phi_i^{r_i}(A) = V_i$ 且 $\ker \phi_i(A)$ 是 A 不变的. 由此证明了(i).

因为 U 是 A 不变的且 $U \subset V_i$, 我们得到 $\mathcal{X}(A|_U; x)$ 整除 $\mathcal{X}(A|_{V_i}; x)$. 注意到 $\phi_i(x)$ 不可约和 $\mathcal{X}(A|_{V_i}; x) = \phi_i^{r_i}(x)$. 由于 U 非零, 所以 $\mathcal{X}(A|_U; x)$ 的次数不等于 0, 因此得到 $\mathcal{X}(A|_U; x) = \phi_i^r(x)$, 其中 $r \leq r_i$. 即:

$$\dim U = \deg \mathcal{X}(A|_U; x) = r \cdot \deg \phi_i(x).$$

证毕

□

引理 3.8 设 A 是 $\mathbb{F}_p$ 中一个对称矩阵且 U 是全迷向的 A 不变子空间. 使用引理 3.6 中的概念得到:

- (i) 在 $i \neq j$ 时有 $V_i \perp V_j$;
- (ii) $V_i^\perp = V_1 \oplus \dots \oplus V_{i-1} \oplus V_{i+1} \oplus \dots \oplus V_k$;
- (iii) 若 $\phi_i(x)$ 是单因式, 那么 $U \cap V_i = \{0\}$;

(iv) $U = \oplus (U \cap V_i)$, 其中指标 i 满足 $r_i \geq 2$.

证明: 设 ξ 和 η 分别是 V_i 和 V_j 中的向量. 通过引理 3.6(iv) 和 A 是对称矩阵, 可以得到

$$\xi^T \eta = (h_i(A) \xi)^T \eta = \xi^T (h_i(A)) \eta = 0.$$

这就证明了(i).

通过(i), 我知道 $V^\perp \supset \oplus_{j \neq i} V_j$. 另一方面, 由 $V^\perp$ 空间的定义, 可以得到 $\dim V^\perp = n - \dim V_i$. 注意到 $\dim(\oplus_{j \neq i} V_j) = n - \dim V_i$, 可知 $V^\perp$ 就等于 $\oplus_{j \neq i} V_j$. 即证明了(ii).

设 $S = U \cap V_i$. 通过 U 和 V_i 可以知道 S 是 A 不变的. 假设 $S \neq \emptyset$, 我们断言 $S = V_i$. 因为 S 是 V_i 的子空间, 所以 $\mathcal{X}(A|_S; x)$ 整除 $\mathcal{X}(A|_{V_i}; x)$. 但由于 $\mathcal{X}(A|_{V_i}; x)$ 是 $\phi_i(x)$ 是不可约多项式, 故必须有 $\mathcal{X}(A|_S; x) = \mathcal{X}(A|_{V_i}; x)$. 因此断言 $S = V_i$ 成立. 又因为 $V_i = S \subset U$ 且 U 是全迷向的空间, 所以 $V^\perp \supset U^\perp \supset U \supset V_i$. 联合(ii)可以看到 $\oplus_{j \neq i} V_j \supset V_i$, 这同引理 3.6(i) 矛盾, 因此假设 $S \neq \emptyset$ 不成立. 这就证明了(iii). 通过(iii)和引理 3.6(v), 很容易得到本引理最后一条断言.

证毕

□

3.3.1 自同构群 $\Gamma(G)$ 阶的上界

在本文中我们定义 $\nu(G; x) = \frac{\chi(G; x)}{\mu(G; x)}$, 注意到 $\deg \nu(G; x)$ 严格小于 $\deg \chi(G; x)$,

因为任何图至少有一个主特征值. 本文的首要目标是改进 Criscuolo 等人所获得的自同构群 $\Gamma(G)$ 阶的上界. 此外, 我们所获得的结果可以应用于更广泛的图类:

我们只需要在 $\nu(G; x)$ 上满足无平方的假设, 而 $\chi(G; x)$ 不需要是无平方的. 具体来说, 我们得到了以下定理:

定理 3.1

设 G 是一个具有 n 个顶点的图，并且 $\nu(G; x)$ 是无平方的。假设 $\nu(G; x)$ 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上具有标准因子分解：

$$\nu(G; x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x),$$

其中不可约因子满足 $\deg p_1(x) \leq \cdots \leq \deg p_s(x)$ 。定义

$$\tau = \max \left\{ t : 1 \leq t \leq s \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^t \deg p_i(x) \leq \frac{n}{2} \right\} \quad (1)$$

则图的自同构群 $\Gamma(G)$ 是一个阶数至多为 2^τ 的初等阿贝尔 2 群。

证明：我们发现 $\Gamma_{\mathbb{Q}}(G)$ 同构于 $Z_2^s = \langle (\epsilon_1, \dots, \epsilon_s), x \rangle$ ，可以看作是 $\mathbb{F}_2^s$ ，在二元域 $\mathbb{F}_2$ 上 s 维线性空间，其中 $S = (\text{col } W)^\perp$ 。

设 $|\Gamma(G)| = 2^m$ 。在这种对应关系下， $\Gamma(G)$ 成为 $\mathbb{F}_2^s$ 上的一个 m 维子空间 V 。根据引理 3.5， V 包含一个至少具有 m 个非零项的向量 ξ 。设 $I \subseteq \{1, 2, \dots, s\}$ 是与 ξ 非零项对应的索引集合，设 $P \subset \Gamma(G)$ 为与 ξ 相对应的置换矩阵。我们得到

$$Px = \begin{cases} -x & \text{如果 } x \in V_i \text{ 对某些 } i \in I \\ x & \text{如果 } x \in V_i \text{ 对某些 } i \in \bar{I} \text{ 或者 } x \in \text{col}(W) \end{cases}$$

回顾一下， $\mathbb{Q}^n = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s \oplus \text{col}(W)$ 并且 $\dim V_i = \deg p_i(x)$ 。因此，我们

$$\text{tr } P = -\sum_{i \in I} \dim V_i + (n - \sum_{i \in I} \dim V_i) = n - 2 \sum_{i \in I} \deg p_i(x) \leq n - 2 \sum_{i=1}^m \deg p_i(x), \quad (2)$$

其中最后一个等式运用了已建立的事实，即 $|I| \geq m$ 以及单调性假设 $\deg p_1(x) \leq \cdots \leq \deg p_s(x)$ 。由于 P 是一个置换矩阵，我们显然有 $\text{tr } P \geq 0$ ，将其与 (2) 结合得到：

$$\sum_{i=1}^m \deg p_i(x) \leq \frac{n}{2},$$

或者等价地， $m \leq \tau$ ，其中 τ 在 (1) 中已经定义。

证毕 □

我们将自己限制在 $\chi(G; x)$ 为平方自由的图 G 中，那么可以从定理 3.1 中获

得 $|\Gamma(G)| = 2^{k-1}$ 的一些必要条件, 其中 k 是 $\chi(G; x)$ 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上不可约因子的数量。

推论 3.1

设 G 是一个具有 n 个顶点的图, 并且 $\chi(G; x)$ 是无平方的。假设 $\chi(G; x)$ 在有理数 $\mathbb{Q}$ 上具有标准因子分解:

$$\chi(G; x) = q_1(x)q_2(x) \cdots q_k(x)$$

其中 $\deg q_1(x) \leq \cdots \leq \deg q_k(x)$ 。如果 $|\Gamma(G)| = 2^{k-1}$ 则以下情况成立:

- (1) 主多项式 $\mu(G; x)$ 是不可约的
- (2) $\deg \mu(G; x) = \deg q_k(x) \geq n/2$ 即 G 至少有 $n/2$ 个主特征值。

证明: 设 $|\Gamma(G)| = 2^m$, 根据定理 3.1, 我们有

$$m \leq \tau \leq s \leq k-1. \quad (3)$$

由于 $m = k-1$, 所以不等式(3)中所有不等式必须相等。等式 $s = k-1$ 意味着 $\mu(G; x)$ 是不可约的。等式 $\tau = s$ 意味着 $\deg \nu(G; x) \leq n/2$, 或者等价地 $\deg \mu(G; x) \geq n/2$ 。因此, 根据假设 $\deg q_1(x) \leq \cdots \leq \deg q_k(x)$, 我们必须有 $\deg \mu(G; x) = \deg q_k(x)$ 。

证毕

□

我们指出关于等式 $|\Gamma(G)| = 2^{k-1}$ 的必要条件 $\deg q_k(x) \geq n/2$ 是在[8, 推论 4]中获得的。

3.3.2 自然推广下的同构群 $\Gamma(G)$ 阶的上界

本文的第二个目标是证明在对自同构群的自然推广下, 平坦多项式 $\nu(G; x)$ 的不可约因子的数量与新群的阶之间存在直接联系。

我们将图 G 的自同构看作为一个置换矩阵 P , 使得图的邻接矩阵 A 和 P 是可交换的, 即 $PA = AP$ 。一个正交矩阵 Q 被称为正则的, 如果 Q 的每一行的和为1, 即 $Qe = e$ 。我们提到正则正交矩阵的概念对广义同谱的研究至关重要, 该领域最

早由 Johnson and Newman[16]研究并在 wang 及其合作者的一系列论文中得到很好的发展。显然置换矩阵可以被表示为具有整数项的正则正交矩阵。这表明了图自同构的推广。

定义 3.1 设 $\mathbb{F}$ 是实数 $\mathbb{R}$ 的任意子环。图 G 的 $\mathbb{F}$ -自同构是满足 $QA = AQ$ 的正则正交矩阵，其中 Q 的元素在 $\mathbb{F}$ 中。我们用 $\Gamma_{\mathbb{F}}(G)$ 来表示图 G 的所有 $\mathbb{F}$ 自同构所组成的群（在常规矩阵算法下）。

我们注意到，如果 $\mathbb{F}$ 和 $\mathbb{L}$ 是实数 $\mathbb{R}$ 的两个子环，且 $\mathbb{F} \subset \mathbb{L}$ ，则显然 $\Gamma_{\mathbb{F}}(G)$ 是 $\Gamma_{\mathbb{L}}(G)$ 的一个子群。本文的一个有趣的发现是，当 $\mathbb{F}$ 是一个域时，群 $\Gamma_{\mathbb{F}}(G)$ 的阶可以通过在给定的域 $\mathbb{F}$ 上平坦多项式 $\nu(G; x)$ 的不同不可约因子数量直接确定，前提是 $\nu(G; x)$ 是平方自由的。

定理 3.2 设 $\mathbb{F}$ 是实数 $\mathbb{R}$ 的一个子域， G 是一个具有 n 个顶点的图，并且 $\nu(G; x)$ 是无平方的。则 $\Gamma_{\mathbb{F}}(G)$ 是一个阶数为 2^s 的初等阿贝尔 2 群，其中 s 是平坦多项式 $\nu(G; x)$ 在 $\mathbb{F}$ 上的不同不可约因子的数量。

证明： 设 G 具有 n 个顶点，邻接矩阵为 A 。图 G 的道矩阵为：

$$W = W(G) := [e, Ae, \dots, A^{n-1}e]$$

设 $\mathbb{F}$ 是实数 $\mathbb{R}$ 的任意子域。我们用 $\mathbb{F}^n$ 表示 n 维线性空间

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n)^T : x_i \in \mathbb{F} \text{ for } i = 1, \dots, n\}$$

并且其具有标准内积： $(u, v) = u^T v$ 。两个向量 u 和 v 如果满足 $u^T v = 0$ ，则称为正交。对于 $\mathbb{F}^n$ 的子空间 V ，我们用 $V^\perp$ 表示 V 的正交补，即：

$$V^\perp = \{u \in \mathbb{F}^n : u^T v = 0 \text{ 对任意 } v \in V\}$$

对于 $\mathbb{F}$ 上的一个 $n \times n$ 矩阵 M ，我们用 $\sigma(M)$ 表示在 $\mathbb{F}^n$ 上的线性变换： $x \mapsto Mx$ ；并用 $\text{col}(M)$ 表示 M 的列空间，即 $\text{col}(M)$ 是 $\sigma(M)$ 的像。

我们暂时假设 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 。设 $S = (\text{col } W)^\perp$ ， $Q \in \Gamma_{\mathbb{F}}(G)$ ， $\gamma = \sigma(A)|_S$ ， $\delta = \sigma(Q)|_S$ 。

根据引理 3.3，我们有 $\chi(\gamma; x) = \nu(G; x)$ ，因此它是平方自由的。令 $x \in S$ 是对应

特征值 λ 的 γ 的特征向量。由于 γ 和 σ 是可交换的，我们发现：

$$\gamma.\delta x = \delta\gamma x = \delta\lambda x = \lambda.\delta x$$

这意味着 δx 也是对应特征值 λ 的 γ 的特征向量。由于 λ 是简单的并且 δ 是长度保持的，因此我们有 $\delta x = \pm x$ ，从而 $\delta^2 x = x$ 。注意到 S 由所有 γ 特征向量生成，我们可以得出 δ^2 是恒等映射。因此， $\Gamma_{\mathbb{R}}(G)$ 是一个初等阿贝尔 2 群。

现在我们回到一般的子域 $\mathbb{F} \subset \mathbb{R}$ 。显然 $\Gamma_{\mathbb{F}}(G)$ 是一个初等阿贝尔 2 群，因为 $\Gamma_{\mathbb{F}}(G)$ 是 $\Gamma_{\mathbb{R}}(G)$ 的一个子群。设 $v(G; x) = p_1(x)p_2(x) \cdots p_s(x)$ 是 $v(G; x)$ 在 $\mathbb{F}$ 上的标准因子分解。由于 $\chi(\gamma; x) = v(G; x)$ ，我们可以为 S 选择一组基，使得 γ 的矩阵具有标准形式 $C = \text{diag}[C_1, C_2, \dots, C_s]$ ，其中 C_i 是多项式 $p_i(x)$ 的伴随矩阵。

设 B 为同一组基在 δ 下的矩阵。根据引理 3.4(iii)， B 和 C 是可交换的。由于 $\chi(\gamma; x)$ 是平方自由的，我们知道 B 必须是 C 的一个多项式，在 $\mathbb{F}$ 下，参见[43,p.23]。设 $B = f(C)$ 为在 $\mathbb{F}$ 上的多项式 f 。这意味着 $B = \text{diag}[B_1, B_2, \dots, B_s]$ 其中 $B_i = f(C_i)$ 。由于 δ^2 是恒等映射，我们有 $B^2 = I_m$ 因此 $B_i^2 = I_{m_i}$ ，其中 $m_i = \deg v(G; x)$ 且 $m_i = \deg p_i(x)$ 。因为 C_i 的最小多项式是不可约多项式 $p_i(x)$ ，我们发现 $\mathbb{F}[C_i]$ 是一个与 $\mathbb{F}[x]/(p_i(x))$ 同构的域。因此 $x^2 - 1 = 0$ 在 $\mathbb{F}[C_i]$ 中的唯一解是 I_{m_i} 和 $-I_{m_i}$ 。因此我们得到 $B = \text{diag}[\pm I_{m_1}, \dots, \pm I_{m_s}]$ 。根据引理 3.4(i)，我们很容易看出，如果 Q_1 和 Q_2 是 $\Gamma_{\mathbb{F}}(G)$ 中不同的矩阵，则 $\sigma(Q_1)|_S \neq \sigma(Q_2)|_S$ 因此

$$|\Gamma_{\mathbb{F}}(G)| \leq 2^s \quad (4)$$

B 有 2^s 次可能的赋值。为了证明(4)中的不等式实际上是一个等式，我们需要构造一个矩阵 $Q \in \Gamma_{\mathbb{F}}(G)$ ，与每个形式为 $B = \text{diag}[\pm I_{m_1}, \dots, \pm I_{m_s}]$ 的 B 相对应。

令 $V_i = \{x \in S : p_i(A)x = 0\}$ 对于 $i = 1, 2, \dots, s$ 。根据初等分解定理，有

$S = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s$ 并且 $\dim V_i = \deg p_i(x)$ 对每个 i 都成立。此外，因为 A 是对称

的，我们可以看到对于不同的 $i, j \in \{1, 2, \dots, s\}$ 有 $V_i \perp V_j$ 。假设

$$B = \text{diag}[\epsilon_1 I_{m_1}, \dots, \epsilon_s I_{m_s}] \text{ 其中 } \epsilon_i = \pm 1.$$

注意到 $\mathbb{F}^n = S \oplus \text{col}(W) = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_s \oplus \text{col}(W)$ 存在唯一的线性变换 τ 在 $\mathbb{F}^n$ 上满足：

$$\tau(x) = \begin{cases} \epsilon_i x & \text{如果 } x \in V_i \text{ 对一些 } i \\ x & \text{如果 } x \in \text{col}(W) \end{cases}$$

由于 $V_1, \dots, V_s$ 和 $\text{col}(W)$ 是两两正交的，我们可以看到 τ 是长度保持的，因此是正交的。注意到 $e \in W$ 我们有 $\tau(e) = e$ 。让 Q 成为 τ 在标准基 $(1, 0, \dots, 0)^T$, $(0, 1, 0, \dots, 0)^T, (0, \dots, 0, 1)^T$ 下的矩阵，我们看到 $Q \in \Gamma_{\mathbb{F}}(G)$ 。

证毕

□

3.4 实验模拟

在这一小节中，我们给出具体模拟的实验数据，通过例子具体对定理 3.1 和定理 3.2 的结果进行验证。用 Mathematica 随机产生的一个具有八个顶点的图 G 如下所示：

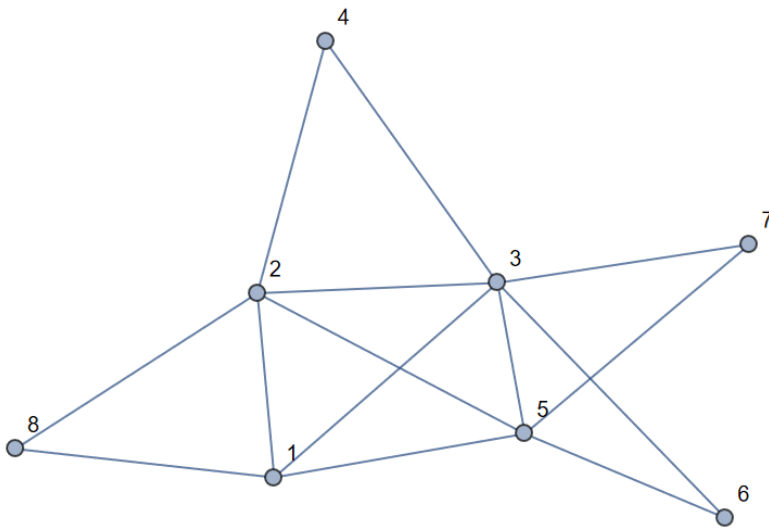


图 3-1

其邻接矩阵如下所示：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可以计算出其特征多项式为 $\chi(G; x) = 8x - 3x^2 + 30x^3 + 22x^4 - 16x^5 - 14x^6 + x^8$

其平坦多项式为 $\nu(G; x) = x + x^2$ ，平坦多项式存在标准因子分解 $x(1+x)$ 。根据上述因子分解及定理 3.1 中的定义可以得出 $p_1(x)$ 为 x $p_2(x)$ 为 $1+x$ 并且满足 $\deg p_1(x) \leq \deg p_2(x)$ 。根据上述计算结果并结合定理 3.1 中 τ 的定义可以得出 τ 的值为 2，定理 3.2 中的 s 为 2。关于自同构群的计算结果如下所示：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

根据上述的输出结果，可以明确看出图 G 的自同构群的阶数满足定理 3.1 中所说的阶数最多为 2^τ 也满足定理 3.2 中所说的阶数为 2^s 。这个例子具体验证了上一小节的主要结果。

3.5 主要结论

通过上述对自同构群上界的研究与证明，我们可以得到以下的结论：

假设 $\nu(G; x)$ 是无平方且在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上具有标准因子分解，则图的自同构群 $\Gamma(G)$ 是一个阶数至多为 2^τ 的初等阿贝尔 2 群,其中 τ 的定义如下所示：

$$\tau = \max \left\{ t : 1 \leq t \leq s \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^t \deg p_i(x) \leq \frac{n}{2} \right\}.$$

我们将自己限制在 $\chi(G; x)$ 为无平方的图 G 中, 那么可以从上述结果中获得 $|\Gamma(G)| = 2^{k-1}$ 的一些必要条件, 其中 k 是 $\chi(G; x)$ 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上不可约因子的数量。其结果如下所示:

设 G 是一个具有 n 个顶点的图, 并且 $\chi(G; x)$ 是无平方的。假设 $\chi(G; x)$ 在有理数 $\mathbb{Q}$ 上具有标准因子分解:

$$\chi(G; x) = q_1(x)q_2(x) \cdots q_k(x)$$

其中 $\deg q_1(x) \leq \cdots \leq \deg q_k(x)$ 。如果 $|\Gamma(G)| = 2^{k-1}$ 则以下情况成立:

- (1) 主多项式 $\mu(G; x)$ 是不可约的
- (2) $\deg \mu(G; x) = \deg q_k(x) \geq n/2$ 即 G 至少有 $n/2$ 个主特征值。

在对自同构群的自然推广下, 平坦多项式 $\nu(G; x)$ 的不可约因子的数量与新群的阶之间存在直接联系。

我们将图 G 的自同构看作为一个置换矩阵 P , 使得图的邻接矩阵 A 和 P 是可交换的, 即 $PA = AP$ 。置换矩阵可以被表示为具有整数项的正则正交矩阵。这表明了图自同构的推广。在对自同构群的自然推广下, 平坦多项式 $\nu(G; x)$ 的不可约因子的数量与新群的阶之间存在直接联系, 其结果如下所示:

设 $\mathbb{F}$ 是实数 $\mathbb{R}$ 的一个子域, G 是一个具有 n 个顶点的图, 并且 $\nu(G; x)$ 是无平方的。则 $\Gamma_{\mathbb{F}}(G)$ 是一个阶数为 2^s 的初等阿贝尔 2 群, 其中 s 是平坦多项式 $\nu(G; x)$ 在 $\mathbb{F}$ 上的不同不可约因子的数量。

第4章 广义道矩阵下自同构群 $\Gamma(G)$ 的上界

在本章中定义图 G 的广义道矩阵,并对广义道矩阵下自同构群上界问题进行求解。本章我们对结果的证明用到的方法与第三章计算自同构群上界的方法类似。

4.1 预备知识

引入函数 $f(t)=t^a$, 设 G 具有 n 个顶点, 邻接矩阵为 A , 定义图 G 的广义道矩阵为

$$W_f = [f(G), Af(G), A^2 f(G), \dots, A^{n-1} f(G)]$$

$$\text{当 } a=0 \text{ 时 } f(G) = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = e, W_f = W, \text{ 本章考虑的是当 } a=2 \text{ 时 } f(G) = \begin{pmatrix} d_1^2 \\ \vdots \\ d_n^2 \end{pmatrix} \text{ 的情况。}$$

如果一个图 G 的邻接矩阵 A 的某个特征值 λ 所对应的特征子空间 $\varepsilon_A(\lambda)$ 不正交于 f , 那么称 λ 为图 G 的 f -主特征值。在本章中记 $\mu_f(G; x)$ 为 f -主多项式, 记平坦多项式为: $\nu_f(G; x) = \frac{\chi(G; x)}{\mu_f(G; x)}$ 。

在本章中 $\mathbb{F}$ 是实数 $\mathbb{R}$ 的任意子域。我们用 $\mathbb{F}^n$ 表示 n 维线性空间

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n)^T : x_i \in \mathbb{F} \text{ for } i=1, \dots, n\}$$

并且其具有标准内积: $(u, v) = u^T v$ 。对于 $\mathbb{F}^n$ 的子空间 V , 我们用 $V^\perp$ 表示 V 的正交补, 即: $V^\perp = \{u \in \mathbb{F}^n : u^T v = 0 \text{ 对任意 } v \in V\}$

对于 $\mathbb{F}$ 上的一个 $n \times n$ 矩阵 M , 我们用 $\sigma(M)$ 表示在 $\mathbb{F}^n$ 上的线性变换: $x \mapsto Mx$; 并用 $\text{col}(M)$ 表示 M 的列空间, 即 $\text{col}(M)$ 是 $\sigma(M)$ 的像。

4.2 预备引理

引理 4.1 子空间 $S := (\text{col} W_f)^\perp$ 是 $\sigma(A)$ 不变的, 且 $\chi(\sigma(A)|_S; x) = \nu_f(G; x)$ 。

证明：该引理仍然可以用引理 3.3 的证明方法进行证明。设 r 为图 G 的主特征值数量，写出 $\mu_f(G; x) = x^r + \sum_{i=1}^{r-1} a_i x^i$ 。已知 W_f 的秩为 r ，并且 W_f 的前 r 列构成 $\text{col}(M)$ 的一组基，参见引理 3.1。通过引理 3.2 我们有 $(A^r + \sum_{i=0}^{r-1} a_i A^i) f = 0$ ，即 $A^r f = -\sum_{i=0}^{r-1} a_i A^i f$ 。因此我们可以得出 $\text{col}(M)$ 是 $\sigma(A)$ 不变的，矩阵 $\sigma(A)|_{\text{col}(W_f)}$ 在基 $\{f, Af, A^2 f, \dots, A^{r-1} f\}$ 下具有以下形式

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{r-1} \end{pmatrix}$$

因此 $\chi(\sigma(A)|_{\text{col}(W_f)}; x) = x^r + \sum_{i=0}^{r-1} a_i x^i = \mu_f(G; x)$ 。由于 A 是对称的，因此 $\sigma(A)$ 不变子空间的正交补也是 $\sigma(A)$ 不变的。因此 S 也是 $\sigma(A)$ 不变的。此外，由于 $\mathbb{F}^n = (\text{col}(W_f)) \oplus S$ 我们得到 $\chi(G; x) = \chi(\sigma(A)|_{\text{col}(W_f)}; x) \chi(\sigma(A)|_S; x)$ 。因此

$$\chi(\sigma(A)|_S; x) = \frac{\chi(A; x)}{\chi(\sigma(A)|_{\text{col}(W_f)}; x)} = \frac{\chi(A; x)}{\mu_f(G; x)} = \nu_f(G; x)$$

证毕 □

引理 4.2 设 $\mathbb{F}$ 是实数 $\mathbb{R}$ 的任意子域。让 $Q \in \Gamma_{\mathbb{F}}(G)$ 且 $S = (\text{col}(W_f))^\perp$ 。则有以下结论：

- (i) $\sigma(Q)|_{\text{col}(W_f)} = \text{id}$ 即对于任何 $\xi \in \text{col}(W_f)$ 有 $Q\xi = \xi$
- (ii) S 是 $\sigma(A)$ 不变的
- (iii) 线性变换 $\sigma(A)|_S$ 和 $\sigma(Q)|_S$ 是可交换的。

证明：运用引理 3.4 的证明方法。因为 $QA = AQ$ 我们得到对于任何 $i \geq 0$ 有 $QA^i = A^i Q$ 。注意到 $Qf = f$ ，我们有 $Q(A^i f) = A^i(Qf) = A^i f$ ，因此(i)成立。设 η 是 S 的任意向量。因为 $S = (\text{col}(W_f))^\perp$ ，我们得到对于任何 $i \geq 0$ 都有 $A^i f \perp \eta$ 。结合 $QA^i = A^i Q$ 可得 $\langle A^i f, Q\eta \rangle = f^T A^i Q\eta = f^T QA^i \eta = f^T A^i \eta = \langle A^i f, \eta \rangle = 0$ 。因此，由于

i 的任意性, $Q\eta \in S$, 这证明了(ii)。最后一个结论是显然的, 因为 $\sigma(A)$ 和 $\sigma(Q)$ 在整个空间 $\mathbb{F}^n$ 作为线性变换是可交换的。

证毕

□

4.3 主要结果及其证明

定理 4.1

设 G 是一个具有 n 个顶点的图, 并且 $\nu_f(G; x)$ 是无平方的。假设 $\nu_f(G; x)$ 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上具有标准因子分解:

$$\nu_f(G; x) = p_1(x)p_2(x) \cdots p_s(x),$$

其中不可约因子满足 $\deg p_1(x) \leq \cdots \leq \deg p_s(x)$, 则图的自同构群 $\Gamma(G)$ 是一个阶数至多为 2^τ 的初等阿贝尔 2 群, 其中 τ 在上述(1)中已定义。

证明: 我们发现 $\Gamma_{\mathbb{Q}}(G)$ 可以看作为 $\mathbb{F}_2^s$, 在二元域 $\mathbb{F}_2$ 上 s 维线性空间, 其中 $S = (\text{col } W_f)^\perp$ 。设 $|\Gamma(G)| = 2^m$ 。在这种对应关系下, $\Gamma(G)$ 成为 $\mathbb{F}_2^n$ 上的一个 m 维子空间 V 。根据引理 3.5, V 包含一个至少具有 m 个非零项的向量 ξ 。设 $I \subseteq \{1, 2, \dots, s\}$ 是与 ξ 非零项对应的索引集合, 设 $P \subset \Gamma(G)$ 为与 ξ 相对应的置换矩阵。我们得到

$$Px = \begin{cases} -x & \text{如果 } x \in V_i \text{ 对一些 } i \in I \\ x & \text{如果 } x \in V_i \text{ 对一些 } i \in \bar{I} \text{ 或者 } x \in \text{col}(W_f) \end{cases}$$

根据上文我们知道 $\mathbb{Q}^n = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s \oplus \text{col}(W_f)$ 并且 $\dim V_i = \deg p_i(x)$ 。因此, 上述等式(2)在此处仍然成立。由于 P 是一个置换矩阵, 我们显然有 $\text{tr } P \geq 0$, 将其与(2)结合得到:

$$\sum_{i=1}^m \deg p_i(x) \leq \frac{n}{2},$$

或者等价地, $m \leq \tau$, 其中 τ 在(1)中已经定义。

证毕

□

本章考虑的是广义道矩阵下图 G 的自同构群的上界问题。我们将图 G 的自同构看作为一个置换矩阵 P ，使得图的邻接矩阵 A 和 P 是可交换的，即 $PA = AP$ 。给出如下定义，设 $\mathbb{F}$ 是实数 $\mathbb{R}$ 的任意子环。图 G 的 $\mathbb{F}$ -自同构是满足 $QA = AQ$ 的 f -正则正交矩阵，其中 Q 的元素在 $\mathbb{F}$ 中。我们用 $\Gamma_{\mathbb{F}}(G)$ 来表示图 G 的所有 $\mathbb{F}$ 自同构所组成的群。我们注意到，如果 $\mathbb{F}$ 和 $\mathbb{L}$ 是实数 $\mathbb{R}$ 的两个子环，且 $\mathbb{F} \subset \mathbb{L}$ ，则显然 $\Gamma_{\mathbb{F}}(G)$ 是 $\Gamma_{\mathbb{L}}(G)$ 的一个子群。本文的一个发现是，当 $\mathbb{F}$ 是一个域时，群 $\Gamma_{\mathbb{F}}(G)$ 的阶可以通过在给定的域 $\mathbb{F}$ 上平坦多项式 $\nu_f(G; x)$ 的不同不可约因子数量直接确定，前提是 $\nu_f(G; x)$ 是平方自由的。

定理 4.2 设 $\mathbb{F}$ 是实数 $\mathbb{R}$ 的一个子域， G 是一个具有 n 个顶点的图，并且 $\nu_f(G; x)$ 是无平方的。则 $\Gamma_{\mathbb{F}}(G)$ 是一个阶数为 2^s 的初等阿贝尔 2 群，其中 s 是平坦多项式 $\nu_f(G; x)$ 在 $\mathbb{F}$ 上的不同不可约因子的数量。

证明：继续沿用定理 3.2 的证明思想。假设 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 。设 $S = (\text{col } W_f)^\perp$ ， $Q \in \Gamma_{\mathbb{F}}(G)$ ， $\gamma = \sigma(A)|_S$ ， $\delta = \sigma(Q)|_S$ 。根据引理 3.3，我们有 $\chi(\gamma; x) = \nu(G; x)$ ，因此它是平方自由的。令 $x \in S$ 是对应特征值 λ 的 γ 的特征向量。我们可以得出 $\Gamma_{\mathbb{R}}(G)$ 是一个初等阿贝尔 2 群，证明方法与第三章类似。显然 $\Gamma_{\mathbb{F}}(G)$ 是一个初等阿贝尔 2 群，因为 $\Gamma_{\mathbb{F}}(G)$ 是 $\Gamma_{\mathbb{R}}(G)$ 的一个子群。

设 $\nu_f(G; x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)$ 是 $\nu_f(G; x)$ 在 $\mathbb{F}$ 上的标准因子分解。由于 $\chi(\gamma; x) = \nu_f(G; x)$ ，我们可以为 S 选择一组基，使得 γ 的矩阵具有标准形式 $C = \text{diag}[C_1, C_2, \dots, C_s]$ ，其中 C_i 是多项式 $p_i(x)$ 的伴随矩阵。

设 B 为同一组基在 δ 下的矩阵。根据引理 3.4(iii)， B 和 C 是可交换的。由于 $\chi(\gamma; x)$ 是平方自由的，我们知道 B 必须是 C 的一个多项式。由于 δ^2 是恒等映射，我们有 $B^2 = I_m$ 因此 $B_i^2 = I_{m_i}$ ，其中 $m_i = \deg \nu_f(G; x)$ 且 $m_i = \deg p_i(x)$ 。因为 C_i 的最小多项式是不可约多项式 $p_i(x)$ ，我们发现 $\mathbb{F}[C_i]$ 是一个与 $\mathbb{F}[x]/(p_i(x))$ 同构的域。

因此 $x^2 - 1 = 0$ 在 $\mathbb{F}[C_i]$ 中的唯一解是 I_{mi} 和 $-I_{mi}$ 。因此我们得到 $B = \text{diag}[\pm I_{m_1}, \dots, \pm I_{m_s}]$ 。根据引理 3.4(i)，我们很容易看出，如果 Q_1 和 Q_2 是 $\Gamma_{\mathbb{F}}(G)$ 中不同的矩阵，则 $\sigma(Q_1)|_S \neq \sigma(Q_2)|_S$ 因此 $|\Gamma_{\mathbb{F}}(G)| \leq 2^s$ 。

为了证明上述不等式实际上是一个等式，我们需要构造一个矩阵 $Q \in \Gamma_{\mathbb{F}}(G)$ ，与每个形式为 $B = \text{diag}[\pm I_{m_1}, \dots, \pm I_{m_s}]$ 的 B 相对应。

令 $V_i = \{x \in S : p_i(A)x = 0\}$ 对于 $i = 1, 2, \dots, s$ 。根据初等分解定理，有 $S = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_s$ 并且 $\dim V_i = \deg p_i(x)$ 对每个 i 都成立。此外，因为 A 是对称的，我们可以看到对于不同的 $i, j \in \{1, 2, \dots, s\}$ 有 $V_i \perp V_j$ 。假设

$$B = \text{diag}[\epsilon_1 I_{m_1}, \dots, \epsilon_s I_{m_s}] \text{ 其中 } \epsilon_i = \pm 1.$$

注意到 $\mathbb{F}^n = S \oplus \text{col}(W_f) = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_s \oplus \text{col}(W_f)$ 存在唯一的线性变换 τ' 在 $\mathbb{F}^n$ 上满足：

$$\tau'(x) = \begin{cases} \epsilon_i x & \text{如果 } x \in V_i \text{ 对某些 } i \\ x & \text{如果 } x \in \text{col}(W_f) \end{cases}$$

$V_1, \dots, V_s$ 和 $\text{col}(W_f)$ 是两两正交的，根据上述线性变换我们有 $\tau(f) = f$ ， Q 可成为 τ' 在标准基下的矩阵。

证毕

□

第5章 总结与展望

5.1 回顾与总结

图的自同构群上界与特征值之间关系的研究是图论和图论中的一个重要课题，具有丰富的理论内涵和广泛的应用前景。关于这个课题的研究，近年来国内外学者都给出了自己的研究成果。自同构群描述了图形中结构的对称性，而特征值则提供了关于图的结构性质的重要信息。一个图的自同构群是由所有保持图的邻接关系的自同构组成的群，它刻画了图内在的对称程度。长期以来，图的自同构群阶的上界研究一直是图论领域关注的重要问题。1980年，Criscuolo等人证明了图 G 自同构群的阶的上界为 2^{k-1} ，其中 k 是 $\chi(G; x)$ 在有理数 $\mathbb{Q}$ 上的不可约因子的个数，图 G 所有特征值都是简单的。

本文主要是对Criscuolo等人的结果进行改进。我们引入与图 G 相关的平坦多项式，它被定义为特征多项式与主多项式的商。对于一个具有平方自由平坦多项式的图 G ，我们建立了其自同构群阶的上界，该上界与平坦多项式在有理数 $\mathbb{Q}$ 上不可约因子的数量有关。

全篇共计分为五个章节，主要工作如下：

在第一章中，我们分为三节来介绍我们将要讨论的问题的背景、国内外的一些学者之前相关研究的进展以及已经取得的重要研究成果和目前学者们聚焦的尚未解决的一些难题。

在第二章中，我们介绍了预备知识其中包括在本文中出现的符号和一些基础且重要的、并在后文会反复应用的定义。

在第三章中，我们引入与图 G 相关的平坦多项式，建立了其自同构群阶的上界，该上界与平坦多项式在有理数 $\mathbb{Q}$ 上不可约因子的数量有关，从而改进了Criscuolo等人基于特征多项式得出的先前上界。除此之外，在对自同构群的自然推广下，验证了平坦多项式 $\nu(G; x)$ 的不可约因子的数量与新群的阶之间存在直接联系。

在第四章中，引入函数 $f(t) = t^a$ ，对图 G 的道矩阵重新定义，研究广义道矩阵下图 G 的自同构群的上界问题。

在本章中，我们对全文内容进行总结并对课题研究的未来进行展望。

5.2 研究展望

关于图的自同构群阶的上界这个问题的研究一直是图论领域关注的重要问题，它在物理、网络科学和生物信息学等领域都具有应用价值。在这些领域，图的对称性和结构特性对理解复杂系统至关重要。总的来说，图的自同构群上界问题是一个富有前景并具有挑战性的研究课题，不仅在理论上具有深刻的意义，也在实际应用中展现出重要的价值。

虽然这一阶段工作已经取得一定的研究结论，但是未来还会面对一些挑战。比如通过什么方法将无向图的自同构群的结果推广到有向图，因为有向图的结构更为复杂，对称性更少，同时可能存在更多的变体；另外确定不同图类之间的上界差异需要深入分析各自的结构特性。总之，未来的研究可能会细化图类，引入新的数学工具，结合应用需求以及计算机实验等方面展开，逐步解决定向图自同构上界的问题，并推动相关领域的发展。定向图自同构群的上界研究将受益于组合数学及计算科学的深度融合。未来的突破可能源于对特定图类的深入分析、跨学科工具的引入以及实际需求的驱动，最终推动理论的完善及其在科学工程中的广泛应用。

参考文献

- [1] L. Collatz, U. Sinowinz. Spektren endlicher Gradfen[M]. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg, 1957, 21: 63-77.
- [2] D.M.Cvetković, M.Doob, H.Sachs. Spectra of Graph[M]. Academic, Press, New York, 1980.
- [3] D.M.Cvetković, M.Doob, I.Gutman, etc. Recent Results in the Theory of Graph Spectra[M]. North-Holland, 1988.
- [4] A. Mowshowitz, The group of a graph whose adjacency matrix has all distinct eigen values, In: Proof Techniques in Graph Theory (ed. F. Harary), Academic Press, New York-London, 1969, pp. 109–110.
- [5] M. Petersdorf, H. Sachs, Spektrum und Automorphismengruppe eines Graphen, In: Combinatorial Theory and Its Applications III (eds. P. Erdős, A. Rényi, V. T. Sós), Bolyai Janos Mat. Társulat, Budapest, North-Holland (Amsterdam), 1970, pp. 891-907.
- [6] A. Mowshowitz, The adjacency matrix and the group of a graph, In: New Directions in the Theory of Graphs (ed. F. Harary), Academic Press, New York, 1973, pp. 129–148.
- [7] D.M.Cvetković. The main part of the spectrum, divisors and switching of graphs[M]. Publications de l'Institut Mathématique, 1978, 23: 31-38.
- [8] G. Criscuolo, C.-M. Kwok, A. Mowshowitz, R. Tortora, The group and the minimal polynomial of a graph, J. Combin. Theory, Ser. B 29 (1980) 293–302.
- [9] E. M. Hagos, Some results on graph spectra, Linear Algebra Appl. 356 (2002) 102–111.
- [10] 侯耀平, 周后卿. 恰有两个主特征值的树[J]. 湖南师范大学自然科学学报, 2005, 28, 1-3.
- [11] 张远达. 有限群构造. 上册. 北京: 科学出版社, 1982.
- [12] 孙德荣. 图的主特征值与图的结构 [J]. 昌吉学院学报, 2010, (02): 97-99.
- [13] 孙德荣, 李硕. 恰有两个主特征值的图的性质[J]. 数学的实践与认识, 2011, 16:182-188
- [14] 汤自凯, 侯耀平. 恰有两个主特征值的三圈图[J]. 湖南师范大学自然科学学

- 报, 2011, 4: 1000-2537.
- [15]D. Cvetković, P. W. Fowler. A group-theoretical bound for the number of main eigenvalues of a graph[J]. ACS Publications, 2002, 24: 43-53.
- [16]C. R. Johnson, M. Newman, A note on cospectral graphs, J. Combin. Theory, Ser. B 28 (1980) 96–103.
- [17]L. Qiu, W. Wang, W. Wang, H. Zhang, Smith normal form and the generalized spectral characterization of graphs, Discrete Math. 346 (2023) 113177.
- [18]P. Rowlinson, The main eigenvalues of a graph: a survey, Appl. Anal. Discrete Math. 1 (2007) 455–471.
- [19]S. O’Rourke, B. Touri. On a conjecture of Godsil concerning controllable random graphs[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2016, 54: 3347-3378.
- [20]Y. Teranishi, Main eigenvalues of a graph, Linear Multilinear Algebra 49 (2001) 289 303.
- [21]W. Wang, C.-X. Xu, A sufficient condition for a family of graphs being determined by their generalized spectra, European J. Combin. 27 (2006) 826–840.
- [22]W. Wang, A simple arithmetic criterion for graphs being determined by their generalized spectra, J. Combin. Theory, Ser. B 122 (2017) 438–451.
- [23]W. Wang, W. Wang, F. Zhu, An improved condition for a graph to be determined by its generalized spectrum, European J. Combin. 108 (2023) 103638.
- [24]Z. Du, F. Liu, S. Liu, etc. Graphs with $n-1$ main eigenvalues[J]. Discrete Mathematics, 2021, 344.
- [25]杜泽楠, 于倩. 一类树的主特征值数目刻画[J]. 运筹与模糊学, 2021, 11: 131-136.
- [26]L. Feng, D. Stevanović. A short remark on graphs with two main eigenvalues, Applied Mathematics and Computation[J]. 2020, 369: 344-345.
- [27]N. Abreu, DM. Cardoso, FAM. França , etc. Some new aspects of main eigenvalues of graphs[J]. Computational and Applied Mathematics, 2020, 39.
- [28]CTM. Vinagre, V. Trevisan, J. Bolckau, etc. Characterizing threshold graphs with k main signless Laplacian eigenvalues[J]. Linear Algebra and its Applications, 2020, 602: 33–45.
- [29]W. Wang. On the Smith normal form of walk matrices[J]. Linear Algebra and its Applications, 2021, 612: 30-41.
- [30]L Qiu, W. Wang, W. Wang, etc. Smith Normal Form and the generalized spectral

-
- characterization of graph[J]. Discrete Mathematics, 2023, 346: 113177.
- [31]J. A. Bondy, U. S. R. Murty. Graph Theory with Applications[M]. Macmillan, London, Elsevier, New York, 1976.
- [32]D.M. Cvetković, P. Rowlinson, S. Simić. An introduction to the theory of graph spectra[J]. Cambridge United States of America by Cambridge University Press, New York, 2010.
- [33]D.M. Cvetković, M. Doob, H. Sachs. Spectra of Graphs[M]. Second edition JAcademic Press, New York, 1980.
- [34]A. Horn, R. Johnson. Matrix Analysis[M]. Cambridge University Press, New York, 1985.
- [35]M. Newman. Integral Matrices[M]. Academic Press, New York, 1972.
- [36]T.J. Rivlin. The Chebyshev polynomials[M]. 1974.
- [37]T.J. Rivlin. Chebyshev polynomials: from approximation theory to algebra and number theory[M]. Bulletin of the London Mathematical Society, 1990.
- [38]S. Hayat, M. Javaid, J. H. Koolen, Graphs with two main and two plain eigenvalues, Appl. Anal. Discrete Math. 11 (2017) 244–257.
- [39]A. Horn, R. Johnson. Matrix Analysis[M]. Cambridge University Press, New York, 1985.
- [40]E. M. Hagos. Some results on graph spectra[J]. Linear Algebra and its Applications, 2002, 356: 103-111.
- [41]T.J. Rivlin. Chebyshev polynomials: from approximation theory to algebra and number theory[M]. Bulletin of the London Mathematical Society, 1990.
- [42]D. A. Suprenko, R. I. Tyshkevich, Commutative Matrices, Academic Press, New York, 1968.
- [43]吕鑫. 一般型代数曲面的阿贝尔自同构群的阶的最佳上界[D]. 华东师范大学, 2013.

攻读硕士期间取得的学术成果

已发表的学术论文：

- [1] Wang Wei, Wang Xinyue. The automorphism group and plain eigenvalues of a graph. Linear Algebra and its Applications (已录用)

致 谢

路漫漫其修远兮，吾将上下而求索。

行文至此，我的研究生生涯即将画上句号。回首这段充实而又充满挑战的求学时光，心中满是感慨，有太多人值得我衷心感谢。我要将最诚挚的敬意献给我的导师。在学术的漫漫征途中，导师以渊博的学识、严谨的治学态度为我指引方向。从论文的选题、构思，到撰写与修改，每一个环节都倾注了导师大量的心血。当我在研究中陷入困境时，导师总能耐心地为我的答疑解惑，用智慧的光芒驱散我眼前的迷雾，让我在学术探索的道路上坚定前行。导师的言传身教，不仅让我在专业领域有所建树，更让我学会了如何严谨地对待学术，如何做一个有担当的学者。

感谢我的同门师兄姐妹，我们一同探讨学术问题，分享研究心得。还记得那些在研讨室里激烈讨论的日子，思维的火花不断碰撞，让我受益匪浅。在生活中，我们也相互关心、彼此支持，共同度过了许多欢乐的时光。我们一起经历的点点滴滴，都成为了我研究生生活中最珍贵的回忆。

我还要深深感激我的家人，他们始终是我坚强的后盾。无论我遇到多大的困难和挫折，家人的爱与鼓励从未缺席。他们默默承担起生活的琐碎，只为让我能够心无旁骛地投身于学业。父母的辛勤付出，让我能够安心求学；他们的理解与包容，给予我追求梦想的勇气。

在未来的日子里，我将带着大家的期许，继续努力前行，不辜负每一份关爱与支持。

附 录

编程 1:

```

n=8;
G=RandomGraph[BernoulliGraphDistribution[n,1/2]];
GraphAutomorphismGroup[G]
A=AdjacencyMatrix[G];
ch=CharacteristicPolynomial[A,x]
chj=CharacteristicPolynomial[A+J,x]
v=PolynomialGCD[ch,chj]
W=Table[1,{n},{n-2}];
For[i=2,i<=6,i++,W[[;;,i]]=A.W[[;;,i-1]]];
p1=DiagonalMatrix[{1,1,1,1,1,1,1,1}];
p2=DiagonalMatrix[{-1,1,1,1,1,1,1,1}];
p3=DiagonalMatrix[{1,-1,1,1,1,1,1,1}];
p4=DiagonalMatrix[{-1,-1,1,1,1,1,1,1}];
V=Table[0,{n},{n}];
v1=NullSpace[A];
v2=NullSpace[IdentityMatrix[n]+A]
V[[;;,1]]=v1[[1]];
V[[;;,2]]=v2[[1]];
V[[;;,3;;n]]=W;
MatrixForm[(V.p1).Inverse[V]]
MatrixForm[(V.p2).Inverse[V]]
MatrixForm[(V.p3).Inverse[V]]
MatrixForm[(V.p4).Inverse[V]]

```