

分类号: O232

密 级: 公开

单位代码: 10363

学 号: 2211020122

题 目 时变系统有限时间最优反馈控制

英文并列

题 目 FINITE-TIME OPTIMAL FEEDBACK
CONTROL OF TIME-VARYING SYSTEMS

学生姓名: 章森

指导教师: 吴小太 教授

专 业: 数学

研究方向: 随机控制理论与应用

论文答辩日期: 2024 年 5 月 29 日

安徽工程大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：我恪守学术道德，崇尚严谨学风。所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已明确注明和引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品及成果的内容。论文为本人亲自撰写，我对所写的内容负责，并完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

学位论文作者签名：

日期：2024 年 5 月 31 日

安徽工程大学学位论文版权使用授权书

学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅或借阅。本人授权安徽工程大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保密 ☐，在 ____ 年解密后适用本版权书。

本学位论文属于

不保密 ☒。

学位论文作者签名：章林

日期：2024 年 5 月 31 日

指导教师签名：吴小东

日期：2024 年 5 月 31 日

时变系统有限时间最优反馈控制

摘 要

近年来,随着时变系统在自然界和工程领域的广泛应用,时变系统的控制问题越来越引起控制领域的关注。例如:在工业控制和国防领域、复杂网络以及多智能体控制等诸多领域的系统中,都涉及到了时变系统的控制问题。此外,从数学的角度来看,时变系统所涉及的动力学方程更为复杂,因此,时变系统比时不变系统更具有挑战性。在实际应用中,受控系统的实际表现通常需要满足特定的性能指标要求。因此,研究系统的有限时间最优控制问题具有重要意义。当前,基于动态规划原理研究最优控制问题是一种常见的研究思路。这种方法的核心思想是利用 HJB 方程的稳态解作为系统的 Lyapunov 函数。然而,在众多的研究工作主要针对时不变系统,对时变系统的有限时间最优控制问题的研究尚待丰富和完善。此外,与连续时间动力系统相比,离散时间动力系统的有限时间稳定性以及最优控制问题在文献中得到的关注较少。

因此,本文研究了一类时变系统的有限时间稳定性问题和最优控制问题。首先,在已有时变连续系统有限时间稳定性的基础上,进一步研究了时变连续系统的有限时间最优性问题,并拓展了最优控制理论的适用范围。然后,提出了一类时变离散系统有限时间稳定的分析方法,并在此基础上,结合 HJB 方程给出了时变离散系统有限时间最优控制充分条件。本论文的主要工作如下:

第一章介绍了有限时间稳定和最优控制的研究背景及意义,并陈述了现如今国内外的研究现状。

第二章介绍了本文研究所需要的预备知识和基础理论,包括相关符号,必要的定义和引理。

第三章研究了一类时变连续系统的有限时间最优控制问题。基于时变连续系统有限时间稳定性结论,提出了一类时变连续系统有限时间最优控制的分析方法,给出了时变连续系统最优控制存在的充分条件。本节研究结果将时不变连续系统的最优控制推广到时变连续系统,拓展了系统最优控制结论的适用范围。

第四章研究了一类时变离散系统有限时间最优控制问题。提出了有限时间稳定性的分析方法,并在这些结果的基础上,建立了时变离散系统有限时间最优控制的分析框架,给出了时变离散系统最优控制存在的充分条件。该研究方法利用了 HJB 方程的稳态形式,因此,保证了有限时间的稳定性和最优性。

第五章对本文的研究内容做了总结,并对未来能够做出来的研究给出展望和期许。

关键词: 时变系统, 离散系统, 最优控制, 有限时间稳定

FINITE-TIME OPTIMAL FEEDBACK CONTROL OF TIME-VARYING SYSTEMS

ABSTRACT

In recent years, with the wide application of time-varying systems in nature and engineering fields, the control of time-varying systems has attracted more and more attention in the control field. For example, in many fields such as industrial control and defense, complex network and multi-agent control, the control of time-varying systems is involved. In addition, from a mathematical point of view, the dynamic equations involved in time-varying systems are more complex, and therefore, time-varying systems are more challenging than time-invariant systems.

In practical applications, the actual performance of the controlled system usually needs to meet specific performance indicators. Therefore, it is of great significance to study the finite-time optimal control of the system. At present, it is a common research idea to study optimal control problem based on dynamic programming principle. The core idea of this method is to use the steady-state solution of the HJB equation as the Lyapunov function of the system. However, many researches are focused on time-invariant systems, and the researches on the finite-time optimal

control of time-varying systems need to be enriched and perfected. In addition, compared with continuous time dynamical systems, finite-time stability and optimal control of discrete time dynamical systems have received less attention in the literature.

Therefore, the finite-time stability problem and the optimal control problem of a class of time-varying systems are studied in this paper. Firstly, based on the finite-time stability of time-varying continuous systems, the finite-time optimality problem of time-varying continuous systems is further studied, and the application scope of optimal control theory is extended. Then, a finite-time stability analysis method for a class of time-varying discrete systems is proposed. On this basis, sufficient conditions for finite-time optimal control of time-varying discrete systems are given by combining HJB equation. The main work of this paper is as follows:

The first chapter introduces the research background and significance of finite-time stability and optimal control, and states the current research status at home and abroad.

The second chapter introduces the preparatory knowledge and basic theory needed for this research, including related symbols, necessary definitions and lemmas.

The third chapter introduces the finite-time optimal control problem for a class of time-varying continuous systems is studied. Based on the

finite-time stability of time-varying continuous systems, an analytical method for finite-time optimal control of a class of time-varying continuous systems is proposed, and sufficient conditions for the existence of optimal control of time-varying continuous systems are given. The results of this paper extend the optimal control of time-invariant continuous systems to time-varying continuous systems, and extend the application range of the optimal control conclusions of systems.

The fourth chapter introduces the finite-time optimal control problem for a class of time-varying discrete systems is studied. Based on these results, an analytical framework of finite time optimal control for time-varying discrete systems is established, and sufficient conditions for the existence of optimal control for time-varying discrete systems are given. This research method utilizes the steady-state form of the HJB equation, thus ensuring the finite-time stability and optimality.

The fifth chapter summarizes the research content of this paper, and gives the prospect and expectation of future research.

Zhang Sen(Mathematics)

Supervised by Wu Xiaotai

KEY WORDS : time-varying system, discrete system, optimal control, finite-time stability

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 研究背景与研究意义	1
1.2 国内外研究现状	2
1.3 主要研究内容与创新点	4
1.4 论文内容安排	4
第 2 章 预备知识	5
2.1 本文涉及的符号	5
2.2 本文涉及的定义和引理	5
第 3 章 时变连续系统有限时间最优反馈控制	12
3.1 时变连续系统的有限时间最优反馈控制	12
3.2 非线性仿射时变连续系统的有限时间最优反馈控制	15
3.3 数值模拟	17
第 4 章 时变离散系统有限时间最优反馈控制	22
4.1 时变离散系统的有限时间最优反馈控制	22
4.2 非线性仿射时变离散系统的有限时间最优反馈控制	25
4.3 数值模拟	26
第 5 章 总结与展望	31
参考文献	32
攻读硕士期间取得的学术成果	37
致谢	38

第 1 章 绪论

1.1 研究背景与研究意义

有限时间稳定是系统控制的一个重要分支,也是近年来研究的热点。有限时间稳定性理论是苏联学者卡曼科夫于 1953 年提出的理论。当系统受到初始扰动后,系统的运动相对于一个确定的时间区间内趋于稳定,这类稳定性的研究主要针对那些不能用特征值判别稳定性的系统,特别是参数随时间变化的线性时变系统。有限时间区间稳定性问题的研究成果可用于判断:当扰动引起的初始受扰运动限制在某个范围内时,系统的受扰运动在一个确定的时间区间内是否会越出规定的误差范围。有限时间控制理论被应用于生活的各个领域,在一些经典的文献中,提出了与有限时间稳定性相关的理论^[1-5],文献[5]中基于一个标量的例子,表明了具有有限稳定性的动力学系统具有更好的干扰抑制和鲁棒性。文献[6]研究了通过连续时不变反馈实现的有限时间稳定,并构造了二阶系统中包含分数幂项的有限时间控制器。关于离散时间动力系统有限时间稳定的研究较少,文献[7]给出了一种保持有限时间收敛性的齐次系统的离散化算法,文献[8]解决了无人车辆有限时间稳定位置跟踪控制问题。

在有限时间稳定性的研究中,时变系统要比时变不系统复杂得多^[9,10]。时变系统是指系统的参数随时间变化而变化,当系统中一个或多个参数随时间变化时,整个系统的特性也会随时间而推移而改变。由于系统的时变特征导致时不变系统的稳定性的研究方法不能被直接应用,因此,对时变系统的稳定性分析具有重要的意义,一些实现时变系统有限时间稳定性的方法被提出,例如,时变反馈控制方法可以实现规定时间稳定,被认为可以获得更好的控制效果,这在近年来重新引起了人们的兴趣。通过高增益时变反馈的规定时间调节,可以追溯到具有终端约束的线性系统的传统最优控制^[11,12]。这种方法也被用于经典导弹比例导航制导^[13]和冲击时间控制制导^[14]。文献[15]通过使用基于时间的发生器进行时变增益,以确保动态系统能够在规定的有限时间内达到目标。文献[16]利用参数 Lyapunov 方程的一些性质,在线性系统中设计了一般线性系统的有界线性时变(LTV)有限

时间控制器和规定时间控制器。文献[17]考虑了使用时变反馈控制器的有限时间稳定。

最优控制理论是现代控制理论的重要组成部分,其形成和发展奠定了整个现代控制理论的基础。20 世纪 60 年代初,由于空间技术的迅猛发展和数字计算机的广泛应用,动态系统的优化理论得到迅速发展,形成了最优控制理论这一重要的分支。经典的最优控制理论提供了几个在有限时间^[18]内收敛到平衡的系统的例子。一个著名的例子是具有爆炸时间最优反馈控制^[19]的双积分器。这些例子通常涉及到不连续的动力学系统。不连续动力学系统的研究中,除了使严格的分析变得困难^[20],在涉及柔性结构的应用中也可能导致抖动^[21]或激发高频相互作用。最优控制理论中常用的分析方法包括变分法,极小值原理以及动态规划原理。极小值原理是前苏联科学院院士庞特里亚金与 1956 年和 1985 年逐步创立的。动态规划原理是由美国学者 R.E.贝尔曼为了优化多级决策问题的算法,提出的以所研究过程现有状态为依据的动态规划方法,从本质上讲这是一种非线性规划方法,其核心是贝尔曼最优性原理,可简单概括为将多步最优控制问题转化为多个一步最优控制问题。动态规划与极小值原理是现代控制理论中两种卓有成效的分析方法,推动了最优控制理论的发展。

然而,众所周知,时变系统的有限时间最优性研究比时不变系统的有限时间最优性研究更为复杂,而与时变离散系统相关的研究涉及很少。因此,对时变连续系统有限时间最优控制和时变离散系统有限时间最优控制问题的研究更具有实际意义和挑战性。

1.2 国内外研究现状

近年来,随着应用需求的不断提升,对复杂网络^[22],空间飞行器编队^[23]和多智能体系统^[24]等复杂动态系统控制的时效性要求愈来愈高,这也促使复杂动态系统的有限时间控制研究飞速发展,取得了丰硕的研究成果^[25-34]。有限时间控制常用的分析方法包括:滑模控制方法^[27],Lyapunov 函数方法^[28-30]以及无源控制方法^[31]等。例如,文献[27]设计了两种高阶滑模控制器,研究了不确定系统的有限时间控制问题。在文献[29]中,作者们采用连续 Lyapunov 函数方法分析了时不变系统的有限时间稳定性,为连续自治系统的有限时间稳定性研究奠定了严格的

理论基础。

在实际运行中,系统参数往往会随着时间推移而发生变化,使得系统的动态运行规律具有时变性^[35-37]。针对时变系统,原有的时不变系统有限时间控制和稳定性分析方法不再适用,需要提出新的研究方法,进一步分析时变系统的有限时间稳定性问题^[38,39]。如:文献[38]设计了一类时变反馈控制器,使得受控系统在有限时间内稳定,且收敛时间不依赖于系统的初始值。文献[39]基于比较原理和有限时间逃逸函数,在 Lyapunov 函数增减性时变条件下,研究了时变系统的有限时间稳定性。

系统的最优控制问题一直是控制理论研究中的热点与难点问题,它要求控制器在有效控制系统的同时,系统的性能函数达到最优。近年来,复杂动态系统的最优控制已经取得了一系列重要研究成果,如:多智能体系统的最优控制^[40],线性系统的最优控制^[41,42],时滞系统的最优控制^[43,44],以及脉冲系统的最优控制^[45]等。针对系统的有限时间最优控制问题,也取得一些重要结论^[46,47]。文献[46]借助微分不等式的 Lyapunov 函数分析了连续非线性系统的有限时间稳定性,并结合 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)方程给出了确保系统在有限时间内稳定的最优反馈控制律。文献[47]针对离散非线性系统,讨论了系统的有限时间稳定性和最优性问题。值得指出的是,文献[46, 47]的研究成果仅适用于时不变系统,时变系统的有限时间最优控制问题有待于进一步探索。

综上所述,时变系统的有限时间控制和时不变系统的最优控制问题研究都分别取得了重要的研究进展。然而,时变系统的有限时间最优控制问题仍没有相关研究成果,主要原因在于系统的动态时变性导致已有的时不变系统反馈控制设置方^[39]和时不变系统最优控制的分析方法都不再适用^[46],需要采用新的时变系统分析方法研究时变系统的最优控制问题。因此,本文将针对时变系统,提出一类动态规划原理分析方法,研究时变系统的有限时间最优控制问题。本文的主要贡献在于:本文第 3 章基于文献[39]中的时变连续系统有限时间稳定性结论,提出一类时变动态系统最优控制的分析方法,有效解决了时变系统的有限时间最优控制问题。本文第 3 章的研究结果将文献[46]中时不变系统的最优控制结论推广到时变系统。本文第 4 章提出了时变离散系统有限时间稳定性的研究方法,并在此基础上给出了时变离散系统有限时间最优性的充分条件。本文第 4 章的研究结果

将文献[47]中时不变离散系统的最优控制结论推广到时变离散系统。

1.3 主要研究内容与创新点

本文研究了一类时变系统的有限时间最优控制问题。首先，基于时变连续动力系统有限时间稳定性结论，提出了一类时变连续动力系统有限时间最优控制的分析方法，给出了时变连续动力系统最优控制存在的充分条件，将研究结果由时不变系统的最优控制推广到时变系统。然后，提出了一类时变离散系统有限时间稳定性的研究方法，在这个基础上，建立了一个框架来解决非线性离散时变动力系统的有限时间最优非线性分析和反馈控制问题，拓广了系统最优控制结论的适用范围。最后，通过数值仿真案例验证了本文研究结果的有效性。

本文的主要创新点总结如下：

(1) 本文第3章和第4章的研究对象为时变系统，与当前最优控制领域常见的定常系统相比，在模型的选择上更符合真实应用场景。

(2) 本文第3章的研究工作是对文献[39]和文献[46]的拓展与深化，对非线性定常连续系统进行了推广，得到一种适用于非线性时变连续系统最优控制问题的研究方法。所得结果将进一步丰富时变连续系统最优性的相关理论。

(3) 本文第4章研究了时变离散系统的有限时间稳定问题和最优控制问题，丰富了离散系统的相关研究理论。研究工作对文献[47]中的非线性定常离散系统进行了推广，得到一种适用于非线性时变离散系统最优控制问题的研究方法。

1.4 论文内容安排

本文共分为五章：第1章为绪论部分，主要介绍了文章的选题背景、选题意义及国内外相关研究成果；第2章为预备知识部分，介绍了本文研究过程中一些必要的符号概念和定义引理；第3章研究了时变连续系统的有限时间最优控制问题，在已有的有限时间稳定性引理的基础上，结合HJB方程的稳态形式，给出了系统达到有限时间最优性需要满足的充分条件，将时不变系统的最优控制推广至时变系统；第4章研究了时变离散系统的有限时间稳定问题，提出了时变离散系统有限时间稳定的定理，并在次基础上，结合HJB方程稳态形式给出了系统达到有限时间最优性需要满足的充分性条件；第5章对全文内容进行总结与展望。

第 2 章 预备知识

本章主要介绍文中涉及的主要符号、数学工具、数学模型以及相关定义和引理。

2.1 本文涉及的符号

令 R , $R_{\geq 0}$, R^n , $B_d(0)$ 分别表示实数集, 正实数集, n 维实数集, 以及以 0 为中, d 为半径的去心邻域, Z_+ 表示正整数集, e 表示自然对数函数的底数。对于 $\forall x \in R^n$, $\|\cdot\|$ 表示欧几里得距离, $DV(t, x(t))$ 表示 $V(t, x(t))$ 对 t 求导, $D_x V(t, x(t))$ 表示 $V(t, x(t))$ 对 x 求偏导, $\partial_t V(t, x(t))$ 表示 $V(t, x(t))$ 对 t 求偏导。 $\Delta V(k, x) = V(k+1, x(k+1)) - V(k, x(k))$ 表示对 $V(k, x(k))$ 求差分。

2.2 本文涉及的定义和引理

在控制理论中, 保证系统稳定性是设计控制器的首要原则。俄国科学家 Lyapunov 提出了一类稳定性研究理论, 分别是 Lyapunov 第一方法和 Lyapunov 第二方法, 同时适用于线性系统和非线性系统。其中第一方法也称为间接法, 属于小范围稳定性分析方法。下面将简要介绍相关理论知识。

2.2.1 连续时间系统稳定性理论

考虑如下连续时间系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 $x(t) \in R^n, k \in N$ 是系统的状态向量, 假定 $f(0) = 0$ 表示系统的初始平衡状态。

定理 2.1^[48] 对于(2.1)中的连续时间系统, 若存在函数 $V(x(k))$, 使得

(a) 当且仅当 $x(t) = 0$ 时, $V(x(t)) = 0$;

(b) 当任意 $x(t) \neq 0$ 时, $V(x(t)) > 0$;

(c) 当任意 $x(t) \neq 0$ 时, $\dot{V}(x(t)) \leq 0$;

则 $V(x(t))$ 为 Lyapunov 函数, 且该系统在 Lyapunov 意义下稳定。若对于任意 $x(t) \neq 0$ 存在 $\dot{V}(x(t)) < 0$, 则该系统是渐近稳定的。

上述条件是判断系统稳定性的充分条件, 对于一个确定的系统, 构造的 Lyapunov 函数不是唯一的, 只要构造函数满足上述三个条件, 就可以用来判断系统是否达到稳定。本文构造的 Lyapunov 函数为二次型函数, 即:

$$V(x) = x^T M x, \quad (2.2)$$

其中, $x(t) = [x_1(t), \dots, x_i(t)]$ 为 $1 \times n$ 维状态变量, M 为拉普拉斯矩阵, 利用导函数的正负来判断系统的稳定性。

2.2.2 离散时间系统稳定性理论

考虑如下离散时间系统

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k)), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.3)$$

其中 $x(k) \in R^n, k \in Z_+$ 是系统的状态向量, 假定 $x = 0$ 是这个系统的一个平衡点。

定理 2.2^[48] 对于式(2.3)中的离散时间系统, 若存在函数 $V(x(k))$, 使得

(a) 当且仅当 $x(k) = 0$ 时, $V(x(k)) = 0$;

(b) 当任意 $x(k) \neq 0$ 时, $V(x(k)) > 0$;

(c) 当任意 $x(k) \neq 0$ 时, $\Delta V(x(k)) \leq 0$;

则 $V(x(k))$ 为 Lyapunov 函数, 且系统在 Lyapunov 意义下稳定。若对于任意 $x(k) \neq 0$ 存在 $\Delta V(x(k)) < 0$, 则该系统是渐近稳定的。

2.2.3 最优控制理论

最优控制是现代控制理论的重要组成部分,根据研究者的目标及系统的特性选择一个最优控制使系统的性能达到最优。通常,最优控制问题包括以下几个要素

(1) 受控系统

受控系统是最优控制问题的首要部组成分,它的数学模型是受控动态系统的状态方程,它描述了状态向量的变化规律。一般可以表示为

$$\text{受控连续系统} \quad \dot{x}(t) = F(t, x(t), u(t)), x(0) = x_0, t \geq 0,$$

$$\text{受控离散系统} \quad x(k+1) = F(k, x(k), u(k)), x(0) = x_0, k \in Z_+,$$

其中, $x(\cdot) = [x_1(\cdot), \dots, x_n(\cdot)]^T$ 为系统状态向量, $u(\cdot) = [u_1(\cdot), \dots, u_n(\cdot)]^T$ 表示控制向量。

(2) 目标集

在最优控制问题中,初始时刻 t_0 及初始状态 x_0 通常是已知的。但末端时刻 t_f 和末端状态 x_f 则视具体问题而异。一般,可用如下目标集加以概括

$$\psi[x(t_f), t_f] = 0,$$

其中, $\psi(\cdot) \in R^n, x_f \in \psi(\cdot)$ 为满足末态约束的状态集称为目标集。

(3) 容许控制

在实际控制系统中,存在两类控制:一类是变化范围受限制的控制,这一类控制属于某一闭集;另一类是变化范围不受限制的控制,这一类控制属于某一开集。

在属于闭集的控制中,控制向量 $u(\cdot)$ 的取值范围称为控制域,以 Ω 标志。 Ω 是 m 维控制空间 R^m 中的一个闭点集。由于 $u(\cdot)$ 可在 Ω 的边界上取值,故凡属于集合 Ω 且分段连续的控制向量 $u(\cdot)$, 称为容许控制,以 $u(\cdot) \in \Omega$ 标志。

(4) 性能函数

在状态空间中,可采用不同的控制向量函数去实现从已知初态到要求的目标集的转移。性能指标则是衡量系统在不同控制向量函数作用下工作优良度的标准。

性能指标的内容与形式主要取决于最优控制问题所要完成的任务。不同的最优控制问题,有不同的性能指标。然而,即使是同一个最优控制问题,其性能指标的选取也可能因设计者的着眼点而异。但应当指出,性能指标选取的合适与否,

是决定系统是否存在最优解的关键所在。

在控制术语中，性能指标又称为性能泛函、目标函数或代价函数。为了在控制集中找到一种效果最好的控制，需要建立一种评价控制效果好坏的性能指标泛函。一般来说，性能指标泛函有如下形式

$$\text{连续系统的性能函数} \quad J(x_0, u(\cdot)) = \int_0^{\Delta} L(x(\cdot), u(\cdot)) dt,$$

$$\text{离散系统的性能函数} \quad J(x_0, u(k)) = \sum_{k=0}^{\Delta} L(x(k), u(k)).$$

2.2.3 连续时变系统有限时间稳定性理论

首先，考虑如下非线性时变连续系统

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), t \geq 0, \quad (2.4)$$

这里 $x(t) \in D \subseteq R^n$ 为系统的状态向量， $f: R_{\geq 0} \times D \rightarrow R^n$ 为非线性连续函数。假定在初始条件 $x(0) = x_0$ 下，系统(2.4)存在唯一解且 $f(t, 0) = 0$ ，则 $x(t) = 0$ 是系统(2.4)的平衡点。

定义 2.1^[48] 对于系统(2.4)，若存在正常数 ε ， $\delta(\varepsilon)$ ， d 和 $T = T(x_0) > 0$ 使得

(i) 对于 $\forall t \geq 0$ ，当 $\|x_0\| \leq \varepsilon$ 时，有 $\|x(t)\| \leq \delta(\varepsilon)$ ；

(ii) 对于 $\forall x_0 \in B_d(0)$ ，满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow T} x(t) = 0$ 。

则称系统(2.4)满足有限时间稳定性，且当 $d = +\infty$ 时称系统(2.4)满足全局有限时间稳定性。

引理 2.1^[39] 对于 $\forall x(t) \in D \subseteq R^n$ ，存在连续函数 $\mu(t): [0, T) \rightarrow R$ 和连续函数 $\rho(t): [0, T) \rightarrow R$ ，满足条件 $\lim_{t \rightarrow T} \int_0^t \mu(s) ds = -\infty$ 与 $\lim_{t \rightarrow T} \rho(t) = +\infty$ 。假定存在 $\kappa_0 > 0$ ， $\kappa(t): [0, T) \rightarrow [\kappa_0, +\infty)$ 和 v_i 分别为连续函数和单调递增函数，这里 $i = 1, 2$ ，连续函数 $V(t, x(t)): [0, T) \times D \rightarrow R_{\geq 0}$ ，使得系统(2.4)满足

$$\kappa(t)v_1(\|x(t)\|) \leq V(t, x(t)), \quad (2.5)$$

$$V(0, x(0)) \leq v_2(\|x(t)\|), \quad (2.6)$$

$$DV(t, x(t)) \leq \mu(t)V(t, x(t)), \quad (2.7)$$

$$\rho(t) = \ln(\kappa(t)) - \int_0^t \mu(s) ds. \quad (2.8)$$

则称系统(2.4)满足有限时间稳定性, 且当 $D = R^n$, 则称系统(2.4)满足全局有限时间稳定性。

在第 3 章将借助 HJB 方程, 研究时变连续系统最优反馈控制存在的充分条件。为了系统的描述有限时间反馈控制, 考虑如下非线性时变连续反馈控制系统

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t), u(t)), t \geq 0, \quad (2.9)$$

这里控制输入 $u(t) \in U \subseteq R^m$ 。设连续函数 $\Phi: D \rightarrow U$ 为控制律满足 $\Phi(0) = 0$ 。若 $u(t) = \Phi(x(t))$, 其中 $x(t)$ 满足系统(2.9), 则称 $u(t)$ 为反馈控制律。注意到, 因为 Φ 在 U 中取值, 因此反馈控制律 $u(t)$ 表示可容许的控制器。此时, 闭环时变系统(2.9)可表示为

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t), \Phi(t)), t \geq 0. \quad (2.10)$$

定义 2.2^[48] 对于闭环时变系统(2.9), 当反馈控制器 $u(t) = \Phi(x(t))$ 时, 若系统(2.9)是有限时间稳定(全局有限时间稳定), 则称反馈控制器 $u(t) = \Phi(x(t))$ 满足有限时间稳定(全局有限时间稳定)。

假定系统(2.9)满足有限时间稳定性, 定义可容许有限时间反馈控制器集合:
 $S(x_0) \stackrel{\Delta}{=} \{u(t) : u(t) \in U \subseteq R^m, \text{ 且当 } t \rightarrow T \text{ 时, } x(t) \rightarrow 0\}$ 对于非线性时变系统(2.9), 定义其性能函数如下:

$$J(x_0, u(t)) \stackrel{\Delta}{=} \int_0^\infty L(x(t), u(t)) dt, \quad (2.11)$$

这里 $L: D \times U \rightarrow R$ 为连续函数。

2.2.4 离散时变系统有限时间稳定性理论

接下来, 考虑如下非线性时变离散系统

$$x(k+1) = f(k, x(k)), x(0) = x_0, k \in Z_+, \quad (2.12)$$

其中 $x(k) \in D \subseteq R^n, k \in Z_+$ 是系统的状态向量, 并且时间 k 是非连续的, 即系统非连续。我们假设对于每个给定的初始条件 $x(0) = x_0$, 系统(2.12)有且只有一个解 $f(k, 0) = 0$, 并且它通常是稳定的, 则 $x(t) = 0$ 是系统(2.12)的平衡点。

定义 2.3^[48] 对于系统(2.12), 若存在正常数 ε , $\delta(\varepsilon)$ 和 $K = K(x_0) > 0$ 使得

(i) 对 $\forall x(k) \in D, k \in \{0, 1, 2, \dots, K(x_0) - 1\}$ 有, 当 $k \geq K(x_0)$ 时, $x(k) = 0$;

(ii) 对 $\forall \varepsilon > 0, k \in \{0, 1, 2, \dots, K(x_0) - 1\}, \exists \delta(\varepsilon) > 0$, 使得 $\|x_0\| \leq \delta(\varepsilon)$ 时, 有 $\|x(k)\| \leq \varepsilon$ 。

则系统(2.12)满足有限时间稳定性, 并且当 $D = R^n$ 时, 系统(2.12)满足全局有限时间稳定性。

接下来, 我们考虑系统(2.12)的简化形式, 即标量线性离散时变系统

$$x(k+1) = \mu(k)x(k), x(0) = x_0, k \in Z_+. \quad (2.13)$$

则, 由迭代关系可得

$$\begin{aligned} x(k) &= \mu(k-1)x(k-1), \\ x(k-1) &= \mu(k-2)x(k-2), \\ &\dots \\ x(1) &= \mu(0)x(0). \end{aligned}$$

系统(2.13)可以写成如下形式

$$x(k+1) = \prod_{i=0}^k \mu(i)x_0.$$

若系统(2.13)有限时间稳定, 则有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^k \mu(i) = \lim_{k \rightarrow K} \prod_{i=0}^k \mu(i) = 0, k \in Z_+, \quad (2.14)$$

其中

$$K = K(x_0) = \arg \min_{k \in Z_+} \{ \lim_{k \rightarrow K} \prod_{i=0}^k \mu(i) = 0 \},$$

为有限稳定收敛时刻。

定义 2.4^[39] 若存在常数 $K > 0$, 且存在

(i) $\rho(k): Z_+ \rightarrow R$, 满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(k) = \lim_{k \rightarrow K} \rho(k) \rightarrow +\infty$;

(ii) $\mu(k): Z_+ \rightarrow R$, 满足 $\prod_{i=0}^k \mu(i) > 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^k \mu(i) = \lim_{k \rightarrow K} \prod_{i=0}^k \mu(i) = 0$,

这里 $\rho_\mu(k) = -\ln \prod_{i=0}^k \mu(i)$ 。则称 $\rho(k)$ 为有限时间逃逸函数(T-FTE)。

在第 4 章将借助 HJB 方程, 研究时变离散系统最优反馈控制存在的充分条件。为了系统的描述有限时间反馈控制, 考虑如下非线性时变离散反馈控制系统

$$x(k+1) = F(k, x(k), u(k)), x(0) = x_0, k \in Z_+, \quad (2.15)$$

这里控制输入 $u(k) \in U \subseteq R^m$ 。设连续函数 $\Phi: D \rightarrow U$ 为控制律, 且 $\Phi(0) = 0$ 。对于系统(2.15)中的状态向量 $x(k)$, 令 $u(k) = \Phi(x(k))$, 则 $u(k)$ 称为反馈控制律。此

时, 系统(2.15)可以转化为如下形式

$$x(k+1) = F(k, x(k), \Phi(x(k))), x(0) = x_0, k \in Z_+. \quad (2.16)$$

定义 2.5^[48]对于闭环时变系统(2.15), 当反馈控制器 $u(k) = \Phi(x(k))$ 时, 若系统(2.15)是有限时间稳定(全局有限时间稳定), 则称反馈控制器 $u(k) = \Phi(x(k))$ 满足有限时间稳定(全局有限时间稳定)。

假定系统(2.15)满足有限时间稳定性, 定义可容许的有限时间反馈控制律集合定义如下

$$S(x_0) \stackrel{\Delta}{=} \{u(k) : u(k) \in U \subseteq R^m, \text{且当 } k \rightarrow K \text{ 时}, x(k) \rightarrow 0\},$$

这里的 $S(x_0)$ 包括了所有有限时间收敛控制器的集合。

针对系统(2.15), 定义其性能函数如下

$$J(x_0, u(k)) = \sum_{k=0}^{\infty} L(x(k), u(k)), \quad (2.17)$$

这里 $L: D \times U \rightarrow R$ 为连续函数。

第3章 时变连续系统有限时间最优反馈控制

本章将基于引理 2.1 与 HJB 方程稳态解方法, 给出闭环时变系统(2.9)有限时间最优控制存在的充分条件。

3.1 时变连续系统的有限时间最优反馈控制

定理 3.1 假定引理 2.1 中的假设条件成立, 且对于 $t \in [0, T)$, 有

$$V(t, 0) = 0, \quad (3.1)$$

$$L(x(t), u(t)) + \partial_t V(t, x(t)) + D_x V(t, x(t))F(t, x(t), u(t)) \geq 0, \quad (3.2)$$

$$L(x(t), \Phi(x(t))) + \partial_t V(t, x(t)) + D_x V(t, x(t))F(t, x(t), \Phi(x(t))) = 0, \quad (3.3)$$

则系统(2.9)满足有限时间稳定, 且 $u(t) = \Phi(x(t))$ 为系统的最优反馈控制器, 其性能函数满足

$$J(x_0, \Phi(x(t))) = \min_{u(t) \in S(x_0)} J(x_0, u(t)) = V(0, x_0).$$

证明 由引理 2.1 知, 系统(2.9)满足有限时间稳定性。下面证明 $u(t) = \Phi(x(t))$ 为系统的最优反馈控制器, 证明分成两个部分。在第一部分将证明反馈控制器 $u(t) = \Phi(x(t))$ 时, 性能函数(2.11)式的取值为 $V(0, x_0)$ 。第二部分将验证 $V(0, x_0)$ 为性能函数(2.11)式的最小值。

(i) 若 $u(t) = \Phi(x(t))$, 这里 $x(t), t \in [0, T)$ 满足系统(2.10)。对于 $\forall t \in [0, T)$

$$\partial_t V(t, x(t)) + D_x V(t, x(t))F(t, x(t), u(t)) = \dot{V}(t, x(t)).$$

由(3.3)式可得

$$L(x(t), \Phi(x(t))) = -[\partial_t V(t, x(t)) + D_x V(t, x(t))F(t, x(t), \Phi(x(t)))] = -\dot{V}(t, x(t)), \quad (3.4)$$

在区间 $[0, t)$ 上, 对(3.4)式两边同时积分得

$$\int_0^t L(x(s), \Phi(x(s)))ds = \int_0^t -\dot{V}(s, x(s))ds = -V(t, x(t)) + V(0, x_0),$$

令 $t \rightarrow \infty$, 由(3.1)式得

$$\int_0^\infty L(x(s), \Phi(x(s)))ds = \lim_{t \rightarrow \infty} [-V(t, x(t))] + V(0, x_0) = V(0, x_0),$$

于是有

$$J(x_0, \Phi(x(t))) = V(0, x_0).$$

(ii)若 $u(t) \in S(x_0)$ ，这里 $x(t), t \in [0, T]$ ，满足系统(2.9)。对于 $\forall t \in [0, T]$

$$\partial_t V(t, x(t)) + D_x V(t, x(t)) F(t, x(t), u(t)) = \dot{V}(t, x(t)),$$

由(3.2)式可得

$$L(x(t), u(t)) \geq -[\partial_t V(t, x(t)) + D_x V(t, x(t)) F(t, x(t), u(t))] = -\dot{V}(t, x(t)). \quad (3.5)$$

在区间 $[0, t]$ 上，对(3.5)式两边同时积分得

$$\int_0^t L(x(s), u(s)) ds \geq \int_0^t -\dot{V}(s, x(s)) ds,$$

由(2.6)式与(2.7)式可得

$$V(t, x(t)) \leq e^{\int_0^t \mu(s) ds} V(0, x_0). \quad (3.6)$$

再由(2.8)式和(3.6)式可得

$$\begin{aligned} \int_0^t L(x(s), u(s)) ds &\geq \int_0^t -\dot{V}(s, x(s)) ds \geq \int_0^t -\mu(s) V(s, x(s)) ds \\ &\geq \int_0^t -\mu(s) e^{\int_0^s \mu(c) dc} V(0, x_0) ds \\ &= -V(0, x_0) \int_0^t [\ln \kappa(s) - \rho(s)]' e^{\ln \kappa(s) - \rho(s)} ds \\ &= -V(0, x_0) [e^{\ln \kappa(t) - \rho(t)} - 1]. \end{aligned}$$

令 $t \rightarrow \infty$ 得

$$\begin{aligned} \int_0^\infty L(x(s), u(s)) ds &\geq \int_0^\infty -\mu(s) V(s, x(s)) ds \\ &= -V(0, x_0) \lim_{t \rightarrow \infty} [e^{\ln \kappa(t) - \rho(t)} - 1] \\ &= V(0, x_0). \end{aligned}$$

结合两部分的证明知，当反馈控制器 $u(t) = \Phi(x(t))$ 时，受控时变系统(2.9)的性能函数 $J(x_0, \Phi(x(t))) = V(0, x_0)$ 为受控系统的性能函数 $J(x_0, u(t))$ 的最小值。于是， $u(t) = \Phi(x(t))$ 为最优反馈控制器。证毕。

注 3.1 基于文献[39]中的有限时间稳定性结论，定理 3.1 借助系统(2.9)的 HJB 方程，给出了受控闭环时变系统(2.9)有限时间最优反馈控制器存在的充分条件。值得注意的是定理 3.1 将文献[46]中定理 3.1 的结论由时不变系统推广到了时变系统上，且当(2.7)式中时变参数 $\mu(t)$ 退化为常数值时，定理 3.1 即为文献[46]中定理 3.1 中的结论。因此，定理 3.1 完成包含了文献[46]定理 3.1 中的结论。

注 3.2 定理 3.1 中的假设条件(3.2)和(3.3)式,保证了反馈控制器 $u(t) = \Phi(x(t))$ 的最优性。同时, 由

$$\Phi(x(t)) = \arg \min_{u(t) \in S(x_0)} [L(x(t), u(t)) + \partial_t V(t, x(t)) + D_x V(t, x(t))F(t, x(t), u(t))], \quad (3.7)$$

可知, 最优反馈控制器 $u(t) = \Phi(x(t))$ 的取值与系统初始状态 x_0 无关。

下面将讨论文献[39]中推论 1 最优反馈控制器存在的充分条件。

推论 3.1 假设存在常数 $T = T(x_0) > 0$, 单调递增函数 $\omega_i, i = 1, 2$ 和连续函数 $W(t, x(t)) : [0, T] \times R_{\geq 0}$ 。对 $\forall t \in [0, T)$, 满足以下条件

$$\omega_1(\|x(t)\|) \leq W(t, x(t)) \leq \omega_2(\|x(t)\|), \quad (3.8)$$

$$DW(t, x(t)) \leq \mu(t) \frac{e^{W(t, x(t))} - 1}{e^{W(t, x(t))}}, \quad (3.9)$$

$$W(t, 0) = 0, \quad (3.10)$$

$$L(x(t), u(t)) + \partial_t W(t, x(t)) + D_x W(t, x(t))F(t, x(t), u(t))e^{W(t, x(t))} \geq 0, \quad (3.11)$$

$$L(x(t), \Phi(x(t))) + \partial_t W(t, x(t)) + D_x W(t, x(t))F(t, x(t), \Phi(x(t)))e^{W(t, x(t))} = 0. \quad (3.12)$$

则 $u(t) = \Phi(x(t))$ 为系统(2.9)的有限时间最优反馈控制器。

证明 令

$$V(t, x(t)) = e^{W(t, x(t))} - 1, \quad (3.13)$$

由(3.8)式和(3.13)式可得

$$\nu_1(\|x(t)\|) \stackrel{\Delta}{=} e^{\omega_1(\|x(t)\|)} - 1 \leq V(t, x(t)) \leq e^{\omega_2(\|x(t)\|)} - 1 \stackrel{\Delta}{=} \nu_2(\|x(t)\|), \quad (3.14)$$

即引理 2.1 中(2.5)式和(2.6)式成立。

由(3.9)式和(3.13)式可得

$$\begin{aligned} DV(t, x(t)) &= e^{W(t, x(t))} DW(t, x(t)) \\ &\leq e^{W(t, x(t))} \mu(t) \frac{e^{W(t, x(t))} - 1}{e^{W(t, x(t))}} \\ &= \mu(t) V(t, x(t)), \end{aligned} \quad (3.15)$$

引理 2.1 中的(2.7)式成立。

由引理 2.1 知, 系统(2.9)满足有限时间稳定性。下面将证明在反馈控制器 $u(t) = \Phi(x(t))$ 作用下, 系统(2.9)的性能函数取最小值。

由(3.11)式, (3.12)式和(3.13)式可得

$$\begin{aligned}
 & L(x(t), u(t)) + \partial_t W(t, x(t)) + D_x W(t, x(t)) F(t, x(t), u(t)) e^{W(t, x(t))} \\
 & = L(x(t), u(t)) + e^{W(t, x(t))} D_x W(t, x(t)) \\
 & = L(x(t), u(t)) + DV(t, x(t)) \\
 & = L(x(t), u(t)) + \partial_t V(t, x(t)) + D_x V(t, x(t)) F(t, x(t), u(t)) \geq 0,
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

与

$$\begin{aligned}
 & L(x(t), \Phi(t)) + \partial_t W(t, x(t)) + D_x W(t, x(t)) F(t, x(t), \Phi(t)) e^{W(t, x(t))} \\
 & = L(x(t), \Phi(t)) + e^{W(t, x(t))} D_x W(t, x(t)) \\
 & = L(x(t), \Phi(t)) + DV(t, x(t)) \\
 & = L(x(t), \Phi(t)) + \partial_t V(t, x(t)) + D_x V(t, x(t)) F(t, x(t), \Phi(t)) = 0,
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

故定理 3.1 中(3.2)和(3.3)式成立。由(3.10)式和(3.13)式，可得定理 3.1 中(3.1)式成立。由定理 3.1 知， $u(t) = \Phi(x(t))$ 为系统(2.9)的有限时间最优反馈控制器。证毕。

注 3.3 取(3.9)式中的标量函数为：

$$\mu(t) = -\frac{a}{T-t}, t \in [0, T], a > 0, \tag{3.18}$$

则(3.9)式可表示为

$$DW(t, x(t)) \leq -\frac{a(e^{W(t, x(t))} - 1)}{e^{W(t, x(t))}(T-t)}, \tag{3.19}$$

在区间 $[0, t]$ 上，对(3.19)式积分得

$$W(t, x(t)) \leq \ln[(e^{W(0, x_0)} - 1)(\frac{T-t}{T})^a + 1], \tag{3.20}$$

由文献[39]注释 2 可知，(3.20)式即为文献[49]定理 1 中的(7)。因此，推论 3.1 也给出了文献[49]中有限时间稳定性结论的最优反馈控制器存在的充分条件。

3.2 非线性仿射时变连续系统的有限时间最优反馈控制

本节将研究如下非线性仿射时变动力系统

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + B(x(t))u(t), t \geq 0, \tag{3.21}$$

这里 $x(t) \in R^n, u(t) \in R^m, B: R^n \rightarrow R^{n \times m}$ 。假定性能函数

$$L(x(t), u(t)) = L_1(x(t)) + L_2(x(t))u(t) + u(t)^T P(x(t))u(t), \tag{3.22}$$

这里 $L_1: R^n \rightarrow R, L_2: R^n \rightarrow R^{1 \times m}, P(x(t))$ 是定义在 R^n 上的正值连续函数。于是，

(2.11)式可以表示为

$$J(x_0, u(t)) = \int_0^\Delta [L_1(x(t)) + L_2(x(t))u(t) + u(t)^T P(x(t))u(t)] dt. \quad (3.23)$$

定理 3.2 假定引理 2.1 中的条件成立，且存在连续函数 $V(t, x(t)): [0, T] \times R^n \rightarrow R_{\geq 0}$ ，使得对于 $t \in [0, T]$ ，有

$$V(t, 0) = 0, \quad (3.24)$$

$$L_2(0) = 0, \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} & \partial_t V(t, x(t)) + D_x V(t, x(t)) [f(t, x(t)) - \frac{1}{2} B(x(t)) P(x(t))^{-1} L_2(x(t))^T \\ & - \frac{1}{2} B(x(t)) P(x(t))^{-1} B(x(t))^T D_x V^T(t, x(t))] \leq \mu(t) V(t, x(t)), \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} & L_1(x(t)) + \partial_t V(t, x(t)) + D_x V(t, x(t)) f(t, x(t)) - \frac{1}{4} [L_2(x(t)) + \\ & D_x V(t, x(t)) B(x(t))] P(x(t))^{-1} [L_2(x(t)) + D_x V(t, x(t)) B(x(t))]^T = 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

则在反馈控制器

$$u(t) = \Phi(x(t)) = -\frac{1}{2} P(x(t))^{-1} [L_2(x(t)) + D_x V(t, x(t)) B(x(t))]^T = 0, \quad (3.28)$$

作用下系统(3.21)满足全局有限时间稳定，且 $u(t) = \Phi(x(t))$ 为系统(3.21)的有限时间最优反馈控制器。

证明 定理 3.2 可由定理 3.1 直接证明。

这里 $F(t, x(t), u(t)) = f(t, x(t)) + B(x(t))u(t)$ 。(3.28)式可由

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial u} \{L_1(x(t)) + L_2(x(t))u(t) + u(t)^T P(x(t))u(t) + \partial_t V(t, x(t)) \\ & + D_x V(t, x(t)) [f(t, x(t)) + B(x(t))u(t)]\} = 0, \end{aligned} \quad (3.29)$$

直接得到。

此时，(3.24)式，(3.26)式和(3.27)式可以由(2.7)式，(3.1)式和(3.3)式直接得到，其中 $L_1(x(t)) = \Phi(x(t))^T P(x(t)) \Phi(x(t)) - [\partial_t V(t, x(t)) + D_x V(t, x(t)) f(t, x(t))]$ 。由(3.3)式，(3.22)式和(3.28)式可知，(3.2)式可以表示为

$$\begin{aligned} & L(x(t), u(t)) + \partial_t V(t, x(t)) + D_x V(t, x(t)) [f(t, x(t)) + B(x(t))u(t)] \\ & = L(x(t), u(t)) + \partial_t V(t, x(t)) + D_x V(t, x(t)) [f(t, x(t)) + B(x(t))u(t)] \\ & - L(x(t), \Phi(t)) - \partial_t V(t, x(t)) - D_x V(t, x(t)) [f(t, x(t)) + B(x(t))\Phi(t)] \\ & = [L_2(x(t)) + D_x V(t, x(t)) B(x(t))] [u - \Phi(x(t))] \\ & + u(t)^T P(x(t))u(t) - \Phi(x(t))^T P(x(t))\Phi(x(t)) \\ & = -2\Phi(x(t))^T P(x(t)) [u(t) - \Phi(x(t))] + u(t)^T P(x(t))u(t) - \Phi(x(t))^T P(x(t))\Phi(x(t)) \\ & = [u(t) - \Phi(x(t))]^T P(x(t)) [u(t) - \Phi(x(t))] \geq 0, \end{aligned} \quad (3.30)$$

由(3.25)式和(3.28)式可得 $\Phi(0) = 0$ 。并且，反馈控制器(3.28)式满足(3.7)式。即，(3.28)式为最优反馈控制器。证毕。

3.3 数值模拟

本节将通过两个数值仿真对本节主要结论的有效性进行验证。

例 3.1 考虑系统动力学方程如下

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(x(t))u(t), x(0) = x_0, t \geq 0, \quad (3.31)$$

这里 $A(t)$ 如文献[50]中定义: $A(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+t^2} + t \sin 4t & 1 \\ -1 & \frac{1}{1+t^2} + \sin 4t \end{pmatrix}$ 。 $B(x(t)) = (1, 1)$,

$x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T, u(t) = (u_1(t), u_2(t))^T$ 。

选取系统初始状态为 $x_0 = (12, 3)^T$ 。当控制输入 $u(t) = (0, 0)^T$ 时，显然系统(4.1)并不稳定，其状态轨迹如图 1 所示。

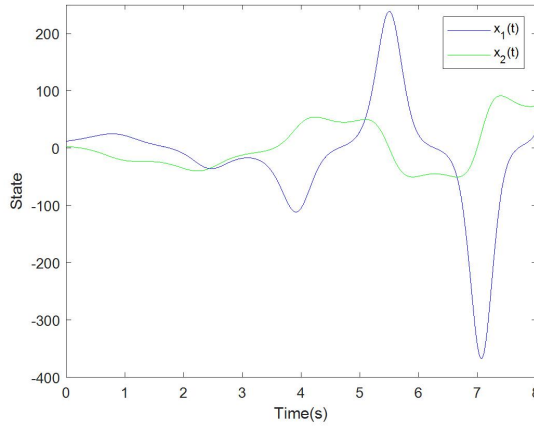


图 1 无输入控制时系统的状态轨迹

令 Lyapunov 函数 $V(t, x(t)) = q(t)x(t)^T x(t)$ ，其中

$$q(t) = \left(\frac{0.5}{0.5-t} \right)^2, L(x(t), u(t)) = L_1(x(t)) + L_2(x(t))u(t) + u(t)^T u(t).$$

性能函数为

$$J(x(t), u(t)) = \int_0^\infty L(x(t), u(t))dt = \int_0^\infty [L_1(x(t)) + L_2(x(t))u(t) + u(t)^T u(t)]dt,$$

其中

$$L_2(x(t)) = 2\left[\left(\frac{1}{1+t^2} + t \sin 4t\right)x_1(t) + x_2(t), \left(\frac{1}{1+t^2} + \sin 4t\right)x_2(t) - x_1(t)\right].$$

由(3.28)式和系统(3.31)得

$$\begin{aligned} u(t) = \Phi(x(t)) &= \left[-\left(\frac{0.5}{0.5-t}\right)^2 x_1(t) - \left(\frac{1}{1+t^2} + t \sin 4t\right)x_1(t) - x_2(t), -\left(\frac{0.5}{0.5-t}\right)^2 x_2(t) - \left(\frac{1}{1+t^2} + \sin 4t\right)x_2(t) + x_1(t)\right]^T, \\ L_1(x(t)) &= \left[-\left(\frac{0.5}{0.5-t}\right)^2 x_1(t) - \left(\frac{1}{1+t^2} + t \sin 4t\right)x_1(t) - x_2(t)\right]^2 + \left[-\left(\frac{0.5}{0.5-t}\right)^2 x_2(t) - \left(\frac{1}{1+t^2} + \sin 4t\right)x_2(t) + x_1(t)\right]^2, \end{aligned}$$

以及

$$DV(t, x(t)) = \left[\frac{\dot{q}(t)}{q(t)} - 2q(t)\right]V(t, x(t)) = \left[\frac{1}{0.5(0.5-t)} - 2\left(\frac{0.5}{0.5-t}\right)^2\right]V(t, x(t)). \quad (3.32)$$

由(3.32)式结合(2.4)式可知， $\mu(t) = \frac{1}{0.5(0.5-t)} - 2\left(\frac{0.5}{0.5-t}\right)^2$ 。且满足条件

$\lim_{t \rightarrow T} \int_0^t \mu(s) ds = -\infty$ ，其中 $T = 0.5$ 。因为 $x_0 = (x_{10}, x_{20})^T$ ，故 $J(x(t), \Phi(x(t))) = x_{10}^2 + x_{20}^2$

代入相关数据后得， $J(x(t), \Phi(x(t))) = 153$ 。综上所述，通过 Matlab 数值仿真得到了以下仿真图。

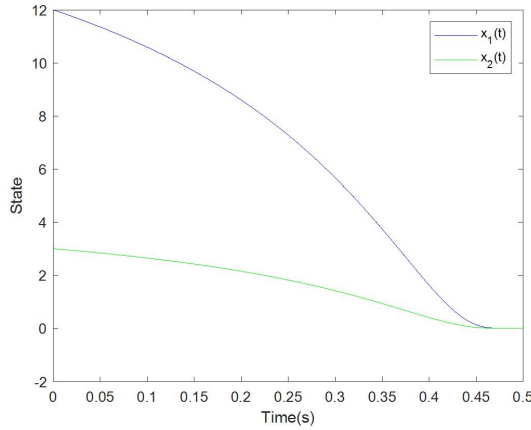


图 2 最优控制输入下系统的状态轨迹

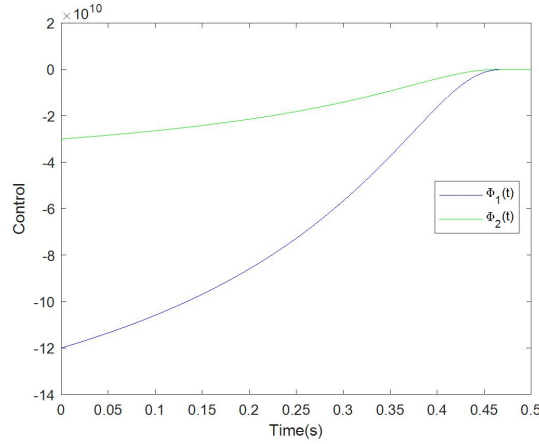


图 3 最优控制输入轨迹

由图 2 知，系统(3.31)在最优反馈控制器 $u(t) = \Phi(x(t))$ 作用下呈明显收敛趋势，且在 $t = 0.48s < T = 0.5s$ 时系统的状态轨迹 $x(t) = 0$ 。因此，在最优反馈控制器作用下，时变系统(3.31)可以实现有限时间稳定。图 3 为最优控制信号随时间变化的曲线图，可以看出控制信号的取值随时间增长而不断变化。在时变系统(3.31)逐渐趋于稳定的过程中，控制信号值也在有限时间内随之趋近于 0。此时，可以认为反馈控制器也实现了有限时间稳定。

例 3.2 考虑系统^[51]的动力学方程如下

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + u_1(t), x_1(0) = x_{10}, t \geq 0, \\ \dot{x}_2(t) = -2x_1(t) \cos t + \sqrt{t}x_2(t) \sin 10t + u_2(t), x_2(0) = x_{20}, t \geq 0, \end{cases} \quad (3.33)$$

系统的初始状态选为 $x_0 = (12, -12)^T$ 。当控制输入 $u(t) = (u_1(t), u_2(t))^T = (0, 0)^T$ 时，系统(3.33)的状态轨迹不稳定，如图 4 所示。

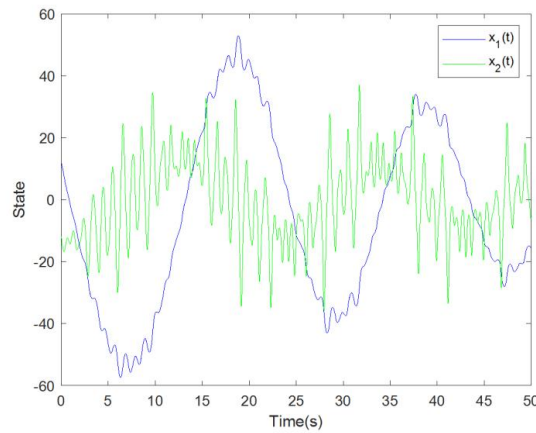


图 4 无输入控制时系统的状态轨迹

令系统的 Lyapunov 函数 $V(t, x(t)) = q(t)x(t)^T x(t)$ ，其中

$$q(t) = \left(\frac{2}{2-t} \right)^2, L(x(t), u(t)) = L_1(x(t)) + L_2(x(t))u(t) + u(t)^T u(t).$$

性能函数为

$$J(x(t), u(t)) = \int_0^\infty L(x(t), u(t))dt = \int_0^\infty [L_1(x(t)) + L_2(x(t))u(t) + u(t)^T u(t)]dt,$$

其中

$$L_2(x(t)) = 2[x_2(t), -2x_1(t)\cos t + \sqrt{t}x_2(t)\sin 10t].$$

结合(3.28)式和系统(3.33)得

$$u(t) = \Phi(x(t)) = \left[-\frac{2}{(2-t)^2}x_1(t) - x_2(t), -\frac{2}{(2-t)^2}x_2(t) + 2x_1(t)\cos t - \sqrt{t}x_2(t)\sin 10t \right]^T,$$

$$L_1(x(t)) = \left[-\frac{2}{(2-t)^2}x_1(t) - x_2(t) \right]^2 + \left[-\frac{2}{(2-t)^2}x_2(t) + 2x_1(t)\cos t - \sqrt{t}x_2(t)\sin 10t \right]^2,$$

以及

$$DV(t, x(t)) = \left[\frac{\dot{q}(t)}{q(t)} - 2q(t) \right] V(t, x(t)) = \left[\frac{2}{2-t} - \frac{2}{(2-t)^2} \right] V(t, x(t)). \quad (3.34)$$

由(3.34)式结合(2.7)式可知, $\mu(t) = \frac{2}{2-t} - \frac{2}{(2-t)^2}$, 其中 $T = 2$ 。并且满足条件

$\lim_{t \rightarrow T} \int_0^t \mu(s)ds = -\infty$ 。代入相关数据后得 $J(x(t), \Phi(x(t))) = x_{10}^2 + x_{20}^2 = 288$ 。综上所述,

通过 Matlab 数值仿真得到了以下仿真图。

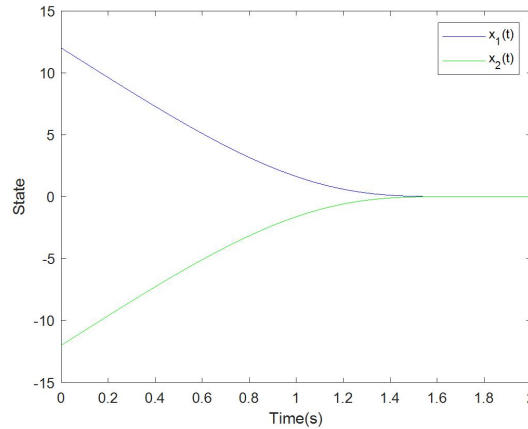


图 5 最优控制输入下系统的状态轨迹

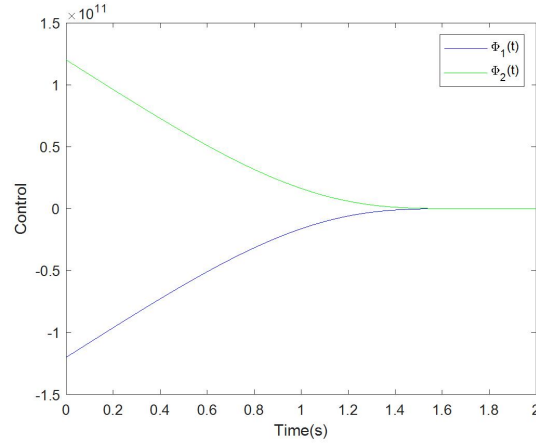


图 6 最优控制输入轨迹

由图 5 可知，系统(3.33)在最优反馈控制器 $u(t) = \Phi(x(t))$ 作用下呈明显收敛趋势，且在 $t = 1.72s < T = 2s$ 时系统的状态轨迹 $x(t) = 0$ 。即，在最优反馈控制器作用下，时变系统(3.33)可以实现有限时间稳定。由图 6 可知，最优控制信号最终能够随着时变系统(3.33)逐渐趋于稳定，控制信号值也在有限时间内随之趋近于 0。此时，可以认为反馈控制器也实现了有限时间稳定。

综合上述两个数值仿真实例，所得相关结论验证了本节研究结果的有效性。

第4章 时变离散系统有限时间最优反馈控制

本章提出了一类时变离散系统有限时间稳定的分析方法，并在此基础上，给出了一类时变离散系统有限时间最优控制的充分条件。

4.1 时变离散系统的有限时间最优反馈控制

定理 4.1 假设存在常数 $K = K(x_0)$ ， $v_i, i=1,2$ 是单调递增函数，函数 $\omega(k): Z_+ \rightarrow [\omega_0, +\infty), \omega_0 > 0$ ，函数 $V(k, x(k)): Z_+ \times R^n \rightarrow R_{\geq 0}$ ，使得， $\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, K(x_0) - 1\}, \forall x \in R^n$ 。

$$\omega(k)v_1(\|x(k)\|) \leq V(k+1, x(k+1)), \quad (4.1)$$

$$V(0, x_0) \leq v_2(\|x(k)\|), \quad (4.2)$$

$$\Delta V(k, x(k)) \leq [\mu(k) - 1]V(k, x(k)), \quad (4.3)$$

$$\rho(k) = \ln \omega(k) - \ln \prod_{i=0}^k \mu(i). \quad (4.4)$$

其中(4.4)式满足定义 2.4。则，系统(2.12)满足有限时间稳定性。

证明 由(4.3)得

$$\Delta V(k, x(k)) = V(k+1, x(k+1)) - V(k, x(k)) \leq [\mu(k) - 1]V(k, x(k)), \quad (4.5)$$

即

$$V(k+1, x(k+1)) \leq \mu(k)V(k, x(k)). \quad (4.6)$$

由迭代关系，可得

$$V(k+1, x(k+1)) \leq \prod_{i=0}^k \mu(i)V(0, x_0), \quad (4.7)$$

由式(4.6)可知 $\mu(k) \geq 0$ ，由定义 2.4 和式(4.4)得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(k) = \lim_{k \rightarrow K} \rho(k) = \lim_{k \rightarrow K} [\ln \omega(k) - \ln \prod_{i=0}^k \mu(i)] \rightarrow +\infty. \quad (4.8)$$

这意味着，存在常数 c_0 ，使得 $\rho(k) \geq c_0$ ，即有

$$e^{-\rho(k)} \leq \frac{\prod_{i=0}^k \mu(i)}{\omega(k)} \leq e^{-c_0}. \quad (4.9)$$

由式(4.1)，式(4.2)，式(4.7)和式(4.9)得

$$\begin{aligned}
 v_1(\|x(k)\|) &\leq \frac{V(k+1, x(k+1))}{\omega(k)} \\
 &\leq \frac{\prod_{i=0}^k \mu(i) V(0, x_0)}{\omega(k)} \\
 &\leq \frac{\prod_{i=0}^k \mu(i)}{\omega(k)} v_2(\|x_0\|) \\
 &\leq e^{-c_0} v_2(\|x_0\|),
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

对任意的 $\varepsilon > 0$, 令 $\delta(\varepsilon) = \delta > 0$, 使得 $e^{-c_0} v_2(\delta) \leq v_1(\varepsilon)$ 。由式(4.10)可知, 对任意的 $\|x_0\| \leq \delta$, 有

$$v_1(\|x(k)\|) \leq e^{-c_0} v_2(\|x(k)\|) \leq e^{-c_0} v_2(\delta) \leq v_1(\varepsilon),$$

即, 对任意 $k \in \{0, 1, 2, \dots, K(x_0) - 1\}$, $\|x(k)\| \leq \varepsilon$ 。

此外, 从另一方面, 由定义 2.4 和式(4.10)我们也可以直接得到

$$\lim_{k \rightarrow K} v_1(\|x(k)\|) \leq \lim_{k \rightarrow K} \frac{\prod_{i=0}^k \mu(i)}{\omega(k)} v_2(\|x_0\|) \leq \lim_{k \rightarrow K} \prod_{i=0}^k \mu(i) \frac{v_2(\|x_0\|)}{\omega_0} = 0,$$

因此, 系统(2.12)满足有限时间稳定性, 证毕。

由上述定理 4.1 可知, 非线性时变离散反馈控制系统(2.12)满足有限时间稳定性。在此基础上, 我们给出了一个描述离散时变反馈控制律的主要定理, 该定理保证了非线性离散时变系统的有限时间稳定性, 并使得性能函数最小化。

定理 4.2 假设存在一个常数 $K = K(x_0) > 0$, 对任意 $k \in \{0, 1, 2, \dots, K(x_0) - 1\}$ 若满足

$$\mu(0) = 1, \tag{4.11}$$

$$V(k, 0) = 0, \tag{4.12}$$

$$L(x(k), u(k)) + V(k+1, F(k, x(k), u(k))) - V(k, x(k)) \geq 0, \tag{4.13}$$

$$L(x(k), \Phi(k)) + V(k+1, F(k, x(k), \Phi(k))) - V(k, x(k)) = 0. \tag{4.14}$$

则当 $u(k) = \Phi(x(k))$ 时, 初始条件为 $x(0) = x_0$ 的系统(2.15)满足有限时间稳定性, 且性能函数 $J(x_0, u(k))$ 可以取到最小值, 即

$$J(x_0, \Phi(x(k))) = \min_{u(k) \in S(x_0)} J(x_0, u(k)) = V(0, x_0).$$

证明 接下来, 我们将分两部分进行证明。在第一部分将证明, 当反馈控制

器 $u(k) = \Phi(x(k))$ 时, 性能函数(2.17)式的取值为 $V(0, x_0)$ 。第二部分将验证 $V(0, x_0)$ 为性能函数(2.17)式的最小值。

(i) 令 $u(k) = \Phi(x(k))$, 其中 $x(k), k \in \{0, 1, 2, \dots, K(x_0) - 1\}$, 是系统(2.16)的解, 由式(4.14)得

$$L(x(k), \Phi(k)) = V(k, x(k)) - V(k+1, F(k, x(k), \Phi(k))), \quad (4.15)$$

对式(4.15)在 $[0, k]$ 上求和得

$$\begin{aligned} \sum_{\kappa=0}^k L(x(k), \Phi(k)) &= \sum_{\kappa=0}^k [V(k, x(k)) - V(k+1, F(k, x(k), \Phi(k)))] \\ &= [V(k, x(k)) - V(k+1, F(k, x(k), \Phi(k)))] \\ &\quad + [V(k-1, x(k-1)) - V(k, x(k))] \\ &\quad + \dots + [V(1, x(1)) - V(2, x(2))] + [V(0, x_0) - V(1, x(1))] \\ &= V(0, x_0) - V(k+1, F(k, x(k), \Phi(k))) \end{aligned} \quad (4.16)$$

令 $k \rightarrow \infty$, 结合定理 4.1 和式(4.12)得

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\kappa=0}^k L(x(k), \Phi(k)) &= V(0, x_0) - \lim_{k \rightarrow \infty} V(k+1, F(k, x(k), \Phi(k))) \\ &= V(0, x_0), \end{aligned} \quad (4.17)$$

于是有

$$J(x_0, \Phi(x(k))) = V(0, x_0).$$

(ii) 令 $u(k) \in S(x_0)$, 其中 $x(k), k \in \{0, 1, 2, \dots, K(x_0) - 1\}$ 是系统(2.15)的解, 由式(4.3), 式(4.7)和式(4.13)得

$$\begin{aligned} L(x(k), u(k)) &\geq V(k, x(k)) - V(k+1, F(k, x(k), u(k))) \\ &\geq -[\mu(k) - 1]V(k, x(k)) \\ &\geq \left[\prod_{i=0}^{k-1} \mu(i) - \prod_{i=0}^k \mu(i) \right] V(0, x_0), \end{aligned} \quad (4.18)$$

对式(4.18)在 $[0, k]$ 上求和, 由式(4.11)和迭代关系得

$$\begin{aligned} \sum_{\kappa=0}^k L(x(k), u(k)) &\geq \mu(0)V(0, x_0) - \prod_{i=0}^k \mu(i)V(0, x_0) \\ &= V(0, x_0) - \prod_{i=0}^k \mu(i)V(0, x_0), \end{aligned} \quad (4.19)$$

令 $k \rightarrow \infty$, 结合定义 2.4 得

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\kappa=0}^k L(x(k), u(k)) &\geq V(0, x_0) - \lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^k \mu(i) V(0, x_0) \\ &= V(0, x_0). \end{aligned} \quad (4.20)$$

结合两部分证明知, 当反馈控制器 $u(k) = \Phi(x(k))$ 时, 受控时变系统(2.15)的性能函数 $J(x_0, \Phi(x(k))) = V(0, x_0)$ 为受控系统的性能函数 $J(x_0, u(k))$ 的最小值。于是, $u(k) = \Phi(x(k))$ 为最优反馈控制器。证毕。

4.2 非线性仿射时变离散系统的有限时间最优反馈控制

接下来, 我们将定理 4.1 和定理 4.2 的结果专门用于非线性仿射时变离散动力系统。首先, 考虑如下形式的非线性离散时变仿射动力系统

$$x(k+1) = f(k, x(k)) + B(x(k))u(k), x(0) = x_0, k \in Z_+, \quad (4.21)$$

这里 $x(k) \in R^n, u(k) \in R^m, B: R^n \rightarrow R^{n \times m}$, 假定性能函数

$$L(x(k), u(k)) = L_1(x(k)) + L_2(x(k))u(k) + u(k)^T P(x(k))u(k), \quad (4.22)$$

这里 $L_1: R^n \rightarrow R, L_2: R^n \rightarrow R^{1 \times m}, P(x(k)) > 0$ 。因此, 式(2.14)可以表示为

$$J(x_0, u(k)) = \sum_{k=0}^{\infty} L_1(x(k)) + L_2(x(k))u(k) + u(k)^T P(x(k))u(k), \quad (4.23)$$

定理 4.3 假设定理 4.1 中的条件成立, 且存在 $P_{12}: R^n \rightarrow R^{1 \times m}, P_2: R^n \rightarrow R^{m \times m}$, $P_2(\cdot)$ 为非负定值, 和常数 $K = K(x_0) > 0$, 对任意的 $k \in \{0, 1, 2, \dots, K(x_0) - 1\}$ 若满足

$$\mu(0) = 1, \quad (4.24)$$

$$L_2(0) = 0, \quad (4.25)$$

$$P_{12}(0) = 0, \quad (4.26)$$

$$V(k, 0) = 0, \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} V\left(k+1, f(x(k)) - \frac{1}{2}B(x(k))[P(x(k)) + P_2(x(k))]^{-1}[L_2(x(k)) + P_{12}(x(k))]^T\right) - V(x(k)) \\ \leq (\mu(k) - 1)V(k, x(k)), \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} V(k+1, f(k, x(k)) + B(x(k))u(k)) &= V(k+1, f(k, x(k))) + P_{12}(x(k))u(k) \\ &\quad + u(k)^T P_2(x(k))u(k), \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} L_1(x(k)) - \frac{1}{4}[L_2(x(k)) + P_{12}(x(k))][P(x(k)) + P_2(x(k))]^{-1}[L_2(x(k)) + P_{12}(x(k))]^T \\ + V(k+1, f(k, x(k))) - V(k, x(k)) = 0. \end{aligned} \quad (4.30)$$

则在反馈控制器

$$u(k) = \Phi(x(k)) = -\frac{1}{2}[P(x(k)) + P_2(x(k))]^{-1}[L_2(x(k)) + P_{12}(x(k))]^T, \quad (4.31)$$

作用下，系统(4.21)满足全局有限时间稳定，且 $u(k) = \Phi(x(k))$ 为系统(4.21)的有限时间最优反馈控制器。

证明 定理 4.3 可由定理 4.2 直接证明。

这里 $f(k, x(k), u(k)) = f(k, x(k)) + B(x(k))u(k)$ 。式(4.31)可由

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} [L_1(x(k)) + (L_2(x(k)) + P_{12}(x(k)))u(k) + u(k)^T (P(x(k)) + P_2(x(k)))u(k) \\ + V(k+1, x(k+1)) - V(k, x(k))] = 0, \end{aligned} \quad (4.32)$$

得出。

当反馈控制器满足式(4.31)时，式(4.28)和式(4.30)可由式(4.3)和式(4.14)以及(4.30)式直接得到。因为， $P(x(k)) + P_2(x(k)) > 0$ ，由式(4.22)，式(4.29)和式(4.30)可知，式(4.13)可表示为

$$\begin{aligned} & L(x(k), u(k)) + V(k+1, f(k, x(k), u(k))) - V(k, x(k)) \\ &= [L(x(k), u(k)) + V(k+1, f(k, x(k), u(k))) - V(k, x(k))] \\ & \quad - [L(x(k), \Phi(k)) + V(k+1, f(k, x(k), \Phi(k))) - V(k, x(k))] \\ &= [L_2(x(k))u(k) + u(k)^T R(x(k))u(k) + P_{12}(x(k))\Phi(x(k)) \\ & \quad + \Phi(x(k))^T P_2(x(k))\Phi(x(k))] \\ &= (u(k) - \Phi(x(k)))^T (R(x(k)) + P_2(x(k)))(u(k) - \Phi(x(k))) \geq 0, \end{aligned} \quad (4.33)$$

其中

$L_1(x(k)) = \Phi(x(k))^T (P(x(k)) + P_2(x(k)))\Phi(x(k)) - V(k+1, f(k, x(k))) + V(k, x(k))$ 。由(4.25)式和(4.31)式可得 $\Phi(0) = 0$ 。并且，反馈控制器(4.31)式满足(3.7)式。即，(4.31)式为最优反馈控制器。证毕。

注 4.1 式(4.29)保证了式 $V(k+1, f(k, x(k)) + B(x(k))u(k))$ 在 $u(k)$ 中的二次性。详细信息请参见文献[52]。

4.3 数值模拟

在本节中，我们提供了两个数值例子来证明本节主要结论的有效性。考虑如下时变离散非线性仿射系统

$$\begin{cases} x_1(k+1) = f_1(k, x_1(k), x_2(k)) + u_1(k), x_1(0) = x_{10}, \\ x_2(k+1) = f_2(k, x_1(k), x_2(k)) + u_2(k), x_2(0) = x_{10}, \end{cases} \quad (4.34)$$

令 $V(k, x(k)) = [\frac{K}{K-(k-1)}]^{\frac{1}{1-\alpha}} x(k)^T x(k)$, $\alpha \in (0,1)$, 性能函数如式(4.22)。其中

$P(x(k)) = P_2(x(k)) = I_2$, $P_{12}(x(k)) = [2f_1(k, x_1(k), x_2(k)), 2f_2(k, x_1(k), x_2(k))]$ 。令

$$\begin{aligned} L_2(x(k)) = & \left\{ 2f_1(k, x_1(k), x_2(k)) - 4x_1(k) - 4 \left[\frac{K-k}{K-(k-1)} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} - 1 \right\} x_1(k), \\ & 2f_2(k, x_1(k), x_2(k)) - 4x_2(k) - 4 \left[\frac{K-k}{K-(k-1)} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} - 1 \right\} x_2(k) \end{aligned} \quad (4.35)$$

由式(4.31)可得

$$\begin{aligned} u(k) = \Phi(x(k)) &= -\frac{1}{2} [R(x(k)) + P_2(x(k))]^{-1} [L_2(x(k)) + P_{12}(x(k))]^T \\ &= -\frac{1}{4} [L_2(x(k)) + P_{12}(x(k))]^T \\ &= \left\{ \left[\frac{K-k}{K-(k-1)} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} x_1(k) - f_1(k, x_1(k), x_2(k)), \right. \\ & \quad \left. \left[\frac{K-k}{K-(k-1)} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} x_2(k) - f_2(k, x_1(k), x_2(k)) \right\}^T, \end{aligned} \quad (4.36)$$

由式(4.29)和式(4.36)可得

$$\begin{aligned} \Delta V(k, x(k)) &= V \left(k+1, f(k, x(k)) - \frac{1}{4} [L_2(x(k)) + P_{12}(x(k))]^T \right) - V(k, x(k)) \\ &= \left(\frac{K}{K-k} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} [x_1^2(k+1) + x_2^2(k+1)] - \left[\frac{K}{K-(k-1)} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} [x_1^2(k) + x_2^2(k)] \\ &= \left(\frac{K}{K-k} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left\{ \left[\frac{K-k}{K-(k-1)} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{1-\alpha}} [x_1^2(k) + x_2^2(k)] - \left[\frac{K}{K-(k-1)} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} [x_1^2(k) + x_2^2(k)] \\ &= \left\{ \left[\frac{K-k}{K-(k-1)} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} - 1 \right\} \left[\frac{K}{K-(k-1)} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} [x_1^2(k) + x_2^2(k)] \\ &= \left\{ \left[\frac{K-k}{K-(k-1)} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} - 1 \right\} V(k, x(k)), \end{aligned} \quad (4.37)$$

由式(4.37)结合式(4.3)可知, $\mu(k) = \left[\frac{K-k}{K-(k-1)} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$ 。结合式(4.24)可知, 满足条件

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^k \mu(i) = \lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^k \mu(i) = 0, k \in Z_+。$$

例 4.1 接下来, 我们考虑动力学方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = (\frac{1}{1+t^2} + t \sin 4t)x_1(t) + x_2(t) + u(t), x_1(0) = x_{10}, \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + (\frac{1}{1+t^2} + \sin 4t)x_2(t) + u(t), x_2(0) = x_{20}, \end{cases} \quad (4.38)$$

的离散化形式

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + h \left[(\frac{1}{1+k^2} + k \sin 4k)x_1(k) + x_2(k) + u(k) \right], x_1(0) = x_{10}, \\ x_2(k+1) = x_2(k) + h \left[-x_1(k) + (\frac{1}{1+k^2} + \sin 4k)x_2(k) + u(k) \right], x_2(0) = x_{20}, \end{cases} \quad (4.39)$$

其中 $h > 0$ 表示采样间隔时间。

令 $\alpha = \frac{1}{2}, h = 0.1, K = 8$ ，选取系统初始状态为 $x_0 = (12, 3)^T$ ，由式(4.36)可得

$$u(k) = \Phi(x(k)) = \left\{ \left[\frac{8-k}{8-(k-1)} \right]^2 x_1(k) - \left(\frac{1}{1+k^2} + k \sin 4k \right) x_1(k) - x_2(k) - 10x_1, \right. \\ \left. \left[\frac{8-k}{8-(k-1)} \right]^2 x_2(k) + x_1(k) - \left(\frac{1}{1+k^2} + \sin 4k \right) x_2(k) - 10x_2 \right\}^T, \quad (4.40)$$

代入相关数据后得 $J(x(t), \Phi(x(t))) = V(0, x_0) = \frac{1088}{9}$ 。综上所述，通过 Matlab

数值仿真得到了以下仿真图。

由图 7 可知，系统(4.39)在最优反馈控制器 $u(t) = \Phi(x(t))$ 作用下呈明显收敛趋势，且在 $k=8s$ 时系统的状态轨迹 $x(k) = 0$ 。即，在最优反馈控制器作用下，时变系统(4.39)可以实现有限时间稳定。由图 8 可知，最优控制信号的取值能够随着时变系统(4.39)逐渐趋于稳定，控制信号值也在有限时间内随之趋近于 0。此时，可以认为反馈控制器也实现了有限时间稳定。

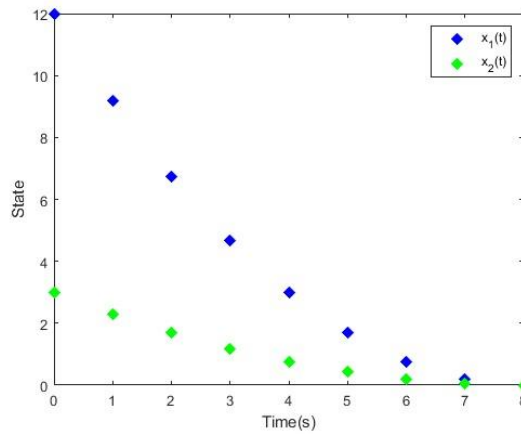


图 7 最优控制输入下系统的状态轨迹

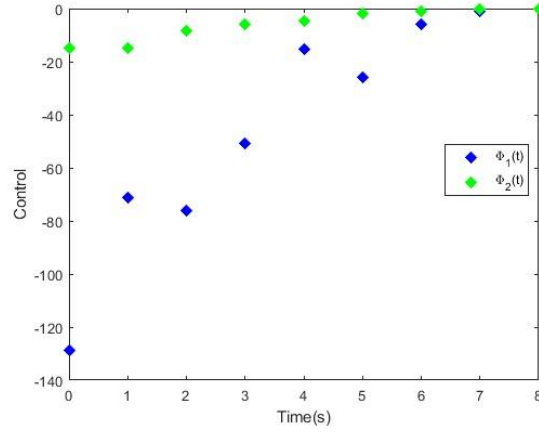


图 8 最优控制输入轨迹

例 4.2 接下来，我们考虑动力学方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + u_1(t), x_1(0) = x_{10}, t \geq 0, \\ \dot{x}_2(t) = -2x_1(t)\cos t + \sqrt{t}x_2(t)\sin 10t + u_2(t), x_2(0) = x_{20}, t \geq 0, \end{cases} \quad (4.41)$$

的离散化形式

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + h[x_2(k) + u_1(k)], x_1(0) = x_{10}, t \geq 0, \\ x_2(k+1) = x_2(k) + h[-2x_1(k)\cos k + \sqrt{k}x_2(k)\sin 10k + u_2(k)], x_2(0) = x_{20}, t \geq 0, \end{cases} \quad (4.42)$$

其中 $h > 0$ 表示采样间隔时间。

令 $\alpha = \frac{1}{2}, h = 0.1, K = 5$ ，选取系统的初始状态选为 $x_0 = (12, -12)^T$ ，由式(4.36)

可得

$$u(k) = \Phi(x(k)) = \left\{ \left[\frac{5-k}{5-(k-1)} \right]^2 x_1(k) - x_2(k) - 10x_1(k), \right. \\ \left. \left[\frac{5-k}{5-(k-1)} \right]^2 x_2(k) + 2x_1(k)\cos k - \sqrt{k}x_2(k)\sin 10k - 10x_2(k) \right\}^T, \quad (4.43)$$

代入相关数据后得 $J(x(t), \Phi(x(t))) = V(0, x_0) = 200$ 。通过 Matlab 数值仿真得到了以下仿真图。

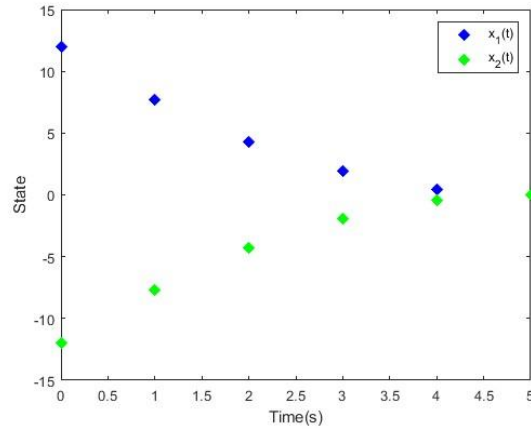


图 9 最优控制输入下系统的状态轨迹

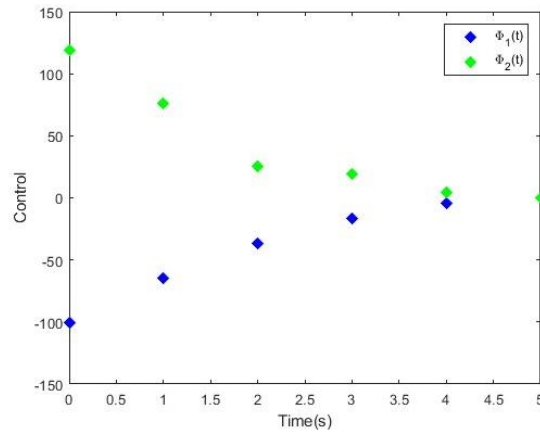


图 10 最优控制输入轨迹

由图 9 可知，系统(4.42)在最优反馈控制器 $u(t) = \Phi(x(t))$ 作用下呈明显收敛趋势，且在 $k = 5s$ 时系统的状态轨迹 $x(k) = 0$ 。即，在最优反馈控制器作用下，时变系统(4.42)可以实现有限时间稳定。由图 10 可知，最优控制信号的取值能够随着时变系统(4.42)逐渐趋于稳定，控制信号值也在有限时间内随之趋近于 0。此时，可以认为反馈控制器也实现了有限时间稳定。

综合上述两个仿真实例，所得相关结论验证了本节研究结果的有效性。

第 5 章 总结与展望

本文第 3 章基于时变连续系统有限时间稳定性结论,提出了一类时变连续系统有限时间最优控制的分析方法,研究了时变连续系统的有限时间最优控制问题,相关研究成果将时不变系统的最优控制推广到时变系统,拓广了系统最优控制结论的适用范围。并通过两个数值仿真案例验证了本节研究结果的有效性。

本文第 4 章基于时变连续系统有限时间稳定性思想,结合差分迭代思想给出了时变离散系统的有限时间稳定性分析方法,丰富了时变离散系统有限时间稳定性理论。在此基础上,给出了时变离散系统有限时间最优控制的充分条件,进一步丰富了时变离散系统的最优控制理论。

总体而言,本文研究工作仍有一些不足之处需要改进和完善,未来将从以下几点展开相关研究:

(1) 在研究对象上,本文研究时变系统所设计的 Lyapunov 函数的时变特征为标量,未来将设计具有更复杂时变特征的 Lyapunov 函数。

(2) 在研究方法上,本文研究最优控制主要根据 HJB 方程,目前的一些研究方法包括变分法,极小值原理以及动态规划原理等。未来将应用其他方法研究,比较不同方法的优劣。

(3) 在数值模拟上,本文在 Matlab 中采用欧拉算法,该方法依赖于初值进行迭代,其基本思想为:用差分近似代替微分来近似求解。该方法简单易懂但精度较低,未来将采用更加精确地方法,得到更精确的图像。

参考文献

- [1] Bhat S P , Bernstein D S. Lyapunov analysis of finite-time differential equations[C]. Proceedings of the 1995 American Control Conference, Seattle, WA, USA, 1995 (3): 1831-1832.
- [2] Bhat S P, Bernstein D S. Continuous finite-time stabilization of the translational and rotational double integrators[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1998, 43(5): 678-682.
- [3] Haimo V T. Finite-time controllers[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 1986, 24(4): 760-770.
- [4] Salehi S V , Ryan E P. On optimal nonlinear feedback regulation of linear plants[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1982, 27(6): 1260-1264.
- [5] Venkataraman S T , Gulati S. Control of Nonlinear Systems Using Terminal Sliding Modes[J]. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 1993: 554-560.
- [6] Bhat S P, Bernstein D S. Finite-time stability of homogeneous systems[C]. Proceedings of the 1997 American Control Conference, Albuquerque, NM, USA, 1997(4): 2513-2514 .
- [7] Polyakov A, Efimov D, Brogliato B. Consistent discretization of finite-time stable homogeneous systems[C]. 2018 15th International Workshop on Variable Structure Systems(VSS), Graz, Austria, 2018: 360-365.
- [8] Hamrah R, Sanya A K, Viswanathan S P. Discrete finite-time stable position tracking control of unmanned vehicles[C]. 58th Conference on Decision and Control(CDC), Nice, France, 2019: 7025-7030.
- [9] Chaillet A, Loría A. Uniform global practical asymptotic stability for time-varying cascaded systems[J]. European Journal of Control, 2006, 12(6): 595-605.
- [10] Chaillet A, Chitour Y, Loría A, etc. Uniform stabilization for linear systems with

- persistence of excitation: the neutrally stable and the double integrator cases[J]. Mathematics of Control, Signals, and Systems, 2008, 20(2): 135-56.
- [11] Kwon W, Pearson A. A modified quadratic cost problem and feedback stabilization of a linear system[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1977, 22(5): 838-42.
- [12] Rekasius Z. An alternate approach to the fixed terminal point regulator problem[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1964, 9(3): 290-2.
- [13] Zarchan P. Tactical and strategic missile guidance[J]. American Institute of Aeronautics & Astronautics Inc, 1990.
- [14] Jeon I S, Lee J I, Tank M J. Impact-time-control guidance law for anti-ship missiles[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2006, 14(2): 260-266.
- [15] Pietro Morasso, Vittorio Sanguineti, Gino Spada. A computational theory of targeting movements based on force fields and topology representing networks[J]. Neurocomputing, 1997, 15: 411-434.
- [16] Zhou B. Finite-time stabilization of linear systems by bounded linear time-varying feedback[J]. Automatica, 2020, 113: 108760.
- [17] Coron J M. On the stabilization in finite-time of locally controllable systems by means of continuous time-varying feedback law[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 1995, 33(3): 804-33.
- [18] Ryan E P. Optimal relay and saturating control system synthesis[J]. IEE Control Engrg, 1982.
- [19] Athans M, Falb PL. Optimal control: an introduction to the theory and its applications[J]. IEEE Transactions on Automatic Control 2003, 12(3), 345-347.
- [20] Filippov A F. Differential equations with discontinuous righthand sides[M]. Siam Review 1990, 32(2): 312-315.
- [21] Irmgard Flügge-Lotz. Discontinuous and optimal control[J]. McGraw-Hill, 1968.
- [22] 陈姚, 吕金虎. 复杂动态网络的有限时间同步[J]. 系统科学与数学, 2009, 29(10): 1419-1430.

- [23] Li S, Ding S, Li Q. Global set stabilisation of the spacecraft attitude using finite-time control technique[J]. *International Journal of Control*, 2009, 82(5): 822-836.
- [24] Wang L, Chen Z, Liu Z, etc. Finite-time agreement protocol design of multi-agent systems with communication delays[J]. *Asian Journal of Control*, 2009, 11(3): 281-286.
- [25] 刘洋, 井元伟, 刘晓平, 等. 非线性系统有限时间控制研究综述[J]. *控制理论与应用*, 2020, 37(01): 1-12.
- [26] 丁世宏, 李世华. 有限时间控制问题综述[J]. *控制与决策*, 2011, 26(2): 161-169.
- [27] Ding S H, Levant A, Li S H. Simple homogeneous sliding-mode controller[J]. *Automatica*, 2016, 67: 22-32.
- [28] Polyakov A, Efimov D, Perruquetti W. Finite-time and fixed-time stabilization: Implicit Lyapunov function approach[J]. *Automatica*, 2015, 51: 332-340.
- [29] Bhat S P, Bernstein D S. Finite-time stability of continuous autonomous systems[J]. *SIAM Journal on Control and optimization*, 2000, 38(3): 751-766.
- [30] Bhat S P, Bernstein D S. Geometric homogeneity with applications to finite-time stability[J]. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 2005, 17: 101-127.
- [31] Lizarralde F, Wen J T. Attitude control without angular velocity measurement: A passivity approach[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, 41(3): 468-472.
- [32] Hong Y G. Finite-time stabilization and stabilizability of a class of controllable systems[J]. *Systems & Control Letters*, 2002, 46(4): 231-236.
- [33] Haddad W M, Lee J. Finite-time stability of discrete autonomous systems[J]. *Automatica*, 2020, 122: 109282.
- [34] Hong Y, Huang J, Xu Y S. On an output feedback finite-time stabilization problem[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46(2): 305-309.
- [35] 于霞, 刘建昌, 李鸿儒. 时变系统控制方法综述[J]. *控制与决策*, 2011, 26(9): 1281-1287.
- [36] Lewis A D. Remarks on Stability of time-varying linear systems[J]. *IEEE*

- Transactions on Automatic Control, 2017, 62(11): 6039-6043.
- [37] Vu L, Liberzon D. Supervisory control of uncertain linear time-varying systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2010, 56(1): 27-42.
- [38] Song Y, Wang Y, Holloway J, etc. Time-varying feedback for regulation of normal-form nonlinear systems in prescribed finite-time[J]. Automatica, 2017, 83: 243-251.
- [39] Zhou B. Finite-time stability analysis and stabilization by bounded linear time-varying feedback[J]. Automatica, 2020, 121: 109191.
- [40] 马婧瑛, 郑元世, 王龙. 多智能体系统的性能优化[J]. 系统科学与数学, 2015, 35(03): 270-286.
- [41] Kalenova V I, Morozov V M. A new class of reducible linear time-varying systems and its relation to the optimal control problem[J]. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 2016, 80(2): 105-112.
- [42] 潘立平, 禹新辉. 线性-非二次最优控制问题的 Near-Optimal 控制[J]. 系统科学与数学, 2007, 7(5): 743.
- [43] Ortega-Martínez J M, Santos-Sánchez O J, Rodríguez-Guerrero L, etc. On optimal control for linear distributed time-delay systems[J]. Systems & Control Letters, 2023, 177: 105548.
- [44] Verriest E, Zhou M, Abdallah C. Optimal control for state-dependent switched time-delayed systems[J]. IFAC-PapersOnLine, 2022, 55(36): 85-90.
- [45] 汤善健, 朱亮. 线性脉冲控制系统的能控性与最优控制[J]. 系统科学与数学, 2007, 27(3): 354-364.
- [46] Haddad W M, L'Afflitto A. Finite-time stabilization and optimal feedback control[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 61(4): 1069-1074.
- [47] Haddad W M, Lee J. Finite-time stabilization and optimal feedback control for nonlinear discrete-time systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2022, 68(3): 1685-1691.
- [48] Bubnicki Z. Modern control theory[M]. Berlin Springer, 2005.
- [49] Pal A K, Kamal S, Nagar S K, etc. Design of controllers with arbitrary convergence time[J]. Automatica, 2020, 112: 108710.

- [50] He X Y, Li X D, Nieto J J. Finite-time stability and stabilization for time-varying systems[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2021, 148: 111076.
- [51] Garcia G, Tarbouriech S, Bernussou J. Finite-time stabilization of linear time-varying continuous systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, 54(2): 364-369.
- [52] Byrnes C I , Lin W. Losslessness, feedback equivalence, and the global stabilization of discrete-time nonlinear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, 39(1): 83-98.

攻读硕士期间取得的学术成果

- [1] 吴小太(导师), 章森(作者). 时变系统有限时间最优控制[J]. 系统科学与数学.
(已录用)

致谢

岁月如歌，光阴似箭，研究生生活即将结束。经历了找工作的喧嚣与坎坷，我深深体会到了写论文时的那份宁静与思考。回首研究生四年的求学历程，对那些引导我、帮忙我、激励我的人，我心中充满了感激。

首先要感谢我的导师吴小太教授。在这四年期间，我深深受益于吴小太老师的关心、爱护和谆谆教导。他作为老师，点拨迷津，让人如沐春风；作为长辈，关怀备至，让人感念至深。能师从吴小太老师，我为自己感到庆幸。吴小太老师在论文的写作中给予了我许多指导与推荐，从论文定题到写作定稿，倾注了吴小太老师很多的心血。在此谨向吴小太老师表示我最诚挚的敬意和感谢！

同时，我还要感谢我的女朋友。她在我追求学业的道路上给予了我无尽的支持和关心。在我遇到困难和压力的时候，她总能给我带来宽慰和力量。她的爱和鼓励是我能坚持到最后并完成这份论文的重要动力！

最后，要感谢一直关心与支持我的同学和朋友们！我的朋友，感谢你们的鼓励和帮忙。这四年来，我们朝夕相处，共同进步，感谢你们给予我的所有关心和帮忙。同窗之谊，我将终生难忘！

在此要感谢我生活学习了七年的母校——安徽工程大学，母校给了我一个宽阔的学习的平台，让我不断吸取新知，充实自己。祝母校蒸蒸日上，永创辉煌！