

分类号：（O177.2）

密 级：公开

单位代码：10363

学 号：2211020123

题 目：Hilbert C*-模算子代数上 Lie 导子的标准性

题 目：Standard of Lie Derivations on the Algebra of
Operators in Hilbert C*-modules

学生姓名：_____黄星星_____

指导教师：_____何俊 副教授_____

专 业：_____数学_____

研究方向：_____算子代数上的线性映射_____

论文答辩日期：2024 年 5 月 29 日

安徽工程大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：我恪守学术道德，崇尚严谨学风。所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已明确注明和引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品及成果的内容。论文为本人亲自撰写，我对所写的内容负责，并完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

学位论文作者签名：黄星星

日期： 2024 年 5 月 31 日

安徽工程大学学位论文版权使用授权书

学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅或借阅。本人授权安徽工程大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保密 ☐，在 ____ 年解密后适用本版权书。

本学位论文属于

不保密 ☒。

学位论文作者签名：黄星星

指导教师签名：何伦

日期：2024 年 5 月 31 日

日期：2024 年 5 月 31 日

Hilbert C^* -模算子代数上 Lie 导子的标准性

摘 要

本文主要在 Hilbert C^* -模算子代数上考虑一些线性映射的标准形式。以 Banach 代数为起点，主要在 Hilbert C^* -模算子代数上深入探求 Lie 导子以及 Lie n -重导子的结构性质，同时也考虑了一些如导子、内导子、零化交换子和 Jordan 导子等映射的性质。全篇共计分为五个章节，主要工作如下：

在第一章中，分为三节来介绍我们将要讨论的问题的背景、国内外的一些学者之前相关研究的进展以及已经取得的重要研究成果和目前学者们聚焦的尚未解决的一些难题。为了帮助读者更好的理解相关内容，在本章末尾阐释了下文中提到的代数和映射的具体定义及其重要性质。

在第二章中，我们介绍了一些基础概念和一些后文会反复运用的结论。

在第三章中，考虑了 Lie 导子在 Hilbert C^* -模算子代数上的标准性。设 $\mathcal{A}$ 是一个交换的 C^* -代数，并且含有单位元 e ， $\mathcal{M}$ 是一个满的 Hilbert $\mathcal{A}$ -模， $\mathcal{M}$ 到自身的有界 $\mathcal{A}$ -线性映射全体构成的代数记作 $End_{\mathcal{A}}(\mathcal{M})$ 。 $\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{A}$ 的有界 $\mathcal{A}$ -线性映射全体组成的集合记作 $\mathcal{M}'$ 。我们证明了如果存在 $x_0 \in \mathcal{M}$ ， $f_0 \in \mathcal{M}'$ ，使得 $f_0(x_0) = e$ ，则 $End_{\mathcal{A}}(\mathcal{M})$ 上的每个 $\mathcal{A}$ -线性 Lie 导子都是标准的。

在第四章中，我们以第三章为研究基础，将 2 推广到 n (Lie 导子即 Lie 二重导子)，考虑了 Lie- n 重导子在 Hilbert C^* -模算子代数上的标准性。由于 n 重 Lie 积的复杂性，所以证明过程是要考虑全面的。最终我们证明了如果存在 $x_0 \in \mathcal{M}$ ， $f_0 \in \mathcal{M}'$ ，使得 $f_0(x_0) = e$ ，则 $End_{\mathcal{A}}(\mathcal{M})$ 上的每个 $\mathcal{A}$ -线性 Lie n -重导子都是标准的。

在第五章中，对全文进行了总结，并对接下来的研究进行了前瞻性的思考和规划。

关键词：Lie 导子，Lie n -重导子，导子，标准性，Hilbert C^* -模

STANDARD OF LIE DERIVATIONS ON THE ALGEBRA OF OPERATORS IN HILBERT C^* -MODULES

ABSTRACT

In this thesis, we consider some standard forms of linear maps on the Hilbert C^* -modular operator algebra. Taking Banach algebras as the starting point, the structural properties of Lie derivations and Lie n -derivations are studied on Hilbert C^* -modular operator algebras, and the properties of some mappings such as derivations, inner derivations, null commutator and Jordan derivations are also considered. The whole paper is divided into five chapters, the main work is as follows:

In the first chapter, we have divided our discussion into three sections: firstly, to provide background information on the problem at hand; secondly, to review previous research conducted by scholars both domestically and internationally; and thirdly, to highlight important research findings as well as unresolved issues that are currently being focused on by scholars. At the end of this chapter, the specific definitions and importance of algebra and mapping mentioned below are explained.

In Chapter 2, we first introduce the preparatory knowledge and some basic and important conclusions that will be applied again and again later.

In Chapter 3, we consider the standard form of Lie derivatives on

Hilbert C^* -modules operator algebra. Let $\mathcal{A}$ be a commutative C^* -algebra with units e and $\mathcal{M}$ is a full Hilbert $\mathcal{A}$ -module. The algebra of the whole body of bounded $\mathcal{A}$ -linear map from $\mathcal{M}$ to itself is denoted as $End_{\mathcal{A}}(\mathcal{M})$. The set of all the bounded $\mathcal{A}$ -linear maps from $\mathcal{M}$ to $\mathcal{A}$ is called $\mathcal{M}'$. We show that if there is $x_0 \in \mathcal{M}$, $f_0 \in \mathcal{M}'$, such that $f_0(x_0) = e$, then every $\mathcal{A}$ -linear Lie derivative on $End_{\mathcal{A}}(\mathcal{M})$ is standard.

In Chapter 4, by extending 2 to n (the Lie derivation is a double Lie derivation), the normality of the lie- n derivation on a Hilbert C^* -module operator algebra is considered. The proof process should be comprehensively considered due to the intricate nature of the n -multiply-Lie product. Finally we show that if there is $x_0 \in \mathcal{M}$, $f_0 \in \mathcal{M}'$, such that $f_0(x_0) = e$, then every $\mathcal{A}$ -linear Lie n -derivative on $End_{\mathcal{A}}(\mathcal{M})$ is standard.

The fifth chapter presents a comprehensive overview of the entire text, followed by an insightful analysis and strategic planning for future research.

Huang Xingxing (Applied Mathematics)

Supervised by He jun

KEY WORDS: Lie derivation, Lie n -derivation, standard form, derivation, Hilbert C^* -module

目录

摘 要	I
ABSTRACT	III
第 1 章 绪论	1
1.1 背景介绍	1
1.2 各类算子代数上导子与 Lie 导子的研究现状	3
1.2.1 导子、内导子、Lie 导子以及 Lie n -重导子	3
1.2.2 Lie 导子的标准性及 Lie n -重导子的标准性	5
第 2 章 Hilbert C^* -模算子代数	7
2.1 基本概念	7
2.1.1 本文中所涉及的代数及其重要性质	7
2.1.2 本文中所涉及的映射	9
2.2 预备知识	12
2.3 基本引理	13
第 3 章 Hilbert C^* -模算子代数上 Lie 导子的标准性	15
3.1 引言	15
3.2 Hilbert C^* -模上 Lie 导子的标准性	15
第 4 章 Hilbert C^* -模算子代数上 Lie n - ($n \geq 2, n \in N^+$) 重导子的标准性	24
4.1 引言	24
4.2 Hilbert C^* -模上 Lie n -重导子的标准性	25
第 5 章 回顾与展望	37
5.1 回顾与总结	37
5.2 展望工作	37
参考文献	39
硕士期间发表的论文	43
致谢	44

第 1 章 绪论

1.1 背景介绍

在系统的学习了泛函分析之后，我们可以明白这样一句话：“对于希尔伯特空间上的有界线性算子，我们既可以做加法，也可以做乘法(这里的乘法是指算子的复合)，还可以做数乘，即所有有界线性算子全体构成了一个代数。”而算子代数就是用来研究这个代数的子代数的性质。这个代数有一个很大的不足，即非交换的。最简单的，有限维空间的有界线性算子构成的矩阵就是非交换的。量子力学刚起步的时候，大家就发现很多可观测量是不可交换的，如果想要用数学模型来描述可观测量，就要找到一个非交换的代数。在当时的年代，矩阵代数是人们能找到的唯一非交换代数。随着知识的发展，时间的推移，学者需要用到无限维的矩阵，而无限维矩阵并没有坚实数学基础。20 世纪 30 年代，专家学者们在探索量子理论过程中，发现了另一类问题——算子环系统的性质有哪些？针对这些问题，研究者 J.von Neumann 与 F.Murray 研究了一套数学工具且发表了一系列文章，就此发展了一门全新的数学学科，后来被称之为算子代数。研究者 J.von Neumann 与 F.Murray 研究的代数也被称为 von Neumann 代数。在如今的数学学科中，算子代数与算子理论的发展趋于成熟，它与量子场论和量子力学、数论、线性系统以及其他数学分支之间存在着令人惊讶的交叉点和相互影响，是现代数学领域中备受关注且引领潮流的研究方向。

20 世纪 40 年代，Gelfand,Neumark 和 Segal 研发了一套著名的 GNS 构造法，为 C^* -代数的研究领域奠定了坚实的基石，研究者 Gelfand,Neumark 与 Segal 也就此成为 C^* -代数的开创者。1977 年，学者 Dixmier^[1-2]在他的专著“ C^* - Algebras ”和“von Neumann Algebras”中系统的介绍了算子代数一些基本的理论。1986 年，李炳仁^[3]教授作为国内学者，在其发表的著作“算子代数”中详细讲解了算子代数的基础理论知识，尤其对无限维的 Von Neumann 代数进行了细致的拓扑讨论。1988 年，Davidson^[4]在发表的著作“Nest algebras”中系统的回顾了算子代数

的研究历程，并整合了算子代数与算子理论领域的各项研究结论。2002 年，国内学者侯晋川、崔建莲^[5]在著作“算子代数上的线性映射引论”对国内外经典算子代数上线性映射及其保持问题进行成果总结。

算子代数所研究的代数结构是极其复杂与抽象的，探索算子代数的代数结构特征，是研究该领域的关键所在。出于理论本身的研究以及实际应用的需要，许多学者开始研究代数上的映射，并相继提出了许多相关概念，例如：同态、同构、导子、Lie 导子、零化交换子、换位子等。近几十年来，算子代数领域愈发活跃，成为众多学者作家重点关注的交叉领域分支之一。

前辈们大多是在 Banach 代数、三角代数以及套代数等代数结构上研究映射的相关性质。1953 年，Kaplansky^[6] 为了深入探求 I 型 AW*-代数上的导子，创新性地提出了 Hilbert C*-模的概念。Hilbert C*-模将复数域 C 替换为 C*-代数，使得 Hilbert 空间自然而然地得到延伸拓展。Hilbert C*-模理论在算子代数理论中起着重要的作用，它可以应用于许多领域，如椭圆算子的指标理论， K -和 KK -理论，非交换几何等等。

目前为止，Hilbert C*-模算子代数上关于导子和 Lie 导子的结果相对较少。在算子代数 $End_{\mathcal{A}}^*(\mathcal{M})$ 上，Han 和 Tang^[7]给出了其代数上的每个导子都是内导子的证明结果。在这里 $\mathcal{A}$ 是一个单位 C*-代数并且是可交换的， $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{A}$ 上满的 Hilbert C*-模， $End_{\mathcal{A}}^*(\mathcal{M})$ 表示所有 $\mathcal{M}$ 到自身的、可伴随的并且有界 $\mathcal{A}$ -线性映射全体。作者 Moghadam^[8]与 Janfada 在他们发表的论文中假设 $\mathcal{A}$ 是一个 C*-代数，含有单位 e ，并且是可交换的。 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{A}$ 上满的 Hilbert C*-模，且存在 $x_0 \in \mathcal{M}$ ， $f_0 \in \mathcal{M}'$ ，使得 $f_0(x_0)=e$ ，给出了 $End_{\mathcal{A}}(\mathcal{M})$ 上的每个 $\mathcal{A}$ -线性导子都是内导子的证明过程。He^[9-10]研究了 $End_{\mathcal{A}}(\mathcal{M})$ 上导子的自动连续性， $\mathcal{A}$ -线性性，以及局部导子和 2-局部导子等相关问题。

1.2 各类算子代数上导子与 Lie 导子的研究现状

1.2.1 导子、内导子、Lie 导子以及 Lie n -重导子

设 $\mathcal{A}$ 是域 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 上的代数或者环, $\mathcal{M}$ 是一个 $\mathcal{A}$ -双边模, 如果没有作特殊说明的情况下, d 是一个 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{M}$ 的线性映射 (在环中, 我们只要求 d 满足可加性这一线性特性), 特别地, 代数或环 $\mathcal{A}$ 也可以当作自身的双边模。如果对于任意元素 $A, B \in \mathcal{A}$, 都有 $d(AB) = d(A)B + Ad(B)$, 那么称 d 为导子。导子作为一种概念, 其实质是对传统导数概念的一种代数化、一般化拓展, 它源自代数学中的同调理论框架。

在模 $\mathcal{M}$ 中, 如果存在一个给定元素 M , 使得对任意的 $A \in \mathcal{A}$, 都有 $d(A) = MA - AM$, 那么称 d 为内导子 (我们也可以将线性映射 d 看作由给定元素 M 诱导产生的内导子)。

内导子显然是一个导子, 但在一般情况下反之则未必, 导子是否为内导子这个问题吸引了很多学者的目光。在早期, 关于 W^* -代数上导子的内导性, 研究者 Sakai^[11]做了全面并且充分的阐述, 证明了 W^* -代数上的每个导子都是内的。此外在 1966 年, 关于 von Neumann 代数上的导子 d , Kadison^[12]和 Sakai 两位学者分别独立给出了 d 是内导子的证明过程。针对 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上导子性质的刻画, 1977 年, Christensen^[13]给出了 $\mathcal{H}$ 的套子代数 $\mathcal{N}$, $\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ 的导子都是内导子的证明结论。1996 年, Du^[14]和 Zhang 将 Christensen 研究结果应用于更广泛的领域。He^[15], Li 和 Zhao 给出了若导子 $d \in \text{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M})$, 则 d 是内导子的证明过程。在矩阵环与矩阵代数上, 设一个含单位的代数 $\mathcal{A}$, $\mathcal{M}$ 是一个 $\mathcal{A}$ -双边模, 研究者黄文波^[16]与李建奎指出, 当 $n \geq 2, n \in \mathbb{N}^+$ 时, $M_n(\mathcal{A})$ 到 $M_n(\mathcal{M})$ 的导子可以拆解为一个内导子加上另一个导子的形式。我们将 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的有界线性算子全体组成的集合记作 $B(\mathcal{H})$, 针对 $B(\mathcal{H})$ 中的 von Neumann 代数到 $B(\mathcal{H})$ 的导子的结构, 专家学者们做了诸多研究, 但是其导子是否为内导子依然是一个未被攻克的经典难题。

假设 $\mathcal{A}$ 上的线性映射 δ 满足: 对于任意元素 $A, B \in \mathcal{A}$, 都有

$\delta([A,B])=[\delta(A),B]+[A,\delta(B)]$ ，那么将 δ 称作是一个 Lie 导子，其中 $[A,B]=AB-BA$ 称为 A 和 B 的 Lie 积，也称为 A 与 B 的交换子。假设 $\mathcal{A}$ 上的线性映射 δ 符合下列条件：对任意元素 $A \in \mathcal{A}$ ，都有 $\delta(A^2)=\delta(A)A+A\delta(A)$ ，那么我们将 δ 称作是一个 Jordan 导子。

在导子理论中，对 Jordan 导子和 Lie 导子性质的深入剖析也是一个关键议题，学者们聚焦的两个核心问题是：（1）Jordan 导子何时为导子；（2）Lie 导子何时为标准的。

Jordan 导子何时为导子。1957 年，Herstein^[17]在他的文章中给出了：将一个 2-无挠素环记作 R ，若 δ 是 R 上的一个 Jordan 导子，并且具有可加性质，那么我们可以得出 δ 是导子的结论。1975 年，Cusack^[18]将 Herstein 的研究成果进行了推广，证明了若 R 是一个 2-无挠半素环， δ 是 R 上的一个 Jordan 导子，并且具有可加性质，则 δ 是导子。1996 年，Johnson^[19]证明了：若 δ 是 C^* -代数到其任意 Banach 双边模上的 Jordan 导子，并且 Jordan 导子 δ 具有连续性质，那么 δ 是导子。根据 Hejazian^[20]和 Niknam、Cuntz 和 Johnson 几位学者的相关研究成果，可将 Johnson 的证明结论中的“Jordan 导子具有连续性质”这一条件去掉，即得到 $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ 上的 Jordan 导子 d 是导子这一更强的结论。2004 年，Alaminos^[21]和 Brešar 对 Jordan 导子的结构性性质在各种代数上进行了深入探究。区别于上述学者们的研究，2010 年，Lu^[22]将对 Jordan 导子 d 的研究拓展到 Banach 空间 X 的子空间格 $\mathcal{L}$ 上，给出了在 $\mathcal{L}$ 满足 $\mathcal{L} \cap \{L_- : L \in \mathcal{J}_{\mathcal{L}}\} = (0)$ 或 $\mathcal{L} \cup \{L : L \in \mathcal{J}_{\mathcal{L}}\} = X$ 这一条件下，Jordan 导子 $d: \text{Alg } \mathcal{L} \rightarrow B(X)$ 是导子的研究结果。同一时期，学者侯晋川^[23]，安润玲展示了：设 X 是素的 Banach 代数，Jordan 导子 $\delta: X \rightarrow X$ ，这里要求 Jordan 导子 δ 具有可加性。如果对于任意元素 $A, B \in X$ ，等式 $\delta(A \circ B) = e$ 恒成立，那么 Jordan 导子 δ 是导子。其中， $A \circ B = AB + BA$ 称为 A 和 B 的 Jordan 积。设 $\mathcal{A}$ 是一个 C^* -代数， $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{A}$ 的任意一个 Banach 左 $\mathcal{A}$ -模， δ 为 $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$ 的 Jordan 左导子，2018 年，研究者安广宇^[24]得出了 δ 恒等于零的研究结论。

Lie 导子何时为标准的。1961 年，Herstein^[25]就提出了无论在结合单环上还是素环上的 Lie 映射，都展现出一种标准化的性质，即可以分解成一个标准形式

的式子这一猜想。1964 年, Martindale^[26]提出, 设 2-无挠素环 R , 且 R 包含非平凡幂等元, δ 是 X 上 Lie 导子, 则 δ 具有标准性这一结论。在 CDCSL 代数 X 上, 2006 年, Lu^[27]刻画了 X 上的每一个 Lie 导子都具有标准性。2015 年, Benkovic^[28]证明了, 当 $n \geq 2$ 时, 矩阵代数 $M_n(\mathcal{A})$ 上每一个 Lie 导子都是标准的。本文研究了 Hilbert C^* -模上的 Lie 导子的标准形式, 并将相关结论延申推广至 Lie n -导子的标准形式的研究上。

1.2.2 Lie 导子的标准性及 Lie n -重导子的标准性

显然, 导子一定是 Lie 导子, 同时, 零化交换子的中心值线性映射也是 Lie 导子, 因而上述 $d + \tau$ 形式的映射一定是 Lie 导子。但是反之, 一个代数上的 Lie 导子是否都是这种标准形式呢? 对此, 也有很多学者做了相关研究。2003 年, 学者 Cheung^[29]在三角代数上给出了每个 Lie 导子都具有 $d + \tau$ 这种分解方式, 并且分解方式是唯一的这一结论。2015 年, Benkovi^[28]刻画了含有幂等元的单位代数上的广义 Lie 导子的结构性质。2023 年, Guangyu^[30], Rui 等学者在 Kadison-Singer 代数上对 Lie 导子的性质进行了刻画。对于 Lie 导子在各类代数上的研究结果丰硕, Lie triple 导子和 Lie n -重导子也逐渐的进入学者们的研究范畴。2015 年, Dominik, Benkovic^[31]证明了: 如果 $\mathcal{A}$ 是一个含有非平凡幂等单位的代数, 那么在一定的条件下, $\mathcal{A}$ 上的每个 Lie triple 导子都有 $d = \Delta + \delta + \tau$ 的形式, 其中 Δ 是 $\mathcal{A}$ 中的导子, δ 是 $\mathcal{A}$ 上的 Jordan 导子。 τ 是从 $\mathcal{A}$ 到他中心 $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ 的线性映射, 其中 $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ 扩张在 $[[\mathcal{A}, \mathcal{A}], \mathcal{A}]$ 。2017 年, 白延丽^[32], 张建华在三角代数上全面阐述了 Lie 三重导子具有的标准形式。2018 年, Liu^[33] 发展了因子 von Neumann 代数上的零点与非平凡幂等元处 Lie triple 导子的结构。

到现在为止, 学者们对于更一般地 Lie n -重导子的研究结果比较少。如果 Lie n -重导子 δ 可以分解为: $\delta = d + \tau$, 其中, d 是一个 $\mathcal{A}$ 上的导子, τ 是一个 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{Z}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ 的线性映射, 这里的 $\mathcal{Z}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ 表示集合 $\{M \in \mathcal{M}: \text{对任意 } A \in \mathcal{A}, MA = AM\}$ 。并且满足对于任意元素 $C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathcal{X}$, 都有 $\tau(p_n(C_1, C_2, \dots, C_n)) = 0$ 。那么我们将 δ 称为一个标准 Lie n -重导子。1981 年, Lachin^[34]等给出了三角环代数上的 Lie- n 重导子是标准的这一结论。2013 年, 刘红玉^[35]、霍东华在三角代数上证明了 Lie- n

重导子的标准性。2023 年, 刘卓^[36]利用恒等式理论, 刻画出在一定的条件下, 交换环上的结合代数 A 、 B 上的 Lie n -导子是标准的。本文的第四章内容证明了 $End_{\mathcal{A}}(\mathcal{M})$ 上的每个 $\mathcal{A}$ -线性 Lie n -重导子都是标准的。

第 2 章 Hilbert C^* -模算子代数

2.1 基本概念

2.1.1 本文中所涉及的代数及其重要性质

本文段落聚焦于阐释文章中提到的代数和映射的具体定义和其重要性质，以帮助读者更好的理解相关内容。

定义 1.1 Banach 空间

设 X 是实或复线性空间，若在 X 上定义的非负函数 $\|\cdot\|$ ，满足以下公理：

- (1) 对任意的 $x, y \in X$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,
- (2) 对任意的 $x \in X$, 任意的数 a , 有 $\|ax\| = |a| \|x\|$,
- (3) $\|x\| = 0$ 当且仅当 $x = 0$,

那么 X 称为赋范空间。进一步，如果还满足

- (4) 对 X 中的任意 Cauchy 列 $\{x_n\}$ (即当 $n, m \rightarrow \infty, \|x_n - x_m\| \rightarrow 0$), 存在 $x \in X$,

使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$,

那么 X 称为 Banach 空间。

注：我们定义的非负函数 $\|\cdot\|$ ，若满足公理 (1) - (3)，则称其为 X 上的范数，满足公理 (1) 和 (2)，则称其为半范数。

定义 1.2 Banach 代数

设 $\mathcal{A}$ 是一个代数， $\|\cdot\|$ 是 $\mathcal{A}$ 上的范数，如果 $\mathcal{A}$ 按此范数成为 Banach 空间，且满足，对于任意的 $A, B \in \mathcal{A}$

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

则称 $\mathcal{A}$ 为一个赋范代数。

下面介绍一个在 Banach 代数中非常重要的含义，即在含有单位元 I 的复

Banach 代数 $\mathcal{A}$ 中元素 A 的谱 $\sigma(A)$ 与谱半径 $r(A)$ 的定义: $A \in \mathcal{A}$ (A 相对于 $\mathcal{A}$),

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - A \text{ 在 } \mathcal{A} \text{ 中不可逆}\}$$

$$r(A) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(A)\}$$

$\mathcal{A}$ 中的每个元的谱都是复数平面 $\mathbb{C}$ 的非空紧子集。如果 A 谱半径 $r(A)$ 为 0, 那么称 A 是一个拟幂零元。

同态映射 $\pi: \mathcal{A} \rightarrow B(X)$, 这里的 $\mathcal{A}$ 是一个 Banach 代数, X 是一个 Banach 空间, 若同态 π 使得 $\pi(\mathcal{A})$ 能够成为 $B(X)$ 的闭子代数, 那么我们将同态 π 称为是 A 在 X 上的表示。所以 Banach 代数同样可以被视作是算子代数的一种表现形式。

定义 1.3 Hilbert 空间

设数域 $\mathbb{F}$ 上的一个线性空间为 X , 若存在映射

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{F}$$

满足条件: 对任意元素 $x, y, z \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{F}$,

$$(1) \text{ 对第一变元的线性: } \langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle,$$

$$(2) \text{ 共轭对称性: } \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle},$$

$$(3) \text{ 正定性: } \langle x, x \rangle \geq 0; \text{ 并且 } \langle x, x \rangle = 0 \text{ 当且仅当 } x = 0,$$

则称 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 为 X 上的内积, 并称 $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 为内积空间, 简记为 X .

同时, 内积还具备以下性质:

$$(4) \text{ 第二变元共轭线性: } \langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + \overline{\beta} \langle x, z \rangle,$$

$$(5) \langle x, 0 \rangle = \langle 0, y \rangle = 0,$$

完备的内积空间我们称其为 Hilbert 空间。

设 $\mathcal{H}$ 是 Hilbert 空间, 其内积为: $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

令 $A \in B(\mathcal{H})$, 使得对于任意的 $x, y \in \mathcal{H}$,

都有 $(Ax, y) = (x, A^*y)$ 成立,

那么我们将 A^* 称为 A 的伴随算子或共轭算子。

定义 1.4 C^* -代数

设 $\mathcal{A}$ 是一个复数域 $\mathbb{C}$ 上的代数，

如果 $\mathcal{A}$ 上存在这样一个映射 $*$ ，使得对于任意的 $S, T \in \mathcal{A}, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ 都有

$$(1) (\alpha S + \beta T)^* = \bar{\alpha} S^* + \bar{\beta} T^*,$$

$$(2) (ST)^* = T^* S^*,$$

$$(3) (T)^{**} = T,$$

那么称 $*$ 为 $\mathcal{A}$ 上的一个对合运算。

Banach 代数 $\mathcal{A}$ 含有有对合运算 $*$ ，并且还满足：对于任意元素 $T \in \mathcal{A}$ ，

$$(4) \|T^* T\| = \|T\|^2,$$

那么称 $\mathcal{A}$ 是一个 C^* -代数。

定义 1.5 von Neumann 代数

设 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ ， $B(\mathcal{H})$ 表示 $\mathcal{H}$ 上的所有有界线性算子全体。

设 $\mathcal{A} \subseteq B(\mathcal{H})$ 是一个包含单位元的 C^* -代数，并且关于弱算子拓扑是闭的，
则称 $\mathcal{A}$ 是 von Neumann 代数， $\mathcal{H}$ 称为 $\mathcal{A}$ 的底空间。

2.1.2 本文中所涉及的映射

设 $\mathcal{A}$ 是数域 $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$) 上的代数， $\mathcal{M}$ 是一个 $\mathcal{A}$ -双边模，以下是对文中涉及到的 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{M}$ 的映射进行介绍。

定义 1.6 导子

如果线性映射 δ 满足：对于任意的 $A, B \in \mathcal{A}$ ，都有 $\delta(AB) = \delta(A)B + A\delta(B)$ ，
那么称 δ 是一个导子。

定义 1.7 内导子

若线性映射 δ 满足：存在给定元素 $M \in \mathcal{M}$ ，使得对于任意 $A \in \mathcal{A}$ ，都有 $\delta(A) = MA - AM$ ，那么称 δ 是一个内导子，我们也可以将线性映射 δ 看作由给定元素 M 诱导产生的内导子。

注：内导子一定是个导子。

验证过程如下：

若 δ 是一个由给定元素 M 诱导产生的内导子，
则有

$$\delta(AB) = MAB - ABM$$

以及

$$\delta(A)B + A\delta(B) = (MA - AM)B + A(MB - BM) = MAB - ABM.$$

定义 1.8 Jordan 导子

如果线性映射 δ 满足：对于任意的 $A \in \mathcal{A}$ ，都有 $\delta(A^2) = \delta(A)A + A\delta(A)$ ，
那么称 δ 是一个 Jordan 导子。

下面介绍 Jordan 导子的等价定义：

如果线性映射 δ 满足：对于任意的 $A, B \in \mathcal{A}$ ，都有 $\delta(A \circ B) = \delta(A) \circ B + A \circ \delta(B)$ 。

其中， $A \circ B = AB + BA$ 称为 A 和 B 的 Jordan 积，那么称 δ 是一个 Jordan 导子。

Jordan 导子等价定义的验证过程如下：

如果对于任意的 $A, B \in \mathcal{A}$ ，都有

$$\delta(A \circ B) = \delta(A) \circ B + A \circ \delta(B),$$

则有

$$\delta(A \circ A) = \delta(A) \circ A + A \circ \delta(A),$$

从而立即可以得到

$$\delta(A^2) = \delta(A)A + A\delta(A).$$

反之亦然，如果对于任意的 $A \in \mathcal{A}$ ，

$$\delta(A^2) = \delta(A)A + A\delta(A),$$

则有

$$\delta(B^2) = \delta(B)B + B\delta(B),$$

以及

$$\delta((A+B)^2) = \delta(A+B)(A+B) + (A+B)\delta(A+B).$$

联立上述三个式子即可得出：

$$\delta(A \circ B) = \delta(A) \circ B + A \circ \delta(B).$$

定义 1.9 Lie 导子

如果线性映射 δ 满足：对于任意的 $A, B \in \mathcal{A}$ ，都有 $\delta([A, B]) = [\delta(A), B] + [A, \delta(B)]$ ，其中， $[A, B] = AB - BA$ 称为 A 和 B 的 Lie 积，那么称 δ 是一个 Lie 导子。

注：导子一定是个 Lie 导子。

验证过程如下：

设 δ 是一个导子，则有

$$\begin{aligned} [\delta(A), B] + [A, \delta(B)] &= \delta(A)B - B\delta(A) + A\delta(B) - \delta(B)A \\ &= \delta(A)B + A\delta(B) - (\delta(B)A + A\delta(B)) \\ &= \delta(AB) - \delta(BA) \\ &= \delta(AB - BA) \\ &= \delta([A, B]). \end{aligned}$$

即证明 δ 是一个 Lie 导子。

定义 1.10 标准 Lie 导子

如果 Lie 导子 δ 可以分解为： $\delta = d + \tau$ ，其中 d 是一个导子， τ 是一个 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{Z}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ 的线性映射，并且满足对于任意元素 $x, y \in \mathcal{A}$ ，都有 $\tau([x, y]) = 0$ ，这里的 $\mathcal{Z}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ 表示集合 $\{M \in \mathcal{M} : \text{对任意 } A \in \mathcal{A}, MA = AM\}$ ，那么我们将 δ 称作为一个标准 Lie 导子。

接下来，我们先给出 Lie triple 导子的定义：

如果线性映射 δ 满足：对于任意的 $A, B, C \in \mathcal{A}$ ，满足 $\delta([[A, B], C]) = [[\delta(A), B], C] + [[A, \delta(B)], C] + [[A, B], \delta(C)]$ ，那么称 δ 是一个 Lie triple 导子。

下面，我们用递归的方式给出 Lie n -重导子的定义及其标准形式。

定义 1.11 Lie n-重导子

设 $p(x) = x$, $p_2(x_1, x_2) = [p(x_1), x_2]$, $p_3(x_1, x_2, x_3) = [p_2(x_1, x_2), x_3]$,

即 $p_3(x_1, x_2, x_3) = [[x_1, x_2], x_3]$, ...,

那么 $p_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = [p_{n-1}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}), x_n] = [\dots[[x_1, x_2], x_3] \dots, x_{n-1}], x_n]$, 其中,

$[\dots[[x_1, x_2], x_3] \dots, x_{n-1}], x_n]$ 称为 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的 n 重 Lie 积。

如果线性映射 δ 满足

$$\delta(p_n(x_1, x_2, \dots, x_n)) = p_n(\delta(x_1), x_2, \dots, x_n) + p_n(x_1, \delta(x_2), \dots, x_n) + \dots + p_n(x_1, x_2, \dots, \delta(x_n))$$

$$= \sum_{i=1}^n p_n(x_1, x_2, \dots, \delta(x_i), \dots, x_n),$$

那么称 δ 是一个 Lie n-重导子。

定义 1.12 标准 Lie n-重导子

如果 Lie n-重导子 δ 可以分解为: $\delta = d + \tau$, 其中, d 是一个 $\mathcal{A}$ 上的导子, τ 是一个 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{Z}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ 的线性映射, 这里的 $\mathcal{Z}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ 表示集合 $\{M \in \mathcal{M}: \text{对任意 } A \in \mathcal{A}, MA = AM\}$ 。并且满足对于任意元素 $C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathcal{X}$, 都有 $\tau(p_n(C_1, C_2, \dots, C_n)) = 0$ 。那么我们将 δ 称为一个标准 Lie n-重导子。

2.2 预备知识

设 $\mathcal{A}$ 是一个 C^* -代数, $\mathcal{M}$ 是一个左 $\mathcal{A}$ -模, 如果存在一个映射

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$$

满足以下几条:

- (1) $\langle x, x \rangle \geq 0$, 并且 $\langle x, x \rangle = 0$ 当且仅当 $x = 0$,
- (2) $\langle \lambda x + y, z \rangle = \langle \lambda x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,
- (3) $\langle ax, y \rangle = a \langle x, y \rangle$,
- (4) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*$,

其中 $\lambda \in C, a \in \mathcal{A}, x, y, z \in \mathcal{M}$, 则称 $\mathcal{M}$ 是一个 Pre-Hilbert $\mathcal{A}$ -模。映射 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 称为 $\mathcal{A}$ -

值的内积。 $\mathcal{A}$ -值的内积诱导一个 $\mathcal{M}$ 中的范数： $\|x\|=\|\langle x,x\rangle\|^{1/2}$ 。若 $\mathcal{M}$ 关于此范数完备，则称是一个 Hilbert $\mathcal{A}$ -模（或者更确切的说， $\mathcal{A}$ 上的 Hilbert C^* -模）。

将所有形如 $\langle x, y \rangle$, $x, y \in \mathcal{M}$ 的元素的闭线性扩张记作 $\langle \mathcal{M}, \mathcal{M} \rangle$ ，若 $\langle \mathcal{M}, \mathcal{M} \rangle = \mathcal{A}$ ，则称 $\mathcal{M}$ 是一个满的 Hilbert $\mathcal{A}$ -模。设一个线性映射 $T: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ ，如果对于任意元素 $a \in \mathcal{A}, x \in \mathcal{M}$ ，等式 $T(ax) = aT(x)$ 恒成立，那么就称 T 是一个 $\mathcal{A}$ -线性的映射。 $\mathcal{M}$ 上的一个有界 $\mathcal{A}$ -线性映射称为一个 $\mathcal{M}$ 上的算子。 $\mathcal{M}$ 上的算子全体记作 $End_{\mathcal{A}}(\mathcal{M})$ 。由前辈们的研究结论以及 $End_{\mathcal{A}}(\mathcal{M})$ 性质可知 $End_{\mathcal{A}}(\mathcal{M})$ 是 Banach 代数。

设 $\mathcal{A}$ 是一个交换的 C^* -代数，给定 $\mathcal{A}$ 中的一个元素 a ，可以定义 $\mathcal{M}$ 到自身的一个映射 T_a 如下：对任意的 $x \in \mathcal{M}$ ，令 $T_a(x) = ax$ ，显然 $T_a \in End_{\mathcal{A}}(\mathcal{M})$ 。值得注意的是，如果 $\mathcal{A}$ 不是交换的，那么 T_a 不是 $\mathcal{A}$ -线性的，当然也就不在 $End_{\mathcal{A}}(\mathcal{M})$ 中。

下面的引理参见[14]中的引理 1.4

2.3 基本引理

引理 2.3.1

设 $\mathcal{A}$ 是一个含单位 e 的交换的 C^* -代数， $\mathcal{M}$ 是一个满的 Hilbert $\mathcal{A}$ -模，则 $End_{\mathcal{A}}(\mathcal{M})$ 的中心 $\mathcal{Z}(End_{\mathcal{A}}(\mathcal{M})) = \{T_a : a \in \mathcal{A}\} = \{aI : a \in \mathcal{A}\}$ ，其中 I 是 $End_{\mathcal{A}}(\mathcal{M})$ 中的单位。

设线性映射 $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ ，如果对于任意元素 $a \in \mathcal{A}, x \in \mathcal{M}$ ，等式 $f(ax) = af(x)$ 恒成立，那么则称 f 是一个 $\mathcal{A}$ -线性的映射。 $\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{A}$ 的有界 $\mathcal{A}$ -线性映射全体记作 $\mathcal{M}'$ ，给定 $x \in \mathcal{M}, f \in \mathcal{M}'$ ，可以定义一个线性映射 $\theta_{x,f}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ ，对任意的 $y \in \mathcal{M}$ ，令 $\theta_{x,f}y = f(y)x$ ，显然 $\theta_{x,f} \in End_{\mathcal{A}}(\mathcal{M})$ 。

下面的结论是基础且重要的，在正文中我们会反复引用，但不在注明，其证明可以参考文献[37]。

引理 2.3.2

设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{C}^*$ -代数 $\mathcal{A}$ 上的 Hilbert $\mathcal{C}^*$ -模，对任意的 $a \in \mathcal{A}, x, y \in \mathcal{M}, f, g \in \mathcal{M}', A \in \text{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M})$,

$$(1) \quad \theta_{x,f}A = \theta_{x,f \circ A},$$

$$(2) \quad A\theta_{x,f} = \theta_{Ax,f},$$

$$(3) \quad \text{如果 } \mathcal{A} \text{ 是一个交换的 } \mathcal{C}^*\text{-代数, 则 } \theta_{x,f}\theta_{y,g} = f(y)\theta_{x,g}, \theta_{ax,f} = a\theta_{x,f}.$$

第 3 章 Hilbert C*-模算子代数上 Lie 导子的标准性

3.1 引言

1953 年, 为研究交换的 C*-代数, 学者 I.Kaplansky 首次提出了 Hilbert C*-模这个概念。后来在 1974 年, 学者 M.A.Rieffel 考虑到了非交换 C*-代数上的 Hilbert C*-模。现在使用的 Hilbert C*-模的概念源于 W.L Paschke 于 1973 年引入。Hilbert C*-模理论在研究算子代数领域具有举足轻重的地位, Hilbert C*-模理论的深远影响不仅体现在指标理论、自由概率论方面, 还进一步拓展到量子群及其他方面的研究中, 为这些领域带来了重要的应用和研究价值。

设 $\mathcal{A}$ 是一个 C*-代数, $\mathcal{M}$ 是一个左 $\mathcal{A}$ -模, 如果 $\mathcal{M}$ 关于 $\mathcal{A}$ -值内积诱导一个 $\mathcal{M}$ 中范数完备, 则称 $\mathcal{M}$ 是一个 Hilbert $\mathcal{A}$ -模 (或者更确切的说, $\mathcal{A}$ 上的 Hilbert C*-模)。

设 $\mathcal{A}$ 是数域 $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$) 上的代数, $\mathcal{M}$ 是一个 $\mathcal{A}$ -双边模, 若线性映射 δ 满足: 对于任意的 $A, B \in \mathcal{A}$, 都有 $\delta([A, B]) = [\delta(A), B] + [A, \delta(B)]$, 其中, $[A, B] = AB - BA$ 称为 A 和 B 的 Lie 积, 那么称 δ 是一个 Lie 导子。

如果 Lie 导子 δ 可以分解为: $\delta = d + \tau$, 其中 d 是一个导子, τ 是一个 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{Z}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ 的线性映射, 并且满足对于任意元素 $x, y \in \mathcal{A}$, 都有 $\tau([x, y]) = 0$, 这里的 $\mathcal{Z}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ 表示集合 $\{M \in \mathcal{M}: \text{对任意 } A \in \mathcal{A}, MA = AM\}$, 那么我们将 δ 称作为一个标准 Lie 导子。

3.2 Hilbert C*-模上 Lie 导子的标准性

定理 3.1 设 $\mathcal{A}$ 是一个含单位 e 的交换的 C*-代数, $\mathcal{M}$ 是一个满 Hilbert $\mathcal{A}$ -模。如果存在 $x_0 \in \mathcal{M}$, $f_0 \in \mathcal{M}'$, 使得 $f_0(x_0) = e$, 则 $End_{\mathcal{A}}(\mathcal{M})$ 上的每个 $\mathcal{A}$ -线性 Lie 导子都是标准的。

在展开叙述之前，我们先对所使用的符号进行明确和解释，以便于读者理解文章内容。用 $\mathcal{X}$ 表示 $End_{\mathcal{A}}(\mathcal{M})$ ， δ 是 $\mathcal{X}$ 上的一个 $\mathcal{A}$ -线性 Lie 导子， $\mathcal{Z}(\mathcal{X})$ 表示 $\mathcal{X}$ 的中心， I 表示 $\mathcal{X}$ 中的单位算子。设 $P_1 = \theta_{x_0, f_0}$ 和 $P_2 = I - P_1$ ，容易看出 P_1, P_2 是 $\mathcal{X}$ 中的两个幂等元。将 $P_i \mathcal{X} P_j$ 记作 $\mathcal{X}_{ij}$ ，则 $\mathcal{X}$ 可以分解成 $\sum_{1 \leq i, j \leq 2} \mathcal{X}_{i,j}$ 。相应地， $\mathcal{X}$ 中的每个元素 A 可以分解成 $\sum_{1 \leq i, j \leq 2} A_{i,j}$ ，其中， $A_{i,j} = P_i A P_j \in \mathcal{X}_{i,j}$ 。

在证明定理 3.1 之前，我们先证明以下几个引理。

引理 3.2 对于任意的 $A \in \mathcal{X}$ ， $P_1 A P_1 = f_0(Ax_0)P_1 = f_0(P_1 A P_1 x_0)P_1$ ，并且 $\mathcal{X}_{11}$ 是可交换的。

证明：对于任意的 $A \in \mathcal{X}$ ，根据引理得

$$P_1 A P_1 = \theta_{x_0, f_0} A \theta_{x_0, f_0} = f_0(Ax_0) \theta_{x_0, f_0} = f_0(Ax_0) P_1.$$

用 $P_1 A P_1$ 代替上式中 A 可得，

$$P_1 A P_1 = P_1 P_1 A P_1 P_1 = f_0(P_1 A P_1 x_0) P_1.$$

因为 $f_0(Ax_0)$ 属于 $\mathcal{A}$ ，所以 $\mathcal{X}_{11}$ 是可交换的。

引理 3.3 $P_1 \delta(P_1) P_1 + P_2 \delta(P_1) P_2 \in \mathcal{Z}(\mathcal{X})$ 。

证明：由引理 3.2 可知 $P_1 \delta(P_1) P_1 = a P_1$ ，其中 $a = f_0(P_1 \delta(P_1) P_1 x_0)$ ，

对任意的 $x \in \mathcal{M}$ ，有

$$\begin{aligned} \delta(P_2 \theta_{x, f_0} P_1) &= \delta([P_2, P_2 \theta_{x, f_0} P_1]) \\ &= [\delta(P_2), P_2 \theta_{x, f_0} P_1] + [P_2, \delta(P_2 \theta_{x, f_0} P_1)] \\ &= \delta(P_2) P_2 \theta_{x, f_0} P_1 - P_2 \theta_{x, f_0} P_1 \delta(P_2) + P_2 \delta(P_2 \theta_{x, f_0} P_1) - \delta(P_2 \theta_{x, f_0} P_1) P_2 \quad (3-1) \end{aligned}$$

将 (3-1) 式左乘 P_2 右乘 P_1 得

$$P_2 \delta(P_2) P_2 \theta_{x, f_0} P_1 = P_2 \theta_{x, f_0} P_1 \delta(P_2) P_1. \quad (3-2)$$

将 (3-2) 式作用在 x_0 上，可以得到

$$f_0(P_1 x_0) P_2 \delta(P_2) P_2 x = f_0(P_1 \delta(P_2) P_1 x_0) P_2 x.$$

注意到 $f_0(P_1x_0) = f_0(x_0) = e$,

因而 $P_2\delta(P_2)P_2 = f_0(P_1\delta(P_2)P_1x_0)P_2$.

因为 δ 是 $\mathcal{X}$ 上的 Lie 导子, 容易验证 $\delta(I) \in \mathcal{Z}(\mathcal{X})$, 进而用 $\delta(P_2) = \delta(I) - \delta(P_1)$ 代入上式中, 结合前面的引理即可得到

$$P_2\delta(P_1)P_2 = f_0(P_1\delta(P_1)P_1x_0)P_2 = aP_2.$$

因此 $P_1\delta(P_1)P_1 + P_2\delta(P_1)P_2 = a(P_1 + P_2) = aI$.

所以得证 $P_1\delta(P_1)P_1 + P_2\delta(P_1)P_2 \in \mathcal{Z}(\mathcal{X})$.

设 $G = P_1\delta(P_1)P_2 - P_2P_1\delta(P_1)$, 定义 $\mathcal{X}$ 上的一个映射 Δ 如下: 对于任意 $A \in \mathcal{X}$,

$$\Delta(A) = \delta(A) - [A, G].$$

显然, Δ 也是 $\mathcal{X}$ 上的一个 $\mathcal{A}$ -线性 Lie 导子. 并且根据前面的引理可知

$$\Delta(P_1) = \delta(P_1) - [P_1, G] = P_1\delta(P_1)P_1 + P_2\delta(P_1)P_2 \in \mathcal{Z}(\mathcal{X}).$$

下面我们进一步探究 Δ 的一些性质。

引理 3.4 $\Delta(\mathcal{X}_{ij}) \subseteq \mathcal{X}_{ij}$, 其中 $1 \leq i, j \leq 2$, 并且 $i \neq j$ 。

证明: 因为 $\Delta(P_1) \in \mathcal{Z}(\mathcal{X})$, 对于任意的 $A_{12} \in \mathcal{X}_{12}$, 有

$$\begin{aligned} \Delta(A_{12}) &= \Delta([P_1, A_{12}]) \\ &= [\Delta(P_1), A_{12}] + [P_1, \Delta(A_{12})] \\ &= [P_1, \Delta(A_{12})] \\ &= P_1\Delta(A_{12}) - \Delta(A_{12})P_1 \\ &= P_1\Delta(A_{12})(P_1 + P_2) - (P_1 + P_2)\Delta(A_{12})P_1 \\ &= P_1\Delta(A_{12})P_2 - P_2\Delta(A_{12})P_1. \end{aligned} \tag{3-3}$$

将 (3-3) 式左乘 P_2 , 右乘 P_1 , 可得 $P_2\Delta(A_{12})P_1 = 0$, 因此对于任意的 $A_{12} \in \mathcal{X}_{12}$, 有

$$\Delta(A_{12}) = P_1\Delta(A_{12})P_2 \in \mathcal{X}_{12},$$

同理对于任意的 $A_{21} \in \mathcal{X}_{21}$,

我们能够得 $\Delta(A_{21}) = \Delta([A_{21}, P_1]) = P_2 \Delta(A_{21}) P_1 \in \mathcal{X}_{21}$.

引理 3.5 $\Delta(\mathcal{X}_{11}) \subseteq \mathcal{Z}(\mathcal{X})$.

证明：对于任意的 $A_{11} \in \mathcal{X}_{11}$ ，由前面的引理可得

$$\Delta(A_{11}) = \Delta(P_1 A_{11} P_1) = \Delta(f_0(A_{11} x_0) P_1) = f_0(A_{11} x_0) \Delta(P_1).$$

因为 $\Delta(P_1) \in \mathcal{Z}(\mathcal{X})$ 以及 $f_0(A_{11} x_0) \in \mathcal{A}$,

所以得证 $\Delta(A_{11}) \subseteq \mathcal{Z}(\mathcal{X})$.

引理 3.6 对任意的 $A_{22} \in \mathcal{X}_{22}$ ， $\Delta(A_{22}) - f_0(\Delta(A_{22}) x_0) I \in \mathcal{X}_{22}$ ，特别地 $\Delta(P_2) = f_0(\Delta(P_2) x_0) I$.

证明：通过简单的计算，我们有

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta([P_1, [P_1, A_{22}]]) \\ &= [P_1, \Delta([P_1, A_{22}])] \\ &= [P_1, [P_1, \Delta(A_{22})]] \\ &= P_1 \Delta(A_{22}) P_2 + P_2 \Delta(A_{22}) P_1. \end{aligned}$$

因此 $\Delta(A_{22}) = \mathcal{X}_{11} + \mathcal{X}_{22}$ ，由前面的引理 3.2，我们能得到

$$\Delta(A_{22}) = P_1 \Delta(A_{22}) P_1 + P_2 \Delta(A_{22}) P_2 = f_0(\Delta(A_{22}) x_0) P_1 + P_2 \Delta(A_{22}) P_2,$$

进而有

$$\Delta(A_{22}) - f_0(\Delta(A_{22}) x_0) I = -f_0(\Delta(A_{22}) x_0) P_2 + P_2 \Delta(A_{22}) P_2 \in \mathcal{X}_{22}.$$

因为 $\Delta(P_2) = \Delta(I) - \Delta(P_1) \in \mathcal{Z}(\mathcal{X})$,

所以可得

$$\Delta(P_2) - f_0(\Delta(P_2) x_0) I \in \mathcal{Z}(\mathcal{X}) \cap \mathcal{X}_{22} = \{0\},$$

因此 $\Delta(P_2) = f_0(\Delta(P_2) x_0) I$.

下面，我们来证明定理 3.1

我们定义 $\mathcal{X}$ 上的两个映射 τ 和 D 如下：对于任意的 $A \in \mathcal{X}$ ，

$$\tau(A) = f_0(P_1 A P_1 x_0) \Delta(P_1) + f_0(\Delta(P_2 A P_2) x_0) I$$

和

$$D(A) = \Delta(A) - \tau(A).$$

易知 τ 是从 $\mathcal{X}$ 到 $\mathcal{Z}(\mathcal{X})$ 的一个 $\mathcal{A}$ -线性映射， D 是 $\mathcal{X}$ 上的一个 $\mathcal{A}$ -线性映射。此外，根据前面的引理以及 τ 和 D 定义我们有：

(1) 对任意的 $A_{ij} \in \mathcal{X}_{ij}$ 有 $D(A_{ij}) = \Delta(A_{ij}) \in \mathcal{X}_{ij}$ ，其中 $1 \leq i, j \leq 2$ ，并且 $i \neq j$ ，

(2) $D(P_1) = D(P_2) = D(I) = 0$ ，

(3) 对任意的 $A_{11} \in \mathcal{X}_{11}$, $D(A_{11}) = 0$ ，

(4) 对任意的 $A_{22} \in \mathcal{X}_{22}$, $D(A_{22}) = \mathcal{X}_{22}$ ，

为了证明 Δ 是标准的，只需证明 D 是 $\mathcal{X}$ 上的导子以及对于任意的 $A, B \in \mathcal{X}$ ，

有 $\tau([A, B]) = 0$ 即可。

下面进行证明：对任意的 $A_{ij} \in \mathcal{X}_{ij}, B_{sk} \in \mathcal{X}_{sk}$ ，

$$D(A_{ij} B_{sk}) = D(A_{ij}) B_{sk} + A_{ij} D(B_{sk})$$

其中 $1 \leq i, j, s, k \leq 2$ 。

因为 $D(\mathcal{X}_{ij}) \subseteq \mathcal{X}_{ij}$ ，对于 $j \neq s$ ，显然有

$$D(A_{ij} B_{sk}) = 0, \quad D(A_{ij} B_{sk}) = 0 = D(A_{ij}) B_{sk} + A_{ij} D(B_{sk}).$$

因此我们仅需要证明以下 8 种情形：

$$(1) \quad D(A_{11} B_{11}) = D(A_{11}) B_{11} + A_{11} D(B_{11})$$

$$(2) \quad D(A_{11} B_{12}) = D(A_{11}) B_{12} + A_{11} D(B_{12})$$

$$(3) \quad D(A_{11} B_{22}) = D(A_{11}) B_{22} + A_{11} D(B_{22})$$

$$(4) \quad D(A_{21} B_{11}) = D(A_{21}) B_{11} + A_{21} D(B_{11})$$

$$(5) \quad D(A_{22} B_{21}) = D(A_{22}) B_{21} + A_{22} D(B_{21})$$

$$(6) \quad D(A_{22}B_{22}) = D(A_{22})B_{22} + A_{22}D(B_{22})$$

$$(7) \quad D(A_{12}B_{21}) = D(A_{12})B_{21} + A_{12}D(B_{21})$$

$$(8) \quad D(A_{21}B_{12}) = D(A_{21})B_{12} + A_{21}D(B_{12})$$

情形 (1) 是显然的, 因为对任意的 $A_{11} \in \mathcal{X}_{11}$, 有 $D(A_{11}) = 0$.

对于任意的 $A, B \in \mathcal{X}$, 由 $\Delta(A) - D(A) = \tau(A) \in \mathcal{Z}(\mathcal{X})$, 我们有 $[\Delta(A), B] = [D(A), B]$,

因此对任意的 $A_{11} \in \mathcal{X}_{11}$ 和 $B_{12} \in \mathcal{X}_{12}$,

$$\begin{aligned} D(A_{11}B_{12}) &= \Delta(A_{11}B_{12}) \\ &= \Delta([A_{11}, B_{12}]) \\ &= [\Delta(A_{11}), B_{12}] + [A_{11}, \Delta(B_{12})] \\ &= [D(A_{11}), B_{12}] + [A_{11}, D(B_{12})] \\ &= D(A_{11})B_{12} + A_{11}D(B_{12}). \end{aligned}$$

因此情形 (2) 成立。情形 (3)、(4)、(5) 和情形 (2) 类似, 证明从略。

对任意的 $C_{21} \in \mathcal{X}_{21}$, 根据情形 (5) 的结论, 我们有以下两个等式:

对任意的 $A_{22}, B_{22} \in \mathcal{X}_{22}$,

$$D(A_{22}B_{22}C_{21}) = D(A_{22}B_{22})C_{21} + A_{22}B_{22}D(C_{21}),$$

以及

$$\begin{aligned} D(A_{22}B_{22}C_{21}) &= D(A_{22})B_{22}C_{21} + A_{22}D(B_{22}C_{21}) \\ &= D(A_{22})B_{22}C_{21} + A_{22}D(B_{22})C_{21} + A_{22}B_{22}D(C_{21}). \end{aligned}$$

比较上面两个等式, 可以得出

$$D(A_{22}B_{22})C_{21} = D(A_{22})B_{22}C_{21} + A_{22}D(B_{22})C_{21},$$

所以对任意的 $C_{21} \in \mathcal{X}_{21}$, $TC_{21} = 0$, 其中 $T = D(A_{22}B_{22}) - D(A_{22})B_{22} - A_{22}D(B_{22})$.

令 $C_{21} = P_2\theta_{x, f_0}P_1$, 其中 x 是 $\mathcal{M}$ 中的任意一个元素, 由

$$0 = TP_2\theta_{x, f_0}P_1x_0 = f_0(P_1x_0)TP_2x = TP_2x$$

可得 $TP_2 = 0$.

又因为 $T \in \mathcal{X}_{22}$, 所以 $T = TP_2 = 0$, 即情形(6)成立。

最后, 证明情形(7)和(8)。

任取 $\mathcal{X}_{12}$ 中的一个元素 A_{12} 和 $\mathcal{X}_{21}$ 中的元素 B_{21} , 通过简单的计算, 我们能得到

$$\begin{aligned}
 & \Delta([A_{12}, B_{21}]) - D([A_{12}, B_{21}]) \\
 &= [\Delta(A_{12}), B_{21}] + [A_{12}, \Delta(B_{21})] - D([A_{12}, B_{21}]) \\
 &= [D(A_{12}), B_{21}] + [A_{12}, D(B_{21})] - D([A_{12}, B_{21}]) \\
 &= [D(A_{12}), B_{21}] + [A_{12}, D(B_{21})] - D(A_{12}B_{21} - B_{21}A_{12}) \\
 &= D(A_{12})B_{21} - B_{21}D(A_{12}) + A_{12}D(B_{21}) - D(B_{21})A_{12} - D(A_{12}B_{21}) + D(B_{21}A_{12}) \\
 &= (D(A_{12})B_{21} + A_{12}D(B_{21}) - D(A_{12}B_{21})) + (D(B_{21}A_{12}) - B_{21}D(A_{12}) - D(B_{21})A_{12}).
 \end{aligned}$$

因为 $\Delta([A_{12}, B_{21}]) - D([A_{12}, B_{21}]) = \tau([A_{12}, B_{21}])$ 属于 $\mathcal{Z}(\mathcal{X})$,

由前面的引理知存在 $\lambda \in \mathcal{A}$, 使得

$$\Delta([A_{12}, B_{21}]) - D([A_{12}, B_{21}]) = \lambda I ,$$

即

$$\begin{aligned}
 \lambda I &= D(A_{12})B_{21} + A_{12}D(B_{21}) - D(A_{12}B_{21}) \\
 &\quad + D(B_{21}A_{12}) - D(B_{21})A_{12} - B_{21}D(A_{12}) .
 \end{aligned}$$

因为 $D(\mathcal{X}_{ij}) \subseteq \mathcal{X}_{ij}$, 所以有

$$D(A_{12})B_{21} + A_{12}D(B_{21}) - D(A_{12}B_{21}) \in \mathcal{X}_{11} ,$$

及

$$D(B_{21}A_{12}) - D(B_{21})A_{12} - B_{21}D(A_{12}) \in \mathcal{X}_{22} .$$

用 P_1 , P_2 分别右乘上式, 可以得出:

$$D(A_{12}B_{21}) = D(A_{12})B_{21} + A_{12}D(B_{21}) - \lambda P_1 ,$$

和

$$D(B_{21}A_{12}) = D(B_{21})A_{12} + B_{21}D(A_{12}) + \lambda P_2.$$

结合情形 (2), 有

$$\begin{aligned} D(A_{12}B_{21}A_{12}) &= D(A_{12}B_{21})A_{12} + A_{12}B_{21}D(A_{12}) \\ &= D(A_{12})B_{21}A_{12} + A_{12}D(B_{21})A_{12} - \lambda A_{12} + A_{12}B_{21}D(A_{12}). \end{aligned}$$

结合情形 (3), 有

$$\begin{aligned} D(A_{12}B_{21}A_{12}) &= D(A_{12})B_{21}A_{12} + A_{12}D(B_{21}A_{12}) \\ &= D(A_{12})B_{21}A_{12} + A_{12}D(B_{21})A_{12} + A_{12}B_{21}D(A_{12}) + \lambda A_{12}. \end{aligned}$$

比较两式, 可以得出 $\lambda A_{12} = 0$, 注意到 D 是 $\mathcal{A}$ -线性的, 上面两个式子分别乘以 λ ,

可得 $\lambda^2 P_1 = \lambda^2 P_2 = 0$, 因此有 $\lambda^2 = 0$.

因为 $\mathcal{A}$ 是一个交换的 C^* -代数, $\lambda^2 = 0$ 意味着 $\lambda = 0$.

结合上述证明, 情形 (7) 和 (8) 成立。

由情形 (1) 到 (8) 的结论, 结合 D 的可加性以及 $D(A_{ij}) \in \mathcal{X}_{ij}$, 即知 D 是一个导子。

现在证明对任意的 $A, B \in \mathcal{X}$, 有 $\tau([A, B]) = 0$. 实际上,

$$\begin{aligned} \tau([A, B]) &= \Delta([A, B]) - D([A, B]) \\ &= [\Delta(A), B] + [A, \Delta(B)] - D([A, B]) \\ &= [D(A), B] + [A, D(B)] - D([A, B]) \\ &= 0 \end{aligned}$$

综上所述可知 $\Delta(A) = D(A) + \tau(A)$ 是 $\mathcal{X}$ 上的一个标准 Lie 导子。

下面将 $\mathcal{X}$ 上的一个 $\mathcal{A}$ -线性映射定义为:

对于任意元素 $A \in \mathcal{X}$: $d(A) = D(A) + [A, G]$.

因此有

$$\delta(A) = \Delta(A) + [A, G] = D(A) + \tau(A) + [A, G] = d(A) + \tau(A).$$

其中 d 是一个 $\mathcal{A}$ -线性的导子, τ 是一个从 $\mathcal{X}$ 到 $\mathcal{Z}(\mathcal{X})$ 的 $\mathcal{A}$ -线性的中心值映射, 并且对任意的 $A, B \in \mathcal{X}$, 有 $\tau([A, B]) = 0$ 。即证明 δ 是一个标准的 Lie 导子。

第 4 章 Hilbert C*-模算子代数上 Lie n- $(n \geq 2, n \in \mathbb{N}^+)$ 重导子的标准性

4.1 引言

设 $\mathcal{A}$ 是数域 $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$) 上的代数, $\mathcal{M}$ 是一个 $\mathcal{A}$ -双边模, 若线性映射 δ 满足: 对于任意的 $A, B \in \mathcal{A}$, 都有 $\delta([A, B]) = [\delta(A), B] + [A, \delta(B)]$, 其中, $[A, B] = AB - BA$ 称为 A 和 B 的 Lie 积, 那么称 δ 是一个 Lie 导子。

我们先给出下列定义:

$$p(x) = x,$$

$$p_2(x_1, x_2) = [p(x_1), x_2],$$

$$p_3(x_1, x_2, x_3) = [p_2(x_1, x_2), x_3], \text{ 即 } p_3(x_1, x_2, x_3) = [[x_1, x_2], x_3], \dots,$$

那么 $p_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = [p_{n-1}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}), x_n] = [\dots[[x_1, x_2], x_3] \dots, x_{n-1}], x_n]$, 其中, $[\dots[[x_1, x_2], x_3] \dots, x_{n-1}], x_n]$ 称为 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的 n 重 Lie 积。

如果线性映射 δ 满足:

$$\delta(p_n(x_1, x_2, \dots, x_n)) = p_n(\delta(x_1), x_2, \dots, x_n) + p_n(x_1, \delta(x_2), \dots, x_n) + \dots + p_n(x_1, x_2, \dots, \delta(x_n))$$

$$= \sum_{i=1}^n p_n(x_1, x_2, \dots, \delta(x_i), \dots, x_n).$$

那么称 δ 是一个 Lie n-重导子。

如果 Lie n-重导子 δ 可以分解为: $\delta = d + \tau$, 其中, d 是一个 $\mathcal{A}$ 上的导子, τ 是一个 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{Z}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ 的线性中心值映射, 这里的 $\mathcal{Z}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ 表示集合 $\{M \in \mathcal{M}: \text{对任意 } A \in \mathcal{A}, MA = AM\}$ 。并且满足对于任意元素 $C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathcal{X}$, 都有 $\tau(p_n(C_1, C_2, \dots, C_n)) = 0$ 。那么将 δ 称为一个标准 Lie n-重导子。

4.2 Hilbert C^* -模上 Lie n -重导子的标准性

定理 4.1 设 $\mathcal{A}$ 是一个含单位 e 的交换的 C^* -代数, $\mathcal{M}$ 是一个满的 Hilbert $\mathcal{A}$ -模。如果存在 $x_0 \in \mathcal{M}$, $f_0 \in \mathcal{M}'$, 使得 $f_0(x_0) = e$, 则 $End_{\mathcal{A}}(\mathcal{M})$ 上的每个 $\mathcal{A}$ -线性 Lie n -重导子都是标准的。

在展开叙述之前, 我们先对所使用的符号进行明确和解释, 以便于读者理解文章内容。用 $\mathcal{X}$ 表示 $End_{\mathcal{A}}(\mathcal{M})$, δ 是 $\mathcal{X}$ 上的一个 $\mathcal{A}$ -线性 Lie n -重导子, $\mathcal{Z}(\mathcal{X})$ 表示 $\mathcal{X}$ 的中心, I 表示 $\mathcal{X}$ 中的单位算子。设 $P_1 = \theta_{x_0, f_0}$ 和 $P_2 = I - P_1$, 容易看出 P_1, P_2 是 $\mathcal{X}$ 中的两个幂等元。将 $P_i \mathcal{X} P_j$ 记作 $\mathcal{X}_{ij}$, 则 $\mathcal{X}$ 可以分解成 $\sum_{1 \leq i, j \leq 2} \mathcal{X}_{ij}$, 相应地, $\mathcal{X}$ 中的每个元素 A 可以分解成 $\sum_{1 \leq i, j \leq 2} A_{ij}$, 其中, $A_{ij} = P_i A P_j \in \mathcal{X}_{ij}$ 。

下面给出几个引理的证明过程。

引理 4.2 (1) 如果对于任意的 $A_{21} \in \mathcal{X}_{21}$, $BA_{21} = 0$, 那么 $BP_2 = 0$ 。

(2) 如果对于任意的 $A_{12} \in \mathcal{X}_{12}$, $A_{12}B = 0$, 那么 $P_2B = 0$ 。

证明: (1) 记 $A_{21} = P_2 \theta_{x, f_0} P_1$, 其中 x 是 $\mathcal{M}$ 中的任意元素,

$$\text{则 } BA_{21}x_0 = BP_2 \theta_{x, f_0} P_1 x_0 = BP_2 f_0(P_1 x_0)x = 0.$$

注意到 $f_0(P_1 x_0) = f_0(x_0) = e$,

所以我们有 $BP_2 x = 0$, 即 $BP_2 = 0$ 。

记 $A_{12} = P_1 \theta_{x_0, f} P_2$, 其中 f 是 $\mathcal{M}'$ 中的任意元素, x 是 $\mathcal{M}$ 中的任意元素,

$$\text{那么 } A_{12}Bx = P_1 \theta_{x_0, f} P_2 Bx = f(P_2 Bx)P_1 x_0 = f(P_2 Bx)x_0 = 0,$$

即可证明 $P_2B = 0$ 。

引理 4.3 $\delta(I) \in \mathcal{Z}(\mathcal{X})$ 。

证明: 对于 $\forall A_1, A_2, \dots, A_{n-1} \in \mathcal{X}$, 有 $p_n(A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, I) = 0$ 。

$$\text{所以 } 0 = \delta(p_n(A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, I))$$

$$= p_n(A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, \delta(I)) + \sum_{i=1}^{n-1} p_n(A_1, A_2, \dots, \delta(A_i), \dots, A_{n-1}, I)$$

$$= p_n(A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, \delta(I)),$$

$$\text{即} \quad [\delta(I), p_{n-1}(A_1, A_2, \dots, A_{n-1})] = [p_{n-1}(A_1, A_2, \dots, A_{n-1}), \delta(I)]$$

$$= p_n(A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, \delta(I)) = 0.$$

$$\text{记 } A_{12} = p_n(A_{12}, P_2, P_2, \dots, P_2),$$

$$\text{可得} \quad [\delta(I), A_{12}] = [\delta(I), p_{n-1}(A_{12}, P_2, \dots, P_2)] = 0.$$

$$\text{记 } A_{21} = p_n(A_{21}, P_1, P_1, \dots, P_1),$$

$$\text{可得} \quad [\delta(I), A_{21}] = [\delta(I), p_{n-1}(A_{21}, P_1, \dots, P_1)] = 0.$$

任取 $M \in \mathcal{X}$ ，由上式可知 $[M, A_{12}] = 0$ ，

$$\text{即} \quad [M_{11} + M_{12} + M_{21} + M_{22}, A_{12}] = M_{11}A_{12} + M_{21}A_{12} - A_{12}M_{21} - A_{12}M_{22} = 0.$$

结合引理 4.2 有 $M_{21} = 0$ ，

同理可得 $M_{12} = 0$ 。

结合上述证明可得 $P_1\delta(I)P_2 = P_2\delta(I)P_1 = 0$ 。

由 $[M, A_{12}] = 0$ 知 $A_{12}A_{22}M = MA_{12}A_{22} = A_{12}MA_{22}$ ，根据引理 4.2 得 $A_{22}M = P_2MA_{22}$ 。

又因为 $MA_{22} = P_2MA_{22}$ ，

所以 $[M, A_{22}] = 0$ 即 $[\delta(I), A_{22}] = 0$ ，同理可得 $[\delta(I), A_{11}] = 0$ 。

即证明 $\delta(I) \in \mathcal{Z}(\mathcal{X})$ 。

引理 4.4 $P_1\delta(P_1)P_1 + P_2\delta(P_1)P_2 \in \mathcal{Z}(\mathcal{X})$ 。

证明：由引理 3.2 可知 $P_1\delta(P_1)P_1 = aP_1$ ，其中 $a = f_0(P_1\delta(P_1)P_1x_0)$ ，

记 $A_{21} = p_n(A_{21}, P_1, P_1, \dots, P_1)$ ，

$$\delta(A_{21}) = \delta(p_n(A_{21}, P_1, P_1, \dots, P_1))$$

$$\begin{aligned}
 &= p_n(\delta(A_{21}), P_1, P_1, \dots, P_1) + p_n(A_{21}, \delta(P_1), P_1, \dots, P_1) \\
 &+ p_n(A_{21}, P_1, \delta(P_1), \dots, P_1) + \dots + p_n(A_{21}, P_1, P_1, \dots, \delta(P_1)) \\
 &= p_n(\delta(A_{21}), P_1, P_1, \dots, P_1) + p_n(A_{21}, \delta(P_1), P_1, \dots, P_1) \\
 &+ p_{n-1}(A_{21}, \delta(P_1), P_1, \dots, P_1) + \dots + p_2(A_{21}, \delta(P_1))
 \end{aligned}$$

$$\text{因为 } p_n(A, P_1, P_1, \dots, P_1) = \begin{cases} P_2 A P_1 - P_1 A P_2, n=2k, k=1, 2, 3, \dots \\ P_2 A P_1 + P_1 A P_2, n=2k+1, k=1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (4-1)$$

$$\text{令 } B = p_2(A_{21}, \delta(P_1)),$$

当 $n=2k+1$ 时,

$$\begin{aligned}
 &\delta(A_{21}) \\
 &= P_2 \delta(A_{21}) P_1 + P_1 \delta(A_{21}) P_2 + p_{n-1}(B, P_1, P_1, \dots, P_1) + p_{n-2}(B, P_1, \dots, P_1) + \dots + p_2(B, P_1) + B \\
 &= P_2 \delta(A_{21}) P_1 + P_1 \delta(A_{21}) P_2 + (n-2) P_2 B P_1 - P_1 B P_2 + B \\
 &= P_2 \delta(A_{21}) P_1 + P_1 \delta(A_{21}) P_2 + (n-2)(A_{21} \delta(P_1) P_1 - P_2 \delta(P_1) A_{21}) \\
 &- P_1 (A_{21} \delta(P_1) - \delta(P_1) A_{21}) P_2 + A_{21} \delta(P_1) - \delta(P_1) A_{21} \\
 &= P_2 \delta(A_{21}) P_1 + P_1 \delta(A_{21}) P_2 + (n-2)(A_{21} \delta(P_1) P_1 - P_2 \delta(P_1) A_{21}) + A_{21} \delta(P_1) - \delta(P_1) A_{21} \quad (4-2)
 \end{aligned}$$

将 (4-2) 式左乘 P_2 , 右乘 P_1 , 可以得出

$$A_{21} \delta(P_1) P_1 = P_2 \delta(P_1) A_{21}.$$

当 $n=2k$ 时,

$$\begin{aligned}
 &\delta(A_{21}) \\
 &= P_2 \delta(A_{21}) P_1 + P_1 \delta(A_{21}) P_2 + p_{n-1}(B, P_1, P_1, \dots, P_1) + p_{n-2}(B, P_1, \dots, P_1) + \dots + p_2(B, P_1) + B \\
 &= P_2 \delta(A_{21}) P_1 + P_1 \delta(A_{21}) P_2 + (n-2) P_2 B P_1 + B \\
 &= P_2 \delta(A_{21}) P_1 + P_1 \delta(A_{21}) P_2 + (n-2)(A_{21} \delta(P_1) P_1 - P_2 \delta(P_1) A_{21}) + A_{21} \delta(P_1) - \delta(P_1) A_{21} \quad (4-3)
 \end{aligned}$$

将 (4-3) 式左乘 P_2 , 右乘 P_1 , 有

$$A_{21} \delta(P_1) P_1 = P_2 \delta(P_1) A_{21}.$$

因此对于任意的 $n(n \geq 2, n \in N^+)$, 有

$$A_{21} \delta(P_1) P_1 = P_2 \delta(P_1) A_{21}.$$

令 $A_{21} = P_2 \theta_{x, f_0} P_1, \forall x \in \mathcal{M}$, 所以有

$$P_2 \theta_{x, f_0} P_1 \delta(P_1) P_1 = P_2 \delta(P_1) P_2 \theta_{x, f_0} P_1. \quad (4-4)$$

将 (4-4) 式作用在 x_0 上, 有

$$P_2 \delta(P_1) P_2 f_0(P_1 x_0) x = P_2 f_0(P_1 \delta(P_1) P_1 x_0) x.$$

已知 $f_0(P_1 x_0) = f_0(x_0) = e$,

所以可得 $P_2 \delta(P_1) P_2 = f_0(P_1 \delta(P_1) P_1 x_0) P_2$,

故有 $P_2 \delta(P_1) P_2 = f_0(P_1 \delta(P_1) P_1 x_0) P_2 = a P_2$.

即证 $P_1 \delta(P_1) P_1 + P_2 \delta(P_1) P_2 = a P_1 + a P_2 = a I \in \mathcal{Z}(\mathcal{X})$.

设 $G = P_1 \delta(P_1) P_2 - P_2 P_1 \delta(P_1)$, 定义 $\mathcal{X}$ 上的一个映射 Δ 如下: 对于任意 $A \in \mathcal{X}$

$$\Delta(A) = \delta(A) - [A, G].$$

显然, Δ 也是 $\mathcal{X}$ 上的一个 $\mathcal{A}$ -线性 Lie n -重导子, 并且 $\Delta(I) = \delta(I) \in \mathcal{Z}(\mathcal{X})$, 以及

根据前面的引理可知

$$\Delta(P_1) = \delta(P_1) - [P_1, G] = P_1 \delta(P_1) P_1 + P_2 \delta(P_1) P_2 \in \mathcal{Z}(\mathcal{X}).$$

下面我们进一步探究 Δ 的一些性质。

引理 4.5 $\Delta(\mathcal{X}_{ij}) \subseteq \mathcal{X}_{ij}$, 其中 $1 \leq i, j \leq 2$, 并且 $i \neq j$.

证明: 因为 $\Delta(P_2) = \Delta(I) - \Delta(P_1) \in \mathcal{Z}(\mathcal{X})$, 结合 (4-1) 式可得

$$p_n(A, P_2, P_2, \dots, P_2) = \begin{cases} P_1 A P_2 - P_2 A P_1, n = 2k, k = 1, 2, 3, \dots \\ P_1 A P_2 + P_2 A P_1, n = 2k + 1, k = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

所以对于任意的 $A_{12} \in \mathcal{X}_{12}$, 有

$$\begin{aligned} \Delta(A_{12}) &= \Delta(p_n(A_{12}, P_2, P_2, \dots, P_2)) \\ &= p_n(\Delta(A_{12}), P_2, P_2, \dots, P_2) + p_n(A_{12}, \Delta(P_2), P_2, \dots, P_2) + \dots + p_n(A_{12}, P_2, P_2, \dots, \Delta(P_2)) \\ &= p_n(\Delta(A_{12}), P_2, P_2, \dots, P_2) \\ &= \begin{cases} P_1(\Delta(A_{12})) P_2 - P_2(\Delta(A_{12})) P_1, n = 2k, k = 1, 2, 3, \dots \\ P_1(\Delta(A_{12})) P_2 + P_2(\Delta(A_{12})) P_1, n = 2k + 1, k = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

任取 $A_{12}, B_{12} \in \mathcal{X}_{12}$, 对任意的 $C_1, C_2, \dots, C_{n-2} \in \mathcal{X}$, 有

$$p_n(A_{12}, B_{12}, C_1, C_2, \dots, C_{n-2}) = 0.$$

所以可得出

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta(p_n(A_{12}, B_{12}, C_1, C_2, \dots, C_{n-2})) \\ &= p_n(\Delta(A_{12}), B_{12}, C_1, C_2, \dots, C_{n-2}) + p_n(A_{12}, \Delta(B_{12}), C_1, C_2, \dots, C_{n-2}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-2} p_n(A_{12}, B_{12}, C_1, C_2, \dots, C_{i-1}, \Delta(C_i), C_{i+1}, \dots, C_{n-2}) \\ &= p_n(\Delta(A_{12}), B_{12}, C_1, C_2, \dots, C_{n-2}) + p_n(A_{12}, \Delta(B_{12}), C_1, C_2, \dots, C_{n-2}) \\ &= p_{n-1}(p_2(\Delta(A_{12}), B_{12}) + p_2(A_{12}, \Delta(B_{12})), C_1, C_2, \dots, C_{n-2}). \end{aligned}$$

对任意的 $C_1, C_2, \dots, C_{n-3} \in \mathcal{X}$, 有

$$p_{n-2}(p_2(\Delta(A_{12}), B_{12}) + p_2(A_{12}, \Delta(B_{12})), C_1, C_2, \dots, C_{n-3}) = 0,$$

以此类推, 对任意的 $C_1 \in \mathcal{X}$, 有

$$p_2(p_2(\Delta(A_{12}), B_{12}) + p_2(A_{12}, \Delta(B_{12})), C_1) = 0,$$

即表示 $N = p_2(\Delta(A_{12}), B_{12}) + p_2(A_{12}, \Delta(B_{12})) \in \mathcal{Z}(\mathcal{X})$.

因为 $A_{12} = p_n(A_{12}, P_2, P_2, \dots, P_2)$, 所以

$$\begin{aligned} p_2(\Delta(A_{12}), B_{12}) &= N - p_2(A_{12}, \Delta(B_{12})) \\ &= N - p_n(A_{12}, P_2, P_2, \dots, P_2, \Delta(B_{12})) \\ &= N - \{\Delta(p_n(A_{12}, P_2, P_2, \dots, P_2, B_{12})) - p_n(\Delta(A_{12}), P_2, P_2, \dots, P_2, B_{12}) \\ &\quad - p_n(A_{12}, \Delta(P_2), P_2, \dots, P_2, B_{12}) - \dots - p_n(A_{12}, P_2, P_2, \dots, \Delta(P_2), B_{12})\} \\ &= N + p_n(\Delta(A_{12}), P_2, P_2, \dots, P_2, B_{12}). \end{aligned}$$

$n = 2k + 1$ 时,

$$\begin{aligned} &p_2(P_1 \Delta(A_{12}) P_2 + P_2 \Delta(A_{12}) P_1, B_{12}) \\ &= N + p_n(P_1 \Delta(A_{12}) P_2 + P_2 \Delta(A_{12}) P_1, P_2, P_2, \dots, P_2, B_{12}) \\ &= N + p_2(p_{n-1}(P_1 \Delta(A_{12}) P_2 + P_2 \Delta(A_{12}) P_1, P_2, P_2, \dots, P_2), B_{12}) \end{aligned}$$

$$= N + p_2(P_1\Delta(A_{12})P_2 - P_2\Delta(A_{12})P_1, B_{12}).$$

经过计算可得

$$p_2(P_2\Delta(A_{12})P_1, B_{12}) = \frac{N}{2} \in \mathcal{Z}(\mathcal{X})$$

所以

$$p_2(P_2\Delta(A_{12})P_1, B_{12}) = 0,$$

故对任意的 $B_{12} \in \mathcal{X}_{12}$, 有

$$P_2\Delta(A_{12})B_{12} = B_{12}\Delta(A_{12})P_1 = 0.$$

结合上述引理可以得出 $P_2\Delta(A_{12})P_1 = 0$.

$n=2k$ 时,

$$\begin{aligned} \Delta(A_{12}) &= \Delta(p_n(A_{12}, P_2, P_2, \dots, P_2)) \\ &= p_n(\Delta(A_{12}), P_2, P_2, \dots, P_2) + p_n(A_{12}, \Delta(P_2), P_2, \dots, P_2) \\ &\quad + \dots + p_n(A_{12}, P_2, P_2, \dots, \Delta(P_2)) \\ &= p_n(\Delta(A_{12}), P_2, P_2, \dots, P_2) \\ &= \begin{cases} P_1(\Delta(A_{12}))P_2 - P_2(\Delta(A_{12}))P_1, n=2k, k=1, 2, 3, \dots \\ P_1(\Delta(A_{12}))P_2 + P_2(\Delta(A_{12}))P_1, n=2k+1, k=1, 2, 3, \dots \end{cases} \end{aligned} \quad (4-5)$$

将 (4-5) 式左乘 P_2 , 右乘 P_1 , 可以得出 $P_2\Delta(A_{12})P_1 = 0$.

因此对于任意的 $n(n \geq 2, n \in N^+)$, 都有 $P_2\Delta(A_{12})P_1 = 0$, 结合上式, 可得

$\Delta(A_{12}) = P_1\Delta(A_{12})P_2 \in \mathcal{X}_{12}$, 即证 $\Delta(\mathcal{X}_{12}) \subseteq \mathcal{X}_{12}$.

同理, 对任意的 $A_{21} \in \mathcal{X}_{21}$, 我们可以得到 $\Delta(A_{21}) = P_2\Delta(A_{21})P_1 \in \mathcal{X}_{21}$.

引理 4.6 $\Delta(\mathcal{X}_{11}) \subseteq \mathcal{Z}(\mathcal{X})$.

证明: 对任意的 $A_{11} \in \mathcal{X}_{11}$,

$$\Delta(A_{11}) = \Delta(P_1A_{11}P_1) = \Delta(f_0(A_{11}x_0)P_1) = f_0(A_{11}x_0)\Delta(P_1)$$

已知 $\Delta(P_1) \in \mathcal{Z}(\mathcal{X})$, 且 $f_0(A_{11}x_0) \in \mathcal{A}$, 所以 $\Delta(A_{11}) \subseteq \mathcal{Z}(\mathcal{X})$.

引理 4.7 对任意的 $A_{22} \in \mathcal{X}_{22}$, $\Delta(A_{22}) - f_0(\Delta(A_{22})x_0)I \in \mathcal{X}_{22}$, 特别地

$$\Delta(P_2) = f_0(\Delta(P_2)x_0)I.$$

证明：因为 $p_n(P_1, A_{22}, P_1, P_1, \dots, P_1) = 0$,

$$\begin{aligned}
 \text{所以有} \quad 0 &= \Delta(p_n(P_1, A_{22}, P_1, P_1, \dots, P_1)) \\
 &= p_n(P_1, \Delta(A_{22}), P_1, P_1, \dots, P_1) \\
 &= \begin{cases} -P_2\Delta(A_{22})P_1 - P_1\Delta(A_{22})P_2, n=2k+1, k=1, 2, 3, \dots \\ -P_2\Delta(A_{22})P_1 + P_1\Delta(A_{22})P_2, n=2k, k=1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (4-6)
 \end{aligned}$$

因此对于任意的 $n(n \geq 2, n \in N^+)$ ，将 (4-6) 式左乘 P_1 ，右乘 P_2 ，

得 $P_1\Delta(A_{22})P_2 = 0$ ，以及 $P_2\Delta(A_{22})P_1 = 0$ ，

所以可得 $\Delta(A_{22}) \in \mathcal{X}_{11} + \mathcal{X}_{22}$ 。

结合前面的引理可知

$$\Delta(A_{22}) = P_1\Delta(A_{22})P_1 + P_2\Delta(A_{22})P_2 = f_0(\Delta(A_{22})x_0)P_1 + P_2\Delta(A_{22})P_2,$$

所以 $\Delta(A_{22}) - f_0(\Delta(A_{22})x_0)I = -f_0(\Delta(A_{22})x_0)P_2 + P_2\Delta(A_{22})P_2 \in \mathcal{X}_{22}$ ，

即证 $\Delta(A_{22}) - f_0(\Delta(A_{22})x_0)I \in \mathcal{X}_{22}$ 。

由上式知 $\Delta(P_2) - f_0(\Delta(P_2)x_0)I \in \mathcal{X}_{22}$ ，并且 $\Delta(P_2) = \Delta(I) - \Delta(P_1) \in \mathcal{Z}(\mathcal{X})$ ，

则 $\Delta(P_2) - f_0(\Delta(P_2)x_0)I \in \mathcal{X}_{22} \cap \mathcal{Z}(\mathcal{X}) = \{0\}$ 。

故可证明 $\Delta(P_2) = f_0(\Delta(P_2)x_0)I$ 。

下面，我们来证明定理 4.1

对于一切 $A \in \mathcal{X}$ ，我们定义 $\mathcal{X}$ 上的两个映射 τ 和 D 如下：

$$\tau(A) = f_0(P_1AP_1x_0)\Delta(P_1) + f_0(\Delta(P_2AP_2)x_0)I,$$

和

$$D(A) = \Delta(A) - \tau(A).$$

易知 τ 是从 $\mathcal{X}$ 到 $\mathcal{Z}(\mathcal{X})$ 的一个 $\mathcal{A}$ -线性映射， D 是 $\mathcal{X}$ 上的一个 $\mathcal{A}$ -线性映射，此外

根据定义的 τ 和 D 以及前面的引理我们可以知道下列各式：

(1) 对任意的 $A_{ij} \in \mathcal{X}_{ij}$ 有 $D(A_{ij}) = \Delta(A_{ij}) \in \mathcal{X}_{ij}$ ，其中 $1 \leq i, j \leq 2$ ，并且 $i \neq j$ ；

(2) $D(P_1) = D(P_2) = D(I) = 0$ ，

(3) 对任意的 $A_{11} \in \mathcal{X}_{11}, D(A_{11})=0$,

(4) 对任意的 $A_{22} \in \mathcal{X}_{22}, D(A_{22}) \in \mathcal{X}_{22}$,

欲证明 Δ 是标准的, 往证 D 是 $\mathcal{X}$ 上的导子以及对于任意的 $C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathcal{X}$,

有 $\tau(p_n(C_1, C_2, \dots, C_n))=0$ 即可。

下面我们进行证明: 对任意的 $A_{ij} \in \mathcal{X}_{ij}, B_{sk} \in \mathcal{X}_{sk}$, 其中 $1 \leq i, j, s, k \leq 2$

$$D(A_{ij}B_{sk}) = D(A_{ij})B_{sk} + A_{ij}D(B_{sk}).$$

因为 $D(\mathcal{X}_{ij}) \subseteq \mathcal{X}_{ij}$, 对于 $j \neq s$, 显然有

$$D(A_{ij}B_{sk}) = 0, \quad D(A_{ij})B_{sk} + A_{ij}D(B_{sk}) = 0.$$

所以 $D(A_{ij}B_{sk}) = D(A_{ij})B_{sk} + A_{ij}D(B_{sk})$.

因此我们仅需要证明以下 8 种情形:

$$(1) \quad D(A_{11}B_{11}) = D(A_{11})B_{11} + A_{11}D(B_{11})$$

$$(2) \quad D(A_{11}B_{12}) = D(A_{11})B_{12} + A_{11}D(B_{12})$$

$$(3) \quad D(A_{11}B_{22}) = D(A_{11})B_{22} + A_{11}D(B_{22})$$

$$(4) \quad D(A_{21}B_{11}) = D(A_{21})B_{11} + A_{21}D(B_{11})$$

$$(5) \quad D(A_{22}B_{21}) = D(A_{22})B_{21} + A_{22}D(B_{21})$$

$$(6) \quad D(A_{22}B_{22}) = D(A_{22})B_{22} + A_{22}D(B_{22})$$

$$(7) \quad D(A_{12}B_{21}) = D(A_{12})B_{21} + A_{12}D(B_{21})$$

$$(8) \quad D(A_{21}B_{12}) = D(A_{21})B_{12} + A_{21}D(B_{12})$$

对任意的 $A_{11} \in \mathcal{X}_{11}, D(A_{11})=0$, 所以情形 (1) 是显然成立的。

对于任意的 $A, B \in \mathcal{X}$, $\Delta(A) - D(A) = \tau(A) \in \mathcal{Z}(\mathcal{X})$, 可以得到 $[\Delta(A), B] = [D(A), B]$ 。

因此对任意的 $A_{11} \in \mathcal{X}_{11}, B_{12} \in \mathcal{X}_{12}$, 记

$$A_{11}B_{12} = (-1)^n p_n(A_{11}, B_{12}, P_1, P_1, \dots, P_1),$$

可以得出

$$\begin{aligned}
 D(A_{11}B_{12}) &= \Delta(A_{11}B_{12}) \\
 &= \Delta((-1)^n p_n(A_{11}, B_{12}, P_1, P_1, \dots, P_1)) \\
 &= (-1)^n (\Delta(p_n(A_{11}, B_{12}, P_1, P_1, \dots, P_1))) \\
 &= (-1)^n \{p_n(\Delta(A_{11}), B_{12}, P_1, P_1, \dots, P_1) + p_n(A_{11}, \Delta(B_{12}), P_1, P_1, \dots, P_1)\} \\
 &= (-1)^n \{p_{n-1}(\Delta(A_{11}), B_{12}), P_1, P_1, \dots, P_1) + p_{n-1}(A_{11}, \Delta(B_{12}), P_1, P_1, \dots, P_1)\} \\
 &= (-1)^n \{p_{n-1}(p_2(D(A_{11}), B_{12}), P_1, P_1, \dots, P_1) + p_{n-1}(A_{11}, D(B_{12}), P_1, P_1, \dots, P_1)\} \\
 &= (-1)^n \{p_{n-1}(D(A_{11})B_{12} - B_{12}D(A_{11}) + A_{11}D(B_{12}) - D(B_{12})A_{11}, P_1, P_1, \dots, P_1)\} \\
 &= (-1)^n \{p_{n-1}(D(A_{11})B_{12} + A_{11}D(B_{12}), P_1, P_1, \dots, P_1)\} \\
 &= \begin{cases} (-1)^n (-P_1(D(A_{11})B_{12} + A_{11}D(B_{12}))P_2), n=2k+1, k=1, 2, 3, \dots \\ (-1)^n (P_1(D(A_{11})B_{12} + A_{11}D(B_{12}))P_2), n=2k, k=1, 2, 3, \dots \end{cases} \\
 &= D(A_{11})B_{12} + A_{11}D(B_{12}).
 \end{aligned}$$

所以 $D(A_{11}B_{12}) = D(A_{11})B_{12} + A_{11}D(B_{12})$ ，情形（2）成立。

情形（3）、（4）、（5）和情形（2）证明类似，故证明过程略去。

对任意的 $C_{21} \in \mathcal{X}_{21}$ ，根据情形（5）的结论，我们可以得到以下两个等式：

$$D(A_{22}B_{22}C_{21}) = D(A_{22}B_{22})C_{21} + A_{22}B_{22}D(C_{21}),$$

以及

$$\begin{aligned}
 D(A_{22}B_{22}C_{21}) &= D(A_{22})B_{22}C_{21} + A_{22}D(B_{22}C_{21}) \\
 &= D(A_{22})B_{22}C_{21} + A_{22}D(B_{22})C_{21} + A_{22}B_{22}D(C_{21}).
 \end{aligned}$$

比较上面两个等式，可以得出

$$D(A_{22}B_{22})C_{21} = D(A_{22})B_{22}C_{21} + A_{22}D(B_{22})C_{21}.$$

其中 $\forall A_{22}, B_{22} \in \mathcal{X}_{22}$ 。

因此我们可以得出对任意的 $C_{21} \in \mathcal{X}_{21}$ ， $TC_{21} = 0$ ，

其中 $T = D(A_{22}B_{22}) - D(A_{22})B_{22} - A_{22}D(B_{22})$ 。

任取 $\mathcal{M}$ 中的一个元素 x ，令 $C_{21} = P_2 \theta_{x, f_0} P_1$ ，

由 $0 = TP_2 \theta_{x, f_0} P_1 x_0 = f_0(P_1 x_0) TP_2 x = TP_2 x$ ，可得 $TP_2 = 0$ 。

又因为 $T \in \mathcal{X}_{22}$ ，所以 $T = TP_2 = 0$ 故情形(6)成立。

下面，我们证明情形（7）和（8）。

任取 $\mathcal{X}_{12}$ 中的一个元素 A_{12} 和 $\mathcal{X}_{21}$ 中的元素 B_{21} ，通过计算，我们很容易得到下列式子：

$$\begin{aligned}
 & \Delta(p_n(A_{12}, P_2, P_2, \dots, P_2, B_{21})) - D(p_n(A_{12}, P_2, P_2, \dots, P_2, B_{21})) \\
 &= p_n(\Delta(A_{12}), P_2, P_2, \dots, P_2, B_{21}) + p_n(A_{12}, \Delta(P_2), P_2, \dots, P_2, B_{21}) \\
 &+ \dots + p_n(A_{12}, P_2, P_2, \dots, P_2, \Delta(B_{21})) - D(p_n(A_{12}, P_2, P_2, \dots, P_2, B_{21})) \\
 &= p_{n-1}(\Delta(A_{12}), P_2, P_2, \dots, P_2, B_{21}) + p_{n-1}(A_{12}, P_2, P_2, \dots, P_2, \Delta(B_{21})) \\
 &- D(p_{n-1}(A_{12}, P_2, P_2, \dots, P_2, B_{21})) \\
 &= p_2(\Delta(A_{12}), B_{21}) + p_2(A_{12}, \Delta(B_{21})) - D(p_2(A_{12}, B_{21})) \\
 &= p_2(D(A_{12}), B_{21}) + p_2(A_{12}, D(B_{21})) - D(A_{12}B_{21} - B_{21}A_{12}) \\
 &= (D(A_{12})B_{21} + A_{12}D(B_{21}) - D(A_{12}B_{21})) + (D(B_{21}A_{12}) - B_{21}D(A_{12}) - D(B_{21})A_{12}).
 \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}
 & \Delta(p_n(A_{12}, P_2, P_2, \dots, P_2, B_{21})) - D(p_n(A_{12}, P_2, P_2, \dots, P_2, B_{21})) \\
 &= \tau(p_n(A_{12}, P_2, P_2, \dots, P_2, B_{21})) \in \mathcal{Z}(\mathcal{X})
 \end{aligned}$$

所以存在 $\lambda \in \mathcal{A}$ ，使得

$$\Delta(p_n(A_{12}, P_2, P_2, \dots, P_2, B_{21})) - D(p_n(A_{12}, P_2, P_2, \dots, P_2, B_{21})) = \lambda I,$$

$$\text{即 } D(A_{12})B_{21} + A_{12}D(B_{21}) - D(A_{12}B_{21}) + D(B_{21}A_{12}) - D(B_{21})A_{12} - B_{21}D(A_{12}) = \lambda I.$$

因为 $D(\mathcal{X}_{i,j}) \in \mathcal{X}_{i,j}$ ，

$$\text{所以有 } D(A_{12})B_{21} + A_{12}D(B_{21}) - D(A_{12}B_{21}) \in \mathcal{X}_{11},$$

以及

$$D(B_{21}A_{12}) - D(B_{21})A_{12} - B_{21}D(A_{12}) \in \mathcal{X}_{22}.$$

用 P_1, P_2 分别右乘上式，可以得出：

$$D(A_{12}B_{21}) = D(A_{12})B_{21} + A_{12}D(B_{21}) - \lambda P_1,$$

$$D(B_{21}A_{12}) = D(B_{21})A_{12} + B_{21}D(A_{12}) + \lambda P_2.$$

结合情形 (2) 有

$$\begin{aligned} D(A_{12}B_{21}A_{12}) &= D(A_{12}B_{21})A_{12} + A_{12}B_{21}D(A_{12}) \\ &= D(A_{12})B_{21}A_{12} + A_{12}D(B_{21})A_{12} - \lambda A_{12} + A_{12}B_{21}D(A_{12}). \end{aligned}$$

结合情形 (3) 有

$$\begin{aligned} D(A_{12}B_{21}A_{12}) &= D(A_{12})B_{21}A_{12} + A_{12}D(B_{21}A_{12}) \\ &= D(A_{12})B_{21}A_{12} + A_{12}D(B_{21})A_{12} + A_{12}B_{21}D(A_{12}) + \lambda A_{12}. \end{aligned}$$

比较两式可以得出, $\lambda A_{12} = 0$, 注意到 D 是 $\mathcal{A}$ -线性的, 上面两个式子分别乘以 λ

可得 $\lambda^2 P_1 = \lambda^2 P_2 = 0$, 因此有 $\lambda^2 = 0$.

根据 $\mathcal{A}$ 是一个交换的 C^* -代数, $\lambda^2 = 0$ 即可以推出 $\lambda = 0$.

结合上述证明, 情形 (7) 和 (8) 成立。

由情形(1)到(8)的结论, 结合 D 的可加性以及 $D(A_{ij}) \in \mathcal{X}_{ij}$, 即知 D 是一个导子。

现在我们证明对任意的 $C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathcal{X}$, 有 $\tau(p_n(C_1, C_2, \dots, C_n)) = 0$ 。实际上,

$$\begin{aligned} \tau(p_n(C_1, C_2, \dots, C_n)) &= \Delta(p_n(C_1, C_2, \dots, C_n)) - D(p_n(C_1, C_2, \dots, C_n)) \\ &= \sum_{i=1}^n (p_n(C_1, C_2, \dots, \Delta(C_i), \dots, C_n)) - D(p_n(C_1, C_2, \dots, C_n)) \\ &= \sum_{i=1}^n (p_n(C_1, C_2, \dots, D(C_i), \dots, C_n)) - D(p_n(C_1, C_2, \dots, C_n)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

所以 $\Delta(A) = D(A) + \tau(A)$ 是 $\mathcal{X}$ 上的一个标准 Lie n -重导子。定义一个 $\mathcal{X}$ 上的 $\mathcal{A}$ -线

性映射为: 对任意的 $A \in \mathcal{X}$:

$$d(A) = D(A) + [A, G],$$

因此我们有

$$\delta(A) = \Delta(A) + [A, G] = D(A) + \tau(A) + [A, G] = d(A) + \tau(A).$$

其中 d 是一个 $\mathcal{A}$ -线性的导子, τ 是一个从 $\mathcal{X}$ 到 $\mathcal{Z}(\mathcal{X})$ 的 $\mathcal{A}$ -线性映射, 并且对任意的 $C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathcal{X}$, 有 $\tau(p_n(C_1, C_2, \dots, C_n)) = 0$ 。即证明 δ 是一个标准的 Lie n -重导子。

第 5 章 回顾与展望

5.1 回顾与总结

本文主要在 Hilbert C^* -模算子代数上考虑一些线性映射的标准形式。以 Banach 代数为起点, 主要在 Hilbert C^* -模算子代数上深入探求 Lie 导子以及 Lie n -重导子的结构性质, 同时也考虑了一些如导子、内导子、零化交换子和 Jordan 导子等映射的性质。全篇共计分为五个章节, 主要工作如下:

在第一章中, 我们分为三节来介绍我们将要讨论的问题的背景、国内外的一些学者之前相关研究的进展以及已经取得的重要研究成果和目前学者们聚焦的尚未解决的一些难题。为了帮助读者更好的理解相关内容, 在本章末尾阐释下文提到的代数和映射的具体定义和其重要性。

在第二章中, 我们首先介绍了预备知识和一些基础且重要的、并在后文会反复应用的结论。

在第三章中, 考虑了 Lie 导子在 Hilbert C^* -模上的标准性, 我们证明了如果存在 $x_0 \in \mathcal{M}$, $f_0 \in \mathcal{M}'$, 使得 $f_0(x_0) = e$, 则 $End_{\mathcal{A}}(\mathcal{M})$ 上的每个 $\mathcal{A}$ -线性 Lie 导子都是标准的。

在第四章中, 我们以第三章为研究基础, 将 2 推广到 n (Lie 导子即 Lie 二重导子), 考虑了 Lie- n 重导子在 Hilbert C^* -模上的标准性。与第三章不同的是, 我们要考虑 n 的奇偶性, 所以证明过程是要考虑全面的。最终我们证明了如果存在 $x_0 \in \mathcal{M}$, $f_0 \in \mathcal{M}'$, 使得 $f_0(x_0) = e$, 则 $End_{\mathcal{A}}(\mathcal{M})$ 上的每个 $\mathcal{A}$ -线性 Lie n -重导子都是标准的。

5.2 展望工作

虽然这一阶段工作已经取得一定的研究结论, 但是未来还有还多问题值得我们去探求与思考。在未来的探索工作中希望着力于研究以下问题: (1) 考虑是

否能将“Hilber C*-模上存在 $x_0 \in \mathcal{M}$, $f_0 \in \mathcal{M}'$, 使得 $f_0(x_0)=e$ ”这一前提条件去除, 进一步在代数上研究 Lie 导子及 Lie n-重导子的标准形式。(2) 对于 Hilber C*-模算子代数上的研究至今颇少, 可以再继续考虑局部 Lie 导子、2 局部 Lie 导子以及局部 Lie n-重导子是否具有标准形式。

参考文献

- [1] J. Dixmier. C^* -Algebras[M]. North-Holland, 1977.
- [2] J. Dixmier. Von Neumann algebras. Transl. from the French by F. Jellet[M]. 1981.
- [3] 李炳仁. 算子代数[M]. 科学出版社, 1986.
- [4] K.R. Davidson . Nest algebras[M]. Pittman Research Notes in Mathematics Series. 1988.
- [5] 侯晋川, 崔建莲. 算子代数上线性映射引论[M]. 科学出版社, 2002.
- [6] I. Kaplansky. Modules Over Operator Algebras[M]. American Journal of Mathematics, 1953.
- [7] Peng Tang, Li Han. Derivations on the algebra of operators in Hilbert C^* -Modules[J]. Acta Mathematica Sinica Chinese Series, 2012, 28: 1615-1622.
- [8] M. Moghadam, M. Miri , Janfada A.. A note on derivations on the algebra of operators in Hilbert C^* -modules[J]. Mediterr J Math, 2016, 13: 1167-1175.
- [9] Jun H., Jiankui L., Wenhua Q.. Characterizations of centralizers and derivations on some algebras[J]. Journal of the Korean Mathematical Society, 2017, 54(2): 685-696.
- [10] 何俊. 算子代数上一些映射的局部性的刻画[D]. 上海: 华东理工大学, 2017.
- [11] S. Sakai . Derivations of W^* -algebras[J]. Ann Math, 1966, 83(2): 273–279.
- [12] R.V. Kadison . Derivations of Operator Algebras[J]. Annals of Mathematics, 1966, 83(2): 280-293.
- [13] E. Christensen . Derivations of nest algebras. Math Ann[J]. 1997, 229: 155-161.
- [14] Du H., Zhang J.. Derivations on nest-subalgebras of von Neumann algebras [J]. Chinese Annals of Mathematics, 1996, 17: 467-474.
- [15] J. He,J. Li, D.Zhao . Derivations, local and 2-local derivations on some algebras

- of operators on Hilbert C^* -modules[J]. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 2017, 14: 1-11.
- [16] W. Huang, J. Li, W. Qian. Derivations and 2-local derivations on matrix algebras over commutative algebras, arXiv preprint arXiv: 1611. 00871 [P/OL]. 2016.
- [17] I N.Herstein. Jordan derivations of prime rings1[J]. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1957, 8(6): 1104-1110.
- [18] J. Cusack. Jordan derivations on rings[J]. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1975, 53(2): 321-324.
- [19] B. Johnson. Symmetric amenability and the nonexistence of Lie and Jordan derivations[J]. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1996, 120(3): 455-473.
- [20] S. Hejazian, A. Niknam. Modules, annihilators and module derivations of JB^* -algebras[J]. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 1996, 27(2): 129-140.
- [21] J. Alaminos, M. Brešar, A. Villena. The strong degree of von Neumann algebras and the structure of Lie and Jordan derivations[J]. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 2004, 137(2): 441-463.
- [22] F. Lu. The Jordan structure of CSL algebras[J]. *Studia Mathematica*, 2010, 190(3): 283-299.
- [23] 安润玲, 侯晋川. 含幂等元的环上的 Jordan 导子的刻画——在零点 Jordan 可导的可加映射[J]. *数学年刊 A 辑(中文版)*, 2010, 31(04): 463-474.
- [24] 安广宇. 算子代数上某些映射的刻画[D]. 上海: 华东理工大学, 2016.
- [25] I N.Herstein. Lie and Jordan structures in simple associative rings[J]. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1961, 67(1961): 517-531.
- [26] W. S. Martindale. Lie derivations of primitive rings[J]. *Michigan Mathematical Journal*, 1964, 11(2): 183-187.
- [27] F Lu. Lie derivations of certain CSL algebras[J]. *Israel Journal of Mathematics*, 2006, 155(1): 149-156.
- [28] D. Benkovi. Generalized Lie derivations of unital algebras with idempotents[J]. *Operators and Matrices*, 2018, 12(2): 357-367.

- [29] W. Cheung. Lie derivations of triangular algebras[J]. Linear Multilinear Algebra , 2003, 51(3): 299-310.
- [30] Guang yu A., Rui Z., Jun H., ect. Characterizations of Lie derivations on Kadison– Singer algebras[J]. Banach Journal of Mathematical Analysis, 2023, 17(3).
- [31] Benkovic, Dominik. Lie triple derivations of unital algebras with idempotents[J]. Linear&Multilinear Algebra, 2015, 63: 141-165.
- [32] 白延丽, 张建华. 三角代数上 Lie 三重导子的刻画[J]. 数学学报(中文版), 2017, 60(01): 31-38.
- [33] L. Liu . Lie Triple Derivations on von Neumann Algebras[J]. Chinese Annals of Mathematics, Series B, 2018, 39(05): 49-60.
- [34] J M. Lachin. Introduction to sample size determination and power analysis for clinical trials[J]. Controlled Clinical Trials, 1981, 2(2): 93-113.
- [35] 刘红玉, 霍东华. 三角代数上的 Lie n -重导子[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2013, 30(04): 479-482.
- [36] 刘卓, 袁鹤. 结合代数上的李 n -导子[J]. 湖南文理学院学报(自然科学版), 2023, 35(03): 6-11.
- [37] V Manuilov, E Troitsky. Hilbert C^* -modules[M]. In: Translations of Mathematical Monographs, 226, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.
- [38] C A. Paul , S M. Uddin . Lie Structure in Simple Gamma Rings[J]. International Journal of Pure and Applied Sciences and Technology, 2011, 4(2):63-70.
- [39] L. William, Paschke. Inner Product Modules Over B^* -Algebras[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1973, 182: 443–468.
- [40] M. Rieffel. Induced representations of C^* -algebras[J]. 1974, 13: 176-257.
- [41] T. Johansen. Covergenc of derivations on nest algebras[J]. Mathematica Scandinavica, 1986, 58:46-54.
- [42] J. Zhang. Jordan derivations on nest algebras[J]. Acta Math. Sinica, 1988, 41: 205-212.
- [43] M. Mathieu, A R.Villena. The structure of Lie derivations on C^* -algebras[J]. Journal of Functional Analysis, 2003, 202(2):504-525.

- [44] 丁雅娜. 算子代数上一些映射的刻画[D]. 上海: 华东理工大学, 2018.
- [45] R V. Kadison, J R. Ringrose. Fundamentals of the theory of operator algebras[M]. Vol. II: Advanced theory. mathematical gazette, 1983.
- [46] J. Hou, X. Qi. Additive maps derivable at some points on J-subspace lattice algebras[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2008, 429(8-9): 1851-1863.
- [47] J. C. Zhu , C. Xiong. All-derivable points in continuous nest algebras[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2008, 340(2): 845-853.
- [48] Lu F.. Characterizations of derivations and Jordan derivations on Banach algebras[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2009, 430(8-9): 2233-2239.
- [49] An R., Hou J.. Characterizations of derivations on triangular rings: Additive maps derivable at idempotents[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2009, 431(5): 1070-1080.
- [50] Li J., Zhou J. Characterizations of Jordan derivations and Jordan homomorphisms[J]. Linear & Multilinear Algebra, 2011, 59(2): 193-204.
- [51] 安广宇, 李建奎. 算子代数上(m,n)-Jordan 导子的刻画[J]. 数学学报(中文版), 2017, 60(01): 173-184.
- [52] D. Benkovic. Jordan homomorphisms on triangular matrices[J]. Linear and Multilinear Algebra, 2005, 53(5): 345-356.
- [53] P. Li, D. Han, W. Tang . Centralizers and Jordan derivations for CSL subalgebras of von Neumann algebras[J]. Journal of Operator Theory, 2013: 117-133.
- [54] F. Kuzucuoğlu, U. Sayın. Derivations of some classes of matrix rings[J]. Journal of Algebra & Its Applications, 2017, 16(2): 1750027-1750027.
- [55] 姚颖. 算子代数上一些导子性质的刻画[D]. 西安: 陕西科技大学, 2021.
- [56] 张雪丽. 算子代数上某些导子性质的刻画[D]. 西安: 陕西科技大学, 2022.

硕士期间发表的论文

- [1] 何俊, 黄星星, 安广宇. Hilbert C^* -模算子代数上 Lie 导子的标准形式. 数学学报(中文版), online.

致谢

研究生三年生涯转瞬即逝，在这三年里，不论是在学习上还是生活上，我都取得了很大的进步。学习上，积累了专业的知识，考取了一些必备的证书。在班级里尽量给同学一些力所能及的帮助。在学院里，认真完成各位老师交给的任务，同时提升了自己的沟通与表达能力。

感谢安徽工程大学给我们提供了良好舒适的学习环境，充足且免费的图书资源，学院领导经常开展座谈会，对学生的要求有求必应，让学生全身心的投入学习与科研中。

我要特别感谢我的研究生导师何俊副教授，我本身对数学天赋太少，加上算子代数领域入门极难，学起来费精力费时间，而且晦涩难懂。这三年来，从课题研究方向的选择、如何奠定坚实的基础到文献资料的查询方法，学术论文的研究与撰写，甚至在春节期间，小论文的投稿、修改以及发表，导师都会给予我精心且耐心的指导。每当我学习过程中出现问题，老师都会及时纠正并教导我们：数学是一个非常严谨的学科，任何一个证明步骤都要来的有理有据。在生活上，导师告诉我们，做好一件自己擅长的事情并不难，难的是把自己不擅长的事做精做细。导师对学术严谨认真的态度，对知识的传播，对学习的钻研程度以及为人和善，在各方面都是值得我们学习的榜样，我将永远铭记老师对我的教诲！

感谢讨论班的师姐赵海霞和同门陈林以及师弟师妹们，感谢你们在学习过程中对探讨问题的积极性以及会对我提出一些实质性的帮助，感谢你们在平日里的关心和帮忙。

感谢我的父母和亲人，感谢你们一直以来的默默支持和付出，才能让我在校园里安心学习，勇敢前进！

最后，向参加论文评阅、答辩的专家和老师们致以衷心的感谢！