

分类号: F830.9; O211.63
密 级: 公开

单位代码: 10363
学 号: 2211020143

题 目 通胀环境下基于 HARA 效用考虑带有意外
返还的 DC 型养老金问题

英文并列

题 目 DC Pension Problem with Unexpected Based
on HARA Utility in Inflationary Environment

学生姓名: 杨铭

指导教师: 夏登峰 教授

专 业: 数学

研究方向: 金融风险管理

论文答辩日期: 2024 年 5 月 29 日

安徽工程大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：我恪守学术道德，崇尚严谨学风。所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已明确注明和引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品及成果的内容。论文为本人亲自撰写，我对所写的内容负责，并完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

学位论文作者签名：杨铭

日期：2024 年 5 月 29 日

安徽工程大学学位论文版权使用授权书

学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅或借阅。本人授权可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保密 ☐，在 ____ 年解密后适用本版权书。

本学位论文属于

不保密 ☒.

学位论文作者签名：杨铭

指导教师签名：张

日期：2024 年 5 月 29 日

日期：2024 年 5 月 29 日

通胀环境下基于 HARA 效用考虑带有伤残返还的 DC 型养老金问题

摘 要

当前，人口老龄化问题威胁着社会保障体系的可持续性，凸显了养老管理的重要性。固定缴款（Defined Contribution, DC）养老金计划是养老金计划的主要类型之一，与固定收益（Defined Benefit, DB）养老金计划相比，DC 养老金计划在减轻压力方面具有明显的优势，它将经济和寿命风险从发起人转移到退休人员身上。在 DC 养老金计划中，成员持续向养老基金缴纳预定数额的钱或其工资的固定比例，并根据基金投资组合的回报，在退休时领取福利。

首先，我们考虑了一个带有死亡和伤残返还的 DC 型养老金计划。它是以终端财富期望效用最大化为目标，利用动态规划原理建立相应的 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 方程，在双曲绝对风险厌恶 (HARA) 效用函数下得到最优解，通过数值模拟分析重要参数对最优投资策略的影响。

其次，我们将实际市场进行风险拓展，在原有经济模型引入通胀指数债券，考虑通胀风险使其更符合现实，在此基础上我们求出相应的最优解，进而通过数值模拟，从实际市场出发，分析重要相关参数对最优投资策略的敏感性。

最后，对全文进行梳理，并且对问题未来研究给出展望。

关键词：DC 型养老金模型，死亡返还，伤残返还，HARA 效用，HJB 方程，通胀风险

DC PENSION PROBLEM WITH UNEXPECTED RETURNS BASED ON HARA UTILITY IN AN INFLATIONARY ENVIRONMENT

ABSTRACT

Currently, the aging population threatens the sustainability of social security systems and highlights the importance of pension management. Defined Contribution (DC) pension plans are one of the main types of pension plans, and they offer significant advantages in terms of stress reduction compared to Defined Benefit (DB) pension plans, which transfer economic and longevity risks from the sponsor to the retiree. In a DC pension plan, a member contributes a predetermined amount of money or a fixed percentage of his or her salary to a pension fund on an ongoing basis and receives benefits at retirement based on the returns on the fund's investment portfolio.

Firstly, we consider a DC pension plan with death and disability returns. It is aimed at maximizing the expected utility of terminal wealth, and the corresponding Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) equations are established using the dynamic programming principle to obtain the optimal solution under a hyperbolic absolute risk aversion (HARA) utility function, and the effects of important parameters on the optimal investment strategy are analyzed through numerical simulations.

Secondly, we expand the risk of the real market by introducing inflation-indexed bonds into the original economic model, considering the inflation risk to make it more in line with the reality, based on which we find the corresponding optimal solution, and then analyze the sensitivity of the important relevant parameters to the optimal investment strategy through numerical simulation from the real market.

Finally, we summarize the whole paper and give an outlook on the future research of the problem.

Yang Ming (Mathematics)

Supervised by Xia Dengfeng

KEY WORDS: Variable interest rates, Stochastic interest rate, Heston model, Mispring, HJB equation, Utility maximization

目 录

ABSTRAC	III
第 1 章 绪论	1
1.1 研究背景和意义	1
1.2 国内外研究现状	3
1.3 研究方法与创新点	4
1.4 论文内容及安排	5
第 2 章 基本知识介绍	6
2.1 DC 型养老金	6
2.2 Cramer-Lundberg 模型逼近	6
2.3 风险资产模型	8
2.4 通胀指数债券	9
2.5 效用函数	9
第 3 章 HARA 效用下考虑死亡和意外伤残返还的 DC 养老金计划	11
3.1 建立模型	11
3.2 最优投资策略	14
3.3 数值分析	17
3.4 本章小结	20
第 4 章 通胀环境下基于 HARA 效用考虑带有意外返还的 DC 养老金计划 ...	22
4.1 建立模型	22
4.2 最优投资策略	25
4.3 数值分析	28
4.4 本章小结	30
第 5 章 结论与展望	31
参考文献	32
附 录	36
硕士期间发表的论文	37
致 谢	38

第1章 绪论

1.1 研究背景与意义

养老金全称为养老保险基金，是世界各国养老保险制度的主要表现形式，其目的是保障参与者退休后的基本生活需求，并提供稳定可靠的收入来源。因此，养老金是社会保障制度中最重要的构成部分，与每位养老保险基金参与者退休后的幸福指数密切相关，并且与整个社会的和谐稳定有着重大关系。

当前，人口老龄化问题威胁着社会保障体系的可持续性，凸显了养老管理的重要性。固定缴款（Defined Contribution, DC）养老金计划是养老金计划的主要类型之一，与固定收益（Defined Benefit, DB）养老金计划相比，DC 养老金计划在减轻压力方面具有明显的优势，它将经济和寿命风险从发起人转移到退休人员身上。在 DC 养老金计划中，成员持续向养老基金缴纳预定数额的钱或其工资的固定比例，并根据基金投资组合的回报，在退休时领取福利。

由于养老金投资有着漫长的缴款期，一般是 20-40 年，期间遭受的市场风险和投资者个人发生意外不确定风险都会使得养老金参与者遭受损失，从而消耗养老金参与者热情。于是，我们将带有保费返还条款引入 DC 养老金计划，并且在此计划中考虑到漫长时间的通胀风险，以此来保障投资者权益，为市场注入活力。最后结合现实和名义利率等因素分析对基金管理者最优投资策略的影响。

1.2 国内外研究现状

近年来，DC 型养老金的在学术界地位愈发重要，关于 DC 型养老金的最优投资策略相关问题的研究越来越多，是国内外诸多专家学者的研究热点。刘世锦等^[1]探析了养老保险的投资方向，它表明当前养老金计划投资主要包括工商业和资本市场。顾孟迪和李新^[2]他们认为随着金融市场的放开，购买国债和银行存款这类固定收益的金融产品已经不能完全满足养老金升值的需要，应适当将养老基金的投

资分散到高风险领域,投资股票等风险资产获取超额收益.而李绍光^[3]则认为要想实现众多的投资工具均衡配置,离不开资金积累的扩大和监管的逐步放松,而且政府在其中具有重要引导作用.费为银等^[4]考虑了通胀风险对最优资产配置的影响.殷艳红等^[5]考虑了一个跳-扩散市场情形,并且在这个市场情形下探析了带有误定价风险资产的 DC 养老金最优投资策略.

从研究方法分析,目前市场方向大致分为两种.第一种方法是随机控制,第一次应用此方法的是 Merton^[6],他创建了一个连续时间情形下的投资消费模型,在效用函数的附加影响下,推导了最优消费和投资组合规则的明确解,在这个模型中,基金管理者可以不损失通用性的情况下处理双资产情况. Gerrard 等^[7]应用随机最优控制研究了养老金参与者定期定量提取金额的最优投资策略. Vigna 和 Haberman^[8]考虑养老金计划中的财务风险,并使用随机动态规划,从成员在积累期内承担的投资风险和退休时购买年金时的年金风险两个方面进行了研究.在给定与净替代率挂钩的最终目标和一组中期目标的情况下找到了最佳投资策略. Haberman 和 Vigna^[9]在之前的论文上做了进一步研究,首先考虑 n 种资产组合的 DC 养老金计划,然后考虑了两种资产的特殊情形,并研究了最优投资策略行为和计划成员面临的下行风险. Devolder 等^[10]给定了典型的资产负债管理约束,同时考虑到保险公司使用的保证技术利率,在以上基础上分别考虑了在退休前后养老金的最优投资策略.另外一种方法是鞅方法,由 Cox 和 Huang^[11]引入,他们考虑了不确定性下连续时间的消费组合问题,采用鞅技术来表征最优消费组合政策,在这种情况下,当包括对消费和最终财富的非负性约束时,最优政策不再是线性的.在过去几年中,同样被专家学者应用在养老金领域并进行研究拓展.

在常见的 DC 型养老金研究计划中,一方面是均值-方差准则,另一方面研究目标是终端财富期望效用最大化.在均值-方差准则之下, Guan 和 Liang^[12]假设利率遵循仿射模型,推导出解有效边界和有效策略的封闭形式,最后进行敏感性分析,展示了有效前沿和策略的经济行为.而 Thomson 等^[13]探讨了期望效用最大化理论,使用预期效用理论来建议成员在固定缴款退休基金中的权益在投资渠道之间的分配.并且对这种用法进行了论证,给出了最优投资策略. Boulier 等^[14]在常系数相对风险厌恶 (CRRA) 幂效用函数下探析了担保福利在随机利率下的最优管理

问题; Cairns 等^[15] 在幂效用函数下对比了不可对冲的工资风险的最优资产配置策略; 李春丽和蔡玉杰^[16] 在对数效用函数下研究了资产组合的最优长期投资和最优消费问题; Gao^[17] 在常系数绝对风险厌恶 (CARA) 指数效用函数下采用了扩展的几何布朗运动的恒定方差弹性 (CEV) 模型研究了 DC 型养老的最优投资组合问题. 然而, 双曲绝对风险厌恶 (HARA) 效用函数是最具一般性, 因为在实际研究过程中我们发现幂效用函数、对数效用函数和指数效用函数都为双曲绝对风险厌恶效用函数的推广特殊情形. 因此, 研究 HARA 效用下的 DC 型养老金的最优投资策略问题具有推广性和代表性. 常浩等^[18] 将最优控制理论与勒让德变换-对偶理论相结合得到了最具代表性的 HARA 效用下的 DC 养老金的投资方案. 马娟^[19] 在股票价格服从 Heston 随机波动率模型下研究了带有 HARA 效用函数的资产负债管理问题.

在 DC 型养老金里, 由于养老金要在市场进行投资, 资金会分配在风险资产上, 这里的风险资产一般认定为股票, DC 养老金模型里股票价格过程认定不一, 诸多专家学者也有着相应的研究成果. Guasoni^[20] 在股票价格遵循几何布朗运动 (GBM) 环境中, 给出了最佳投资组合和最大预期对数效用, 这里的股票价格波动率为常数. 实际上, 一些专家学者也对股票价格存在随机波动性进行研究分析, 如 French^[21]、Pagan 和 Schwert^[22]、Hobson 和 Rogers^[23] 都有进行研究. Cox 和 Ross^[24] 开发了新技术, 创造性的用恒定常方差弹性 (CEV) 模型来刻画风险资产的价格过程, 引起了学者的广泛关注. 如 Xiao 等^[25] 和 Gao^[26] 重点介绍了 CEV 模型, 用勒让德变换和对偶理论揭示了 DC 养老金计划参与者退休前和退休后的两个显示解, 得到两个时期的最优投资策略. 但是实际研究我们发现 CEV 模型回报率为常数, CEV 模型的波动率具有价格依赖性. 而郭宇超等^[27] 在文章中引入 Heston 模型, 弥补了 CEV 模型中的不足之处, 并且在 Heston 模型下考虑误定价的 DC 养老金计划.

同时在实际研究过程中我们发现, 当涉及到养老金计划的设计时, 死亡率是一个至关重要的参数, 具有极强的现实意义, 于是不少的 DC 养老金计划都为此设计保费返还条款, 以此来保护退休前发生意外的成员的权益. 在这类保费返还条款中, 死亡的成员可以按照预先签订的合同以约定好的金额返还保费. 这之间产生的

差额将在幸存的成员中均额分配. 因此, 基金规模的变化不仅会受到金融市场的影响, 还受到参保成员死亡风险的影响. 据我们所知, He 和 Liang^[28] 首先将保费返还条款引入到 DC 养老金计划的资产配置中. Li 等^[29] 考虑了具有违约风险的恒定方差弹性 (CEV) 模型中的保费返还条款. 在多期框架下, Bian 等^[30] 讨论了保费返还条款和 DC 养老金计划中的制度和转换现象的影响. 陈佳辰等^[31] 首次在带有保费返还条款的 DC 养老金中考虑投保人伤残意外情形, 并且用精算数学近似了经典的 Cramer-Lundberg 模型.

Cramer-Lundberg 模型最早可追溯 Schmidli^[32], 他介绍了 Cramer-Lundberg 模型基本理论以及精算数学扩散逼近的形式. 崔胜^[33] 利用几何和方法推导了在经典的 Cramer-Lundberg 模型下破产概率的渐近表达式. 郭福城^[34] 在扩展的 Cramer-Lundberg 模型中研究了基金资产配置. 林志民^[35] 在假设保险公司的盈余过程满足经典的 Cramer-Lundberg 模型下, 探析了绝对破产情形下保险公司的最优投资策略问题.

另外, 由于养老金投资有着漫长的缴款期, 一般是 20-40 年, 期间遭受的市场通胀风险不可忽视. Han 和 Hung^[36] 将年金与通货膨胀挂钩, 考虑年金金额的下行保护, 给出了该养老金计划的最优投资策略. 梁勇等^[37] 在奈特不确定环境下探析了 DC 型养老金的最优投资问题. Chen 等^[38] 为了保障投保人的权益, 将两种不可对冲的通货膨胀风险引入养老金模型中, 最后开发构建估值框架来处理得到最优解. Shao 等^[39] 研究了在混合随机波动模型下考虑通货膨胀风险和随机工资的 DC 型养老金最优投资策略.

1.3 研究方法与创新点

相当多的文献研究了养老金的期望效用最大化问题, 采取的效用有幂效用、对数效用或者指数效用, 而我们在此采用更加具有一般性的 HARA 效用, 它包含了幂效用、对数效用和指数效用函数. 首先, 我们考虑在 HARA 效用下, 研究了投保人可能发生死亡和伤残情形下的 DC 型养老金计划, 将养老金投资于金融市场, 将其中的意外伤残情形用泊松过程描述, 并且参用精算数学模型对其进行近似, 运用动态规划的方法, 在 HARA 效用函数下得到最优解, 通过数值模拟分析重要参数对最优投资策略

略的影响. 其次, 我们在以上经济模型的基础上考虑漫长投资过程中可能发生的通胀风险, 使其更贴合实际金融市场, 将养老金分别投资于无风险资产、风险资产以及通胀指数债券, 得到 HARA 效用函数下的最优解, 最后通过数值模拟分析, 从经济层面考虑各个参数对最优投资策略的敏感性分析.

论文的创新点:

1. 我们在期望效用最大化的原则下采用更具一般性的 HARA 效用函数.
2. 目前很多文献考虑保险人的死亡返还, 而当保险人发生伤残意外时, 这时和死亡情形是具有很大不同. 我们将意外返还用泊松过程描述, 并参用 Cramer-Lundberg 模型对复合泊松过程进行了近似, 考虑保险人发生意外前后对我们的整体收益的影响. 并给出数值模拟及相应的经济学含义解释.
3. 在以上模型的基础上我们引入通胀指数债券, 尽量规避长期投资带来的通胀风险, 使其更好地贴近现实.

1.4 论文内容及安排

本文总共分为五章:

第一章: 绪论, 主要综述了本文的研究背景、研究意义、研究现状、主要研究内容.

第二章: 简要地介绍了本文涉及到的相关基础知识和理论, 如: 养老金的分类、Cramer-Lundberg 模型及其数学逼近、四种效用函数、风险资产模型以及通胀指数债券.

第三章: 考虑在实际生活中投保人在缴费过程中也会出现死亡和意外情况. 将意外返还用泊松过程描述, 并参用 Cramer-Lundberg 模型对复合泊松过程进行了近似. 在期望效用最大化的原则下建立了 HARA 效用函数下的 HJB 方程并求解 HJB 方程, 得到相应的 DC 型养老金计划最优投资策略, 并给出数值模拟及相应的经济学含义解释.

第四章: 在之前模型的基础上, 考虑通胀风险对投资者的最优投资策略的影响. 并给出数值模拟及相应的经济学含义解释.

第五章: 对全文进行给出总结并进行展望.

第 2 章 基本知识介绍

2.1 DC 型养老金

当前, 人口老龄化问题威胁着社会保障体系的可持续性, 凸显了养老管理的重要性. 固定缴款 (Defined Contribution, DC) 养老金计划是养老金计划的主要类型之一, 与固定收益 (Defined Benefit, DB) 养老金计划相比, DC 养老金计划在减轻压力方面具有明显的优势, 它将经济和寿命风险从发起人转移到退休人员身上. 在 DC 养老金计划中, 成员持续向养老基金缴纳预定数额的钱或其工资的固定比例, 并根据基金投资组合的回报, 在退休时领取福利.

2.2 Cramer-Lundberg 模型逼近

Cramer-Lundberg 模型是金融风险管理理论中的重要组成部分, 该模型最早 Lundberg 提出, 是一个累积风险模型. 一般的, 我们认为保险公司的盈余过程是
初始资本+收入-支出.

在 DC 型养老金计划里, 收入一般被认为是保险人缴纳的保费, 支出被认为是对被保险人的赔付. 在 Cramer-Lundberg 模型中, 设定 (Ω, F, P) 是一个完备概率空间, 保险人缴纳的保费是由一个线性函数表示, 而被保险人的赔付由一个复合泊松过程进行刻画. 它包含

- 1) 一个强度为 $\lambda > 0$ 的时间一致泊松过程 $N(t)$ 表示 t 时间段内发生赔付次数,
- 2) 一系列独立同分布的随机变量 Y_i , 他们的分布函数 G 、均值 η 和有限方差 σ^2 都相同.

可设累积赔付过程 $R(t)$ 为

$$R(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i.$$

在这里我们定义一个经典风险过程 $V(t)$ 为

$$V(t) = x_0 + ct - R(t),$$

其中, x_0 是初始资本, $c > 0$ 是保险人缴纳的保费.

我们定义保险公司的安全载荷 ρ 为

$$\rho = \frac{c - \lambda\mu}{\lambda\mu}.$$

由 $V(t)$ 的性质可知, 其期望为 $\rho\lambda\mu t$.

接下来, 我们将介绍该模型的数学逼近. 令 $(W^{(n)}(t): t \geq 0)$ 为一列经典风险过程

$$W^{(n)}(t) = x^{(n)}t + c^{(n)}t - R^{(n)}(t),$$

其中, 与其相关的泊松过程为 $(N^{(n)}(t): T \geq 0)$, 强度为 $\lambda^{(n)}$, 赔付为 $R^{(n)}(t)$, 分布函数为 $G^{(n)}$, 初始资本为 $x_0^{(n)}$, 保费为 $c^{(n)}$.

设

$$\mu^{(n)} = \int_0^\infty y dG^{(n)}(y), \quad \sigma^{(n)^2} = \int_0^\infty (y^{(n)} - \mu^{(n)})^2 dG^{(n)}(y),$$

其中 $\sigma^{(n)^2} < \infty$. 各个过程的安全载荷 $\rho^{(n)}$ 可被记为

$$\rho^{(n)} = \frac{c^{(n)} - \lambda^{(n)}\mu^{(n)}}{\lambda^{(n)}\mu^{(n)}}.$$

令 $(W^{(n)}(t): t \geq 0)$ 为一个布朗运动, 即满足

$$W(t) = W(0) + nB(t) + mt,$$

其中, $B(t)$ 是一个标准的维纳过程. 当 $W^{(n)}(t) = V(t)$ 且 $W^{(n)}(t) \Rightarrow W$, 则称 W 是 V 的一个扩散逼近.

特别的, Schmidli^[32] 指出, 当 $\lambda^{(n)} = n\lambda$, $G^{(n)}(t) = G(\sqrt{nt})$, $\rho^{(n)} = \frac{\rho}{\sqrt{n}}$, 则可

以构建出的 $V(t)$ 扩散逼近, 此时, $m = \rho\lambda\mu$, $n = \sqrt{\lambda\sigma^2}$.

2.3 风险资产模型

在 DC 型养老金里, 由于养老金会在金融市场进行投资, 资金会分配在无风险资产和风险资产上. 这里的风险资产一般认定为股票, DC 养老金模型里股票价格过程认定不一, 下面介绍几种常见的股票价格过程.

(1) 几何布朗运动模型

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu_s dt + \sigma_s dW(t)$$

其中 μ_s 是股票的平均回报率, $\sigma_s > 0$ 是股票的波动率, 它是一个常数, $W(t)$ 是定义在完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}, P)$ 上的标准布朗运动.

(2) CEV 模型

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + kS^\beta(t) dW(t),$$

其中 μ 是代表着股票的期望收益率, $kS^\beta(t)$ 代表的是瞬时波动率, 设股票价格的波动大小与股票价格无关, β 是弹性参数且 $\beta \geq 0$, 这里的 $W(t)$ 是一个标准布朗运动.

(3) Heston 模型

$$\begin{cases} dS(t) = S(t)[\mu_s dt + vL(t)dt + \sqrt{L(t)}dW_s(t)] \\ dL(t) = \alpha(\delta - L(t))dt + \sigma_L dW_L(t) \end{cases}$$

其中 $W_s(t)$ 和 $W_L(t)$ 为标准布朗运动, 同时 $Cov(W_s(t), W_L(t)) = \rho_{SL}$, δ 表示波动率的回复水平, α 是回复速率, σ_L 表示波动率波动的大小. 在这里我们假设股票价格的波动是随机的. 为了保证 $L(t) > 0$, 我们要求 $2\alpha\delta > \sigma_L^2$.

2.4 通胀指数债券

由于养老金计划时间较长, 期间发生的通胀风险不可忽视, 下面将介绍常见的通胀指数债券, 并用商品价格指数 $I(t)$ 的价格过程表示通胀水平, $I(t)$ 满足如下方程

$$\frac{dI(t)}{I(t)} = \mu_I dt + \sigma_I dW_I(t),$$

其中, $\mu_I > 0$ 是一个常数, 表示平均通胀率, $\sigma_I > 0$ 表示通货膨胀率的波动率.

若引入通胀指数债券来对冲漫长时间股票市场产生的通胀风险，这里股票价格过程服从几何布朗运动，其价格过程满足如下随机微分方程

$$\frac{dB(t)}{B(t)} = rdt + \frac{dI(t)}{I(t)} = (r + \mu_I)dt + \sigma_I dW_I(t).$$

2.5 效用函数

定义 Π 为养老金计划的可允许策略集，且 $\Pi = \{\pi_t | \pi_t \in [0, \infty], 0 \leq t \leq T\}$. 通常管理者的目标是使终端财富期望效用 $E[U(X(T))]$ 达到最大，即

$$\max_{\pi_t \in \Pi} E[U(X(T))],$$

下面介绍常见的目标效用函数

1. 幂效用函数，又称为相对风险规避效用函数（CRRA）

$$U(x) = \frac{x^\gamma}{\gamma}, \gamma \neq 0.$$

2. 指数效用函数，又称为绝对风险规避效用函数（CARA）

$$U(x) = -\frac{e^{-qx}}{q}, q > 0.$$

3. 对数效用函数

$$U(x) = \beta \log x, \beta > 0.$$

本文采用 HARA 效用函数

$$U(x) = U(\beta, \gamma, q, x) = \frac{1-\gamma}{q\gamma} \left(\frac{qx}{1-\gamma} + \beta \right)^\gamma,$$

其中 $q > 0, \gamma < 1, \gamma \neq 0$.

注：

$$1) \quad U(0, \gamma, 1-\gamma, x) = \frac{x^\gamma}{\gamma} = U_{CRRA}(x),$$

$$2) \quad \lim_{\gamma \rightarrow \infty} U(1, \gamma, q, x) = -\frac{e^{-qx}}{q} = U_{CARA}(x),$$

$$3) \quad \lim_{(\gamma, q) \rightarrow (0, 1)} U(0, \gamma, q, x) = \ln x.$$

可见幂效用（CRRA）、指数效用（CARA）以及对数效用是 HARA 效用函数的特例.

第3章 HARA 效用下考虑 DC 养老金带有死亡和伤残返还条款的最优投资问题

本章考虑了一个带有死亡和伤残返还的 DC 型养老金计划的最优投资问题. 以终端财富期望效用最大化为目标, 利用动态规划原理建立相应的 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 方程, 在双曲绝对风险厌恶 (HARA) 效用函数下得到最优解, 通过数值模拟分析重要参数对最优投资策略的影响.

3.1 建立模型

设定 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ 是一个完备概率空间, $\mathcal{F}_t$ 为市场上截止到时刻 t 的信息流, 所有随机过程均为 $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$ 适应的. 市场上有一种风险资产(股票)和另外一种无风险资产(债券)两种资产被基金管理者选择.

无风险资产 S^0 在 t 时刻的价格过程为

$$\begin{cases} dS^0(t) = r(t)S^0(t), \\ S^0(t) = s^0, \end{cases}$$

其中, $r(t)$ 是在 t 时刻的市场无风险利率.

风险资产被定义为 S^1 , t 时刻的价格过程服从几何布朗运动

$$\begin{cases} dS^1(t) = S^1(t)[cdt + \sigma_1 dW_1(t)], \\ S^1(t) = s^1, \end{cases}$$

其中, 正常数 c 和 σ_1 分别是风险资产的收益率和波动率, $W_1(t)$ 为概率空间

$(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ 上的一个标准布朗运动.

在 DC 型养老金模型中, 设在积累阶段养老基金的持有者单位时间内缴纳的保费为 L , 初始时刻为 ω_0 , 终止时刻 $\omega_0 + T$. 在这个时间段 $[0, T]$ 内, 管理者为了使得基金财富值增加, 会以投资比例分别为 $\pi(t)$ 和 $1-\pi(t)$ 投资在股票和债券上获取

收益. 基金持有人在退休时领取福利, 为了保障在累积阶段发生死亡以及未死亡但存在伤残情形的基金持有者的权益, 本章将保费返还引入养老金计划. 死亡的投保人可以获得合同上约定的赔偿, 那么同理, 当投保人发生身体意外伤残情形, 也可以获得一定数量的赔偿. 假定 M 是合同约定的死亡赔偿, Δtq_{ω_0+t} 表示年龄为 ω_0+t 的人在时间段 $[\omega_0+t, \omega_0+t+\Delta t]$ 内死亡的概率. 当基金持有人死亡, 基金赔付值与积累值的差额将在存活基金持有人账户进行平均分配. 意外伤残赔付, 由一个复合泊松过程进行刻画, 此时投保人没有死亡, 赔付后的差额将不会在存活的基金持有人账户上进行分配.

定义伤残事故的赔偿为 $R(t)$, 其形式为

$$R(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i,$$

其中, 我们定义 $N(t)$ 是一个强度为 $\lambda > 0$ 的时间一致泊松过程, 表示 t 时间段内发生伤残事故的次数; Y_i 表示发生伤残赔偿金, $E[Y_i] = \eta, E[Y_i^2] = \sigma_i^2$.

基金的财富过程 $X(t)$ 可表示为

$$\begin{aligned} X(t+\Delta t) = & [\pi(t) \frac{S^1(t+\Delta t)}{S^1(t)} + (1-\pi(t)) \frac{S^0(t+\Delta t)}{S^0(t)} \\ & + \Delta t L - \Delta R(t)(1 - \Delta tq_{\omega_0+t}) - M \Delta tq_{\omega_0+t}] \frac{1}{1 - \Delta tq_{\omega_0+t}}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

其中, $\pi(t)$ 是分配在风险资产上的比例, $\frac{1}{1 - \Delta tq_{\omega_0+t}}$ 表示在支付死亡赔偿金后的差值被平分给存活者的寿险基金账户.

令

$$\Delta \delta_t^{\Delta t} = \pi(t) \frac{S^1(t+\Delta t)}{S^1(t)} + (1-\pi(t)) \frac{S^0(t+\Delta t)}{S^0(t)}. \quad (3.2)$$

将式 (3.2) 代入式 (3.1) 可得

$$X(t + \Delta t) = [X(t)(1 + \Delta \delta_t^{\Delta t}) - \Delta R(t)(1 - \Delta tq_{\omega_0+t}) + \Delta tL - M \Delta tq_{\omega_0+t}] \left(\frac{\Delta tq_{\omega_0+t}}{1 - \Delta tq_{\omega_0+t}} + 1 \right). \quad (3.3)$$

式 (3.3) 应用条件死亡概率简化可得

$$tqx = 1 - tp_x = 1 - e^{-\int_0^t \mu(x+s)ds}.$$

$\mu(t)$ 表示精算数学中的死力函数, 可以算得

$$\Delta tq_{\omega_0+t} = 1 - e^{-\int_0^{\Delta t} \mu(\omega_0+t+s)ds} \approx \mu(\omega_0+t)\Delta t = O(\Delta t).$$

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $\mu(\omega_0+t)$ 在养老金的积累阶段很小时上式成立, 从而可以推出

$$\frac{\Delta tq_{\omega_0+t}}{1 - \Delta tq_{\omega_0+t}} = \frac{1 - e^{-\int_0^{\Delta t} \mu(\omega_0+t+s)ds}}{e^{-\int_0^{\Delta t} \mu(\omega_0+t+s)ds}} = e^{\int_0^{\Delta t} \mu(\omega_0+t+s)ds} - 1 \approx \mu(\omega_0+t)\Delta t = O(\Delta t).$$

又由于

$$\begin{cases} \Delta \delta_t^{\Delta t} \rightarrow [(c-r)\pi + r]dt + \pi\sigma_1 dW_1(t), \\ \Delta R(t) = R(t + \Delta t) - R(t) = dR(t). \end{cases}$$

死力函数 $\mu(t)$ 用 Abraham De Moivre 模型刻画, 即

$$\mu(t) = \frac{1}{\omega - t},$$

其中 $0 \leq t \leq \omega$, ω 表示生命年表的最大值, 综上可得到财富过程如下

$$\begin{cases} dX(t) = X(t)[(c-r)\pi + r + \mu(\omega+t)dt]dt + Ldt - M\mu(\omega+t)dt \\ \quad - dR(t) + X(t)\pi\sigma_1 dW_1(t), \\ X(t) = x_0. \end{cases} \quad (3.4)$$

参考王远野等^[18] 的研究结果的基础上将复合泊松过程进行近似

$$dR(t) = \lambda \eta dt + \sqrt{\lambda} \sigma_2 dW_2(t), \quad (3.5)$$

其中 $W_2(t)$ 是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ 上的一个标准布朗运动, 与 $W_1(t)$ 具有相关性,

假定他们之间的相关系数为 ρ , 将式 (3.5) 代入式 (3.4) 可得,

$$\begin{cases} dX(t) = X(t) \left[(c-r)\pi + \frac{1}{\omega - \omega_0 - t} + r \right] dt + Ldt - \frac{M}{\omega - \omega_0 - t} dt \\ \quad - \lambda \mu dt + X(t) \pi \sigma_1 dW_1(t) - \sqrt{\lambda} \sigma_2 dW_2(t), \\ X(0) = x_0. \end{cases} \quad (3.6)$$

3.2 最优投资策略

定义 Π 为养老金计划的可允许策略集, 且 $\Pi = \{\pi_t | \pi_t \in [0, \infty], 0 \leq t \leq T\}$. 管理者的目标是使终端财富期望效用 $E[U(X(T))]$ 达到最大, 即

$$\max_{\pi_t \in \Pi} E[U(X(T))],$$

其中, 效用函数 $U(\bullet)$ 不仅满足 Inada 条件 (即一阶导数大于 0, 二阶导数小于 0), 同时它也是一个严格凹的连续可微函数 $U'(+\infty)=0, U'(0)=+\infty$.

本章采用 HARA 效用函数

$$U(x) = U(\beta, \gamma, q, x) = \frac{1-\gamma}{q\gamma} \left(\frac{qx}{1-\gamma} + \beta \right)^\gamma,$$

其中 $q > 0, \gamma < 1, \gamma \neq 0$.

注:

- 1) $U(0, \gamma, 1-\gamma, x) = \frac{x^\gamma}{\gamma} = U_{CRRRA}(x),$
- 2) $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} U(1, \gamma, q, x) = -\frac{e^{-qx}}{q} = U_{CARA}(x),$
- 3) $\lim_{(\gamma, q) \rightarrow (0, 1)} U(0, \gamma, q, x) = \ln x.$

可见幂效用 (CRRRA)、指数效用 (CARA) 以及对数效用是 HARA 效用函数的特例.

运用随机最优控制的理论方法, 定义值函数

$$V(t, x) = \sup_{\pi_t \in \Pi} E_{t,x}[U(X(T)) | X(t) = x].$$

结合式 (3.6) 可得 HJB 方程,

$$\begin{aligned}
 & V_t + \max_{\pi_t \in \Pi} \{V_x [x((c-r)\pi(t) + \frac{1}{\omega - \omega_0 - t} + r) + L - \frac{M}{\omega - \omega_0 - t} - \lambda\eta]\} \\
 & + \frac{1}{2} x^2 \pi(t)^2 \sigma_1^2 V_{xx} + \frac{1}{2} \lambda \sigma_2^2 V_{xx} - x \pi(t) \sigma_1 \sigma_2 \rho \sqrt{\lambda} V_{xx} = 0,
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

其中, V_t , V_x , V_{xx} 表示 V 关于 t , x 的一阶和二阶偏导.

通过求解式 (3.7) 可得到最优投资策略

$$\pi^*(t) = \frac{\sigma_2 \rho \sqrt{\lambda}}{x \sigma_1} - \frac{(c-r)V_x}{\sigma_1^2 V_{xx}}. \tag{3.8}$$

将式 (3.8) 代入式 (3.7) 可得

$$\begin{cases} V_t + V_x [x(\frac{1}{\omega - \omega_0 - t} + r) + \frac{\sigma_2 \rho \sqrt{\lambda}(c-r)}{\sigma_1} + L - \frac{M}{\omega - \omega_0 - t} - \lambda\eta] \\ + \frac{1}{2} V_{xx} (\lambda \sigma_2^2 - \lambda \rho^2 \sigma_1^2) - \frac{(c-r)^2 V_x^2}{2 \sigma_1^2 V_{xx}} = 0, \\ X(0) = x_0, \end{cases} \tag{3.9}$$

且边界条件满足 $V(T, x) = U(x)$.

假设解的结构为 $V(t, x) = \frac{1-\gamma}{q\gamma} (\frac{qx}{1-\gamma} f(t) + \beta g(t) + h(t))^\gamma$. 其边界条件为:

$$f(T) = 1, g(T) = 1, h(T) = 0.$$

将 $V(t, x)$ 代入式 (3.9) 可得

$$\begin{cases} V_t = \frac{1-\gamma}{q} (\frac{qx}{1-\gamma} f + \beta g + h)^{\gamma-1} (\frac{qx}{1-\gamma} f_t + \beta g_t + h_t), \\ V_x = f (\frac{qx}{1-\gamma} f + \beta g + h)^{\gamma-1}, \\ V_{xx} = -f^2 q (\frac{qx}{1-\gamma} f + \beta g + h)^{\gamma-2}, \end{cases}$$

其中 f_t, g_t, h_t 分别表示 $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ 关于 t 的一阶偏导.

为了简便公式, 令

$$A = \frac{qx}{1-\gamma} f + \beta g + h, a = \frac{1}{\omega - \omega_0 - t} + r,$$

$$b = \frac{\sigma_2 \rho \sqrt{\lambda} (c-r)}{\sigma_1} + L - \frac{M}{\omega - \omega_0 - t} - \lambda \eta, d = \frac{1}{2}(\lambda \sigma_2^2 - \lambda \rho^2 \sigma_2^2), j = \frac{(c-r)^2}{2\sigma_1^2}.$$

综上可得

$$\frac{1-\gamma}{q} \left(\frac{qx}{1-\gamma} f_t + \beta g_t + h_t \right) A^{\gamma-1} + axfA^{\gamma-1} + bfA^{\gamma-1} - dqf^2 A^{\gamma-2} + \frac{j}{q} A^\gamma = 0. \quad (3.10)$$

将式 (3.10) 以 x 为依赖展开

$$\begin{aligned} 0 = & (\beta g f_t + h f_t + \beta f g_t + f h_t + a \beta g f + a f h + \frac{2 f j}{q(1-\gamma)} (\beta^2 q g - q h) + \frac{q}{1-\gamma} b f^2) x \\ & + \left(\frac{q}{1-\gamma} f f_t + \frac{q a}{1-\gamma} f^2 + \frac{q^2 f^2 j^2}{(1-\gamma)^2} \right) x^2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

将式 (3.11) 分离变量后得

$$f_t + \left(a + \frac{j}{1-\gamma} \right) f = 0, g_t + \frac{j(2\beta-1)}{1-\gamma} g = 0, h_t + \frac{j q}{1-\gamma} h + \frac{b q f}{1-\gamma} = 0.$$

综上可得

$$\begin{aligned} f(t) = & \frac{\omega - \omega_0 - t}{\omega - \omega_0 - T} e^{\left(r + \frac{j}{1-\gamma} \right) (T-t)}, g(t) = e^{\frac{j(2\beta-1)}{1-\gamma} (T-t)}, \\ h(t) = & \left[M \left(1 - e^{\left(r + \frac{2j}{1-\gamma} \right) (T-t)} \right) - \left(\frac{\sigma_2 \rho \sqrt{\lambda} (c-r)}{\sigma_1} + L - \lambda \eta \right) \left(\frac{1 - e^{\left(r + \frac{2j}{1-\gamma} \right) (T-t)}}{\omega - \omega_0} \right) + \left(r + \frac{2j}{1-\gamma} \right) (T-t) \right. \\ & \left. + e^{\left(r + \frac{2j}{1-\gamma} \right) (T-t)} - 1 \right] \frac{q e^{\frac{j(T-t)}{1-\gamma}}}{(1-\gamma) \left(r + \frac{2j}{1-\gamma} \right) (\omega - \omega_0 - T)}. \end{aligned}$$

值函数为

$$V(t, x) = \frac{1-\gamma}{q\gamma} \left(\frac{qx}{1-\gamma} f(t) + \beta g(t) + h(t) \right)^\gamma.$$

优化问题的最优投资策略为

$$\pi^*(t) = \frac{\sigma_2 \rho \sqrt{\lambda}}{x \sigma_1} - \frac{(c-r)}{(1-\gamma) \sigma_1^2} + \frac{(c-r) \beta g(t)}{x \sigma_1^2 q f(t)} + \frac{(c-r) h(t)}{x \sigma_1^2 q f(t)}.$$

3.3 数值分析

本节进行数值模拟分析, 分析各个相关参数对于最优决策的影响. 本章参数设定主要参考陈佳辰等^[17] 和王远野等^[18] 的参数设置, 具体数值见下表

表 3-1 数值参数

参数	ρ	λ	c	L	γ	q	σ_1	σ_2
取值	0.2	1	0.05	2	-5	5	0.8	0.25
参数	η	ω	r	T	x	M	β	ω_0
取值	1	100	0.03	40	1	20	0.8	20

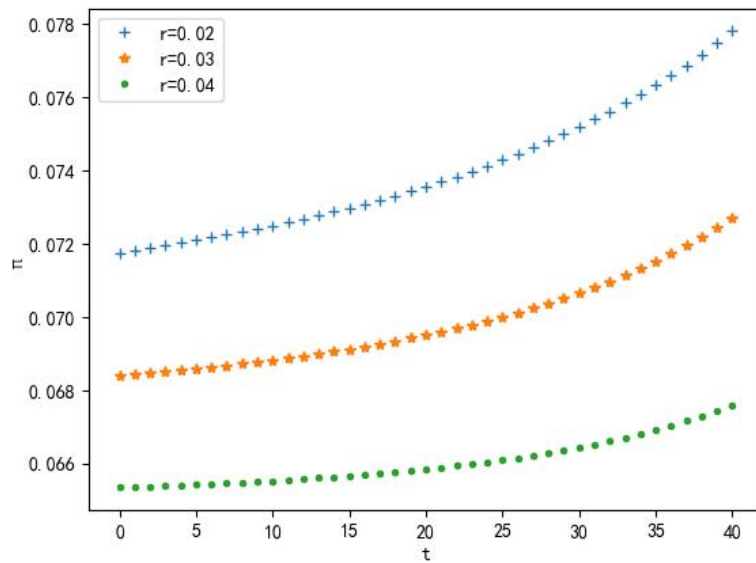


图 3-1 r 对最优投资策略的影响

图 3-1 表示利率 r 对最优投资策略的影响, 利率越高, 投资在无风险资产收益更多, 保险基金的管理者会顺应市场将更多的把钱投入到无风险资产上, 这和实际情形相符合.

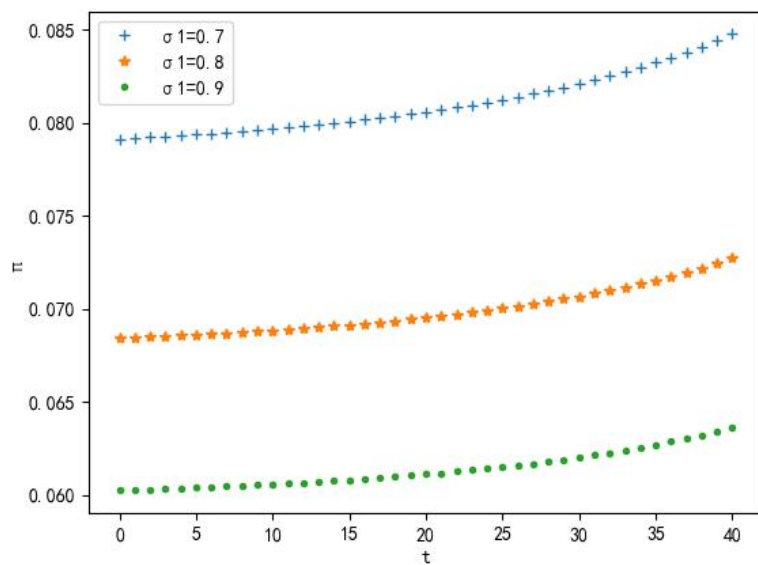
图 3-2 σ_1 对最优投资策略的影响

图 3-2 表示股票波动率 σ_1 对最优投资策略的影响， σ_1 越大，不确定程度越大，风险越大，基金管理者投资在股票的占比变低，表示基金管理者在高风险市场环境下更愿意把钱投资在无风险资产上，这 and 实际情形相符合。

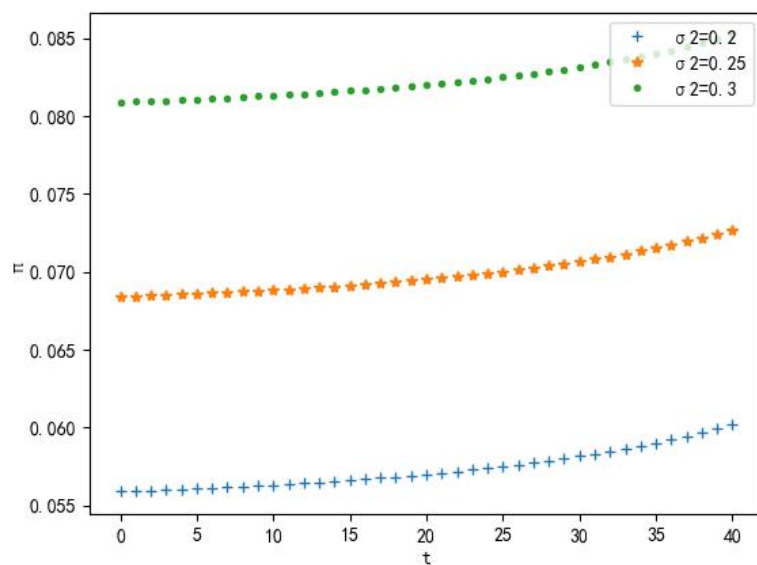
图 3-3 σ_2 对最优投资策略的影响

图 3 表示 σ_2 对最优投资策略的影响， σ_2 表示为投保人发生意外伤残情形波动

率, σ_2 越大, 投保人出现意外概率越大, 保险赔付次数越多, 基金管理者为了让基金更好的保值增值, 会更多的把钱投资在股票上以此来获取超额收益, 这和实际情形相符合.

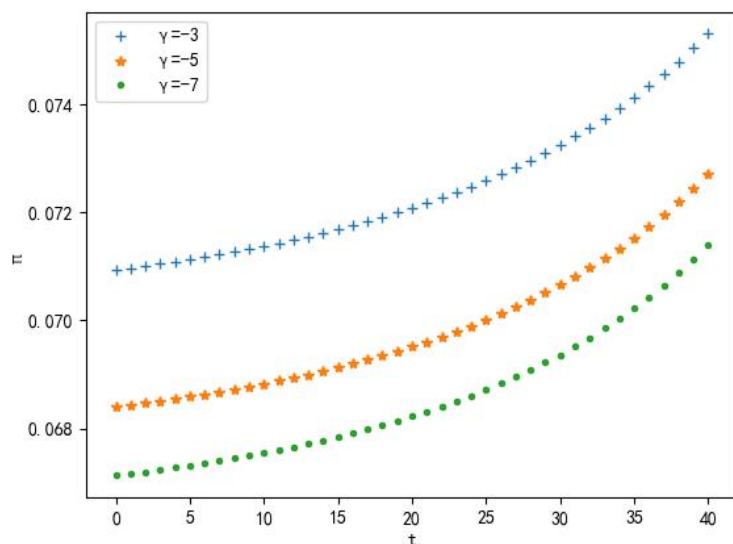


图 3-4 γ 对最优投资策略的影响

图 4 表示参数 γ 对最优投资策略的影响, 由图 4 可以看出, 当 γ 增大, 基金管理者更愿意的把基金更多的投资于股票上, 参数 γ 与在股票的投资比例 π 呈正相关.

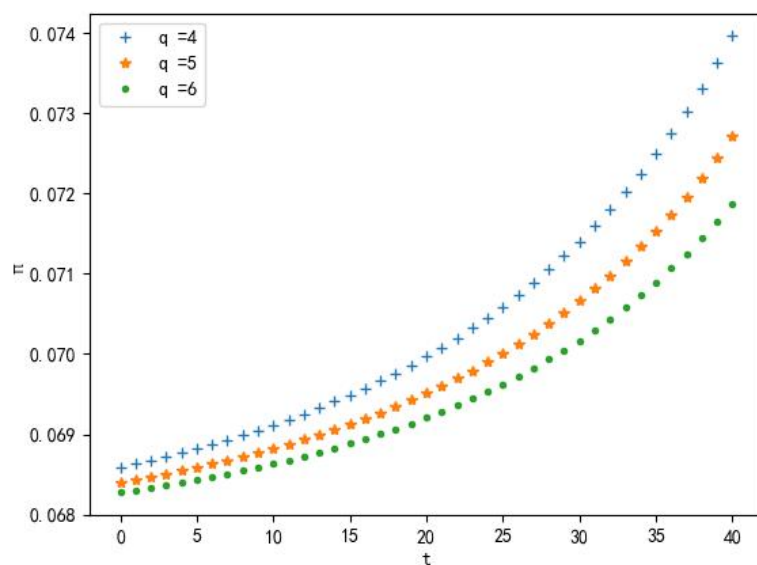


图 3-5 q 对最优投资策略的影响

图 3-5 表示参数 q 对最优投资策略的影响, 由图 5 可以看出, 当 q 增大, 基金管理者更愿意的把基金更多的投资于股票上, 参数 q 与在股票的投资比例 π 呈负相关.

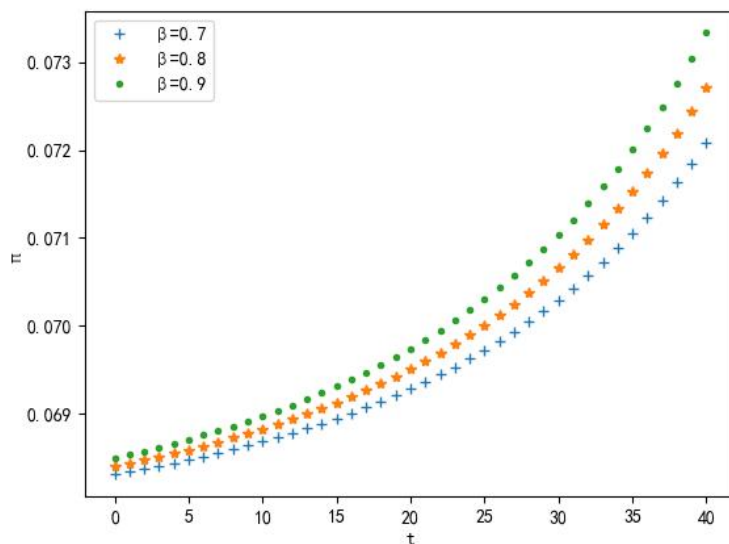
图 3-6 β 对最优投资策略的影响

图 3-6 表示参数 β 对最优投资策略的影响, 由图 6 可以看出, 当 β 增大, 基金管理者更愿意的把基金更少的投资于股票上, 参数 β 与在股票的投资比例 π 呈正相关.

3.4 本章小结

本节通过数值模拟分析, 探析了各个参数对最优投资决策的影响. 结果表明, 利率 r 越高, 投资无风险资产收益更多, 保险基金的管理者会将更多的把钱投入到无风险资产上. 当股票波动率 σ_1 越大, 不确定程度越大, 风险越大, 基金管理者投资在股票的占比变低, 表示基金管理者在高风险市场环境下更愿意把钱投资在无风险资产上. 当投保人发生意外伤害情形波动率 σ_2 越大, 投保人出现意外概率越大, 保险赔付次数越多, 基金管理者为了让基金更好的保值增值, 会更多的把钱

投资在股票上以此来获取超额收益，这与实际情形相符合. 另外参数 β 和 γ 与股票的投资比例 π 呈正相关，参数 q 与股票的投资比例 π 呈负相关. 同时我们发现随着时间推移，基金管理者会更多地把资金投入到风险资产上，这是因为风险资产的虽然存在风险波动，但长期来看，均收益会高于无风险资产上的收益.

第 4 章 通胀环境下考虑带有意外返还的 DC 型 养老金问题

为了尽量规避长期投资带来的通胀风险, 使其更好地贴近现实. 将养老基金投资于无风险资产、风险资产以及通胀-相关指数债券. 这里假设风险资产的价格过程由简单的几何布朗运动模型描述, 基金管理者的目标是使终端财富期望效用达到最大. 应用随机控制理论, 建立相应的 HJB 方程, 然后计算得到 HARA 效用函数下的最优解. 最后通过数值模拟, 从经济层面分析重要参数对最优投资策略的影响.

4.1 建立模型

同上一章, 设定 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ 是一个完备概率空间, $\mathcal{F}_t$ 为市场上截止到时刻 t 的信息流, 所有随机过程均为 $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$ 适应的. 假设市场上有三种资产被基金管理者选择. 第一种是风险资产(股票), 第二种为无风险资产(债券), 第三种为通胀-相关指数债券.

无风险资产 S^0 在 t 时刻的价格过程为

$$\begin{cases} dS^0(t) = r(t)S^0(t), \\ S^0(t) = s^0, \end{cases}$$

其中, $r(t)$ 是在 t 时刻的市场无风险利率.

风险资产被定义为 S^1 , t 时刻的价格过程服从几何布朗运动

$$\begin{cases} dS^1(t) = S^1(t)[c dt + \sigma_1 dW_1(t)], \\ S^1(t) = s^1, \end{cases}$$

其中, 正常数 c 和 σ_1 分别是风险资产的收益率和波动率, $W_1(t)$ 为概率空间

$(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ 上的一个标准布朗运动.

由于养老金计划时间较长，期间发生的通胀风险不可忽视，下面将介绍常见的通胀指数债券，并用商品价格指数 $I(t)$ 投的价格过程表示通胀水平， $I(t)$ 满足如下方程

$$\frac{dI(t)}{I(t)} = \mu_I dt + \sigma_I dW_I(t),$$

其中， $\mu_I > 0$ 是一个常数，表示平均通胀率， $\sigma_I > 0$ 表示通货膨胀率的波动率， $W_I(t)$ 为一维标准布朗运动，且 $W_I(t)$ 与 $W_1(t)$ 线性无关。

若引入通胀指数债券来对冲漫长时间股票市场产生的通胀风险，假设 t 时刻的价格过程满足如下随机微分方程

$$\frac{dB(t)}{B(t)} = r(t)dt + \frac{dI(t)}{I(t)} = (r(t) + \mu_I(t))dt + \sigma_I dW_I(t).$$

其中， $r(t)$ 为 t 时刻的真实利率， $r(t) + \mu_I(t)$ 为通胀指数债券的瞬时收益率。

类似第三章，在这个 DC 型养老金模型中，设在积累阶段养老基金的持有者单位时间内缴纳的保费为 L ，初始时刻为 ω_0 ，终止时刻 $\omega_0 + T$ 。在这个时间段 $[0, T]$ 内，管理者为了使得基金财富值增加，基金管理者会将投资比例为 $\pi_1(t)$ 投资在股票， $\pi_2(t)$ 投资在通胀指数债券， $1 - \pi_1(t) - \pi_2(t)$ 投资于无风险资产获取收益。基金持有者在退休时领取福利，为了保障在累积阶段发生死亡以及未死亡但存在伤残情形的基金持有者的权益，本章将保费返还引入养老金计划。死亡的投保人可以获得合同上约定的赔偿，那么同理，当投保人发生身体意外伤残情形，也可以获得一定数量的赔偿。假定 M 是合同约定的死亡赔偿， $\Delta t q_{\omega_0+t}$ 表示年龄为 $\omega_0 + t$ 的人在时间段 $[\omega_0 + t, \omega_0 + t + \Delta t]$ 内死亡的概率。当基金持有者死亡，基金赔付值与积累值的差额将在存活基金持有者账户进行平均分配。意外伤残赔付，由一个复合泊松过程进行刻画，此时投保人没有死亡，赔付后的差额将不会在存活的基金持有者账户上进行分配。

定义伤残事故的赔偿为 $R(t)$ ，其形式为

$$R(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i,$$

其中, $N(t)$ 是一个强度为 $\lambda > 0$ 的时间一致泊松过程, 表示 t 时间段内发生伤残事故的次数; Y_i 表示发生伤残赔偿金, $E[Y_i] = \eta, E[Y_i^2] = \sigma_2^2$.

基金的财富过程 $X(t)$ 可表示为

$$X(t + \Delta t) = [\pi_1(t) \frac{S^1(t + \Delta t)}{S^1(t)} + \pi_2(t) \frac{dI(t + \Delta t)}{I(t)} + (1 - \pi_1(t) - \pi_2(t)) \frac{S^0(t + \Delta t)}{S^0(t)} + \Delta t L - \Delta R(t)(1 - \Delta t q_{\omega_0+t}) - M \Delta t q_{\omega_0+t}] \frac{1}{1 - \Delta t q_{\omega_0+t}}, \quad (4.1)$$

其中, $\pi_1(t)$ 是分配在风险资产上的比例, $\pi_2(t)$ 是投资在通胀指数债券上的比例,

$\frac{1}{1 - \Delta t q_{\omega_0+t}}$ 表示在支付死亡赔偿金后的差值被平分给存活者的寿险基金账户.

令

$$\Delta \delta_t^{\Delta t} = \pi_1(t) \frac{S^1(t + \Delta t)}{S^1(t)} + \pi_2(t) \frac{I(t + \Delta t)}{I(t)} + (1 - \pi_1(t) - \pi_2(t)) \frac{S^0(t + \Delta t)}{S^0(t)}. \quad (4.2)$$

将式 (4.2) 代入式 (4.1) 可得

$$X(t + \Delta t) = [X(t)(1 + \Delta \delta_t^{\Delta t}) - \Delta R(t)(1 - \Delta t q_{\omega_0+t}) + \Delta t L - M \Delta t q_{\omega_0+t}] \left(\frac{\Delta t q_{\omega_0+t}}{1 - \Delta t q_{\omega_0+t}} + 1 \right). \quad (4.3)$$

式 (4.3) 应用条件死亡概率简化可得

$$tqx = 1 - tpx = 1 - e^{-\int_0^t \mu(x+s) ds}.$$

$\mu(t)$ 表示精算数学中的死力函数, 可以算得

$$\Delta t q_{\omega_0+t} = 1 - e^{-\int_0^{\Delta t} \mu(\omega_0+t+s) ds} \approx \mu(\omega_0+t) \Delta t = O(\Delta t).$$

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $\mu(\omega_0+t)$ 在养老金的积累阶段很小时上式成立, 从而可以推出

$$\frac{\Delta t q_{\omega_0+t}}{1 - \Delta t q_{\omega_0+t}} = \frac{1 - e^{-\int_0^{\Delta t} \mu(\omega_0+t+s) ds}}{e^{-\int_0^{\Delta t} \mu(\omega_0+t+s) ds}} = e^{\int_0^{\Delta t} \mu(\omega_0+t+s) ds} - 1 \approx \mu(\omega_0+t) \Delta t = O(\Delta t).$$

死力函数 $\mu(t)$ 用 Abraham De Moivre 模型刻画, 即

$$\mu(t) = \frac{1}{\omega - t},$$

其中 $0 \leq t \leq \omega$, ω 表示生命年表的最大值, 综上可得到财富过程如下

$$\begin{cases} dX(t) = X(t) [(c-r)\pi_1 + \mu_1\pi_2 + r + \mu(\omega+t)dt]dt + Ldt - M\mu(\omega+t)dt \\ \quad - dR(t) + X(t)\pi_1\sigma_1dW_1(t) + X(t)\pi_2\sigma_2dW_2(t), \\ X(t) = x_0. \end{cases} \quad (4.4)$$

同上一章, 将复合泊松过程近似

$$dR(t) = \lambda\eta dt + \sqrt{\lambda}\sigma_2dW_2(t), \quad (4.5)$$

其中 $W_2(t)$ 是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ 上的一个标准布朗运动, 与 $W_1(t)$ 无关, 与

$W_1(t)$ 具有相关性, 假定他们之间的相关系数为 ρ . 将式 (4.5) 代入式 (4.4) 可得,

$$\begin{cases} dX(t) = X(t) [(c-r)\pi_1 + \mu_1\pi_2 + \frac{1}{\omega - \omega_0 - t} + r]dt + Ldt - \frac{M}{\omega - \omega_0 - t}dt \\ \quad - \lambda\mu dt + X(t)\pi_1\sigma_1dW_1(t) + X(t)\pi_2\sigma_2dW_2(t) - \sqrt{\lambda}\sigma_2dW_2(t), \\ X(0) = x_0. \end{cases}$$

4.2 最优投资策略

定义 Π 为养老金计划的可允许策略集, 且 $\Pi = \{\pi_t | \pi_t = (\pi_1(t), \pi_2(t)), 0 \leq t \leq T\}$.

管理者的目标是使终端财富期望效用 $E[U(X(T))]$ 达到最大, 即

$$\max_{\pi_t \in \Pi} E[U(X(T))],$$

其中, 效用函数 $U(\bullet)$ 不仅满足 Inada 条件 (即一阶导数大于 0, 二阶导数小于 0),

同时它也是一个严格凹的连续可微函数 $U'(+\infty)=0, U'(0)=+\infty$.

本章仍然采用 HARA 效用函数

$$U(x) = U(\beta, \gamma, q, x) = \frac{1-\gamma}{q\gamma} \left(\frac{qx}{1-\gamma} + \beta \right)^\gamma,$$

其中 $q > 0, \gamma < 1, \gamma \neq 0$.

运用随机最优控制的理论方法，定义值函数

$$V(t, x) = \sup_{\pi_t \in \Pi} E_{t,x}[U(X(T)) | X(t) = x].$$

于是可得 HJB 方程,

$$\begin{aligned} V_t + \max_{\pi_t \in \Pi} \{ & V_x [x((c-r)\pi_1(t) + \pi_2(t)\mu_l + \frac{1}{\omega - \omega_0 - t} + r) + L - \frac{M}{\omega - \omega_0 - t} - \lambda\eta] \} \\ & + \frac{1}{2} x^2 \pi_1(t)^2 \sigma_1^2 V_{xx} + \frac{1}{2} x^2 \pi_2(t)^2 \sigma_l^2 V_{xx} + \frac{1}{2} \lambda \sigma_2^2 V_{xx} - x \pi_1(t) \sigma_1 \sigma_2 \rho \sqrt{\lambda} V_{xx} = 0, \end{aligned} \quad (4.6)$$

其中, V_t , V_x , V_{xx} 表示 V 关于 t , x 的一阶和二阶偏导.

通过求解式 (4.6) 可得到股票最优投资策略 π_1^* 以及通胀-相关指数债券最优投资策略 π_2^*

$$\begin{aligned} \pi_1^*(t) &= \frac{\sigma_2 \rho \sqrt{\lambda}}{x \sigma_1} - \frac{(c-r)V_x}{\sigma_1^2 V_{xx}}, \\ \pi_2^*(t) &= -\frac{\mu_l V_x}{\sigma_l^2 x V_{xx}}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

将式 (4.7) 代入式 (4.6) 可得

$$\begin{aligned} V_t + \frac{(c-r)\sigma_2 \rho \sqrt{\lambda} V_x}{\sigma_1} - \frac{(c-r)^2 x V_x^2}{\sigma_1^2 V_{xx}} - \frac{\mu_l^2 V_x^2}{\sigma_l^2 V_{xx}} + \left(\frac{x}{\omega - \omega_0 - t} + rx \right) V_x \\ + \left(L - \frac{M}{\omega - \omega_0 - t} - \lambda\eta \right) V_x + \frac{\sigma_2^2 \rho^2 \lambda V_{xx}}{2} - \frac{\sigma_2 \rho \sqrt{\lambda} x (c-r) V_x}{\sigma_1} + \frac{(c-r)^2 V_x^2}{2 \sigma_1^2 V_{xx}} \\ + \frac{1}{2} \frac{\mu_l^2 V_x^2}{\sigma_l^2 V_{xx}} + \frac{1}{2} \lambda \sigma_2^2 V_{xx} + \frac{(c-r)\sigma_2 \rho \sqrt{\lambda} x V_x}{\sigma_1} - \sigma_2 \rho^2 \lambda^2 V_{xx} = 0, \end{aligned} \quad (4.8)$$

且边界条件满足 $V(T, x) = U(x)$.

假设解的结构为

$$V(t, x) = \frac{1-\gamma}{q\gamma} \left(\frac{qx}{1-\gamma} f(t) + \beta g(t) \right)^\gamma,$$

其边界条件为: $f(T) = 1, g(T) = 1$.

将 $V(t, x)$ 代入式 (4.8) 可得

$$\begin{cases} V_t = \frac{1-\gamma}{q} \left(\frac{qx}{1-\gamma} f + \beta \right)^{\gamma-1} \left(\frac{qx}{1-\gamma} f_t + \beta g_t \right), \\ V_x = f \left(\frac{qx}{1-\gamma} f + \beta g \right)^{\gamma-1}, \\ V_{xx} = -f^2 q \left(\frac{qx}{1-\gamma} f + \beta g \right)^{\gamma-2}, \end{cases}$$

其中 f_t, g_t 分别表示 $f(t), g(t)$ 关于 t 的一阶偏导.

为了简便公式,令

$$A = \frac{qx}{1-\gamma} f + \beta g + h, a = \left(\frac{1}{\omega - \omega_0 - t} + r \right),$$

$$b = \frac{(c-r)\sigma_2 \rho \sqrt{\lambda}}{\sigma_1} + (L - \frac{M}{\omega - \omega_0 - t} - \lambda \eta), d = \frac{1}{2} \lambda \sigma_2^2 - \frac{1}{2} \lambda \rho^2 \sigma_2^2, j = \frac{(c-r)^2}{\sigma_1^2}, k = \frac{\mu_t^2}{2\sigma_t}.$$

综上所述可得

$$\begin{aligned} & \frac{fqx^2}{(1-\gamma)\gamma} f_t + \beta g_t \frac{fx}{\gamma} + \frac{x}{\gamma} f_t \beta g + g \beta^2 g_t \frac{1-\gamma}{q\gamma} + \frac{aqx^2}{1-\gamma} f^2 + \frac{bqx}{1-\gamma} f^2 + a \beta g f x + b \beta g f \\ & - \frac{q^2 f^2 x^2 df^2 q}{(1-\gamma)^2} - \frac{2qf \beta g x df^2 q}{1-\gamma} - 2\beta g h df^2 q - \beta^2 g^2 df^2 q + \frac{j}{q} x - \frac{j}{2q} x^2 - \frac{k}{q} = 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

由式 (4.10) 可得

$$\frac{j}{2q} (x-1)^2 + x^2 \left(\frac{qf}{1-\gamma} f_t + \frac{aq}{1-\gamma} f^2 \right) + x \left(\frac{\beta g}{\gamma} f_t + \frac{f}{\gamma} \beta g_t + a \beta g f + \frac{bq}{1-\gamma} f^2 \right). \quad (4.10)$$

将式 (4.11) 分离变量后得

$$f_t + af = 0, g_t + \frac{bq\gamma}{(1-\gamma)\beta} f = 0.$$

由上可得

$$f(t) = \frac{\omega - \omega_0 - t}{\omega - \omega_0 - T} e^{r(T-t)},$$

$$g(t) = \frac{(e^{r(T-t)} - 1)Mm}{(\omega - \omega_0 - T)r} - \frac{(\omega - \omega_0 - t)mn}{(\omega - \omega_0 - T)r} e^{r(T-t)} + \frac{(e^{r(T-t)} - 1)mn}{(\omega - \omega_0 - T)r^2} + \frac{mn-r}{r},$$

其中

$$m = \frac{q\gamma}{(\gamma-1)\beta}, n = \frac{(c-r)\sigma_2\rho\sqrt{\lambda}}{\sigma_1} + L - \lambda\eta.$$

值函数为

$$V(t, x) = \frac{1-\gamma}{q\gamma} \left(\frac{qx}{1-\gamma} f(t) + \beta g(t) \right)^\gamma.$$

优化问题的最优投资策略为

$$\begin{aligned} \pi_1^*(t) &= \frac{\sigma_2\rho\sqrt{\lambda}}{x\sigma_1} - \frac{(c-r)\beta g}{fq\sigma_1^2} + \frac{(c-r)qxf}{(1-\gamma)fq\sigma_1^2}, \\ \pi_2^*(t) &= \frac{\beta g\mu_l}{fq\sigma_l^2 x} + \frac{qxf\mu_l}{(\gamma-1)fq\sigma_l^2 x}. \end{aligned}$$

4.3 数值分析

在本节中,我们研究相关参数对最优投资策略的影响. 相关参数假设如下:

表 4-1 参数设置

参数	ρ	λ	c	L	γ	q	σ_1	σ_2	β
取值	1	1	0.04	2	-5	5	0.8	0.25	0.8
参数	η	ω	r	T	x	M	σ_l	μ_l	ω_0
取值	1	100	0.04	40	1	20	0.75	0.03	20

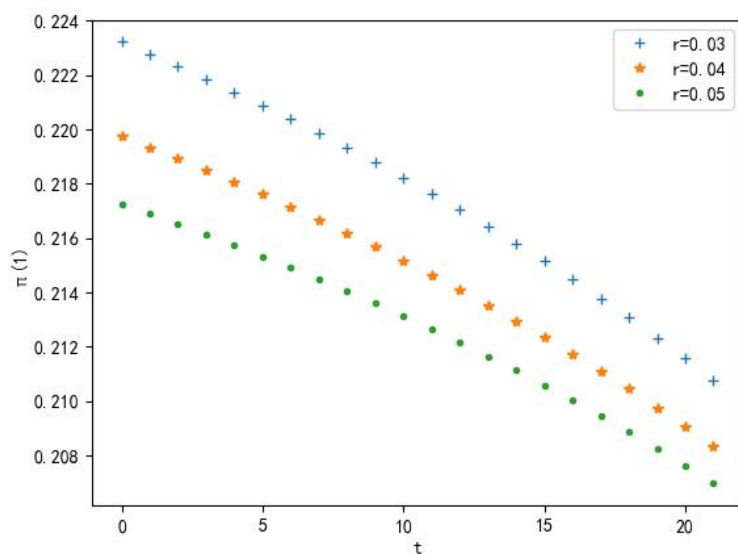
图 4-1 利率 r 对最优策略 $\pi_1^*(t)$ 的影响

图 4-1 表示利率 r 对最优策略 $\pi_1^*(t)$ 的影响，结果表明利率增大时基金管理者在股票投资占比减少，基金管理者会更多地投资在无风险资产上，并且随着时间的推移，基金管理者会减少在股票上的投资，这是因为基金管理者希望能够获取稳定收益，规避风险资产的市场波动风险，这与实际情形相符合。

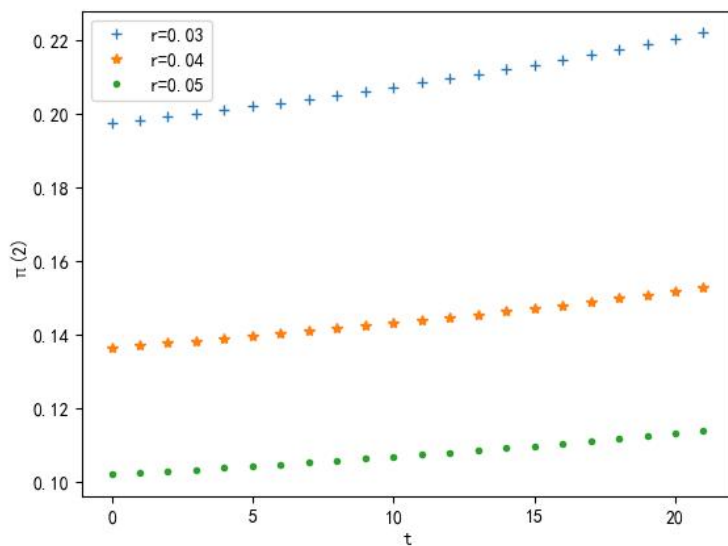
图 4-2 利率 r 对最优策略 $\pi_2^*(t)$ 的影响

图 4-2 表示利率 r 对最优投资策略 $\pi_2^*(t)$ 的影响, 结果表明当利率上升, 基金管理者会减少在通胀-相关指数债券上的投资比例, 这 and 实际情形相符合.

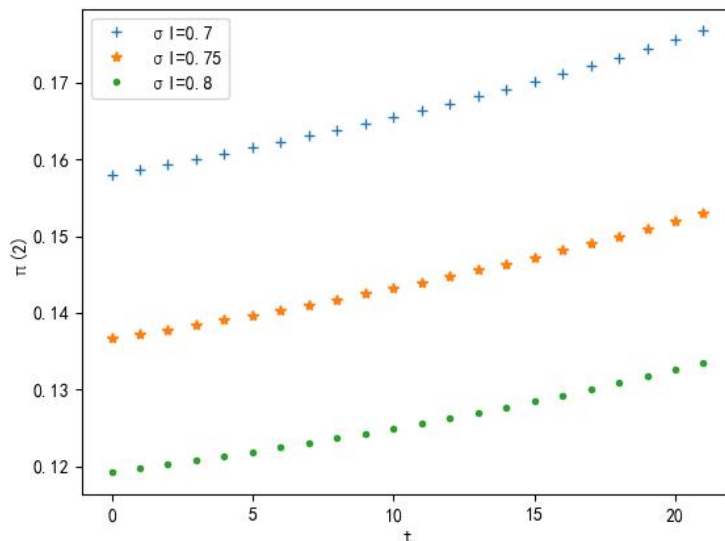


图 4-3 σ_I 对最优策略 $\pi_2^*(t)$ 的影响

图 4-3 表示通胀-相关指数债券通胀波动率 σ_I 对最优投资策略 $\pi_2^*(t)$ 的影响, 结果表明当波动率增加, 风险程度越大, 基金管理者会为了规避风险, 会减少在通胀-相关指数债券上的投资, 这 and 实际情形相符合.

4.4 本章小结

本章主要讨论了利率和相关波动率对最优投资策略 $\pi_1^*(t)$ 和 $\pi_2^*(t)$ 的影响. 通过数值模拟分析, 我们发现当利率增大时基金管理者在股票资产投资占比减少, 会更多的投资在无风险资产上, 当通胀-相关指数债券的通胀波动率上升时, 风险程度变大, 基金管理者会为了获取稳定收益, 规避市场波动风险, 这时会减少在通胀-相关指数债券的投资, 更多的将资金投入到了无风险资产上. 同时我们发现随着时间推移, 基金管理者会更多地把资金投入到了通胀-相关指数债券上, 这是因为通胀-相关指数债券虽然存在风险波动, 但长期来看, 均收益会高于无风险资产上的收益.

第5章 结论与展望

首先,我们考虑在 HARA 效用下,研究了投保人可能发生死亡和伤残情形下的 DC 型养老金计划.将养老金投资于金融市场,将其中的意外伤残情形用泊松过程描述,并且参用精算数学模型对泊松过程进行近似,运用动态规划的方法,在 HARA 效用函数下得到最优解,通过数值模拟分析重要参数对最优投资策略的影响.结果表明基金管理者愿意顺应市场规律去进行投资,当利率增大时基金管理者在风险资产投资占比减少,但是如果随着时间推移,对投保人赔付次数增多,基金管理者会为了资产保值增值,会更多的将资金在风险资产上获取超额收益.

其次,我们在以上经济模型的基础上考虑漫长投资过程中可能发生的通胀风险,使其更贴合实际金融市场.将养老金分别投资于无风险资产、风险资产以及通胀-相关指数债券,得到 HARA 效用函数下的最优解,最后通过数值模拟,从经济层面考虑重要参数对最优投资策略的敏感性分析.结果表明当利率增大时,基金管理者减少在风险资产投资占比,会更多的投资在无风险资产上,当通胀-相关指数债券的通胀波动率上升时,风险程度变大,基金管理者会为了获取稳定收益,规避市场波动风险,这时会减少在风险资产的投资,更多的将资金投入在无风险资产上,符合实际市场预期.

并且可以在以下几个方面进一步深入研究:

1. 我们对金融模型做了一些假设,在设定股票模型时令其价格过程满足于几何布朗运动,后续可以把几何布朗运动进行拓展,比如 CEV 模型、Heston 模型或者其他模型.
2. 本文在考虑 DC 养老金模型并没有考虑到投保人的工资收入,工资收入因素在实际生活会影响投保人的选择.
3. 在第三第四章模型框架中,可以将 HARA 效用函数改为对数效用、指数效用以及幂效用分类讨论进行对比研究.

参考文献

- [1] 刘世锦, 罗纲, 李绍光. 中国养老保险模式选择与养老保险金进入资本市场问题探讨[J]. 管理世界, 1997, (03): 172-179.
- [2] 顾孟迪, 李新. 养老基金风险性投资的保险[J]. 系统工程理论方法应用, 1998, 7(2): 10-13.
- [3] 李绍光. 养老金基金的政府管制[J]. 当代经济科学, 1998, 20(4): 15-20.
- [4] 费为银, 蔡振球, 夏登峰. 跳扩散环境下带通胀的最优动态资产配置[J]. 管理科学学报, 2015, 18(8): 83-94.
- [5] 殷艳红, 夏登峰, 郭宇超. 跳-扩散市场环境下基于股票误定价的DC型养老金最优投资策略[J]. 安徽工程大学学报, 2022, 37(02): 77-84.
- [6] Merton R. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model[J]. Working papers, 1970, 3(4): 373-413.
- [7] Gerrard R, Haberman S, Vigna E. Optimal investment choices post-retirement in a defined contribution pension scheme[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2004, 35(2): 321-342.
- [8] Vigna E, Haberman S. Optimal investment strategy for defined contribution pension schemes[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2001, 28(2): 233-262.
- [9] Haberman S, Vigna E. Optimal investment strategies and risk measures in defined contribution pension schemes[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2002, 31(1): 35-69.
- [10] Devolder P, Princep M, Fabian I. Stochastic optimal control of annuity contracts[J]. Insurance Mathematics and Economics, 2003, 33(2): 227-238.
- [11] Cox J, Huang C. Optimal consumption and portfolio policies when asset prices follow a diffusion process[J]. Journal of Economic Theory, 1989, 49(1): 33-83.
- [12] Guan G, Liang Z. Mean-variance efficiency of DC pension plan under stochastic interest rate and mean-reverting returns[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2015, 61: 99-109.

- [13]Thomson R. The Use of Utility Functions for Investment Channel Choice in Defined Contribution Retirement Funds. I: Defence[J]. British Actuarial Journal, 2003, 9(3): 653-709.
- [14]Boulier J, Huang S, Grégory Taillard. Optimal management under stochastic interest rates: the case of a protected defined contribution pension fund[J]. Insurance Mathematics and Economics, 2001, 28(2):173-189.
- [15]Cairns A, Blake D, Dowd K. Stochastic lifestyling: Optimal dynamic asset allocation for defined contribution pension plans[J]. Journal of Economic Dynamics and Control, 2006, 30(5): 843-877.
- [16]李春丽, 蔡玉杰. CIR利率模型中基于对数效用的投资组合最优化问题 (英文)[J]. 数学杂志, 2015, 6: 1297-1306.
- [17]Gao J. Optimal portfolios for DC pension plans under a CEV model[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2009, 44(3): 479-490.
- [18]常浩, 王春峰, 房振明. 通胀风险下基于HARA效用的DC型养老金计划[J]. 运筹学学报, 2016, 20(4): 39-51.
- [19]马娟. HESTON模型下资产负债管理问题的研究[D]. 天津工业大学, 2017.
- [20]Guasoni, P. Asymmetric information in fads models[J]. Finance and Stochastics, 2006, 10(2): 159-177.
- [21]French K, Schwert G, Stambaugh R F. Expected stock returns and volatility[J]. Journal of Financial Economics, 1987, 19(1): 3-29.
- [22]Pagan A, Schwert G. Alternative models for conditional stock volatility[J]. Journal of Econometrics. 1990, 45(1-2): 267-290.
- [23]Hobson D, Rogers L. Complete models with stochastic volatility[J]. Mathematical Finance, 1998, 8(1): 27-48.
- [24]Cox J, Ross S. The valuation of options for alternative stochastic processes[J]. Journal of Financial Economics, 1976, 3(1): 145-166.
- [25]Xiao J, Hong Z, Qin C. The constant elasticity of variance (CEV) model and the legendre transform-dual solution for annuity contracts[J]. Insurance Mathematics

- and Economics, 2007, 40(2): 302-310.
- [26] Gao J. Optimal investment strategy for annuity contracts under the constant elasticity of variance (CEV) model[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2009, 45(1): 9-18.
- [27] 郭宇超, 夏登峰, 殷艳红, 等. 变利率下基于Heston模型考虑误定价的DC养老金计划[J]. 滁州学院学报, 2021, 23(05): 56-65.
- [28] He L, Liang Z. Optimal investment strategy for the DC plan with the return of premiums clauses in a mean-variance framework[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2013, 53(3): 643-649.
- [29] Li D, Rong X, Zhao H, etc. Equilibrium investment strategy for DC pension plan with default risk and return of premiums clauses under CEV model[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2017, 72: 6-20.
- [30] Bian L, Li Z, Yao H. Pre-commitment and equilibrium investment strategies for the DC pension plan with regime switching and a return of premiums clause[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2018, 81: 78-94.
- [31] 陈佳辰, 荣喜民, 赵慧. 带有死亡和意外返还条款的DC型养老金的最优投资问题[J]. 工程数学学报, 2021, 37(6): 651-663.
- [32] Schmidli H. Diffusion approximations for a risk process with the possibility of borrowing and investment[J]. Communications in statistics: Stochastic models, 1994, 10(2): 365-388.
- [33] 崔盛. 经典风险模型中关于破产概率的一个尾等价式[D]. 武汉大学, 2005.
- [34] 郭福城. 扩展的Cramer-Lundberg模型在基金资产配置中的研究[D]. 华南理工大学, 2011.
- [35] 林志民. 绝对破产情形下保险公司的最优投资策略问题[D]. 清华大学, 2017.
- [36] Han N, Hung M. Optimal asset allocation for DC pension plans under inflation[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2012, 51(1): 172-181.
- [37] 梁勇, 费为银, 姚远浩, 等. 通胀和奈特不确定下的养老金最优投资研究[J]. 工程数学学报, 2015, 32(3): 337-347.

- [38]Chen D, Beetsma R, Van W. Unhedgeable inflation risk within pension schemes[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2020, 90: 7-24.
- [39]Shao Y, Xia D, Fei W. Optimal investment strategy for DC pension plan with inflation risk under the hybrid stochastic volatility model[J]. Systems Science and Control Engineering, 2023, 11(1): 2186962.

附 录

硕士期间发表的论文

- [1] 杨铭, 夏登峰, 徐文静, 韩雪伟. HARA效用下考虑DC养老金带有死亡和伤残返还条款的最优投资问题[J]. 安徽师范大学学报(自然科学版)2024, 47(2): 112-117.
- [2] 韩雪伟, 夏登峰, 杨铭, 徐文静. 部分信息与损失厌恶下DC型养老金最优投资策略[J]. 安庆师范大学学报. (录用)
- [3] 徐文静, 夏登峰, 杨铭, 韩雪伟. 变利率下基于CEV模型的最优再保险与投资策略[J]. 安徽工程大学学报. (录用)

致 谢

三年时光悄然而过，万般滋味涌上心头，感慨万分。

记得 21 年，我刚刚收到考上研究生的讯息，我迫不及待分享给本科毕业论文指导老师石学芹老师，跟石老师交流了读研的打算以及未来发展的方向，石老师对我表示肯定和支持并且最后给我留了一句话“男生，无论什么时候成熟都不算晚。”

很难想象，这个年纪的我竟不能够理解什么是“成熟”。于是，2021 年 9 月，带着迷茫的我再次来到了安徽工程大学。

开学伊始，我幸运的遇到了董鹏博、李亮以及张东元成为室友，我们有着相似的兴趣，相融的三观。以生活趣事为佐料，作诗歌互答，感谢你们在我在科研求学路上添上了浓墨重彩的一笔。

后来，我在期待以及紧张不安的心境下拜入夏登峰老师门下。初见夏老师，我的脑海不由自主浮现“温文儒雅，风度翩翩”，“翩翩君子，温润如玉”，我想，书上君子莫过如此。在科研学术培养学生的道路上，夏老师严谨的治学态度以及独特人格魅力更是令我深深折服，循循然善诱我做事做人，让我受益终身。衷心感谢夏老师“博我以文，约我以礼”。

求学路途，遇到了很多有趣的人，有趣的事。在这里，我要感谢身边同学和朋友的陪伴，感谢各位老师诲人不倦，是你们的存在使我的生活充实丰富，多彩绚丽。也感谢你们在我遇到问题时候不遗余力的帮助，让我得以过关难过关过。

读研已近结束，我也终于在研三考过了英语四级。记得在大四毕业季和同学闲聊到，“大学四年都没过四级，考研究生就是为了过四级”。如今终于得偿所愿，战胜心魔。我要感谢“战友”郭松林的共同陪伴与

支持，在备考四级时所付出的汗水。

最后，感谢家人给予我的包容、理解、尊重和支持，没有你们默默付出也就没有如今的我，你们就是我成长道路上最大的依靠，是我前进的动力和方向，或许我还不能完全理解什么是成熟，但我知道傍晚的月亮在照着花开的田野，你们在未来等我，所以我会来。愿以寸草之心，报三春之晖。

2021 年 9 月，带着迷茫来；

2024 年 6 月，满怀希望走。

2024 年 6 月 1 日