

分类号：(O177.2)

密 级：公开

单位代码：10363

学 号：2211020126

题 目： 标准算子代数上的导子和 Lie n-导子

题 目： Derivations and Lie N-derivations on Standard
Operator Algebras

学生姓名： 陈林

指导教师： 何俊 副教授

专 业： 数学

研究方向： 算子代数上的线性映射

论文答辩日期：2024 年 5 月 29 日

安徽工程大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：我恪守学术道德，崇尚严谨学风。所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已明确注明和引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品及成果的内容。论文为本人亲自撰写，我对所写的内容负责，并完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

学位论文作者签名 陈林
日期：2024 年 5 月 31 日

安徽工程大学学位论文版权使用授权书

学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅或借阅。本人授权安徽工程大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保密 ☐，在 _____ 年解密后适用本版权书。

本学位论文属于

不保密 ☒。

学位论文作者签名：陈林
日期：2024 年 5 月 31 日

指导教师签名：何经
日期：2024 年 5 月 31 日

标准算子代数上的导子和 Lie n-导子

摘要

本文研究了标准算子代数上的一些映射，主要包括导子，局部导子，2-局部导子，Lie n-导子和局部 Lie n-导子等。全文分为 5 个章节。

第一章介绍了本文的研究背景，交代了本文所需要研究的问题，回顾了国内外学者的研究进展。同时，给出了需要研究的代数以及映射的定义。

第二章主要考虑了标准算子代数上的导子问题。设 X 是一个 Banach 空间， X 上的全部有界线性算子记作 $B(X)$ ，标准算子代数记作 $\mathcal{A}$ 。我们采用另一种方法证明了从 $\mathcal{A}$ 到 $B(X)$ 的导子都是内导子，同时证明了从 $\mathcal{A}$ 到 $B(X)$ 的局部导子都是导子，最后还证明了从 $\mathcal{A}$ 到 $B(X)$ 的 2-局部导子都是导子。

第三章主要考虑了标准算子代数上的 Lie n-导子标准性问题。我们证明了从标准算子代数到 $B(X)$ 的 Lie n-导子 δ 是标准的，即 δ 可以写成 $d+\tau$ 的形式，其中 d 表示一个导子， τ 表示从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{Z}(\mathcal{A}, B(X))$ 的线性映射，同时对于任意的 $x_1, x_2, \dots, x_n$ ，有 $\tau(p_n(x_1, x_2, \dots, x_n))=0$ ，其中， $\mathcal{Z}(\mathcal{A}, B(X))$ 表示集合 $\{B \in B(X) : \text{对任意的 } A \in \mathcal{A}, AB=BA\}$ 。

第四章在标准算子代数上的 Lie n-导子标准性问题的基础之上，

我们证明了从标准算子代数到 $B(X)$ 的局部 Lie n -导子是 Lie n -导子。

第五章，总结与展望。

关键词：标准算子代数，导子，局部导子，Lie n -导子，局部 Lie n -导子

Derivations and Lie N-derivations on Standard Operator Algebras

ABSTRACT

In this thesis, some mappings on standard operator algebras are studied, including derivations, local derivations, 2-local derivations, Lie n -derivations and local Lie n -derivations, etc. The full text is divided into 5 chapters.

In Chapter one, we introduce the research background of this thesis, explain the problems that need to be studied in this thesis and review the research progress of domestic and foreign scholars. At the same time, the definition of algebras and mappings which need to be studied are given.

In Chapter two, we mainly consider derivation problems on standard operator algebras. Let X is a Banach space, all bounded operators on X are denoted $B(X)$, the standard operator algebra is denoted $\mathcal{A}$. We use another way to prove that the derivations of $\mathcal{A}$ to $B(X)$ are all inner derivations. At the same time, we prove that all local derivations from $\mathcal{A}$ to $B(X)$ are derivations. Finally, we also prove that all 2-local derivations from $\mathcal{A}$ to $B(X)$ are derivations.

In Chapter three, we mainly consider the problem of normality of

Lie n -derivations on standard operator algebras. We prove that the Lie n -derivation δ from standard operator algebras to $B(X)$ is standard, i.e., δ can be written in the form $d + \tau$, where, d represents a derivation, τ represents a linear mapping from $\mathcal{A}$ to $\mathcal{Z}(\mathcal{A}, B(X))$, while for arbitrary $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{A}$, there are $\tau(p_n(x_1, x_2, \dots, x_n)) = 0$, where, $\mathcal{Z}(\mathcal{A}, B(X))$ stands for sets $\{B \in B(X) : \text{for any } A \in \mathcal{A}, AB = BA\}$.

In Chapter four, building on the problem of the normality of Lie n -derivations on standard operator algebras, we prove that the local Lie n -derivations from standard operator algebras to $B(X)$ are Lie n -derivations.

In Chapter five, summary and prospect.

Chen Lin (Applied Mathematics)

Supervised by He jun

KEY WORDS: standard operator algebra, derivation, local derivation, Lie n -derivation, local Lie n -derivation

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 背景介绍	1
1.2 问题描述	1
1.2.1 导子的局部性	2
1.2.2 Lie n -导子的标准性	3
1.2.3 Lie n -导子的局部性	4
1.3 基本概念	5
1.3.1 本文涉及到的代数	5
1.3.2 本文研究的映射	6
第 2 章 导子的局部性	11
2.1 引言	11
2.2 局部导子	11
2.3 2-局部导子	14
第 3 章 Lie n -导子	17
3.1 引言	17
3.2 Lie n -导子的标准性	17
第 4 章 Lie n -导子的局部性	28
4.1 引言	28
4.2 局部 Lie n -导子	28
第 5 章 总结与展望	34
5.1 总结	34
5.2 展望思考	34
参考文献	35
硕士期间发表的论文	39
致谢	40

第 1 章 绪论

1.1 背景介绍

20 世纪 30 年代左右, 基于研究量子力学的需要, Murray 等撰写了许多文章, 研究了部分算子环的一些性质, 由此开启了一个新的数学领域, 即算子代数。之后, Kadison 等学者开创了一个新的算子代数, 即非自伴算子代数, 加快了算子代数的发展。经过众多学者多年的努力耕耘, 算子代数已日趋成熟, 和许多学科领域都有密不可分的联系。Dixmier^[1]于 1977 年在著作“C*- Algebras ”中对算子代数的基本理论进行了系统的阐述。Dixmier^[2]于 1981 年在著作“von Neumann Algebras”中对算子代数的一些重要理论进行了介绍和说明。李炳仁^[3]于 1986 年在“算子代数”中阐述了算子代数的基本理论。侯晋川^[4]于 2002 年在著作“算子代数上的线性映射引论”中研究了一些代数上的线性映射问题。

在算子代数领域, 无论是出于理论的需要, 还是现实应用的需要, 导致诸多学者逐渐开始研究一些映射, 并提出了一些概念, 例如导子, 局部导子, Lie 导子等。自算子代数建立以来, 它就受到了许多学者的广泛关注, 理论体系也在不断完善。

探讨映射的局部性问题, 是本文需要研究的问题。同时, 关于某些映射标准性的刻画, 也是一个非常有意义的研究方向。在下一节中, 我们将进行详细阐述和说明。

1.2 问题描述

本节中, 我们介绍问题的研究背景及其研究进展情况, 同时, 交代了本文需要研究的主要问题。

设 $\mathcal{A}$ 是实或复数域上的代数, $\mathcal{M}$ 是一个 $\mathcal{A}$ -双边模。若没有其它具体说明, δ 表示一个从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{M}$ 的线性映射。

1.2.1 导子的局部性

若对于任意的 $A, B \in \mathcal{A}$ ，都有 $\delta(AB) = \delta(A)B + A\delta(B)$ ，则称 δ 为一个导子。

若对于任意的 $A \in \mathcal{A}$ ，都有 $\delta(A^2) = \delta(A)A + A\delta(A)$ ，则称 δ 为一个 Jordan 导子。Jordan 导子还有另一种等价表示形式，即对于任意的 $A, B \in \mathcal{A}$ ，都有 $\delta(A \circ B) = \delta(A) \circ B + A \circ \delta(B)$ ，其中， $A \circ B = AB + BA$ 是 A 和 B 的 Jordan 积。

很明显，由定义知，如果一个线性映射是导子，则其必然是一个 Jordan 导子，但反之不然。故识别哪些代数上的 Jordan 导子是导子是很有意义的。

Herstein^[5]于 1957 年证明了 2-无挠素环到本身的 Jordan 导子是导子。设 $\mathcal{L}$ 是一个子空间格，Lu^[6]于 2010 年证明了如果 Banach 空间 X 上的 $\mathcal{L}$ 满足条件 $\cap\{L_- : L \in \mathcal{L}\} = (0)$ 或者 $\vee\{L : L \in \mathcal{L}\} = X$ ，则从 $\text{Alg } \mathcal{L}$ 到 $B(X)$ 的 Jordan 导子为导子。魏妙^[7]于 2012 年研究了 2-无挠素环 R 上的左 Jordan 导子问题，证明了从 R 到 $Z(R)$ 的左 Jordan 导子是导子。关于 Jordan 导子的更多结论，可参考^[8-12]。

如果给定 $\mathcal{M}$ 中的一个元素 T ，使得对于任意的 $A \in \mathcal{A}$ ，都有 $\delta(A) = TA - AT$ ，则称 δ 是一个内导子。

容易验证，内导子是一个导子，但反之未必。因此判断哪些代数上的导子是内导子，这是非常有价值的问题。

Kadison^[13]和 Sakai^[14]在 1966 年各自刻画了如果 D 是 von Neumann 代数上的导子，则 D 是一个内导子。Chernoff^[15]于 1973 年证明了从闭的标准算子代数到 $B(X)$ 上的导子是内导子。设 R 是交换环上的全矩阵代数且包含单位元，刘胜琦^[16]于 2013 年证明了 R 上的导子是内导子。Saidi 等^[17]于 2015 年刻画了 Hilbert C^* -模代数上导子的内导性。关于内导子的其他信息，可参考^[18-20]。

若对于任意的 $A \in \mathcal{A}$ ，存在导子 δ_A ，都有 $\delta_A(A) = \delta(A)$ ，则称 δ 是一个局部导子。

局部导子的概念是由 Kadison^[21]与 Larson 和 Sourour^[22]各自独立提出的。由定义可知，导子是局部导子，但反之未必。因此证明某些代数上的局部导子是导子的问题是很有价值的，同时也是许多学者研究算子代数上的映射问题的一

个重要方向。

Zhu^[22]于 1995 年刻画了套代数上的局部导子。Wu^[23]于 1997 年考虑了自反代数上的局部导子问题。设 H 是一个 Hilbert 空间, R 是一个 CSL 子代数, Li 和 Pan^[24]于 2010 年证明了如果 D 是一个从 H 上的 von Neumann 代数中的 R 到 $B(H)$ 的局部导子, 则 D 是导子。设 R 是一个 Witt 代数, 赵跃强^[25]于 2021 年证明了 R 上的局部导子是导子。关于局部导子的更多知识, 可参考^[26-30]。

若映射 δ 满足: 对于任意的 $A, B \in \mathcal{A}$, 存在导子 $\delta_{A,B}$, 都有 $\delta_{A,B}(A) = \delta(A)$, $\delta_{A,B}(B) = \delta(B)$, 则称 δ 是一个 2-局部导子。

Semrl^[31]于 1997 年阐述了 2-局部导子的概念, 同时证明了若 H 是一个 Hilbert 空间且是可分的, 那么 $B(H)$ 到自身的 2-局部导子是导子。綦伟青和纪培胜^[32]于 2000 年研究了 AFC*-代数 R 上的 2-局部导子问题, 刻画了 R 到 R -双模上的 2-局部导子是一个导子。设 R 是一个图矩阵代数且是对称的, 张建华和李红霞^[33]于 2006 年证明了 R 上的 2-局部导子是导子。有关 2-局部导子的更多知识, 可参考^[34-38]。

在第二章中, 我们证明了从标准算子代数到 $B(X)$ 的局部导子是导子, 结合从标准算子代数到 $B(X)$ 的导子是内导子的结论, 还证明了从标准算子代数到 $B(X)$ 的 2-局部导子是导子。

1.2.2 Lie n -导子的标准性

若对任意的 $A, B \in \mathcal{A}$, 都有 $\delta([A, B]) = [\delta(A), B] + [A, \delta(B)]$, 其中, $[A, B] = AB - BA$ 称为 A 和 B 的 Lie 积, 则称 δ 是一个 Lie 导子。

若 Lie 导子 δ 可以写成 $d + \tau$ 的形式, 其中 d 表示一个导子, τ 表示从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{Z}(\mathcal{A}, B(X))$ 的线性映射, 同时对于任意的 $A, B \in \mathcal{A}$, 都有 $\tau([A, B]) = 0$, 则称 δ 是一个标准 Lie 导子。

Lie 导子的标准性问题是 Martindale^[39]于 1964 年最先考虑的。Mathien 和 Villena^[40]于 2003 年证明了若 D 是一个 C^* -代数到本身的 Lie 导子, 则 D 是标准的。Lu^[41]于 2006 年探讨了如果 R 是一个 CDCSL 代数, 则 R 到本身的 Lie 导子

是标准的。关于 Lie 导子的更多信息，可参考^[42-44]。

上述提到的 Lie 积也称为换位子。下面用递归的方式定义 n 重 Lie 积：对于任意的 $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{A}$ ，令 $p_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = p_2(p_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), x_n)$ ， $p_1(x_1) = x_1$ 。多项式 $p_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 也称为 $n-1$ 重换位子。如果对于任意的 $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{A}$ ，都有 $\delta(p_n(x_1, x_2, \dots, x_n)) = \sum_{i=1}^n (p_n(x_1, x_2, \dots, \delta(x_i), \dots, x_n))$ ，那么称 δ 是一个 Lie n -导子。

设 δ 是一个 Lie n -导子，若 δ 可以分解成 $d + \tau$ 的形式，其中 d 是一个导子， τ 是从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{Z}(\mathcal{A}, B(X))$ 的线性映射，并且对于任意的 $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{A}$ ，有 $\tau(p_n(x_1, x_2, \dots, x_n)) = 0$ ，其中， $\mathcal{Z}(\mathcal{A}, B(X))$ 表示集合 $\{B \in B(X) : \text{对于任意的 } A \in \mathcal{A}, AB = BA\}$ ，则称 δ 是一个标准 Lie n -导子。

Miers^[45]于 1978 年刻画了一个型分解中不含交换型 von Neuman 代数上的 Lie 3-导子是标准的。沈其骅^[46]于 2012 年考虑了三角代数上的 Lie 3-导子标准性问题，交代了 Lie 3-导子在三角代数上具有标准性的充要条件。Benkovic^[47]于 2015 年在证明了在一些条件下，非平凡幂等单位代数 $\mathcal{A}$ 上的 Lie 3-导子 δ ，具有 $\delta = \Delta + d + \tau$ 的分解形式，其中， Δ 是 $\mathcal{A}$ 中的导子， d 是 $\mathcal{A}$ 中的 Jordan 导子， τ 是从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ 的线性映射。张雪丽^[48]于 2022 年证明了从标准算子代数到 $B(X)$ 的 Lie 3-导子是标准的。

对于更一般的 Lie n -导子。刘红玉和霍东华^[49]于 2013 年刻画了三角代数上的 Lie n -导子的标准性。李晓雯^[50]于 2015 年将 Benkovic^[47]的证明结论推广到 Lie n -导子上，进一步得到此类代数上 Lie n -导子的一个刻画。

在第三章中，我们将研究从标准算子代数到 $B(X)$ 的 Lie n -导子标准性问题。

1.2.3 Lie n -导子的局部性

若对于任意的 $A \in \mathcal{A}$ ，存在 Lie n -导子 δ_A ，使得 $\delta_A(A) = \delta(A)$ ，则称 δ 是一个局部 Lie n -导子。

He 等^[51]于 2018 年刻画了一些代数上的局部 Lie 导子是 Lie 导子。宁彤^[52]于 2020 年考虑了作用在因子 von Neuman 代数上的双局部 Lie 导子问题。同年，齐

霄霏和冯小雪^[53]刻画了 von Neuman 代数上的局部可乘 Lie n-导子。关于局部 Lie n-导子的其他信息，可参考^[54,55]。

在第四章中，我们将研究从标准算子代数到 $B(X)$ 的 Lie n-导子局部性问题。

1.3 基本概念

1.3.1 本文涉及到的代数

定义 1.1 Banach 空间

若赋范空间 X 中的 Cauchy 列均收敛，则称 X 是一个 Banach 空间。

定义 1.2 Banach 代数

设 $\mathcal{A}$ 是一个数域上的代数，如果在 $\mathcal{A}$ 上有范数 $\|\cdot\|$ ，且对任意的 $A, B \in \mathcal{A}$ ，满足：

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|,$$

则称 $\mathcal{A}$ 是一个赋范代数。

若 $\mathcal{A}$ 在 $\|\cdot\|$ 下是完备的，则称 $\mathcal{A}$ 是一个 Banach 代数。

定义 1.3 有限秩算子

Banach 空间 X 上的全部有界线性映射记作 $B(X)$ 。对于 $A \in B(X)$ ，符号 $RanA$ 表示 A 的值域。若 $RanA$ 是 X 的有限维子空间，则称 A 是有限秩算子。 X 上全部有限秩算子记作 $F(X)$ 。

注 1：对于任意的 $x \in X$ ， $f \in X^*$ ，定义算子 $x \otimes f$ 如下：对于任意的 $y \in X$ ， $(x \otimes f)y = f(y)x$ 。显然， $x \otimes f \in B(X)$ 。如果 x 和 f 都是非零的，则 $x \otimes f$ 的秩为 1。秩一算子的一些性质是非常浅显的，我们将其罗列如下：对于任意的 $x, y \in X$ ， $f, g \in X^*$ ， $A, B \in B(X)$ ，有

- (1) $(x \otimes f)A = x \otimes (fA)$ ， $A(x \otimes f) = (Ax) \otimes f$ ；
- (2) $(x \otimes f)(y \otimes g) = f(y)(x \otimes g)$ ；
- (3) 每一个秩为 n 的算子都可以写成 $\sum_{i=1}^n x_i \otimes f_i$ 的形式，其中， $x_i \in X$ ， $f_i \in X^*$ ；

(4) $F(X)$ 是 $B(X)$ 的双边理想;

(5) $F(X)$ 是 $B(X)$ 的分离集, 这意味着由 $AF(X)=0$ 可得 $A=0$, 以及由 $F(X)A=0$ 可得 $A=0$ 。

定义 1.4 标准算子代数

Banach 空间 X 上的全部有界线性映射记作 $B(X)$, 符号 $F(X)$ 是 X 上全部有限秩算子。若 $\mathcal{A}$ 是 $B(X)$ 的子代数, 同时 $F(X) \subseteq \mathcal{A}$, 则称 $\mathcal{A}$ 是一个标准算子代数。

1.3.2 本文研究的映射

设 $\mathcal{A}$ 是一个数域上的代数, $\mathcal{M}$ 是一个 $\mathcal{A}$ -双边模。本文中, 我们所需要的从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{M}$ 的映射, 罗列如下:

定义 1.5 导子

若 δ 是线性的且满足: 对于任意的 $A, B \in \mathcal{A}$, 都有 $\delta(AB) = \delta(A)B + A\delta(B)$, 则称 δ 是一个导子。

定义 1.6 Jordan 导子

若 δ 是线性的且满足: 对于任意的 $A \in \mathcal{A}$, 都有 $\delta(A^2) = \delta(A)A + A\delta(A)$, 则称 δ 为一个 Jordan 导子。

注 2: Jordan 导子还有另一种等价表示形式, 如下: 如果 δ 是线性的且满足条件: 对于任意的 $A, B \in \mathcal{A}$, 都有 $\delta(A \circ B) = \delta(A) \circ B + A \circ \delta(B)$, 其中, $A \circ B = AB + BA$ 称为 A 和 B 的 Jordan 积, 则称 δ 为一个 Jordan 导子。

下面验证等价性:

若对于任意的 $A \in \mathcal{A}$, 都有

$$\delta(A^2) = \delta(A)A + A\delta(A), \quad (1.1)$$

则对于 $\mathcal{A}$ 的任意的元素 $B, A+B$, 有

$$\delta(B^2) = \delta(B)B + B\delta(B) \quad (1.2)$$

和

$$\delta((A+B)^2) = \delta(A+B)(A+B) + (A+B)\delta(A+B). \quad (1.3)$$

等式(1.3)–等式(1.2)–等式(1.1)，可得

$$\delta(A \circ B) = \delta(A) \circ B + A \circ \delta(B).$$

反之，如果对于任意的 $A, B \in \mathcal{A}$ ，都有

$$\delta(A \circ B) = \delta(A) \circ B + A \circ \delta(B),$$

可知

$$\delta(A \circ A) = \delta(A) \circ A + A \circ \delta(A),$$

从而得到

$$\delta(A^2) = \delta(A)A + A\delta(A).$$

注 3：导子必然是 Jordan 导子。

验证如下：

若 δ 是一个导子，则对于任意的 $A, B \in \mathcal{A}$ ，有

$$\delta(AB) = \delta(A)B + A\delta(B)$$

和

$$\delta(BA) = \delta(B)A + B\delta(A),$$

从而可得

$$\begin{aligned} \delta(A \circ B) &= \delta(AB + BA) \\ &= \delta(AB) + \delta(BA) \\ &= \delta(A)B + A\delta(B) + \delta(B)A + B\delta(A) \\ &= (\delta(A)B + B\delta(A)) + (A\delta(B) + \delta(B)A) \\ &= \delta(A) \circ B + A \circ \delta(B). \end{aligned}$$

定义 1.7 内导子

若 δ 是线性的且满足：给定 $\mathcal{M}$ 中一个元素 T ，使得对任意的 $A \in \mathcal{A}$ ，有 $\delta(A) = TA - AT$ ，则称 δ 是内导子。

注 4：内导子一定是导子。

验证如下：

若 δ 是一个内导子，则存在 $\mathcal{M}$ 中一个给定的元素 T ，有

$$\delta(AB) = TAB - ABT$$

和

$$\delta(A)B + A\delta(B) = (TA - AT)B + A(TB - BT) = TAB - ABT.$$

定义 1.8 Lie 导子

如果 δ 是线性映射且满足：对于任意的 $A, B \in \mathcal{A}$ ，都有

$\delta([A, B]) = [\delta(A), B] + [A, \delta(B)]$ ，其中， $[A, B] = AB - BA$ 称为 A 和 B 的 Lie 积，

则称 δ 是一个 Lie 导子。

注 5：导子必然是 Lie 导子。

验证如下：

若 δ 是一个导子，则有

$$\begin{aligned} \delta([A, B]) &= \delta(AB - BA) \\ &= \delta(AB) - \delta(BA) \\ &= \delta(A)B + A\delta(B) - \delta(B)A - B\delta(A) \\ &= (\delta(A)B - B\delta(A)) + (A\delta(B) - \delta(B)A) \\ &= [\delta(A), B] + [A, \delta(B)]. \end{aligned}$$

定义 1.9 标准 Lie 导子

如果 Lie 导子 δ 可以写成 $d + \tau$ 的形式，其中， d 表示一个导子， τ 表示一个从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{Z}(\mathcal{A}, B(X))$ 的线性映射，同时对于任意的 $A, B \in \mathcal{A}$ ，都有 $\tau([A, B]) = 0$ ，其中， $\mathcal{Z}(\mathcal{A}, B(X))$ 表示集合 $\{B \in B(X) : \text{对于任意的 } A \in \mathcal{A}, AB = BA\}$ ，则称 δ 是一个标准 Lie 导子。

定义 1.10 Lie n-导子

如果 δ 是线性映射且满足：对于任意的 $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{A}$ ，都有

$\delta(p_n(x_1, x_2, \dots, x_n)) = \sum_{i=1}^n (p_n(x_1, x_2, \dots, \delta(x_i), \dots, x_n))$ ，其中， $p_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 称为

$x_1, x_2, \dots, x_n$ 的 n 重 Lie 积，则称 δ 是一个 Lie n -导子。

定义 1.11 标准 Lie n-导子

若 Lie n-导子 δ 可以写成 $d + \tau$ 的形式，其中 d 表示一个导子， τ 表示一个从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{Z}(\mathcal{A}, B(X))$ 的线性映射，同时对于任意的 $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{A}$ ，有 $\tau(p_n(x_1, x_2, \dots, x_n)) = 0$ ，其中， $\mathcal{Z}(\mathcal{A}, B(X))$ 表示集合 $\{B \in B(X) : \text{对于任意的 } A \in \mathcal{A}, AB = BA\}$ ，则称 δ 是一个标准 Lie n-导子。

定义 1.12 局部导子

如果 δ 是线性的且满足：对于任意的 $A \in \mathcal{A}$ ，存在导子 δ_A ，使得 $\delta_A(A) = \delta(A)$ ，则称 δ 是一个局部导子。

注 6：导子一定是局部导子。

定义 1.13 2-局部导子

如果 δ 满足：对于任意的 $A, B \in \mathcal{A}$ ，存在导子 $\delta_{A,B}$ ，使得 $\delta_{A,B}(A) = \delta(A)$ ， $\delta_{A,B}(B) = \delta(B)$ ，则称 δ 是一个 2-局部导子。

注 7：2-局部导子 δ 自身具有齐次性，即对于任意的 $\lambda \in \mathbb{F}$ ， $A \in \mathcal{A}$ ，都有 $\delta(\lambda A) = \lambda \delta(A)$ 。

验证如下：

若 δ 是一个 2-局部导子，则对 $\mathcal{A}$ 中的两个元素 $A, \lambda A$ ，一定存在导子 $\delta_{A, \lambda A}$ ，满足 $\delta_{A, \lambda A}(A) = \delta(A)$ 和 $\delta_{A, \lambda A}(\lambda A) = \delta(\lambda A)$ ，于是

$$\delta(\lambda A) = \delta_{A, \lambda A}(\lambda A) = \lambda \delta_{A, \lambda A}(A) = \lambda \delta(A) .$$

注 8：2-局部导子 δ 蕴含着对于任意的 $A \in \mathcal{A}$ ，都有 $\delta(A^2) = \delta(A)A + A\delta(A)$ 。

验证如下：

若 δ 是一个 2-局部导子，则对 $\mathcal{A}$ 中的两个元素 A, A^2 ，一定存在导子 δ_{A, A^2} ，满足 $\delta_{A, A^2}(A) = \delta(A)$ 和 $\delta_{A, A^2}(A^2) = \delta(A^2)$ ，于是

$$\delta(A^2) = \delta_{A, A^2}(A^2) = \delta_{A, A^2}(A)A + A\delta_{A, A^2}(A) = \delta(A)A + A\delta(A) .$$

注 9：由 2-局部导子的定义，可知 2-局部导子仅是一个映射，不能判断是否是线性的。如果我们能够证明 2-局部导子具有可加性，又由 2-局部导子自身具有齐次性，从而证明其是一个线性映射，这样，就可以把一个 2-局部导子问题转化为局部导子或 Jordan 导子问题。

定义 1.14 局部 Lie n-导子

如果 δ 是线性的且满足：对于任意的 $A \in \mathcal{A}$ ，存在 Lie n-导子 δ_A ，使得 $\delta_A(A) = \delta(A)$ ，则称 δ 是一个局部 Lie n-导子。

第2章 导子的局部性

2.1 引言

由第1章介绍的知识可知，导子是局部导子，也是2-局部导子，反之未必。我们需要研究的问题是判断某些代数上的局部导子，2-局部导子是导子。

设 X 是数域上的 Banach 空间。 X^* 是 X 上一切有界线性泛函的集合，符号 $B(X)$ 表示 X 上全部有界线性算子。对于 $A \in B(X)$ ，符号 $RanA$ 表示 A 的值域。如果 $RanA$ 是 X 的有限维子空间，则称 A 是有限秩算子。符号 $F(X)$ 表示 X 上全部有限秩算子。 $\mathcal{A}$ 是一个标准算子代数，即 $\mathcal{A} \supseteq F(X)$ ，同时 $\mathcal{A}$ 是 $B(X)$ 的一个子代数。对于任意的 $x \in X$ ， $f \in X^*$ ，定义算子 $x \otimes f$ 如下：对于任意的 $y \in X$ ， $(x \otimes f)y = f(y)x$ 。显然， $x \otimes f \in B(X)$ 。若 x 和 f 都是非零的，则 $x \otimes f$ 的秩为 1。

在本章第2节中，我们刻画了从标准算子代数到 $B(X)$ 的局部导子是导子。同时，在本章第3节中，我们刻画了从标准算子代数到 $B(X)$ 的2-局部导子是导子。

2.2 局部导子

在本节中，我们研究了从标准算子代数到 $B(X)$ 的局部导子问题，首先介绍以下引理。

引理 2.1 从闭的标准算子代数 $\mathcal{A}$ 到 $B(X)$ 的导子都是连续的。

证明 设 δ 是从 $\mathcal{A}$ 到 $B(X)$ 的导子。假设 $\{T_n\} \subseteq \mathcal{A}$ 是收敛到 0 的序列， $\{\delta(T_n)\}$ 收敛到 T 。根据闭图像定理，要证明 δ 是连续的，只需要证明 $T = 0$ 。

对于任意的 $x, y \in X$ ， $f, g \in X^*$ ，结合秩一算子的性质，可得

$$\delta(x \otimes f T_n y \otimes g) = \delta(f(T_n y) x \otimes g) = f(T_n y) \delta(x \otimes g).$$

一方面, 由 $T_n \rightarrow 0$, 显然有 $\delta(x \otimes fT_n y \otimes g) \rightarrow 0$ 。另一方面, 根据

$$\delta(x \otimes fT_n y \otimes g) = \delta(x \otimes f)T_n y \otimes g + x \otimes f\delta(T_n)y \otimes g + x \otimes fT_n\delta(y \otimes g),$$

以及 $T_n \rightarrow 0$, $\delta(T_n) \rightarrow T$, 可得

$$\delta(x \otimes fT_n y \otimes g) \rightarrow x \otimes fTy \otimes g = f(Ty)x \otimes g.$$

因此, 对于任意的 $x, y \in X$, $f, g \in X^*$, 有 $f(Ty)x \otimes g = 0$ 。于是可知 $T = 0$ 。

定理 2.2 从闭的标准算子代数 $\mathcal{A}$ 到 $B(X)$ 的导子都是内导子。

证明 设 δ 是从 $\mathcal{A}$ 到 $B(X)$ 的导子。设 $x_0 \in X$, $f_0 \in X^*$, 使得 $f_0(x_0) = 1$ 。定义 X 到自身的映射 T 如下: 对于任意的 $x \in X$, 有

$$Tx = \delta(x \otimes f_0)x_0.$$

由引理 2.1, 可知 δ 是连续的。故对于任意的 $x_n \in X$, 当 $x_n \rightarrow 0$ 时, 有 $x_n \otimes f_0 \rightarrow 0$, 所以

$$Tx_n = \delta(x_n \otimes f_0)x_0 \rightarrow 0,$$

故 T 也是连续的。对于任意的 $x_1, x_2 \in X$, $\lambda \in \mathbb{F}$, 有

$$\begin{aligned} T(x_1 + x_2) &= \delta((x_1 + x_2) \otimes f_0)x_0 \\ &= \delta(x_1 \otimes f_0 + x_2 \otimes f_0)x_0 \\ &= \delta(x_1 \otimes f_0)x_0 + \delta(x_2 \otimes f_0)x_0 \\ &= Tx_1 + Tx_2 \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} T(\lambda x_1) &= \delta(\lambda x_1 \otimes f_0)x_0 \\ &= \delta(\lambda(x_1 \otimes f_0))x_0 \\ &= \lambda\delta(x_1 \otimes f_0)x_0 \\ &= \lambda Tx_1. \end{aligned}$$

可得 T 是线性的。因此 $T \in B(X)$ 。

对于任意的 $x \in X$, $A \in \mathcal{A}$, 有

$$TAx = \delta(Ax \otimes f_0)x_0 = \delta(A)x \otimes f_0x_0 + A\delta(x \otimes f_0)x_0 = \delta(A)x + ATx.$$

这蕴含着 $\delta(A) = TA - AT$ 。即 δ 是一个内导子。

定理 2.3 从标准算子代数 $\mathcal{A}$ 到 $B(X)$ 的局部导子都是导子。

证明 设 δ 是从 $\mathcal{A}$ 到 $B(X)$ 的局部导子。首先考虑 $\mathcal{A}$ 包含单位元 I 的情况。

设 $A, B, C \in \mathcal{A}$, 且 $AB = BC = 0$ 。利用局部导子的定义可得, 存在导子 δ_b , 使得 $\delta_b(B) = \delta(B)$ 。进而可得

$$A\delta(B)C = A\delta_b(B)C = \delta_b(ABC) - \delta_b(A)BC - AB\delta_b(C) = 0.$$

设 P 是一个幂等元, 则 $Q = I - P$ 也是一个幂等元, 且 $PQ = 0$ 。任取 $X, Y \in \mathcal{A}$, 当 $XY = 0$ 时, 由 $PQX = QXY = 0$, 可得 $P\delta(QX)Y = 0$, 同理可得 $Q\delta(PX)Y = 0$ 。进而, 可得

$$\begin{aligned}\delta(PX)Y &= (P + Q)\delta(PX)Y \\ &= P\delta(PX)Y + Q\delta(PX)Y \\ &= P\delta((I - Q)X)Y \\ &= P\delta(X)Y - P\delta(QX)Y \\ &= P\delta(X)Y.\end{aligned}$$

因为有限秩算子可以写成幂等元的线性组合, 所以对于任意的 $R \in F(X)$, 亦有 $\delta(RX)Y = R\delta(X)Y$ 。又因为 $F(X)$ 是 $B(X)$ 的双边理想, 从而对于任意的 $A \in \mathcal{A}$, 有

$$\delta(RAX)Y = R\delta(AX)Y$$

和

$$\delta(RAX)Y = RA\delta(X)Y.$$

又因为 $F(X)$ 是 $B(X)$ 的分离集, 进而可得

$$\delta(AX)Y = A\delta(X)Y,$$

这里的 A 是 $\mathcal{A}$ 中任意元素, X, Y 是 $\mathcal{A}$ 中任意两个乘积为 0 的元素。因此, 对于幂等元 P 和 $Q = I - P$ 以及任意的 $A \in \mathcal{A}$, 即有 $\delta(AP)Q = A\delta(P)Q$ 和 $\delta(AQ)P = A\delta(Q)P$, 于是

$$\begin{aligned}\delta(AP) - A\delta(P) &= \delta(AP)(P + Q) - A\delta(P)(P + Q) \\ &= \delta(AP)P - A\delta(P)P \\ &= \delta(A(I - Q))P - A\delta(I - Q)P \\ &= \delta(A)P - \delta(AQ)P - A\delta(I)P + A\delta(Q)P \\ &= \delta(A)P - A\delta(I)P.\end{aligned}$$

由局部导子的定义知, 存在导子 δ_l , 使得 $\delta(I) = \delta_l(I) = 0$ 。由此可得

$$\delta(AP) = \delta(A)P + A\delta(P).$$

进而对于任意的 $R \in F(X)$, 有

$$\delta(AR) = \delta(A)R + A\delta(R).$$

对于任意的 $B \in \mathcal{A}$, 再由

$$\delta(ABR) = \delta(AB)R + AB\delta(R)$$

和

$$\delta(ABR) = \delta(A)BR + A\delta(BR) = \delta(A)BR + A(\delta(B)R + B\delta(R)),$$

以及 $F(X)$ 的分线性性，可得

$$\delta(AB) = \delta(A)B + A\delta(B).$$

即证 δ 是一个导子。

接下来考虑 $\mathcal{A}$ 不包含单位 I 的情况。在这种情况下，用 $\tilde{\mathcal{A}}$ 表示单位代数 $\mathcal{A} \oplus \mathbb{F}I$ 。

对每一个从 $\mathcal{A}$ 到 $B(X)$ 的线性映射 ϕ ，我们定义一个从 $\tilde{\mathcal{A}}$ 到 $B(X)$ 线性映射 $\tilde{\phi}$ 如下：对于任意的 $A \in \mathcal{A}$ ， $\lambda \in \mathbb{F}$ ，有 $\tilde{\phi}(A + \lambda I) = \phi(A)$ 。从而对于任意的 $A, B \in \mathcal{A}$ ， $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ ，有

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}((A + \lambda I)(B + \mu I)) &= \tilde{\phi}(AB + \lambda B + \mu A + \lambda \mu I) \\ &= \phi(AB + \lambda B + \mu A) \\ &= \phi(AB) + \phi(\lambda B) + \phi(\mu A) \\ &= \phi(AB) + \lambda \phi(B) + \mu \phi(A) \end{aligned}$$

和

$$\tilde{\phi}(A + \lambda I)(B + \mu I) + (A + \lambda I)\tilde{\phi}(B + \mu I) = \phi(A)B + A\phi(B) + \lambda \phi(B) + \mu \phi(A).$$

这蕴含着 ϕ 是一个导子当且仅当 $\tilde{\phi}$ 是一个导子。

由于 δ 是局部导子，因此存在导子 δ_A ，使得 $\delta(A) = \delta_A(A)$ 。除此之外，对于一切的 $A \in \mathcal{A}$ ， $\lambda \in \mathbb{F}$ ，我们都有 $\tilde{\delta}(A + \lambda I) = \delta(A) = \delta_A(A) = \tilde{\delta}_A(A + \lambda I)$ 。这蕴含着 $\tilde{\delta}$ 是一个从 $\tilde{\mathcal{A}}$ 到 $B(X)$ 的局部导子。由 $\mathcal{A}$ 包含单位 I 情形的结论，可知 $\tilde{\delta}$ 是一个导子。因此， δ 是一个导子。

2.3 2-局部导子

在本节中，我们研究了从标准算子代数到 $B(X)$ 的 2-局部导子问题。

我们考虑在 $F(X)$ 上定义一个泛函 tr 如下：对于给定的 $\sum_{i=1}^n x_i \otimes f_i \in F(X)$ ，令 $tr(\sum_{i=1}^n x_i \otimes f_i) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i)$ ，显然， tr 是线性的，并且对于任意的 $A \in \mathcal{A}$ ，

$R \in F(X)$, 有

$$tr(AR) = tr(RA). \quad (2.1)$$

但是需要注意的是, $F(X)$ 中元素分解成秩 1 算子的和, 形式不是唯一的。因此要想说明上述泛函 tr 的定义是合理的, 还需证明同一个元素在不同的分解形式下, 在映射 tr 下的像是确定的。这一点将由下述引理来保证。

引理 2.4 对于任意的 $x_i \in X$, $f_i \in X^*$, 若 $\sum_{i=1}^n x_i \otimes f_i = 0$, 则 $\sum_{i=1}^n f_i(x_i) = 0$ 。

证明 考虑矩阵

$$A = \begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \dots & f_1(x_n) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ f_n(x_1) & f_n(x_2) & \dots & f_n(x_n) \end{pmatrix},$$

由矩阵乘法, A^2 的第 i, j 元是

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f_i(x_k) f_k(x_j) &= \sum_{k=1}^n f_i(f_k(x_j) x_k) \\ &= f_i\left(\sum_{k=1}^n (f_k(x_j) x_k)\right) \\ &= f_i\left(\sum_{k=1}^n x_k \otimes f_k\right) x_j \\ &= 0. \end{aligned}$$

于是可知 $A^2 = 0$ 。因此 A 的特征值都为 0。故 A 的迹为 0, 即 $\sum_{i=1}^n f_i(x_i) = 0$ 。

定理 2.5 从标准算子代数 $\mathcal{A}$ 到 $B(X)$ 的 2-局部导子是导子。

证明 设 δ 是从 $\mathcal{A}$ 到 $B(X)$ 的 2-局部导子。对任意的 $A \in \mathcal{A}$, $S \in F(X)$, 由 2-局部导子的定义, 存在导子 d , 使得 $\delta(A) = d(A)$ 和 $\delta(S) = d(S)$ 。利用定理 2.2, 可知 d 是内导子。因此, 存在 $T \in B(X)$, 使得

$$\delta(A)S + A\delta(S) = d(A)S + Ad(S) = d(AS) = AST - TAS.$$

再由式 (2.1), 可得 $tr(\delta(A)S + A\delta(S)) = 0$, 即 $tr(\delta(A)S) = -tr(A\delta(S))$ 。

对于任意的 $A, B \in \mathcal{A}$, $S \in F(X)$, 有

$$\begin{aligned} tr(\delta(A+B)S) &= -tr((A+B)\delta(S)) \\ &= -tr(A\delta(S)) - tr(B\delta(S)) \\ &= tr(\delta(A)S) + tr(\delta(B)S) \end{aligned}$$

$$= \text{tr}((\delta(A) + \delta(B))S).$$

记 $C = \delta(A + B) - \delta(A) - \delta(B)$ ，可得

$$\begin{aligned} \text{tr}(CS) &= \text{tr}((\delta(A + B) - \delta(A) - \delta(B))S) \\ &= \text{tr}(\delta(A + B)S - (\delta(A) + \delta(B))S) \\ &= \text{tr}(\delta(A + B)S) - \text{tr}((\delta(A) + \delta(B))S) \\ &= 0. \end{aligned}$$

取 $S = x \otimes f$ ，其中 $x \in X$ ， $f \in X^*$ ，可得 $\text{tr}(Cx \otimes f) = f(Cx) = 0$ 。由 x 和 f 的任意性，易知 $C = 0$ ，即 $\delta(A + B) = \delta(A) + \delta(B)$ 。因此， δ 是可加的。此外，由 2-局部导子的定义，可得 δ 是齐次的。因此， δ 是线性的，从而是一个局部导子。由定理 2.3，即知 δ 是一个导子。

第3章 Lie n-导子

3.1 引言

在本章中，用 I 表示 $B(X)$ 中的单位算子。设 $x_0 \in X$ ， $f_0 \in X^*$ ，且 $f_0(x_0)=1$ 。记 $P_1 = x_0 \otimes f_0$ ， $P_2 = I - P_1$ ，其中 P_1 和 P_2 是 $B(X)$ 中的幂等元，同时， $P_i A P_j$ 和 $P_i B(X) P_j$ 可以记作 $\mathcal{A}_{ij}$ 和 $B(X)_{ij}$ ，另外，对于任意的 $A \in \mathcal{A}$ ， $P_i A P_j$ 记作 A_{ij} ，其中 $1 \leq i, j \leq 2$ 。

以下的性质是非常浅显的，且在我们的证明过程中会经常用到。

Banach 空间 X 上的标准算子代数记作 $\mathcal{A}$ ， X 上一切有界线性算子记作 $B(X)$ ，则对于任意的 $x, y \in X$ ， $f, g \in X^*$ ， $A, B \in B(X)$ ，有

$$(1) A(x \otimes f) = (Ax) \otimes f \text{ 和 } (x \otimes f)A = x \otimes (fA);$$

$$(2) (x \otimes f)(y \otimes g) = f(y)(x \otimes g);$$

$$(3) \mathcal{Z}(\mathcal{A}, B(X)) = \mathbb{F}I.$$

在本章的第2节中，我们证明了从标准算子代数到 $B(X)$ 的 Lie n-导子都是标准的。

3.2 Lie n-导子的标准性

在本节中，我们研究了从标准算子代数到 $B(X)$ 的 Lie n-导子标准性问题。

引理 3.1 对于任意的 $A \in B(X)$ ，都有 $P_1 A P_1 = f_0(Ax_0)P_1 = f_0(P_1 A P_1 x_0)P_1$ ，并且 $B(X)_{11}$ 是可交换的。

证明 对于任意的 $A \in B(X)$ ，结合秩一算子的性质，可得

$$P_1 A P_1 = x_0 \otimes f_0 A x_0 \otimes f_0 = f_0(Ax_0)x_0 \otimes f_0 = f_0(Ax_0)P_1. \quad (3.1)$$

在 (3.1) 式中, 用 P_1AP_1 替代 A , 可得

$$P_1AP_1 = P_1P_1AP_1P_1 = f_0(P_1AP_1x_0)P_1.$$

从而得到 $B(X)_{11}$ 是可交换的。

引理 3.2 (1) 对于任意的 $A_{21} \in \mathcal{A}_{21}$, 如果 $BA_{21} = 0$, 则 $BP_2 = 0$ 。

(2) 对于任意的 $A_{12} \in \mathcal{A}_{12}$, 如果 $A_{12}B = 0$, 则 $P_2B = 0$ 。

证明 (1) 对于任意的 $x \in X$, 记 $A_{21} = P_2x \otimes f_0P_1$, 由于 $f_0(P_1x_0) = f_0(x_0) = 1$, 可得

$$BP_2x \otimes f_0P_1x_0 = f_0(P_1x_0)BP_2x = BP_2x = 0.$$

故由 x 的任意性, 可得 $BP_2 = 0$ 。

(2) 对于任意的 $f \in X^*$, 记 $A_{12} = P_1x_0 \otimes fP_2$, 对于任意的 $x \in X$, 结合秩一算子的性质, 可得

$$P_1x_0 \otimes fP_2Bx = f(P_2Bx)P_1x_0 = f(P_2Bx)x_0 = 0.$$

因此, 对于任意的 $x \in X$, $f \in X^*$, 有 $f(P_2Bx) = 0$, 故 $P_2B = 0$ 。

定理 3.3 设 X 是一个 Banach 空间, $\mathcal{A}$ 是一个单位标准算子代数, 若 δ 是从 $\mathcal{A}$ 到 $B(X)$ 的 Lie n -导子, 则 δ 是标准的。

在证明定理 3.3 之前, 先证明以下引理。

引理 3.4 $\delta(I) \in \mathbb{F}I$ 。

证明 因为对于任意的 $A_1, A_2, \dots, A_{n-1} \in \mathcal{A}$, 有 $p_n(I, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}) = 0$, 故

$$\begin{aligned} 0 &= \delta(p_n(I, A_1, A_2, \dots, A_{n-1})) \\ &= p_n(\delta(I), A_1, A_2, \dots, A_{n-1}) + \sum_{i=1}^{n-1} (p_n(I, A_1, A_2, \dots, \delta(A_i), \dots, A_{n-1})) \\ &= p_n(\delta(I), A_1, A_2, \dots, A_{n-1}). \end{aligned}$$

由于 $B(X)$ 中的单位不能写成交换子, $\mathcal{Z}(\mathcal{A}, B(X)) = \mathbb{F}I$ 以及 A_{n-1} 的任意性, 由此可得

$$p_{n-1}(\delta(I), A_1, A_2, \dots, A_{n-2}) = 0.$$

以此类推，对任意的 $A_1 \in \mathcal{A}$ ，有 $p_2(\delta(I), A_1) = 0$ ，因此 $\delta(I) \in \mathbb{F}I$ 。

引理 3.5 $P_1\delta(P_1)P_1 + P_2\delta(P_1)P_2 \in \mathbb{F}I$ 。

证明 根据引理 3.1，可得 $P_1\delta(P_1)P_1 = \lambda P_1$ ，其中 $\lambda = f_0(P_1\delta(P_1)P_1x_0) \in \mathbb{F}$ 。因为

$A_{21} = p_n(A_{21}, P_1, P_1, \dots, P_1)$ ，可得

$$\begin{aligned} \delta(A_{21}) &= \delta(p_n(A_{21}, P_1, P_1, \dots, P_1)) \\ &= p_n(\delta(A_{21}), P_1, P_1, \dots, P_1) + p_n(A_{21}, \delta(P_1), P_1, \dots, P_1) \\ &\quad + p_n(A_{21}, P_1, \delta(P_1), \dots, P_1) + \dots + p_n(A_{21}, P_1, P_1, \dots, \delta(P_1)) \\ &= p_n(\delta(A_{21}), P_1, P_1, \dots, P_1) + p_n(A_{21}, \delta(P_1), P_1, \dots, P_1) \\ &\quad + p_{n-1}(A_{21}, \delta(P_1), \dots, P_1) + \dots + p_2(A_{21}, \delta(P_1)). \end{aligned}$$

$$\text{由于 } p_n(A, P_1, P_1, \dots, P_1) = \begin{cases} P_2AP_1 - P_1AP_2, n = 2k, k = 1, 2, 3, \dots \\ P_2AP_1 + P_1AP_2, n = 2k + 1, k = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (3.2)$$

令 $B = p_2(A_{21}, \delta(P_1))$ ，当 n 为奇数时，有

$$\begin{aligned} \delta(A_{21}) &= P_2\delta(A_{21})P_1 + P_1\delta(A_{21})P_2 + p_{n-1}(B, P_1, P_1, \dots, P_1) \\ &\quad + p_{n-2}(B, P_1, P_1, \dots, P_1) + \dots + p_2(B, P_1) + B \\ &= P_2\delta(A_{21})P_1 + P_1\delta(A_{21})P_2 + (n-2)P_2BP_1 - P_1BP_2 + B \\ &= P_2\delta(A_{21})P_1 + P_1\delta(A_{21})P_2 + (n-2)(A_{21}\delta(P_1)P_1 - P_2\delta(P_1)A_{21}) \\ &\quad - P_1(A_{21}\delta(P_1) - \delta(P_1)A_{21})P_2 + A_{21}\delta(P_1) - \delta(P_1)A_{21}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

在 (3.3) 式中，左乘 P_2 ，右乘 P_1 ，可得 $A_{21}\delta(P_1)P_1 = P_2\delta(P_1)A_{21}$ 。当 n 为偶数时，有

$$\begin{aligned} \delta(A_{21}) &= P_2\delta(A_{21})P_1 - P_1\delta(A_{21})P_2 + p_{n-1}(B, P_1, P_1, \dots, P_1) \\ &\quad + p_{n-2}(B, P_1, \dots, P_1) + \dots + p_2(B, P_1) + B \\ &= P_2\delta(A_{21})P_1 - P_1\delta(A_{21})P_2 + (n-2)P_2BP_1 + B \\ &= P_2\delta(A_{21})P_1 - P_1\delta(A_{21})P_2 + (n-2)(A_{21}\delta(P_1)P_1 - P_2\delta(P_1)A_{21}) \end{aligned}$$

$$+A_{21}\delta(P_1)-\delta(P_1)A_{21}. \quad (3.4)$$

在 (3.4) 式中, 左乘 P_2 , 右乘 P_1 , 可得 $A_{21}\delta(P_1)P_1=P_2\delta(P_1)A_{21}$ 。

因此对于任意的 $n(n \geq 2, n \in \mathbb{N}^+)$, 有 $A_{21}\delta(P_1)P_1=P_2\delta(P_1)A_{21}$ 。对于任意的 $x \in X$,

记 $A_{21}=P_2x \otimes f_0P_1$, 于是

$$P_2x \otimes f_0P_1\delta(P_1)P_1=P_2\delta(P_1)P_2x \otimes f_0P_1. \quad (3.5)$$

将 $x_0 \in X$ 作用于 (3.5) 式的两边, 结合秩一算子的性质, 可得

$$f_0(P_1\delta(P_1)P_1x_0)P_2x=f_0(P_1x_0)P_2\delta(P_1)P_2x.$$

因为 $f_0(P_1x_0)=f_0(x_0)=1$, 可知 $f_0(P_1\delta(P_1)P_1x_0)P_2x=P_2\delta(P_1)P_2x$, 故

$$P_2\delta(P_1)P_2=f_0(P_1\delta(P_1)P_1x_0)P_2=\lambda P_2,$$

蕴含着 $P_1\delta(P_1)P_1+P_2\delta(P_1)P_2=\lambda(P_1+P_2)=\lambda I$ 。

令 $G=P_1\delta(P_1)P_2-P_2\delta(P_1)P_1$, 对于任意的 $A \in \mathcal{A}$, 定义一个从 $\mathcal{A}$ 到 $B(X)$ 的映射 Δ , 记 $\Delta(A)=\delta(A)-p_2(A, G)$, 显然, Δ 也是从 $\mathcal{A}$ 到 $B(X)$ 的 Lie n -导子, 并且 $\Delta(I) \in \mathbb{F}I$ 。此外,

$$\Delta(P_1)=\delta(P_1)-p_2(P_1, G)=P_1\delta(P_1)P_1+P_2\delta(P_1)P_2.$$

根据引理 3.5, 知 $\Delta(P_1) \in \mathbb{F}I$, 故 $\Delta(P_2)=\Delta(I)-\Delta(P_1) \in \mathbb{F}I$ 。

下面研究 Δ 的一些性质。

引理 3.6 $\Delta(\mathcal{A})_{ij} \subseteq B(X)_{ij}$, 其中, $1 \leq i, j \leq 2$ 且 $i \neq j$ 。

证明 因为 $\delta(P_2) \in \mathbb{F}I$, 结合

$$p_n(A, P_2, P_2, \dots, P_2) = \begin{cases} P_1AP_2 - P_2AP_1, n = 2k, k = 1, 2, 3, \dots \\ P_2AP_1 + P_1AP_2, n = 2k + 1, k = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (3.6)$$

则对于任意的 $A_{12} \in \mathcal{A}_2$, 有

$$\begin{aligned} \Delta(A_{12}) &= \Delta(p_n(A_{12}, P_2, P_2, \dots, P_2)) \\ &= p_n(\Delta(A_{12}), P_2, P_2, \dots, P_2) + p_n(A_{12}, \Delta(P_2), P_2, \dots, P_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + p_n(A_{12}, P_2, \Delta(P_2), \dots, P_2) + \dots + p_n(A_{12}, P_2, P_2, \dots, \Delta(P_2)) \\
 & = p_n(\Delta(A_{12}), P_2, P_2, \dots, P_2) \\
 & = \begin{cases} P_1 \Delta(A_{12}) P_2 - P_2 \Delta(A_{12}) P_1, n = 2k, k = 1, 2, 3, \dots \\ P_2 \Delta(A_{12}) P_1 + P_1 \Delta(A_{12}) P_2, n = 2k + 1, k = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

令 $A_{12}, B_{12} \in \mathcal{A}_{12}$ ，对于任意的 $C_1, C_2, \dots, C_{n-2} \in \mathcal{A}$ ，有 $p_n(A_{12}, B_{12}, C_1, C_2, \dots, C_{n-2}) = 0$ 。

于是，可得

$$\begin{aligned}
 0 & = \Delta(p_n(A_{12}, B_{12}, C_1, C_2, \dots, C_{n-2})) \\
 & = p_n(\Delta(A_{12}), B_{12}, C_1, C_2, \dots, C_{n-2}) + p_n(A_{12}, \Delta(B_{12}), C_1, C_2, \dots, C_{n-2}) \\
 & \quad + \sum_{i=1}^{n-2} (p_n(A_{12}, B_{12}, C_1, C_2, \dots, \Delta(C_i), \dots, C_{n-2})) \\
 & = p_n(\Delta(A_{12}), B_{12}, C_1, C_2, \dots, C_{n-2}) + p_n(A_{12}, \Delta(B_{12}), C_1, C_2, \dots, C_{n-2}) \\
 & = p_{n-1}(p_2(\Delta(A_{12}), B_{12}) + p_2(A_{12}, \Delta(B_{12})), C_1, C_2, \dots, C_{n-2}).
 \end{aligned}$$

由于 $B(X)$ 中的单位不能写成交换子， $\mathcal{Z}(\mathcal{A}, B(X)) = \mathbb{F}I$ 以及 C_{n-2} 的任意性，可得，对于任意的 $C_1, C_2, \dots, C_{n-3} \in \mathcal{A}$ ，有

$$p_{n-2}(p_2(\Delta(A_{12}), B_{12}) + p_2(A_{12}, \Delta(B_{12})), C_1, C_2, \dots, C_{n-3}) = 0.$$

以此类推，对任意的 $C_1 \in \mathcal{A}$ ，有 $p_2(p_2(\Delta(A_{12}), B_{12}) + p_2(A_{12}, \Delta(B_{12})), C_1) = 0$ 。

令 $W = p_2(\Delta(A_{12}), B_{12}) + p_2(A_{12}, \Delta(B_{12})) \in \mathbb{F}I$ 。由 $A_{12} = p_n(A_{12}, P_2, P_2, \dots, P_2)$ ，可得

$$\begin{aligned}
 p_2(\Delta(A_{12}), B_{12}) & = W - p_2(A_{12}, \Delta(B_{12})) \\
 & = W - p_n(A_{12}, P_2, P_2, \dots, P_2, \Delta(B_{12})) \\
 & = W - \{\Delta(p_n(A_{12}, P_2, P_2, \dots, P_2, B_{12})) - p_n(\Delta(A_{12}), P_2, P_2, \dots, P_2, B_{12}) \\
 & \quad - p_n(A_{12}, \Delta(P_2), P_2, \dots, P_2, B_{12}) - \dots - p_n(A_{12}, P_2, P_2, \dots, \Delta(P_2), B_{12})\} \\
 & = W + p_n(\Delta(A_{12}), P_2, P_2, \dots, P_2, B_{12}).
 \end{aligned}$$

当 n 为奇数时，结合 (3.6) 式，有

$$\begin{aligned}
 & p_2(P_1\Delta(A_{12})P_2 + P_2\Delta(A_{12})P_1, B_{12}) \\
 &= W + p_n(P_1\Delta(A_{12})P_2 + P_2\Delta(A_{12})P_1, P_2, P_2, \dots, P_2, B_{12}) \\
 &= W + p_2((p_{n-1}(P_1\Delta(A_{12})P_2 + P_2\Delta(A_{12})P_1, P_2, P_2, \dots, P_2), B_{12}) \\
 &= W + p_2(P_1\Delta(A_{12})P_2 - P_2\Delta(A_{12})P_1, B_{12}).
 \end{aligned}$$

由此可得

$$p_2(P_2\Delta(A_{12})P_1, B_{12}) = \frac{W}{2} \in \mathbb{F}I.$$

故 $p_2(P_2\Delta(A_{12})P_1, B_{12}) = 0$ 。因此，对于任意的 $B_{12} \in \mathcal{A}_2$ ，有

$$P_2\Delta(A_{12})B_{12} = B_{12}\Delta(A_{12})P_1 = 0.$$

根据引理 3.2，可知 $P_2\Delta(A_{12})P_1 = 0$ 。当 n 为偶数时，在 (3.7) 式中，左乘 P_2 ，右乘 P_1 ，可得 $P_2\Delta(A_{12})P_1 = 0$ 。故对于任意的 $n(n \geq 2, n \in \mathbb{N}^+)$ ，都有 $P_2\Delta(A_{12})P_1 = 0$ 。

结合 (3.7) 式，可以得到 $\Delta(A_{12}) = P_1\Delta(A_{12})P_2$ ，因此 $\Delta(\mathcal{A})_{12} \subseteq B(X)_{12}$ 。类似可得 $\Delta(\mathcal{A})_{21} \subseteq B(X)_{21}$ 。

引理 3.7 $\Delta(\mathcal{A})_{11} \subseteq \mathbb{F}I$ 。

证明 对任意的 $B_{11} \in \mathcal{A}_1$ ，结合引理 3.1，可知

$$\Delta(A_{11}) = \Delta(P_1A_{11}P_1) = \Delta(f_0(A_{11}x_0)P_1) = f_0(A_{11}x_0)\Delta(P_1).$$

由 $\Delta(P_1) \in \mathbb{F}I$ ，知 $\Delta(\mathcal{A})_{11} \subseteq \mathbb{F}I$ 。

引理 3.8 对任意的 $A_{22} \in \mathcal{A}_2$ ，则 $\Delta(A_{22}) - f_0(\Delta(A_{22})x_0)I \in B(X)_{22}$ ，特别地，

$$\Delta(P_2) = f_0(\Delta(P_2)x_0)I.$$

证明 因为 $p_n(P_1, A_{22}, P_1, P_1, \dots, P_1) = 0$ ，结合 (3.2) 式，知

$$\begin{aligned}
 0 &= \Delta(p_n(P_1, A_{22}, P_1, P_1, \dots, P_1)) \\
 &= p_n(\Delta(P_1), A_{22}, P_1, P_1, \dots, P_1) + p_n(P_1, \Delta(A_{22}), P_1, P_1, \dots, P_1) \\
 &\quad + p_n(P_1, A_{22}, \Delta(P_1), P_1, \dots, P_1) + \dots + p_n(P_1, A_{22}, P_1, P_1, \dots, \Delta(P_1))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= p_n(P_1, \Delta(A_{22}), P_1, P_1, \dots, P_1) \\
 &= \begin{cases} -P_1\Delta(A_{22})P_2 - P_2\Delta(A_{22})P_1, n = 2k+1, k = 1, 2, 3, \dots \\ -P_2\Delta(A_{22})P_1 + P_1\Delta(A_{22})P_2, n = 2k, k = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

对任意的 $n(n \geq 2, n \in \mathbb{N}^+)$ ，在 (3.8) 式中，左乘 P_1 ，右乘 P_2 ，可得 $P_1\Delta(A_{22})P_2 = 0$ ，于是 $P_2\Delta(A_{22})P_1 = 0$ 。从而 $\Delta(A_{22}) \in B(X)_{11} + B(X)_{22}$ 。结合引理 3.1，得

$$\Delta(A_{22}) = P_1\Delta(A_{22})P_1 + P_2\Delta(A_{22})P_2 = f_0(\Delta(A_{22})x_0)P_1 + P_2\Delta(A_{22})P_2,$$

即

$$\Delta(A_{22}) - f_0(\Delta(A_{22})x_0)I = -f_0(\Delta(A_{22})x_0)P_2 + P_2\Delta(A_{22})P_2 \in B(X)_{22}.$$

由于 $\Delta(P_2) \in \mathbb{F}I$ ，可知

$$\Delta(P_2) - f_0(\Delta(P_2)x_0)I \in \mathbb{F}I \cap B(X)_{22} = \{0\},$$

因此 $\Delta(P_2) = f_0(\Delta(P_2)x_0)I$ 。

接下来，证明定理 3.3。

证明 定义两个从 $\mathcal{A}$ 到 $B(X)$ 的映射 τ 和 D 如下：对任意的 $A \in \mathcal{A}$ ，令

$$\tau(A) = f_0(P_1AP_1x_0)\Delta(P_1) + f_0(\Delta(P_2AP_2)x_0)I$$

和

$$D(A) = \Delta(A) - \tau(A).$$

显然 τ 是从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{Z}(\mathcal{A}, B(X))$ 的线性映射， D 是从 $\mathcal{A}$ 到 $B(X)$ 的线性映射。此外，结合之前的引理以及 τ 和 D 的定义，不难得到：

- (1) 对于任意的 $A_{ij} \in \mathcal{A}_{ij}$ ，有 $D(A) = \Delta(A) - \tau(A)$ ， $D(A_{ij}) = \Delta(A_{ij}) \in B(X)_{ij}$ ，其中 $1 \leq i, j \leq 2$ 且 $i \neq j$ ；
- (2) $D(P_1) = D(P_2) = D(I) = 0$ ；
- (3) 对任意的 $A_{11} \in \mathcal{A}_{11}$ ，有 $D(A_{11}) = 0$ ；
- (4) 对任意的 $A_{22} \in \mathcal{A}_{22}$ ，有 $D(A_{22}) \in B(X)_{22}$ 。

要证明 Δ 是标准的，则只需要证明 D 是导子，并且对于任意的

$x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{A}$, 有 $\tau(p_n(x_1, x_2, \dots, x_n)) = 0$ 。

下面证明, 对任意的 $A_{ij} \in \mathcal{A}_{ij}$, $B_{sk} \in \mathcal{A}_{sk}$, $1 \leq i, j, s, k \leq 2$, 有

$$D(A_{ij}B_{sk}) = D(A_{ij})B_{sk} + A_{ij}D(B_{sk}),$$

因为 $D(A_{ij}) \in B(X)_{ij}$, 当 $j \neq s$, 有

$$D(A_{ij}B_{sk}) = D(A_{ij})B_{sk} + A_{ij}D(B_{sk}),$$

故只需证明以下 8 种情况:

- (1) $D(A_{11}B_{11}) = D(A_{11})B_{11} + A_{11}D(B_{11})$;
- (2) $D(A_{11}B_{12}) = D(A_{11})B_{12} + A_{11}D(B_{12})$;
- (3) $D(A_{12}B_{22}) = D(A_{12})B_{22} + A_{12}D(B_{22})$;
- (4) $D(A_{21}B_{11}) = D(A_{21})B_{11} + A_{21}D(B_{11})$;
- (5) $D(A_{22}B_{21}) = D(A_{22})B_{21} + A_{22}D(B_{21})$;
- (6) $D(A_{22}B_{22}) = D(A_{22})B_{22} + A_{22}D(B_{22})$;
- (7) $D(A_{12}B_{21}) = D(A_{12})B_{21} + A_{12}D(B_{21})$;
- (8) $D(A_{21}B_{12}) = D(A_{21})B_{12} + A_{21}D(B_{12})$.

对任意的 $A_{11} \in \mathcal{A}_{11}$, 有 $D(A_{11}) = 0$, 故 (1) 得证。对于任意的 $A \in \mathcal{A}$,

$B \in B(X)$, 由 $\Delta(A) - D(A) = \tau(A) \in \mathcal{Z}(\mathcal{A}, B(X))$, 可知

$$\begin{aligned} 0 &= p_2(\Delta(A) - D(A), B) \\ &= (\Delta(A) - D(A))B - B(\Delta(A) - D(A)) \\ &= (\Delta(A)B - B\Delta(A)) - (D(A)B - BD(A)), \end{aligned}$$

即

$$p_2(\Delta(A), B) = p_2(D(A), B).$$

对 $A_{11} \in \mathcal{A}_{11}$ 和 $B_{12} \in \mathcal{A}_{12}$, 记 $A_{11}B_{12} = (-1)^n p_n(A_{11}, B_{12}, P_1, P_1, \dots, P_1)$, 由于 $\Delta(P_1) \in \mathbb{F}I$,

结合(3.2)式, 得

$$\begin{aligned}
 D(A_{11}B_{12}) &= \Delta(A_{11}B_{12}) \\
 &= \Delta((-1)^n p_n(A_{11}, B_{12}, P_1, P_1, \dots, P_1)) \\
 &= (-1)^n \Delta(p_n(A_{11}, B_{12}, P_1, P_1, \dots, P_1)) \\
 &= (-1)^n \{p_n(\Delta(A_{11}), B_{12}, P_1, P_1, \dots, P_1) + p_n(A_{11}, \Delta(B_{12}), P_1, P_1, \dots, P_1)\} \\
 &= (-1)^n \{p_{n-1}(p_2(\Delta(A_{11}), B_{12}), P_1, P_1, \dots, P_1) + p_{n-1}(p_2(A_{11}, \Delta(B_{12})), P_1, P_1, \dots, P_1)\} \\
 &= (-1)^n \{p_{n-1}(p_2(D(A_{11}), B_{12}), P_1, P_1, \dots, P_1) + p_{n-1}(p_2(A_{11}, D(B_{12})), P_1, P_1, \dots, P_1)\} \\
 &= (-1)^n p_{n-1}(D(A_{11})B_{12} - B_{12}D(A_{11}) + A_{11}D(B_{12}) - D(B_{12})A_{11}, P_1, P_1, \dots, P_1) \\
 &= (-1)^n p_{n-1}(D(A_{11})B_{12} + A_{11}D(B_{12}), P_1, P_1, \dots, P_1) \\
 &= \begin{cases} (-1)^n (P_1(-D(A_{11})B_{12} - A_{11}D(B_{12}))P_2), n = 2k+1, k = 1, 2, 3, \dots \\ (-1)^n (P_1(D(A_{11})B_{12} + A_{11}D(B_{12}))P_2), n = 2k, k = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \\
 &= D(A_{11})B_{12} + A_{11}D(B_{12}).
 \end{aligned}$$

因此(2)得证, (3), (4)和(5)的证明过程和(2)相类似, 故略去。对于任意的 $C_{21} \in \mathcal{A}_{21}$, 根据(5), 对于任意的 $A_{22}, B_{22} \in \mathcal{A}_{22}$, 可得到等式

$$D(A_{22}B_{22}C_{21}) = D(A_{22}B_{22})C_{21} + A_{22}B_{22}D(C_{21}), \quad (3.9)$$

和

$$\begin{aligned}
 D(A_{22}B_{22}C_{21}) &= D(A_{22})B_{22}C_{21} + A_{22}D(B_{22}C_{21}) \\
 &= D(A_{22})B_{22}C_{21} + A_{22}D(B_{22})C_{21} + A_{22}B_{22}D(C_{21}).
 \end{aligned} \quad (3.10)$$

根据(3.9), (3.10)两式, 可得

$$D(A_{22}B_{22})C_{21} = D(A_{22})B_{22}C_{21} + A_{22}D(B_{22})C_{21},$$

因此, 对 $C_{21} \in \mathcal{A}_{21}$, 可得

$$(D(A_{22}B_{22}) - D(A_{22})B_{22} - A_{22}D(B_{22}))C_{21} = 0,$$

根据引理 3.2 和 $A_{22} \in \mathcal{A}_{22}$, 可得

$$D(A_{22}B_{22}) - D(A_{22})B_{22} - A_{22}D(B_{22}) = 0.$$

下面我们证明(7)和(8)，令 $A_{12} \in \mathcal{A}_2$ 和 $B_{21} \in \mathcal{A}_1$ 。经计算，可得

$$\begin{aligned}
 & \Delta(p_n(A_{12}, P_2, P_2, \dots, P_2, B_{21})) - D(p_n(A_{12}, P_2, P_2, \dots, P_2, B_{21})) \\
 &= p_n(\Delta(A_{12}), P_2, P_2, \dots, P_2, B_{21}) + p_n(A_{12}, \Delta(P_2), P_2, \dots, P_2, B_{21}) \\
 & \quad + \dots + p_n(A_{12}, P_2, P_2, \dots, P_2, \Delta(B_{21})) - D(p_n(A_{12}, P_2, P_2, \dots, P_2, B_{21})) \\
 &= p_{n-1}(\Delta(A_{12}), P_2, P_2, \dots, P_2, B_{21}) + p_{n-1}(A_{12}, P_2, P_2, \dots, P_2, \Delta(B_{21})) \\
 & \quad - D(p_{n-1}(A_{12}, P_2, P_2, \dots, P_2, B_{21})) \\
 &= p_2(\Delta(A_{12}), B_{21}) + p_2(A_{12}, \Delta(B_{21})) - D(p_2(A_{12}, B_{21})) \\
 &= p_2(D(A_{12}), B_{21}) + p_2(A_{12}, D(B_{21})) - D(A_{12}B_{21} - B_{21}A_{12}) \\
 &= D(A_{12})B_{21} - B_{21}D(A_{12}) + A_{12}D(B_{21}) - D(B_{21})A_{12} - D(A_{12}B_{21}) + D(B_{21}A_{12}) \\
 &= (D(A_{12})B_{21} + A_{12}D(B_{21}) - D(A_{12}B_{21})) + (D(B_{21}A_{12}) - B_{21}D(A_{12}) - D(B_{21})A_{12}).
 \end{aligned}$$

由于 $\Delta(p_n(A_{12}, P_2, P_2, \dots, P_2, B_{21})) - D(p_n(A_{12}, P_2, P_2, \dots, P_2, B_{21})) \in \mathbb{F}I$ ，设

$$\Delta(p_n(A_{12}, P_2, P_2, \dots, P_2, B_{21})) - D(p_n(A_{12}, P_2, P_2, \dots, P_2, B_{21})) = \lambda I,$$

其中 $\lambda \in \mathbb{F}$ ，于是

$$\begin{aligned}
 \lambda I &= (D(A_{12})B_{21} + A_{12}D(B_{21}) - D(A_{12}B_{21})) \\
 & \quad + (D(B_{21}A_{12}) - B_{21}D(A_{12}) - D(B_{21})A_{12}). \tag{3.11}
 \end{aligned}$$

因为 $D(A_{ij}) \in B(X)_{ij}$ ，可得

$$D(A_{12})B_{21} + A_{12}D(B_{21}) - D(A_{12}B_{21}) \in B(X)_{11}$$

和

$$D(B_{21}A_{12}) - B_{21}D(A_{12}) - D(B_{21})A_{12} \in B(X)_{22}.$$

用 P_1 右乘(3.11)式，可得

$$D(A_{12}B_{21}) = D(A_{12})B_{21} + A_{12}D(B_{21}) - \lambda P_1, \tag{3.12}$$

用 P_2 右乘(3.12)式，亦可得

$$D(B_{21}A_{12}) = B_{21}D(A_{12}) + D(B_{21})A_{12} + \lambda P_2, \tag{3.13}$$

(2) 结合 (3.13) 式, 可得

$$\begin{aligned} D(A_{12}B_{21}A_{12}) &= D(A_{12}B_{21})A_{12} + A_{12}B_{21}D(A_{12}) \\ &= D(A_{12})B_{21}A_{12} + A_{12}D(B_{21})A_{12} - \lambda A_{12} + A_{12}B_{21}D(A_{12}) . \end{aligned} \quad (3.14)$$

(3) 结合 (3.14) 式, 可得

$$\begin{aligned} D(A_{12}B_{21}A_{12}) &= D(A_{12})B_{21}A_{12} + A_{12}D(B_{21}A_{12}) \\ &= D(A_{12})B_{21}A_{12} + A_{12}D(B_{21})A_{12} + A_{12}B_{21}D(A_{12}) + \lambda A_{12} . \end{aligned} \quad (3.15)$$

对比 (3.14), (3.15) 两式, 有 $\lambda A_{12} = 0$ 。因此, $\lambda = 0$ 。由 (3.12), (3.13) 两式, 得到 (7), (8) 两式成立。由于 (1)–(8) 都是成立的, 知 D 是一个导子。此外, 对于任意的 $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{A}$, 有

$$\begin{aligned} \tau(p_n(x_1, x_2, \dots, x_n)) &= \Delta(p_n(x_1, x_2, \dots, x_n)) - D(p_n(x_1, x_2, \dots, x_n)) \\ &= \sum_{i=1}^n (p_n(x_1, x_2, \dots, \Delta(x_i), \dots, x_n)) - D(p_n(x_1, x_2, \dots, x_n)) \\ &= \sum_{i=1}^n (p_n(x_1, x_2, \dots, D(x_i), \dots, x_n)) - D(p_n(x_1, x_2, \dots, x_n)) \\ &= 0 . \end{aligned}$$

由此可得, $\Delta(A) = D(A) + \tau(A)$ 从 $\mathcal{A}$ 到 $B(X)$ 的标准 Lie n -导子。定义一个从 $\mathcal{A}$ 到 $B(X)$ 的线性映射如下: 对任意的 $A \in \mathcal{A}$, 有

$$d(A) = D(A) + p_2(A, G) .$$

因此, 可得

$$\delta(A) = \Delta(A) + p_2(A, G) = D(A) + \tau(A) + p_2(A, G) = d(A) + \tau(A) ,$$

其中, d 是从 $\mathcal{A}$ 到 $B(X)$ 的导子, τ 是从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{Z}(\mathcal{A}, B(X))$ 的线性映射, 对任意的 $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{A}$, 有 $\tau(p_n(x_1, x_2, \dots, x_n)) = 0$ 。即证 δ 是一个从 $\mathcal{A}$ 到 $B(X)$ 的标准 Lie n -导子。

第 4 章 Lie n-导子的局部性

4.1 引言

设 $\mathcal{A}$ 是一个数域上的代数, $\mathcal{M}$ 是一个 $\mathcal{A}$ -双边模, δ 是从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{M}$ 的映射。

如果 δ 是线性映射且满足: 对于任意的 $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{A}$, 都有
$$\delta(p_n(x_1, x_2, \dots, x_n)) = \sum_{i=1}^n (p_n(x_1, x_2, \dots, \delta(x_i), \dots, x_n))$$
 其中, $p_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 称为 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的 n 重 Lie 积, 则称 δ 是一个 Lie n-导子。

如果 δ 是线性的且满足: 对于任意的 $A \in \mathcal{A}$, 存在 Lie n-导子 δ_A , 使得 $\delta_A(A) = \delta(A)$, 则称 δ 是一个局部 Lie n-导子。

由 Lie n-导子和局部 Lie n-导子的定义知, Lie n-导子显然是局部 Lie n-导子, 反之不然。判别某些代数上局部 Lie n-导子是 Lie n-导子, 这是我们需要研究的问题, 也是非常有价值的。设 X 是 Banach 空间, 符号 $B(X)$ 表示 X 上全部有界线性算子。 $B(X)$ 中的单位不能写成交换子。

在本章的第 2 节中, 我们证明了从标准算子代数到 $B(X)$ 的局部 Lie n-导子都是 Lie n-导子。

4.2 局部 Lie n-导子

在本节中, 我们研究了从标准算子代数到 $B(X)$ 的局部 Lie n-导子局部性质问题。

定理 4.1 设 X 是一个数维大于 3 的 Banach 空间, $\mathcal{A}$ 是一个单位标准算子代数, 若 δ 是从 $\mathcal{A}$ 到 $B(X)$ 的局部 Lie n-导子, 则 δ 是 Lie n-导子。

证明 设 δ 是从 $\mathcal{A}$ 到 $B(X)$ 的局部 Lie n-导子。由局部 Lie n-导子的定义知,

存在一个 Lie n -导子 δ_A ，使得 $\delta_A(A) = \delta(A)$ 。又由定理 3.3 知， δ_A 是标准的，即存在一个 $\mathcal{A}$ 到 $B(X)$ 的导子 d_A ，同时存在 $\tau_A(A) \in FI$ ，有

$$\delta_A(A) = d_A(A) + \tau_A(A).$$

由定理 2.2 知， d_A 是内导子，故存在元素 $T_A \in B(X)$ ，有

$$d_A(A) = [A, T_A],$$

于是

$$\delta(A) = \delta_A(A) = d_A(A) + \tau_A(A) = [A, T_A] + \tau_A(A). \quad (4.1)$$

事实上，如果存在 $S_A \in B(X)$ 和 $\tau'_A(A) \in FI$ ，满足

$$\delta(A) = [A, S_A] + \tau'_A(A), \quad (4.2)$$

由 (4.1) 式和 (4.2) 式可得，对于 $\lambda \in FI$ ，有

$$[A, S_A - T_A] = \tau_A(A) - \tau'_A(A) = \lambda I.$$

由于 $B(X)$ 中的单位不能写成交换子，所以 $\lambda = 0$ 。故 $\tau_A(A) = \tau'_A(A)$ 。即知 $\tau_A(A)$ 是唯一的。因此，定义一个 $\mathcal{A}$ 到 FI 的映射 τ 如下：对于任意的 $A \in \mathcal{A}$ ，有 $\tau(A) = \tau_A(A)$ 。如果 A 是 $n-1$ 次交换子的和，显然有 $\tau(A) = 0$ 。

对于 $x \in X$ ， $f \in X^*$ ，定义 $\psi(x, f) = \tau(x \otimes f)$ ，则对于 $T_{x \otimes f} \in B(X)$ ，有

$$\delta(x \otimes f) = [x \otimes f, T_{x \otimes f}] + \psi(x, f) \quad (4.3)$$

和

$$\delta(\lambda x \otimes f) = [\lambda x \otimes f, T_{\lambda x \otimes f}] + \psi(\lambda x, f).$$

由于 δ 是线性的，则有 $\delta(\lambda x \otimes f) = \lambda \delta(x \otimes f)$ 。于是

$$[\lambda x \otimes f, T_{x \otimes f} - T_{\lambda x \otimes f}] = \psi(\lambda x, f) - \lambda \psi(x, f) \in FI.$$

由于 $B(X)$ 中的单位不能写成交换子，所以 $\psi(\lambda x, f) = \lambda \psi(x, f)$ 。与此类似，我们可以证明 $\psi(x, \lambda f) = \lambda \psi(x, f)$ 。从而可得 ψ 是齐次的。

设 $x \in X$ ， $f \in X^*$ ，且 $f(x) = 0$ ，有 $\psi(x, f) = 0$ 。存在 $z \in X$ ，满足 $f(z) = 1$ 。因为

$$\begin{aligned} [x \otimes f, z \otimes f] &= x \otimes fz \otimes f - z \otimes fx \otimes f \\ &= f(z)x \otimes f - f(x)z \otimes f \\ &= x \otimes f, \end{aligned}$$

由此可知 $x \otimes f = p_n(x \otimes f, z \otimes f, \dots, z \otimes f)$ 是一个 $n-1$ 重交换子。因此可得 $\psi(x, f) = \tau(x \otimes f) = 0$ 。对于任意的 $x_1, x_2 \in X$, $f \in X^*$, 若 $x_1, x_2 \in \ker f$, 则有

$$\psi(x_1, f) = \psi(x_2, f) = \psi(x_1 + x_2, f) = 0$$

和

$$\psi(x_1 + x_2, f) = \psi(x_1, f) + \psi(x_2, f).$$

如果 x_1 和 x_2 有一个不属于 $\ker f$, 那么 $\dim(\text{span}\{x_1, x_2\} \cap \ker f) \leq 1$ 。由于 $\dim(X) \geq 3$, 可得 $\dim(\ker f) \geq 2$ 。设 $y \in \ker f$, 且 $y \notin \text{span}\{x_1, x_2\}$, 由 (4.3) 式可得, 对任意的 $\mu, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{F}$, 有

$$\delta(x_1 \otimes f)y = \psi(x_1, f)y + \mu_1 x_1, \quad \delta(x_2 \otimes f)y = \psi(x_2, f)y + \mu_2 x_2$$

和

$$\delta((x_1 + x_2) \otimes f)y = \psi(x_1 + x_2, f)y + \mu(x_1 + x_2).$$

由于 δ 是线性映射, 故

$$(\psi(x_1 + x_2, f) - \psi(x_1, f) - \psi(x_2, f))y = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 - \mu(x_1 + x_2).$$

又由于 $y \notin \text{span}\{x_1, x_2\}$, 可得

$$\psi(x_1 + x_2, f) = \psi(x_1, f) + \psi(x_2, f),$$

即知 ψ 对第一个变量是可加的。

对于任意的 $f_1, f_2 \in X^*$, $x \in X$, 如果 $x \in \ker f_1 \cap \ker f_2$, 则有

$$\psi(x, f_1 + f_2) = \psi(x, f_1) = \psi(x, f_2) = 0,$$

故

$$\psi(x, f_1 + f_2) = \psi(x, f_1) + \psi(x, f_2).$$

若 $x \notin \ker f_1 \cap \ker f_2$, 取 $z \in \ker f_1 \cap \ker f_2$, 其中, x 与 z 线性无关。由 (4.3) 式可知, 对任意的 $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$, 有

$$\delta(x \otimes f_1)z = \psi(x, f_1)z + \lambda_1 x, \quad \delta(x \otimes f_2)z = \psi(x, f_2)z + \lambda_2 x$$

和

$$\delta(x \otimes (f_1 + f_2))z = \psi(x, f_1 + f_2)z + \lambda x.$$

由于 δ 是线性映射, 故

$$(\psi(x, f_1 + f_2) - \psi(x, f_1) - \psi(x, f_2))z = (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda)x.$$

因为 x 与 z 线性无关, 可得

$$\psi(x, f_1 + f_2) = \psi(x, f_1) + \psi(x, f_2).$$

即知 ψ 对第二个变量是可加的。因此， ψ 是一个双线性映射。

下面我们定义一个映射 ϕ 如下：对于任意的 $x \in X$ ， $f \in X^*$ ，有

$$\phi(x, f) = [x \otimes f, T_{x \otimes f}] = \delta(x \otimes f) - \psi(x, f). \quad (4.4)$$

显然， $\phi(x, f)$ 是双线性映射。对于任意的 $x_0 \in \ker f$ ，有

$$\begin{aligned} [x \otimes f, T_{x \otimes f}]x_0 &= (x \otimes f T_{x \otimes f} - T_{x \otimes f} x \otimes f)x_0 \\ &= x \otimes f T_{x \otimes f} x_0 - T_{x \otimes f} x \otimes f x_0 \\ &= f(T_{x \otimes f} x_0)x - f(x_0)T_{x \otimes f} x \\ &= f(T_{x \otimes f} x_0)x. \end{aligned}$$

故 $\phi(x, f) \ker f \subseteq \mathbb{F}x$ 。因此，由文献[56]的命题 1.1 可得，存在两个线性映射

$T: X \rightarrow X$ 和 $S^*: X^* \rightarrow X^*$ ，对于任意的 $x \in X$ ， $f \in X^*$ ，有

$$\phi(x, f) = [x \otimes f, T_{x \otimes f}] = Tx \otimes f + x \otimes S^*f. \quad (4.5)$$

对于任意的 $x \in X$ ， $f \in X^*$ ，有

$$\begin{aligned} (T + T_{x \otimes f})x \otimes f &= x \otimes f T_{x \otimes f} - x \otimes S^*f \\ &= x \otimes (f T_{x \otimes f} - S^*f) \\ &= x \otimes (T_{x \otimes f}^* f - S^*f) \\ &= x \otimes (T_{x \otimes f}^* - S^*)f. \end{aligned} \quad (4.6)$$

如果 x 和 f 中有一个是零，显然有 $S^*f(x) = -f(Tx)$ 。如果 x 和 f 均不为零，当 (4.6) 式两边都等于 0，有

$$(T + T_{x \otimes f})x = (T_{x \otimes f}^* - S^*)f = 0.$$

于是

$$S^*f(x) = T_{x \otimes f}^* f(x) = f(T_{x \otimes f} x) = -f(Tx).$$

当 (4.6) 式两边都不等于 0，有

$$[(T + T_{x \otimes f})x \otimes f]^2 = [x \otimes (T_{x \otimes f}^* - S^*)f]^2,$$

即

$$f((T + T_{x \otimes f})x)((T + T_{x \otimes f})x \otimes f) = ((T_{x \otimes f}^* - S^*)f)(x)(x \otimes (T_{x \otimes f}^* - S^*)f).$$

于是

$$f((T + T_{x \otimes f})x) = ((T_{x \otimes f}^* - S^*)f)(x).$$

所以 $S^*f(x) = -f(Tx)$ 。因此 $S^* = -T^*$ 。由 (4.4), (4.5) 两式可得, 对于 $x \otimes f \in \mathcal{A}$, 有

$$\begin{aligned}\delta(x \otimes f) &= Tx \otimes f + x \otimes S^*f + \psi(x, f) \\ &= Tx \otimes f + x \otimes (-T^*f) + \psi(x, f) \\ &= Tx \otimes f - x \otimes T^*f + \psi(x, f) \\ &= Tx \otimes f - x \otimes fT + \psi(x, f) \\ &= [x \otimes f, -T] + \psi(x, f).\end{aligned}$$

记 $J = -T$, 结合 $\psi(x, f) = \tau(x \otimes f) \in \mathbb{F}I$, 对于 $A = x \otimes f \in \mathcal{A}$ 和 $\lambda_A \in \mathbb{F}$, 可得

$$\delta(A) = [A, J] + \lambda_A I. \quad (4.7)$$

设 P 和 Q 是两个秩一算子的幂等元, 记 $P = x_1 \otimes f_1$, $Q = x_2 \otimes f_2$, 取 $P^\vee = I - P$, $Q^\vee = I - Q$, 可得 PA 和 $P^\vee AQ$ 都是秩一算子。于是对于任意的 $A \in \mathcal{A}$, 由 (4.7) 可得

$$\begin{aligned}\delta(A) &= \delta(PA + P^\vee AQ + P^\vee AQ^\vee) \\ &= \delta(PA) + \delta(P^\vee AQ) + \delta(P^\vee AQ^\vee) \\ &= [PA, J] + \lambda_{PA} I + [P^\vee AQ, J] + \lambda_{P^\vee AQ} I + [P^\vee AQ^\vee, J] + \lambda_{P^\vee AQ^\vee} I \\ &= PAJ - JPA + P^\vee AQJ - JP^\vee AQ + [P^\vee AQ^\vee, J] + \lambda_A I \\ &= PAJ + P^\vee AQJ - (JPAQ + JPAQ^\vee + JP^\vee AQ) + [P^\vee AQ^\vee, J] + \lambda_A I \\ &= PAJ + P^\vee AQJ - (JAQ + JPAQ^\vee) + [P^\vee AQ^\vee, J] + \lambda_A I.\end{aligned} \quad (4.8)$$

其中, $\lambda_A I = \lambda_{PA} I + \lambda_{P^\vee AQ} I + \lambda_{P^\vee AQ^\vee} I$ 。用 P 和 Q 分别左乘, 右乘 (4.8) 式可得

$$P\delta(A)Q = PAJQ - PJAQ + \lambda_A PQ.$$

即

$$P(\delta(A) - [A, J] - \lambda_A I)Q = 0. \quad (4.9)$$

令 $\delta(A) - [A, J] - \lambda_A I = B$ 。由 (4.9) 式, 可得 $x_1 \otimes f_1 B x_2 \otimes f_2 = 0$ 。结合秩一算子的性质, 可得 $f_1(Bx_2)x_1 \otimes f_2 = 0$ 。由 x_1 和 f_2 的任意性, 可得 $f_1(Bx_2) = 0$ 。又由 x_2 和 f_1 的任意性, 可得 $B = 0$, 即 $\delta(A) = [A, J] + \lambda_A I$ 。因此, 对于任意的 $A \in \mathcal{A}$, 有 $\delta(A) = [A, J] + \lambda_A I$, 其中 J 是固定元, λ_A 取决于 A , 结合 τ 的唯一性可得, $\tau(A) = \lambda_A I$, 同时 τ 是从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathbb{F}I$ 的线性映射, 且 τ 满足对于任意的

$x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{A}$, 有 $\tau(p_n(x_1, x_2, \dots, x_n)) = 0$, 这意味着 δ 是一个 Lie n -导子。

推论 4.2 设 X 是一个数维大于 3 的 Banach 空间, $\mathcal{A}$ 是一个非单位标准算子代数, 若 δ 是从 $\mathcal{A}$ 到 $B(X)$ 的局部 Lie n -导子, 则 δ 是 Lie n -导子。

证明 用 $\tilde{\mathcal{A}}$ 表示单位标准算子代数 $\mathcal{A} \oplus \mathbb{F}I$ 。定义从 $\tilde{\mathcal{A}}$ 到 $B(X)$ 的线性映射 $\tilde{\delta}$ 如下: 对于任意的 $A \in \mathcal{A}, \lambda \in \mathbb{F}$, 有

$$\tilde{\delta}(A + \lambda I) = \delta(A).$$

由于 δ 是从 $\mathcal{A}$ 到 $B(X)$ 的局部 Lie n -导子, 故存在 Lie n -导子 δ_A , 使得 $\delta(A) = \delta_A(A)$ 。定义从 $\tilde{\mathcal{A}}$ 到 $B(X)$ 的线性映射 $\tilde{\delta}_A$ 如下: 对于任意的 $B \in \mathcal{A}$, $\lambda \in \mathbb{F}$, 有

$$\tilde{\delta}_A(B + \lambda I) = \delta_A(B).$$

于是

$$\tilde{\delta}(A + \lambda I) = \delta(A) = \delta_A(A) = \tilde{\delta}_A(B + \lambda I).$$

这蕴含着 $\tilde{\delta}$ 是一个从 $\tilde{\mathcal{A}}$ 到 $B(X)$ 的局部 Lie n -导子。由定理 4.1 可知, $\tilde{\delta}$ 是一个 Lie n -导子。因此, δ 是一个 Lie n -导子。

第 5 章 总结与展望

5.1 总结

本文研究了标准算子代数上的一些映射，主要包括导子，局部导子，2-局部导子，Lie n -导子和局部 Lie n -导子等。

第二章，首先，对于从闭的标准算子代数到 $B(X)$ 的导子是内导子的结论，我们采用另一种更简单的方法去证明。其次，我们证明了从标准算子代数到 $B(X)$ 的局部导子是导子。最后，我们证明了从标准算子代数到 $B(X)$ 的 2-局部导子是导子。

第三章，考虑了标准算子代数上的 Lie n -导子标准性问题，我们证明了从单位标准算子代数到 $B(X)$ 的 Lie n -导子是标准的。

第四章，在标准算子代数上的 Lie n -导子标准性问题的基础上，我们证明了从标准算子代数到 $B(X)$ 的局部 Lie n -导子是 Lie n -导子。

5.2 展望思考

虽然我们在研究中已经取得一些阶段性成果，但是还有一些有价值的问题值得思考：（1）我们证明从闭的标准算子代数到 $B(X)$ 的导子是内导子的过程中，利用“闭的”这一条件，能否将其除去，得到更一般的结论呢？（2）如何证明非单位标准算子代数到 $B(X)$ 的 Lie n -导子是标准的？

参考文献

- [1] Dixmier J. C^* -algebras[M]. North-Holland, 1977.
- [2] Dixmier J. Von Neumann algebras[M]. North-Holland, 1981.
- [3] 李炳仁. 算子代数[M]. 科学出版社, 1986.
- [4] 侯晋川, 崔建莲. 算子代数上线性映射引论[M]. 科学出版社, 2002.
- [5] Herstein I. Jordan derivations of prime rings[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1957, 8(6): 1104-1110.
- [6] Lu F. Jordan Derivations of Reflexive Algebras[J]. Integral Equations and Operator Theory, 2010, 67(1): 51-56.
- [7] 魏妙. 素环上的 Jordan 导子[J]. 漯河职业技术学院学报, 2012, 11(2): 92-93.
- [8] Li J, Lu F. Additive Jordan derivations of reflexive algebras[J]. Journal of Mathematical Analysis Applications, 2007, 329(1): 102-111.
- [9] Cusack J. Jordan derivations on rings[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1975, 53(2): 321-324.
- [10] Brešar M. Jordan derivations on semiprime rings[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1988, 104(4): 1003-1006.
- [11] Brešar M, Vukman J. Jordan derivations on prime rings[J]. Bulletin of the Australian Mathematical Society, 1988, 37(3): 321-322.
- [12] Hejazian S, Niknam A. Modules, annihilators and module derivations of JB^* -algebras[J]. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 1996, 27(2): 129-140.
- [13] Kadison R V. Derivations of Operator Algebras[J]. Annals of Mathematics, 1966, 83(2): 280-293.
- [14] Sakai S. Derivations of W^* -algebras[J]. Annals of Mathematics, 1966, 83(2): 273-279.
- [15] Chernoff P R. Representations, automorphisms, and derivations of some operator algebras[J]. Journal of Functional Analysis, 1973, 12(3): 275-289.
- [16] 刘胜琦. 广义矩阵代数上的内导子[D]. 上海: 上海师范大学, 2013.

- [17] Saidi H, Janfada A R, Mirzavaziri M. Kinds of derivations on Hilbert C^* -modules and their operator algebras[J]. Miskolc Mathematical Notes, 2015, 16: 453-461.
- [18] Christensen E. Derivations of nest algebras[J]. Mathematische annalen, 1977, 229(2): 155-161.
- [19] He J, Li J, Zhao D. Derivations, local and 2-local derivations on some algebras of operators on Hilbert C^* -modules[J]. Mediterranean Journal of Mathematics, 2017, 14: 1-11.
- [20] Moghadam M K, Miri M, Janfada A R. A note on derivations on the algebra of operators in Hilbert C^* -modules[J]. Mediterranean Journal of Mathematics, 2016, 3(13): 1167-1175.
- [21] Kadison R V. Local derivations[J]. Journal of algebra, 1990, 130(2): 494-509.
- [22] Zhu J. Local derivation of nest algebras[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1995, 123(3): 739-742.
- [23] Wu J. Local derivations of reflexive algebras[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1997, 125(3): 869-873.
- [24] Li J, Pan Z. Annihilator-preserving maps, multipliers, and derivations[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2010, 432(1): 5-13.
- [25] 赵跃强. Witt-代数上的 2-局部、局部导子和 2-局部、局部自同构[D]. 石家庄: 河北师范大学, 2021.
- [26] Crist R L. Local derivations on operator algebras[J]. Journal of Functional Analysis, 1996, 135(1): 76-92.
- [27] Johnson B. Local derivations on C^* -algebras are derivations[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 2001, 353(1): 313-325.
- [28] Hadwin D, Li J. Local derivations and local automorphisms on some algebras[J]. Journal of Operator Theory, 1995, 60(1): 29-44.
- [29] Hadwin D, Li J. Local derivations and local automorphisms[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2004, 290(2): 702-714.
- [30] Zhang J H, Ji G X, Cao H X. Local derivations of nest subalgebras of von Neumann algebras[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2004, 392(1): 61-69.

- [31] Šemrl P. Local automorphisms and derivations on $B(H)[J]$. Proceedings of the American Mathematical Society, 1997, 125(9): 2677-2680.
- [32] 綦伟青, 纪培胜. AFC^* -代数上的 2-局部导子[J]. 青岛大学学报, 2000, 13(1): 10-18.
- [33] 张建华, 李红霞. Digraph 代数上的 2-局部导子[J]. 数学学报, 2006, 49(6): 1411-1416.
- [34] 李红霞. 算子代数上的若干可导映射[D]. 西安: 陕西师范大学, 2006.
- [35] 何俊. 算子代数上一些映射的局部性的刻画[D]. 上海: 华东理工大学, 2017.
- [36] 黄杰. 一些无限维李代数的 2-局部导子[D]. 青岛: 青岛大学, 2021.
- [37] 王丽. 某些算子代数上的 2-局部导子[D]. 扬州: 扬州大学, 2018.
- [38] Ayupov S, Kudaybergenov K. 2-Local derivations and automorphisms on $B(H)$ [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2012, 395(1): 15-18.
- [39] Martindale W. Lie derivations of primitive rings[J]. Michigan Mathematical Journal, 1964, 11(2): 183-187.
- [40] Mathieu M, Villena A R. The structure of Lie derivations on C^* -algebras[J]. Journal of Functional Analysis, 2003, 202(2): 504-525.
- [41] Lu F. Lie derivations of certain CSL algebras[J]. Israel Journal of Mathematics, 2006, 155(1): 149-156.
- [42] Cheung W S. Lie Derivations of Triangular Algebras[J]. Linear and Multilinear Algebra, 2003, 51(3): 299-310.
- [43] Miers C R. Lie derivations of von Neumann algebras[J]. Duke Mathematical Journal, 1973, 40(2): 403-409.
- [44] Johnson B. Symmetric amenability and the nonexistence of Lie and Jordan derivations[J]. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1996, 120(3): 455-473.
- [45] Miers C. Lie triple derivations of Von Neumann algebras[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1987, 71(1): 57-61.
- [46] 沈其骅. 算子代数上一些映射的刻画[D]. 上海: 华东理工大学, 2012.
- [47] Benkovic D. Lie triple derivations of unital algebras with idempotents[J]. Linear & Multilinear Algebra, 2015, 63(1): 141-165.

- [48] 张雪丽. 算子代数上某些导子性质的刻画[D]. 西安: 陕西科技大学, 2022.
- [49] 刘红玉, 霍东华. 三角代数上的 Lie n -重导子[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2013, 30(4): 479-482.
- [50] 李晓雯. 具有幂等元的代数上的 Lie n -重导子[D]. 上海: 上海师范大学, 2015.
- [51] He J, Li J, An G, etc. Characterizations of 2-local derivations and local Lie derivations on some algebras[J]. Siberian Mathematical Journal, 2018, 59(4): 721-730.
- [52] 宁彤. 因子 Von Neumann 代数上的非线性混合可导映射和双局部 Lie derivations[D]. 西安: 陕西师范大学, 2020.
- [53] 齐霄霏, 冯小雪. Von Neumann 代数上的可乘 Lie n -derivations[J]. 数学学报, 2020, 63(4): 349-366.
- [54] 高敏. 三角代数上的 2-局部 Lie 导子与正交射影若干问题的研究[D]. 海口: 海南师范大学, 2020.
- [55] Liu D, Zhang J. Local Lie derivations on certain operator algebras[J]. Annals of Functional Analysis, 2017, 8(2): 270-280.
- [56] Lu F, Liu B. Lie derivations of reflexive algebras[J]. Integral Equations and Operator Theory, 2009, 64(2): 261-271.

硕士期间发表的论文

- [1] 陈林, 何俊. 标准算子代数上的导子, 局部导子和 2-局部导子[J]. 安徽工程大学学报.(已录用)

致谢

时光飞逝，转眼三年的学习生涯即将结束。

首先，我要感谢我的导师何俊副教授，他是教授我泛函分析和算子代数两门基础课的老师，教会我很多专业基础性知识，这为我后面的学习提供了巨大的帮助。同时，何老师经常带领我上讨论班，让我进行汇报，每次，他都能找到我的不足，并帮助我改正。无论是撰写小论文，还是本篇论文的过程中，何老师在选题，撰写和数据处理等方面，都给我提供很多有价值的意见。在此，向何老师表示深深地感谢，祝愿何老师工作顺利，家庭幸福。

其次，感谢何老师门下的赵海霞，黄星星，曹永乐和陆甜甜师兄弟，我和他们一起上讨论班，平时与他们相互交流，共同督促学习，他们给我提供很多建议和帮助。

再次，感谢我的室友潘德发，吴开强和章森，还有王龙同学，不管是在学习上，还是生活上，他们都非常热心帮助我，教会我很多计算机方面的知识。

最后，感谢我的父母和亲人，在我面对困难的时候，总是给我鼓励与支持。