

分类号: TP183

单位代码: 10363

密 级: 公开

学 号: 2211020124

题 目 基于动态事件触发机制的
 神经网络状态估计

题 目 Dynamic event-Triggered Mechanism-based
 State Estimation for Neural Networks

学 生 姓 名 : 李 娜

指 导 教 师 : 刘宏建 教授

专 业 : 数 学

研 究 方 向 : 随机控制理论及应用

论文答辩日期: 2024 年 5 月 29 日

安徽工程大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：我恪守学术道德，崇尚严谨学风。所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已明确注明和引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品及成果的内容。论文为本人亲自撰写，我对所写的内容负责，并完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

学位论文作者签名：李刚

日期：2024 年 6 月 2 日

安徽工程大学学位论文版权使用授权书

学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅或借阅。本人授权安徽工程大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保密 ☐，在 年解密后适用本版权书。

本学位论文属于

不保密 ☒。

学位论文作者签名：李娜

指导教师签名：刘建

日期：2024 年 6 月 2 日

日期：2024 年 6 月 2 日

基于动态事件触发机制的神经网络状态估计研究

摘 要

在过去的几十年里,人工神经网络(Artificial Neural Network, ANN)是一种模拟生物神经系统的计算模型,由数量庞大的单一人工神经元元件集结而成,通过模仿生物神经元间的连接、信息传递、整合与响应机制,对复杂数据进行分布式并行处理、学习与记忆神经网络具有较好的学习和记忆能力。在实际应用中,神经网络广泛应用于各类机器学习任务,如图像辨别、语音识别、自然语言处理、个性化推荐、智能决策等。近年来,神经网络在许多领域得到了广泛的应用,尤其是在复杂非线性系统的状态估计问题中。由于神经网络具有较好的学习和记忆能力,因此可以通过建立神经网络的相关模型对状态进行估计。

实际上,在使用电路实现神经网络时,由于网络负载和通信限制,系统参数会经历随机波动,系统参数的随机变化可以用随机变量的集合来表示。此外,其它类型的时间延迟(分布式延迟和时变延迟)的存在会导致神经网络的不稳定。由于信号的传输方式和放大器切换的速度有限,这些延迟是不可避免的。为了更好地理解神经网络的实际应用,研究随机系统因素和时间延迟的影响是至关重要的。在随机系统参数和随机时滞同时存在的情况下,设计一种弹性的神经网络状态估计技术成为一项可行而又艰巨的挑战。

动态事件触发机制被广泛应用于神经网络的状态估计问题中。动态事件触发与静态事件触发是两种不同的事件处理机制,它们在响应事件发生时具有不同的特点和适用场景。相较于静态事件触发,动态事件触发在以下几个方面表现出优势:动态事件触发通常更加注重资源的有效利用,能够根据系统状态或环境条件的变化自动调整触发条件或阈值,

具有更强的自适应性；可以根据实际事件的发生情况立即做出反应，无需等待下一个预设触发点，有利于提高系统的实时响应能力和对突发状况的敏感度；动态事件触发通常更加注重资源的有效利用。

基于动态事件触发机制和随机参数，本研究提出了一种运用动态事件触发原理的神经网络系统状态估测法，利用 Lyapunov 稳定性理论对估计误差进行分析。本文的主要思想是设计一种弹性状态估计方法，使系统的动态估计在满足相应性能要求的情况下保持稳定。然后，由一组线性矩阵不等式求解过程，我们得出了为该状态估计算法所给定的初始矩阵。最后通过一个 MATLAB 仿真验证了所设计的状态估计器的有效性。

关键词：神经网络，动态事件触发机制，随机参数，状态估计

Dynamic Event-Triggered Mechanism-based State Estimation for Neural Networks

ABSTRACT

In the past decades, Artificial Neural Network (ANN) is a computational model that simulates the biological nervous system. It is composed of many simple artificial neurons. By imitating the connection, information transmission, integration and response mechanism between biological neurons, ANN can process complex data in distributed parallel. Learning and memory neural networks have good learning and memory capabilities. In practical applications, neural networks are widely used in various machine learning tasks, such as image classification, speech recognition, natural language processing, recommendation system, reinforcement learning and so on. In recent years, neural networks have been widely used in many fields, this is especially true in the case of state estimation problems for complex nonlinear systems. Because neural networks have better learning and memory capabilities, the state can be estimated by establishing the related model of neural network.

In fact, when using circuits to realize neural networks, due to network load and communication constraints, system parameters will experience random fluctuations, and the random changes of system parameters can be expressed by a set of random variables. In addition, the existence of other types of time delays (distributed delay and time-varying delay) will lead to the instability of neural networks. These delays are inevitable due to the limited transmission mode of signals and the limited switching speed of amplifiers. In order to better understand the practical application of neural network, it is very important to study the influence of stochastic system factors and time delay. In the case of stochastic system parameters and stochastic time delays, it is a feasible and formidable challenge to design an elastic neural network state estimation technique.

Dynamic event triggering mechanism is widely used in state estimation of neural networks. Dynamic event triggering and static event triggering are two different event processing mechanisms, which have different characteristics and applicable scenarios when responding to events. Compared with static event triggering, dynamic event triggering shows advantages in the following aspects: dynamic event triggering usually pays more attention to the effective use of resources, can automatically adjust trigger conditions or thresholds according to the changes of system state or environmental

conditions, and has stronger adaptability; It can respond immediately according to the actual event without waiting for the next preset trigger point, which is beneficial to improve the real-time response ability and sensitivity to emergencies of the system; Dynamic event triggering usually pays more attention to the effective use of resources.

Based on the dynamic event triggering mechanism and stochastic parameters, this paper proposes a neural network state estimation method based on dynamic event triggering mechanism, and analyzes the estimation error by using Lyapunov stability theory. The main idea of this paper is to design a method for estimating the resilient state, which makes the dynamic estimation of the system stable while meeting the corresponding performance requirements. Then, by solving a set of linear matrix inequalities, the initial matrix of the designed state estimator is given. Finally, the effectiveness of the designed state estimator is verified by a MATLAB simulation.

Li Na (Mathematics)

Supervised by Prof. Liu Hongjian

KEY WORDS: Delayed neural networks, dynamic event triggered mechanism, state estimator, random parameters

目 录

摘 要.....	I
1.1 课题研究背景.....	1
1.2 事件触发协议.....	2
1.2.1 动态事件触发协议.....	2
1.2.2 静态事件触发协议.....	2
1.2.3 神经网络中的时滞.....	3
1.2.4 状态估计.....	3
1.3 内容提纲.....	3
第 2 章 基于动态事件触发机制的随机参数时滞神经网络弹性 H_∞ 状态估计 ..	5
2.1 问题描述.....	5
2.2 主要结果.....	10
2.3 数值实例及其仿真.....	14
2.4 本章结论.....	16
第 3 章 动态事件触发策略下时滞神经网络的状态估计：有限时间情形.....	17
3.1 问题描述.....	17
3.2 主要结果.....	19
3.3 数值仿真.....	27
3.4 本章小结.....	28
第 4 章 总结与展望.....	30
4.1 总结.....	30
4.2 展望.....	31
参考文献.....	32
攻读硕士期间取得的学术成果.....	37
致 谢.....	38

第 1 章 绪论

1.1 课题研究背景

在过去的几十年里,人们花了很多时间研究神经网络。这主要是因为神经网络具备跨领域的广泛应用潜力^[3,7,9]。值得注意的是状态估计问题是神经网络动力学分析领域的一个重要学术课题。例如,文献[4]为具有混合时滞的递归神经网络抗离群点的远程状态估计。文献[5]则介绍了加权尝试一次丢弃协议下离散时滞记忆神经网络的状态估计:一种弹性集隶属度方法。

应当指出的是, H_∞ 状态估计方法颇受欢迎。然而,在当前多数针对神经网络的状态估计方法中,普遍要求精确设定估计器增益矩阵。但在实际情况中,这些增益参数难免会遭遇意料之外的波动。此类问题主要源于所构建估计器的实际部署往往受限于若干现实因素,如设备的量化精度限制等。故此,针对增益参数波动与有限能量噪声环境下的神经网络状态估计问题,研究开发具备鲁棒性的 H_∞ 状态估计器显得尤为重要。在实际电路实现神经网络过程中,由于受到网络负载与通信制约,系统参数往往不可避免地发生随机波动现象。这些波动可由一组随机变量集合予以表示。另外,诸如分布式时滞、时变时滞等不同形式的时滞问题亦可能导致神经网络运行失稳。鉴于信号传输方式及放大器切换速率的固有限制,这些时滞现象实属必然。因此,深入探究神经网络在实际场景中的应用表现,对随机系统参数和时滞因素影响的研究至关重要。面对随机系统参数与时滞共存的复杂情况,研发出一套既能应对不确定性又能保持高性能的 H_∞ 状态估计算法,无疑是一项兼具必要性和挑战性的任务。

另一方面,事件触发传输因其显著的计算资源节省潜力而备受瞩目。所谓事件触发策略,即仅当测量数据满足预设触发条件时,才进行信息传输。近年来,学术界对事件触发状态估计领域的探讨热度持续攀升^[2,6]。在文献[11]中,对动态事件触发机制进行了深入探讨。该方法引入了一个额外变量,有望大幅降低通信需求,故而迅速成为众多早期研究的焦点^[1,10,12]。然而,针对具有随机参数和时滞的神经网络,如何构建基于动态事件触发机制的鲁棒状态估计算法,仍是一项极具挑战且意义重大的课题。

1.2 事件触发协议

1.2.1 动态事件触发协议

近些年来，人们在静态事件触发协议的基础上提出动态事件触发协议。动态事件触发协议，作为一种高效的节能策略，通过对信号的传输频率进行精确控制，是一种应用非常广泛的协议，它可以有效地降低网络中的非必要资源开销。这种协议的核心在于其能够设计出一个满足条件自适应触发机制，当系统检测到预设的特定事件时，事件驱动机制使得只有当某个预先定义的事件发生时，系统才能将被评估对象的输出信息或者状态信息通过网络反馈到估计器。若事件触发条件未获满足，待估对象之输出或状态将沿用前次记录，从而降低了传送的次数，并防止了某些不需要的资源消耗。例如，Zhang 等人研究了通信链路感知的多智能体动态事件触发一致性控制^[30]；Yu 等人研究了基于动态事件触发机制的电弧炉弧流参数建模及控制^[31]；Jiang 等人研究了带死区的多智能体系统事件触发协同控制^[32]。文献^[33]在对非线性系统的状态进行估计时，为达成节约资源的目标，文中于系统中植入了动态事件触发协定。实际上，近几年来，动态事件触发传输方案渐成广受青睐之潮流。这种方案通过结合多种技术手段，如传感器网络、大数据分析和人工智能等来实现更高效的数据传输。而且，在这一领域，已经有不少研究者投入了大量的时间和精力进行研究和开发，试图进一步提升该方案的性能和应用范围。

1.2.2 静态事件触发协议

在当今日益复杂的软件生态系统中，事件触发机制逐渐成为了资源受限应用场景中的一项关键技术革新。这种机制不同于传统的时间触发机制，后者主要依赖于定时事件的触发来进行信息传递。相反，事件触发机制侧重于实时、动态地处理数据交互，允许应用程序根据当前状态和上下文快速响应变化，从而显著提升了资源利用率 and 应用性能。这种通信范式的转变是对现有通信协议的重要补充，它强调了事件驱动这使得而非时间顺序，开发者能够更加灵活地设计应用程序，以适应不断变化的通信需求和环境条件。例如，Peng 等人研究了网络控制系统中事件触发通信与控制协同设计^[34]，Jia 等人研究了事件触发通信下非线性多智

能系统分布式自适应一致性的多项式方法^[35], Cai 等人研究了一种基于事件触发的分布式最优资源分配量化通信策略^[36]。

1.2.3 神经网络中的时滞

有时会发生这样一种情况, 即已发生的情况仍在继续发生并且对当前时刻产生影响。这种现象称为时滞, 时滞是普遍存在的^[37-40]。时滞效应在诸如生物系统与电路系统等多元复杂体系中的存在, 对信息或信号的传递速度及进程施加了实际限制。这一特性若未得到妥善与应对, 极有可能诱发种种不良动力学反应, 诸如混沌现象、吸引子形态的变化(如倍周期分岔等)甚至会破坏系统的稳定性能。例如, Tu 等人研究了基于观测器的时变时滞离散忆阻神经网络弹性耗散控制^[41]; Xiao 等人研究了时变时滞线性系统稳定性分析的新方法^[42]; Chen 等人研究了基于矩阵测度的混合时滞非线性多 agent 系统分布式脉冲一致性^[43]。

1.2.4 状态估计

状态估计, 即依据既有系统模型及量测数据集, 对系统内在状态进行重构的问题。状态估计问题在神经网络中的应用在学术界应用较多, 主要是线性矩阵不等式方法的开发使得对神经网络下状态估计的研究有较为可靠方便的工具进行求解, 所以此类研究才得到越来越多的关注。具体而言, 文献[44]针对具有时变时滞特性的离散型忆阻神经网络, 设计了一种能满足预设 H_∞ 性能指标的状态估计器。再者, 文献[45]在随机有限时间状态下将 H_∞ 状态估计应用于具有时变延迟的离散时间半马尔可夫跳跃神经网络。文献[46]研究了离散时间忆阻循环神经网络中, 具有随机时滞的 H_∞ 状态估计。

1.3 内容提纲

本文研究了基于动态事件触发的神经网络的状态估计问题。首先, 研究了涉及随机时滞因素与随机参数变量的神经网络系统状态估测问题状态估计问题, 利用事件触发机制, 对实际工程中的能源消耗问题进行了处理, 并通过解决了系统中存在的随机参数和时滞问题, 提高了系统的稳定性, 得到较准确的结果。本文内容提纲总体概括如下:

第一章介绍了课题的研究背景及现状，包括估计器的研究背景，神经网络的状态估计问题的研究背景和意义，动态事件触发机制下的具有随机参数和各类时滞的神经网络的状态估计等当前科研进展状况；最后附载本文内容纲要。

第二章研究了基于动态事件触发机制的包含随机时滞项和随机参数的神经网络的弹性 H_∞ 状态估计问题。首先，针对某一特定类别随机参数神经网络，对基于动态事件触发机制的弹性 H_∞ 状态估计难题进行了探究。其次，建立了确保估计误差动态系统达到渐进均方稳定，且满足 H_∞ 性能标准的充分条件。最后，通过求解一系列线性矩阵不等式，得到了具备弹性的 H_∞ 状态估计器模型。

第三章研究了有限时间情形下时滞神经网络的状态估计问题。在测量信息传输过程中考虑动态事件触发策略以便提高资源利用效率。借助于李雅普诺夫稳定性理论，设定一套确保估计误差系统在有限时段内维持有界并符合预设性能指标的充分条件。通过求解一组线性矩阵不等式得到期望的估计器增益矩阵。最后，通过一个数值例子说明设计方案的有效性。

第四章是对全文的总结和展望。

第2章 基于动态事件触发机制的随机参数时滞神经网络弹性 H_∞ 状态估计

本章研究了一种基于动态事件触发机制的随机参数和时滞神经网络的弹性 H_∞ 状态估计问题，该机制旨在减少能量消耗。在动态事件触发机制的条件下，仅于符合特定触发条件时，测量结果才会传送至对应状态估测器。本文目标是为带有随机参数和时间延迟的神经网络设计一种弹性状态估计器，使得估计误差系统的动力学特性在指定的 H_∞ 性能要求下渐近均方稳定。我们借由 Lyapunov 理论演绎出一项充分条件，保证了估计误差系统渐近均方稳定，并满足给定的 H_∞ 性能约束。由一组线性矩阵不等式求解过程，我们得出了为该状态估计算法所满足的增益矩阵，文中还提供了一个数值示例，用以展示所设计状态估计器的有效性。

2.1 问题描述

在本节中，考虑以下具有随机参数的时滞神经网络：

$$\begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) + Bf(x(k)) \\ \quad + Cg(x(k-\tau(k))) + Lw(k) + D \sum_{j=1}^{+\infty} \xi_j h(x(k-j)) \\ y(k) = Ex(k) + Mv(k) \\ z(k) = Px(k) \end{cases}, \quad (2.1)$$

其中 $x(k) \in \mathbb{R}^n$ 是神经元向量， $y(k) \in \mathbb{R}^m$ 是测量输出， $z(k) \in \mathbb{R}^z$ 是要估计的状态矩阵， $A(k) = \text{diag}\{a_1(k), a_2(k), \dots, a_n(k)\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 表示一组系数矩阵，其中随机变量 $a_i(k)$ 满足 $0 < a_i(k) < 1$ ， $f(x(k)) = [f_1(x_1(k)), f_2(x_2(k)), \dots, f_n(x_n(k))]^T \in \mathbb{R}^n$ ， $g(x(k-\tau(k))) = [g_1(x_1(k-\tau(k))), \dots, g_n(x_n(k-\tau(k)))]^T \in \mathbb{R}^n$ ， $h(x(k-j)) = [h_1(x_1(k-j)), \dots, h_n(x_n(k-j))]^T \in \mathbb{R}^n$ 是指神经元激活函数，外部扰动 $w(k) \in \mathbb{R}^{n_w}$ ， $v(k) \in \mathbb{R}^{n_v}$ 被认为属于 $l_2[0, \infty)$ 。正整数 $\tau(k)$ 表示时变时滞满足 $0 < \tau_m \leq \tau(k) \leq \tau_M$ ，矩阵

B, C, D, L, E, M, F 是给定的常数矩阵。 $\xi_j \geq 0 (j=1, 2, 3, \dots)$ 表示满足下列收敛条件的一组常数

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \xi_j < +\infty, \sum_{j=1}^{+\infty} j \xi_j < +\infty, \quad (2.2)$$

假设 2.1: $f(\cdot), g(\cdot)$ 和 $h(\cdot)$ 是神经元激活函数, 且 $f(0)=0, g(0)=0, h(0)=0$ 。

这些函数满足以下条件:

$$\begin{aligned} [f(a)-f(b)-\mathcal{R}_1(a-b)]^T \times [f(a)-f(b)-\mathcal{R}_2(a-b)] &\leq 0, \quad a, b \in \mathbb{R}^n, \\ [g(a_\tau)-g(b_\tau)-\mathcal{S}_1(a_\tau-b_\tau)]^T \times [g(a_\tau)-g(b_\tau)-\mathcal{S}_2(a_\tau-b_\tau)] &\leq 0, \quad a_\tau, b_\tau \in \mathbb{R}^n, \\ [h(a_j)-h(b_j)-\mathcal{T}_1(a_j-b_j)]^T \times [h(a_j)-h(b_j)-\mathcal{T}_2(a_j-b_j)] &\leq 0, \quad a_j, b_j \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (2.3)$$

其中 $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{T}_1$ 和 $\mathcal{T}_2$ 是为既定维数的常数矩阵。

假设 2.2: 随机变量 $a_i(k)$ 满足以下条件

$$\mathbb{E}\{a_i(k)\} = \bar{e}_i, \quad \mathbb{E}\{a_i(k)a_l(k)\} = \tilde{e}_{il} \quad (2.4)$$

其中 $i, l=1, 2, \dots, n$, $\bar{e}_i$ 和 $\tilde{e}_{il}$ 是已知的常数。

本文采用动态事件触发策略来确定向状态估计器传输测量数据的时间瞬间, 从而节省通信资源。我们将触发时刻记为, $0 \leq \delta_0 < \delta_1 < \dots$ 和 δ_{l+1} 满足:

$$\delta_{l+1} = \min\{k \in \mathbb{N} \mid k > \delta_l, \frac{1}{\eta} \lambda(k) + \theta y^T(k)y(k) - \varphi^T(k)\varphi(k) \leq 0\} \quad (2.5)$$

其中 $\eta > 0$ 和 $\theta > 0$ 是给定的常数, $\varphi(k) = y(k) - y(\delta_l)$, $\lambda(k)$ 内部动态变量满足:

$$\lambda(k+1) = \mu \lambda(k) + \theta y^T(k)y(k) - \varphi^T(k)\varphi(k), \quad (2.6)$$

其中 $\mu \in (0, 1)$ 是给定的常数 $\lambda(0) = \lambda_0 \geq 0$ 是初始条件。

本文构造了以下弹性状态估计器

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) = \bar{A}\hat{x}(k) + Cg(\hat{x}(k-\tau(k))) + Bf(\hat{x}(k)) \\ \quad + D \sum_{j=1}^{+\infty} \xi_j h(\hat{x}(k-j)) + (\mathcal{K} + \Delta\mathcal{K}(k))(y(\delta_l) - E\hat{x}(k)), \\ \hat{z}(k) = F\hat{x}(k) \end{cases} \quad (2.7)$$

其中 $k \in [\delta_l, \delta_{l+1})$, $\hat{x}(k)$ 和 $\hat{z}(k)$ 分别是状态估计和输出估计,

$\bar{A} = \text{diag}\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ 矩阵 $\mathcal{K}$ 为设计参数, $\Delta\mathcal{K}(k)$ 满足以下等式:

$$\Delta\mathcal{K}(k) = Q_1 \Pi(k) Q_2, \quad (2.8)$$

其中 Q_1 和 Q_2 是给定的矩阵, $\Pi(k)$ 是未知时变矩阵函数, 它满足:

$$\Pi^T(k)\Pi(k) \leq I. \quad (2.9)$$

通过设置 $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$ 和 $\tilde{z}(k) = z(k) - \hat{z}(k)$ 我们可以得到如下估计误差系统

$$\begin{cases} e(k+1) = (A(k) - \bar{A})x(k) + C\tilde{g}(k - \tau(k)) + B\tilde{f}(k) \\ \quad + D \sum_{j=1}^{+\infty} \xi_j \tilde{h}(k-j) + (\bar{A} - (\mathcal{K} + Q_1\Pi(k)Q_2)E)e(k) \\ \quad + (\mathcal{K} + Q_1\Pi(k)Q_2)\varphi(k) + Lw(k) - (\mathcal{K} + Q_1\Pi(k)Q_2)Mv(k) \\ \tilde{z}(k) = Fe(k) \end{cases} \quad (2.10)$$

其中 $\tilde{f}(k) = f(x(k)) - f(\hat{x}(k))$, $\tilde{g}(k - \tau(k)) = g(x(k - \tau(k))) - g(\hat{x}(k - \tau(k)))$, $\tilde{h}(k - j) = h(x(k - j)) - h(\hat{x}(k - j))$. 设置 $\psi(k) = [x^T(k) \ e^T(k)]^T$ 我们得到增广系统如下

$$\begin{cases} \psi(k+1) = (\bar{\mathcal{A}} - Q_1\Pi(k)\mathcal{E})\psi(k) + \mathcal{A}(k)H_1\psi(k) + (\mathcal{L} - Q_1\Pi(k)\mathcal{M})\beta(k) \\ \quad + \mathcal{B}\mathcal{F}(k) + \mathcal{C}\mathcal{G}(k - \tau(k)) + \mathcal{D} \sum_{j=1}^{+\infty} \xi_j \mathcal{H}(k-j) \\ \quad + H_2(\mathcal{K} + Q_1\Pi(k)Q_2)\varphi(k) \\ \tilde{z}(k) = \mathcal{F}\psi(k) \end{cases} \quad (2.11)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{A}} &= \begin{bmatrix} \bar{A} & 0 \\ 0 & \bar{A} - \mathcal{K}E \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}(k) = \begin{bmatrix} A(k) - \bar{A} \\ A(k) - \bar{A} \end{bmatrix}, \quad H_1 = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \\ \mathcal{E} &= \begin{bmatrix} 0 & Q_2E \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}, \quad \beta(k) = \begin{bmatrix} w(k) \\ v(k) \end{bmatrix}, \\ \mathcal{D} &= \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}, \quad \mathcal{F}(k) = \begin{bmatrix} f(H_1\psi(k)) \\ \tilde{f}(k) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{G}(k - \tau(k)) = \begin{bmatrix} g(H_1\psi(k - \tau(k))) \\ \tilde{g}(k - \tau(k)) \end{bmatrix}, \\ \mathcal{H}(k - j) &= \begin{bmatrix} h(H_1\psi(k - j)) \\ \tilde{h}(k - j) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{L} = \begin{bmatrix} L & 0 \\ L & -\mathcal{K}M \end{bmatrix}, \quad Q_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ Q_1 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{M} &= \begin{bmatrix} 0 & Q_2M \end{bmatrix}, \quad \mathcal{F} = \begin{bmatrix} 0 & F \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

我们的目标是获得一个动态事件触发策略下的弹性状态估计器, 以同时满足以下两个需求:

- (1) 系统(2.11)是渐近均方稳定的。
- (2) 当 $\beta(k) \neq 0$ 和零初始条件时, 误差 $\tilde{z}(k)$ 满足

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}\{\|\tilde{z}(k)\|^2\} < \gamma^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}\{\|\beta(k)\|^2\} \quad (2.12)$$

其中式中的 γ 为给定的扰动衰减指数。

2.2 主要结果

在本节中, 我们分析了增广系统的动力学(2.11), 并给出了期望状态估计器。

引理 2.1: 假设矩阵 $\mathcal{L} = \mathcal{L}^T, \mathcal{E}, \mathcal{Z}$ 和 $\Gamma^T \Gamma \leq I$, $\mathcal{L} + \mathcal{E} \Gamma \mathcal{Z} + (\mathcal{E} \Gamma \mathcal{Z})^T < 0$ 当且仅当存在 $\sigma > 0$ 使得

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{E} & \sigma \mathcal{Z}^T \\ * & -\sigma I & 0 \\ * & * & -\sigma I \end{bmatrix} < 0. \quad (2.13)$$

引理 2.2: 对(2.5), (2.6)中定义动态事件触发机制, $\lambda_0 \geq 0$, 如果 $\mu \in (0, 1)$ 和 $\eta > 0$ 满足 $\mu\eta \geq 1$ 的约束条件, 对于任意 $k \geq 0$, 可以得到 $\lambda(k) \geq 0$ 。

引理 2.3: 矩阵 $\mathfrak{W} \geq 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\rho_j \in \mathbb{R}^n$ 是一个向量, $\varpi_j (j=1, 2, 3, \dots)$ 是已知的一组标量。如果 ϖ_j 满足(2.2), 可以得到

$$\left(\sum_{j=1}^{+\infty} \varpi_j \rho_j\right)^T \mathfrak{W} \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \varpi_j \rho_j\right) \leq \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \varpi_j\right) \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \varpi_j \rho_j^T \mathfrak{W} \rho_j\right). \quad (2.14)$$

定理 2.1: 假设 $\mu \in (0, 1)$, $\eta > 0$ 满足 $\mu\eta \geq 1$ 。估计增益 κ 给定, 如果存在正定矩阵 $P = \text{diag}\{P_1, P_2\}$, R, S 和正数 $\sigma_1, \sigma_2, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ 满足

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Psi & \Delta_1 \\ * & \Delta_2 \end{bmatrix} < 0, \quad (2.15)$$

其中

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{bmatrix} \mathfrak{X}_1 & \sigma_1 \mathfrak{Y}_1^T & \mathfrak{X}_2 & \sigma_2 \mathfrak{Y}_2^T \end{bmatrix}, \Delta_2 = \text{diag}\{-\sigma_1 I, -\sigma_2 I\}, \\ \Psi &= \begin{bmatrix} \Omega & \mathcal{W}^T P \\ * & -P \end{bmatrix}, \mathfrak{X}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Q_1^T P \end{bmatrix}^T, \\ \mathfrak{Y}_1 &= \begin{bmatrix} \mathcal{E} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathfrak{X}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_1^T H_2^T P \end{bmatrix}^T, \\ \mathfrak{Y}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{W} = \begin{bmatrix} \overline{\mathcal{A}} & 0 & \mathcal{B} & \mathcal{C} & 0 & \mathcal{D} & H_2 \mathcal{K} & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & 0 & \Omega_{13} & 0 & \Omega_{15} & 0 & 0 & 0 \\ * & \Omega_{22} & 0 & \Omega_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Omega_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Omega_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Omega_{55} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \Omega_{66} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \Omega_{77} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & \Omega_{88} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \Omega_{11} &= H_1^T (\Xi^\circ(P_1 + P_2)) H_1 + (\tau_M - \tau_m + 1) R + \left(\frac{\theta}{\eta} + \zeta_1 \theta\right) H_1^T E^T E H_1 \\ &\quad - P - \zeta_2 \mathfrak{R}_{11} - \zeta_4 \mathfrak{T}_{11}, \Omega_{13} = -\zeta_2 \mathfrak{R}_{12}, \\ \Omega_{15} &= -\zeta_4 \mathfrak{T}_{12}, \Omega_{22} = -R - \zeta_3 \mathfrak{S}_{11}, \quad \Omega_{24} = -\zeta_3 \mathfrak{S}_{12}, \Omega_{33} = -\zeta_2 I, \\ \Omega_{44} &= -\zeta_3 I, \quad \Xi = [\tilde{\epsilon}_{il} - \bar{\epsilon}_i \bar{\epsilon}_l]_{n \times n}, \\ \Omega_{55} &= \bar{\xi} S - \zeta_4 I, \Omega_{66} = -\frac{1}{\bar{\xi}} S, \bar{\xi} = \sum_{j=1}^{+\infty} \xi_j, \\ \Omega_{77} &= -\left(\frac{1}{\eta} + \zeta_1\right) I, \Omega_{88} = \frac{\mu - 1 + \zeta_1}{\eta}, \\ \mathfrak{R}_{11} &= \text{diag}\left\{\frac{\mathcal{R}_1^T \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_2^T \mathcal{R}_1}{2}, \frac{\mathcal{R}_1^T \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_2^T \mathcal{R}_1}{2}\right\}, \\ \mathfrak{R}_{12} &= \text{diag}\left\{-\frac{\mathcal{R}_1^T + \mathcal{R}_2^T}{2}, -\frac{\mathcal{R}_1^T + \mathcal{R}_2^T}{2}\right\}, \\ \mathfrak{S}_{11} &= \text{diag}\left\{\frac{\mathcal{S}_1^T \mathcal{S}_2 + \mathcal{S}_2^T \mathcal{S}_1}{2}, \frac{\mathcal{S}_1^T \mathcal{S}_2 + \mathcal{S}_2^T \mathcal{S}_1}{2}\right\}, \\ \mathfrak{S}_{12} &= \text{diag}\left\{-\frac{\mathcal{S}_1^T + \mathcal{S}_2^T}{2}, -\frac{\mathcal{S}_1^T + \mathcal{S}_2^T}{2}\right\}, \\ \mathfrak{T}_{11} &= \text{diag}\left\{\frac{\mathcal{T}_1^T \mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_2^T \mathcal{T}_1}{2}, \frac{\mathcal{T}_1^T \mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_2^T \mathcal{T}_1}{2}\right\}, \\ \mathfrak{T}_{12} &= \text{diag}\left\{-\frac{\mathcal{T}_1^T + \mathcal{T}_2^T}{2}, -\frac{\mathcal{T}_1^T + \mathcal{T}_2^T}{2}\right\}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

则，系统(2.11)是渐近均方稳定的。

证明： 使用以下 Lyapunov 函数

$$\begin{aligned} V(k) &= \psi^T(k) P \psi(k) + \sum_{i=k-\tau(k)}^{k-1} \psi^T(i) R \psi(i) \\ &\quad + \sum_{l=k-\tau_M+1}^{k-\tau_m} \sum_{i=l}^{k-1} \psi^T(i) R \psi(i) + \sum_{l=1}^{+\infty} \xi_l \sum_{i=k-l}^{k-1} \mathcal{H}^T(i) S \mathcal{H}(i) + \frac{1}{\eta} \lambda(k). \end{aligned} \tag{2.17}$$

计算 $\Delta V(k)$ 的期望，我们得到

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}\{\Delta V(k)\} &= \mathbb{E}\{[(\bar{A} - Q_1 \Pi(k) \mathcal{E})\psi(k) + \mathcal{B}\mathcal{F}(k) + \mathcal{C}\mathcal{G}(k - \tau(k)) \\
 &\quad + \mathcal{D} \sum_{j=1}^{+\infty} \xi_j \mathcal{H}(k - j) + H_2(\mathcal{K} + Q_1 \Pi(k) Q_2) \phi(k)]^T \times P[(\bar{A} - Q_1 \Pi(k) \mathcal{E})\psi(k) \\
 &\quad + \mathcal{B}\mathcal{F}(k) + \mathcal{C}\mathcal{G}(k - \tau(k)) + \mathcal{D} \sum_{j=1}^{+\infty} \xi_j \mathcal{H}(k - j) + H_2(\mathcal{K} + Q_1 \Pi(k) Q_2) \phi(k)] \\
 &\quad + \psi^T(k) H_1^T \mathcal{A}^T(k) P \mathcal{A}(k) H_1 \psi(k) - \psi^T(k) P \psi(k) \\
 &\quad + (\tau_M - \tau_m + 1) \psi^T(k) R \psi(k) - \psi^T(k - \tau(k)) R \psi(k - \tau(k)) \\
 &\quad + \bar{\xi}^T \mathcal{H}^T(k) S \mathcal{H}(k) - \sum_{j=1}^{+\infty} \xi_j \mathcal{H}^T(k - j) S \mathcal{H}(k - j) \\
 &\quad + \frac{\mu - 1}{\eta} \lambda(k) + \frac{\theta}{\eta} y^T(k) y(k) - \frac{1}{\eta} \phi^T(k) \phi(k)\}
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

根据假设 2.2 和 (2.11), 可以得到

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{E}\{\psi^T(k) H_1^T \mathcal{A}^T(k) P \mathcal{A}(k) H_1 \psi(k)\} \\
 &= \mathbb{E}\{\psi^T(k) H_1^T ((A(k) - \bar{A})^T P_1 (A(k) - \bar{A}) + (A(k) - \bar{A})^T P_2 (A(k) - \bar{A})) H_1 \psi(k)\} \\
 &= \mathbb{E}\{\psi^T(k) H_1^T (\Xi^\circ(P_1 + P_2)) H_1 \psi(k)\}
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

利用引理 2.3, 我们得到

$$-\sum_{j=1}^{+\infty} \xi_j \mathcal{H}^T(k - j) S \mathcal{H}(k - j) \leq -\frac{1}{\bar{\xi}} \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \xi_j \mathcal{H}^T(k - j) \right)^T S \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \xi_j \mathcal{H}(k - j) \right). \tag{2.20}$$

根据(2.5), 很容易得到

$$\frac{1}{\eta} \lambda(k) + \theta y^T(k) y(k) - \phi^T(k) \phi(k) \geq 0. \tag{2.21}$$

根据假设 2.1, 很容易得到

$$\begin{bmatrix} \psi(k) \\ \mathcal{F}(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathfrak{R}_{11} & \mathfrak{R}_{12} \\ * & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi(k) \\ \mathcal{F}(k) \end{bmatrix} \leq 0, \tag{2.22}$$

$$\begin{bmatrix} \psi(k - \tau(k)) \\ \mathcal{G}(k - \tau(k)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathfrak{S}_{11} & \mathfrak{S}_{12} \\ * & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi(k - \tau(k)) \\ \mathcal{G}(k - \tau(k)) \end{bmatrix} \leq 0, \tag{2.23}$$

和

$$\begin{bmatrix} \psi(k) \\ \mathcal{H}(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathfrak{T}_{11} & \mathfrak{T}_{12} \\ * & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi(k) \\ \mathcal{H}(k) \end{bmatrix} \leq 0. \tag{2.24}$$

其中 $\mathfrak{R}_{11}, \mathfrak{R}_{12}, \mathfrak{S}_{11}, \mathfrak{S}_{12}, \mathfrak{T}_{11}$ 和 $\mathfrak{T}_{12}$ 在(2.16)已定义。

通过考虑(2.19)- (2.24), 由(2.18)可知

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}\{\Delta V(k)\} \leq & \mathbb{E}\{[(\bar{\mathcal{A}} - \mathcal{Q}_1 \Pi(k) \mathcal{E}) \psi(k) + \mathcal{B} \mathcal{F}(k) + \mathcal{C} \mathcal{G}(k - \tau(k)) \\
 & + \mathcal{D} \sum_{j=1}^{+\infty} \xi_j \mathcal{H}(k - j) + H_2(\mathcal{K} + \mathcal{Q}_1 \Pi(k) \mathcal{Q}_2) \varphi(k)]^T \\
 & \times P[(\bar{\mathcal{A}} - \mathcal{Q}_1 \Pi(k) \mathcal{E}) \psi(k) + \mathcal{B} \mathcal{F}(k) + \mathcal{C} \mathcal{G}(k - \tau(k)) \\
 & + \mathcal{D} \sum_{j=1}^{+\infty} \xi_j \mathcal{H}(k - j) + H_2(\mathcal{K} + \mathcal{Q}_1 \Pi(k) \mathcal{Q}_2) \varphi(k)] \\
 & + \psi^T(k) H_1^T (\Xi^\circ(P_1 + P_2)) H_1 \psi(k) + \psi^T(k) ((\tau_M - \tau_m + 1)R - P) \psi(k) \\
 & - \psi^T(k - \tau(k)) R \psi(k - \tau(k)) + \bar{\xi} \mathcal{H}^T(k) S \mathcal{H}(k) \\
 & - \frac{1}{\bar{\xi}} (\sum_{j=1}^{+\infty} \xi_j \mathcal{H}^T(k - j))^T S (\sum_{j=1}^{+\infty} \xi_j \mathcal{H}(k - j)) + \frac{\mu - 1 + \zeta_1}{\eta} \lambda(k) \\
 & - (\frac{1}{\eta} + \zeta_1) \varphi^T(k) \varphi(k) + (\frac{\theta}{\eta} + \zeta_1 \theta) \psi^T(k) H_1^T E^T E H_1 \psi(k) \\
 & - \zeta_2 \begin{bmatrix} \psi(k) \\ \mathcal{F}(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathfrak{R}_{11} & \mathfrak{R}_{12} \\ * & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi(k) \\ \mathcal{F}(k) \end{bmatrix} \\
 & - \zeta_3 \begin{bmatrix} \psi(k - \tau(k)) \\ \mathcal{G}(k - \tau(k)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathfrak{S}_{11} & \mathfrak{S}_{12} \\ * & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi(k - \tau(k)) \\ \mathcal{G}(k - \tau(k)) \end{bmatrix} \\
 & - \zeta_4 \begin{bmatrix} \psi(k) \\ \mathcal{H}(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathfrak{T}_{11} & \mathfrak{T}_{12} \\ * & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi(k) \\ \mathcal{H}(k) \end{bmatrix} \} \\
 & = \mathbb{E}\{\vartheta^T(k) (\Omega + Y^T(k) P Y(k)) \vartheta(k)\}
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \vartheta(k) &= \begin{bmatrix} \psi^T(k) & \psi^T(k - \tau(k)) & \mathcal{F}^T(k) & \mathcal{G}^T(k - \tau(k)) & \mathcal{H}^T(k) & (\sum_{j=1}^{+\infty} \xi_j \mathcal{H}^T(k - j))^T & \varphi^T(k) & \lambda^{\frac{1}{2}}(k) \end{bmatrix}^T \\
 Y(k) &= [\bar{\mathcal{A}} - \mathcal{Q}_1 \Pi(k) \mathcal{E} \quad 0 \quad \mathcal{B} \quad \mathcal{C} \quad 0 \quad \mathcal{D} \quad H_2(\mathcal{K} + \mathcal{Q}_1 \Pi(k) \mathcal{Q}_2) \quad 0].
 \end{aligned}$$

并且在(2.16)中定义了 Ω 。

定义

$$\Phi(k) = \begin{bmatrix} \Omega & Y^T(k) P \\ * & -P \end{bmatrix}, \tag{2.26}$$

并且我们能将(2.26)改写为

$$\Phi(k) = \Psi + \mathfrak{X}_1 \Pi(k) \mathfrak{Z}_1 + (\mathfrak{X}_1 \Pi(k) \mathfrak{Z}_1)^T + \mathfrak{X}_2 \Pi(k) \mathfrak{D}_2 + (\mathfrak{X}_2 \Pi(k) \mathfrak{D}_2)^T. \tag{2.27}$$

在(2.16)中定义了 $\Psi, \mathfrak{X}_1, \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{X}_2$ 和 $\mathfrak{Y}_2$ 。

通过应用引理 1，根据(2.15)我们知道 $\Phi(k) < 0$ 。此外，根据舒尔补原理，我们知道 $(\Omega + Y^T(k) P Y(k)) < 0$ 。因此，当 $\beta(k) = 0$ 时，可以确认(2.11)的均方意义下的渐近稳定性。

定理 2.2: 假设存在 μ ($0 < \mu < 1$) 和 η ($\eta > 0$), 满足 $\mu\eta \geq 1$ 。给定增益 $\mathcal{K}$ 和指标 γ 。当 $\beta(k) = 0$ 时, 系统(2.11)是均方意义下的渐近稳定的, 并且在零初始条件下, 对于所有非零的 $\beta(k)$, 输出估计误差满足 H_∞ 性能约束(2.12)。若存在正定矩阵 $P = \text{diag}\{P_1, P_2\}, R, S$, 以及正数标量 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ 满足

$$\tilde{\Sigma} = \begin{bmatrix} \tilde{\Psi} & \tilde{\Lambda}_1 \\ * & \tilde{\Lambda}_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (2.28)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_1 &= \begin{bmatrix} \mathfrak{X}_1 & \sigma_1 \mathfrak{Y}_1^T & \mathfrak{X}_2 & \sigma_2 \mathfrak{Y}_2^T & \mathfrak{X}_3 & \sigma_3 \mathfrak{Y}_3^T \end{bmatrix}, \tilde{\Lambda}_2 = \text{diag}\{-\sigma_1 I, -\sigma_2 I, -\sigma_3 I\}, \\ \tilde{\Psi} &= \begin{bmatrix} \tilde{\Omega} & \mathcal{W}^T P \\ * & -P \end{bmatrix}, \mathfrak{X}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Q_1^T P \end{bmatrix}^T, \\ \mathfrak{Y}_1 &= \begin{bmatrix} \mathcal{E} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathfrak{X}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_1^T H_2^T P \end{bmatrix}^T, \\ \mathfrak{Y}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathfrak{X}_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Q_1^T P \end{bmatrix}^T, \\ \mathfrak{Y}_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{M} & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{W} &= \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{A}} & 0 & \mathcal{B} & \mathcal{C} & 0 & \mathcal{D} & H_2 \mathcal{K} & 0 & \mathcal{L} \end{bmatrix}, \\ \tilde{\Omega} &= \begin{bmatrix} \tilde{\Omega}_{11} & 0 & \Omega_{13} & 0 & \Omega_{15} & 0 & 0 & 0 & \Omega_{19} \\ * & \Omega_{22} & 0 & \Omega_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Omega_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Omega_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Omega_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \Omega_{66} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \Omega_{77} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & \Omega_{88} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & 0 & \Omega_{99} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\tilde{\Omega}_{11} = H_1^T (\Xi^\circ(P_1 + P_2)) H_1 + (\tau_M - \tau_m + 1) R + \mathcal{F}^T \mathcal{F} + \left(\frac{\theta}{\eta} + \zeta_1 \theta\right) H_1^T E^T E H_1$$

$$-P - \zeta_2 \mathfrak{R}_{11} - \zeta_4 \mathfrak{T}_{11},$$

$$\Omega_{19} = H_1^T E^T M H_2^T, \quad \Omega_{99} = H_2 M^T M H_2^T - \gamma^2 I.$$

证明: 值得注意的是, (2.28)包含着(2.15)。为了分析 H_∞ 性能, 我们选择李雅普诺夫函数 $\Delta V(k)$ 为(2.17)的形式。然后, 我们可以得到以下结果。

$$\mathbb{E}\{\Delta V(k) + \tilde{z}^T(k) \tilde{z}(k) - \gamma^2 \beta^T(k) \beta(k)\} = \mathbb{E}\{\tilde{\mathcal{G}}^T(k) (\tilde{\Omega} + \tilde{Y}^T(k) P \tilde{Y}(k)) \tilde{\mathcal{G}}(k)\}. \quad (2.30)$$

其中

$$\tilde{g}(k) = \begin{bmatrix} g^T(k) & \beta^T(k) \end{bmatrix}^T, \tilde{Y}(k) = \begin{bmatrix} Y(k) & \mathcal{L} - Q_1 \Pi(k) \mathcal{M} \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

并且在(2.29)中定义了 $\tilde{\Omega}$ 。

定义

$$\tilde{\Phi}(k) = \begin{bmatrix} \tilde{\Omega} & \tilde{Y}^T(k)P \\ * & -P \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

并且很容易将(2.32)写为

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(k) = & \tilde{\Psi} + \mathfrak{X}_1 \Pi(k) \mathfrak{Y}_1 + (\mathfrak{X}_1 \Pi(k) \mathfrak{Y}_1)^T + \mathfrak{X}_2 \Pi(k) \mathfrak{Y}_2 \\ & + (\mathfrak{X}_2 \Pi(k) \mathfrak{Y}_2)^T + \mathfrak{X}_3 \Pi(k) \mathfrak{Y}_3 + (\mathfrak{X}_3 \Pi(k) \mathfrak{Y}_3)^T \end{aligned} \quad (2.33)$$

在(2.29)中定义了 $\tilde{\Psi}, \mathfrak{X}_1, \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{X}_2, \mathfrak{Y}_2, \mathfrak{X}_3$ 和 $\mathfrak{Y}_3$ 。

通过利用引理 2.1, 我们从(2.28)得知 $\tilde{\Phi}(k) < 0$ 。因此, $(\tilde{\Omega} + \tilde{Y}^T(k)P\tilde{Y}(k)) < 0$ 接下来, 根据(2.30)可以得出相应的结论

$$\mathbb{E}\{\Delta V(k) + \tilde{z}^T(k)\tilde{z}(k) - \gamma^2 \beta^T(k)\beta(k)\} < 0. \quad (2.34)$$

总结从 0 到 $+\infty$ 关于 k 的(2.34)式, 我们可知

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}\{\tilde{z}^T(k)\tilde{z}(k)\} < \gamma^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}\{\beta^T(k)\beta(k)\}. \quad (2.35)$$

因此, 条件(2.12)得以满足。

定理 2.3: 假设存在标量 μ ($0 < \mu < 1$) 和 η ($\eta > 0$), 且满足 $\mu\eta \geq 1$ 给定扰动衰减指数 γ 。如果存在如下矩阵 $P = \text{diag}\{P_1, P_2\} > 0, R > 0, S > 0$ 及正数标量 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ 满足

$$\bar{\Sigma} = \begin{bmatrix} \bar{\Psi} & \tilde{\Lambda}_1 \\ * & \tilde{\Lambda}_2 \end{bmatrix} < 0, \quad (2.36)$$

其中

$$\bar{\Psi} = \begin{bmatrix} \tilde{\Omega} & \tilde{\mathfrak{S}} \\ * & -P \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathfrak{S}} = \begin{bmatrix} \bar{A}^T P_1 & 0 \\ 0 & E^T X - \bar{A}^T P_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ B^T P_1 & 0 \\ 0 & B^T P_2 \\ C^T P_1 & 0 \\ 0 & C^T P_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ D^T P_1 & 0 \\ 0 & D^T P_2 \\ 0 & X \\ 0 & 0 \\ L^T P_1 & L^T P_2 \\ 0 & -M^T X \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

同时, $\tilde{\Delta}_1, \tilde{\Delta}_2$ 和 $\tilde{\Omega}$ 在公式(2.29)中有定义。针对系统(2.1)设计的状态估计器方案 (2.7) 被求解。我们可以通过以下方程获得期望的状态估计增益

$$\mathcal{K} = P_2^{-1} X^T. \quad (2.38)$$

证明: 通过令 $X = \mathcal{K}^T P_2$, 我们可以根据公式(2.28)轻松得到线性矩阵不等式 (2.36)。然后, 定理 2.3 的证明就完成了。

2.3 数值实例及其仿真

考虑由(1)描述的神经网络

$$\begin{aligned} B &= \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.31 & -0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.23 & 0.2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & -0.3 \\ 0.21 & 0.4 & 0.3 \\ -0.3 & 0.5 & 0.2 \end{bmatrix}, \\ D &= \begin{bmatrix} 0.4 & -0.2 & 0.15 \\ -0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.3 \\ 0.11 \end{bmatrix}, Q_1 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.3 \\ -0.15 \end{bmatrix}, \\ Q_2 &= 0.1, E = [0.15 \quad -0.12 \quad -0.31], F = [-0.2 \quad -0.5 \quad 0.1], \\ M &= 0.4, \tilde{\epsilon}_{11} = \tilde{\epsilon}_{22} = \tilde{\epsilon}_{33} = 0.12, \tilde{\epsilon}_{12} = \tilde{\epsilon}_{13} = \tilde{\epsilon}_{23} = 0.09, \\ \bar{\epsilon}_1 &= \bar{\epsilon}_2 = \bar{\epsilon}_3 = 0.3. \end{aligned}$$

激励函数 $f(x(k))$, $g(x(k))$, $h(x(k))$ 选择如下:

$$\begin{aligned} f(x(k)) &= \begin{bmatrix} 0.3x_1(k) - \tanh(0.1x_1(k)) \\ -\tanh(0.4x_2(k)) \\ 0.2x_3(k) - \tanh(0.1x_3(k)) \end{bmatrix}, \\ g(x(k)) &= \begin{bmatrix} 0.2x_1(k) - \tanh(0.3x_1(k)) \\ -\tanh(0.4x_2(k)) \\ 0.5x_3(k) - \tanh(0.3x_3(k)) \end{bmatrix}, \\ h(x(k)) &= \begin{bmatrix} 0.3x_1(k) - \tanh(0.4x_1(k)) \\ -\tanh(0.2x_2(k)) \\ 0.1x_3(k) - \tanh(0.3x_3(k)) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

其中 $\xi_s = 2^{-(3+s)}$ ($s=1, 2, 3, \dots$), $\tau(k) = 1 + \sin^2(\frac{k\pi}{2})$ 和 $\gamma = 0.5$, $\bar{\xi} = \sum_{s=1}^{+\infty} \xi_s = 0.125$,

$\sum_{s=1}^{+\infty} s\xi_s = 0.25$, $\tau_m = 1$, $\tau_M = 2$. 对于 (2.5)、(2.6) 条件, 我们设置 $\lambda_0 = 0$,

$\theta = 0.4$, $\mu = 0.5$ 和 $\eta = 5$ 。则得到增益参数为

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} -0.0692 \\ -0.1465 \\ -0.0391 \end{bmatrix}.$$

然后选择 $x(l) = [0.3 \ 0.5 \ 0.3]^T$, l 的范围为 -20 到 0, 定义函数 $w(k) = e^{-0.3k} \sin k$, 函数 $v(k) = e^{-0.25k} \cos k$, 函数 $\Pi(k) = 0.8k$, 仿真结果如图所示。参见图 2.1 至图 2.2。图 2.1 说明了 $z(k)$ 输出及其估计。图 2.2 说明了 $\tilde{z}(k)$ 估计误差。仿真结果表明, 该方法是有效的。

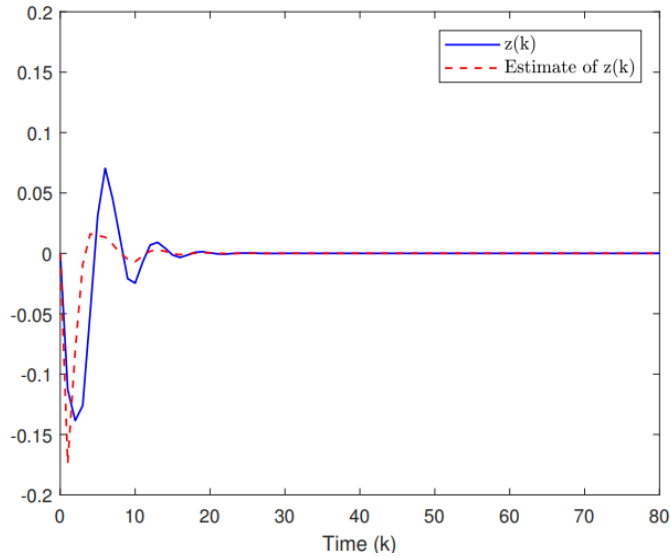


图 2.1: $z(k)$ 的输出及其估计

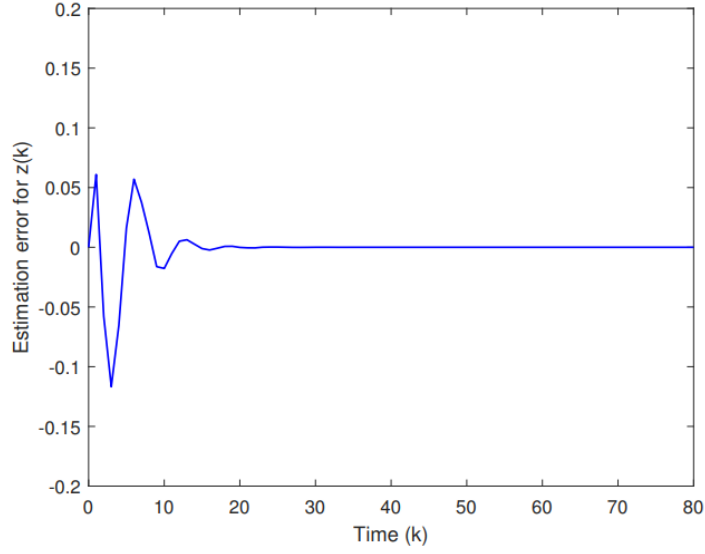


图 2.2: $z(k)$ 的输出及其估计误差

2.4 本章结论

研究一类具有随机参数的延迟神经网络的弹性 H_∞ 状态估计问题。本次研究所采用方法涉及动态事件触发机制。以节能为目的，在测量传输过程中实现了动态事件触发技术的应用。针对具有随机参数和时间延迟的神经网络，提出了一种弹性 H_∞ 状态估计器设计方法。利用均方法对系统动力学估计误差进行了分析。然后，利用一组线性矩阵不等式的解，推演出了状态估测器增益矩阵。仿真案例证实了上述状态估测法之有效性。

第3章 动态事件触发策略下时滞神经网络的状态估计：有限时间情形

本章研究有限时间情形下时滞神经网络的状态估计问题。在测量信息传输过程中考虑动态事件触发策略以便提高资源利用效率。借助于李雅普诺夫稳定性理论，建立使估计误差系统在有限时间内有界且满足给定 H_∞ 性能指标的充分条件。通过一组线性矩阵不等式求解而取得所需估计器增益矩阵。最后，通过一则数值实例演示此设计方案地实效性。

3.1 问题描述

考虑以下时滞神经网络系统

$$\begin{cases} x(k+1) = \mathfrak{H}x(k) + \mathfrak{U}f(x(k)) + \mathfrak{V}g(x(k - \wp(k))) + \mathfrak{R}\zeta(k) \\ y(k) = \mathfrak{B}x(k) + \mathfrak{S}\zeta(k) \\ z(k) = \mathfrak{K}x(k) \end{cases}, \quad (3.1)$$

其中 $x(k) = [x_1(k) \ \cdots \ x_{n_x}(k)]^T \in \mathbb{R}^{n_x}$ 是神经元状态向量， $\mathfrak{H} = \text{diag}\{h_1, h_2, \dots, h_{n_x}\}$ 是系数矩阵， $\mathfrak{U} = [u_{ij}]_{n_x \times n_x}$ 和 $\mathfrak{V} = [v_{ij}]_{n_x \times n_x}$ 是连接权矩阵， $y(k) = [y_1(k) \ \cdots \ y_{n_y}(k)]^T \in \mathbb{R}^{n_y}$ 是测量输出， $z(k) = [z_1(k) \ \cdots \ z_{n_z}(k)]^T \in \mathbb{R}^{n_z}$ 是需要被估计的输出， $\wp(k) (0 < \wp_m \leq \wp(k) \leq \wp_M)$ 表示时变时滞， $f(x(k)) = [f_1(x_1(k)) \ \cdots \ f_{n_x}(x_{n_x}(k))]^T$ ， $g(x(k - \wp(k))) = [g_1(x_1(k - \wp(k))) \ \cdots \ g_{n_x}(x_{n_x}(k - \wp(k)))]^T$ 是激励函数， $\mathfrak{R}$ ， $\mathfrak{B}$ ， $\mathfrak{S}$ 和 $\mathfrak{K}$ 是已知的具有适当维数的常数矩阵， $\zeta(k) \in \mathbb{R}^{n_\zeta}$ 是外部干扰输入，满足

$$\sum_{k=0}^N \zeta^T(k) \zeta(k) \leq \ell.$$

假设 3.1: 神经元激励函数 $f(\cdot)$ 和 $g(\cdot)$ 是连续的，满足 $f(0) = 0$ ， $g(0) = 0$ 和如下条件

$$\begin{aligned} [f(r) - f(b) - \mathbb{L}_1(r - b)]^T [f(r) - f(b) - \mathbb{L}_2(r - b)] &\leq 0, r, b \in \mathbb{R}^{n_x}, \\ [g(r_d) - g(b_d) - \mathbb{T}_1(r_d - b_d)]^T [g(r_d) - g(b_d) - \mathbb{T}_2(r_d - b_d)] &\leq 0, r_d, b_d \in \mathbb{R}^{n_x} \end{aligned} \quad (3.2)$$

其中 $\mathbb{L}_1$, $\mathbb{L}_2$, $\mathbb{T}_1$ 和 $\mathbb{T}_2$ 是已知的具有适当维数的常数矩阵。

在测量信号进入估计器之前采用动态事件触发策略, 标记传输时刻为 $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_l < \dots$, 其取决于如下事件触发条件

$$a_{l+1} = \min\{k \in \mathbb{N} \mid k > a_l, \frac{1}{\xi} \mathcal{G}(k) + \theta y^T(k)y(k) - \varrho^T(k)\varrho(k) \leq 0\} \quad (3.3)$$

其中 ξ 和 θ 是已知的正标量, $\varrho(k) = y(k) - y(a_l)$, $\mathcal{G}(k)$ 是满足如下方程的内部动态变量

$$\mathcal{G}(k+1) = \delta \mathcal{G}(k) + \theta y^T(k)y(k) - \varrho^T(k)\varrho(k) \quad (3.4)$$

其中 $\delta \in (0,1)$ 是一个已知的常数, $\mathcal{G}(0) = \mathcal{G}_0 \geq 0$ 是初值条件。

本章构造如下形式的状态估计器

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= \mathcal{A}\hat{x}(k) + \mathcal{D}(y(a_l) - \mathfrak{B}\hat{x}(k)) \\ \hat{z}(k) &= \mathcal{C}\hat{x}(k) \end{aligned} \quad (3.5)$$

其中 $k \in [a_l, a_{l+1})$, $\hat{x}(k)$ 是状态的估计, 矩阵 $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{C}$ 是需要被设计的状态估计器增益。

通过定义 $\tilde{x}(k) = [x^T(k) \hat{x}^T(k)]^T$ 和 $\tilde{z}(k) = z(k) - \hat{z}(k)$, 得到状态估计误差系统为

$$\begin{aligned} \tilde{x}(k+1) &= \Gamma_1 \tilde{x}(k) + \Theta_1 f(\tilde{x}(k)) + \Theta_2 g(\tilde{x}(k - \wp(k))) + \Gamma_2 \zeta(k) + \Gamma_3 \xi(k) \\ \tilde{z}(k) &= \Gamma_4 \tilde{x}(k) \end{aligned} \quad (3.6)$$

其中

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \begin{bmatrix} \mathfrak{H} & 0 \\ \mathcal{D}\mathfrak{B} & \mathcal{A} - \mathcal{D}\mathfrak{B} \end{bmatrix}, \Gamma_2 = \begin{bmatrix} \mathfrak{R} \\ \mathcal{D}\mathfrak{S} \end{bmatrix}, \Gamma_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathcal{D} \end{bmatrix}, \\ \Gamma_4 &= [\mathfrak{K} \quad -\mathcal{C}], \Theta_1 = \begin{bmatrix} \mathfrak{U} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \Theta_2 = \begin{bmatrix} \mathfrak{V} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ f(\tilde{x}(k)) &= \begin{bmatrix} f(x(k)) \\ f(\hat{x}(k)) \end{bmatrix}, g(\tilde{x}(k - \wp(k))) = \begin{bmatrix} g(x(k - \wp(k))) \\ g(\hat{x}(k - \wp(k))) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

此外, 假定系统 (3.6) 的初值条件满足 $\tilde{x}^T(\epsilon_1)\mathcal{W}\tilde{x}(\epsilon_1) \leq \lambda_1 (\epsilon_1 \in [-\wp_M, 0])$ 和 $(\tilde{x}(\epsilon_2+1) - \tilde{x}(\epsilon_2))^T (\tilde{x}(\epsilon_2+1) - \tilde{x}(\epsilon_2)) \leq \varpi (\epsilon_2 \in [-\wp_M, -1])$, 其中 $\mathcal{W}$ 是已知的正定矩阵, λ_1 和 ϖ 是已知的正常数标量。

定义 3.1: 系统 (3.6) 关于 $(\lambda_1, \lambda_2, N, \mathcal{W}, \ell)$ 是有限时间有界的, 其中 $\lambda_2 > \lambda_1 \geq 0$, $\ell > 0$, $N \in \mathbb{N}^+$, $\mathcal{W}$ 是一个正定矩阵, 如果

$$\begin{cases} \tilde{x}^T(k_1)\mathcal{W}\tilde{x}(k_1) \leq \lambda_1 \\ \sum_{k=0}^N \zeta^T(k)\zeta(k) \leq \ell \end{cases} \quad \forall k_1 \in [-\rho_M, 0] \Rightarrow \tilde{x}^T(k_2)\mathcal{W}\tilde{x}(k_2) \leq \lambda_2, \forall k_2 \in [1, N]. \quad (3.7)$$

本章的目标是为时滞神经网络(3.1)设计状态估计器(3.5)，使得系统(3.6)是有限时间有界的且满足给定的 H_∞ 性能指标。具体而言，需要同时满足如下两个要求：

1. 系统(3.6)关于 $(\lambda_1, \lambda_2, N, \mathcal{W}, \ell)$ 有限时间有界。

2. 在零初始条件下，对于确定的整数 $N > 0$ ，给定的干扰衰减水平 γ ，输出估计误差 $\tilde{z}(k)$ 满足如下条件：

$$\sum_{k=0}^N \tilde{z}^T(k)\tilde{z}(k) < \gamma^2 \sum_{k=0}^N \zeta^T(k)\zeta(k). \quad (3.8)$$

3.2 主要结果

本节，首次研究估计误差系统(3.6)的有限时间有界和 H_∞ 性能分析问题。首先介绍如下引理。

引理 3.1： 带有初值 $\mathfrak{g}_0 \geq 0$ 由(3.3)和(3.4)给定的动态事件触发策略，如果选择参数 $\delta \in (0, 1)$ 和 $\xi > 0$ 满足条件 $\delta\xi \geq 1$ ，那么对于所有的 $k \geq 0$ 可以得到 $\mathfrak{g}(k) \geq 0$ 。

引理 3.2： 定义

$$\mathfrak{R}_{\tilde{x}}(k, l_1, l_2) = \begin{cases} \frac{1}{l_2 - l_1} [(2 \sum_{j=k-l_2}^{k-l_1-1} \tilde{x}(j)) + \tilde{x}(k-l_1) - \tilde{x}(k-l_2)], l_1 < l_2, \\ 2\tilde{x}(k-l_1), l_1 = l_2 \end{cases} \quad (3.9)$$

其中 $\tilde{x}(k) \in \mathbb{R}^{2n_x}$ ， l_1 ， l_2 和 k 是给定的非负整数，满足 $l_1 \leq l_2 \leq k$ 。那么，对于给定的正定矩阵 $\mathcal{I} \in \mathbb{R}^{2n_x \times 2n_x}$ 可以得到

$$-(l_2 - l_1) \sum_{j=k-l_2}^{k-l_1-1} (\tilde{x}(j+1) - \tilde{x}(j))^T \mathcal{I} (\tilde{x}(j+1) - \tilde{x}(j)) \leq - \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{I} & 0 \\ 0 & 3\mathcal{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

其中

$$\begin{aligned} S_1 &= \tilde{x}(k-l_1) - \tilde{x}(k-l_2), \\ S_2 &= \tilde{x}(k-l_1) + \tilde{x}(k-l_2) - \mathfrak{R}_{\tilde{x}}(k, l_1, l_2). \end{aligned}$$

引理 3.3: 对于给定的正整数 n 和 m ，标量 $\iota \in (0,1)$ ，正定矩阵 $\aleph \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ，矩阵 $\mathcal{T}_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 和 $\mathcal{T}_2 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ，定义

$$h(\alpha, \aleph) = \frac{1}{\alpha} \aleph^T \mathcal{T}_1^T \aleph \mathcal{T}_1 \aleph + \frac{1}{1-\alpha} \aleph^T \mathcal{T}_2^T \aleph \mathcal{T}_2 \aleph \quad (3.11)$$

对于所有的向量 $\mathfrak{Z} \in \mathbb{R}^m$ 。如果存在一个矩阵 $\mathfrak{G} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 使得 $\begin{bmatrix} \aleph & \mathfrak{G} \\ * & \aleph \end{bmatrix} > 0$ ，如下不等式成立

$$\min_{\iota \in (0,1)} h(\alpha, \aleph) \geq \begin{bmatrix} \mathcal{T}_1 \mathfrak{Z} \\ \mathcal{T}_2 \mathfrak{Z} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \aleph & \mathfrak{G} \\ * & \aleph \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{T}_1 \mathfrak{Z} \\ \mathcal{T}_2 \mathfrak{Z} \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

如下定理给出估计误差系统(3.6)关于 $(\lambda_1, \lambda_2, N, \mathcal{W}, \ell)$ 有限时间有界的充分条件。

定理 3.1: 假定 $\delta(0 < \delta < 1)$ 和 $\xi(\xi > 0)$ 满足 $\delta\xi \geq 1$ ，给定状态估计器增益 $\mathcal{A}$ ， $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{C}$ 。对于给定的标量 $\chi(\chi > 1)$ ，估计误差系统(3.6)关于 $(\lambda_1, \lambda_2, N, \mathcal{W}, \ell)$ 有限时间有界，如果存在正定矩阵 $\mathfrak{P}$ ， Ω_1 ， Ω_2 ， Ω_3 ， $\mathfrak{G}_1$ ， $\mathfrak{G}_2$ 和 $\mathfrak{J}$ ，正常数标量 $h_i(i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ ， $\varepsilon_i(i=1,2,3)$ 和 $m_i(i = 1, 2)$ ，以及矩阵 $\mathfrak{Y}$ 满足

$$\Xi = \begin{bmatrix} \mathfrak{G}_1 & \mathfrak{Y} \\ * & \mathfrak{G}_1 \end{bmatrix} > 0, \quad (3.13)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta & \overline{\mathcal{W}}_1^T & \overline{\mathcal{W}}_2^T \\ * & -\mathfrak{P}^{-1} & 0 \\ * & * & -\Omega^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad (3.14)$$

$$h_0 \mathcal{W} < \mathfrak{P} < h_1 \mathcal{W}, \quad (3.15)$$

$$0 < \Omega_1 < h_2 \mathcal{W}, 0 < \Omega_2 < h_3 \mathcal{W}, 0 < \Omega_3 < h_4 \mathcal{W}, \quad (3.16)$$

$$0 < \mathfrak{G}_1 < h_5 I, 0 < \mathfrak{G}_2 < h_6 I, \quad (3.17)$$

$$\chi^N (\pi_1 \lambda_1 + \pi_2 \varpi + \frac{\mathcal{G}_0}{\xi} + \chi_{\max} \{\mathfrak{J}\} \ell) \leq h_0 \lambda_2 \quad (3.18)$$

其中

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & 0 & 0 \\ * & \Delta_{22} & 0 & 0 \\ * & * & \Delta_{33} & 0 \\ * & * & * & \Delta_{44} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 \Omega &= (\wp_M - \wp_m)^2 \mathfrak{S}_1 + \wp_m^2 \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_1 = \text{diag}\{\mathfrak{S}_1, 3\mathfrak{S}_1\}, \mathfrak{S}_2 = \text{diag}\{\mathfrak{S}_2, 3\mathfrak{S}_2\}, \\
 \Delta_{11} &= \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4 + \Sigma_5, \Delta_{12} = \left(\frac{\theta}{\xi} + \varepsilon_1 \theta\right) \Phi_1 H^T \mathfrak{B}^T \mathbb{S}, \\
 \Delta_{22} &= \left(\frac{\theta}{\xi} + \varepsilon_1 \theta\right) \mathbb{S}^T \mathbb{S} - \mathfrak{J}, \Delta_{33} = -\left(\frac{1}{\xi} + \varepsilon_1\right) I, \Delta_{44} = \frac{\delta - \chi + \varepsilon_1}{\xi}, \\
 \Sigma_1 &= -\chi \Phi_1 \mathfrak{P} \Phi_1^T, \Sigma_3 = -\chi \kappa_1 \mathfrak{S}_2 \kappa_1^T - \chi^{\wp_m+1} \tilde{\kappa} \Xi \tilde{\kappa}^T, H = [I \quad 0], \\
 \Sigma_2 &= \Phi_1 (\Omega_1 + \Omega_2 + (\wp_M - \wp_m + 1) \Omega_3) \Phi_1^T \\
 &\quad - \chi^{\wp_m} \Phi_2 \Omega_1 \Phi_2^T - \chi^{\wp_m} \Phi_3 \Omega_3 \Phi_3^T - \chi^{\wp_M} \Phi_4 \Omega_2 \Phi_4^T, \\
 \Sigma_4 &= -\varepsilon_2 \kappa_4 \mathfrak{L} \kappa_4^T - \varepsilon_3 \kappa_5 \mathfrak{T} \kappa_5^T, \Sigma_5 = \left(\frac{\theta}{\xi} + \varepsilon_1 \theta\right) \Phi_1 H^T \mathfrak{B}^T \mathfrak{B} H \Phi_1^T, \\
 \kappa_1 &= [\Phi_1 - \Phi_2 \quad \Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_5], \kappa_2 = [\Phi_3 - \Phi_4 \quad \Phi_3 + \Phi_4 - \Phi_7], \\
 \kappa_3 &= [\Phi_2 - \Phi_3 \quad \Phi_2 + \Phi_3 - \Phi_6], \kappa_4 = [\Phi_1 \quad \Phi_8], \kappa_5 = [\Phi_3 \quad \Phi_9], \\
 \tilde{\kappa} &= [\kappa_2 \quad \kappa_3], \Phi_i = [0_{2n_x \times (i-1)2n_x} \quad I_{2n_x} \quad 0_{2n_x \times (9-i)2n_x}]^T \quad (i=1, 2, \dots, 9), \\
 \mathfrak{L} &= \begin{bmatrix} \mathfrak{L}_{11} & \mathfrak{L}_{12} \\ * & I \end{bmatrix}, \mathfrak{L}_{11} = \text{diag}\{\widetilde{\mathbb{L}_1}, \widetilde{\mathbb{L}_1}\}, \mathfrak{L}_{12} = \text{diag}\{\widetilde{\mathbb{L}_2}, \widetilde{\mathbb{L}_2}\}, \\
 \mathfrak{T} &= \begin{bmatrix} \mathfrak{T}_{11} & \mathfrak{T}_{12} \\ * & I \end{bmatrix}, \mathfrak{T}_{11} = \text{diag}\{\widetilde{\mathbb{T}_1}, \widetilde{\mathbb{T}_1}\}, \mathfrak{T}_{12} = \text{diag}\{\widetilde{\mathbb{T}_2}, \widetilde{\mathbb{T}_2}\}, \\
 \widetilde{\mathbb{L}_1} &= \frac{\mathbb{L}_1^T \mathbb{L}_2 + \mathbb{L}_2^T \mathbb{L}_1}{2}, \widetilde{\mathbb{L}_2} = -\frac{\mathbb{L}_1^T + \mathbb{L}_2^T}{2}, \\
 \widetilde{\mathbb{T}_1} &= \frac{\mathbb{T}_1^T \mathbb{T}_2 + \mathbb{T}_2^T \mathbb{T}_1}{2}, \widetilde{\mathbb{T}_2} = -\frac{\mathbb{T}_1^T + \mathbb{T}_2^T}{2}, \\
 \overline{\mathcal{W}_1} &= \left[\Gamma_1, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_6, \Theta_1, \Theta_2, \Gamma_2, \Gamma_3, 0 \right], \\
 \overline{\mathcal{W}_2} &= \left[\Gamma_1 - I, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_6, \Theta_1, \Theta_2, \Gamma_2, \Gamma_3, 0 \right], \\
 \pi_1 &= h_1 + \wp_m \chi^{\wp_m-1} h_2 + \wp_M \chi^{\wp_M-1} h_3 + \wp_M \chi^{\wp_M-1} h_4 \\
 &\quad + \frac{(\wp_M - \wp_m)(\wp_M + \wp_m - 1)}{2} \chi^{\wp_M-2} h_4, \\
 \pi_2 &= \frac{(\wp_M - \wp_m)^2 (\wp_M + \wp_m + 1)}{2} \chi^{\wp_M-1} h_5 + \frac{\wp_m^2 (\wp_m + 1)}{2} \chi^{\wp_m-1} h_6.
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

证明：构造如下李雅普诺夫-克拉索夫斯基泛函：

$$V(k) = V_1(k) + V_2(k) + V_3(k) \tag{3.20}$$

其中

$$\begin{aligned}
 V_1(k) &= \tilde{x}^T(k) \mathfrak{P} \tilde{x}(k) + \frac{1}{\xi} \mathcal{G}(k), \\
 V_2(k) &= \sum_{l=k-\wp_m}^{k-1} \chi^{k-l-1} \tilde{x}^T(l) \Omega_1 \tilde{x}(l) + \sum_{l=k-\wp_M}^{k-1} \chi^{k-l-1} \tilde{x}^T(l) \Omega_2 \tilde{x}(l) \\
 &\quad + \sum_{l=k-\wp(k)}^{k-1} \chi^{k-l-1} \tilde{x}^T(l) \Omega_3 \tilde{x}(l) + \sum_{j=k-\wp_M+1}^{k-\wp_m} \sum_{l=j}^{k-1} \chi^{k-l-1} \tilde{x}^T(l) \Omega_3 \tilde{x}(l),
 \end{aligned}$$

$$V_3(k) = (\wp_M - \wp_m) \sum_{j=k-\wp_M}^{k-\wp_m-1} \sum_{l=j}^{k-1} \chi^{k-l-1} \eta^T(l) \mathfrak{S}_1 \eta(l) + \wp_m \sum_{j=k-\wp_m}^{k-1} \sum_{l=j}^{k-1} \chi^{k-l-1} \eta^T(l) \mathfrak{S}_2 \eta(l)$$

其中 $\eta(k) = \tilde{x}(k+1) - \tilde{x}(k)$ 。

为了标记简单，令

$$\begin{aligned} \phi(k) &= \begin{bmatrix} \rho^T(k) & \zeta^T(k) & \varrho^T(k) & g^{\frac{1}{2}}(k) \end{bmatrix}^T, \\ \rho(k) &= \begin{bmatrix} \tilde{x}^T(k) & \tilde{x}^T(k - \wp_m) & \tilde{x}^T(k - \wp(k)) & \tilde{x}^T(k - \wp_M) & \mathfrak{R}_{\tilde{x}}^T(k, 0, \wp_m) & \mathfrak{R}_{\tilde{x}}^T(k, \wp_m, \wp(k)) & \mathfrak{R}_{\tilde{x}}^T(k, \wp(k), \wp_M) & f^T(\tilde{x}(k)) & g^T(\tilde{x}(k - \wp(k))) \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (3.21)$$

其中 $\mathfrak{R}_{\tilde{x}}(k, 0, \wp_m)$ ， $\mathfrak{R}_{\tilde{x}}(k, \wp_m, \wp(k))$ 和 $\mathfrak{R}_{\tilde{x}}(k, \wp(k), \wp_M)$ 定义在引理 3.2。

然后，可以得到

$$\begin{aligned} V_1(k+1) - \chi V_1(k) &= \tilde{x}^T(k+1) \mathfrak{P} \tilde{x}(k+1) - \chi \tilde{x}^T(k) \mathfrak{P} \tilde{x}(k) \\ &\quad + \frac{\delta - \chi}{\xi} \delta(k) + \frac{\theta}{\xi} y^T(k) y(k) - \frac{1}{\xi} \varrho^T(k) \varrho(k), \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} V_2(k+1) - \chi V_2(k) &\leq \tilde{x}^T(k) (\mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}_2 + (\wp_M - \wp_m + 1) \mathfrak{Q}_3) \tilde{x}(k) - \chi^{\wp_m} \tilde{x}^T(k - \wp_m) \mathfrak{Q}_1 \tilde{x}(k - \wp_m) \\ &\quad - \chi^{\wp_m} \tilde{x}^T(k - \wp_M) \mathfrak{Q}_2 \tilde{x}(k - \wp_M) - \chi^{\wp_m} \tilde{x}^T(k - \wp(k)) \mathfrak{Q}_3 \tilde{x}(k - \wp(k)) \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} V_3(k+1) - \chi V_3(k) &\leq \eta^T(k) ((\wp_M - \wp_m)^2 \mathfrak{S}_1 + \wp_m^2 \mathfrak{S}_2) \eta(k) - \chi \wp_m \sum_{l=k-\wp_m}^{k-1} \eta^T(l) \mathfrak{S}_2 \eta(l) \\ &\quad - \chi^{\wp_m+1} (\wp_M - \wp_m) \sum_{l=k-\wp_M}^{k-\wp_m-1} \eta^T(l) \mathfrak{S}_1 \eta(l). \end{aligned} \quad (3.24)$$

根据引理 3.2 可以得到

$$\begin{aligned} -\chi \wp_m \sum_{l=k-\wp_m}^{k-1} \eta^T(l) \mathfrak{S}_2 \eta(l) &\leq -\chi \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathfrak{S}_2 & 0 \\ 0 & 3\mathfrak{S}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix} \\ &= -\chi \rho^T(k) \kappa_1 \mathfrak{S}_2 \kappa_1^T \rho(k) \\ &\quad - \chi^{\wp_m+1} (\wp_M - \wp_m) \sum_{l=k-\wp_M}^{k-\wp_m-1} \eta^T(l) \mathfrak{S}_1 \eta(l) \\ &\leq -\chi^{\wp_m+1} \frac{\wp_M - \wp_m}{\wp_M - \wp(k)} \begin{bmatrix} \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathfrak{S}_1 & 0 \\ 0 & 3\mathfrak{S}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{bmatrix} \\ &\quad - \chi^{\wp_m+1} \frac{\wp_M - \wp_m}{\wp(k) - \wp_m} \begin{bmatrix} \Psi_5 \\ \Psi_6 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathfrak{S}_1 & 0 \\ 0 & 3\mathfrak{S}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_5 \\ \Psi_6 \end{bmatrix} \\ &= -\chi^{\wp_m+1} \frac{\wp_M - \wp_m}{\wp_M - \wp(k)} \rho^T(k) \kappa_2 \mathfrak{S}_1 \kappa_2^T \rho(k) \\ &\quad - \chi^{\wp_m+1} \frac{\wp_M - \wp_m}{\wp(k) - \wp_m} \rho^T(k) \kappa_3 \widehat{\mathfrak{S}_1 \kappa_3^T} \rho(k) \end{aligned} \quad (3.25)$$

其中 κ_1 , κ_2 , κ_3 , $\mathfrak{S}_1$ 和 $\mathfrak{S}_2$ 定义在(3.19), 并且

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= \tilde{x}(k) - \tilde{x}(k - \wp_m), \Psi_2 = \tilde{x}(k) + \tilde{x}(k - \wp_m) - \mathfrak{R}_{\tilde{x}}(k, 0, \wp_m), \\ \Psi_3 &= \tilde{x}(k - \wp(k)) - \tilde{x}(k - \wp_M), \Psi_4 = \tilde{x}(k - \wp(k)) + \tilde{x}(k - \wp_M) - \mathfrak{R}_{\tilde{x}}(k, \wp(k), \wp_M), \\ \Psi_5 &= \tilde{x}(k - \wp_m) - \tilde{x}(k - \wp(k)), \Psi_6 = \tilde{x}(k - \wp_m) + \tilde{x}(k - \wp(k)) - \mathfrak{R}_{\tilde{x}}(k, \wp_m, \wp(k)).\end{aligned}$$

通过使用引理 3.3, 可以进一步得到

$$\begin{aligned}& -\chi^{\wp_m+1} \frac{\wp_M - \wp_m}{\wp_M - \wp(k)} \rho^T(k) \kappa_2 \mathfrak{S}_1 \kappa_2^T \rho(k) \\ & -\chi^{\wp_m+1} \frac{\wp_M - \wp_m}{\wp(k) - \wp_m} \rho^T(k) \kappa_3 \mathfrak{S}_1 \kappa_3^T \rho(k) \\ & \leq -\chi^{\wp_m+1} \rho^T(k) \tilde{\kappa} \Xi \tilde{\kappa}^T \rho(k)\end{aligned}\tag{3.27}$$

其中 $\tilde{\kappa}$ 定义在(3.19).

另一方面, 根据触发条件可以得到

$$\frac{1}{\xi} \mathfrak{g}(k) + \theta y^T(k) y(k) - \varrho^T(k) \varrho(k) \geq 0.\tag{3.28}$$

此外, 根据假设 3.1, 很容易得到

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}(k) \\ f(\tilde{x}(k)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathfrak{L}_{11} & \mathfrak{L}_{12} \\ * & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(k) \\ f(\tilde{x}(k)) \end{bmatrix} \leq 0,\tag{3.29}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}(k - \wp(k)) \\ g(\tilde{x}(k - \wp(k))) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathfrak{T}_{11} & \mathfrak{T}_{12} \\ * & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(k - \wp(k)) \\ g(\tilde{x}(k - \wp(k))) \end{bmatrix} \leq 0\tag{3.30}$$

其中 $\mathfrak{L}_{11}$, $\mathfrak{L}_{12}$, $\mathfrak{T}_{11}$ 和 $\mathfrak{T}_{12}$ 定义在(3.19)。

进一步得到

$$\begin{aligned}& V(k+1) - \chi V(k) - \zeta^T(k) \mathfrak{J} \zeta(k) \\ & \leq \tilde{x}^T(k+1) \mathfrak{P} \tilde{x}(k+1) - \chi \tilde{x}^T(k) \mathfrak{P} \tilde{x}(k) \\ & \quad + \frac{\delta - \chi + \varepsilon_1}{\xi} \mathfrak{g}(k) + \left(\frac{\theta}{\xi} + \varepsilon_1 \theta\right) y^T(k) y(k) \\ & \quad - \left(\frac{1}{\xi} + \varepsilon_1\right) \varrho^T(k) \varrho(k) - \zeta^T(k) \mathfrak{J} \zeta(k) \\ & \quad + \tilde{x}^T(k) (\mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}_2 + (\wp_M - \wp_m + 1) \mathfrak{Q}_3) \tilde{x}(k) \\ & \quad - \chi^{\wp_m} \tilde{x}^T(k - \wp_m) \mathfrak{Q}_1 \tilde{x}(k - \wp_m) \\ & \quad - \chi^{\wp_M} \tilde{x}^T(k - \wp_M) \mathfrak{Q}_2 \tilde{x}(k - \wp_M) - \chi^{\wp_m} \tilde{x}^T(k - \wp(k)) \mathfrak{Q}_3 \tilde{x}(k - \wp(k)) \\ & \quad + \eta^T(k) ((\wp_M - \wp_m)^2 \mathfrak{S}_1 + \wp_m^2 \mathfrak{S}_2) \eta(k) - \rho^T(k) (\chi \kappa_1 \widehat{\mathfrak{S}_2 \kappa_1^T} + \chi^{\wp_m+1} \tilde{\kappa} \Xi \tilde{\kappa}^T) \rho(k) \\ & \quad - \varepsilon_2 \begin{bmatrix} \tilde{x}(k) \\ f(\tilde{x}(k)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathfrak{L}_{11} & \mathfrak{L}_{12} \\ * & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(k) \\ f(\tilde{x}(k)) \end{bmatrix} \\ & \quad - \varepsilon_3 \begin{bmatrix} \tilde{x}(k - \wp(k)) \\ g(\tilde{x}(k - \wp(k))) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathfrak{T}_{11} & \mathfrak{T}_{12} \\ * & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(k - \wp(k)) \\ g(\tilde{x}(k - \wp(k))) \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{3.31}$$

$$= \phi^T(k)(\Delta + \overline{\mathcal{W}}_1^T \mathfrak{P} \overline{\mathcal{W}}_1 + \overline{\mathcal{W}}_2^T \Omega \overline{\mathcal{W}}_2) \phi(k)$$

其中 Δ , Ω , $\overline{\mathcal{W}}_1$ 和 $\overline{\mathcal{W}}_2$ 定义在(3.19)。

通过使用舒尔补引理, (3.14)等价于 $(\Delta + \overline{\mathcal{W}}_1^T \mathfrak{P} \overline{\mathcal{W}}_1 + \overline{\mathcal{W}}_2^T \Omega \overline{\mathcal{W}}_2) < 0$ 。因此, 可以得到

$$V(k+1) < \chi V(k) + \zeta^T(k) \mathfrak{J} \zeta(k). \quad (3.32)$$

基于上述不等式, 进一步可以得到

$$\begin{aligned} V(k) &< \chi V(k-1) + \chi_{\max} \{\mathfrak{J}\} \zeta^T(k-1) \zeta(k-1) \\ &< \chi^N V(0) + \chi_{\max} \{\mathfrak{J}\} \sum_{l=0}^{N-1} \chi^{N-l-1} \zeta^T(l) \zeta(l) \\ &< \chi^N V(0) + \chi^N \chi_{\max} \{\mathfrak{J}\} \ell. \end{aligned} \quad (3.33)$$

根据 $V(k)$ 的定义可以得到

$$V(0) < \pi_1 \lambda_1 + \pi_2 \varpi + \frac{g_0}{\xi} \quad (3.34)$$

此外, 可以得到

$$V(k) \geq h_0 \tilde{x}^T(k) \mathcal{W} \tilde{x}(k). \quad (3.35)$$

最终可以得到

$$\tilde{x}^T(k) \mathcal{W} \tilde{x}(k) \leq \frac{\chi^N (\pi_1 \lambda_1 + \pi_2 \varpi + \frac{g_0}{\xi} + \chi_{\max} \{\mathfrak{J}\} \ell)}{h_0} \leq \lambda_2. \quad (3.36)$$

因此, 根据定义 3.1, 估计误差系统关于 $(\lambda_1, \lambda_2, N, \mathcal{W}, \ell)$ 有限时间有界。定理 3.1 证毕。

现在, 准备研究估计误差系统的 H_∞ 性能分析问题。如下定理给出确保估计误差系统有限时间有界且满足 H_∞ 性能指标的充分条件。

定理 3.2: 假定 $\delta(0 < \delta < 1)$ 和 $\xi(\xi > 0)$ 满足 $\delta\xi \geq 1$, 给定状态估计器增益 $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{C}$ 。对于给定的标量 $\chi(\chi > 1)$ 和 H_∞ 性能指标 γ , 估计误差系统(3.6)关于 $(\lambda_1, \lambda_2, N, \mathcal{W}, \ell)$ 有限时间有界且满足给定的 H_∞ 性能指标, 如果存在正定矩阵 $\mathfrak{P}$,

$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ 和 $\mathfrak{J}$, 正常数标量 $h_i (i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$, $\varepsilon_i (i=1,2,3)$ 和 $\tilde{m}_i (i = 1, 2, 3)$, 以及矩阵 $\mathfrak{V}$ 满足(3.13), (3.15)-(3.18)和

$$\chi^{-N} \gamma^2 I \leq \mathfrak{J}, \quad (3.37)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Delta} & \overline{\mathcal{W}}_1^T & \overline{\mathcal{W}}_2^T & \overline{\mathcal{W}}_3^T \\ * & -\mathfrak{P}^{-1} & 0 & 0 \\ * & * & -\Omega^{-1} & 0 \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.38)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta} &= \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & 0 & 0 \\ * & \tilde{\Delta}_{22} & 0 & 0 \\ * & * & \Delta_{33} & 0 \\ * & * & * & \Delta_{44} \end{bmatrix}, \\ \tilde{\Delta}_{22} &= \left(\frac{\theta}{\xi} + \varepsilon_1 \theta \right) \mathbb{S}^T \mathbb{S} - \chi^{-N} \gamma^2 I, \\ \overline{\mathcal{W}}_3 &= \begin{bmatrix} \Gamma_4, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{11} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

其他参数定义在(3.19)。

证明：考虑定理 3.1 证明过程中采用的李雅普诺夫-克拉索夫斯基泛函。通过使用和定理 3.1 相似的方法可以得到

$$\begin{aligned} & \tilde{z}^T(k) \tilde{z}(k) - \chi^{-N} \gamma^2 \zeta^T(k) \zeta(k) + V(k+1) - \chi V(k) \\ &= \tilde{x}^T(k) \Gamma_4^T \Gamma_4 \tilde{x}(k) - \chi^{-N} \gamma^2 \zeta^T(k) \zeta(k) + V(k+1) - \chi V(k) \\ &\leq \phi^T(k) (\tilde{\Delta} + \overline{\mathcal{W}}_1^T \mathfrak{P} \overline{\mathcal{W}}_1 + \overline{\mathcal{W}}_2^T \Omega \overline{\mathcal{W}}_2 + \overline{\mathcal{W}}_3^T I \overline{\mathcal{W}}_3) \phi(k). \end{aligned} \quad (3.39)$$

通过使用舒尔补引理, 可以容易地得到 $(\tilde{\Delta} + \overline{\mathcal{W}}_1^T \mathfrak{P} \overline{\mathcal{W}}_1 + \overline{\mathcal{W}}_2^T \Omega \overline{\mathcal{W}}_2 + \overline{\mathcal{W}}_3^T I \overline{\mathcal{W}}_3) < 0$, 也就意味着

$$\tilde{z}^T(k) \tilde{z}(k) - \chi^{-N} \gamma^2 \zeta^T(k) \zeta(k) + V(k+1) - \chi V(k) < 0. \quad (3.40)$$

从上述不等式可以得到

$$\begin{aligned} & V(k+1) - \chi V(k) - \zeta^T(k) \mathfrak{J} \zeta(k) \\ &< -\tilde{z}^T(k) \tilde{z}(k) + \chi^{-N} \gamma^2 \zeta^T(k) \zeta(k) - \zeta^T(k) \mathfrak{J} \zeta(k) < 0. \end{aligned} \quad (3.41)$$

因此, 可以根据定理 3.1 直接得到估计误差系统关于 $(\lambda_1, \lambda_2, N, \mathcal{W}, \ell)$ 有限时间有界的结论。

此外, 在零初始条件下, 可以得到

$$\begin{aligned}
 V(k+1) &< \chi V(k) + \chi^{-N} \gamma^2 \zeta^T(k) \zeta(k) - \tilde{z}^T(k) \tilde{z}(k) \\
 &< \chi^{k+1} V(0) + \chi^{-N} \gamma^2 \sum_{l=0}^k \chi^{k-l} \zeta^T(l) \zeta(l) - \sum_{l=0}^k \chi^{k-l} \tilde{z}^T(l) \tilde{z}(l) \\
 &= \chi^{-N} \gamma^2 \sum_{l=0}^k \chi^{k-l} \zeta^T(l) \zeta(l) - \sum_{l=0}^k \chi^{k-l} \tilde{z}^T(l) \tilde{z}(l).
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

考虑 $V(N+1) \geq 0$ 和 $\chi > 1$ 可以得到

$$\sum_{l=0}^N \tilde{z}^T(l) \tilde{z}(l) < \gamma^2 \sum_{l=0}^N \zeta^T(l) \zeta(l). \tag{3.43}$$

定理 3.2 证毕。

最后，如下定理给出期望状态估计器的设计方法。

定理 3.3: 假定 $\delta(0 < \delta < 1)$ 和 $\xi(\xi > 0)$ 满足 $\delta\xi \geq 1$ 。给定标量 $\chi(\chi > 1)$ 和 H_∞ 性能指标 γ ，估计误差系统(3.6)关于 $(\lambda_1, \lambda_2, N, \mathcal{W}, \ell)$ 有限时间有界且满足给定的 H_∞ 性能指标，如果存在正定矩阵 $\mathfrak{P}$ ， Ω_1 ， Ω_2 ， Ω_3 ， $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ 和 $\mathfrak{J}$ ，正常数标量 $h_i (i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ ， $\varepsilon_i (i=1,2,3)$ 和 $\tilde{m}_i (i = 1, 2, 3)$ ，以及矩阵 $\mathfrak{V}$ ， Q_1 ， Q_2 ， Q_3 和 $\mathcal{X} = \begin{bmatrix} \mathcal{X}_1 & \mathcal{X}_3 \\ \mathcal{X}_2 & \mathcal{X}_3 \end{bmatrix}$ 满足(3.13)，(3.15)-(3.18)，(3.37)和

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Delta} & \mathcal{W}_1^{\mathcal{X}T} & \mathcal{W}_2^{\mathcal{X}T} & \mathcal{W}_3^T \\ * & \mathfrak{P} - \mathcal{X} - \mathcal{X}^T & 0 & 0 \\ * & * & \Omega - \mathcal{X} - \mathcal{X}^T & 0 \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.44}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \mathcal{W}_1^{\mathcal{X}} &= \begin{bmatrix} \Gamma_1^{\mathcal{X}}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_6, \Theta_1^{\mathcal{X}}, \Theta_2^{\mathcal{X}}, \Gamma_2^{\mathcal{X}}, \Gamma_3^{\mathcal{X}}, 0 \end{bmatrix}, \\
 \mathcal{W}_2^{\mathcal{X}} &= \begin{bmatrix} \Gamma_1^{\mathcal{X}} - \mathcal{X}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_6, \Theta_1^{\mathcal{X}}, \Theta_2^{\mathcal{X}}, \Gamma_2^{\mathcal{X}}, \Gamma_3^{\mathcal{X}}, 0 \end{bmatrix}, \\
 \mathcal{W}_3 &= \begin{bmatrix} \Gamma_4, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{11} \end{bmatrix}, \Gamma_1^{\mathcal{X}} = \begin{bmatrix} \mathcal{X}_1 \mathfrak{H} + Q_2 \mathfrak{B} & Q_1 - Q_2 \mathfrak{B} \\ \mathcal{X}_2 \mathfrak{H} + Q_2 \mathfrak{B} & Q_1 - Q_2 \mathfrak{B} \end{bmatrix}, \\
 \Gamma_2^{\mathcal{X}} &= \begin{bmatrix} \mathcal{X}_1 \mathfrak{R} + Q_2 \mathfrak{S} \\ \mathcal{X}_2 \mathfrak{R} + Q_2 \mathfrak{S} \end{bmatrix}, \Gamma_3^{\mathcal{X}} = \begin{bmatrix} -Q_2 \\ -Q_2 \end{bmatrix}, \Gamma_4 = [\mathfrak{K} \quad -Q_3], \\
 \Theta_1^{\mathcal{X}} &= \begin{bmatrix} \mathcal{X}_1 \mathfrak{U} & 0 \\ \mathcal{X}_2 \mathfrak{U} & 0 \end{bmatrix}, \Theta_2^{\mathcal{X}} = \begin{bmatrix} \mathcal{X}_1 \mathfrak{V} & 0 \\ \mathcal{X}_2 \mathfrak{V} & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

此外，如果不等式(3.44)是可解的，期望的状态估计器增益可由如下等式得到：

$$\mathcal{A} = \mathcal{X}_3^{-1}\mathcal{Q}_1, \mathcal{D} = \mathcal{X}_3^{-1}\mathcal{Q}_2, \mathcal{C} = \mathcal{Q}_3. \quad (3.46)$$

证明：首先，很容易证明如下不等式成立：

$$-\mathcal{X}\mathfrak{P}^{-1}\mathcal{X}^T \leq \mathfrak{P} - \mathcal{X} - \mathcal{X}^T, -\mathcal{X}\Omega^{-1}\mathcal{X}^T \leq \Omega - \mathcal{X} - \mathcal{X}^T. \quad (3.47)$$

根据上述不等式，由(3.44)可以得到如下不等式成立：

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Delta} & \mathcal{W}_1^{\mathcal{X}^T} & \mathcal{W}_2^{\mathcal{X}^T} & \mathcal{W}_3^{\mathcal{X}^T} \\ * & -\mathcal{X}\mathfrak{P}^{-1}\mathcal{X}^T & 0 & 0 \\ * & * & -\mathcal{X}\Omega^{-1}\mathcal{X}^T & 0 \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (3.48)$$

用矩阵 $\text{diag}\{I, \mathcal{X}^{-1}, \mathcal{X}^{-1}, I, I\}$ 对(3.48)进行全等变换，可以很容易地得到(3.38)。

因此，定理 3.3 的证明的剩下部分可以按照定理 3.2 的证明完成。

至此，基于动态事件触发策略的时滞神经网络的有限时间 H_∞ 状态估计问题已被解决。下面，将通过一个数值例子证明提出的估计方案的有效性。

3.3 数值仿真

考虑由如下参数描述的时滞神经网络

$$\begin{aligned} \mathfrak{H} &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2 \end{bmatrix}, \mathfrak{U} = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & -0.1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.2 & -0.3 \end{bmatrix}, \\ \mathfrak{V} &= \begin{bmatrix} -0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & -0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & -0.4 \end{bmatrix}, \mathfrak{R} = \begin{bmatrix} 0.008 \\ 0.008 \\ 0.008 \end{bmatrix}, \\ \mathfrak{B} &= [0.1 \quad 0.2 \quad 0.1], \mathfrak{S} = 0.3, \mathfrak{K} = [0.3 \quad -0.2 \quad 0.1]. \end{aligned}$$

选择如下形式的激励函数 $f(x(k))$ 和 $g(x(k - \wp(k)))$

$$\begin{aligned} f(x(k)) &= \begin{bmatrix} 0.3x_1(k) - \tanh(0.1x_1(k)) \\ -0.2x_2(k) - \tanh(0.2x_2(k)) \\ 0.4x_3(k) - \tanh(0.2x_3(k)) \end{bmatrix}, \\ g(x(k - \wp(k))) &= \begin{bmatrix} 0.4x_1(k - \wp(k)) - \tanh(0.2x_1(k - \wp(k))) \\ -0.2x_2(k - \wp(k)) - \tanh(0.1x_2(k - \wp(k))) \\ 0.1x_3(k - \wp(k)) - \tanh(0.3x_3(k - \wp(k))) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

此外, 选择时变时滞为 $\wp(k) = 1 + \cos^2(\frac{k\kappa}{2})$, 由此可知 $\wp_m = 1$, $\wp_M = 2$ 。对于动态触发条件, 设置内部动态变量的初值为 $\wp_0 = 0$, 域为 $\theta = 0.4$, 其它参数为 $\delta = 0.6$, $\xi = 3$ 。设置 H_∞ 性能衰减水平为 $\gamma = 0.5$ 。定理 3.3 中的其它参数选为 $\chi = 1.3$, $\lambda_1 = 0.02$, $\varpi = 0.03$, $\lambda_2 = 1.3$, $N = 10$, $\mathcal{W} = I$ 和 $\ell = 0.2$ 。然后根据(3.46), 得到期望的状态估计器的参数如下

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0.2505 & -0.0116 & 0.0939 \\ -0.0121 & 0.2833 & 0.0305 \\ 0.0886 & 0.0170 & -0.0625 \end{bmatrix}, \mathcal{D} = \begin{bmatrix} 0.0085 \\ 0.0000 \\ -0.0217 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{C} = [-0.1126 \quad 0.1307 \quad -0.1030].$$

对于 $l \in [-2, 0]$, 选择初始状态值为 $x_1(l) = 0.03$, $x_2(l) = 0.01$ 和 $x_3(l) = 0.12$ 。

图 3.1 展示了输出 $z(k)$ 及其估计, 证明了估计方案的有效性。

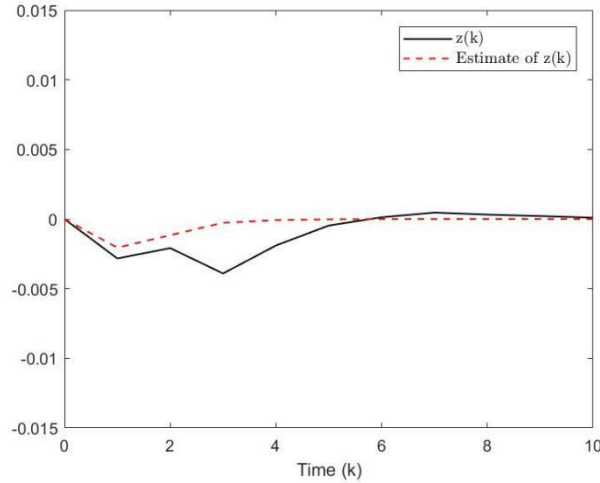


图 3.1 输出 $z(k)$ 及其估计

3.4 本章小结

本章节针对时滞神经网络的状态估测问题进行了探讨, 研究背景设定于动态事件触发机制下, 并兼顾有限时间情景。为了提高资源利用效率, 在状态估计器的设计中采用了动态事件触发策略。通过使用李雅普诺夫-克拉索夫斯基泛函方法, 推导出了保证估计误差系统有限时间有界并满足给定的 H_∞ 性能指标的充分

条件。通过一组线性矩阵不等式求解，我们取得了预期的状态估测器增益矩阵。最终，通过数值模拟实证了主要研究成果地有效性。

第4章 总结与展望

4.1 总结

本研究探讨了运用动态事件触发机制对神经网络状态估计的挑战与解决方案。具体来说,我们深入研究了神经网络的状态估计如何受到动态事件触发机制、随机参数和时滞等因素的影响。在此基础上,我们成功设计了一种旨在优化系统性能的期望状态估计器。

本文主要研究了基于动态事件触发的神经网络的状态估计问题。分别为以下两类: 1. 基于动态事件触发机制的随机参数时滞神经网络的弹性 H_∞ 状态估计; 2. 动态事件触发策略下时滞神经网络的状态估计: 有限时间情形

首先, 基于动态事件触发机制, 研究了一类随机参数与时滞神经网络的 H_∞ 状态估计问题, 该机制旨在降低能源消耗。在这种机制下, 只有当达到特定触发条件时, 测量输出才会传输给相应的状态估计器。本文的目标是针对具有随机参数和时滞的神经网络设计一个鲁棒状态估计器, 确保即使在动态事件触发机制下, 估计误差系统的动力学仍能实现均方意义下的渐近稳定, 并满足指定的性能要求。为此, 我们运用李雅普诺夫理论推导出一个充分条件, 保证了估计误差系统不仅渐近均方稳定, 还能满足给定的 H_∞ 性能约束。接着, 通过求解一组线性矩阵不等式, 我们给出了设计状态估计器的增益矩阵。最后, 通过一个数值示例验证了所设计状态估计器的有效性。

其次, 在测量信息传输过程中考虑动态事件触发策略以便提高资源利用效率。借助于李雅普诺夫稳定性理论, 建立使估计误差系统在有限时间内有界且满足给定性能指标的充分条件。通过求解一组线性矩阵不等式得到期望的估计器增益矩阵。最后, 通过一个数值例子说明设计方案的有效性。

本文的创新点如下:

第一, 目前对于神经网络的状态估计问题的研究已经相当成熟, 但是在动态事件触发机制下, 对具有随机参数和时滞项的神经网络的状态估计问题研究较少。因此, 本文从工程实际的角度出发, 考虑了能源消耗的问题, 在测量传输过程中利用动态事件触发机制这一技术以节省能源。针对带有随机参数和时间延迟的神

神经网络，提出了一个鲁棒 H_∞ 状态估计器设计方法。运用均方方法对估计误差系统的动力学特性进行了分析。随后，通过求解一组线性矩阵不等式得到了状态估计器增益矩阵。模拟案例证实了所描述的状态估计方法的有效性。

第二，尽管神经网络状态估计的研究已取得显著进展，但对于在动态事件触发框架内，针对具有时滞特性的神经网络进行有限时间状态估计的问题，目前学术界的探索尚不够深入。鉴于此，本研究从工程应用的实际需求出发，特别关注能源效率，提出在测量数据传输阶段运用动态事件触发策略，旨在有效节约能源。聚焦于有限时间情景，我们借助李雅普诺夫稳定性理论，对蕴含时滞因素的估计误差系统的行为模式进行了深入剖析。进一步，我们通过精准求解一组线性矩阵不等式，成功地确定了适用于该状态估计任务的状态估计器增益矩阵。最后，通过一系列仿真案例的验证，强有力地证实了所提案之神经网络状态估测法在实际应用情境下的有效性和可操作性。

4.2 展望

本文主要研究了一类带有随机参数与通信时滞现象的神经网络的 H_∞ 状态估计器，为减少通信资源浪费，采用了动态事件触发机制。在本文的基础上，仍然存在一些问题值得研究和进一步改进。

1. 本文的状态估计结果中，传感器网络拓扑是固定的。而且在许多实际网络中，网络拓扑可能会随着时间而改变或切换。这种拓扑切换的原因通常是由于网络中出现一些随机内部事件，如状态估计器断开、状态估计器之间链路的随机故障和恢复、突然的环境变化等。因此，每个传感器节点可以与之通信的状态估计器的网络拓扑可能是时变的。这种情况可以通过使用随机互联拓扑来建模。尽管已经得到了关于这种拓扑的一些结果，但不幸的是，在带有随机传感器饱和以及通信时延的基础上具有时变拓扑的传感器网络的分布式动态事件触发状态估测器的相关议题，还未被研究。

2. 在本文的研究结果中，考虑到神经网络的开放性特征，其信息传输安全性面临着挑战。倘若网络安全问题得不到妥善处理，可能引发重大的经济损失乃至对人身安全构成潜在威胁。因此，在本文的基础上考虑网络攻击是值得进一步研究的问题。

参考文献

- [1] Chen W, Wang Z, Ding D, etc. Distributed formation-containment control for discrete-time multiagent systems under dynamic event-triggered transmission scheme[J], IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2023, 53(2): 1308-1319.
- [2] Huong D C, Nahavandi S and Trinh H, Event-triggered state and disturbance estimation for lipschitz nonlinear systems with unknown time-varying delays[J], IEEE Transactions on Cybernetics, 2023, 53(12): 7895-7905.
- [3] Kung J, Ki D and Mukhopadhyay S, On the impact of energy-accuracy tradeoff in a digital cellular neural network for image processing[J], IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, 2015, 34(7): 1070-1081.
- [4] Li J, Wang Z., Dong H, etc. Outlier-resistant remote state estimation for recurrent neural networks with mixed time-delays[J], IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2021, 32(5): 2266-2273.
- [5] Liu H, Wang Z, Fei W, etc. On state estimation for discrete time-delayed memristive neural networks under the WTOD protocol: A resilient set-membership approach[J], IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2022, 52(4): 2145-2155,.
- [6] Shi D, Elliott R and Chen T, Event-based state estimation of discrete state hidden Markov models[J], Automatica, 2016, 65: 12-26.
- [7] Sunaga Y, Natsuaki R and Hirose A, Land form classification and similar land-shape discovery by using complex-valued convolutional neural networks[J], IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2019, 57(10): 7907-7917.
- [8] Xiao J, Guo X., Li Y, etc. Further research on the problems of synchronization for fractional-order BAM neural networks in octonion-valued domain[J], Neural Processing Letters, 2023, 55(8): 11173-11208.
- [9] Yuan M, Wang W, Wang Z, etc. Exponential synchronization of delayed memristor-based uncertain complex-valued neural networks for image protection[J], IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2021, 32(1): 151-165.

-
- [10]Wu J, Lu M, Deng F, etc. Cooperative robust output regulation of linear uncertain multi-agent systems: A dynamic event-triggered approach[J], International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2023, 33(18): 11538-11552.
 - [11]Zhao Z, Wang Z, Zou L, etc. Zonotope-based distributed set-membership fusion estimation for artificial neural networks under the dynamic event-triggered mechanism[J], IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2023.
 - [12]Zhang H, Wang A, Ji W, etc. Optimal consensus control for continuous-time linear multiagent systems: A dynamic event-triggered approach[J], IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2023.
 - [13]Hu S, Yue D, Q. Han L, etc. Observer-based event-triggered control for networked linear systems subject to denial-of-service attacks[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2020, 50(5): 1952-1964.
 - [14]Q. Li, Wang Z, Shen B, etc. Recursive distributed filtering over sensor networks on Gilbert-Elliott channels: A dynamic event-triggered approach[J]. Automatica, 2020, 113: 108681.
 - [15]Liu J, Gu Y, Zha L, etc. Event-triggered H_∞ load frequency control for multiarea power systems under hybrid cyber attacks[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2019, 49(8): 1665-1678.
 - [16]Liu Y, Shen B, and Shu H. Finite-time resilient H_∞ state estimation for discrete-time delayed neural networks under dynamic event-triggered mechanism[J]. Neural Networks, 2020, 121: 356-365.
 - [17]Tang Y, Zhang D, Ho D. W. C, etc. Tracking control of a class of cyber-physical systems via a FlexRay communication network[J]. IEEE transactions on cybernetics, 2019, 49(4): 1186-1199.
 - [18]Wang F and Liang J. Constrained H_∞ estimation for time-varying networks with hybrid incomplete information[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2018, 28(2): 699-715.
 - [19]Gu Z, Ahn C.K., Yue D, etc. Event-triggered H_∞ filtering for T-S fuzzy-model-based nonlinear networked systems with multisensors against DoS attacks[J]. IEEE Transactions on Cybernetics ,2022, 52(6): 5311-5321.
 - [20]Ding D, Wang Z, Shen B, etc. H_∞ state estimation for discrete-time complex networks with randomly occurring sensor saturations and randomly varying sensor

- delays[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2012, 23(5): 725-736.
- [21]Shen Y, Wang Z, Dong H, etc. Dynamic event-based recursive filtering for multirate systems with integral measurements over sensor networks[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2022, 32(3): 1374-1392.
- [22]Liu H., Wang Z., Fei W, etc. Resilient H_∞ State Estimation for Discrete-Time Stochastic Delayed Memristive Neural Networks: A Dynamic Event-Triggered Mechanism[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2022, 52(5): 3333-3341.
- [23]Li S, Song Q, Liu Y, Stabilisation of distributed-order nonlinear systems via event-triggered control[J]. International Journal of Systems Science, 2023, 54(6): 1186-1195.
- [24]Shen Y, Wang Z, Liu H , etc. Dynamic event-based recursive filtering for multirate systems with integral measurements over sensor networks[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control,2022, 32(3): 1374-1392.
- [25]Li Q, Shen B, Wang Z, etc. An event-triggered approach to distributed H_∞ state estimation for state-saturated systems with randomly occurring mixed delays[J]. Journal of the Franklin Institute-Engineering and Applied Mathematics, 2018, 355(6): 3104-3121.
- [26]Li Q, Shen B, Liu Y, etc. Event-triggered H_∞ state estimation for discrete time neural networks with mixed time delays and sensor saturations[J]. Neural Computing and Applications, 2017, 28(12): 3815-3825.
- [27]Li Q, Shen B, Wang Z, etc. Synchronization control for a class of discrete time-delay complex dynamical networks: A dynamic event-triggered approach[J]. IEEE transactions on cybernetics, 2019, 49(5): 1979-1986.
- [28]Zhang X and Han Q, State estimation for static neural networks with time-varying delays based on an improved reciprocally convex inequality[J]. IEEE transactions on neural networks and learning systems, 2018, 29(4): 1376-1381.
- [29]Zhao D, Wang Z, Wei G, etc. A dynamic event-triggered approach to observer-based PID security control subject to deception attacks[J]. Automatica, 2020, 120: 109128.
- [30]张雅淳, 武艳, 杨清海. 通信链路感知的多智能体动态事件触发一致性控制[J]. 北京邮电大学学报, 2014, 1-9.

-
- [31]于骞翔, 张元生. 基于动态事件触发机制的电弧炉弧流参数建模及控制[J]. 中国有色冶金, 2023, 52(06): 86-95.
- [32]姜田, 生宁. 带死区的多智能体系统事件触发协同控制[J]. 复杂系统与复杂性科学, 2024, 1-8.
- [33]Huang C, Coskun S, Zhang X, etc. State and fault estimation for nonlinear systems subject to censored measurements: A dynamic event-triggered case[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2022, 1049-8923.
- [34]Peng C and Yang C T. Event-triggered Communication and H_∞ Control Co-design for Networked Control Systems[J]. Automatica, 2013, 49(5): 1326-1332.
- [35]Jia. F, Liu. J, Wu. Z, etc. Distributed adaptive consensus for nonlinear multi-agent systems under event-triggered communication using a polynomial approach[J]. Journal of the Franklin Institute, 2024, 361(6): 106656.
- [36]Cai. X, Zhong. H, Li. Y, etc. An event-triggered quantization communication strategy for distributed optimal resource allocation[J]. Systems & Control Letters, 2023, 180: 105619.
- [37]周媛奉, 陈宽文, 周婷婷等. 非线性时滞系统双阶段神经网络的改进广义预测控制[J]. 控制工程, 2024, 31: 567-576.
- [38]甘滨滨, 陈昊, 徐彪等. 带有离散和分布时滞的神经网络系统稳定性分析[J]. 淮北师范大学学报, 2024, 45: 10-15.
- [39]张欢, 郭正洁, 冯世强. 求解逆拟变分不等式的时滞神经网络[J]. 西华师范大学学报, 2024.
- [40]一类切换时滞神经网络的有限时间无源性[J]. 内蒙古民族大学学报, 2024, 39: 91-96.
- [41]Tu. X, Xue. Y and Zhang. X. Observer-based resilient dissipativity control for discrete-time memristor-based neural networks with unbounded or bounded time-varying delays[J]. Neural Networks, 2024, 106279.
- [42]Xiao. S, Long. Y. Stability analysis of linear systems with time-varying delay via some novel techniques[J]. Journal of the Franklin Institute, 2024, 361(1): 12-20.
- [43]Chen. B, Tang. Z and Feng J. Matrix measure-based distributed impulsive consensus on nonlinear multi-agent systems with mixed time-varying delays[J]. ISA Transactions, 2024, 145: 104-111.

- [44] Ding S, Wang Z, Wang J, etc. H_∞ state estimation for memristive neural networks with time-varying delays: The discrete-time case[J], Neural Networks, 2016, 84: 47-56.
- [45] Lin W, He Y, Zhang C, etc. Stochastic finite-time H_∞ state estimation for discrete-time semi-Markovian jump neural networks with time-varying delays[J], IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2020, 31(12): 5456-5467.
- [46] Liu H, Wang Z, Shen B, etc. H_∞ state estimation for discrete-time memristive recurrent neural networks with stochastic time-delays[J], International Journal of General Systems, 2016, 45(5): 633-647.

攻读硕士期间取得的学术成果

已发表的学术论文:

- [1] 李娜(作者), 刘宏建(导师), 刘钰妃, 章冉. Dynamic event-triggered mechanism-based resilient state estimation for neural networks with random parameters and time delays [J]. 2023 3rd International Symposium on Artificial Intelligence and Intelligent Manufacturing (AIIM). (已发表)
- [2] 李娜(作者), 刘宏建(导师), 刘钰妃. 动态事件触发策略下时滞神经网络的状态估计: 有限时间情形. 安徽工程大学学报. (二审)

致 谢

时光荏苒，岁月如梭，不知不觉中，三年的光阴已飞逝而去，研究生的学习生涯也即将接近尾声。回首过往，哭过、笑过、努力过、失望过、有些许遗憾，但更多的是感激。感谢我的导师对我的教导，也要感谢我的姐姐和姐夫，在没有人时对我的陪伴，感谢我的家人，父母，老师，姐姐，姐夫在背后支持着我，给我支撑和力量。还有辅导员魏老师在生活上的关系以及帮助。千言万语都抵不过一句话，感谢我的导师，谢谢！感谢我的家人父母姐姐以及姐夫。致此，敬礼！

从论文的撰写到完成的整个过程中，我要感谢所有关心过我，陪我一路走到最后的人。首先，要感谢学校，感谢学院给我提供了这样一个学习的平台和良好的学习环境。也要感谢院系所有的老师们，感谢他们对我的悉心教导，他们严谨细致、一丝不苟的作风一直是我工作、学习中榜样；他们循循善诱的教导和不拘一格的思路给予我无尽的启迪。他们的言传身教，将使我在今后的人生中受益匪浅。

其次，要特别感谢我的指导老师—刘宏建教授，从论文的立题到论文的撰写直至完成，整个过程无不浸透着老师的心血。正是在老师的悉心指导下，这篇论文得以顺利完成，在此对老师致以深深的谢意。老师广博的学识，严肃的科学态度，严谨的治学精神，灵活的思维方式，耐心细致的教导深深感染激励着我，我要感谢我的姐姐李静，姐夫陈奇超，妈妈周德秀，爸爸李宏洋对我的大力支持和鼓励。也感谢这么多年来时间付出和心血，以及在校期间的经历，沉淀。谢谢各位对我倾注的经历成本。祝大家身体健康，万事如意。这份师恩令我永生难忘，感谢你们对文章的宝贵意见和辛苦付出。