

分类号: O154.2

单位代码: 10363

密 级: 公开

学号: 2211020136

题 目 相对 Gorenstein 投射对象的若干研究

题 目 The Research of Relative Gorenstein
Projective Objects

论 文 作 者: 舒倩倩

指 导 教 师: 张培雨 副教授

专 业 : 数学

研 究 方 向 : 同调代数

论文答辩日期: 2024 年 5 月 29 日

二、安徽工程大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：我恪守学术道德，崇尚严谨学风。所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已明确注明和引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品及成果的内容。论文为本人亲自撰写，我对所写的内容负责，并完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

学位论文作者签名：舒倩倩

日期：2024 年 6 月 2 日

三、安徽工程大学学位论文版权使用授权书

学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅或借阅。本人授权安徽工程大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保密 ☐，在 _____ 年解密后适用本版权书。

本学位论文属于

不保密 ☒。

学位论文作者签名：舒倩倩

日期：2024 年 6 月 2 日

指导教师签名：张培雨

日期：2024 年 6 月 2 日

相对 Gorenstein 投射对象的若干研究

摘要

本文我们主要研究平衡对和 Gorenstein 投射对象的相关性质, 利用相对同调的方法, 在平衡对和 Gorenstein 投射对象的基础上介绍了 $\mathcal{U}_x$ -Gorenstein 投射对象与 $\mathcal{U}_y$ -Gorenstein 内射对象的定义, 给出了 $\mathcal{U}_x$ -Gorenstein 投射对象的等价刻画, 证明了所有 $\mathcal{U}_x$ -Gorenstein 投射对象构成的类是 $\mathcal{X}$ -可解的且在直和项下是封闭的. 类似于 Gorenstein 投射对象的稳定性, 给出了 $\mathcal{U}_x$ -Gorenstein 投射对象的稳定性. 进一步引进 $\mathcal{U}_x$ -Gorenstein 投射维数与 $\mathcal{U}_y$ -Gorenstein 内射对象维数的定义, 主要证明了 $\mathcal{U}_x$ -Gorenstein 投射维数有限的等价刻画以及对于任一个对象 M 都存在一个满的右 $\mathcal{U}_x$ -GP 逼近. 同时, 直接对偶地得出有关 $\mathcal{U}_y$ -Gorenstein 内射对象的性质定理.

最后, 作为 $\mathcal{U}_x$ -Gorenstein 投射对象与 $\mathcal{U}_y$ -Gorenstein 内射对象的推广, 我们介绍了弱 $\mathcal{X}$ -Gorenstein 投射对象与弱 $\mathcal{Y}$ -Gorenstein 内射对象的定义与等价刻画, 对弱 $\mathcal{X}$ -Gorenstein 投射对象的基本性质做出了证明.

关键词: Gorenstein 投射对象, Gorenstein 内射对象, 平衡对, $\mathcal{U}_x$ -Gorenstein 投射对象, $\mathcal{U}_y$ -Gorenstein 内射对象

The Research of Relative Gorenstein Projective Objects

ABSTRACT

In this thesis, we mainly study the related properties of balanced pairs and projective objects. Using the method of relative homology, on the basis of balanced pairs and projective objects, we introduce the definition of $\mathcal{U}_x$ -projective objects and $\mathcal{U}_y$ -injective objects, give the equivalent characterization of $\mathcal{U}_x$ -projective objects, prove that the class of all $\mathcal{U}_x$ -projective objects is $\mathcal{X}$ -resolving and closed under the direct sum term, and give the stability of $\mathcal{U}_x$ -projective objects similar to the stability of projective objects. We further introduce the definitions of $\mathcal{U}_x$ -projective dimension and $\mathcal{U}_y$ -injective object dimension, and mainly prove the equivalent characterization of the finite $\mathcal{U}_x$ -projective dimension and the existence of a full right $\mathcal{U}_x$ -GP-approximation for any object.

Finally, as a generalization of $\mathcal{U}_x$ -projective objects and $\mathcal{U}_y$ -injective objects, we introduce the definition and equivalent characterization of weakly $\mathcal{U}_x$ -projective objects and weakly $\mathcal{U}_y$ -injective objects, and prove the basic properties of weakly $\mathcal{U}_x$ -projective objects.

Shu Qianqian (Mathematics)

Supervised by Zhang Peiyu

KEY WORDS: Gorenstein projective objects, Gorenstein injective objects, $\mathcal{U}_x$ -Gorenstein projective object, $\mathcal{U}_y$ -Gorenstein injective objects, balanced pair

目录

摘要	I
ABSTRACT	II
目录	III
第 1 章 绪论	1
1.1 研究背景	1
1.2 预备知识	3
1.3 研究内容与结构安排	4
第 2 章 $\mathcal{U}_x$ -Gorenstein 投射对象与 $\mathcal{U}_y$ -Gorenstein 内射对象	5
2.1 $\mathcal{U}_x$ -Gorenstein 投射对象与 $\mathcal{U}_y$ -Gorenstein 内射对象的定义	5
2.2 $\mathcal{U}_x$ -Gorenstein 投射对象与 $\mathcal{U}_y$ -Gorenstein 内射对象的基本性质	9
2.3 $\mathcal{U}_x$ -Gorenstein 投射对象与 $\mathcal{U}_y$ -Gorenstein 内射对象的稳定性	19
2.4 $\mathcal{U}_x$ -Gorenstein 投射对象维数与 $\mathcal{U}_y$ -Gorenstein 内射对象维数	23
第 3 章 弱 $\mathcal{X}$ -Gorenstein 投射对象与弱 $\mathcal{Y}$ -Gorenstein 内射对象	35
3.1 弱 $\mathcal{X}$ -Gorenstein 投射对象的基本性质	35
3.2 弱 $\mathcal{Y}$ -Gorenstein 内射对象的基本性质	39
第 4 章 结论与展望	41
4.1 结论	41
4.2 展望	42
参考文献	43
攻读硕士期间取得的学术成果	46
致谢	47

第 1 章 绪论

1.1 研究背景

同调代数^[1]作为代数学一门基础课程,它主要是利用范畴论中的方法和理论,以 Hom 、 $\otimes$ 和它们的导出函子 Ext 、 Tor 作为最基本的函子,来研究范畴中对象的分解、维数等同调性质. Enochs 和 Jenda 在文献[2]中推广了 Gorenstein 维数是 0 的有限生成模,得到了一般环上的 Gorenstein 投射模的定义. Gorenstein 同调代数是同调代数的相对版本,它主要是用 Gorenstein 投射对象、Gorenstein 内射对象以及 Gorenstein 平坦对象来代替投射对象、内射对象和平坦对象. 关于 Gorenstein 投射对象的学习,感兴趣的读者可参见文献[3-21]等.

陈在文献[22]中研究两个同伦范畴的三角等价时,引入了平衡对的概念,证明了: 如果 R 是一个 n -Gorenstein 环,那么 Gorenstein 投射模的同伦范畴和 Gorenstein 内射模的同伦范畴是三角等价的,关于平衡对的具体例子可参考文献[23]. 关于平衡对的研究是较为广泛的,例如,作者在文献[23]中学习了平衡对与粘合、倾斜模的关系,证明了对于粘合中两边范畴的平衡对可以诱导中间范畴的平对,以及中间范畴的平衡对可以诱导两边范畴的平衡对. 同时介绍了相对倾斜模的概念,推广了 Bazzoni 关于 n -倾斜模的等价刻画^[24]. 郑^[25]通过完全的平衡对构造出一个三角范畴的粘合. 李^[26]借助平衡对引进了相对余挠对,并给出了遗传/完全余挠对的等价刻画. 同时证明了: 如果 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是一个平衡对,那么满足一定条件的右 $\mathcal{X}$ -奇点范畴和左 $\mathcal{Y}$ -奇点范畴是一致的.

设 $\mathcal{A}$ 是一个 Abel 范畴, $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ 是 $\mathcal{A}$ 的两个子范畴且都关于直和项封闭. 对于任意的 $M \in \mathcal{A}$, M 的一个右- $\mathcal{X}$ 逼近是指存在态射: $X \xrightarrow{f} M$, 其中 $X \in \mathcal{X}$, 使得对于任意的 $X' \in \mathcal{X}$, 映射 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X', f): \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X', X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X', M)$ 都为满射. 如果 $\mathcal{A}$ 中每一个对象都存在右- $\mathcal{X}$ 逼近,那么 $\mathcal{X}$ 就称为 $\mathcal{A}$ 的一个反变有限子范畴^[27]. 对偶地, M 的一个左- $\mathcal{Y}$ 逼近指存在态射 $M \xrightarrow{f} Y$, 其中 $Y \in \mathcal{Y}$, 使得对于任意的 $Y' \in \mathcal{Y}$, 映射 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(f, Y'): \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, Y') \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, Y')$ 都为满射. 如果 $\mathcal{A}$ 中每一个对象都存在左- $\mathcal{Y}$ 逼近,那么 $\mathcal{Y}$ 就称为 $\mathcal{A}$ 的一个共变有限子范畴^[27]. 有关反变有限子范畴的应用可参见文献[28]. 一般地,称 $\mathcal{A}$ 中的复形

$Q^\bullet := \cdots \rightarrow Q_{-2} \rightarrow Q_{-1} \rightarrow Q_0 \rightarrow Q_1 \rightarrow Q_2 \rightarrow \cdots$ 是 $\mathcal{X}$ -正合的, 如果对于任意的 $X \in \mathcal{X}$, 复形 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Q^\bullet)$ 都是正合的. 称复形 $Q^\bullet$ 是 $\mathcal{Y}$ -余正合的, 如果对于任意的 $Y \in \mathcal{Y}$, 复形 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(Q^\bullet, Y)$ 都是正合的. 称复形 $\cdots \rightarrow X_{-2} \rightarrow X_{-1} \rightarrow X_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ 是对象 M 的一个 $\mathcal{X}$ -分解, 如果它是 $\mathcal{X}$ -正合的且任意的 $X_i \in \mathcal{X}$, $i \leq 0$. 对偶地, 称复形 $0 \rightarrow M \rightarrow Y_0 \rightarrow Y_{-1} \rightarrow Y_{-2} \rightarrow \cdots$ 是对象 M 的 $\mathcal{Y}$ -余分解, 如果它是 $\mathcal{Y}$ -余正合的且任意的 $X_i \in \mathcal{X}$, $i \leq 0$. 若存在最小整数 $n \geq 0$, 使得存在如下 M 的 $\mathcal{X}$ -分解 $0 \rightarrow X_{-n} \rightarrow \cdots \rightarrow X_{-2} \rightarrow X_{-1} \rightarrow X_0 \rightarrow M \rightarrow 0$, 那么 M 的 $\mathcal{X}$ -分解维数为 n , 用 $\dim_{\mathcal{X}}(M)$ 表示 M 的 $\mathcal{X}$ -分解维数. 对偶地, 用 $\dim_{\mathcal{Y}}(M)$ 表示 M 的 $\mathcal{Y}$ -余分解维数. 同时我们用 $\tilde{\mathcal{X}}$ 表示 $\mathcal{A}$ 中所有具有有限 $\mathcal{X}$ -分解维数的对象组成的类, 用 $\tilde{\mathcal{Y}}$ 表示 $\mathcal{A}$ 中所有具有有限 $\mathcal{Y}$ -余分解维数的对象组成的类.

回顾一个范畴对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 称为 $\mathcal{A}$ 中的平衡对^[22], 如果它满足下面三个条件:

(1) $\mathcal{X}$ 为 $\mathcal{A}$ 的反变有限子范畴, $\mathcal{Y}$ 是 $\mathcal{A}$ 的共变有限子范畴; (2) 对于任意的 $M \in \mathcal{A}$, 都存在 M 的 $\mathcal{X}$ -分解, 且此序列是 $\mathcal{Y}$ -余正合的; (3) 对于任意的 $N \in \mathcal{A}$, 都存在 N 的 $\mathcal{Y}$ -余分解, 且此序列是 $\mathcal{X}$ -正合的. 其中若每个右逼近都是满态射, 则称反变有限子范畴 $\mathcal{X}$ 是容许的, 若每个左逼近都是单态射, 则称共变有限子范畴是余容许的.

很多学者研究证明了有关 Gorenstein 维数的定理以及对 Gorenstein 模进行推广, 验证是否与 Gorenstein 模有相同的性质. Holm 在[29]中总结归纳了 Gorenstein 维数有限的等价刻画等, 并在此基础上进行推广, 还介绍了在任意交换环上 Gorenstein 维数的同调性质. Bennis 在[30]中将 G_C -投射和维数进行推广, 并验证其有一些与经典 Gorenstein 维数相同的性质. Bennis 在[31]中证明了环 R 上的 Gorenstein 投射整体维数与环 R 上的 Gorenstein 投射整体维数相等对 Gorenstein 投射对象与 Gorenstein 内射对象的维数. 文献[32]证明了 Gorenstein 子范畴中的对象对于直和项封闭. Gao 在[33]中介绍了弱 Gorenstein 投射模、弱 Gorenstein 内射模、弱 Gorenstein 内射模平坦模, 并证明了相关性质.

1.2 预备知识

定义 1.2.1^[21] 在阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 中, 称对象 M 是一个 Gorenstein 投射对象, 如果存在正合复形

$$P^\bullet = \cdots \rightarrow P_{-1} \rightarrow P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow \cdots$$

满足 $M = \ker(P_0 \rightarrow P_1)$, 每个 P_i 都是投射对象且复形 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(P^\bullet, P)$ 和 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(Q, P^\bullet)$ 都是正合的, 其中 P, Q 均是 $\mathcal{A}$ 的投射对象. 在这种条件下, 称复形 $P^\bullet$ 是 M 的完全投射分解.

定义 1.2.2^[21] 在阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 中, 称对象 M 是一个 Gorenstein 内射对象, 如果存在正合复形

$$I^\bullet = \cdots \rightarrow I_{-1} \rightarrow I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \cdots$$

满足 $M = \ker(I_0 \rightarrow I_1)$, 每个 I_i 都是内射对象且复形 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(I, I^\bullet)$ 和 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(I^\bullet, H)$ 都是正合的, 其中 I, H 均是 $\mathcal{A}$ 的内射对象. 在这种条件下, 称复形 $I^\bullet$ 是 M 的完全内射分解.

定理 1.2.3^[22] 在阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 中, $\mathcal{X}$ 是反变有限子范畴(或 $\mathcal{Y}$ 是共变有限子范畴), 则 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是平衡对当且仅当所有 $\mathcal{X}$ -正合复形组成的类与所有 $\mathcal{Y}$ -余正合复形组成的类相同.

命题 1.2.4^[22] $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 中的平衡对, $\mathcal{X}$ 是容许的当且仅当 $\mathcal{Y}$ 是余容许的.

命题 1.2.5^[22] $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 中容许的平衡对, 则对于 $\mathcal{A}$ 中任意对象 N 都有 $\dim_{\mathcal{X}}(N) = \dim_{\mathcal{Y}}(N)$.

定义 1.2.6^[26] 假设 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$, 若存在 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}, -)$ -正合且 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{C})$ -正合的序列:

$$\cdots \rightarrow C_1 \rightarrow C_0 \rightarrow C^0 \rightarrow C^1 \rightarrow \cdots \quad (1.1)$$

使得 $M \cong \text{Im}(C_0 \rightarrow C^0)$, 那么由对象 M 组成的类被称为 $\mathcal{A}$ 的 Gorenstein 子范畴, 记作 $G(\mathcal{C})$. 且(1.1)被称为 M 的完全 $\mathcal{C}$ -分解.

1.3 研究内容与结构安排

本文研究了 $\mathcal{U}_x$ -Gorenstein 对象的定义以及其相关性质，并对其进行推广，文章具体组织如下.

第二章在 Gorenstein 投射对象中引入平衡对的概念，介绍 $\mathcal{U}_x$ -Gorenstein 投射对象和 $\mathcal{U}_y$ -Gorenstein 内射对象的定义，通过相对同调函子研究证明 $\mathcal{U}_x$ -Gorenstein 投射对象和 $\mathcal{U}_y$ -Gorenstein 内射对象的性质与稳定性. 证明此类投射对象与内射对象是否有与经典 Gorenstein 投射对象与 Gorenstein 内射对象有相似的性质. 然后通过定义 $\mathcal{U}_x$ -Gorenstein 投射对象和 $\mathcal{U}_y$ -Gorenstein 内射对象的维数，证明了维数相关定理与命题.

第三章对 $\mathcal{U}_x$ -Gorenstein 投射对象和 $\mathcal{U}_y$ -Gorenstein 内射对象推广，介绍弱 $\mathcal{X}$ -Gorenstein 投射对象与 $\mathcal{Y}$ -Gorenstein 内射对象的定义，证明了一定条件下 $G(\mathcal{X}) = WGP(\mathcal{X})$ 和 $\mathcal{X} = WGP(\mathcal{X})$. 本文无特别说明， $\mathcal{A}$ 总是一个阿贝尔范畴， $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 中的一个容许的平衡对， $\mathcal{X}$ 与 $\mathcal{Y}$ 总在平衡对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 中.

第 2 章 $\mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ -Gorenstein 投射对象与 $\mathcal{U}_{\mathcal{Y}}$ -Gorenstein 内射对象

本章节主要研究 $\mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ -Gorenstein 对象，在阿贝尔范畴中的 Gorenstein 对象中引入平衡对，从而定义 $\mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ -Gorenstein 对象。首先在第 1 节里回顾了 Gorenstein 子范畴，介绍了由相对同调理论得出的相对同调函子，介绍了 $\mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ -Gorenstein 对象的定义，并给出了 $\mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ -Gorenstein 对象的等价刻画。然后在第 2 节证明推理了 $\mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ -Gorenstein 对象的基本性质，对 $\mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ -Gorenstein 对象是否对于直和项封闭，是否是 $\mathcal{X}$ -可解的做出证明。之后讨论 $\mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ -Gorenstein 对象的稳定性和维数。在第 3 节对 $\mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ -Gorenstein 对象是否具有稳定性做出证明。第 4 节首先回顾了平衡对中 $\mathcal{X}$ -维数与 $\mathcal{Y}$ -维数有限的等价刻画，然后定义出 $\mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ -Gorenstein 对象的相关维数，对 $\mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ -Gorenstein 对象维数有限做出等价刻画，以及研究了 $\mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ -Gorenstein 对象维数与 $\mathcal{X}$ -维数与 $\mathcal{Y}$ -维数的关系。

2.1 $\mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ -Gorenstein 投射对象与 $\mathcal{U}_{\mathcal{Y}}$ -Gorenstein 内射对象的定义

在文献[10]中，将定义 1.2.6 中的子范畴 $\mathcal{C}$ 定义为阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 中平衡对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 中的 $\mathcal{X}$ ，得出 Gorenstein 子范畴 $G(\mathcal{X})$ 。以下是在此基础上对 $\mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ -Gorenstein 对象做出的定义。

根据相对同调理论，我们用 $\mathcal{X}$ -分解来替代每个对象的投射分解，用 $\mathcal{Y}$ -余分解来替代内射分解，则可以得到两个相对同调函子 $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^{i\geq 1}(-, -)$ 和 $\text{Ext}_{\mathcal{Y}}^{i\geq 1}(-, -)$ ，可以证明 $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^{i\geq 1}(-, -) \cong \text{Ext}_{\mathcal{Y}}^{i\geq 1}(-, -)$ 。由相对同调理论易得出下列结论(其中 i 为整数且 $i \geq 0$):

- (1) 对于任意的 $X \in \mathcal{X}$ ，都有 $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^{i\geq 1}(X, -) = 0$ 。
- (2) 对于任意的 $Y \in \mathcal{Y}$ ，都有 $\text{Ext}_{\mathcal{Y}}^{i\geq 1}(-, Y) = 0$ 。
- (3) 对于任意的 $M, N \in \mathcal{A}$ ，都有 $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^0(M, N) \cong \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N)$ 。
- (4) 对于 $\mathcal{X}$ -正合序列 $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ ，存在如下长正合列：

$$\cdots \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{X}}^i(Y, -) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{X}}^i(X, -) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{X}}^{i+1}(Z, -) \rightarrow \cdots$$

(5) 对于 $\mathcal{Y}$ -余正合序列 $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ ，存在如下长正合列：

$$\cdots \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{Y}}^i(Y, -) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{Y}}^i(Z, -) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{Y}}^{i+1}(X, -) \rightarrow \cdots.$$

定义 2.1.1 假设 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{A}$ ，如果存在下列既是 $\mathcal{X}$ -正合又是 $\mathcal{U}$ -余正合的序列：

$$X^\bullet = \cdots \rightarrow X_{-2} \rightarrow X_{-1} \rightarrow X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow \cdots$$

使得每个 $X_i \in \mathcal{X}$ ，且 $M \cong \text{Im}(X_0 \rightarrow X_1)$ ，那么 M 叫做 $\mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ -Gorenstein 投射对象，

用 $\mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ -GP 表示所有的 $\mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ -Gorenstein 投射对象组成的类。

定义 2.1.2 如果存在下列既是 $\mathcal{U}$ -正合又是 $\mathcal{Y}$ -余正合的序列：

$$Y^\bullet = \cdots \rightarrow Y_{-2} \rightarrow Y_{-1} \rightarrow Y_0 \rightarrow Y_1 \rightarrow Y_2 \rightarrow \cdots$$

使得每个 $Y_i \in \mathcal{Y}$ ，且 $N \cong \text{Im}(Y_0 \rightarrow Y_1)$ ，那么 N 叫做 $\mathcal{U}_{\mathcal{Y}}$ -Gorenstein 内射对象，用

$\mathcal{U}_{\mathcal{Y}}$ -GI 表示所有的 $\mathcal{U}_{\mathcal{Y}}$ -Gorenstein 内射对象组成的类。

注 2.1.3 (1) 序列 $X^\bullet$ 中所有核和象都属于 $\mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ -GP，且 $\mathcal{X}$ 中所有对象都属于 $\mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ -GP，序列 $Y^\bullet$ 中所有核和象都属于 $\mathcal{U}_{\mathcal{Y}}$ -GI，且 $\mathcal{Y}$ 中所有对象都属于 $\mathcal{U}_{\mathcal{Y}}$ -GI。

(2) 如果 $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathcal{A}$ ，其中 $\mathcal{X}$ 在平衡对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 中，则有 $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ -GP $\subseteq G(\mathcal{X})$ 。

(3) 如果 $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathcal{A}$ ，其中 $\mathcal{Y}$ 在平衡对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 中，则有 $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{U}_{\mathcal{Y}}$ -GI $\subseteq G(\mathcal{Y})$ 。

命题 2.1.4 (1) 若 $M \in \mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ -GP，则对于任意的 $U \subseteq \mathcal{U}$ 都有 $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^{i \geq 1}(M, U) = 0$ ；

证明：(1) 由 $\mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ -GP 的定义可知存在 $\mathcal{X}$ -正合又是 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{U})$ -正合的序列

$$\cdots \rightarrow X_{-2} \rightarrow X_{-1} \rightarrow X_0 \rightarrow M \rightarrow 0.$$

取 $K_{-1} = \text{Im}(X_{-1} \rightarrow X_0)$ ，那么有 $\mathcal{X}$ -正合且 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{U})$ -正合的序列

$$0 \rightarrow K_{-1} \rightarrow X_0 \rightarrow M \rightarrow 0.$$

对此序列作用 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{U})$ 函子可得 $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^{i+1}(M, U) = \text{Ext}_{\mathcal{X}}^i(K_{-1}, U) (i \geq 1)$ 和

$\text{Ext}_{\mathcal{X}}^1(M, U) = 0$ ，取 $K_{-2} = \text{Im}(X_{-2} \rightarrow X_{-1})$ ，可得 $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^2(M, U) = \text{Ext}_{\mathcal{X}}^1(M, K_{-1}) = 0$

和 $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^{i+1}(K_{-1}, U) = \text{Ext}_{\mathcal{X}}^i(K_{-2}, U) (i \geq 1)$ ，取 $K_{-i-1} = \text{Im}(X_{-i-1} \rightarrow X_{-i})$ ，可得重复此过程

$\text{Ext}_{\mathcal{X}}^{i \geq 1}(M, U) = 0$. □

对偶地，我们容易得出如下命题 2.1.5.

命题 2.1.5 若 $M \in \mathcal{U}_y - GI$ ，则对于任意的 $U \in \mathcal{U}$ 都有 $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^{i \geq 1}(U, M) = 0$.

以下我们假设 $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{U}$ 且 $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{U}$ ，在此条件下我们研究 $\mathcal{U}_x - GP$ 与 $\mathcal{U}_y - GI$ 的相关性质.

命题 2.1.6 $\mathcal{X} = \mathcal{U} \cap \mathcal{U}_x - GP$.

证明: $\Rightarrow$ 显然成立.

$\Leftarrow$ 假设 $N \in \mathcal{U} \cap \mathcal{U}_x - GP$, 于是存在 $\mathcal{X}$ -正合且 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{U})$ -正合序列:

$$0 \rightarrow N \rightarrow X \rightarrow K \rightarrow 0, \quad (2.1)$$

其中 $X \in \mathcal{X}$, $K \in \mathcal{U}_x - GP$. 又因为 $N \in \mathcal{U}$, 所以对于(2.1)作用 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, N)$ 函子后还是正合的. 于是存在如下长正合列:

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(K, N) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, N) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(N, N) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{X}}^1(K, N),$$

其中 $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^1(K, N) = 0$. 由此可知(2.1)是可裂的. 因为 $\mathcal{X}$ 对于直和项是封闭的, 所以 N 作为 $\mathcal{X}$ 的直和项是属于 $\mathcal{X}$ 的. $\square$

对偶地, 我们容易得出如下命题 2.1.7.

命题 2.1.7 $\mathcal{Y} = \mathcal{U} \cap \mathcal{U}_y - GI$.

命题 2.1.8 对于 $\mathcal{A}$ 中任意对象 M , 下面陈述是等价的:

(1) $M \in \mathcal{U}_x - GP$;

(2) M 满足以下两个条件:

(i) $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^{i \geq 1}(M, U) = 0$, 其中 $U \in \mathcal{U}$;

(ii) 存在 $\mathcal{X}$ -正合且 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{U})$ -正合的序列 $0 \rightarrow M \rightarrow X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow \cdots$,

其中 $X_i \in \mathcal{X}$;

(3) 存在 $\mathcal{X}$ -正合序列 $0 \rightarrow M \rightarrow X \rightarrow K \rightarrow 0$, 其中 $X \in \mathcal{X}$, 且 $K \in \mathcal{U}_x - GP$.

证明: (2) $\Rightarrow$ (1) 由 $\mathcal{X}$ 是反变有限子范畴且是容许的可知, M 存在 $\mathcal{X}$ -分解:

$$\cdots \rightarrow X_{-2} \rightarrow X_{-1} \rightarrow X_0 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

取 $K_{-1} = \text{Im}(X_{-1} \rightarrow X_0)$, 于是有 $\mathcal{X}$ -正合序列:

$$0 \rightarrow K_{-1} \rightarrow X_0 \rightarrow M \rightarrow 0. \quad (2.2)$$

对(2.2)作用 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, U)$ 函子, 其中 $U \in \mathcal{U}$, 可得如下长正合列:

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, U) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X_0, U) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(K_{-1}, U) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{X}}^1(M, U),$$

其中 $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^1(M, U) = 0$ 且 $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^i(K, U) = \text{Ext}_{\mathcal{X}}^{i+1}(M, U) = 0$, 其中 $i \geq 1$, 那么 (2.2) 是 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{U})$ -正合的. 再取 $K_{-i} = \text{Im}(X_{-i} \rightarrow X_{-i+1})$, 重复上述步骤即可得到 M 存在 $\mathcal{X}$ -分解是 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{U})$ -正合的. 结合(ii)可得 $M \in \mathcal{U}_{\mathcal{X}}\text{-GP}$.

(1) $\Rightarrow$ (3) 由定义 2.1.1 可知是显然的.

(3) $\Rightarrow$ (2) $0 \rightarrow M \rightarrow X \rightarrow K \rightarrow 0$ 由命题 2.1.4 直接可得 (1) $\Rightarrow$ (2) 成立, 于是在 $\mathcal{X}$ -正合序列中, K 满足条件(2). 对此短 $\mathcal{X}$ -正合序列作用 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, U)$ 函子, 可得 $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^i(M, U) = \text{Ext}_{\mathcal{X}}^{i+1}(K, U) = 0$, 其中 $i \geq 1$, 因此 M 满足(i). 又 K 满足条件(2)中的(ii), 且 $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^1(K, U) = 0$, 那么 $\mathcal{X}$ -正合序列 $0 \rightarrow M \rightarrow X \rightarrow K \rightarrow 0$ 也是 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{U})$ -正合的. M 显然也满足(ii). $\square$

对偶地, 我们容易得出如下命题 2.1.9.

命题 2.1.9 对于 $\mathcal{A}$ 中任意对象 M , 下面陈述是等价的:

(1) $M \in \mathcal{U}_{\mathcal{Y}}\text{-GI}$;

(2) M 满足以下两个条件:

(i) $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^{i \geq 1}(U, M) = 0$, 其中 $U \in \mathcal{U}$;

(ii) 存在 $\mathcal{Y}$ -余正合且 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{U}, -)$ -正合的序列 $\cdots \rightarrow Y_{-2} \rightarrow Y_{-1} \rightarrow Y_0 \rightarrow M \rightarrow 0$,

其中 $Y_i \in \mathcal{Y}$;

(3) 存在 $\mathcal{Y}$ -余正合序列 $0 \rightarrow K \rightarrow Y \rightarrow M \rightarrow 0$, 其中 $Y \in \mathcal{Y}$, 且 $K \in \mathcal{U}_{\mathcal{Y}}\text{-GI}$.

2.2 $\mathcal{U}_x$ -Gorenstein 投射对象与 $\mathcal{U}_y$ -Gorenstein 内射对象的基本性质

Holm 在[11]中介绍了左 R 模类是投射可解的定义. 受此启发我们给出如下 $\mathcal{X}$ -可解和 $\mathcal{Y}$ -余可解的定义.

定义 2.2.1 对于 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 的子范畴 $\mathcal{C}$, 我们说 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{X}$ -可解的, 如果它满足以下条件:

- (1) $\mathcal{C}$ 包含 $\mathcal{X}$ 中所有的对象;
- (2) $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{X}$ -扩张封闭的, 即对于任意的 $\mathcal{X}$ -正合序列 $0 \rightarrow M \rightarrow M' \rightarrow M'' \rightarrow 0$, 如果 M 和 M'' 在 $\mathcal{C}$ 中, 那么 M' 也在 $\mathcal{C}$ 中;
- (3) $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{X}$ -满态射核封闭的, 即对于任意的 $\mathcal{X}$ -正合序列 $0 \rightarrow M \rightarrow M' \rightarrow M'' \rightarrow 0$, 如果 M'' 和 M' 在 $\mathcal{C}$ 中, 那么 M 也在 $\mathcal{C}$ 中.

定义 2.2.2 对于 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 的子范畴 $\mathcal{C}$, 我们说 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{Y}$ -余可解的, 如果它满足以下条件:

- (1) $\mathcal{C}$ 包含 $\mathcal{Y}$ 中所有的对象;
- (2) $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{Y}$ -扩张封闭的, 即对于任意的 $\mathcal{Y}$ -正合序列 $0 \rightarrow M \rightarrow M' \rightarrow M'' \rightarrow 0$, 如果 M 和 M'' 在 $\mathcal{C}$ 中, 那么 M' 也在 $\mathcal{C}$ 中;
- (3) $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{X}$ -单态射象封闭的, 即对于任意的 $\mathcal{X}$ -正合序列 $0 \rightarrow M \rightarrow M' \rightarrow M'' \rightarrow 0$, 如果 M 和 M' 在 $\mathcal{C}$ 中, 那么 M'' 也在 $\mathcal{C}$ 中.

定理 2.2.3 所有 $\mathcal{U}_x$ -Gorenstein 投射对象组成的类是 $\mathcal{X}$ -可解; 所有 $\mathcal{U}_y$ -Gorenstein 内射对象组成的类是 $\mathcal{Y}$ -余可解.

证明: 根据 $\mathcal{X}$ -可解的定义, 我们只需证明 $\mathcal{U}_x$ -GP 是 $\mathcal{X}$ -满态射核封闭的也是 $\mathcal{X}$ -扩张封闭的. $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{U}_x$ -GP 是显然的. 因为 $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{U}$, 所以对于 $\mathcal{X}$ -扩张封闭的证明由马掌引理很容易得到, 可参考[1, 第 3 章]. 下面证明 $\mathcal{U}_x$ -GP 是 $\mathcal{X}$ -满态射核封闭的. 假设对于 $\mathcal{X}$ -正合序列 $0 \rightarrow M \rightarrow M' \rightarrow M'' \rightarrow 0$, 其中 $M', M'' \in \mathcal{U}_x$ -GP, 于是根据命题 2.1.8 可知, 存在 $\mathcal{X}$ -正合序列 $0 \rightarrow M' \rightarrow X \rightarrow N \rightarrow 0$, 其中 $X \in \mathcal{X}$, $N \in \mathcal{U}_x$ -GP. 我们考虑下面的推出图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & M & \xlongequal{\quad} & M & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & X & \longrightarrow & N \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & N \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

由 $\mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ -GP 是 $\mathcal{X}$ -扩张封闭的可知 $Y \in \mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ -GP. 又由命题 2.1.8 可得 $M \in \mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ -GP. 所有 $\mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ -Gorenstein 内射对象组成的类是 $\mathcal{Y}$ -余可解的证明与上述证明类似. $\square$

定理 2.2.4 若存在如下 $\mathcal{X}$ -正合序列

$$0 \rightarrow N_1 \rightarrow N_0 \rightarrow N \rightarrow 0, \quad (2.3)$$

$$X_0^n \rightarrow \cdots \rightarrow X_0^1 \rightarrow X_0^0 \rightarrow N_0 \rightarrow 0, \quad (2.4)$$

$$X_1^n \rightarrow \cdots \rightarrow X_1^1 \rightarrow X_1^0 \rightarrow N_1 \rightarrow 0, \quad (2.5)$$

其中 $X_i^j \in \mathcal{X}$, 则下列命题成立.

(1) 存在如下 $\mathcal{X}$ -正合序列

$$X_0^n \oplus X_1^{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_0^2 \oplus X_1^1 \rightarrow X_0^1 \oplus X_1^0 \rightarrow X_0^0 \rightarrow N \rightarrow 0. \quad (2.6)$$

(2) 若 $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{A}$, 且序列(2.3) ~ (2.5)都是 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{D})$ -正合的, 则序列(2.6)也是 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{D})$ -正合的.

证明: (1) 令 $K_j^i = \text{Im}(X_j^i \rightarrow X_j^{i-1})$, 于是我们有如下拉回图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & K_0^1 & \xlongequal{\quad} & K_0^1 & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 0 & \longrightarrow & W_1 & \longrightarrow & X_0^0 & \longrightarrow & N \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & N_1 & \longrightarrow & N_0 & \longrightarrow & N \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

其中第二列和第三行是 $\mathcal{X}$ -正合的, 对拉回图的所有序列作用 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ 函子,

由蛇引理可以得出拉回图中所有的序列都是 $\mathcal{X}$ -正合的. 取拉回图的第一列, 通过马掌引理可得如下交换图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & K_0^2 & \longrightarrow & W_2 & \longrightarrow & K_1^1 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & X_0^1 & \longrightarrow & X_0^1 \oplus X_1^0 & \longrightarrow & X_1^0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & K_0^1 & \longrightarrow & W_1 & \longrightarrow & N_1 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

其中第一列和第三列, 第二行和第三行都是 $\mathcal{X}$ -正合的. 由蛇引理可知此交换图中的所有序列都是 $\mathcal{X}$ -正合的. 取交换图中的第一行再次用马掌引理, 且重复此步骤, 即可得到(1)的结果.

对上述拉回图和交换图中的序列作用 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{D})$ 函子, 其中 $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{A}$. 若(2.3) ~ (2.5)都是 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{D})$ -正合的, 那么由蛇引理可以得出其中所有序列都是 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{D})$ -正合的. 于是得到序列(2.6)也是 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{D})$ -正合的. $\square$

定理 2.2.5 若存在如下 $\mathcal{X}$ -正合序列

$$0 \rightarrow N \rightarrow N^0 \rightarrow N^1 \rightarrow 0, \quad (2.7)$$

$$0 \rightarrow N^0 \rightarrow X_0^0 \rightarrow X_1^0 \rightarrow \cdots \rightarrow X_n^0, \quad (2.8)$$

$$0 \rightarrow N^1 \rightarrow X_0^1 \rightarrow X_1^1 \rightarrow \cdots \rightarrow X_n^1, \quad (2.9)$$

其中(2.7)和(2.8)是 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{U})$ -正合的, 且 $X_j^i \in \mathcal{X}$, 则下列条件成立.

(1)存在 $\mathcal{X}$ -正合序列

$$0 \rightarrow N \rightarrow X_0^0 \rightarrow X_0^1 \oplus X_1^0 \rightarrow X_1^1 \oplus X_2^0 \rightarrow \cdots \rightarrow X_{n-1}^1 \oplus X_n^0. \quad (2.10)$$

(2)若(2.9)也是 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{U})$ -正合的, 则(2.10)也是 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{U})$ -正合的.

证明: 令 $K_j^i = \text{Im}(K_{j-1}^i - K_j^i)$, 于是我们有如下推出图

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N^0 & \longrightarrow & N^1 \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & X_0^0 & \longrightarrow & W^1 \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & K_1^0 & = & K_1^0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

其中第一行和第二列是 $\mathcal{X}$ -正合且是 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{U})$ -正合的. 对推出图中所有序列作用 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{U})$ 函子和 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ 函子, 由蛇引理可得推出图中所有序列都是 $\mathcal{X}$ -正合且是 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{U})$ -正合的. 取第三列, 因为其是 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{U})$ -正合的且 $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{U}$, 所以通过马掌引理可以得到如下交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & N^1 & \longrightarrow & W^1 & \longrightarrow & K_1^0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & X_0^1 & \longrightarrow & X_0^1 \oplus X_1^0 & \longrightarrow & X_1^0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & K_1^1 & \longrightarrow & W^2 & \longrightarrow & K_2^0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

其中第一行和第二行, 第一列和第三列是 $\mathcal{X}$ -正合, 由蛇引理可知交换图中第三行和第二列也是 $\mathcal{X}$ -正合. 取交换图中的第三行, 利用马掌引理重复上述步骤即可的到(1)的结果.

若(2.9)也是 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{U})$ -正合的, 那么交换图中第一行和第二行, 第一列和第三列既是 $\mathcal{X}$ -正合又是 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{U})$ -正合的, 则交换图的第三行和第二列也是 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{U})$ -正合的, 于是(2.10)也是 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{U})$ -正合的. $\square$

根据定理 2.2.4 和定理 2.2.5, 对偶地, 我们容易得出如下定理 2.2.6 和定理 2.2.7.

定理 2.2.6 若存在如下 $\mathcal{Y}$ -余正合序列

$$0 \rightarrow N \rightarrow N^0 \rightarrow N^1 \rightarrow 0, \quad (2.11)$$

$$0 \rightarrow N^0 \rightarrow Y_0^0 \rightarrow Y_1^0 \rightarrow \cdots \rightarrow Y_n^0, \quad (2.12)$$

$$0 \rightarrow N^1 \rightarrow Y_0^1 \rightarrow Y_1^1 \rightarrow \cdots \rightarrow Y_n^1, \quad (2.13)$$

且 $Y_j^i \in \mathcal{Y}$, 则下列条件成立.

(1) 存在 $\mathcal{Y}$ -余正合序列

$$0 \rightarrow N \rightarrow Y_0^0 \rightarrow Y_0^1 \oplus Y_1^0 \rightarrow Y_1^1 \oplus Y_2^0 \rightarrow \cdots \rightarrow Y_{n-1}^1 \oplus Y_n^0. \quad (2.14)$$

(2) 若(2.11)-(2.13)是 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{U}, -)$ -正合的, 则(2.14)也是 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{U}, -)$ -正合的.

对偶地, 我们容易得出如下定理 2.2.7.

定理 2.2.7 若存在如下 $\mathcal{Y}$ -余正合序列

$$0 \rightarrow N_1 \rightarrow N_0 \rightarrow N \rightarrow 0, \quad (2.15)$$

$$Y_0^n \rightarrow \cdots \rightarrow Y_0^1 \rightarrow Y_0^0 \rightarrow N_0 \rightarrow 0, \quad (2.16)$$

$$Y_1^n \rightarrow \cdots \rightarrow Y_1^1 \rightarrow Y_1^0 \rightarrow N_1 \rightarrow 0, \quad (2.17)$$

其中 $Y_i^j \in \mathcal{Y}$ 且是(2.15)和(2.16) $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{U}, -)$ -正合的则下列条件成立.

(1) 存在如下 $\mathcal{Y}$ -余正合序列

$$Y_0^n \oplus Y_1^{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow Y_0^2 \oplus Y_1^1 \rightarrow Y_0^1 \oplus Y_1^0 \rightarrow Y_0^0 \rightarrow N \rightarrow 0. \quad (2.18)$$

(2) 若序列 (2.17)也是 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{U}, -)$ -正合的, 则序列(2.18)也是 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{U}, -)$ -正合的.

定理 2.2.8 所有 $\mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ -Gorenstein 投射对象对于直和项封闭.

证明: 假设 $M \in \mathcal{U}_{\mathcal{X}}\text{-GP}$, 且 $M = T \oplus Q$, 于是 $\mathcal{X}$ -正合序列

$$0 \rightarrow Q \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1_Q \end{pmatrix}} M \xrightarrow{(1_T \ 0)} T \rightarrow 0$$

是可裂的. 由 $\mathcal{U}_{\mathcal{X}}\text{-GP}$ 的定义可知, 存在如下既是 $\mathcal{X}$ -正合又是 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{U})$ -正合的序列

$$\cdots \rightarrow X_{-n} \rightarrow \cdots \rightarrow X_{-1} \rightarrow X_0 \xrightarrow{f_0} M \rightarrow 0,$$

其中 $X_{-i} \in \mathcal{X}$, 由态射的复合可知存在 $\mathcal{X}$ -正合且 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{U})$ -正合序列

$$X_0 \xrightarrow{(1_T \ 0)f_0} T \longrightarrow 0,$$

$$X_0 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1_Q \end{pmatrix} f_0} Q \longrightarrow 0.$$

由定理 2.2.4 可知存在 $\mathcal{X}$ -正合且 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{U})$ -正合序列

$$X_0 \oplus X_{-1} \rightarrow X_0 \rightarrow T \rightarrow 0,$$

$$X_0 \oplus X_{-1} \rightarrow X_0 \rightarrow Q \rightarrow 0.$$

然后不断使用定理 2.2.4 可得 $\mathcal{X}$ -正合且 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{U})$ -正合序列

$$\cdots \rightarrow \bigoplus_{i=0}^{n-1} X_{-i} \cdots \rightarrow X_0 \oplus X_{-1} \oplus X_{-2} \rightarrow X_0 \oplus X_{-1} \rightarrow X_0 \rightarrow T \rightarrow 0,$$

$$\cdots \rightarrow \bigoplus_{i=0}^{n-1} X_{-i} \cdots \rightarrow X_0 \oplus X_{-1} \oplus X_{-2} \rightarrow X_0 \oplus X_{-1} \rightarrow X_0 \rightarrow Q \rightarrow 0.$$

由 $\mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ -GP 的定义可知, 还存在 $\mathcal{X}$ -正合且 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{U})$ -正合序列

$$0 \rightarrow M \rightarrow X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \cdots \rightarrow X_n \rightarrow \cdots.$$

同理, 由定理 2.2.5 可得 $\mathcal{X}$ -正合且 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{U})$ -正合序列

$$0 \rightarrow Q \rightarrow X_0 \rightarrow X_0 \oplus X_1 \rightarrow X_0 \oplus X_1 \oplus X_2 \rightarrow \cdots \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{n-1} X_i \rightarrow \cdots,$$

$$0 \rightarrow T \rightarrow X_0 \rightarrow X_0 \oplus X_1 \rightarrow X_0 \oplus X_1 \oplus X_2 \rightarrow \cdots \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{n-1} X_i \rightarrow \cdots.$$

又 $\mathcal{X}$ 对于直和封闭, 因此 $T, Q \in \mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ -GP. □

定理 2.2.9 所有 $\mathcal{U}_y$ -Gorenstein 内射对象对于直和项封闭.

证明: 与定理 2.2.8 证明相似, 由定理 2.2.6 和定理 2.2.7 可得. □

推论 2.2.10 对于 $\mathcal{A}$ 中的对象 N , 考虑如下 $\mathcal{X}$ -正合序列:

$$0 \rightarrow M_n \rightarrow M_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow M_1 \rightarrow M_0 \rightarrow N \rightarrow 0 \quad (2.19)$$

和

$$0 \rightarrow M'_n \rightarrow M'_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow M'_1 \rightarrow M'_0 \rightarrow N \rightarrow 0,$$

其中 $M_0, \dots, M_{n-1}$ 和 $M'_0, \dots, M'_{n-1}$ 都属于 $\mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ -GP, 那么 M_n 属于 $\mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ -GP 当

且仅当 M'_n 属于 $\mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ -GP.

证明: 我们考虑 N 的如下 $\mathcal{X}$ -分解:

$$0 \rightarrow K_n \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow N \rightarrow 0,$$

其中 $X_i \in \mathcal{X}$. 因为序列(2.19)是 $\mathcal{X}$ -正合的, 所以存在如下的链映射 $f^\bullet$:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 X^\bullet : 0 & \longrightarrow & K_n & \longrightarrow & X_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & X_0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow f^\bullet & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 & & \parallel & & \\
 M^\bullet : 0 & \longrightarrow & M_n & \longrightarrow & M_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & M_0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

考虑复形的短正合列 $0 \rightarrow M^\bullet \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \text{Cone}(f^\bullet) \xrightarrow{(0,1)} X^\bullet[1] \rightarrow 0$ ，由于 $M^\bullet$ 和 $X^\bullet[1]$ 是 $\mathcal{X}$ -正合的，所以 $\text{Cone}(f^\bullet)$ 也是 $\mathcal{X}$ -正合的，即存在如下 $\mathcal{X}$ -正合序列：

$$0 \rightarrow K_n \rightarrow X_{n-1} \oplus M_n \rightarrow X_{n-2} \oplus M_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_0 \oplus M_1 \rightarrow N \oplus M_0 \xrightarrow{\alpha} N \rightarrow 0.$$

因 α 是可裂的，故存在 $\mathcal{X}$ -正合序列：

$$0 \rightarrow K_n \rightarrow X_{n-1} \oplus M_n \xrightarrow{\beta} X_{n-2} \oplus M_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_0 \oplus M_1 \rightarrow M_0 \rightarrow 0,$$

其中 $M_0 \in \mathcal{U}_\mathcal{X}$ -GP，且当 $1 \leq i \leq n-1$ 时， $X_{i-1} \oplus M_i \in \mathcal{U}_\mathcal{X}$ -GP。因为 $\mathcal{U}_\mathcal{X}$ -GP 对 $\mathcal{X}$ -满态射核是封闭的，于是 $\text{Im}(\beta) \in \mathcal{U}_\mathcal{X}$ -GP，且有 $\mathcal{X}$ -正合序列：

$$0 \rightarrow K_n \rightarrow X_{n-1} \oplus M_n \rightarrow \text{Im}(\beta) \rightarrow 0. \quad (2.20)$$

类似的，我们有下面的 $\mathcal{X}$ -正合序列：

$$0 \rightarrow K_n \rightarrow X_{n-1} \oplus M'_n \xrightarrow{\gamma} X_{n-2} \oplus M'_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_0 \oplus M'_1 \rightarrow M'_0 \rightarrow 0,$$

其中 $M'_0 \in \mathcal{U}_\mathcal{X}$ -GP，且当 $1 \leq i \leq n-1$ 时， $X_{i-1} \oplus M'_i \in \mathcal{U}_\mathcal{X}$ -GP，且 $\text{Im}(\gamma) \in \mathcal{U}_\mathcal{X}$ -GP，也有 $\mathcal{X}$ -正合序列：

$$0 \rightarrow K_n \rightarrow X_{n-1} \oplus M'_n \rightarrow \text{Im}(\gamma) \rightarrow 0. \quad (2.21)$$

若 $M_n \in \mathcal{U}_\mathcal{X}$ -GP，在 (2.20) 中由 $\mathcal{U}_\mathcal{X}$ -GP 对 $\mathcal{X}$ -满态射核是封闭的，可知 $K_n \in \mathcal{U}_\mathcal{X}$ -GP。又由于 $\mathcal{U}_\mathcal{X}$ -GP 对 $\mathcal{X}$ -扩张是封闭的，于是在 (2.21) 中可知 $X_{n-1} \oplus M'_n \in \mathcal{U}_\mathcal{X}$ -GP。根据定理 2.2.3，可得 $M'_n \in \mathcal{U}_\mathcal{X}$ -GP。同理可证，若 $M'_n \in \mathcal{U}_\mathcal{X}$ -GP，则 $M_n \in \mathcal{U}_\mathcal{X}$ -GP。□

对偶地，我们容易得出如下推论 2.2.11。

推论 2.2.11 对于 $\mathcal{A}$ 中的对象 N ，考虑如下 $\mathcal{X}$ -正合序列：

$$0 \rightarrow N \rightarrow M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow \cdots \rightarrow M_{n-1} \rightarrow M_n \rightarrow 0 \quad (2.22)$$

和

$$0 \rightarrow N \rightarrow M'_0 \rightarrow M'_1 \rightarrow \cdots \rightarrow M'_{n-1} \rightarrow M'_n \rightarrow 0$$

其中 $M_0, \dots, M_{n-1}$ 和 $M'_0, \dots, M'_{n-1}$ 都属于 $\mathcal{U}_y$ -GI, 那么 M_n 属于 $\mathcal{U}_y$ -GI 当且仅当 M'_n 属于 $\mathcal{U}_y$ -GI.

命题 2.2.12 若 $0 \rightarrow N \xrightarrow{f} M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow K \rightarrow 0$ 是 $\mathcal{A}$ 中的 $\mathcal{X}$ -正合序列, 其中 $M_0, M_1 \in \mathcal{U}_x$ -GP, 那么存在 $\mathcal{A}$ 中的下述两个 $\mathcal{X}$ -正合序列

$$0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow X \rightarrow K \rightarrow 0$$

和

$$0 \rightarrow N \rightarrow X' \rightarrow M' \rightarrow K \rightarrow 0$$

其中 $X, X' \in \mathcal{X}$, $M' \in \mathcal{U}_x$ -GP.

证明: 由 $M_1 \in \mathcal{U}_x$ -GP 可知存在 $\mathcal{X}$ -正合序列 $0 \rightarrow M_2 \rightarrow X \rightarrow M_1 \rightarrow 0$, 其中 $X \in \mathcal{X}$, $M_2 \in \mathcal{U}_x$ -GP. 于是我们有如下的拉回图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & M_2 & \xlongequal{\quad} & M_2 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & X & \longrightarrow & K \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & \text{Im}(f) & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & K \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

取第一列我们可获得下面的拉回图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & M_2 & \xlongequal{\quad} & M_2 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & M & \longrightarrow & A \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & M_0 & \longrightarrow & \text{Im}(f) \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

由蛇引理易得上述两个交换图中的序列均是 $\mathcal{X}$ -正合的. 由 $\mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ -GP 是 $\mathcal{X}$ -可解的, 可知 $M \in \mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ -GP. 考虑上面两个拉回图中的 $\mathcal{X}$ -正合序列:

$$0 \rightarrow A \rightarrow X \rightarrow K \rightarrow 0$$

和

$$0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow A \rightarrow 0,$$

于是我们可以得到 $\mathcal{X}$ -正合序列 $0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow X \rightarrow K \rightarrow 0$, 其中 $M \in \mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ -GP 且 $X \in \mathcal{X}$. 类似地, 我们由推出图可以证明另一个 $\mathcal{X}$ -正合序列也是成立的. $\square$

定理 2.2.13 设下面序列是 $\mathcal{X}$ -正合的

$$0 \rightarrow A \rightarrow M_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow M_1 \rightarrow M_0 \rightarrow N \rightarrow 0, \quad (2.23)$$

其中 $M_i \in \mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ -GP, 且 $n \geq 1$. 则存在 $\mathcal{X}$ -正合序列

$$0 \rightarrow B \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow N \rightarrow 0$$

和 $0 \rightarrow M \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow 0$, 其中 $X_i \in \mathcal{X}$ 且 $M \in \mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ -GP.

证明: 我们对 n 采用数学归纳法. 当 $n=1$ 时, 由于 $M_0 \in \mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ -GP, 则存在 $\mathcal{X}$ -正合序列:

$$0 \rightarrow M \rightarrow X_0 \rightarrow M_0 \rightarrow 0,$$

其中 $X_0 \in \mathcal{X}$ 且 $M \in \mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ -GP. 我们考虑如下拉回图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & M & \xlongequal{\quad} & M & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & X_0 & \longrightarrow & N \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & M_0 & \longrightarrow & N \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

由蛇引理容易得出此拉回图为 $\mathcal{X}$ -正合的, 其中第一列和第二行即为所求.

对序列(2.23), 取 $K = \ker(M_1 \rightarrow M_0)$, 于是存在下面的 $\mathcal{X}$ -正合序列:

$$0 \rightarrow K \rightarrow M_1 \rightarrow M_0 \rightarrow N \rightarrow 0.$$

根据命题 2.2.12 可知存在下面的 $\mathcal{X}$ -正合序列:

$$0 \rightarrow K \rightarrow M \rightarrow X_0 \rightarrow N \rightarrow 0, \quad (2.24)$$

其中 $X_0 \in \mathcal{X}$ 且 $M \in \mathcal{U}_{\mathcal{X}}\text{-GP}$, 令 $N' = \text{Im}(M \rightarrow X_0)$, 则有如下 $\mathcal{X}$ -正合序列

$$0 \rightarrow A \rightarrow M_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow M_2 \rightarrow M \rightarrow N' \rightarrow 0; \quad (2.25)$$

$$0 \rightarrow N' \rightarrow X_0 \rightarrow N \rightarrow 0. \quad (2.26)$$

由归纳假设法, 假设结论对于 $n-1$ 是成立的, 即对于序列(2.25)有如下结果:

$$0 \rightarrow B \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_1 \rightarrow N' \rightarrow 0; \quad (2.27)$$

$$0 \rightarrow M \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow 0.$$

由序列(2.26)和(2.27)可得 $\mathcal{X}$ -正合序列:

$$0 \rightarrow B \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow N \rightarrow 0,$$

即对于 n 也成立. □

2.3 $\mathcal{U}_x$ -Gorenstein 投射对象与 $\mathcal{U}_y$ -Gorenstein 内射对象的稳定性

引理 2.3.1 若有 $\mathcal{X}$ -正合序列

$$0 \rightarrow N \rightarrow M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow \cdots \rightarrow M_n \rightarrow \cdots, \quad (2.28)$$

其中 $N \in \mathcal{A}$, $M_i \in \mathcal{U}_x$ -GP, 则以下命题成立.

(1) 存在 $\mathcal{X}$ -正合序列, 其中 $X_i \in \mathcal{X}$,

$$0 \rightarrow N \rightarrow X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \cdots \rightarrow X_n \rightarrow \cdots. \quad (2.29)$$

(2) 若(2.28)是 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{U})$ -正合的, 那么(2.29)也是 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{U})$ -正合的.

证明: 在(2.28)中取 $K_1 = \text{Im}(M_0 \rightarrow M_1)$, 于是我们有如下 $\mathcal{X}$ -正合序列

$$0 \rightarrow N \rightarrow M_0 \rightarrow K_1 \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow K_1 \rightarrow M_1 \rightarrow \cdots \rightarrow M_n \rightarrow \cdots.$$

由 $M_0 \in \mathcal{U}_x$ -GP 可知存在 $\mathcal{X}$ -正合序列 $0 \rightarrow M_0 \rightarrow X \rightarrow M \rightarrow 0$, 其中 $M \in \mathcal{U}_x$ -GP, $X \in \mathcal{X}$. 考虑如下推出图

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & M_0 & \longrightarrow & K_1 \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & X & \longrightarrow & B \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & M & = & M \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & 0 & & 0 \end{array}$$

再取 $K_2 = \text{Im}(M_1 \rightarrow M_2)$, 于是有 $\mathcal{X}$ -正合序列

$$0 \rightarrow K_1 \rightarrow M_1 \rightarrow K_2 \rightarrow 0 \text{ 和 } 0 \rightarrow K_2 \rightarrow M_2 \rightarrow \cdots \rightarrow M_n \rightarrow \cdots$$

于是有如下推出图

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & K_1 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & K_2 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & K_2 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & M & = & M & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

其中 $M, M_1 \in \mathcal{U}_\chi\text{-GP}$ ，所以 $M' \in \mathcal{U}_\chi\text{-GP}$ 然后我们有如下 $\mathcal{X}$ -正合序列

$$0 \rightarrow N \rightarrow X \rightarrow B \rightarrow 0 \text{ 和 } 0 \rightarrow B \rightarrow M' \rightarrow M_2 \rightarrow \cdots \rightarrow M_n \rightarrow \cdots,$$

重复上述步骤即可得到(2.29). 上述两个推出图作用 $\text{Hom}_\mathcal{A}(-, \mathcal{U})$ 函子, 若(2.28)是 $\text{Hom}_\mathcal{A}(-, \mathcal{U})$ -正合的, 则根据蛇引理容易得出上述推出图中的序列都是 $\text{Hom}_\mathcal{A}(-, \mathcal{U})$ -正合的, 那么(2.29)也是 $\text{Hom}_\mathcal{A}(-, \mathcal{U})$ -正合的. $\square$

引理 2.3.2 若有 $\mathcal{X}$ -正合序列

$$\cdots \rightarrow M_n \rightarrow \cdots \rightarrow M_1 \rightarrow M_0 \rightarrow N \rightarrow 0, \quad (2.30)$$

其中 $N \in \mathcal{A}$, $M_i \in \mathcal{U}_\chi\text{-GP}$, 则以下命题成立.

(1) 存在 $\mathcal{X}$ -正合序列, 其中 $X_i \in \mathcal{X}$

$$\cdots \rightarrow X_n \rightarrow \cdots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow N \rightarrow 0. \quad (2.31)$$

(2) 若(2.30)是 $\text{Hom}_\mathcal{A}(-, \mathcal{U})$ -正合的, 那么(2.31)也是 $\text{Hom}_\mathcal{A}(-, \mathcal{U})$ -正合的.

证明: 在(2.30)中取 $K_1 = \text{Im}(M_1 \rightarrow M_0)$, 于是我们有如下 $\mathcal{X}$ -正合序列

$$0 \rightarrow K \rightarrow M_0 \rightarrow N \rightarrow 0 \text{ 和 } \cdots \rightarrow M_n \rightarrow \cdots \rightarrow M_1 \rightarrow K_1 \rightarrow 0.$$

由 $M_0 \in \mathcal{U}_\chi\text{-GP}$ 可知存在 $\mathcal{X}$ -正合序列 $0 \rightarrow M_0 \rightarrow X \rightarrow M \rightarrow 0$, 其中 $X \in \mathcal{X}$,

$M_0 \in \mathcal{U}_\chi\text{-GP}$, 考虑如下拉回图

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & M & \xlongequal{\quad} & M & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & X & \longrightarrow & N \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & K_1 & \longrightarrow & M_0 & \longrightarrow & N \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

再取 $K_2 = \text{Im}(M_2 \rightarrow M_1)$, 于是有 $\mathcal{X}$ -正合序列

$$0 \rightarrow K_2 \rightarrow M_1 \rightarrow K_1 \rightarrow 0 \text{ 和 } \cdots \rightarrow M_n \rightarrow \cdots \rightarrow M_2 \rightarrow K_2 \rightarrow 0,$$

于是有如下拉回图

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & M & \xlongequal{\quad} & M & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & K_2 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & A \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & K_2 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & K_1 \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

其中 $M, M_1 \in \mathcal{U}_x\text{-GP}$ ，所以 $M' \in \mathcal{U}_x\text{-GP}$ 。然后我们有如下 $\mathcal{X}$ -正合序列

$$0 \rightarrow A \rightarrow X \rightarrow N \rightarrow 0 \text{ 和 } \cdots \rightarrow M_n \rightarrow \cdots \rightarrow M_2 \rightarrow M' \rightarrow A \rightarrow 0.$$

重复上述步骤即可得到(2.31)。对上述两个拉回图作用 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{U})$ 函子，若(2.30)是 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{U})$ -正合的，则根据蛇引理容易得出上述推出图中的序列都是 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{U})$ -正合的，那么(2.31)也是 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{U})$ -正合的。 $\square$

对偶地，我们容易得出如下引理 2.3.3 与引理 2.3.4。

引理 2.3.3 若有 $\mathcal{Y}$ -余正合序列

$$0 \rightarrow N \rightarrow M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow \cdots \rightarrow M_n \rightarrow \cdots, \quad (2.32)$$

其中 $N \in \mathcal{A}$ ， $M_i \in \mathcal{U}_y\text{-GI}$ ，则以下成立。

(1) 存在 $\mathcal{Y}$ -余正合序列，其中 $Y_i \in \mathcal{Y}$

$$0 \rightarrow N \rightarrow Y_0 \rightarrow Y_1 \rightarrow \cdots \rightarrow Y_n \rightarrow \cdots. \quad (2.33)$$

(3) 若(2.32)是 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{U}, -)$ -正合的，那么(2.33)也是 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{U}, -)$ -正合的。

引理 2.3.4 若有 $\mathcal{Y}$ -余正合序列

$$\cdots \rightarrow M_n \rightarrow \cdots \rightarrow M_1 \rightarrow M_0 \rightarrow N \rightarrow 0, \quad (2.34)$$

其中 $N \in \mathcal{A}$ ， $M_i \in \mathcal{U}_y\text{-GI}$ ，则以下成立。

(1) 存在 $\mathcal{Y}$ -余正合序列，其中 $Y_i \in \mathcal{Y}$

$$\cdots \rightarrow Y_n \rightarrow \cdots \rightarrow Y_1 \rightarrow Y_0 \rightarrow N \rightarrow 0. \quad (2.35)$$

(2) 若(2.34)是 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{U}, -)$ -正合的，那么(2.35)也是 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{U}, -)$ -正合的。

令 $[\mathcal{U}_x\text{-GP}]^1 = \mathcal{U}_x\text{-GP}$ ，且 $[\mathcal{U}_x\text{-GP}]^{n+1} = \{Q \in \mathcal{A} \mid \text{存在 } \mathcal{X}\text{-正合且}$

$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{U})$ -正合序列 $\cdots \rightarrow M_{-1} \rightarrow M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow \cdots$, 其中 $M_i \in [\mathcal{U}_{\mathcal{X}}\text{-GP}]^n$, 使 $M = \text{Im}(M_0 \rightarrow M_1)$, 其中 $n \geq 1$ }.

令 $[\mathcal{U}_{\mathcal{Y}}\text{-GI}]^1 = \mathcal{U}_{\mathcal{Y}}\text{-GI}$, 且 $[\mathcal{U}_{\mathcal{Y}}\text{-GI}]^{n+1} = \{Q \in \mathcal{A} \mid \text{存在 } \mathcal{Y}\text{-余正合且 } \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{U}, -)\text{-正合序列 } \cdots \rightarrow M_{-1} \rightarrow M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow \cdots, \text{ 其中 } M_i \in [\mathcal{U}_{\mathcal{Y}}\text{-GI}]^n, \text{ 使 } M = \text{Im}(M_0 \rightarrow M_1), \text{ 其中 } n \geq 1\}$.

定理 2.3.5 对于任意的 $n \geq 1$, 都有 $[\mathcal{U}_{\mathcal{X}}\text{-GP}]^n = \mathcal{U}_{\mathcal{X}}\text{-GP}$ 与 $[\mathcal{U}_{\mathcal{Y}}\text{-GI}]^n = \mathcal{U}_{\mathcal{Y}}\text{-GI}$.

证明: 由定义可知只需证 $\mathcal{U}_{\mathcal{X}}\text{-GP} = [\mathcal{U}_{\mathcal{X}}\text{-GP}]^2$, $\mathcal{U}_{\mathcal{X}}\text{-GP} \subseteq [\mathcal{U}_{\mathcal{X}}\text{-GP}]^2$ 是显然的. 假设 $N \in [\mathcal{U}_{\mathcal{X}}\text{-GP}]^2$, 那么存在 $\mathcal{X}$ -正合且 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{U})$ -正合序列

$$\cdots \rightarrow M_{-1} \rightarrow M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow \cdots,$$

其中 $M_i \in \mathcal{U}_{\mathcal{X}}\text{-GP}$, $N = \text{Im}(M_0 \rightarrow M_1)$, 根据引理 2.3.2 和 2.3.1 可知存在 $\mathcal{X}$ -正合且 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{U})$ -正合序列

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow N \rightarrow X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow \cdots \rightarrow X_n \rightarrow \cdots, \\ \cdots \rightarrow X_{-n} \rightarrow \cdots \rightarrow X_{-1} \rightarrow X_0 \rightarrow N \rightarrow 0, \end{aligned}$$

于是 $N \in \mathcal{U}_{\mathcal{X}}\text{-GP}$, 即有 $[\mathcal{U}_{\mathcal{X}}\text{-GP}]^2 \subseteq \mathcal{U}_{\mathcal{X}}\text{-GP}$, 因此 $\mathcal{U}_{\mathcal{X}}\text{-GP} = [\mathcal{U}_{\mathcal{X}}\text{-GP}]^2$.

$[\mathcal{U}_{\mathcal{Y}}\text{-GI}]^n = \mathcal{U}_{\mathcal{Y}}\text{-GI}$ 的证明与上述类似. □

2.4 $\mathcal{U}_x$ -Gorenstein 投射对象维数与 $\mathcal{U}_y$ -Gorenstein 内射对象维数

定义 2.4.1 对于 $\mathcal{A}$ 中任意对象 G ， G 的 $\mathcal{U}_x$ -GP 维数用 $Gpd_{\mathcal{U}_x}(G)$ 表示，其被定义为使得如下 $\mathcal{X}$ -正合序列存在的最小正整数 n 。

$$0 \rightarrow M_n \rightarrow M_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow M_1 \rightarrow M_0 \rightarrow G \rightarrow 0,$$

其中 $M_i \in \mathcal{U}_x$ -GP。如果不存在这样的整数，则规定 $Gpd_{\mathcal{U}_x}(G) = 0$ 。同时我们用

$\tilde{\mathcal{U}}_x$ 表示 $\mathcal{A}$ 中所有具有有限 $\mathcal{U}_x$ -GP 维数的对象组成的类。

定义 2.4.2 对于 $\mathcal{A}$ 中任意对象 G ， G 的 $\mathcal{U}_y$ -GI 维数用 $Gid_{\mathcal{U}_y}(G)$ 表示，其被定义为使得如下 $\mathcal{X}$ -正合序列存在的最小正整数 n 。

$$0 \rightarrow G \rightarrow M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow \cdots \rightarrow M_{n-1} \rightarrow M_n \rightarrow 0,$$

其中 $M_i \in \mathcal{U}_y$ -GI。如果不存在这样的整数，则规定 $Gid_{\mathcal{U}_y}(G) = 0$ 。同时我们用

$\tilde{\mathcal{U}}_y$ 表示 $\mathcal{A}$ 中所有具有有限 $\mathcal{U}_y$ -GI 维数的对象组成的类。

定理 2.4.3 设 N 是 $\mathcal{A}$ 中的任意对象且 $Gpd_{\mathcal{U}_x}(N) = n$ ，则有一个满的右- $\mathcal{U}_x$ -GP 逼近 $\varphi: M \rightarrow N$ ，其中 $M \in \mathcal{U}_x$ -GP，且 $K = \text{Ker}(\varphi)$ 满足 $\dim_{\mathcal{X}}(K) = n-1$ 。

证明：由 $Gpd_{\mathcal{U}_x}(N) = n$ 与推论 2.2.10 可知存在如下 $\mathcal{X}$ -正合序列：

$$0 \rightarrow N' \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_0 \rightarrow N \rightarrow 0,$$

其中 $X_i \in \mathcal{X}$ ， $N' \in \mathcal{U}_x$ -GP。由 $N' \in \mathcal{U}_x$ -GP 可知，存在如下既是 $\mathcal{X}$ -正合又是 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{U})$ -正合的序列：

$$0 \rightarrow N' \rightarrow L_0 \rightarrow \cdots \rightarrow L_{n-1} \rightarrow Q \rightarrow 0,$$

其中 $L_i \in \mathcal{X}$ ， $Q \in \mathcal{U}_x$ -GP。于是存在如下链映射：

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & L_0 & \longrightarrow & \cdots \longrightarrow L_{n-1} \longrightarrow Q \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & X_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \longrightarrow X_0 \longrightarrow N \longrightarrow 0 \end{array}$$

那么此链映射的映射锥也是 $\mathcal{X}$ -正合的，即有 $\mathcal{X}$ -正合序列：

$$0 \rightarrow N' \xrightarrow{f} L_0 \oplus N' \rightarrow L_1 \oplus X_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow L_{n-1} \oplus X_1 \rightarrow Q \oplus X_0 \xrightarrow{\varphi} N \rightarrow 0.$$

因 f 是可裂的, 故存在 $\mathcal{X}$ -正合序列

$$0 \rightarrow L_0 \rightarrow L_1 \oplus X_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow L_{n-1} \oplus X_1 \rightarrow Q \oplus X_0 \xrightarrow{\varphi} N \rightarrow 0,$$

容易看出上述序列中 $Q \oplus X_0$ 左边所有的对象都在 $\mathcal{X}$ 中. 令 $\ker(\varphi) = K$, 则 K 满足:

$\dim_{\mathcal{X}}(K) \leq n-1 (n \geq 1)$. 因 $Gpd_{\mathcal{U}_{\mathcal{X}}}(N) = n$, 故 $\dim_{\mathcal{X}}(K) = n-1 (n \geq 1)$. 于是我们取 K 的 $\mathcal{X}$ -分解如下:

$$0 \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow K \rightarrow 0,$$

其中 $X_i \in \mathcal{X}$. 对 K 的 $\mathcal{X}$ -分解作用 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, -)$ 函子, 其中 $A \in \mathcal{U}_{\mathcal{X}}\text{-GP}$, 根据命题 2.1.8, 由维数转移得: $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^1(A, K) = \text{Ext}_{\mathcal{X}}^n(A, X_{n-1}) = 0$. 那么有如下满态射:

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, \varphi): \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, Q \oplus X_0) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, N)$$

因此 φ 是一个满的右- $\mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ -GP 逼近且 $\dim_{\mathcal{X}}(K) = n-1$. □

定理 2.4.4 设 N 是 $\mathcal{A}$ 中的任意对象且 $Gid_{\mathcal{U}_y}(N) = n$, 则有一个满的- $\mathcal{U}_y$ -GI 逼近 $\varphi: N \rightarrow M$, 其中 $M \in \mathcal{U}_y\text{-GI}$, 且 $K = \text{Ker}(\varphi)$ 满足 $\dim_y(K) = n-1$.

证明: 由 $Gid_{\mathcal{U}_y}(N) = n$ 与推论 2.22 可知存在如下 $\mathcal{Y}$ -余正合且 $\mathcal{U}$ -正合序列:

$$0 \rightarrow N \rightarrow Y_0 \rightarrow \cdots \rightarrow Y_{n-1} \rightarrow N' \rightarrow 0,$$

其中 $Y_i \in \mathcal{X}$, $N' \in \mathcal{U}_y\text{-GI}$. 由 $N' \in \mathcal{U}_y\text{-GI}$ 可知, 存在如下既是 $\mathcal{Y}$ -余正合又是 $\mathcal{U}$ -正合的序列:

$$0 \rightarrow Q \rightarrow L_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow L_0 \rightarrow N' \rightarrow 0,$$

其中 $L_i \in \mathcal{Y}$, $Q \in \mathcal{U}_y\text{-GI}$. 于是存在如下链映射:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & Y_0 & \longrightarrow & \cdots \longrightarrow Y_{n-1} \longrightarrow N' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & L_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \longrightarrow L_0 \longrightarrow N' \longrightarrow 0 \end{array}$$

那么此链映射的映射锥也是 $\mathcal{Y}$ -余正合的, 即有 $\mathcal{Y}$ -余正合序列:

$$0 \rightarrow N \xrightarrow{\lambda} Y_0 \oplus Q \xrightarrow{f} Y_1 \oplus L_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow Y_{n-1} \oplus L_1 \rightarrow N' \oplus L_0 \xrightarrow{\varphi} N' \rightarrow 0.$$

因 φ 是可裂的, 故存在 $\mathcal{Y}$ -余正合序列

$$0 \rightarrow N \xrightarrow{\lambda} Y_0 \oplus Q \xrightarrow{f} Y_1 \oplus L_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow Y_{n-1} \oplus L_1 \rightarrow L_0 \rightarrow 0,$$

容易看出上述序列中 $Y_0 \oplus Q$ 右边所有的对象都在 $\mathcal{Y}$ 中. 令 $\ker(f) = K$, 则 K 满足: $\dim_{\mathcal{Y}}(K) \leq n-1 (n \geq 1)$. 因 $Gid_{\mathcal{U}_{\mathcal{Y}}}(N) = n$, 故 $\dim_{\mathcal{Y}}(K) = n-1 (n \geq 1)$. 于是我们取 K 的 $\mathcal{Y}$ -分解如下:

$$0 \rightarrow K \rightarrow Y_0 \rightarrow Y_1 \rightarrow \cdots \rightarrow Y_{n-1} \rightarrow 0,$$

其中 $Y_i \in \mathcal{Y}$. 对 K 的 $\mathcal{Y}$ -分解作用 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, A)$ 函子, 其中 $A \in \mathcal{U}_{\mathcal{Y}}\text{-GI}$, 根据命题 2.1.9, 由维数转移得: $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^1(K, A) = \text{Ext}_{\mathcal{X}}^n(Y_{n-1}, A) = 0$. 那么有如下满态射:

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\lambda, A): \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Y_0 \oplus Q, A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(N, A).$$

因此 φ 是一个满的左- $\mathcal{U}_{\mathcal{Y}}\text{-GI}$ 逼近且 $\dim_{\mathcal{Y}}(K) = n-1$. □

推论 2.4.5 设 M 是 $\mathcal{A}$ 中的对象, 且 N 的 $\mathcal{U}_{\mathcal{X}}\text{-GP}$ 维数为 n , 则存在如下的 $\mathcal{X}$ -正合序列

$$0 \rightarrow N \rightarrow H \rightarrow M \rightarrow 0,$$

其中 $\dim_{\mathcal{X}}(H) = n$, $M \in \mathcal{U}_{\mathcal{X}}\text{-GP}$.

证明: 当 $n=0$ 时, 根据命题 2.1.8 可知, 结论是显然的, 当 $n>0$ 时, 由于 N 的 $\mathcal{U}_{\mathcal{X}}\text{-GP}$ 维数为 n , 那么由定理 2.4.3 可知存在 $\mathcal{X}$ -正合序列:

$$0 \rightarrow K \rightarrow M' \rightarrow N \rightarrow 0,$$

其中 $M' \in \mathcal{U}_{\mathcal{X}}\text{-GP}$, 且 $\dim_{\mathcal{X}}(K) = n-1$, 由 $M' \in \mathcal{U}_{\mathcal{X}}\text{-GP}$, 可知存在 $\mathcal{X}$ -正合序列

$$0 \rightarrow M' \rightarrow X \rightarrow M \rightarrow 0,$$

其中 $X \in \mathcal{X}$, $M \in \mathcal{U}_{\mathcal{X}}\text{-GP}$, 于是有如下交换图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & N \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & X & \longrightarrow & H \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & M & = & M \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

不难验证上述交换图中每个正合列都是 $\mathcal{X}$ -正合的. 由交换图的第二行可知 $\dim_{\mathcal{X}}(H) = n$. 因此交换图中第三列即为所求. $\square$

对偶地, 我们容易得出如下推论 2.4.6.

推论 2.4.6 设 M 是 $\mathcal{A}$ 中的对象, 且 N 的 $\mathcal{U}_{\mathcal{Y}}$ -GI 维数为 n , 则存在如下的 $\mathcal{Y}$ -余正合序列

$$0 \rightarrow M \rightarrow H \rightarrow N \rightarrow 0,$$

其中 $\dim_{\mathcal{Y}}(H) = n$, $M \in \mathcal{U}_{\mathcal{Y}}$ -GI.

引理 2.4.7 若 $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ 是一个 $\mathcal{X}$ -正合序列, 其中 $M, M' \in \mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ -GP, 且对于任意的 $X \in \mathcal{X}$ 都有 $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^1(N, X) = 0$, 则 $N \in \mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ -GP.

证明: 由 $M' \in \mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ -GP 可知存在 $\mathcal{X}$ -正合序列

$$0 \rightarrow M' \rightarrow X \rightarrow M'' \rightarrow 0,$$

其中 M'' 为 $\mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ -GP, 且 $X \in \mathcal{X}$, 于是有如下推出图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & N \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & B & \longrightarrow & N \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & M'' & = & M'' & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

因为 $\mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ -GP 是 $\mathcal{X}$ -扩张封闭的, 所以 $B \in \mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ -GP. 又因 $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^1(N, X) = 0$, 所以上

述交换图中的第二行是可裂的，即 N 是 B 的直和项。根据定理 2.2.8，可得 $N \in \mathcal{U}_{\mathcal{X}}\text{-GP}$ 。 $\square$

对偶地，我们容易得出如下引理 2.4.8.

引理 2.4.8 若 $0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow M' \rightarrow 0$ 是一个 $\mathcal{Y}$ -余正合序列，其中 $M, M' \in \mathcal{U}_{\mathcal{Y}}\text{-GI}$ ，且对于任意的 $Y \in \mathcal{Y}$ 都有 $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^1(Y, N) = 0$ ，则 $N \in \mathcal{U}_{\mathcal{Y}}\text{-GI}$ 。

由参考文献[21]中引理 2.4 可得如下引理.

引理 2.4.9 下列陈述等价，其中 n 为正整数.

- (1) $X \in \mathcal{X}$;
- (2) $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^n(X, N) = 0, \forall N \in \mathcal{A}$;
- (3) $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^1(X, N) = 0, \forall N \in \mathcal{A}$.

证明： (1) $\Rightarrow$ (2)与(2) $\Rightarrow$ (3)是显然的.

(3) $\Rightarrow$ (1) 取 $\mathcal{X}$ -正合序列 $0 \rightarrow K \rightarrow X' \rightarrow X \rightarrow 0$ ，其中 $X' \in \mathcal{X}$ ，对此序列作用 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, K)$ 函子可得

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, K) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X', K) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, K) \rightarrow 0 = \text{Ext}_{\mathcal{X}}^1(X, K).$$

于是此短正合列是可裂的，即 X 是 X' 的直和项，从而 $X \in \mathcal{X}$ 。 $\square$

对偶地，我们容易得出如下引理 2.4.10.

引理 2.4.10 下列陈述等价，其中 n 为正整数.

- (1) $Y \in \mathcal{Y}$;
- (2) $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^n(N, Y) = 0, \forall N \in \mathcal{A}$;
- (3) $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^1(N, Y) = 0, \forall N \in \mathcal{A}$.

引理 2.4.11 设 N 是 $\mathcal{A}$ 中的任意对象，则下列命题等价，其中 n, i 为正整数.

- (1) $\dim_{\mathcal{X}}(N) \leq n$;
- (2) $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^i(N, L) = 0$ ，其中 $i > n$ ， L 为 $\mathcal{A}$ 中的任意对象；
- (3) 对于 $\mathcal{X}$ -正合序列 $0 \rightarrow L_n \xrightarrow{t_n} X_{n-1} \xrightarrow{t_{n-1}} \cdots \xrightarrow{t_1} X_0 \xrightarrow{t_0} N \rightarrow 0$ ，如果 $X_i \in \mathcal{X}$ ，那么 $L_n \in \mathcal{X}$ 。

证明： (1) $\Rightarrow$ (2)，由(1)可得存在 $\mathcal{X}$ -正合序列

$$0 \rightarrow X_n \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_0 \rightarrow N \rightarrow 0.$$

对此 $\mathcal{X}$ -正合序列作用 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, L)$ ，可得 $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^i(N, L) = \text{Ext}_{\mathcal{X}}^{i-n}(X_n, L) = 0 (i > n)$ 。

(2) $\Rightarrow$ (3)，令 $K_i = \ker t_i$ ， $0 \leq i \leq n$ ，对每个 $\mathcal{X}$ -正合序列 $0 \rightarrow K_i \rightarrow X_i \rightarrow K_{i-1} \rightarrow 0$ 都作用 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, L)$ 函子，于是有

$$\text{Ext}_{\mathcal{X}}^1(L_n, L) = \text{Ext}_{\mathcal{X}}^2(K_{n-2}, L) = \cdots = \text{Ext}_{\mathcal{X}}^n(K_0, N) = \text{Ext}_{\mathcal{X}}^{n+1}(N, L) = 0.$$

由引理 2.4.9 可得 $L_n \in \mathcal{X}$ 。(4) $\Rightarrow$ (1) 是显然的。 $\square$

于是对于 $\mathcal{A}$ 中的任意对象 N 的 $\mathcal{X}$ -维数可表示为：

$$\dim_{\mathcal{X}}(N) = \inf \{i \in \mathbb{N}^* \mid \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{i+1}(N, L) = 0, \forall L \in \mathcal{A}\}.$$

对偶地，我们容易得出如下引理 2.4.12.

引理 2.4.12 设 N 是 $\mathcal{A}$ 中的任意对象，则下列命题等价，其中为 n, i 正整数.

- (1) $\dim_{\mathcal{Y}}(N) \leq n$;
- (2) $\text{Ext}_{\mathcal{Y}}^i(L, N) = 0$ ，其中 $i > n$ ， L 为 $\mathcal{A}$ 中的任意对象；
- (3) 对于 $\mathcal{Y}$ -正合序列 $0 \rightarrow N \rightarrow M_0 \rightarrow \cdots \rightarrow M_{n-1} \rightarrow L_n \rightarrow 0$ ，如果 $M_i \in \mathcal{Y}$ ，那么 $L_n \in \mathcal{Y}$ 。

于是对于 $\mathcal{A}$ 中的任意对象 N 的 $\mathcal{Y}$ -维数可表示为：

$$\dim_{\mathcal{Y}}(N) = \inf \{i \in \mathbb{N}^* \mid \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{i+1}(L, N) = 0, \forall L \in \mathcal{A}\}.$$

引理 2.4.13 对于 $\mathcal{A}$ 中的任意对象 N ，以下成立：

若 $N \in \tilde{\mathcal{X}}$ 或者 $N \in \tilde{\mathcal{Y}}$ ，那么对于任意的 $M \in \mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ -GP 都有 $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^{i \geq 1}(M, N) = 0$ 。

证明：由 $M \in \mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ -GP 可知，存在 $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^{i \geq 1}(M, X) = 0$ ，其中 $X \in \mathcal{X}$ 。若 $N \in \tilde{\mathcal{X}}$ ，那对么存在 N 的 $\mathcal{X}$ -分解：

$$0 \rightarrow X_n \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_0 \rightarrow N \rightarrow 0.$$

令 $K_n = \text{Im}(X_n \rightarrow X_{n-1})$ ，且对 N 的 $\mathcal{X}$ -分解作用函子 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, -)$ ，由维数转移可得 $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^i(M, N) = \text{Ext}_{\mathcal{X}}^{i+1}(M, K_1) = \text{Ext}_{\mathcal{X}}^{i+2}(M, K_2) = \cdots = \text{Ext}_{\mathcal{X}}^{i+n}(M, X_n) = 0$ ，容易看出 $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^{i \geq 1}(M, N) = 0$ 。若 $N \in \tilde{\mathcal{Y}}$ ，由命题 1.2.5 可得 $N \in \tilde{\mathcal{X}}$ ，同样可以得出结论。 $\square$

对偶地，我们容易得出如下引理 2.4.14.

引理 2.4.14 对于 $\mathcal{A}$ 中的任意对象 N ，以下成立：

若 $N \in \tilde{\mathcal{X}}$ 或者 $N \in \tilde{\mathcal{Y}}$ ，那么对于任意的 $M \in \mathcal{U}_{\mathcal{Y}}$ -GI 都有 $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^{i \geq 1}(N, M) = 0$ 。

定理 2.4.15 设 N 是 $\mathcal{A}$ 中的任意对象, 且 $Gpd_{\mathcal{U}_X}(N) < +\infty$, 则下列命题等价, 其中 n, i 为正整数.

- (1) $Gpd_{\mathcal{U}_X}(N) \leq n$;
- (2) $Ext_{\mathcal{X}}^i(N, L) = 0$, 其中 $i > n$, $\dim_{\mathcal{X}}(L) < +\infty$;
- (3) $Ext_{\mathcal{X}}^i(N, X) = 0$, 其中 $i > n$, $X \in \mathcal{X}$;
- (4) 对于 $\mathcal{X}$ -正合序列 $0 \rightarrow L_n \rightarrow M_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow M_0 \rightarrow N \rightarrow 0$, 如果 $M_0, \dots, M_{n-1} \in \mathcal{U}_X\text{-GP}$, 那么 $L_n \in \mathcal{U}_X\text{-GP}$.

证明: (1) $\Rightarrow$ (2) 由 $Gpd_{\mathcal{U}_X}(N) \leq n$ 可知, 存在 $\mathcal{X}$ -正合序列:

$$0 \rightarrow M_n \rightarrow M_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow M_0 \rightarrow N \rightarrow 0,$$

其中 $M_i \in \mathcal{U}_X\text{-GP}$, 对此正合列作用函子 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, L)$, 其中 $\dim_{\mathcal{X}}(L) < +\infty$. 由引理 2.4.13, 通过维数转移, 我们有 $Ext_{\mathcal{X}}^i(N, L) = Ext_{\mathcal{X}}^{i-n}(M_n, L) = 0 (i > n)$.

(2) $\Rightarrow$ (3) 和 (4) $\Rightarrow$ (1) 是显然的.

(3) $\Rightarrow$ (4) 由于 N 的 $\mathcal{U}_X\text{-GP}$ 维数有限, 令 $Gpd_{\mathcal{U}_X}(N) = m$, 假设 $n < m$, 于是有如下 $\mathcal{X}$ -正合序列:

$$0 \rightarrow M'_m \rightarrow M'_{m-1} \rightarrow \cdots \rightarrow M'_0 \rightarrow N \rightarrow 0,$$

其中 $M'_i \in \mathcal{U}_X\text{-GP}$. 令 $K_{m-1} = \text{Im}(M'_{m-1} \rightarrow M'_{m-2})$, 考虑如下 $\mathcal{X}$ -正合序列:

$$0 \rightarrow K_{m-1} \rightarrow M'_{m-2} \rightarrow \cdots \rightarrow M'_0 \rightarrow N \rightarrow 0,$$

对于任意的 $X \in \mathcal{X}$, 由 $n < m$ 与维数转移, 我们有 $Ext_{\mathcal{X}}^1(K_{m-1}, X) = Ext_{\mathcal{X}}^m(N, X) = 0$.

因此通过引理 2.4.7 可知, 在 $\mathcal{X}$ -正合序列 $0 \rightarrow M'_m \rightarrow M'_{m-1} \rightarrow K_{m-1} \rightarrow 0$ 中, $K_{m-1} \in \mathcal{U}_X\text{-GP}$. 于是 $Gpd_{\mathcal{U}_X}(N) \leq m-1$, 与假设矛盾, 即 $m \leq n$, 也就是 $Gpd_{\mathcal{U}_X}(N) \leq n$ 那么一定存在 $\mathcal{X}$ -正合序列:

$$0 \rightarrow M''_n \rightarrow M''_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow M''_0 \rightarrow N \rightarrow 0.$$

由推论 2.2.10, 我们可以得到 $L_n \in \mathcal{U}_X\text{-GP}$. □

因此 N 的 $\mathcal{U}_X\text{-GP}$ 维数可表示为:

$$Gpd_{\mathcal{U}_X}(N) = \inf \{i \in N^* \mid \text{Ext}_{\mathcal{X}}^{i+1}(N, L) = 0, \forall L \in \tilde{\mathcal{X}}\} = \inf \{i \in N^* \mid \text{Ext}_{\mathcal{X}}^{i+1}(N, X) = 0, \forall X \in \mathcal{X}\}$$

对偶地，我们容易得出如下定理定理 2.4.16.

定理 2.4.16 设 N 是 $\mathcal{A}$ 中的任意对象，且 $Gid_{\mathcal{U}_Y}(N) < +\infty$ ，则下列命题等价，其中 n, i 为正整数：

- (1) $Gid_{\mathcal{U}_Y}(N) \leq n$;
- (2) $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^i(L, N) = 0$ ，其中 $i > n$ ， $\dim_Y(L) < +\infty$;
- (3) $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^i(Y, N) = 0$ ，其中 $i > n$ ， $Y \in \mathcal{Y}$;
- (4) 对于 $\mathcal{Y}$ -余正合序列 $0 \rightarrow N \rightarrow M_0 \rightarrow M_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow L_n \rightarrow 0$ ，如果 $M_0, \dots, M_{n-1} \in \mathcal{U}_Y\text{-GI}$ ，那么 $L_n \in \mathcal{U}_Y\text{-GI}$.

因此 N 的 $\mathcal{U}_Y\text{-GI}$ 维数可表示为：

$$Gid_{\mathcal{U}_Y}(N) = \inf \{i \in N^* \mid \text{Ext}_{\mathcal{X}}^{i+1}(L, N) = 0, \forall L \in \tilde{\mathcal{Y}}\} = \inf \{i \in N^* \mid \text{Ext}_{\mathcal{X}}^{i+1}(Y, N) = 0, \forall Y \in \mathcal{Y}\}$$

命题 2.4.17 (1) 若 $\mathcal{A}$ 中的对象 N 的 $\mathcal{X}$ 维数有限，则 $Gpd_{\mathcal{U}_X}(N) = \dim_{\mathcal{X}}(N)$.

(2) 若 $\mathcal{A}$ 中的对象 N 的 $\mathcal{Y}$ 维数有限，则 $Gid_{\mathcal{U}_Y}(N) = \dim_Y(N)$.

证明： (1) 假设 $\dim_{\mathcal{X}}(N) = n$ ，且设 $Gpd_{\mathcal{U}_X}(N) = m$ ，则 $m \leq n$ ，于是存在如下的两个 $\mathcal{X}$ -正合序列：

$$0 \rightarrow X_n \rightarrow \cdots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow N \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow M_m \rightarrow \cdots \rightarrow M_1 \rightarrow M_0 \rightarrow N \rightarrow 0,$$

其中 $X_i \in \mathcal{X}$ ， $M_i \in \mathcal{U}_X\text{-GP}$ 。不难验证函子 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, -)$ 将上述第一个 $\mathcal{X}$ -正合序列变成正合序列，其中 $M \in \mathcal{U}_X\text{-GP}$ ，令 $K_i = \ker(X_{i-1} \rightarrow X_{i-2})$ ，其中 $i \geq 1$ 且 $X_{-1} \cong N$ 。于是存在 $\mathcal{U}_X\text{-GP}$ -正合序列：

$$0 \rightarrow K_{m+1} \rightarrow X_m \rightarrow K_m \rightarrow 0.$$

又由推论 2.2.10 可知 $K_m \in \mathcal{U}_X\text{-GP}$ 。由于上述序列是 $\mathcal{U}_X\text{-GP}$ -正合的，所以 $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^1(K_m, K_{m+1}) = 0$ ，即上述正合序列是可裂的。那么 K_m 是 X_m 的直和项， $K_m \in \mathcal{X}$ ，所以可证 $m = n$ 。(2) 的证明与(1)的证明类似。 $\square$

在参考文献[34]中介绍了余挠对的定义，由本文定义的相对同调函子可定义相对余挠对余挠对。在阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 中， $B \subseteq \mathcal{A}$ ， $C \subseteq \mathcal{A}$ ， (B, C) 被称为相对余挠对，那么 (B, C) 满足条件： $B = {}^\perp C$ ， $B^\perp = C$ ，其中

$$B^\perp = \left\{ N \in \mathcal{A} \mid \text{Ext}_{\mathcal{X}}^1(B', N) = 0, \forall B' \in B \right\},$$

$${}^\perp C = \left\{ N \in \mathcal{A} \mid \text{Ext}_{\mathcal{X}}^1(N, C') = 0, \forall C' \in C \right\}.$$

定理 2.4.18 下列命题等价，其中 $n \in \mathbb{N}^*$ 。

(1) $\sup\{Gpd_{\mathcal{U}_{\mathcal{X}}}(N) \mid N \in \mathcal{A}\} \leq n$ ；

(2) $(\mathcal{U}_{\mathcal{X}}\text{-GP}, \tilde{\mathcal{Y}})$ 是相对余挠对。

证明：(1) $\Rightarrow$ (2) 首先我们证明 $(\mathcal{U}_{\mathcal{X}}\text{-GP})^\perp = \tilde{\mathcal{Y}}$ ，假设 $C \in \tilde{\mathcal{Y}}$ ，其中 $G \in \mathcal{U}_{\mathcal{X}}\text{-GP}$ 由引理 2.4.13 可得对于任意的 $C \in \tilde{\mathcal{Y}}$ 都有 $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^{i \geq 1}(G, C) = 0$ ，其中 $G \in \mathcal{U}_{\mathcal{X}}\text{-GP}$ ，于是 $\tilde{\mathcal{Y}} \subseteq (\mathcal{U}_{\mathcal{X}}\text{-GP})^\perp$ 。

设 $Q \in (\mathcal{U}_{\mathcal{X}}\text{-GP})^\perp$ ，那么任意的 $G \in \mathcal{U}_{\mathcal{X}}\text{-GP}$ 都有 $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^1(G, Q) = 0$ ，且对于任意的 $G \in \mathcal{U}_{\mathcal{X}}\text{-GP}$ 都存在 $\mathcal{X}$ -正合序列 $0 \rightarrow G' \rightarrow X \rightarrow G \rightarrow 0$ ，其中 $G' \in \mathcal{U}_{\mathcal{X}}\text{-GP}$ ， $X \in \mathcal{X}$ 。对此序列作用 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, Q)$ 函子，可得 $0 = \text{Ext}_{\mathcal{X}}^1(G', Q) = \text{Ext}_{\mathcal{X}}^2(G, Q) = \text{Ext}_{\mathcal{X}}^2(X, Q) = 0$ ，通过假设归纳法可得，对于任意的 $G \in \mathcal{U}_{\mathcal{X}}\text{-GP}$ 都有 $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^{i \geq 1}(G, Q) = 0$ 。由(1)可知对于 $\mathcal{A}$ 中任意对象 N ，都有 $Gpd_{\mathcal{U}_{\mathcal{X}}}(N) \leq n$ ，那么存在 $\mathcal{X}$ -正合序列 $0 \rightarrow G' \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_0 \rightarrow N \rightarrow 0$ ，其中 $G' \in \mathcal{U}_{\mathcal{X}}\text{-GP}$ ，由维数转移可知 $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^i(N, Q) = \text{Ext}_{\mathcal{X}}^{i-n}(G', Q) = 0$ ，其中 $i > n$ ，由引理 2.4.12 可知 $Q \in \tilde{\mathcal{Y}}$ ，即 $(\mathcal{U}_{\mathcal{X}}\text{-GP})^\perp \subseteq \tilde{\mathcal{Y}}$ 。

接下来，我们证 ${}^\perp(\tilde{\mathcal{Y}}) = \mathcal{U}_{\mathcal{X}}\text{-GP}$ ，由引理 2.4.13 易得 $\mathcal{U}_{\mathcal{X}}\text{-GP} \subseteq {}^\perp(\tilde{\mathcal{Y}})$ 。假设 $F \in {}^\perp(\tilde{\mathcal{Y}})$ ， $H \in \tilde{\mathcal{Y}}$ ，对于任意的 F 都存在 $\mathcal{X}$ -正合序列 $0 \rightarrow F \rightarrow Y \rightarrow F' \rightarrow 0$ 且其中 $F' \in \tilde{\mathcal{Y}}$ ， $Y \in \mathcal{Y}$ ，对此序列作用 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(H, -)$ 函子，由维数转移可得 $0 = \text{Ext}_{\mathcal{X}}^1(H, F') = \text{Ext}_{\mathcal{X}}^2(H, F) = \text{Ext}_{\mathcal{X}}^2(H, Y) = 0$ ，通过假设归纳法可得，对于任意的 $F \in {}^\perp(\tilde{\mathcal{Y}})$ ，都有 $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^{i \geq 1}(H, F) = 0$ ， $F \in \mathcal{U}_{\mathcal{X}}\text{-GP}$ ，根据定理 1.2.5 可知 $F \in \mathcal{U}_{\mathcal{X}}\text{-GP}$ ，于是由

定理 2.4.15 可知 $H \in \mathcal{U}_x\text{-GP}$ ，即 ${}^\perp(\tilde{\mathcal{Y}}) \subseteq \mathcal{U}_x\text{-GP}$ 。

(2) $\Rightarrow$ (1) 假设 $(\mathcal{U}_x\text{-GP}, \tilde{\mathcal{Y}})$ 是相对余挠对，对于任意的 $N \in \mathcal{A}$ 都存在 $\mathcal{X}$ -正合序列 $0 \rightarrow G \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_0 \rightarrow N \rightarrow 0$ ，其中 $X_i \in \mathcal{X}$ 。对此序列作用 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, H)$ ，其中 $H \in \tilde{\mathcal{Y}}$ 。由维数转移，我们有 $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^1(G, H) = \text{Ext}_{\mathcal{X}}^{n+1}(N, H) = 0$ 。因此 $G \in {}^\perp(\tilde{\mathcal{Y}}) = \mathcal{U}_x\text{-GP}$ 。于是对于任意的 N ，都有 $\text{Gpd}_{\mathcal{U}_x}(N) \leq n$ 。□

对偶的，我们容易得出如下定理 2.4.19。

定理 2.4.19 下列命题等价，其中 $n \in \mathbb{N}^*$ 。

(1) $\sup\{\text{Gid}_{\mathcal{U}_y}(N) \mid N \in \mathcal{A}\} \leq n$ ；

(2) $(\tilde{\mathcal{X}}, \mathcal{U}_y\text{-GI})$ 是相对余挠对。

定理 2.4.20 下列条件等价，其中 $n \in \mathbb{N}^*$ 。

(1) $\sup\{\text{Gpd}_{\mathcal{U}_x}(N) \mid N \in \mathcal{A}\} \leq n$ 且 $\sup\{\text{Gid}_{\mathcal{U}_y}(N) \mid N \in \mathcal{A}\} \leq n$ ，

(2) 对于 $\forall U \in \mathcal{U}$ ，都有 $\dim_{\mathcal{X}}(U) \leq n$ 且 $\dim_{\mathcal{Y}}(U) \leq n$ ($\mathcal{U} \subseteq \mathcal{A}$ 且 $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{U}$ ， $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{U}$)。

证明： (1) $\Rightarrow$ (2) 因为对于任意的 $N \in \mathcal{A}$ 都有 $\text{Gpd}_{\mathcal{U}_x}(N) \leq n$ ，于是存在 N 的 $\mathcal{U}_x\text{-GP}$ 分解，即 $\mathcal{X}$ -正合序列

$$0 \rightarrow G_n \rightarrow \cdots \rightarrow G_1 \rightarrow G_0 \rightarrow N \rightarrow 0,$$

其中 $G_i \in \mathcal{U}_x\text{-GP}$ 对其作用 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, U)$ 函子，根据命题 2.1.4 由维数转移可得 $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^i(N, U) = \text{Ext}_{\mathcal{X}}^{i-n}(G_n, U) = 0$ ($i > n$)，由引理 2.4.12 可得， $\dim_{\mathcal{Y}}(U) \leq n$ 。因为对于任意的 $N \in \mathcal{A}$ 都有 $\text{Gid}_{\mathcal{U}_y}(N) \leq n$ ，所以存在 N 的 $\mathcal{U}_y\text{-GI}$ 分解，即 $\mathcal{X}$ 正合序列

$$0 \rightarrow N \rightarrow G_0 \rightarrow G_1 \cdots \rightarrow G_n \rightarrow 0,$$

其中 $G_i \in \mathcal{U}_y\text{-GI}$ 对其作用 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(U, -)$ 函子，根据命题 2.1.4 由维数转移可得 $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^i(U, N) = \text{Ext}_{\mathcal{X}}^{i-n}(U, G_n) = 0$ ($i > n$)，那么由引理 2.4.11 可得， $\dim_{\mathcal{X}}(U) \leq n$ 。

(2) $\Rightarrow$ (1) 先证明 $\sup\{\text{Gpd}_{\mathcal{U}_x}(N) \mid N \in \mathcal{A}\} \leq n$ 。对于任意的 $N \in \mathcal{A}$ ，都存在 N 的 $\mathcal{X}$ -分解，即 $\mathcal{X}$ -正合序列

$$0 \rightarrow G \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow N \rightarrow 0, \quad (2.36)$$

只需证明 $G \in \mathcal{U}_x\text{-GP}$ ，即可得出对于任意的 $N \in \mathcal{A}$ 都有 $Gpd_{\mathcal{U}_x}(N) \leq n$ 。对(2.36)作用 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, U)$ 函子， U 为 $\mathcal{U}$ 中任意对象，因为 $\dim_{\mathcal{Y}}(U) \leq n$ ，所以由引理 2.4.12 可得 $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^i(G, U) = \text{Ext}_{\mathcal{X}}^{n+i}(N, U) = 0$ ($i \geq 1$)。满足命题 2.1.8 中(2)的条件(i)。对于 N 又存在 $\mathcal{X}$ -正合序列 $0 \rightarrow N \rightarrow Y \rightarrow N' \rightarrow 0$ ，其中 $Y \in \mathcal{Y}$ 。同理，其中的 N' 也存在 $\mathcal{X}$ -正合序列

$$0 \rightarrow G' \rightarrow X'_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow X'_1 \rightarrow X'_0 \rightarrow N' \rightarrow 0. \quad (2.37)$$

对(2.37)作用 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, U)$ 函子，也有 $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^i(G', U) = \text{Ext}_{\mathcal{X}}^{n+i}(N', U) = 0$ ($i \geq 1$)，当 $i = 1$ 时即有 $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^1(G', U) = 0$ ，由此可得如下交换图：

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & Q_1 & \longrightarrow & G' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & X_{n-1} & \longrightarrow & X_{n-1} \oplus X'_{n-1} & \longrightarrow & X'_{n-1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & X_0 & \longrightarrow & X_0 \oplus X'_0 & \longrightarrow & X'_0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & N' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

其中因为 $Y \in \mathcal{U}$ ，又 $\dim_{\mathcal{X}}(U) \leq n$ ，所以 $Q_1 \in \mathcal{X}$ ，对于 $\mathcal{X}$ -正合序列 $0 \rightarrow G \rightarrow Q_1 \rightarrow G' \rightarrow 0$ ，由 $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^1(G', U) = 0$ 可知，此序列是 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, U)$ -正合的。取 $\mathcal{X}$ -正合序列 $0 \rightarrow N' \rightarrow Y_1 \rightarrow N'' \rightarrow 0$ ，其中 $Y_1 \in \mathcal{Y}$ ，重复上述步骤可得 $\mathcal{X}$ -正合又是 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, U)$ -正合的序列 $0 \rightarrow G \rightarrow Q_1 \rightarrow Q_2 \rightarrow Q_3 \rightarrow \cdots$ ，其中 $Q_i \in \mathcal{X}$ 。满足命题 2.1.8 中(2)的条件(ii)，因此 $G \in \mathcal{U}_x\text{-GP}$ 。接下来证 $\sup\{Gid_{\mathcal{U}_y}(N) | N \in \mathcal{A}\} \leq n$ 。对于任意的 $N \in \mathcal{A}$ ，都存在 N 的 $\mathcal{Y}$ -分解，即 $\mathcal{X}$ -正合序列：

$$0 \rightarrow N \rightarrow Y_0 \rightarrow Y_1 \rightarrow \cdots \rightarrow Y_{n-1} \rightarrow G \rightarrow 0, \quad (2.38)$$

只需证明 $G \in \mathcal{U}_y\text{-GI}$ ，即可得出对于任意的 $N \in \mathcal{A}$ 都有 $Gid_{\mathcal{U}_y}(N) \leq n$ 。对(2.38)作用 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(U, -)$ 函子， U 为 $\mathcal{U}$ 中任意对象，因为 $\dim_{\mathcal{X}}(U) \leq n$ ，由引理 2.4.11

可得 $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^i(U, G) = \text{Ext}_{\mathcal{X}}^{n+i}(U, N) = 0$ ($i \geq 1$). 满足命题 2.1.9 中(2)的条件(i). 对于 N 又存在 $\mathcal{X}$ -正合序列 $0 \rightarrow N' \rightarrow X \rightarrow N \rightarrow 0$, 其中 $X \in \mathcal{X}$. 同理, 其中 N' 也存在 $\mathcal{X}$ -正合序列:

$$0 \rightarrow N' \rightarrow Y'_0 \rightarrow Y'_1 \rightarrow \cdots \rightarrow Y'_{n-1} \rightarrow G' \rightarrow 0. \quad (2.39)$$

对(2.39)作用 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(U, -)$ 函子, 也有 $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^i(U, G') = \text{Ext}_{\mathcal{X}}^{n+i}(U, N') = 0$ ($i \geq 1$), 当 $i=1$ 时即有 $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^1(U, G') = 0$, 由此可得如下交换图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & X & \longrightarrow & N \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & Y'_0 & \longrightarrow & Y'_0 \oplus Y_0 & \longrightarrow & Y_0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & Y'_{n-1} & \longrightarrow & Y'_{n-1} \oplus Y_{n-1} & \longrightarrow & Y_{n-1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & G' & \longrightarrow & Q^1 & \longrightarrow & G \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

其中因为 $X \in \mathcal{U}$, 又 $\dim_{\mathcal{Y}}(U) \leq n$, 所以 $Q^1 \in \mathcal{Y}$, 对于 $\mathcal{X}$ -正合序列 $0 \rightarrow G' \rightarrow Q^1 \rightarrow G \rightarrow 0$, 由 $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^1(U, G') = 0$ 可知, 此序列是 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(U, -)$ -正合的. 取 $\mathcal{X}$ -正合序列 $0 \rightarrow N'' \rightarrow X_1 \rightarrow N' \rightarrow 0$, 其中 $X_1 \in \mathcal{X}$, 由定理 1.2.3 可知, $\mathcal{X}$ -正合序列也是 $\mathcal{Y}$ -余正合的. 于是重复上述步骤可得 $\mathcal{Y}$ -余正合又是 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(U, -)$ -正合的序列 $Q^3 \rightarrow Q^2 \rightarrow Q^1 \rightarrow \cdots \rightarrow G \rightarrow 0$, 其中 $Q_i \in \mathcal{Y}$. 满足命题 2.1.9 中(2)的条件(ii), 因此 $G \in \mathcal{U}_{\mathcal{Y}}\text{-GI}$. $\square$

第3章 弱 $\mathcal{X}$ -Gorenstein 投射对象与弱 $\mathcal{Y}$ -Gorenstein 内射对象

本章节对 $\mathcal{U}_x$ -Gorenstein 投射对象与 $\mathcal{U}_y$ -Gorenstein 内射对象进行推广,在平衡对和Gorenstein 对象的基础上定义弱 $\mathcal{X}$ -Gorenstein 投射对象与弱 $\mathcal{Y}$ -Gorenstein 内射对象,并研究证明弱 $\mathcal{X}$ -Gorenstein 投射对象与弱 $\mathcal{Y}$ -Gorenstein 内射对象的等价刻画.然后对弱 $\mathcal{X}$ -Gorenstein 投射对象与弱 $\mathcal{Y}$ -Gorenstein 内射对象的几个基本性质进行了证明.

3.1 弱 $\mathcal{X}$ -Gorenstein 投射对象的基本性质

定义 3.1.1 如果存在 $\mathcal{X}$ -正合序列

$$X^\bullet = \cdots \rightarrow X_{-2} \rightarrow X_{-1} \rightarrow X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow \cdots,$$

其中 $X_i \in \mathcal{X}$, 且 $M \cong \ker(X_0 \rightarrow X_1)$, 那么称 M 为弱 $\mathcal{X}$ -Gorenstein 投射对象. 用 $WGP(\mathcal{X})$ 表示所有弱 $\mathcal{X}$ -Gorenstein 投射对象.

注 3.1.2 (1) $\mathcal{X} \subseteq WGP(\mathcal{X})$ 且 $G(\mathcal{X}) \subseteq WGP(\mathcal{X})$.

(2) $X^\bullet$ 中所有的核和象都是弱 $\mathcal{X}$ -Gorenstein 投射对象.

命题 3.1.3 下列命题等价:

- (1) $M \in WGP(\mathcal{X})$;
- (2) 存在 $\mathcal{X}$ -正合序列 $0 \rightarrow M \rightarrow X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \cdots$, 其中 $X_i \in \mathcal{X}$;
- (3) 存在短 $\mathcal{X}$ -正合序列 $0 \rightarrow M \rightarrow X \rightarrow G \rightarrow 0$, 其中 $X \in \mathcal{X}$, $G \in WGP(\mathcal{X})$.

证明: (1) $\Rightarrow$ (2), (1) $\Rightarrow$ (3)是显然的. 下证(3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1).

(3) $\Rightarrow$ (2)由 $G \in WGP(\mathcal{X})$ 可知, 存在 $\mathcal{X}$ -正合序列 $0 \rightarrow G \rightarrow X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \cdots$, 其中 $X_i \in \mathcal{X}$, 于是容易得出存在 $\mathcal{X}$ -正合序列 $0 \rightarrow M \rightarrow X \rightarrow X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \cdots$.

(2) $\Rightarrow$ (1)对于任意对象 M 都存在 $\mathcal{X}$ -分解, 即 $\mathcal{X}$ -正合序列 $\cdots \rightarrow X_{-2} \rightarrow X_{-1} \rightarrow M \rightarrow 0$, 结合条件(2)易得 $M \in WGP(\mathcal{X})$. $\square$

定理 3.1.4 对于 $\mathcal{X}$ -正合序列 $0 \rightarrow G \rightarrow M \rightarrow X \rightarrow 0$, 若 $G \in WGP(\mathcal{X})$ 且 $X \in \mathcal{X}$, 那么 $M \in WGP(\mathcal{X})$.

证明: 由 $G \in WGP(\mathcal{X})$ 可知, 存在 $\mathcal{X}$ -正合序列 $0 \rightarrow G \rightarrow X' \rightarrow G' \rightarrow 0$, 其中

$X' \in \mathcal{X}$, $G' \in WGP(\mathcal{X})$. 于是有如下推出图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & M & \longrightarrow & X \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & X \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & G' & = & G' & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

容易得出推出图中的序列都是 $\mathcal{X}$ -正合的. 因为 $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^{i \geq 1}(X, -) = 0$, $\forall X \in \mathcal{X}$, 所以 $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^1(X, X') = 0$. 由此可知推出图中的 $\mathcal{X}$ -正合序列 $0 \rightarrow X' \rightarrow A \rightarrow X \rightarrow 0$ 是可裂的, 即 $A \cong X \oplus X'$, 于是 $A \in \mathcal{X}$. 根据命题 3.1.3, 由推出图中的 $\mathcal{X}$ -正合序列 $0 \rightarrow M \rightarrow A \rightarrow G' \rightarrow 0$ 可知 $M \in WGP(\mathcal{X})$. $\square$

命题 3.1.5 若对于任意对象 $N \in \mathcal{A}$, 都有 $\dim_{\mathcal{Y}}(N) = n$, 那么 $G(\mathcal{X}) = WGP(\mathcal{X})$.

证明: $G(\mathcal{X}) \subseteq WGP(\mathcal{X})$ 是显然的, 以下证明 $WGP(\mathcal{X}) \subseteq G(\mathcal{X})$. 设 $M \in WGP(\mathcal{X})$, 若要证 $M \in G(\mathcal{X})$, 则需证使得 $M \cong \ker(X_0 \rightarrow X_1)$ 的 $\mathcal{X}$ -正合序列

$$X^* = \cdots \rightarrow X_{-2} \rightarrow X_{-1} \rightarrow X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow \cdots$$

是 $\mathcal{X}$ -余正合的. 先证对于 $\forall N \in \mathcal{A}$ 且 $\dim_{\mathcal{Y}}(N) = n$, 都有 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X^*, N)$ 是正合的. 当 $n = 0$ 时, $N \in \mathcal{Y}$ 于是 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X^*, N)$ 一定是正合的. 当 $\dim_{\mathcal{Y}}(N) = n$ ($1 \leq n < \infty$), 存在 $\mathcal{X}$ -正合序列

$$0 \rightarrow N \rightarrow Y \rightarrow L \rightarrow 0, \quad (3.1)$$

其中 $Y \in \mathcal{Y}$, 且 $\dim(L) \leq n-1$. 对(3.1)作用 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X^*, -)$ 函子可得正合复形:

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X^*, N) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X^*, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X^*, L) \rightarrow 0. \quad (3.2)$$

由归纳假设法, 假设当 $n-1$ 时成立, 即对于 L , 有 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X^*, L)$ 是正合的. 又 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X^*, Y)$ 是正合的, 于是由[1, 第三章]可知 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X^*, N)$ 一定也是正合的. 于是对于 $\forall N \in \mathcal{A}$ 都有 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X^*, N)$ 是正合的, 因此由 $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}$ 可知, 对于 $\forall X \in \mathcal{X}$, $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X^*, X)$ 是正合的. $\square$

命题 3.1.6 若对于任意对象 $N \in \mathcal{A}$ ，其 $\dim_{\mathcal{X}}(N) = n$ ，那么 $\mathcal{X} = WGP(\mathcal{X})$.

证明： $\mathcal{X} \subseteq WGP(\mathcal{X})$ 是显然的，以下证明 $WGP(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X}$. 设 $M \in WGP(\mathcal{X})$ ，则存在 $\mathcal{X}$ -正合序列：

$$0 \rightarrow M \rightarrow X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \cdots,$$

其中 $X_i \in \mathcal{X}$ ，令 $L = \text{Im}(X_{n-1} \rightarrow X_n)$ ，于是有 $\mathcal{X}$ -正合序列

$$0 \rightarrow M \rightarrow X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \cdots \rightarrow X_{n-1} \rightarrow L \rightarrow 0.$$

又 $\dim_{\mathcal{X}}(L) = n$ ，由引理 2.4.11 可得 $M \in \mathcal{X}$. □

定理 3.1.7 对于 $\mathcal{X}$ -正合序列 $0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow G \rightarrow 0$ ，若 $M \in WGP(\mathcal{X})$ 且 $G \in \mathcal{U}_{\mathcal{X}}\text{-GP}$ ，那么 $N \in WGP(\mathcal{X})$.

证明： 根据弱 $\mathcal{X}$ -Gorenstein 投射对象的定义以及 $\mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ -Gorenstein 投射对象的定义可知存在 $\mathcal{X}$ -正合序列

$$0 \rightarrow M \rightarrow X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \cdots,$$

其中 $X_i \in \mathcal{X}$ ，也存在 $\mathcal{X}$ -正合且 $\mathcal{U}$ -余正合的序列

$$0 \rightarrow G \rightarrow X'_0 \rightarrow X'_1 \rightarrow \cdots,$$

考虑如下交换图

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\alpha} & N & \xrightarrow{\beta} & G \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f & & & & \downarrow g \\ 0 & \longrightarrow & X_0 & \longrightarrow & X_0 \oplus X'_0 & \longrightarrow & X'_0 \longrightarrow 0 \end{array}$$

由命题 2.11 可知 $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^1(G, X_0) = 0$ ，于是有如下正合序列

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(G, X_0) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(N, X_0) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, X_0) \rightarrow 0.$$

那么存在态射 $\gamma: N \rightarrow X_0$ 使得 $f = \gamma \circ \alpha$ ，定义态射 $h: N \rightarrow X_0 \oplus X'_0$ 为 $h(n) = (\gamma(n), g \circ \beta(n))$ ，其中 n 为 N 中任意对象. 容易验证态射 h 使得上图是交换的. 然后，利用蛇引理有如下 $\mathcal{X}$ -正合的交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\alpha} & N & \xrightarrow{\beta} & G \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow f & & \downarrow h & & \downarrow g \\
 0 & \longrightarrow & X_0 & \longrightarrow & X_0 \oplus X'_0 & \longrightarrow & X'_0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \text{coker}(f) & \longrightarrow & \text{coker}(h) & \longrightarrow & \text{coker}(g) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

因为 $\text{coker}(f) \in WGP(\mathcal{X})$, $\text{coker}(g) \in \mathcal{U}_{\mathcal{X}} - GP$, 所以重复上述步骤可得 $\mathcal{X}$ -正合序列 $0 \rightarrow N \rightarrow X_0 \oplus X'_0 \rightarrow X_1 \oplus X'_1 \rightarrow \cdots$, 其中 $X_i \oplus X'_i \in \mathcal{X} (i \geq 0)$. 满足命题 3.1.3, 因此 $N \in WGP(\mathcal{X})$. □

3.2 弱 $\mathcal{Y}$ -Gorenstein 内射对象的基本性质

定义 3.2.1 如果存在 $\mathcal{Y}$ -余正合序列

$$Y^\bullet = \cdots \rightarrow Y_{-2} \rightarrow Y_{-1} \rightarrow Y_0 \rightarrow Y_1 \rightarrow Y_2 \rightarrow \cdots,$$

其中 $Y_i \in \mathcal{Y}$, 且 $M \cong \ker(Y_0 \rightarrow Y_1)$, 那么称 M 为弱 $\mathcal{Y}$ -Gorenstein 内射对象. 用 $WGI(\mathcal{Y})$ 表示所有弱 $\mathcal{Y}$ -Gorenstein 内射对象组成的类.

注 3.2.2 (1) $\mathcal{Y} \subseteq WGI(\mathcal{Y})$ 且 $G(\mathcal{Y}) \subseteq WGI(\mathcal{Y})$.

(2) $Y^\bullet$ 中所有的核和象都是弱 $\mathcal{Y}$ -Gorenstein 内射对象.

命题 3.2.3 下列命题等价:

- (1) $M \in WGI(\mathcal{Y})$;
- (2) 存在 $\mathcal{X}$ -正合序列 $\cdots \rightarrow Y_1 \rightarrow Y_0 \rightarrow M \rightarrow 0$, 其中 $Y_i \in \mathcal{Y}$;
- (3) 存在短 $\mathcal{X}$ -正合序列 $0 \rightarrow G \rightarrow Y \rightarrow M \rightarrow 0$, 其中 $Y \in \mathcal{Y}$, $G \in WGI(\mathcal{Y})$.

证明: 与命题 3.1.3 对偶. □

定理 3.2.4 对于 $\mathcal{Y}$ -余正合序列 $0 \rightarrow Y \rightarrow M \rightarrow G \rightarrow 0$, 若 $G \in WGI(\mathcal{Y})$ 且 $Y \in \mathcal{Y}$, 那么 $M \in WGI(\mathcal{Y})$.

证明: 由 $G \in WGI(\mathcal{Y})$ 可知, 存在 $\mathcal{Y}$ -余正合序列 $0 \rightarrow G' \rightarrow Y' \rightarrow G \rightarrow 0$, 其中 $Y' \in \mathcal{Y}$, $G' \in WGI(\mathcal{Y})$. 于是有如下拉回图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & G' & = & G' & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & A & \longrightarrow & Y' \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & M & \longrightarrow & G \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

容易得出拉回图中的序列都是 $\mathcal{Y}$ -余正合的. 因为 $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^{i \geq 1}(-, Y) = 0$, $\forall Y \in \mathcal{Y}$, 所以 $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^1(Y', Y) = 0$. 由此可知拉回图中的 $\mathcal{X}$ -正合序列 $0 \rightarrow Y \rightarrow A \rightarrow Y' \rightarrow 0$ 是可裂的, 即 $A \cong Y \oplus Y'$, 于是 $A \in \mathcal{Y}$. 根据命题 3.2.3, 由拉回图中的 $\mathcal{Y}$ -余正合序列 $0 \rightarrow G \rightarrow A \rightarrow M \rightarrow 0$ 可知 $M \in WGI(\mathcal{Y})$. □

命题 3.2.5 若对于任意对象 $N \in \mathcal{A}$ ，都有 $\dim_{\mathcal{X}}(N) = n$ ，那么 $G(\mathcal{Y}) = WGI(\mathcal{Y})$.

证明: 与命题 3.1.5 对偶. □

命题 3.2.6 若对于任意对象 $N \in \mathcal{A}$ ，其 $\dim_{\mathcal{Y}}(N) = n$ ，那么 $\mathcal{Y} = WGI(\mathcal{Y})$.

证明: 与命题 3.1.6 对偶. □

定理 3.2.7 对于 $\mathcal{X}$ -正合序列 $0 \rightarrow G \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow 0$ ，若 $M \in WGI(\mathcal{Y})$ 且 $G \in \mathcal{U}_{\mathcal{Y}}-GI$ ，那么 $N \in WGI(\mathcal{Y})$.

证明: 根据弱 $\mathcal{Y}$ -Gorenstein 内射对象的定义以及 $\mathcal{U}_{\mathcal{Y}}$ -Gorenstein 内射对象的定义可知存在 $\mathcal{X}$ -正合序列 $\cdots \rightarrow Y_{-1} \rightarrow Y_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ ，其中 $Y_i \in \mathcal{Y}$ ，也存在 $\mathcal{Y}$ -余正合且 $\mathcal{U}$ -正合的序列 $\cdots \rightarrow Y'_{-1} \rightarrow Y'_0 \rightarrow G \rightarrow 0$ ，考虑如下交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & Y'_0 & \longrightarrow & Y'_0 \oplus Y_0 & \longrightarrow & Y_0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow f & & \downarrow & & \downarrow g \\
 0 & \longrightarrow & G & \xrightarrow{\alpha} & N & \xrightarrow{\beta} & M \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow \\
 & & 0 & & & & 0
 \end{array}$$

由命题 2.1.5 可知 $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^1(Y_0, G) = 0$ ，于是有如下正合序列

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Y_0, G) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Y_0, N) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Y_0, M) \rightarrow 0.$$

那么存在态射 $\gamma: Y_0 \rightarrow N$ 使得 $g = \alpha \circ \gamma$ ，定义态射 $h: Y'_0 \oplus Y_0 \rightarrow N$ 为 $h((y'_0, y_0)) = \alpha f(y'_0) + \gamma(y_0)$ ，其中 $y'_0 \in Y'_0$ ， $y_0 \in Y_0$ 。容易验证态射 h 使得上图是交换的。然后，利用蛇引理有如下 $\mathcal{Y}$ -余正合的交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \ker(f) & \longrightarrow & \ker(h) & \longrightarrow & \ker(g) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & Y'_0 & \longrightarrow & Y'_0 \oplus Y_0 & \longrightarrow & Y_0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow f & & \downarrow h & & \downarrow g \\
 0 & \longrightarrow & G & \xrightarrow{\alpha} & N & \xrightarrow{\beta} & M \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow f & & \downarrow h & & \downarrow g \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

因为 $\ker(f) \in WGI(\mathcal{Y})$ ， $\ker(g) \in \mathcal{U}_{\mathcal{Y}}-GI$ ，所以重复上述步骤可得 $\mathcal{X}$ -正合序列 $\cdots \rightarrow Y'_1 \oplus Y_1 \rightarrow Y'_0 \oplus Y_0 \rightarrow N \rightarrow 0$ ，其中 $Y'_i \oplus Y_i \in \mathcal{Y} (i \geq 0)$ 。满足命题 3.2.3，因此 $N \in WGI(\mathcal{Y})$. □

第4章 结论与展望

4.1 结论

在第二章对 $\mathcal{U}_x$ -Gorenstein 投射对象与 $\mathcal{U}_y$ -Gorenstein 内射对象做出定义后主要对以下做出证明并得出结论:

1. $\mathcal{U}_x$ -Gorenstein 投射对象与 $\mathcal{U}_y$ -Gorenstein 内射对象的等价刻画.
2. 所有 $\mathcal{U}_x$ -Gorenstein 投射对象组成的类是 $\mathcal{X}$ -可解, 所有 $\mathcal{U}_x$ -Gorenstein 内射对象组成的类是 $\mathcal{Y}$ -余可解.
3. 所有 $\mathcal{U}_x$ -Gorenstein 投射对象与 $\mathcal{U}_y$ -Gorenstein 内射对象都对于直和项封闭.
4. 对于任意的 $n \geq 1$, 都有 $[\mathcal{U}_x\text{-GP}]^n = \mathcal{U}_x\text{-GP}$ 与 $[\mathcal{U}_y\text{-GI}]^n = \mathcal{U}_y\text{-GI}$, 即 $\mathcal{U}_x$ -Gorenstein 投射对象与 $\mathcal{U}_y$ -Gorenstein 内射对象具有稳定性.
5. 在一定条件下对于任意的 $N \in \mathcal{A}$, 存在 $\mathcal{U}_x$ -GP-右逼近或 $\mathcal{U}_y$ -GI-左逼近.
6. $\mathcal{U}_x$ -Gorenstein 投射对象与 $\mathcal{U}_y$ -Gorenstein 内射对象维数有限的等价刻画.
7. $(\mathcal{U}_x\text{-GP}, \tilde{\mathcal{Y}})$ 是相对余挠对与 $\sup\{Gid_{\mathcal{U}_y}(N) | N \in \mathcal{A}\} \leq n$ 等价.
8. $\sup\{Gpd_{\mathcal{U}_x}(N) | N \in \mathcal{A}\} \leq n$ 且 $\sup\{Gid_{\mathcal{U}_y}(N) | N \in \mathcal{A}\} \leq n$ 等价于对于 $\forall U \in \mathcal{U}$, 都有 $\dim_x(U) \leq n$ 且 $\dim_y(U) \leq n$.

在第三章对 $\mathcal{U}_x$ -Gorenstein 投射对象与 $\mathcal{U}_y$ -Gorenstein 内射对象做推广定义了弱 $\mathcal{X}$ -Gorenstein 投射对象与弱 $\mathcal{Y}$ -Gorenstein 内射对象, 并得出以下结论:

1. 弱 $\mathcal{X}$ -Gorenstein 投射对象与弱 $\mathcal{Y}$ -Gorenstein 内射对象的等价刻画.
2. 在一定条件下 $G(\mathcal{X}) = WGP(\mathcal{X})$ 或 $G(\mathcal{Y}) = WGI(\mathcal{Y})$.
3. 在一定条件下 $\mathcal{X} = WGP(\mathcal{X})$ 或 $\mathcal{Y} = WGI(\mathcal{Y})$.
4. 对于 $\mathcal{X}$ -正合序列 $0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow G \rightarrow 0$, 若 $M \in WGP(\mathcal{X})$ 且 $G \in \mathcal{U}_x\text{-GP}$, 那么 $N \in WGP(\mathcal{X})$.
5. 对于 $\mathcal{X}$ -正合序列 $0 \rightarrow G \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow 0$, 若 $M \in WGI(\mathcal{Y})$ 且 $G \in \mathcal{U}_y\text{-GI}$, 那么 $N \in WGI(\mathcal{Y})$.

4.2 展望

文章中将相对同调函子作用在序列上来研究 $\mathcal{U}_x$ -Gorenstein 投射对象与 $\mathcal{U}_y$ -Gorenstein 内射对象的性质定理, 若把序列推广到复形序列上, 将相对同调函子作用在复形序列上, 会得到更加深入的同调性质.

Gorenstein 投射对象的研究与其他众多理论之间都存在着较为紧密的联系, 在文章第二章回顾了余挠对的定义并研究证明了一个 $\mathcal{U}_x$ -Gorenstein 对象与余挠对的关系, 若在 Gorenstein 对象中引入由平衡对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 中 $\mathcal{X}$ -分解与 $\mathcal{Y}$ -分解得到的相对同调函子定义的余挠对, 得到阿贝尔范畴里的新对象, 也是对本文 $\mathcal{U}_x$ -Gorenstein 投射对象与 $\mathcal{U}_y$ -Gorenstein 内射对象的推广.

参考文献

- [1] 佟文廷. 同调代数引论[M]. 高等教育出版社, 1998.
- [2] Enochs E E, Jenda O M G. Gorenstein injective and projective modules[J]. Mathematische Zeitschrift, 1995, 220: 611-633.
- [3] Beligiannis A. The homological theory of contravariantly finite subcategories: Auslander-Buchweitz contexts, Gorenstein categories and (co-) stabilization[J]. Communications in Algebra, 2000, 28(10): 4547-4596.
- [4] Becerril V, Mendoza O, Santiago V. Relative Gorenstein objects in abelian categories[J]. Communications in Algebra, 2020, 49(1): 352-402.
- [5] Cheng H, Zhu X. Gorenstein projective objects in abelian categories[J]. Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 2013, 39(6): 1079-1097.
- [6] Asadollahi J, Salarian S. Gorenstein injective and Gorenstein flat resolution of modules over Gorenstein rings[J]. Communications in Algebra, 2004, 32(11): 4415-4432.
- [7] Enochs E E, Garcí Rozas J R. Gorenstein injective and projective complexes[J]. Communications in Algebra, 1998, 26(5): 1657-1674.
- [8] Gao Z, Xu L. Gorenstein coresolving categories[J]. Communications in Algebra, 2017, 45(10): 4477-4491.
- [9] Geng Y, Ding N Q. W-Gorenstein modules[J]. Journal of Algebra, 2011, 325(1): 132-146.
- [10] Liu H Y, Zhu R M, Geng Y X. Gorenstein global dimensions relative to balanced pairs[J]. Electronic Research Archive, 2020, 28(4): 1563-1571.
- [11] Hochschild G. Relative homological algebra[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1956, 82(1): 246-269.
- [12] Huang Z Y. Proper resolutions and Gorenstein categories[J]. Journal of Algebra, 2013, 393: 142-169.
- [13] Mahdou N, Tamekkante M. Strongly Gorenstein flat modules and dimensions[J]. Chinese Annals of Mathematics, Series B, 2011, 32: 533-548.
- [14] Pan Q, Cai F. (X, Y) -Gorenstein projective and injective modules[J]. Turkish Journal of Mathematics, 2015, 39(1): 81-90.
- [15] Zhang P. Gorenstein star modules and Gorenstein tilting modules[J]. Czechoslovak Mathematical Journal, 2021, 71(2): 403-416.
- [16] Becerril V, Mendoza O, Santiago V. Relative Gorenstein objects in abelian

- categories[J]. *Communications in Algebra*, 2020, 49(1): 352-402.
- [17] Bennis D, Ouarghi K. X-Gorenstein Projective Modules[J]. *International Mathematical Forum*, 2010, 5(10): 487-491.
- [18] Gao Z. Homological properties relative to injectively resolving subcategories. *Canadian Mathematical Bulletin*. 2015, 58(4): 741-56.
- [19] Geng Y, Ding N. W-Gorenstein modules[J]. *Journal of Algebra*, 2011, 325(1): 132-146.
- [20] Yang X, Liu Z. Gorenstein projective, injective, and flat complexes[J]. *Communications in Algebra*, 2011, 39(5): 1705-1721.
- [21] Tang X. On F-Gorenstein dimensions[J]. *Journal of Algebra & Its Applications*, 2014, 13(6): 1450022.
- [22] Chen X W. Homotopy equivalences induced by balanced pairs[J]. *Journal of Algebra*, 2010, 324(10): 2718-2731.
- [23] Zhang P Y, Liu D J, Wei J Q. Balanced pairs and Relative tilting modules. arXiv: 2205.09264.
- [24] Bazzoni S. A characterization of n-cotilting and n-tilting modules[J]. *Journal of Algebra*, 2004, 273: 359–372.
- [25] Zheng Y F. Balanced pairs induce recollements[J]. *Taylor & Francis*, 2017, 45(10): 4238–4245.
- [26] Li H H, Wang J F, Huang Z Y. Applications of balanced pairs[J]. *Science China Mathematics*, 2016, 59(5): 861-874.
- [27] Auslander M, Smalø S O. Preprojective modules over Artin algebras[J]. *Journal of algebra*, 1980, 66(1): 61-122.
- [28] Ausander M, Reiten I. Applications of contravariantly finite subcategories[J]. *Advances in Mathematics*, 1991, 86(1): 111-152.
- [29] Holm H. Gorenstein homological dimensions[J]. *Journal of pure and applied algebra*, 2004, 189(1-3): 167-193.
- [30] Bennis D, García Rozas J R, Oyonarte L. Relative Gorenstein dimensions. *Mediterranean Journal of Mathematics*. 2016, 13: 65-91.
- [31] Bennis D, Mahdou N. Global Gorenstein dimensions[J]. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2010, 138(2): 461-465.
- [32] Sather-Wagstaff S, Sharif T, White D. Stability of Gorenstein categories[J]. *Journal of the London Mathematical Society*, 2008, 77(2): 481-502.
- [33] Gao Z. Weak Gorenstein projective, injective and flat modules[J]. *Journal of*

Algebra and Its Applications, 2013, 12(02): 1250165.

[34] Enochs E E, Jenda O M G. Relative homological algebra: Volume 1[M]. Walter de Gruyter, 2011.

攻读硕士期间取得的学术成果

[1] 舒倩倩, 刘大俊, 汪力. 平衡对与 Gorenstein 投射对象[J]. 佳木斯大学学报(自然科学版) (已录用)

致谢

始于 2021 年金秋，终于 2024 年盛夏，是结束，也是开始。

之前总觉得来日方长，没想到毕业时刻已经如期到来。这三年的研究生生活让我看到更为广阔的世界，接触到更多优秀的人，这一切我都倍感珍惜。借此对所有陪伴我、帮助我的人致以诚挚的感谢！

首先我要感谢我的导师。感谢导师耐心的敦促指导我学习专业的理论知识，让我在学习的道路中踏踏实实，一步一个脚印。感谢导师仔细严谨的指导我的毕业论文，让我不断打磨自己，形成刻苦钻研、不轻易放弃的精神。在导师的影响下，我的见识更广阔，在之后的道路上，我面对不同事物时将会更加从容。

然后我要感谢我的家人。感谢他们在任何环境下，都无条件的支持我。父母给我的不多不少，却足够让我在这个社会生活，让我有权利去做选择，让我有追求自己理想的条件和空间。

最后感谢研究生三年里的同学和朋友。感谢她们的关心与陪伴，感谢在我脆弱失意时给我安慰和包容，让我拥有前进的勇气和力量。希望我们未来都会在各自领域闪闪发光，前程似锦。

在之后道路上，依然会遇到不同的挑战和困难，但是再颠簸的生活也要闪亮的过，以强大的生命力不断突破自己，管理好自己的工作和生活。