

分类号: O212.7

单位代码: 10363

密 级: 公开

学 号: 2211020128

题 目 混合条件下具有固定效应的面板数据半
参数模型的统计推断研究

题 目 Statistical inference of panel data semi-
parametric model with fixed effects under
mixed conditions

学 生 姓 名 : 姚钰琦

指 导 教 师 : 何帮强 副教授

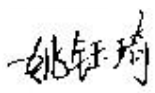
专 业 : 数学

研 究 方 向 : 面板数据模型

论文答辩日期: 2024 年 5 月 29 日

安徽工程大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：我恪守学术道德，崇尚严谨学风。所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已明确注明和引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品及成果的内容。论文为本人亲自撰写，我对所写的内容负责，并完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

学位论文作者签名：

日期：2024 年 6 月 2 日

安徽工程大学学位论文版权使用授权书

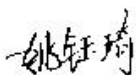
学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅或借阅。本人授权安徽工程大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保密 ☐，在 年解密后适用本版权书。

本学位论文属于

不保密 ☒。

学位论文作者签名：



指导教师签名：



日期：2024 年 6 月 2 日

日期：2024 年 6 月 2 日

混合条件下具有固定效应的面板数据半参数模型的统计推断研究

摘要

面板数据是一组个体在不同时期的观测数据，具有横截面信息和时间序列信息。面板数据模型同时考虑了个体间的差异和时间之间的变化，已成为计量经济学研究的一个重要分支，而半参数面板数据模型正是目前面板数据研究的热点。半参数面板数据模型既含有参数部分又有非参数部分，一方面克服了非参数方法所存在的“维数祸根”问题，另一方面又解决了单纯的参数模型“限制性强”的问题，增强了其适应性。在实际应用中，统计模型样本误差独立的情形并不多见，为了解决该问题，本文研究了随机误差项为混合条件的情形，使得半参数面板数据模型更适应实际要求。本文将运用经验似然方法来研究有测量误差的可加模型和有删失数据的半参数面板数据模型的统计推断。

本文首先介绍了混合条件下具有固定效应的面板数据半参数模型的研究背景与意义，并对文章研究内容进行简要概括。同时，对面板数据模型、半参数模型、混合条件、测量误差数据和删失数据等主要涉及内容的基本概念和发展情况进行了介绍。

其次，考虑了在协变量存在测量误差的条件下，如何对带固定效应部分线性可加面板数据模型进行推断的问题。用反拟合估计来处理可加模型带来的估计偏差，并运用“衰减校正”来解决测量误差引起的不一致问题，同时通过虚拟变量方法来消除固定效应的影响，构造协变量含测量误差情况下未知参数的修正经验对数似然比统计量。在合适的正则条件下，证明其服从卡方分布。通过数值模拟和空气污染对健康情况影响的实证分析，验证方法的估计效果。

最后,考虑了将数据设置为删失数据,并且假设随机误差为混合条件时,如何对带固定效应部分线性面板数据模型进行推断的问题。用 Kaplan-Meier 估计来处理删失数据带来的估计偏差,分别用“衰减校正”和虚拟变量方法来消除测量误差和未知固定效应对模型参数估计的影响,构造了协变量含测量误差情况下未知参数的修正经验对数似然比统计量。在合适的正则条件下,证明了其服从卡方分布。通过数值模拟和主要省份城市空气质量的实证分析来验证方法的估计效果。

关键词: 部分线性模型, 经验似然, 面板数据, 固定效应, 可加模型, 删失数据

Statistical inference of panel data semi-parametric model with fixed effects under mixed conditions

ABSTRACT

Panel data is the observation data of a group of individuals in different periods, with cross-sectional information and time series information. The panel data model takes into account the differences between individuals and the changes between time, which has become an important branch of econometric research, and the semi-parametric panel data model is the hot spot of panel data research. The semi-parametric panel data model contains both parametric and non-parametric parts. On the one hand, it overcomes the 'curse of dimensionality' problem existing in the non-parametric method. On the other hand, it solves the problem of 'strong restriction' of the simple parametric model and enhances its adaptability. In practical applications, it is rare to see that the sample error of the statistical model is independent. In order to solve this problem, this paper studies the case where the random error term is a mixed condition, which makes the semi-parametric panel data model more suitable for the actual requirements. This paper will use the empirical likelihood method to study the statistical inference of the additive model with measurement errors and the semi-parametric panel data model with censored data.

This paper first introduces the research background and significance of the semi-parametric model of panel data with fixed effects under mixed conditions, and briefly summarizes the research content of the article. At the same time, the basic concepts and development of panel data model, semi-parametric model, mixed conditions, measurement error data and censored data are introduced.

Secondly, we consider the problem of how to infer the partially linear additive panel data model with fixed effects under the condition that the covariates have measurement errors. The inverse fitting estimation is used to deal with the estimation deviation caused by the additive model, and the 'attenuation correction' is used to solve the inconsistency problem caused by the measurement error. At the same time, the influence of the fixed effect is eliminated by the dummy variable method, and the modified empirical log-likelihood ratio statistic of the unknown parameters under the condition that the covariate contains the measurement error is constructed. Under appropriate regularity conditions, it is proved that it obeys the chi-square distribution. The estimation effect of the method is verified by numerical simulation and empirical analysis of the impact of air pollution on health.

Finally, we consider the problem of how to infer the partial linear panel data model with fixed effects when the data is set to censored data and the random error is assumed to be a mixed condition. Kaplan-Meier

estimation is used to deal with the estimation bias caused by censored data. Attenuation correction and dummy variable methods are used to eliminate the influence of measurement error and unknown fixed effect on model parameter estimation. The modified empirical log-likelihood ratio statistics of unknown parameters with measurement error are constructed. Under suitable regularity conditions, it is proved that it obeys chi-square distribution. The estimation effect of the method is verified by numerical simulation and empirical analysis of urban air quality in major provinces.

KEY WORDS: Partial linear model, empirical likelihood, panel data, fixed effect, additive model censored data

目录

第 1 章 绪论	1
1.1 研究背景及意义	1
1.2 主要研究内容与论文结构	1
第 2 章 模型介绍及相关知识	3
2.1 面板数据模型	3
2.2 半参数模型	3
2.2.1 部分线性模型	4
2.2.2 部分线性可加模型	4
2.3 混合条件	5
2.4 测量误差数据和删失数据	6
2.4.1 测量误差数据	6
2.4.2 删失数据	6
第 3 章 带固定效应部分线性可加 EV 面板数据模型的经验似然	8
3.1 修正的经验似然法	8
3.2 部分线性可加 EV 面板数据模型的模拟研究	11
3.3 关于空气污染对健康情况影响的实证分析	12
3.4 主要结果的证明	13
3.5 本章小结	19
第 4 章 删失数据下带固定效应部分线性面板数据模型的经验似然	21
4.1 修正的经验似然法	21
4.2 混合条件下部分线性面板数据模型的模拟研究	27
4.3 关于主要省份城市空气质量的实证分析	26
4.4 主要结果的证明	27
4.5 本章小结	33
第 5 章 总结与展望	35

5.1 总结	35
5.2 展望	35
参考文献	36
攻读硕士期间取得的学术成果	42
致 谢	43

第 1 章 绪论

1.1 课题研究背景及意义

近些年来,与面板数据相关的统计模型研究已成为当前的热点之一,其研究成果也应用到了工程、医药和金融等各个领域。有关面板数据统计模型的研究,不仅包括对面板数据模型的参数估计研究,还包括面板数据非参数和半参数模型的研究。而在分析半参数面板数据模型时,典型的分析方法包括固定效应模型,随机效应模型和混合效应模型,其中固定效应模型作为一种面板数据分析方法,比较简单实用。

随着现代社会的快速发展,人们对已有数据进行处理,进而对未来的发展趋势进行预测分析的需求只会越来越多,基于此而诞生的参数回归模型成为人们研究自然科学以及社会经济等发展规律的热点,并且随着对参数回归模型的不断探索研究,与其相关的理论体系也逐渐完善丰富。然而,参数模型在实际生活的运用过程中,太过依赖于大量已知的历史信息,只有在模型假设条件与实际生活相符时,模型的拟合效果才会较为理想,否则,模型的推断就会出现较大的精度偏差。这时如果将模型转为非参数模型的话,则会丢失已有历史数据所提供的信息,并且还会发生“维数祸乱”等相关问题。在二十世纪八十年代,人们研究出的半参数回归模型对上述问题有着很好的解决效果,此模型运用范围更加广泛,并且同时有着参数模型与非参数模型的优点,使得其对未来预测的解释能力更强,对未来的预测结果更为精准。

1.2 研究内容和主要结果

本文研究的是带固定效应半参数面板数据模型的经验似然,首先通过模型对应的方法得到相应的估计量,然后运用“衰减校正”来解决测量误差引起的不一致问题,同时通过虚拟变量方法来消除固定效应的影响,最后构造协变量含测量误差情况下未知参数的修正经验对数似然比统计量。此外,还根据适当的假设条件,对模型进行数值模拟,并且结合相关实际数据来检验估计方法的效果。

具体内容如下:

1、在模型带固定效应的前提下，研究了带测量误差的部分线性可加半参数面板数据模型的经验似然，首先用反拟合估计来处理可加模型带来的估计偏差，然后运用“衰减校正”来解决测量误差引起的不一致问题，同时通过虚拟变量方法来消除固定效应的影响，最后构造协变量含测量误差情况下未知参数的修正经验对数似然比统计量。此章主要说明带测量误差的部分线性可加半参数面板数据模型的经验似然的性质。

2、在前一章的基础上，本文将误差项假设是在混合条件下，并且将数据设置为删失数据，同时模型从带测量误差的部分线性可加半参数面板数据模型转变为部分线性半参数面板数据模型，研究过程中本文首先用 Kaplan-Meier 估计来处理删失数据带来的估计偏差，然后分别运用“衰减校正”和虚拟变量方法来消除测量误差和未知固定效应对模型参数估计的影响，构造了协变量含测量误差情况下未知参数的修正经验对数似然比统计量。在合适的正则条件下，证明了其服从卡方分布。最后，通过数值模拟和主要省份城市空气质量的实证分析来验证方法的估计效果。

第 2 章 模型介绍及相关知识

2.1 面板数据模型

带固定效应的线性面板数据模型可以表示为：

$$Y_{it} = X_{it}^T \beta + \mu_i + \varepsilon_{it}, \quad i = 1, \dots, n, \quad t = 1, \dots, T, \quad (2.1)$$

其中 Y_{it} 是响应变量, X_{it} 是协变量。 $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p)^T$ 是 p -维未知参数的向量, ε_{it} 表示均值为 0, 方差为 σ^2 的随机误差项, $\mu = (\mu_1^T, \mu_2^T, \dots, \mu_n^T)^T$ 表示个体间的固定效应。上标 τ 表示向量或矩阵的转置。

面板数据是一组个体在不同时期的观测数据, 具有横截面信息和时间序列信息。面板数据有诸多优势, 如面板数据模型不仅包含着更多的信息, 而且还能反应个体间的差异和时间之间的变化, 提高模型估计的有效性。因此, 许多学者对面板数据进行深入研究, 并获得丰硕的研究成果。例如, Li 等^[1]研究了部分线性面板数据模型的半参数估计。带固定效应的半参数面板数据模型是经济统计研究的热点。Henderson 等^[2]给出了带固定效应面板数据模型的非参数估计和检验。魏传华等^[3]研究了带固定效应非参数面板数据模型统计推断。Dai^[4]等考虑了带有固定效应面板数据模型, 提出局部加权删失分位数回归方法。Baltagi 等^[5]考虑了带有固定效应的部分线性面板数据模型, 利用了序列估计方法估计参数。Ullah 等^[6]提出了带有固定效应的部分线性面板模型的剖面似然估计。Zhang 等^[7]考虑了带有固定效应面板数据部分线性模型的经验似然推断。He 等^[8]研究了带固定效应的半参数面板数据的块经验似然。Hong 等^[9]提出两步剖面 GMM 估计方法, 研究了回归变量与异质性误差项相关下面板数据模型的估计推断。Liu 等^[10]开发了一个两阶段的基于条件期望似然的估计程序, 克服了面板数据模型中非参数成分和参数回归系数混合所带来的问题。

从已有的文献来看, 面板数据依旧是研究热点之一。目前对于面板数据模型的研究较多, 实际应用也较为广泛。

2.2 半参数模型

在实际应用的过程中,统计学家根据各领域的特点已经提出了许多不同的半参模型,比如部分线性模型、单指标部分线性模型、部分线性可加模型等。本文从其中挑选两类重要的半参模型进行研究,他们分别是部分线性模型和部分线性可加模型。

2.2.1 部分线性模型

部分线性模型可以表示为以下形式

$$Y = X^T \beta + m(Z) + \varepsilon, \quad (2.2)$$

其中 Y 是响应变量, $(X, Z) \in R^p \times R$ 是严格外生变量, $m(\cdot)$ 是未知的光滑函数, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p)^T$ 是 p -维未知的参数向量, $m(Z) = (m_1(Z), \dots, m_q(Z))^T$ 是 q -维未知的非参数向量, ε 是给定 X 和 Z 条件下均值为 0, 方差为 σ^2 的随机误差。显然, 模型(2.2)结合了参数模型和非参数模型的特点从而使得模型具有更大的灵活性。

出于模型的优点,许多研究者在不同的条件下研究了部分线性模型估计量的大样本性质。例如 Eagle 等^[11], Robinson^[12], Heckman^[13], Rice^[14], Green 等^[15] 以及 Eubank 等^[16]。其中值得提到的是 Robinson^[12]在构造了参数分量的同时,通过 Nadaraya-Watson 核方法估计了非参数分量,并且在特定条件下,研究了参数分量和非参数分量两种估计量的收敛速度。Gao 等^[17]证明了最小二乘估计方法对于参数分量的渐近正态性。Hamilton 等^[18]在构造参数分量和非参数分量估计量时,用到局部线性回归方法,并且在正则条件下证明了估计量的渐近正态性。

不少研究者将经验似然方法应用于部分线性模型。Wang 等^[19]和 Shi 等^[20]两组研究者分别对部分线性模型的经验似然方法推断进行了研究。Wang 等^[21]在前者的基础上,加入了带有右删失的情形,构造了修正的经验似然统计量,并给出了统计量的渐近性质。Xue 等^[22,23]考虑了纵向数据下部分线性模型,并且构造了未知参数的置信区间。Liang 等^[24]和 Yang 等^[25]考虑了协变量存在缺失情形下的经验似然推断问题。Lu^[26]讨论了部分线性模型中异方差的经验似然问题。Cain 等^[27,28]和 Xue 等^[29]两组研究者考虑了部分线性模型在缺失响应数据情形下的的经验似然。Zhang^[30]考虑了面板数据情形下的经验似然。

2.2.2 部分线可加性模型

半参数部分线性可加模型在部分线性模型的基础上融入了可加模型,使得模型更加灵活性,具体表示为如下的形式:

$$Y = X^T \beta + \sum_{d=1}^D m_d(Z_d) + \varepsilon, \quad (2.3)$$

其中 Y 是响应变量, X 和 $Z = (Z_1, \dots, Z_D)^T$ 都是协变量, $m_1(\cdot), \dots, m_D(\cdot)$ 是未知光滑函数, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p)^T$ 是 p -维未知的参数向量, ε 是在给定 X 和 Z 下均值为 0, 方差为 σ^2 的随机误差。当 $D=1$ 时, 模型(2.3)变成了部分线性模型, 该模型已经被广泛运用。

由于半参数部分线性可加模型中相比部分线性模型有更多的非参项, 因此对其进行研究要更加困难。在二十世纪 80 年代, Brciman 等^[31]和 Buja 等^[32]两组研究者提出了后拟方法, 这个方法可用于近似计算可加模型的非参数部分, 解决了对非参部分的估计难题。Li 等^[33]利用一般级数方法去估计部分线性可加模型的参数, 并证明了在正则条件下其参数估计能够达到有效界。Fan 等^[34]研究了核方法对部分线性可加模型的参数估计, 并得出了有限维参数一个简单的识别条件。Gao 等^[35]研究了协变量为高维情况下的部分线性可加模型, 提出了两个有效的分布式估计量。Adam 等^[36]研究了带丢包数据的部分线性可加模型, 提出了一个加权分位数回归估计量。Chen 等^[37]研究了广义部分线性可加模型选择的不确定性问题, 开发了一个可行的模型平均过程。Zhang 等^[38]提出了扰动过程的高阶空间自回归参数的筛分两阶段最小二乘回归和广义矩估计方法, 得出了有限维参数估计量。

2.3 混合条件

Rosenblatt^[39]于 1956 年引入了 α -混合的概念。混合相依是指多个随机变量之间的相依关系随着时间或空间的距离的增加而逐渐衰退, 即当随机变量的指标差逐渐趋于无穷时, 随机变量之间是渐近独立的。Lin 等^[40], Herrndorf^[41]和 Philipp^[42]等人都对此有过描述。

设 $\{\chi_i, i \geq 1\}$ 是定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的随机变量序列, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 是 $\mathcal{F}$ 的两个子 σ -代数, $L_p(\mathcal{A})$ 表示 p 阶矩有限且所有 $\mathcal{A}$ 可测的随机变量的全体。定义

$$\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sup_{A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}} |P(AB) - P(A)P(B)|,$$

对 $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$ ，定义 σ -代数

$$\mathcal{F}_a^b = \sigma(\chi_i, a \leq i \leq b, i \in \mathbb{N}),$$

其中 $\mathbb{N}$ 表示自然数集。对 $\sigma > 1$ ，定义 α -混合系数为

$$\alpha(n) = \sup_{k \in \mathbb{Z}} \alpha(\mathcal{F}_{-\infty}^k, \mathcal{F}_{k+n}^{+\infty}),$$

如果满足 $\alpha(n) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ ，则称随机序列 $\{\chi_i, i \geq 1\}$ 是 α -混合或强混合。

2.4 测量误差数据和删失数据

2.4.1 测量误差数据

众所周知，在医学、金融学 and 经济学等研究领域，对变量进行观测可以直接得到精确值的情况少之又少，这些测量数据经常含有误差。基于此，不少文献将其他统计模型与测量误差(errors-in-variables, EV)模型相结合，对其进行了深入研究与推广。例如，Liu^[43]将纵向数据部分线性模型与 EV 模型相结合，运用核平滑估计和加权最小二乘构造了模型中参数部分的估计量，证明了其渐近正态性。赵明涛等^[44]在纵向数据部分线性变系数 EV 模型下，运用二次推断函数方法研究了参数和非参数分量的估计，并证明了估计量的渐进正态性。李晓妍^[45]研究了部分线性 EV 模型的经验似然推断。Yan 等^[46]研究了纵向数据下部分线性变量误差模型的经验似然推断问题。在正则条件下，证明了在真参数处的经验对数似然比收敛于标准卡方分布。

2.4.2 删失数据

在现代统计实践研究中，特别是金融经济、人口研究、生物医药和临床试验等领域，研究者往往会因为某些条件限制或其它因素影响而未观察到感兴趣的事件发生，被迫停止观察后得到的数据，便是删失数据。例如，在试验研究中，一些被研究的对象可能在研究未结束之前就已经死亡、中途退出或者突然失踪，对于这种情况，只有部分个体的存活时间能准确收集，而其余个体只知道特定时间段的存活时间，之后无法观测到的数据就是删失数据。直接使用这些数据会影响数据分析和建模的可靠性，并且模型参数估计量的渐近方差可能非常复杂。

1988 年 Owen^[47]提出了一种称为经验似然的非参数统计推断方法,这一方法具有无需构造枢轴统计量的优点。将经验似然方法应用其中,则不需要估计方差,使得统计推断更加简捷。鲁小凡等^[48]在协变量出现右删失的情况下,采用逆概率加权方法对协变量的删失进行处理,构建了回归系数和非参数函数的估计,证明了其渐近性质。Hadi^[49]等对删失半参数回归模型提出了一族稳健的岭估计。杨晓蓉^[50]等研究了部分线性可加模型在其响应变量存在删失数据时的系数和非参数函数估计。侯文^[51]研究了删失数据下若干半参数模型的经验似然。Liu^[52]考虑了在响应变量随机删失情形下的部分线性 EV 模型。同时,将经验似然方法推广到带删失数据的 EV 模型,证明了其参数部分的渐近正态性。

第3章 带固定效应部分线性可加EV面板数据模型的经验似然

本章考虑具有固定效应的部分线性可加面板数据模型。首先，第1节采用反拟合估计来处理可加模型带来的估计偏差。在此基础上，运用“衰减校正”的方法来解决测量误差引起的不一致问题。然后，通过虚拟变量方法来消除固定效应的影响。最后，构造协变量含测量误差情况下未知参数的修正经验对数似然比统计量。在合适的正则条件下，证明其服从卡方分布。本章第2节和第3节通过数值模拟和实证分析验证了以上方法的效果。第4节提供了本章主要结果的证明。

3.1 修正的经验似然法

为研究方便，本章只考虑模型(2.3)中 $q=2$ 的情况。过程相关的渐近结果可以很容易地推广到 $q>2$ 的情况。同时，本章为了保证非参数函数的可辨识性，假设 $E(m_1(\cdot))=E(m_2(\cdot))=0$ ，加性函数分别可以简化为 $M_1=\{m_1(Z_{i1}),\dots,m_1(Z_{iT1})\}^T$ 和 $M_2=\{m_2(Z_{i2}),\dots,m_2(Z_{iT2})\}^T$ 。为模型添加相应的限制 $\sum_{i=2}^n \mu_i=0$ ，则将可以模型简化表示为(3.1)式

$$\begin{cases} Y = X^T \beta + M_1 + M_2 + D\mu + \varepsilon, \\ U = X + v, \end{cases} \quad (3.1)$$

其中，响应变量为 $Y=(Y_1^T, Y_2^T, \dots, Y_n^T)^T$ ， $Y_i=(Y_{i1}, \dots, Y_{iT})^T$ 。 $X=(X_1^T, X_2^T, \dots, X_n^T)^T$ ， $X_i=(X_{i1}, \dots, X_{iT})^T$ 为协变量。 $\mu=(\mu_2^T, \mu_3^T, \dots, \mu_n^T)^T$ 表示个体间的固定效应。随机误差变量为 $\varepsilon=(\varepsilon_1^T, \varepsilon_2^T, \dots, \varepsilon_n^T)^T$ ， $\varepsilon_i=(\varepsilon_{i1}, \dots, \varepsilon_{iT})^T$ 。存在测量误差变量可表示为 $U=(U_1^T, U_2^T, \dots, U_n^T)^T$ ， $U_i=(U_{i1}, \dots, U_{iT})^T$ ， $v=(v_1^T, v_2^T, \dots, v_n^T)^T$ ， $v_i=(v_{i1}, \dots, v_{iT})^T$ ， $D=[I_n \otimes i_t]d_n$ ， $d_n=[-i_{n-1} \quad I_{n-1}]^T$ 。 $\otimes$ 表示 Kronecker 积， i_t 表示 $T \times 1$ 元素全为 1 的向量，并且 I_n 表示 $n \times n$ 单位矩阵。

经过上述假设后，部分线性加性模型(2.3)变成了二元加性模型(3.1)，Ai^[53]

等对加性模型进行过研究。现在，为了构造 β 的经验对数似然比，本章首先引入与 β 相对应的估计方程，将应用基于局部线性技术的反拟合过程来估计模型(3.1)中的非参数函数 M_1 和 M_2 。令 S_{1,Z_1} 和 S_{2,Z_2} 分别表示局部线性回归在 Z_1 和 Z_2 处的等价核，即

$$S_{1,Z_1} = e_1^T [(Z_1)^T W_1(u) Z_1]^{-1} (Z_1)^T W_1(u), \quad S_{2,Z_2} = e_1^T [(Z_2)^T W_2(u) Z_2]^{-1} (Z_2)^T W_2(u),$$

其中 $e_1^T = (1, 0)$ ， $Z_{i1} = (Z_{111}, \dots, Z_{iT1})^T$ ， $Z_1 = (Z_{11}^T, Z_{21}^T, \dots, Z_{i1}^T)^T$ ， $Z_{i2} = (Z_{112}, \dots, Z_{iT2})^T$ ， $Z_2 = (Z_{12}^T, Z_{22}^T, \dots, Z_{n2}^T)^T$ ， $K_{h_c}(\cdot) = K(\cdot / h_c)$ ， $W_1 = \text{diag}\{K_{h_1}(Z_{11} - z_1), \dots, K_{h_1}(Z_{n1} - z_1)\}$ ， $W_2 = \text{diag}\{K_{h_2}(Z_{11} - z_2), \dots, K_{h_2}(Z_{n2} - z_2)\}$ ， $c = 1, 2$ ， $K_h(\cdot)$ 是一个核函数并且 h_1 ， h_2 是带宽，

$$Z_1 = \begin{pmatrix} 1 & Z_{11} - z_1 \\ 1 & Z_{21} - z_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & Z_{n1} - z_1 \end{pmatrix}, \quad Z_2 = \begin{pmatrix} 1 & Z_{12} - z_2 \\ 1 & Z_{22} - z_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & Z_{n2} - z_2 \end{pmatrix}.$$

设 S_1 和 S_2 分别表示观测值 Z_1 和 Z_2 处所在行的等价核光滑矩阵，即

$$S_1 = \begin{pmatrix} S_{1,Z_{11}} \\ \vdots \\ S_{1,Z_{n1}} \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} S_{2,Z_{12}} \\ \vdots \\ S_{2,Z_{n2}} \end{pmatrix}.$$

则 $S_1^c = (I - 11^T / n) S_1$ 为 S_1 对应的中心光滑矩阵，并且 S_2^c 与之类似，其中表达式中的 1^T 分别表示长度为 n 的单位向量，将加性部分线性模型的反拟合算法定义为以下方程的解。通过求解估计方程组，可以估计未知的非参数函数

$$\begin{bmatrix} I & S_1^c \\ S_2^c & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1^c \\ S_2^c \end{bmatrix} (Y - X\beta - D\mu). \quad (3.2)$$

根据 Hastie 等^[54]的结论，可以得到 M_1 和 M_2 的反拟合估计量为

$$\hat{M}_1 = Q_1(Y - X\beta - D\mu), \quad \hat{M}_2 = Q_2(Y - X\beta - D\mu), \quad (3.3)$$

其中 $Q_1 = I - (I - S_1^c S_2^c)^{-1} (I - S_1^c)$ ， $Q_2 = I - (I - S_2^c S_1^c)^{-1} (I - S_2^c)$ 。将 M_1 和 M_2 代入式(3.2)，可得

$$\check{Y} = \check{X}\beta + \check{D}\mu + \varepsilon, \quad (3.4)$$

其中 $\check{Y} = (I - S)Y$, $\check{X} = (I - S)X$, $\check{D} = (I - S)D$, $S = Q_1 + Q_2$ 。接下来, 参考 Su^[55]中提到的方法来消除面板数据中未知固定效应的影响。经过简单的计算, 可得到 $\check{\mu}_i = (\check{D}^T \check{D})^{-1} \check{D}^T (\check{Y} - \check{X}\beta)$, 设 $W = I - \check{D}(\check{D}^T \check{D})^{-1} \check{D}^T$, 就能得到 $W\check{D}\check{\mu}_i = 0$ 。

利用线性模型(3.4), 可以得到 β 的剖面最小二乘估计量。模型(3.1)中的 X 是不会被直接观测到的, 如果忽略测量误差并用 U 直接代替 X , 则可能造成估计量的一致性问题。为了克服这一问题, 本章将根据 Liang^[56]等人提出的“衰减校正”方法来构造辅助随机向量:

$$\Lambda_i(\beta) = \check{U}^T W (\check{Y} - \check{U}\beta) - (T-1)\Sigma_v \beta, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.5)$$

接下来, 根据 Owen^[57]的结论, 将 β 的经验对数似然比定义为

$$l(\beta) = -\max \left\{ \sum_{i=1}^n \ln(np_i) \mid p_i \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1, \sum_{i=1}^n p_i \Lambda_i(\beta) = 0 \right\}.$$

通过拉格朗日乘子法, 可以得出

$$\hat{l}_n(\beta) = -2 \sum_{i=1}^n \ln \{1 + \gamma^T \hat{\Lambda}_i(\beta)\}, \quad (3.6)$$

其中 γ 由下式确定

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\hat{\Lambda}_i(\beta)}{1 + \gamma^T \hat{\Lambda}_i(\beta)} = 0. \quad (3.7)$$

定理 1 假设 C1-C6 成立, 有

$$\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{D} N(0, \vartheta^{-1} \varpi \vartheta^{-1}), \quad (3.8)$$

其中“ $\xrightarrow{D}$ ”为分布收敛, $\varpi = E\{(\varepsilon_{11} - v_{11}^T \beta) \bar{X}_{11}\}^{\otimes 2} + E\{(v_{11} v_{11}^T - \Sigma_v) \beta\}^{\otimes 2} + E(v_{11} v_{11}^T \varepsilon_{11}^2)$ 。

定理 2 假设 C1-C6 下, 如果 β_0 是 β 的真值, 有

$$\hat{l}_n(\beta_0) \xrightarrow{D} \chi_p^2, \quad (3.9)$$

其中 χ_p^2 是自由度为 p 的卡方分布。对于(2.3)中 $q > 2$ 的一般部分线性可加性模型, 本章可以用类似的方法定义参数分量的经验对数似然比, 只是将二元可加性光滑矩阵 S 替换为 q 维变量函数 $m = m_1 + \dots + m_q$ 的可加性光滑矩阵, Opsomer^[58]有更

为详细的介绍。

有上述的定理, 参数 β 的置信区间可构造如下: 对任意事先给定的 $0 < \alpha < 1$, 令 c_α 满足 $P(\chi_p^2 > c_\alpha) = \alpha$, 则

$$\psi_{el}(\alpha) = \left\{ \chi \in R^p : \hat{l}_n(\beta_0) \leq c_\alpha \right\}, \quad (3.10)$$

就是参数 β 渐进水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间。

3.2 部分线性可加 EV 面板数据模型的模拟研究

在本节中以研究所提出的估计在有限样本时的效果进行模拟。我们考虑带固定效应部分线性可加 EV 面板数据模型:

$$\begin{cases} Y_{it} = X_{it}^\tau \beta + m_1(Z_{it1}) + m_2(Z_{it2}) + \mu_i + \varepsilon_{it}, \\ Z_{it} = X_{it} + v_{it}, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T, \quad (3.11)$$

其中, 对上式赋值 $\beta = (3, \sqrt{2})^\tau$, $m_1(Z_{it1}) = \cos(0.5\pi Z_{it1})$, $m_2(Z_{it2}) = \exp(0.5Z_{it2})$, $\varepsilon_{it} \sim N(0, 0.25)$, $U_{itd} \sim U(0, 1)$, $\mu_i = 2^{-1}\bar{U}_i + w_i$, $w_i \sim N(0, 0.1)$ 和 $\bar{U}_i = T^{-1} \sum_{t=1}^T U_{itd}$, $d = 1, 2$ 。协变量 X_{it} , Z_{it1} 和 Z_{it2} 从下列公式中产生 $X_{it} = \omega_i + \mu_{it}$, $Z_{it1} = \omega_i + \wp_{it1}$ 和 $Z_{it2} = \omega_i + \wp_{it2}$ 。其中 ω_i , μ_{it} , $\wp_{it1}$ 和 $\wp_{it2}$ 是相互独立的, 并且有 $\omega_i \sim U(-0.5, 0.5)$, $\mu_{it} \sim N(0, 1.5^2)$, $\wp_{it1} \sim U(-0.5, 0.5)$, $\wp_{it2} \sim U(-0.5, 0.5)$ 。以上数据符合模型要求。此外, 假定测量误差 $v_{it} \sim N(0, \Sigma_v)$ 。其中定义 $\Sigma_v = 0.2^2 I_2$, $0.4^2 I_2$ 和 $0.8^2 I_2$ 来表示不同测量误差的水平。

在模拟中, 根据模型(3.11)选取样本大小分别为(150, 4), (150, 6)和(200, 4), 并且选取 Epanechnikov 核, 表示为: $K(u) = 3/4(1 - u^2)I\{|u| \leq 1\}$ 。带宽 h 是通过“leave-one-sample-out”交叉验证方法选择的。具体是通过最小化(3.11)式得出

$$CV(h) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T \left\{ Y_{it} - U_{it}^\tau \hat{\beta}^{[i]} - \hat{m}_1^{[i]}(Z_{it1}) + \hat{m}_2^{[i]}(Z_{it2}) \right\} - \hat{\beta}^{[i]\tau} \Sigma_v \hat{\beta}^{[i]}, \quad (3.12)$$

其中 $\hat{\beta}^{[i]}$, $\hat{m}_1^{[i]}(\cdot)$ 和 $\hat{m}_2^{[i]}(\cdot)$ 分别是 β , $m_1(\cdot)$ 和 $m_2(\cdot)$ 删除掉下标对应的第 i 组数据所得估计量。对参数分量 β , 实验模拟将通过比较本章提出的修正经验似然方法

(EL)和正态逼近方法(NA)这两种方法来说明估计效果。

表 3-1:参数 β 置信水平为 0.95 的置信区间的平均长度和覆盖率

Σ_v	(n,T)	Coverage		Length			
		EL	NA	NA		EL	
				β_1	β_2	β_1	β_2
0.2 ²	(150,4)	0.935	0.932	0.2378	0.2287	0.2640	0.2559
	(200,4)	0.942	0.941	0.2083	0.1992	0.2301	0.2210
	(150,6)	0.953	0.943	0.1877	0.1786	0.2097	0.1996
0.4 ²	(150,4)	0.929	0.928	0.2480	0.2393	0.2671	0.2580
	(200,4)	0.938	0.933	0.2172	0.2081	0.2459	0.2368
	(150,6)	0.951	0.945	0.1948	0.1857	0.2169	0.2070
0.8 ²	(150,4)	0.928	0.924	0.2559	0.2468	0.2891	0.2792
	(200,4)	0.934	0.930	0.2226	0.2135	0.2512	0.2423
	(150,6)	0.949	0.945	0.1987	0.1896	0.2199	0.2098

对上述模型实验进行 1000 次重复后，本文计算了参数分量置信水平为 95% 的情形下的置信区间平均区间长度以及置信区间对应的覆盖概率，总结后得到表 3-1。从表 3-1 中，模拟可以得出如下的结论：

(1)对比给定样本容量(n,T)的情况，模拟所得结果对相同水平的测量误差都是稳定的，这说明了本章提出的方法对于测量误差的纠正是有效果的。

(2)尽管本章提出的方法和正态逼近方法所得出的覆盖概率是相差不大的，但从总体上看概率是优于正态逼近方法的，并且由本章提出方法获得的置信区间的平均长度整体上是要短于正态逼近方法获得的置信区间，这表明了本章提出方法对模型(3.11)的估计是优于正态逼近方法的。

(3)在相同的测量误差水平下，本节模拟所得结果表明随着样本容量(n,T)的增加，本章所提出方法的平均区间长度也随之减小，同时与之对应的覆盖概率越来越接近真实水平 95%。

3.3 关于空气污染对健康情况影响的实证分析

本节利用修正的经验似然方法研究城市的空气污染对健康情况的影响。数据来源于六个城市所获得的肺功能数据子集。Dockery 等^[59]对此数据集进行过设计研究。实验从数据集中随机抽取了 300 个女孩的样本，最小年龄为 1 岁，最大年龄为 12 岁。实证研究了响应变量 FEV_1 和个体年龄、身高之间的关系，目的在于找寻在儿童中肺功能的变化以及影响肺功能发展的因素。为了更清晰地表示响应变量和各个协变量之间的关系，将个体的用力呼气量 (FEV_1) 用 Y_{it} 表示。个体身高，个体年龄，个体的初始身高和个体的初始年龄分别用 Z_{it1} ， Z_{it2} ， X_{it1} 和 X_{it2} 表示。将数据设置为带有测量误差的数据，分别取 $\Sigma_v I$ 为 $0.4^2 I$ 和 $0.8^2 I$ ，以便验证在数据有测量误差的情况下，本节所提方法的有效性，因而建立如式(3.13)式所示的模型：

$$\begin{cases} Y_{it} = X_{it}^T \beta + m_1(Z_{it1}) + m_2(Z_{it2}) + \mu_i + \varepsilon_{it}, \\ Z_{it} = X_{it} + v_{it}, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T, \quad (3.13)$$

其中 $X_{it} = (X_{it1}, X_{it2})^T$ ， v_{it} 来自均值为零协方差矩阵为 Σ_v 的二维正态分布， μ_i 表示个体之间的固定效应。在实证分析过程中，选取 Epanechnikov 核函数，带宽通过交叉验证方法选取，而且对所有数据进行标准化处理。

在实际问题分析中，我们利用所提出的方法，在 $\Sigma_v I$ 为 $0.4^2 I$ 和 $0.8^2 I$ 两种情形下与正态逼近方法进行比较，比较了在实际数据集下两种方法的表现情况，总结汇总成表 3-2。

表 3-2:参数置信水平为 0.95 的置信区间的平均长度和覆盖率

Σ_v	Length		Coverage	
	EL	NA	EL	NA
0.4^2	0.2467	0.2731	0.934	0.931
0.8^2	0.2571	0.2760	0.928	0.926

表 3-2 显示了修正的经验似然法和正态逼近两种方法在参数置信水平为 0.95 的情形下参数分量置信区间平均长度和覆盖率的结果，结果显示修正的经验似然法无论是置信区间的平均长度还是置信区间的覆盖概率在两种测量误差水平下都是优于正态逼近方法的。

3.4 主要结果及其证明

在进行主要结果的证明前，先给出一些正则性条件：

C1 Z_{it1} 和 Z_{it2} 的密度函数远离零有界，并且具有有界连续的二阶偏导数，非参函数 $m_1(z_{it1})$ 和 $m_2(z_{it2})$ 在其支撑上连续可微。

C2 令 $(\mu_i, Z_{it}, U_{it}, \varepsilon_{it})$, $i=1, \dots, n$, $t=1, \dots, T$ 是 *i.i.d*。 $E(\varepsilon | Z, U, \mu) = 0$ 几乎可以肯定。此外，对于某些整数 $k \geq 4$ ，满足 $E(Z^k) \leq \infty$ ， $E(\varepsilon^k) \leq \infty$ ， $E(\|X_{it} - E(X_{it} | U_{it})\|^{2+\delta}) \leq \infty$ 是非奇异的。

C3 令 $\bar{X}_{it} = X_{it} - E(X_{it} | Z_{it1}) - E(X_{it} | Z_{it2})$ ，矩阵 $\mathcal{G} \triangleq \text{Cov}(\bar{X}_{11})$ 是正定矩阵，并且满足

$$\sup_{z_1} E(\|X_{it}\|^4 | Z_{it1} = z_1) < \infty, E\|\bar{X}_{it}\|^4 < \infty, \sup_{z_2} E(\|X_{it}\|^4 | Z_{it2} = z_2) < \infty,$$

$$E(\varepsilon_{it} | X_{it}, Z_{it1}, Z_{it2}) = 0, E(\varepsilon_{it}^4 | X_{it}, Z_{it1}, Z_{it2}) < \infty。$$

C4 窗宽 h_1 ， h_2 和 h 的阶都是 $n^{-1/5}$ 。

C5 核 $K(v)$ 是一个对称的概率密度函数，在其紧支撑 $\mathcal{Z}$ 上具有连续导数，满足 $\int K(u)du = 1$ ， $\int uK(u)du = 0$ ， $\int u^2 K(u)du = 1$ 和 $\int u^4 K(u)du < \infty$ 。

C6 $E(U_{it} = 0)$ ， $E(\|U_{it}\|^4 < \infty)$ 。

为了计算简便令 $R^{\otimes 2} = RR^T$ ， $d_n = n^{-1/3-\varpi} + a_n$ ， $c_N = \{\log(1/h)(Nh)\}^{1/2} + h^2$ ， $N = nT$ 。

引理 3.1 假设条件 C1-C6 成立， $(X_{11}, Y_{11}), \dots, (X_{nT}, Y_{nT})$ 是独立同分布的随机向量，其中 Y_{it} 是标量。进一步假设 $E|Y_{it}|^s < \infty$ ， $\sup_x \int |y|^s p(x, y)dy < \infty$ ，其中 $p(x, y)$ 表示 $(X_{11}, Y_{11}), \dots, (X_{nT}, Y_{nT})$ 的联合密度。令 $K(\cdot)$ 是具有有界支撑的有界正函数，满足 Lipschitz 条件。如果对某个 $\delta < 1-s^{-1}$ ，有 $n^{2\delta-1}h \rightarrow \infty$ ，则

$$\sup_x \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T [K_h(X_{it} - x)Y_{it} - E(K_h(X_{it} - x)Y_{it})] \right| = O_p \left(\left\{ \frac{\log(1/h)}{Nh} \right\} \right)^{1/2}.$$

证明：该引理为 Mack 等^[60]的结论与 Fan 等^[61]文献中的引理 A.1 结合可直接得到。

引理 3.2 假设条件 C1-C6 成立，那么

$$S_1^c = S_1 - 11^\tau / n + o_p(11^\tau / n), (I - S_1^c S_2^c)^{-1} = I + o_p(1/n).$$

证明：该引理与 Opsomer 等^[62]的引理 3.1 和引理 3.2 类似，此处省略证明细节。

引理 3.3 假设条件 C1-C6 成立，那么

$$\mathcal{Z}_d^\tau W_d(u) \mathcal{Z}_d = Nf(u) \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix} \{1 + O_p(c_N)\},$$

$$\mathcal{Z}_d^\tau W_d(u) X = Nf(u) E(X|u) \times (1 \ 0)^\tau \{1 + O_p(c_N)\}.$$

其中 $d=1,2$ 。

证明：该引理与 Fan 等^[61]引理 A.2 和引理 A.3 的证明类似，此处省略证明细节。

引理 3.4 假设条件 C1-C6 成立，当 $n \rightarrow \infty$ 时，有

$$\frac{1}{n} U^\tau (I - S)^\tau (I - S) U - \Sigma_v \xrightarrow{P} \mathcal{G}, \quad (3.14)$$

其中 $U = (U_{11}, \dots, U_{nT})$ 。

证明：由于 $U_{it} = X_{it} + v_{it}$ ，则可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} U^\tau (I - S)^\tau (I - S) U &= \frac{1}{n} X^\tau (I - S)^\tau (I - S) X + \frac{1}{n} X^\tau (I - S)^\tau (I - S) v \\ &\quad + \frac{1}{n} v^\tau (I - S)^\tau (I - S) v + \frac{1}{n} v^\tau (I - S)^\tau (I - S) X. \end{aligned}$$

结合引理 3.3，可得

$$S_1 X = E(X|Z_{11})(1 + O_p(c_{dn})), \quad d=1,2,$$

经简单计算与引理 3.2 结合可得

$$\frac{1}{n} X^\tau (I - S)^\tau (I - S) X = E\{X - E(X|Z_1) - E(X|Z_2)\}^{\otimes 2} \{1 + O_p(c_n)\}.$$

由于 $\mathcal{Z}_d^\tau W_d(u) v = O_p(c_{dN})$ ， $d=1,2$ ，则可以得到

$$\frac{1}{n} v^{\tau} (I - S)^{\tau} (I - S) v = \Sigma_v \{1 + O_p(c_N)\}.$$

类似地，我们还可以得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} X^{\tau} (I - S)^{\tau} (I - S) v &= O_p(c_n^2), \\ \frac{1}{n} v^{\tau} (I - S)^{\tau} (I - S) X &= O_p(c_n^2). \end{aligned}$$

结合上述过程，可以证明

$$\frac{1}{n} U^{\tau} (I - S)^{\tau} (I - S) U - \Sigma_v \xrightarrow{P} \mathcal{G}.$$

引理 3.5 假设条件 C1-C6 成立，则

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T \tilde{X}_{it} \tilde{v}_{it}^{\tau} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (X_{it} - E(X_{it} | Z_{it1}) - E(X_{it} | Z_{it2})) v_{it}^{\tau} + o_p(1), \quad (3.15)$$

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T \tilde{X}_{it} \tilde{\varepsilon}_{it}^{\tau} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (X_{it} - E(X_{it} | Z_{it1}) - E(X_{it} | Z_{it2})) \varepsilon_{it}^{\tau} + o_p(1), \quad (3.16)$$

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T \tilde{X}_{it} \left(m_1(Z_{it1}) - m_2(Z_{it2}) - \sum_{j=1}^n S_{ij} [m_1(Z_{j1}) - m_2(Z_{j2})] \right) = o_p(1), \quad (3.17)$$

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T \tilde{v}_{it} \left(m_1(Z_{it1}) - m_2(Z_{it2}) - \sum_{j=1}^n S_{ij} [m_1(Z_{j1}) - m_2(Z_{j2})] \right) = o_p(1), \quad (3.18)$$

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T \tilde{v}_{it} \tilde{\varepsilon}_{it} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T v_{it} \varepsilon_{it} + o_p(1), \quad (3.19)$$

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T \tilde{v}_{it} \tilde{v}_{it}^{\tau} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T v_{it} v_{it}^{\tau} + o_p(1). \quad (3.20)$$

证明：类似引理 3.4 的证明可以得到(3.15), (3.16), (3.19)和(3.20)。由 Opsomer 等^[62]定理 4.1 的证明，可以得到

$$m_1(Z_{it1}) - m_2(Z_{it2}) - \sum_{j=1}^n S_{ij} [m_1(Z_{j1}) - m_2(Z_{j2})] = C_1 h_1^2 m_1''(z_1) + C_2 h_2^2 m_2''(z_2) + o_p(h_1^2 + h_2^2),$$

其中 C_1, C_2 是常数。结合

$$(I - S) X_{it} = X_{it} - E(X_{it} | Z_{it1}) - E(X_{it} | Z_{it2}) + O_p(c_n).$$

(3.17)即证。(3.18)的证明类似于(3.17)，

$$\frac{1}{\sqrt{N}} U^{\tau} (I - S)^{\tau} W (I - S) (M_1 + M_2) = O_p(n^{-1/2} h_1^2 + n^{-1/2} h_2^2) + o_p(h_1^4 + h_2^4),$$

$$\frac{1}{\sqrt{N}} U^{\tau} (I - S)^{\tau} W (I - S) (\varepsilon - U \beta) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^n (\tilde{X} + v) (\varepsilon - v \beta) + O_p(n^{-1/2} h_1^2 + n^{-1/2} h_2^2).$$

即证。

引理 3.6 假设条件 C1-C6 成立，那么

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^n \Lambda_i(\beta) \xrightarrow{d} N(0, \mathcal{G}^{-1} \varpi \mathcal{G}^{-1}), \quad (3.21)$$

其中 $\varpi = E(\varepsilon_{11} - v_{11}^{\tau} \beta)^2 \mathcal{G} + E\{(v_{11} v_{11}^{\tau} - \Sigma_v) \beta\}^{\otimes 2} + \Sigma_v \sigma^2$ 。

证明：定理 1 的条件下，根据(3.5)式对 $\Lambda_i(\beta)$ 的定义，将 $\Lambda_i(\beta)$ 展开可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^n \Lambda_i(\beta) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T \tilde{U}_{it}^{\tau} W (\tilde{Y}_{it} - \tilde{U}_{it} \beta) - \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (T-1) \Sigma_v \beta \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (\tilde{X}_{it}^{\tau} + \tilde{v}_{it}) W (\tilde{Y}_{it} - (\tilde{X}_{it} + \tilde{v}_{it}) \beta) - \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (T-1) \Sigma_v \beta \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T \{ \tilde{X}_{it} W \tilde{\varepsilon}_{it} - \tilde{X}_{it} W \tilde{v}_{it} \beta + \tilde{X}_{it} W \tilde{M}_1 + \tilde{v}_{it} W \tilde{M}_1 + \tilde{X}_{it} W \tilde{M}_2 + \tilde{v}_{it} W \tilde{M}_2 \\ &\quad - \tilde{v}_{it} W \tilde{v}_{it}^{\tau} \beta + \tilde{v}_{it} W \tilde{\varepsilon}_{it} - \Sigma_v \beta \} \\ &:= I_{1n} - I_{2n} + I_{3n} + I_{4n} + I_{5n} + I_{6n} - I_{7n} + I_{8n} - I_{9n}. \end{aligned}$$

令

$$\kappa_i = m_1(Z_{i1}) - m_2(Z_{i2}) - \sum_{j=1}^n S_{ij} [m_1(Z_{j1}) - m_2(Z_{j2})]. \quad (3.22)$$

由于

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T [X_{it} - E(X_{it} | Z_{i1}) - E(X_{it} | Z_{i2})]^{\otimes 2} \xrightarrow{P} \mathcal{G}, \quad (3.23)$$

和

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\Lambda_i(\beta)) &= E\{(\varepsilon_{11} - v_{11}^{\tau} \beta)(X_{it} - E(X_{it} | Z_{i1}) - E(X_{it} | Z_{i2}))\}^{\otimes 2} + E\{(v_{11} v_{11}^{\tau} - \Sigma_v) \beta\}^{\otimes 2} \\ &\quad + E(v_{11} v_{11}^{\tau} \varepsilon_{11}^2) + E\{[(X_{it} - E(X_{it} | Z_{i1}) - E(X_{it} | Z_{i2})) v_{11} \beta \beta^{\tau} v_{11} v_{11}^{\tau}]\} \\ &\quad + E\{v_{11} v_{11}^{\tau} \beta \beta^{\tau} v_{11} [X_{it} - E(X_{it} | Z_{i1}) - E(X_{it} | Z_{i2})]^{\tau}\}. \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Cov}(\Lambda_i(\beta)) &= E\{(\varepsilon_{11} - v_{11}^{\tau} \beta)(X_{it} - E(X_{it} | Z_{i1}) - E(X_{it} | Z_{i2}))\}^{\otimes 2} + E\{(v_{11} v_{11}^{\tau} - \Sigma_v) \beta\}^{\otimes 2} \\ &\quad + E\{(v_{11} v_{11}^{\tau} - \Sigma_v) \beta\}^{\otimes 2} + E(v_{11} v_{11}^{\tau} \varepsilon_{11}^2), \\ &= \varpi. \end{aligned}$$

利用中心极限定理，可以得到 $\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^n \Lambda_i(\beta) \xrightarrow{d} N(0, \mathcal{G}^{-1} \varpi \mathcal{G}^{-1})$ 。

引理 3.7 假设条件 C1-C6 成立，那么

$$\max_{1 \leq i \leq n} \|\Lambda_i(\beta)\| = O_p(N^{1/2}). \quad (3.24)$$

证明：结合引理 1 和引理 2，可以证明

$$SU = \begin{bmatrix} E(X_{11}|Z_{111}) + E(X_{11}|Z_{112}) \\ \vdots \\ E(X_{nT}|Z_{nT1}) + E(X_{nT}|Z_{nT2}) \end{bmatrix} \{1 + O_p(c_n)\},$$

$$S(M_1 + M_2) = \begin{bmatrix} m_1(Z_{111}) + m_2(Z_{112}) \\ \vdots \\ m_1(Z_{nT1}) + m_2(Z_{nT2}) \end{bmatrix} \{1 + O_p(c_n)\}.$$

并且 $S(\varepsilon - U\beta) = \mathbf{1}_{nT} O_p(d_n)$ ，其中 $d_n = \{\log n / (nh_1)\}^{1/2} + \{\log n / (nh_2)\}^{1/2}$ ，

$c_n = h_1^2 + h_2^2 + \{\log(1/h_1) / (nh_1)\}^{1/2} + \{\log(1/h_2) / (nh_2)\}^{1/2}$ ，然后，可得

$$\tilde{U} = U - [E(X_{it}|Z_{it1}) + E(X_{it}|Z_{it2})] + o_p(1), \quad \tilde{Y} - \tilde{U}\beta = \varepsilon_{it} - v_{it}^\tau \beta + o_p(1), \quad (3.25)$$

通过 Owen^[57]的引理 3，可以证明

$$\max_{1 \leq i \leq n, 1 \leq t \leq T} \|U_{it}\| = O_p(N^{1/2}), \quad \max_{1 \leq i \leq n, 1 \leq t \leq T} \|\varepsilon_{it}\| = O_p(N^{1/2}), \quad \max_{1 \leq i \leq n, 1 \leq t \leq T} \|v_{it}\beta\| = O_p(N^{1/2}).$$

由式(3.24)，可以证明

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq i \leq n} \|\Lambda_i(\beta)\| &\leq \max_{1 \leq i \leq n, 1 \leq t \leq T} \|\tilde{U}_{it}\| \cdot \max_{1 \leq i \leq n, 1 \leq t \leq T} \|\tilde{Y}_{it} - \tilde{U}_{it}^\tau \beta\| + o_p(N^{1/2}) \\ &= o_p(N^{1/2}). \end{aligned}$$

即引理 7 证明完成。

引理 3.8 假设条件 C1-C6 成立。那么 $\|\gamma\| = O_p(N^{1/2})$ 。

证明：令 $\gamma = \lambda\theta$ ，其中 $\lambda \geq 0$ ， $\theta \in \mathbb{R}^p$ ，并且 $\|\theta\| = 1$ 。由 Owen^[63]的结论可得

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{n} \theta^\tau \sum_{i=1}^n \frac{\hat{\Lambda}_i(\beta)}{1 + \lambda \theta^\tau \hat{\Lambda}_i(\beta)} \\ &\leq \frac{1}{n} \theta^\tau \sum_{i=1}^n \hat{\Lambda}_i(\beta) - \frac{\lambda}{n(1 + \lambda \max_{1 \leq i \leq n} \|\hat{\Lambda}_i(\beta)\|)} \times \min \text{eig} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\Lambda}_i(\beta) \hat{\Lambda}_i^\tau(\beta) \right). \end{aligned}$$

其中， $\min \text{eig}(Q)$ 表示矩阵 Q 的最小特征值，这意味着

$$\lambda \min \text{eig} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\Lambda}_i(\beta) \hat{\Lambda}_i^\tau(\beta) \right) - \frac{\lambda}{n} \theta^\tau \sum_{i=1}^n \hat{\Lambda}_i(\beta) \max_{1 \leq i \leq n} \|\hat{\Lambda}_i(\beta)\| \leq \frac{\lambda}{n} \theta^\tau \sum_{i=1}^n \hat{\Lambda}_i(\beta)$$

由引理 3, 可得

$$\frac{1}{n}\theta^\tau \sum_{i=1}^n \hat{\Lambda}_i(\beta) = O_p(N^{1/2}), \min \text{eig} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\Lambda}_i(\beta) \hat{\Lambda}_i^\tau(\beta) \right) = O_p(1)$$

然后可得 $\lambda = O_p(N^{1/2})$, $\|\gamma\| = O_p(N^{1/2})$ 。

定理 1 的证明: 由引理 3.1-引理 3.8, 我们有

$$\hat{\beta} - \beta = \left(\frac{1}{n} (\bar{U}_{it} \bar{U}_{it}^\tau - \Sigma_v) \right)^{-1} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Lambda_i(\beta) + o_p(n^{-1/2}).$$

再结合 Slutsky 定理和中心极限定理, 定理 1 得证。

定理 2 的证明: 由引理 3.7 可得

$$\max_{1 \leq i \leq n} |\theta^\tau \hat{\Lambda}_i(\beta)| = O_p(N^{1/2}) o_p(N^{1/2}) = o_p(1),$$

对 $\hat{l}_n(\beta)$ 应用 Taylor 展开, 可以得到

$$-\hat{l}_n(\beta) = 2N^{-1} \sum_{i=1}^n \left\{ \gamma^\tau \hat{\Lambda}_i(\beta) - [\gamma^\tau \hat{\Lambda}_i(\beta)]^2 / 2 \right\} + a_n, \quad (3.26)$$

其中

$$P \left(|a_n| \leq C \sum_{i=1}^n (\theta^\tau \hat{\Lambda}_i(\beta))^3 \right) \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

结合引理 3.8, 可得

$$|a_n| \leq C \|\theta\|^3 \max_i \|\hat{\Lambda}_i(\beta)\| \sum_{i=1}^n \|\hat{\Lambda}_i(\beta)\|^2 = o_p(1).$$

又因为

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n \frac{\hat{\Lambda}_i(\beta)}{1 + \gamma^\tau \hat{\Lambda}_i(\beta)} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n \hat{\Lambda}_i(\beta_0) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\Lambda}_i(\beta) \hat{\Lambda}_i^\tau(\beta) \gamma \\ &\quad + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n \frac{\hat{\Lambda}_i(\beta) [\gamma^\tau \hat{\Lambda}_i(\beta)]^2}{1 + \gamma^\tau \hat{\Lambda}_i(\beta)}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

即

$$\gamma = \left(\sum_{i=1}^n \hat{\Lambda}_i(\beta) \hat{\Lambda}_i^\tau(\beta) \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \hat{\Lambda}_i(\beta) + o_p(N^{1/2}).$$

式(3.25)的两边乘以 γ^τ , 得到

$$0 = \sum_{i=1}^n \frac{\gamma^\tau \hat{\Lambda}_i(\beta)}{1 + \gamma^\tau \hat{\Lambda}_i(\beta)} = \sum_{i=1}^n \left(\gamma^\tau \hat{\Lambda}_i(\beta_0) \right) - \sum_{i=1}^n \left(\gamma^\tau \hat{\Lambda}_i(\beta_0) \right)^2 + \sum_{i=1}^n \frac{\left(\gamma^\tau \hat{\Lambda}_i(\beta) \right)^3}{1 + \gamma^\tau \hat{\Lambda}_i(\beta)}.$$

由引理 3.1-引理 3.8 可得

$$\sum_{i=1}^n \frac{\left(\gamma^\tau \hat{\Lambda}_i(\beta) \right)^3}{1 + \gamma^\tau \hat{\Lambda}_i(\beta)} = o_p(1),$$

再结合式(3.26)和式(3.27)，可得

$$\sum_{i=1}^n \gamma^\tau \hat{\Lambda}_i(\beta_0) = \sum_{i=1}^n \left(\gamma^\tau \hat{\Lambda}_i(\beta_0) \right)^2 + o_p(1), \quad (3.28)$$

从而有 $\gamma = [\hat{\Lambda}_i(\beta) \hat{\Lambda}_i^\tau(\beta)]^{-1} \sum_{i=1}^n \hat{\Lambda}_i(\beta) + o_p(1)$ ，即

$$\hat{l}_n(\beta) = \left(N^{-1} \sum_{i=1}^n \hat{\Lambda}_i(\beta) \right)^\tau \left(N^{-1} \sum_{i=1}^n \hat{\Lambda}_i(\beta) \hat{\Lambda}_i^\tau(\beta) \right)^{-1} \left(N^{-1} \sum_{i=1}^n \hat{\Lambda}_i(\beta) \right) + o_p(1),$$

最后，可得 $\hat{l}_n(\beta_0) \xrightarrow{D} \chi_p^2$ ，定理 2 得证。

3.5 本章小结

在本章中，我们研究了带固定效应的面板数据下 EV 可加部分线性模型的的经验似然。对提出的模型，首先通过后拟方法估计模型中的可加非参部分，在运用“衰减校正”来解决测量误差引起的不一致问题的同时，克服了面板数据的组内相关性给定义经验似然比函数带来的困难，从而构造了协变量含测量误差情况下未知参数的修正经验对数似然比统计量。在合适的正则条件下，证明其服从卡方分布。我们把本章提出的修正经验似然方法与已有的正态逼近方法进行比较，通过数值模拟与实证分析的结果表明本章所得到的修正经验似然方法优于正态逼近方法。

第4章 删失数据下带固定效应部分线性面板数据模型的经 验似然

本章考虑删失数据下带固定效应部分线性面板数据模型在协变量含测量误差情况下的统计推断。首先，本章第1节用Kaplan-Meier估计方法来处理删失数据带来的估计偏差。然后，利用虚拟变量方法来消除未知固定效应。在此基础上，再运用“衰减校正”来解决测量误差引起的不一致问题。最后，构造了协变量含测量误差情况下未知参数的修正经验对数似然比统计量。在合适的正则条件下，证明了其服从卡方分布。本章第2节和第3节通过数值模拟和实证分析验证了以上方法的效果。第4节提供了本章主要结果的证明。

4.1 修正的经验似然法

为了进行识别，模型添加相应的限制 $\sum_{i=2}^n \mu_i = 0$ 。将模型(2.1)和(2.2)结合后简化为

$$\begin{cases} Y = X^\tau \beta + m(U) + D\mu_i + \varepsilon, \\ Z = X + v, \end{cases} \quad (4.1)$$

其中， $Y = (Y_1^\tau, Y_2^\tau, \dots, Y_n^\tau)^\tau$ ， $Y_i = (Y_{i1}, \dots, Y_{iT})^\tau$ 为响应变量。 $X = (X_1^\tau, X_2^\tau, \dots, X_n^\tau)^\tau$ ， $X_i = (X_{i1}, \dots, X_{iT})^\tau$ ， $U = (U_1^\tau, U_2^\tau, \dots, U_n^\tau)^\tau$ 和 $U_i = (U_{i1}, \dots, U_{iT})^\tau$ 表示协变量。固定效应表示为 $\mu = (\mu_2^\tau, \mu_3^\tau, \dots, \mu_n^\tau)^\tau$ 。存在测量误差变量可表示为 $Z = (Z_1^\tau, Z_2^\tau, \dots, Z_n^\tau)^\tau$ ， $Z_i = (Z_{i1}, \dots, Z_{iT})^\tau$ ， $v = (v_1^\tau, v_2^\tau, \dots, v_n^\tau)^\tau$ ， $v_i = (v_{i1}, \dots, v_{iT})^\tau$ ， $D = [I_n \otimes i_t]d_n$ ，其中 $d_n = [-i_{n-1} \quad I_{n-1}]^\tau$ 。 $\otimes$ 表示 Kronecker 积， i_t 表示 $T \times 1$ 元素全为 1 的向量，并且 I_n 表示 $n \times n$ 单位矩阵。

在生存数据分析中，删失数据是普遍存在的。本章结合实际情况，假设响应变量 Y 被随机删失所影响，使得观察到的实际数据是 $\{M_{it}, \delta_{it}\}$ ，其中 $M_{it} = \min\{Y_{it}, Q_{it}\}$ ， $\delta_{it} = I(Y_{it} \leq Q_{it})$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ ， $t = 1, 2, \dots, T$ 。用 δ_{it} 变量来表示 Y

是否删失，即当 $\delta_{it} = 0$ 时，表示 Y 删失。 $\{Q_{it}\}$ 为独立同分布的数据，其源于删失变量 Q ，并且与原数据 $\{Y_{it}\}$ 保持相互独立。

设 A, F 分别为删失变量 Q 和响应变量 Y 的分布，分别记 $\varsigma_A = \inf\{t: A(t)=1\}$ 和 $\varsigma_F = \inf\{t: F(t)=1\}$ 。现假定 $\varsigma_A > \varsigma_F$ ，对于文中出现的任何分布函数 $F(\cdot)$ 。设 $\bar{F} = 1 - F(\cdot)$ 。根据生存分析的情况，进一步假定 $Y_{it} \geq 0$ ， $Q_{it} \geq 0$ ， $i=1,2,\dots,n$ ， $t=1,2,\dots,T$ 。

为了处理随机删失对原数据的影响，本章对数据进行转换。当 A 已知时，定义

$$Y_A = \frac{\delta_{it} M_{it}}{1 - A(M_{it})}, \quad i=1,2,\dots,n, \quad t=1,2,\dots,T.$$

给定 $\omega = (\mu^\tau, \beta^\tau)^\tau$ ，通过(4.2)式来估计 $m(\cdot) = (m(u), \{hm'(u)\}^\tau)^\tau$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T \left\{ (Y_A - X^\tau \beta - D\mu_i) - [m(u) + hm'(u)(U-u)] \right\}^2 K_h(U-u), \quad (4.2)$$

其中 $K_h(\cdot) = K(\cdot/h)/h$ ， $K_h(\cdot)$ 是一个核函数并且 $h = h_n$ 是带宽，它是一系列趋向于零的正数。通过简单计算可得出

$$\left(m(u), \{hm'(u)\}^\tau \right)^\tau = [C^\tau(u, h) W_h(u) C(u, h)]^{-1} C^\tau(u, h) W_h(u) (Y_{itA} - X^\tau \beta - D\mu_i)$$

其中，变量 $C_i(u, h) = [C_{i1}(u, h), \dots, C_{iT}(u, h)]^\tau$ ， $W_h(u) = \text{diag}\{K_h(U_{11}, u), \dots, K_h(U_{nT}, u)\}$ ，

$C(u, h) = [C_1^\tau(u, h), \dots, C_n^\tau(u, h)]^\tau$ ， $K_h(U_i, u) = \text{diag}\{K_h(U_{i1}, u), \dots, K_h(U_{iT}, u)\}$ 。然后

可以得到

$$\hat{m}(\cdot) = S(u, h) (Y_A - X^\tau \beta - D\mu_i), \quad (4.3)$$

其中 $S(u, h) = [C^\tau(u, h) W_h(u) C(u, h)]^{-1} C^\tau(u, h) W_h(u)$ 。

然而在处理实际问题中，删失变量 Q 的分布函数 A 往往未知，运用 Kaplan-Meier 估计可以解决这个问题

$$A_n(m) = 1 - \prod_{i=1}^n \prod_{t=1}^T \left(\frac{N^+(M_{it})}{1 + N^+(M_{it})} \right)^{I(M_{it} \leq m, \delta_{it}=0)}, \quad m \geq 0,$$

其中 $N^+(M_{it}) = \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T I(M_{it} > m)$ 。记

$$Y_{A_n} = \frac{\delta_{it} M_{it}}{1 - A_n(M_{it})}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad t = 1, 2, \dots, T.$$

接下来，参考 Su^[55]的方法消除面板数据中的固定效应，结合上述过程，可合理地假设 $\tilde{X} = (I_{nT} - S)X$ ， $\tilde{Y}_{A_n} = (I_{nT} - S)Y_{A_n}$ 和 $\tilde{D} = (I_{nT} - S)D$ 。经简单运算，可得到 $\tilde{\mu}_i = (\tilde{D}^T \tilde{D})^{-1} \tilde{D}^T (\tilde{Y}_{A_n} - \tilde{X} \beta)$ 。为了消除固定效应影响，设 $W = I_{nT} - \tilde{D}(\tilde{D}^T \tilde{D})^{-1} \tilde{D}^T$ ，就能得到 $W \tilde{D} \tilde{\mu}_i = 0$ 。

模型(4.1)中的 X 是不会被直接观测到的，为了克服这一问题，将根据“衰减校正”方来解决测量误差引起的不一致问题，构造辅助随机向量：

$$\Lambda_i(\beta) = \tilde{Z}^T W (\tilde{Y}_{A_n} - \tilde{Z} \beta) - (T-1) \Sigma_v \beta, \quad i = 1, \dots, n,$$

基于 EL 方法的思想， β 的经验对数似然比定义为

$$l(\beta) = -\max \left\{ \sum_{i=1}^n \ln(np_i) \mid p_i \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1, \sum_{i=1}^n p_i \Lambda_i(\beta) = 0 \right\}.$$

然而在(4.4)式中， $\Lambda_i(\beta)$ 依赖于未知函数 A ，本章用 A_n 代替 A ，记

$$\hat{\Lambda}_i(\beta) = \tilde{Z}^T W (\tilde{Y}_{A_n} - \tilde{Z} \beta) - (T-1) \Sigma_v \beta, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.4)$$

从而， β 的估计经验对数似然比定义为

$$\hat{l}_n(\beta) = -\max \left\{ \sum_{i=1}^n \ln(np_i) \mid p_i \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1, \sum_{i=1}^n p_i \hat{\Lambda}_i(\beta) = 0 \right\}.$$

假设 0 在点 $(\Lambda_1(\beta), \dots, \Lambda_n(\beta))$ 的凸包内， $\hat{l}_n(\beta)$ 存在唯一值。通过拉格朗日乘子法，可以得出

$$\hat{l}_n(\beta) = \sum_{i=1}^n \ln \{1 + \gamma^T \hat{\Lambda}_i(\beta)\}, \quad (4.5)$$

其中 γ 由下式确定

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\hat{\Lambda}_i(\beta)}{1 + \gamma^T \hat{\Lambda}_i(\beta)} = 0.$$

定理 1 令 $\varepsilon_{it} (i \geq 1, t \geq 1)$ 是一个混合系数为 $\alpha(n)$ 的稳态 α -混合过程。若条件 C1-C6 成立，对于模型，当 β 是参数的真实值时，有

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^n \Lambda_i(\beta) \xrightarrow{d} N(0, \Sigma^{-1} \varpi \Sigma^{-1}),$$

其中 $\varpi = \varpi_1 - \varpi_2$, $\varpi_2 = (T-1) \int_{-\infty}^{+\infty} P(s) P^T(s) \bar{F}(s-) (1 - \Delta \phi^A(s)) dA(s)$, $\Sigma = E(X_{11} X_{11}^T)$, $\varpi_1 = (T-1) \{E[(X_{11} - E(X_{11} | U_{11}))(\varepsilon_{11} - v_{11}\beta)]^2 + \Sigma_v \sigma^2 + E[(v_{11} v_{11}^T - \Sigma_v)\beta]^2\}$ 。

定理 2 在定理 1 的条件下，当 $n \rightarrow \infty$ ，则 $\hat{l}_n(\beta_0) \xrightarrow{d} \eta_1 \chi_{1,1}^2 + \dots + \eta_p \chi_{1,p}^2$ 。其中 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p$ 为 $\Delta^{-1} \Delta$ 的特征值， $\chi_{1,1}^2, \dots, \chi_{1,p}^2$ 为相互独立自由度为 1 的标准 χ^2 卡方随机变量， $\xrightarrow{d}$ 表示依分布收敛。

4.2 混合条件下部分线性面板数据模型的模拟研究

在本节中以研究所提出的估计在有限样本时的效果进行模拟。首先，考虑 α -混合条件下带固定效应部分线性删失 EV 面板数据模型：

$$\begin{cases} Y_{it} = X_{it}^T \beta + m(U_{it}) + \mu_i + \varepsilon_{it}, \\ Z_{it} = X_{it} + v_{it}, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T,$$

其中，可赋值 $\beta = (3, \sqrt{2})^T$, $m(U_{it}) = \cos(2\pi U_{it})$, $U_{it} \sim U(0, 1)$, $\mu_i = 2^{-1} \bar{U}_i + w_i$, $w_i \sim N(0, 0.1)$ 和 $\bar{U}_i = T^{-1} \sum_{t=1}^T U_{it}$ ，删失变量 Q 服从正态分布。测量误差 $v_{it} \sim N(0, \Sigma_v)$ 。其中定义 $\Sigma_v = 0.2^2 I_2$ 和 $0.4^2 I_2$ 去表示不同测量误差的水平。AR(1) 过程用于生成稳定的 α -混合序列，定义

$$\varepsilon_{it} = 0.5 * \varepsilon_{i(t-1)} + \delta_{it},$$

其中 $\delta_{it} \sim N(0, 1)$ 。在模拟中，选取的样本大小分别为 (50, 4) 和 (100, 4)，删失率分别为 10% 和 30%，选取的核为 Epanechnikov 核 $K(u) = 3/4(1-u^2)I\{|u| \leq 1\}$ 。带

宽 h 是通过“leave-one-sample-out”交叉验证方法选择的。模拟对比了经验似然 (experience likelihood, EL) 和最大似然估计 (MEL) 的参数偏差 (BIAS) 与非参数函数的均方根误差 (root mean square error, RMSE)。

表 4.1: EL 和 MEL 估计量的 BIAS 和 RMSE

删失率	Σ_v	(n,T)	MEL			EL		
			β_1	β_2	RMSE	β_1	β_2	RMSE
10%	0.2 ²	(50,4)	0.1410	0.1118	0.0185	0.0776	0.0829	0.0101
		(100,4)	0.1193	0.0733	0.0115	0.0595	0.0534	0.0045
	0.4 ²	(50,4)	0.1808	0.1270	0.0277	0.1073	0.0864	0.0134
		(100,4)	0.1867	0.0942	0.0215	0.0672	0.0595	0.0067
30%	0.2 ²	(50,4)	0.1753	0.1319	0.0287	0.0998	0.0950	0.0125
		(100,4)	0.1613	0.0974	0.0923	0.0713	0.608	0.0622
	0.4 ²	(50,4)	0.2552	0.1711	0.0594	0.1277	0.1149	0.0231
		(100,4)	0.2058	0.1181	0.0324	0.0755	0.735	0.0095

从表 4.1 可以看出, 无论样本量为 200 还是 400, 测量误差为 0.2² 还是 0.4², 随着删失率从 10% 增加到 30%, MEL 和 EL 方法下的 BIAS、RMSE 均出现不同程度地增加。这种现象是合理的, 一般来说删失率越高, 信息损失则越大。随着样本量从 $n=200$ 增加到 $n=400$, MEL 和 EL 方法下的 BIAS、RMSE 值均出现了明显的减小, 即样本量的增大均提高了估计值的准确性, 且 EL 方法估计值的准确性更高。综上所述, EL 与 MEL 相比, EL 下的 BIAS 和 RMSE 值最小, 即 EL 可以较好地对所提模型的参数和非参数函数进行估计。

为了研究参数 ε_{it} 、 $m(\cdot)$ 和 v_{it} 的经验似然估计的敏感性, 模拟考虑如下三种情况: (1) 当 $\varepsilon_{it} = 0.2$ 、 $m(\cdot) = -0.2$ 时, v_{it} 分别取 $v_{it} = -0.5$ 、 0.5 ; (2) 当 $\varepsilon_{it} = 0.2$ 、 $v_{it} = -0.2$ 时, $m(\cdot)$ 分别取 $m(\cdot) = -0.5$ 、 0.5 ; (3) 当 $v_{it} = 0.2$ 、 $m(\cdot) = -0.2$ 时, ε_{it} 分别取 $\varepsilon_{it} = -0.5$ 、 0.5 。

表 4.2: 三种情况下未知参数经验似然估计的 BIAS

	$v_{it} = -0.5$	$v_{it} = 0.5$	$m(\cdot) = -0.5$	$m(\cdot) = 0.5$	$\varepsilon_{it} = -0.5$	$\varepsilon_{it} = 0.5$
β_1	0.007	0.002	0.003	0.005	0.0006	0.0002
β_2	0.006	0.003	0.003	0.002	0.0014	0.0005

从表 4.2 可得(1)-(3)情况的结果, 容易看出 ε_{it} , $m(\cdot)$ 和 v_{it} 的取值对未知参数估计值不敏感。

4.3 关于主要省份城市空气质量的实证分析

从在本节中，本章利用经验似然估计方法对 27 个省份城市的空气质量情况进行研究。数据来源于《中国统计年鉴》。在本次实证研究中，时间跨度为 4 年(2018–2021 年)，共计获取 432 个完整的数据。实证研究响应变量为细颗粒物(直径 $\leq 2.5\mu\text{m}$)浓度(PM2.5)和一氧化碳浓度(CO)，可吸入颗粒物浓度(PM10)，温度(temperature, TEMP)及气压(pressure, PRES)之间的关系。为了更清晰地表示响应变量和各个协变量之间的关系，本章将变量 PM2.5 用 Y_{it} 表示，协变量 CO, PM10, TEMP, PRES 分别用 X_{it1} , X_{it2} , U_{it1} , U_{it2} 表示。将完整数据设置为右删失数据，删失率为 40%，以便验证删失数据下本章所提方法的有效性，并假设 X_{it2} 带有测量误差。因而建立如式(4.6)式所示的回归模型：

$$\begin{cases} Y_{it} = X_{it1}\beta + X_{it2}\beta + m(U_{it1}) + m(U_{it2}) + \mu_i + \varepsilon_{it}, \\ Z_{it} = X_{it2} + v_{it}, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.6)$$

其中 μ_i 表示各主要城市的固定效应。在拟合模型(4.6)之前，为了避免所选参数量纲的影响，对连续型变量均进行了归一化处理。在实际问题分析中，实证以完整数据集下经验似然的估计值为基准，用偏差(BIAS)来估计参数 β 的估计效果，用均方根误差(RMSE)来评估非参数函数 $m(\cdot)$ 的估计效果

$$\begin{aligned} BIAS(\hat{\beta}_j) &= |\hat{\beta}_j - \hat{\beta}_j^c|, \\ RMSE(\hat{m}_j) &= \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (\hat{m}_j(U_{it}) - \hat{m}_j^c(U_{it}))^2 \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

其中 $j=1,2$ ， $\hat{\beta}^c$ 和 $\hat{m}^c$ 均为完整数据集下经验似然的值。

表 4.3 显示了经验似然法(EL)和最大似然估计(MEL)两种方法对删失数据带固定效应部分线面板数据模型进行估计的结果，结果显示 EL 与 MEL 相比，EL 下的 BIAS 和 RMSE 值最小，即参数估计值和非参数函数估计值更接近于完整数据集下的估计结果。在生活环境数据的真实案例的删失数据的处理中，EL 在拟合参数和非参数函数方面表现良好。

表 4.3:右删失下参数和非参数函数的估计结果

估计	Σ_v	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{m}_1(\cdot)$	$\hat{m}_2(\cdot)$
方法		BIAS	BIAS	RMSE	RMSE
EL	0.2^2	0.0347	0.0343	0.0168	0.0180
	0.4^2	0.0496	0.0353	0.0226	0.0243
MEL	0.2^2	0.1339	0.1348	0.0418	0.0347
	0.4^2	0.1785	0.2164	0.0473	0.0372

4.4 主要结果的证明

在讨论样本性质之前，先给出一些正则性条件：

C1 随机变量 U_{it} 有连续的密度函数 $f(\cdot)$ 有界 $\mathcal{U}$ 支撑，
 $0 < \inf_{u \in \mathcal{U}} f(\cdot) \leq \sup_{u \in \mathcal{U}} f(\cdot) < \infty$ 。

C2 函数 $E(X_{it} | U_{it} = u)$ 和 $m(\cdot)$ 有两个边界并且在 $\mathcal{U}$ 上连续可导。

C3 核 $K(v)$ 是一个对称概率密度函数，在其紧支撑 $\mathcal{Z}$ 上具有连续导数。

C4 $(\mu_t, Z_{it}, U_{it}, \varepsilon_{it})$ ， $i = 1, \dots, n$ ， $t = 1, \dots, T$ 是 *i.i.d*。 $E(\varepsilon | Z, U, \mu) = 0$ 几乎可以肯定。此外，对于某些整数 $k \geq 4$ ，满足 $E(Z^k) \leq \infty$ ， $E(\varepsilon^k) \leq \infty$ ， $E(\|X_{it} - E(X_{it} | U_{it})\|^{2+\delta}) \leq \infty$ 是非奇异的。

C5 (a) 对于任何的 $s \leq \varsigma_G = \inf\{t : A(u) = 1\}$ ， $A(s)$ 和 $F(s)$ 不存在共同的跳，其中 $A(u) = P(M \leq u)$ 。(b) $\int_0^{\varsigma_A} \|P(Y_{11})\| (1 - \phi^A(u)) dA(u) < \infty$ 。

C6 (a) 对于每个固定的 t ，变量在下标 i 上是独立且同分布的，对于每个固定的 i ，变量在下标 t 上是严格平稳的；

(b) 对于每个固定的 i ，过程 $\{\varepsilon_{it}\}$ 是 α -混合的平稳序列，混合系数满足条件 $\alpha(k) = O(K^{-\hbar})$ 其中 $\hbar = (2 + \kappa)(1 + \kappa)/2$ ， $\kappa > 2$ ；

(c) 存在正整数 $p := p(n)$ 和 $q := q(n)$ ，以至于对于足够大的 n 满足：

(i) $p+q \leq n, q/p = o(1)$ 和 $p/n = o(1)$; (ii) 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $n\alpha(q)/p \rightarrow 0$ 。

为了方便后面计算, 令 $\Delta\phi^A(s) = \phi^A(s) - \phi^A(s-)$, $R^{\otimes 2} = RR^\tau$, $d_n = n^{-1/3-\varpi} + a_n$, $0 < \varpi < 1/6$, $\phi^A = \int_{-\infty}^s \bar{A}^{-1}(u) dA(u)$, $c_N = \{\log(1/h)(Nh)\}^{1/2} + h^2$, 其中 $N = nT$, $P(t) = E[(X_{11} + v_{11})Y_A I(t < M)]A^{-1}(t)F^{-1}(t)$ 。

引理 4.1 假设条件 C1-C6 成立。那么

$$C^\tau(u, h)W_h(u)C(u, h) = Nf(u) \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix} \{1 + O_p(c_N)\},$$

$$C^\tau(u, h)W_h(u)X = Nf(u)E(X|u) \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^\tau \{1 + O_p(c_N)\}.$$

证明: 该引理与 Fan 等^[61]引理 A.2 和引理 A.3 的证明类似, 此处省略证明细节。

引理 4.2 假设条件 C1-C6 成立。那么

$$E \left| m(U_{it}) - \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T m_{it} g(u_{it}) \right|^2 = O(h^4).$$

证明: 该引理与 He 等^[64]引理 A.2 的证明类似, 此处省略证明细节。

定理 1 的证明 在定理 1 的条件下, 根据(4.4)式对 $\Lambda_i(\beta)$ 的定义, 将 $\Lambda_i(\beta)$ 展开可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^n \Lambda_i(\beta) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T \tilde{Z}_{it}^\tau W(\tilde{Y}_{itA_n} - \tilde{Z}_{it}\beta) - \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (T-1) \Sigma_v \beta \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T \tilde{Z}_{it}^\tau W(\tilde{Y}_{itA_n} - \tilde{Y}_{itA}) + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T \tilde{Z}_{it}^\tau W(\tilde{Y}_{itA} - \tilde{Z}_{it}\beta) \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (T-1) \Sigma_v \beta \\ &= I_{an} + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (\tilde{X}_{it}^\tau + \tilde{v}_{it}) W(\tilde{Y}_{itA} - (\tilde{X}_{it} + \tilde{v}_{it})\beta) - \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (T-1) \Sigma_v \beta \\ &= I_{an} + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T \{ \tilde{X}_{it}^\tau W \tilde{\varepsilon}_{it} - \tilde{X}_{it}^\tau W \tilde{v}_{it} \beta_0 + \tilde{X}_{it}^\tau W \tilde{m}_{it} + \tilde{v}_{it} W \tilde{m}_{it} - \tilde{v}_{it} W \tilde{v}_{it}^\tau \beta + \tilde{v}_{it} W \tilde{\varepsilon}_{it} \\ &\quad - \Sigma_v \beta \} \\ &:= I_{an} + I_{1n} - I_{2n} + I_{3n} + I_{4n} - I_{5n} + I_{6n} - I_{7n}. \end{aligned}$$

记

$$B_{it}(u) = N_{it}(u) - \int I[M_{it} \geq s] d\phi^A(s),$$

$$N_{it}(u) = I[M_{it} \leq u, \delta_{it} = 0],$$

$$Y_n(u) = \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T I[M_{it} \geq u].$$

经过简单整理可得

$$I_{an} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T \frac{(\tilde{X}_{it} + \tilde{v}_{it}) W M_{it} \delta_{it}}{1 - A(M_{it})} \int_{s < M_{it}} \frac{1 - A_n(s-)}{Y_n(s) [1 - A(s)]} d B_{jk}(u).$$

用 F_n 表示 F 的 Kaplan-Meier 估计, 记

$$\hat{\Sigma}_n = N^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (\tilde{X}^T W \tilde{X} - (T-1) \Sigma_v)^{\otimes 2},$$

$$\hat{\omega}_1 = N^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (\tilde{Z}_{it}^T W [\tilde{Y}_{it A_n} - \tilde{Z}_{it} \beta - (T-1) \Sigma_v \beta])^{\otimes 2},$$

$$P_n(s) = \frac{N^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T Z_{it} Y_{A_n} I(s < M_{it})}{1 - A_n(s-)(1 - F_n(s-))}, \quad \phi^{A_n}(s) = N^{-1} \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (1 - \delta_{it}) I(M_{it} \leq s)}{1 - A_n(s-)(1 - F_n(s-))},$$

$$\hat{\omega}_2 = N^{-1} (T-1) \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (1 - \delta_{it}) P(M_{it}) P^T(M_{it}) (1 - \Delta \phi^{A_n}(M_{it}-)).$$

利用 F_n 和 A_n 的一致相合性, 经过运算可得

$$I_{an} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T \int_{-\infty}^{\epsilon_F} \frac{E[(\tilde{X}_{11} + \tilde{v}_{11}) W M_{1A} I[s < M]]}{(1 - A(s))(1 - F(s-))} d B_{jk}(s) + o_p(1).$$

由 Rebolledo 的鞅中心极限定理, 可得 $I_{an} \sim N(0, \omega_2)$ 。通过引理 4.1-引理 4.2, 可

以很容易得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^n \Lambda_i(\beta) &= \frac{T-1}{T \sqrt{N}} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T \left\{ [(X_{it} - E(X_{it} | U_{it}))(\varepsilon_{it} - v_{it} \beta)] + v_{it} \varepsilon_{it} + (v_{it}^T v_{it} - \Sigma_v) \beta_0 \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T \frac{T-1}{T} (X_{it} - E(X_{it} | U_{it}))(\varepsilon_{it} - v_{it} \beta) + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T \left(\frac{T-1}{T} v_{it}^T \varepsilon_{it} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T \left\{ \frac{T-1}{T} (v_{it}^T v_{it} - \Sigma_v) \beta_0 \right\} + o_p(1). \end{aligned}$$

根据 Cramer-Wold 设置的经验, 只需验证对于 $d \times 1$ 向量 $a \neq 0$ 满足

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^n a^\tau \Lambda_i(\beta) := \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T \tilde{V}_{it} \xrightarrow{d} N(0, a^\tau \varpi a). \quad (4.7)$$

选择 $p := p_T$ 和 $q := q_T$ 使其满足 $p/n \rightarrow 0$, $q/p \rightarrow 0$ 和 $n\alpha(q)/p \rightarrow 0$ 。设 $w := w_T = [T/(p_T + q_T)]$, 为了证明(4.7)式, 本章使用 Bernstein 的大小块方法。对集合 $\{1, 2, \dots, T\}$ 进行分区, 分成 $2w+1$ 个子集, 分别是具有 p 大小的大块和 q 大小的小块。将 $\xi_{ij}, \xi'_{ij}, \xi''_{ij}$ 定义为下列式子: 对于 $0 \leq j \leq w$

$$\xi_{ij} = \sum_{t=k_m}^{k_m+p-1} \tilde{V}_{it}, \quad \xi'_{ij} = \sum_{t=l_m}^{l_m+q-1} \tilde{V}_{it}, \quad \xi''_{iw} = \sum_{t=w(p+q)+1}^n \tilde{V}_{it},$$

其中 $k_m = (m-1)(p+q)+1$, $l_m = (m-1)(p+q)+p+1$, $m=1, \dots, w$ 。然后

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T \tilde{V}_{it} &= \frac{1}{\sqrt{N}} \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^w \xi_{ij} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^w \xi'_{ij} + \sum_{i=1}^n \xi''_{iw} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \{S'_n + S''_n + S'''_n\}. \end{aligned}$$

因此, 为了证明(4.6)式, 可以转换成证明, 当 $n \rightarrow 0$

$$\frac{1}{N} E(S''_n)^2 \rightarrow 0, \quad \frac{1}{N} E(S'''_n)^2 \rightarrow 0, \quad (4.8)$$

$$\text{Var}(N^{-1/2} S'_n) \rightarrow a^\tau \Delta a, \quad (4.9)$$

$$\left| E \exp \left(it \sum_{j=1}^w N^{-\frac{1}{2}} \xi_{ij} \right) - \prod_{j=1}^w E \exp \left(it \sum_{j=1}^w N^{-\frac{1}{2}} \xi_{ij} \right) \right| \rightarrow 0, \quad (4.10)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^w E \xi_{ij}^2 I(|\xi_{ij}| > \vartheta \sqrt{n}) \rightarrow 0, \quad \forall \vartheta > 0. \quad (4.11)$$

式(4.8)关系表明 $S''_n/\sqrt{N}$ 和 $S'''_n/\sqrt{N}$ 在概率上是渐近可忽略的; 式(4.10)表明 $S'_n/\sqrt{N}$ 中的 ξ_{ij} 是渐近独立的, 并且式(4.9)和(4.11)显示 $S'_n/\sqrt{N}$ 的渐近正态性的标准 Lindeberg-Feller 条件, 表示其独立。结合 C4, C6 与 Hall^[65]的引理, 能得到:

$$\begin{aligned} \left| \text{cov}(\xi_{ij_1}, \xi_{ij_2}) \right| &\leq c_1 \sum_{0 \leq j_1 \leq j_2 \leq w} \sum_{j_1=k_1}^{k_1+p-1-k_2+p-1} \sum_{j_2=k_2} \text{cov}(\tilde{V}_{\bar{p}_j+p_T+j_1}, \tilde{V}_{\bar{p}_j+p_T+j_2}) \\ &\leq cwp \sum_{z=1}^q \alpha^{1/2}(z) = o(1). \end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^w \text{Var}(\xi_{ij}) &= \sum_{i=1}^n \text{Var}(\tilde{V}_{it}) + 2 \sum_{m=1}^w \sum_{k_m \leq t_1 \leq t_2 \leq k_m + p - 1} \text{cov}(\tilde{V}_{it1}, \tilde{V}_{it2}) \\ &\quad - \sum_{m=1}^w \sum_{t=l_m}^{l_m+q-1} \text{Var}(\tilde{V}_{it}) - \sum_{t=w(p+q)+1}^n \text{Var}(\tilde{V}_{it}). \end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^w \sum_{k_m \leq t_1 \leq t_2 \leq k_m + q - 1} |\text{cov}(\tilde{V}_{it1}, \tilde{V}_{it2})| &\leq cwq \sum_{z=1}^n \alpha^{1/2}(z) \leq \frac{cq}{p} = o(1), \\ \sum_{m=1}^w \sum_{t=l_m}^{l_m+q-1} \sum_{t_2-t_1=q}^n |\text{cov}(\tilde{V}_{it1}, \tilde{V}_{it2})| &\leq cwp \sum_{z=q}^n \alpha^{1/2}(z) \leq cn^{1-\iota/2} = o(1). \end{aligned}$$

然后能推导

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^w \sum_{k_m \leq t_1 \leq t_2 \leq k_m + q - 1} |\text{cov}(\tilde{V}_{it1}, \tilde{V}_{it2})| &= \sum_{1 \leq t_1 \leq t_2 \leq T} |\text{cov}(\tilde{V}_{it1}, \tilde{V}_{it2})| + o(1), \\ \sum_{m=1}^w \sum_{t=l_m}^{l_m+q-1} \text{Var}(\tilde{V}_{it}) &\leq cwq = o(1), \\ \sum_{t=w(p+q)+1}^n \text{Var}(\tilde{V}_{it}) &\leq c(n - w(p+q)) = o(1). \end{aligned}$$

因此, 获得

$$\begin{aligned} \text{Var}(S'_n) &= \sum_{i=1}^n \text{Var}(\tilde{V}_{it}) + 2 \sum_{1 \leq t_1 \leq t_2 \leq T} |\text{cov}(\tilde{V}_{it1}, \tilde{V}_{it2})| + o(1) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(\tilde{V}_{it}) + o(1) \\ &= a^\tau \Delta a + o(1), \end{aligned}$$

综上所述, (4.6)式的成立, 即证明了定理 1。

引理 4.3 由定理 1 条件, 有

$$N^{-1} \sum_{i=1}^n \Lambda_i(\beta) \Lambda_i^\tau(\beta) \xrightarrow{d} \varpi, \quad \max_{1 \leq i \leq n} \Lambda_i(\beta) = o_p(n/p).$$

证明: 令

$(T-1)(T\sqrt{N})^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T \{[X_{it} - E(X_{it} | U_{it})](\varepsilon_{it} - v_{it}\beta) + v_{it}\varepsilon_{it} + (v_{it}^\tau v_{it} - \Sigma_v)\beta_0\} = \wp$, 计算得出

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^n \Lambda_i \Lambda_i^\tau &= \frac{T-1}{T\sqrt{N}} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T \left(\varpi^{\otimes 2} - 2\varpi \wp + \wp^{\otimes 2} \right) \\
 &= \varphi_{ant} + \varphi_{bnt} + \frac{T-1}{T\sqrt{N}} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T \left\{ v_{it}^\tau v_{it}^\tau \varepsilon_{it}^2 + \left(X_{it} - E(X_{it} | U_{it}) \right)^\tau (\varepsilon_{it} - v_{it} \beta_0)^2 \right. \\
 &\quad \cdot \left(X_{it} - E(X_{it} | U_{it}) \right) + \left[(v_{it}^\tau v_{it} - \Sigma_v) \beta_0 \right]^2 + 2 \left(X_{it} - E(X_{it} | U_{it}) \right) \\
 &\quad \cdot (v_{it}^\tau v_{it} - \Sigma_v) \varepsilon_{it} \beta_0 - 2 \left(X_{it} - E(X_{it} | U_{it}) \right) (v_{it}^\tau v_{it} - \Sigma_v) \beta_0 v_{it} \beta_0 \\
 &\quad - 2 \left(X_{it} - E(X_{it} | U_{it}) \right) v_{it} \beta_0 v_{it} \varepsilon_{it} + 2 \left(X_{it} - E(X_{it} | U_{it}) \right) \varepsilon_{it} v_{it} \varepsilon_{it} \\
 &\quad \left. + 2 (v_{it}^\tau v_{it} - \Sigma_v) \beta_0 v_{it} \varepsilon_{it} \right\} \\
 &= \varphi_{ant} + \varphi_{bnt} + \sum_{k=1}^8 \varphi_{knt}.
 \end{aligned}$$

由 Liu^[52]的引理 2 可知

$$\max_{1 \leq i \leq n, 1 \leq t \leq T} |\varphi_{ant}| = o_p(n^{1/2}), \quad \max_{1 \leq i \leq n, 1 \leq t \leq T} |\varphi_{bnt}| = o_p(n^{1/2}),$$

对于每个 i ，记 $E(v_{it}^\tau v_{it}^\tau \varepsilon_{it}^2 - \Sigma_v) = 0$ 。然后结合 C4，C6 与 Hall^[65]的结论，对于任意 $d \times 1$ 向量 $\mathbf{a}$ ， $0 < \delta < \delta_1/2$ ， $\iota > 0$ ，有

$$\begin{aligned}
 &E \left[\mathbf{a}^\tau \varphi_{1nt} \mathbf{a} - n^{-1} (T-1) / T \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T \mathbf{a}^\tau \Sigma_v \mathbf{a} \right]^2 \\
 &= N^{-2} (T-1)^2 / T^2 E \left[\sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T \mathbf{a}^\tau (v_{it}^\tau v_{it}^\tau \varepsilon_{it}^2 - \Sigma_v) \mathbf{a} \right]^2 \\
 &= N^{-2} (T-1)^2 / T^2 \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \sum_{1 \leq t \leq T} E \left[\mathbf{a}^\tau (v_{it}^\tau v_{it}^\tau \varepsilon_{it}^2 - \Sigma_v) \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}^\tau (v_{jt}^\tau v_{jt}^\tau \varepsilon_{jt}^2 - \Sigma_v) \mathbf{a} \right] \\
 &\leq c \cdot N^{-2} \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \sum_{1 \leq t \leq T} E \left[\mathbf{a}^\tau (v_{it}^\tau v_{it}^\tau \varepsilon_{it}^2 - \Sigma_v) \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}^\tau (v_{jt}^\tau v_{jt}^\tau \varepsilon_{jt}^2 - \Sigma_v) \mathbf{a} \right] + O(n^{-1}) \\
 &\leq c \cdot N^{-2} \sum_{i=1}^{n-1} (n-m) m^{-\iota \delta / (2+\delta)} + O(n^{-1}) = O(n^{-\iota \delta / (2+\delta) - 1}) = o(1).
 \end{aligned}$$

这意味着 $\varphi_{1nt} \xrightarrow{P} \sigma^2 \Sigma_v$ 。同样，可以推导

$$\begin{aligned}
 \varphi_{3nt} &\xrightarrow{P} \left[(v_{it}^\tau v_{it} - \Sigma_v) \beta_0 \right]^2, \\
 \varphi_{2nt} &\xrightarrow{P} E \left\{ \left(X_{it} - E(X_{it} | U_{it}) \right)^\tau (\varepsilon_{it} - v_{it} \beta_0)^2 \left(X_{it} - E(X_{it} | U_{it}) \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

因此，为了证明这个引理，只需要证明 $\varphi_{knt} = o_p(1)$ ， $k=4, \dots, 8$ 。对于 φ_{4nt} ，

有 $E(v_{it}^\tau v_{it}) = 0$ 。对于 $t_1 \neq t_2$ ，与 C4 和 C6 一起，得出对于任意 $d \times 1$ 向量 $\mathbf{a}$ ：

$$E\left(\mathbf{a}^\tau \varphi_{4nt} \mathbf{a}\right)^2 = 4N^{-2}(T-1)^2 / T^2 E\left[\sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T \mathbf{a}^\tau \left((X_{it} - E(X_{it} | U_{it}))(\mathbf{v}_{it}^\tau \mathbf{v}_{it} - \Sigma_v) \varepsilon_{it} \beta_0\right) \mathbf{a}\right]^2 \leq Cn^{-1} = o_p(1).$$

这样得到 $\varphi_{4nt} = o_p(1)$ 。同样，可以得出 $\varphi_{knt} = o_p(1)$, $k=4,5,6$ ，至于 φ_{7nt} ，记 $\{2(\mathbf{v}_{it}^\tau \mathbf{v}_{it} - \Sigma_v) \beta_0 \mathbf{v}_{it} \varepsilon_{it}\}$ 是稳态的 α -混合，然后结合 C4, C6 与 Yang^[66] 的定理 2，可以获得 $\varphi_{7nt} = o_p(1)$ 。同理可得 $\varphi_{8nt} = o_p(1)$ 。可证得 $\max_{1 \leq i \leq n} \Lambda_i(\beta) = o_p(1)$ ，即引理 4.3 证明完成。

定理 2 的证明：对 $\hat{l}_n(\beta)$ 应用 Taylor 展开，可以得到

$$-2\hat{l}_n(\beta) = 2N^{-1} \sum_{i=1}^n \left\{ \gamma^\tau \hat{\Lambda}_i(\beta) - \left[\gamma^\tau \hat{\Lambda}_i(\beta) \right]^2 / 2 \right\} + o_p(1), \quad (4.12)$$

又因为

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n \frac{\hat{\Lambda}_i(\beta)}{1 + \gamma^\tau \hat{\Lambda}_i(\beta)} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n \hat{\Lambda}_i(\beta_0) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\Lambda}_i(\beta) \hat{\Lambda}_i^\tau(\beta) \gamma \\ &\quad + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n \frac{\hat{\Lambda}_i(\beta) \left[\gamma^\tau \hat{\Lambda}_i(\beta) \right]^2}{1 + \gamma^\tau \hat{\Lambda}_i(\beta)}. \end{aligned}$$

由 Liu^[52] 的引理 4 结合引理 4.3 可知

$$N^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{\left\| \hat{\Lambda}_i(\beta) \right\|^3 \left\| \gamma \right\|^2}{\left| 1 + \gamma^\tau \hat{\Lambda}_i(\beta) \right|} < \left\| \gamma \right\|^2 \max_{1 \leq i \leq n} \left\| \hat{\Lambda}_i(\beta) \right\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\| \hat{\Lambda}_i(\beta) \right\|^2 = o_p(1).$$

从而有 $\gamma = [\hat{\Lambda}_i(\beta) \hat{\Lambda}_i^\tau(\beta)]^{-1} \sum_{i=1}^n \hat{\Lambda}_i(\beta) + o_p(1)$ ，结合(4.12)式可得

$$\hat{l}_n(\beta) = \left(N^{-1} \sum_{i=1}^n \hat{\Lambda}_i(\beta) \right)^\tau \left(N^{-1} \sum_{i=1}^n \hat{\Lambda}_i(\beta) \hat{\Lambda}_i^\tau(\beta) \right)^{-1} \left(N^{-1} \sum_{i=1}^n \hat{\Lambda}_i(\beta) \right) + o_p(1),$$

定理 2 证明完成。

4.5 本章小结

本章研究了删失数据下带有固定效应部分线性面板数据模型的经验似然推断。在提出的模型中首先通过 **Kaplan-Meier** 的估计方法处理删失数据带来的估计偏差, **Kaplan-Meier** 方法不仅对个体在研究结束时还未发生事件或被失去跟踪时, 能够正确处理这些截尾数据。而且还不依赖于任何特定的分布假设, 在部分个体观测时间较短或缺失的情况下, 可以提供可靠的估计结果。在利用虚拟变量方法来消除未知固定效应之后, 通过“衰减校正”来解决测量误差引起的不一致问题, 结合一个合适的辅助变量, 构造了协变量含测量误差情况下未知参数的修正经验对数似然比统计量, 以及在适当的条件下, 通过模拟与实证分析验证了方法的效果。

第5章 总结与展望

5.1 总结

随着半参数面板数据模型的应用更加广泛,本文在此基础上,主要考察了是部分线性可加面板数据模型和误差为混合条件下部分线性面板数据模型的参数估计及其检验问题。为了使模型更加贴合实际情况,将实验过程中可能出现的数据删失与模型相结合。针对删失数据下带固定效应的面板数据模型的统计推断问题,本文采用的是 Kaplan-Meier 估计方法来处理删失数据带来的估计偏差,再通过虚拟变量方法来消除模型中未知的固定效应,然后运用“衰减校正”来解决测量误差引起的不一致问题,在此基础上,构造了协变量含测量误差情况下未知参数的修正经验对数似然比统计量,并在合适的正则条件下,证明了其服从卡方分布。文章进一步通过数据模拟和相关实际数据分析来验证估计方法是合理有效的。

5.2 展望

今后作者将继续对以下几个方面做研究:

- 1、本文主要是对半参数面板数据模型的参数部分进行了研究,今后还准备对更为复杂的模型非参数部分进行进一步的研究。
- 2、本文研究的是响应变量为删失数据,并且协变量中带有测量误差的数据,今后还可以对在误差为混合条件下,响应变量为纵向数据,所有协变量都有测量误差的情况进行研究。
- 3、本文主要是运用经验似然的方法来研究模型,今后考虑对更为复杂的模型,如时变系数半参数面板数据模型、空间单指标面板数据等模型运用惩罚经验似然的方法来进行研究。

参考文献

- [1] Li Q, Stengos T. Semiparametric estimation of partially linear panel data models[J]. *Journal of Econometrics*, 1996, 71(1): 389-397.
- [2] Henderson D J, Carroll R J, Qi L. Nonparametric estimation and testing of fixed effects panel data models[J]. *Journal of Econometrics*, 2008, 144(1): 257-275.
- [3] 魏传华, 吴喜之. 非参数固定效应 panel data 模型的统计推断[J]. *数理统计与管理*, 2009, 28(4): 631-636.
- [4] Dai X, Jin L, Tian Y, et al. Quantile regression for panel data models with fixed effects under random censoring[J]. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 2020, 49(18): 4430-4445.
- [5] Baltagi B H, Li D. Series estimation of partially linear panel data models with fixed effects[J]. *Annals of Economics and Finance*, 2002, 3(1): 103-116.
- [6] Ullah A, Su L. Profile likelihood estimation of partially linear panel data models with fixed effects[J]. *Economics Letters*, 1983, 92(1): 75-81.
- [7] Zhang J H, Feng S Y, Li G R, et al. Empirical likelihood inference for partially linear panel data models with fixed effects[J]. *Economics Letters*, 2011, 113(2): 165-167.
- [8] He B Q, Hong X J, Fan G L. Block empirical likelihood for partially linear panel data models with fixed effects[J]. *Statistics and Probability Letters*, 2017, 123(3): 128-138.
- [9] Sheng J H, Liang J S, Tao J. Profile GMM estimation of panel data models with interactive fixed effects[J]. *Journal of Econometrics*, 2023, 235(2): 927-948.
- [10] Li L, Wen S, Xing Q Z. Semiparametric estimation and testing for panel count data with informative interval-censored failure event[J]. *Statistics in medicine*, 2023, 42(30): 5596-5615.
- [11] Engle F R, Granger J W C, Rice J, et al. Semiparametric estimates of the relation between weather and electricity sales[J]. *Journal of the American Statistical*

- Association, 1986, 81(394): 310-320.
- [12]Robinson P M. Root-N-consistent semiparametric regression[J]. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1988, 56(4): 931-954.
- [13]Heckman N E. Spline smoothing in a partly linear model[J]. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 1986, 48(2): 244-248.
- [14]Rice J. Convergence rates for partially splined models[J]. *Statistics and Probability Letters*, 1986, 4(4): 203-208.
- [15]Green P J, Siluerman B W. Nonparametric regression and generalized linear models: a roughness penalty approach[M]. Florida: CRC and Press and LLC, 1993.
- [16]Eubank R, Kambour E, Kim J, et al. Estimation in partially linear models[J]. *Computational Statistics and Data Analysis*, 1998, 29(1): 27-34.
- [17]Gao J. Asymptotic theory for partly linear models[J]. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 1995, 24(8): 1985-2009.
- [18]Hamilton A, Truong Y K. Local linear estimation in partly linear models[J]. *Journal of Multivariate Analysis*, 1997, 60(1): 1-19.
- [19]Wang Q H, Jing B Y. Empirical likelihood for partial linear models with fixed designs[J]. *Statistics and Probability Letters*, 1999, 41(4): 425-433.
- [20]Shi J, Lau T. Empirical likelihood for partially linear models[J]. *Journal of Multivariate Analysis*, 2000, 72(1): 132-148.
- [21]Wang Q, Li G. Empirical likelihood semiparametric regression analysis under random censorship[J]. *Journal of Multivariate Analysis*, 2002, 83(2): 469-486.
- [22]Xue L, Zhu L. Empirical likelihood semiparametric regression analysis for longitudinal data[J]. *Biometrika*, 2007, 94(4): 921-937.
- [23]Xue L G, Xing Z. Empirical likelihood-based inference in a partially linear model for longitudinal data[J]. *Science in China Series A: Mathematics*, 2008, 51(1): 115-130.
- [24]Liang H, Qin Y. Empirical likelihood-based inferences for partially linear models with missing covariates[J]. *Australian and New Zealand Journal of Statistics*, 2008, 50(4): 347-359.

- [25]Yang Y, Xue L, Cheng W. Empirical likelihood for a partially linear model with covariate data missing at random[J]. Journal of Statistical Planning and Inference, 2009, 139(12): 4143-4153.
- [26]Lu X. Empirical likelihood for heteroscedastic partially linear models[J]. Journal of Multivariate Analysis, 2009, 100(3): 387-396.
- [27]Qin Y, Li J. Empirical likelihood for partially linear models with missing responses at random[J]. Journal of Nonparametric Statistics, 2010, 23(2): 497-511.
- [28]Qin Y, Li Y. Empirical Likelihood for Partially Linear Models with Missing Responses: The Fixed Design Case[J]. Communications in Statistics-Theory and Methods, 2011, 40(10): 1849-1865.
- [29]Xue L, Xue D. Empirical likelihood for semiparametric regression model with missing response data[J]. Journal of Multivariate Analysis, 2011, 102(4): 723-740.
- [30]Zhang J, Feng S, Li G, et al. Empirical likelihood inference for partially linear panel data models with fixed effects[J]. Economics Letters, 2011, 113(2): 165-167.
- [31]Breiman L, Friedman H J. Estimating optimal transformations for multiple regression and correlation[J]. Journal of the American Statistical Association, 2012, 80(391): 580-598.
- [32]Leo B. Discussion: linear smoothers and additive models[J]. The Annals of Statistics, 2007, 17(2): 510-515.
- [33]Li Q. Efficient estimation of additive partially linear models[J]. International Economic Review, 2000, 41(4): 1073-1092.
- [34]Fan J Q, Li Q. A kernel-based method for estimating additive partially linear models[J]. Statistica Sinica, 2003, 13(3): 739-762.
- [35]Jun Z G, Lei W. Communication-efficient distributed estimation of partially linear additive models for large-scale data[J]. Information Sciences, 2023, 631(1): 185-201.
- [36]Adam M, Lan W, Xiao H Z, et al. Quantile partially linear additive model for data

- with dropouts and an application to modeling cognitive decline[J]. *Statistics in Medicine*, 2023, 42(16): 2729-2745.
- [37]Ze C, Jun L, Wang L X, et al. Multifold cross-validation model averaging for generalized additive partial linear models[J]. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 2023, 32(4): 1649-1659.
- [38]Yuan Q Z, Hong L, Ya Q F. Inference for partially linear additive higher-order spatial autoregressive model with spatial autoregressive error and unknown heteroskedasticity[J]. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 2023, 52(3): 898-924.
- [39]Rosenblatt M. A central limit theorem and a strong mixing condition[J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 1956, 42(1): 43-47.
- [40]Lin Z Y, Lin C R, Lu C. Limit theory for mixing dependent random variables[M]. Berlin: Springer Science and Business Media, 1997.
- [41]Herrndorf N. A functional central limit theorem for weakly dependent sequences of random variables[J]. *The Annals of Probability*, 1984, 12(1): 141-153.
- [42]Philipp W. Mixing sequences of random variables and probabilistic number theory[M]. London: American Mathematical Society, 1971.
- [43]Liu Q, Xue L. Asymptotic normality for the partially linear EV models with longitudinal data[J]. *Communications in Statistics Theory and Methods*, 2009, 40(7): 1149-1158.
- [44]赵明涛, 许晓丽. 纵向部分线性变系数 EV 模型的估计[J]. *统计研究*, 2019, 36(10): 115-128.
- [45]李晓妍. 带线性误差的部分线性 EV 模型的经验似然推断[J]. *统计与决策*, 2017, 19(4): 18-23.
- [46]Li Y, Yan X T, Xia C. Empirical likelihood for partially linear errors-in-variables models with longitudinal data[J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, 2022, 38(3): 664-683.
- [47]Owen A. Empirical likelihood ratio confidence intervals for a single functional[J]. *Biometrika*, 1988, 75(2): 237-249.

- [48]鲁小凡, 孙志华, 王晴晴. 协变量随机删失时部分线性模型的估计[J]. 数理统计与管理. 2022, 41(02): 279-293.
- [49]Hadi E, Koeosh A. Robust ridge estimator in censored semiparametric linear models[J]. Communications in Statistics-Theory and Methods, 2023, 52(17): 5989-6007.
- [50]杨晓蓉, 李路, 武皓月. 删失部分线性可加模型的复合分位数回归及应用[J]. 应用概率统计, 2023, 39(04): 604-622.
- [51]侯文. 删失数据下若干半参数模型的经验似然与惩罚经验似然推断[D]. 大连:大连理工大学, 2013.
- [52]Liu Q. Estimation of the linear EV model with censored data[J]. Journal of Statistical Planning and Inference, 2011, 141(7): 2463-2471.
- [53]Ai C, You J, Zhou Y. Estimation of fixed effects panel data partially linear additive regression models[J]. The Econometrics Journal, 2014, 17(1): 83-106.
- [54]Hastie T J, Tibshirani R J. Generalized additive models[M]. New York: Chapman and Hall, 1990.
- [55]Su L, Ullah J A. Profile likelihood estimation of partially Linear panel data models with models with fixed effects[J]. Econometrics Letters, 2006, 92(1): 75-78.
- [56]Liang H, Thurston H, Ruppert D, et al. Additive partial linear models with measurement errors[J]. Biometrika, 2008, 95(3): 667-678.
- [57]Owen A. Empirical likelihood[M]. New York: Chapman and Hall, 2001.
- [58]Opsomer J D. Asymptotic properties of backfitting estimators[J]. Journal of Multivariate Analysis, 2000, 73(2): 166-179.
- [59]Dockery D W, Berkey C S, Ware J H, et al. Distribution of forced vital capacity and forced rpiratory volume in one second in children 6 to 11 years of age 1–3[J]. The American review of respiratory disease, 1983, 128(3): 405-412.
- [60]Mack Y P, Silverman B W. Weak and strong uniform consistency of kernel regression estimates[J]. Zeitschrift Für Wahrscheinlichkeitstheorie and Verwandte Gebiete, 1982, 61(3):405-415.
- [61]Fan J, Huang T. Profile likelihood inferences on semiparametric

- varying-coefficient partially linear models[J]. *Bernoulli*, 2005, 11(6): 1031-1057.
- [62] Opsomer J D, Ruppert D. Fitting a bivariate additive model by local polynomial regression[J]. *The Annals of Statistics*, 2002, 25(1): 186-211.
- [63] Owen A. Empirical likelihood for linear models[J]. *Annals of Statistics*, 1991, 19(4): 1725–1747.
- [64] He B Q, Hong X J, Fan G L. Penalized empirical likelihood for partially linear errors-in-variables panel data models with fixed effects[J]. *Statistical Papers*, 2018, 61(6): 2351-2381.
- [65] Hall P, Heyde C C. *Martingale limit theory and its application*[M]. New York: Academic Press, 1980: 278-280.
- [66] Yang S C. Maximal moment inequality for partial sums of strong mixing sequences and application[J]. *Acta Mathematica Sinica-English Series*, 2007, 23(6): 1013–1024.

攻读硕士期间取得的学术成果

[1]姚钰琦, 何帮强. 删失数据下带固定效应部分线性面板数据模型的经验似然[J]. 阜阳师范大学(已录用).

致谢

光阴荏苒，如白驹过隙，硕士生涯始于 2021 年五谷飘香的初秋，终于 2024 年绿豆沙冰的盛夏，总以为来日方长，殊不知时光匆匆，不等行人。回首往昔，皆如昨日，不由感慨、感恩和感谢！“一个人有多优秀，要看他有谁指点；一个人能走多远，要看他与谁同行；一个人有多成功，要看他有谁相伴。”研究生学习期间，我很幸运，在这期间遇到这么多让我感恩的老师，感谢的同学和朋友！

首先，我要衷心感谢我的导师何帮强教授。感谢何帮强教授在科学研究的道路上给予我悉心的培养和教导。特别是本文的写作，从选题到最终定稿都离不开导师的督促和精心指导。我不仅从何老师那里学到了半参统计的基本知识，而且也学到了做学问和做人踏实的态度。何老师严谨的治学态度，孜孜不倦的科研作风，使我在学习期间收获颇丰的同时，也将使我终身受益。对何老师的付出，在此谨致以深深的敬意和感谢！

山水一程，有幸与益友相遇。感谢我的朋友们，生活中那些开怀大笑的美好瞬间都有你们的身影。感谢我的朋友们让我的生活更加丰富更加充实，衷心祝愿我们在以后的日子里顺心如意，在各自的领域内能闪闪发光。

最后，我要特别感谢我的父母和我的妹妹，他们一直在以各种不同的形式支持和帮助我，坚定地支持着我的学业，并且给我营造了轻松的学习环境，是他们的理解、支持和鼓励让我顺利完成学业，他们是我求学和成长过程中最坚实的后盾。