
分类号: O231.2

单位代码: 10363

密 级: 公开

学 号: 2211020144

题 目 离散系统的动态事件触发采样控制

英文并列

题 目 **DYNAMIC EVENT-TRIGGERED SAMPLING
CONTROL OF DISCRETE-TIME SYSTEMS**

论 文 作 者: 黄 超

指 导 教 师: 吴小太 教授

学 科 (专 业): 数 学

研 究 方 向: 最优控制理论及应用

论文答辩日期: 2024 年 5 月 29 日

安徽工程大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：我恪守学术道德，崇尚严谨学风。所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已明确注明和引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品及成果的内容。论文为本人亲自撰写，我对所写的内容负责，并完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

学位论文作者签名：黄超

日期：2024 年 5 月 31 日

安徽工程大学学位论文版权使用授权书

学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅或借阅。本人授权安徽工程大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保密 ☐，在 _____ 年解密后适用本版权书。

本学位论文属于

不保密 ☒。

学位论文作者签名：黄超

指导教师签名：吴叶

日期：2024 年 5 月 31 日

日期：2024 年 5 月 31 日

离散系统的动态事件触发采样控制

摘要

作为控制领域的热点研究课题,离散系统的稳定性分析与控制受到广大研究者的密切关注,相关研究成果被广泛应用于数字信号处理、数字控制、优化算法等领域。事实上,获取系统的状态信息并据此设计合适的采样控制策略是研究离散系统控制问题的关键环节。所谓采样控制是指将连续性控制信号转化为离散信号来控制系统趋于稳定的一种控制策略。相比于连续性控制,采样控制具有抗干扰能力强,节约资源等优点。由于传统的时间触发采样控制的控制时刻为人工设置,故可能存在控制间距过小或过大、控制时刻不合理等缺陷。对此,事件触发采样控制可以确保系统的控制输入依自身状态变化而触发式更新,从而在降低控制次数的同时提高控制时刻的合理性。在此基础上,动态事件触发采样控制通过在触发协议中引入一个额外的动态变量来起到一种近似“滤波”的效果,从而进一步减少事件触发次数以节约控制资源。此外,研究者们还从优化控制机制角度来降低控制成本,即基于最优控制理论分析离散系统的优化控制问题。通过加入优化控制可以使系统达到目标状态的同时最小化预先设定的性能指标函数,通过这种方式能够得到最优控制律,具有较强的应用价值。综上,基于采样控制策略研究了如何通过动态事件触发控制实现对具有输入扰动的非线性离散系统的最优控制问题,建立被控系统的数学模型,设计相应的动态事件触发控制机制,基于最优控制理论、Lyapunov 稳定性理论、集合理论等给出扰动输入下系统的最优控制算法。具体地,章节内容安排如下:

第 1 章介绍了离散系统事件触发控制以及最优控制的研究背景以及国内外对于相关问题的研究现状;

第 2 章介绍了研究工作中用到的主要基础理论,并解释了一些符号和相关定义;

第 3 章研究了如何在离散系统中实现动态事件触发控制。首先,设计了一类静态事件触发机制,给出静态事件触发条件下系统的稳定性判据。其次,在静态机制的基础上构造了一类动态事件触发机制,给出动态机制下系统的稳定性判据。

第 4 章将动态事件触发控制与最优控制相结合,以确保被控系统在动态机制生成的离散控制信号作用下实现稳定,同时最小化性能成本函数。在求解系统的哈密顿方程时,设计了一类神经网络算法来近似估计最优控制律。

第 5 章总结了本文的主要研究内容和结论,并在此基础上对将来能够拓展的方向进行展望。

关键词: 离散系统, 动态事件触发控制, 最优控制, 输入扰动

DYNAMIC EVENT-TRIGGERED SAMPLING CONTROL OF DISCRETE-TIME SYSTEMS

ABSTRACT

As a hot research topic in the field of control, the stability analysis and control of discrete-time systems are paid close attention by many researchers, and the relevant research results are widely used in the fields of digital signal processing, digital control, optimization algorithm, etc. In fact, obtaining the state information of the system and designing the appropriate sampling control strategy based on it is the key to study the control problem of discrete-time systems. The so-called sampling control is a control strategy that converts continuous control signals into discrete signals to control the stability of the system. Compared with continuous control, sampling control has the advantages of strong anti-interference ability and saving resources. Because the control time of the traditional time-triggered sampling control is manually set, there may be some defects such as too small or too large control interval and unreasonable control time. For this reason, the event-triggered sampling control can ensure that the control input of the system can be triggered to update according to its own state changes, thus reducing the control times and improving the rationality of the control time. On this basis, dynamic event triggering sampling control plays an approximate "filtering" effect by introducing an additional dynamic variable into the triggering protocol, thus further reducing the number of events triggering to save control resources. In addition, researchers also reduce the control cost from the perspective of optimal control mechanism, that is, based on the optimal control theory to analyze the optimal control problem of discrete-time systems. The goal of optimal control is to select an optimal control law from a class of permitted control schemes, so that the selected control law can minimize the performance index function when the system moves from an initial state to a target state. In summary, based on the sampling control strategy, the optimal

control problem of dynamic event-triggered nonlinear discrete-time systems with input perturbation is studied, the mathematical model of the controlled system is established, the corresponding dynamic event-triggered control mechanism is designed, and the optimal control algorithm of the system under perturbation input is given based on the optimal control theory, Lyapunov stability theory, set theory, etc. Specifically, the chapters are arranged as follows:

The first chapter introduces the research background of event-triggered control and optimal control of discrete systems and the research status of related problems at home and abroad.

The second chapter introduces the main basic theories used in the research work, and explains some symbols and related definitions;

The third chapter studies the dynamic events trigger control problem of a class of discrete-time systems. Firstly, a kind of static event triggering mechanism is designed, and the stability criterion of the system under static event triggering condition is given. Secondly, a kind of dynamic event triggering mechanism is constructed on the basis of the static mechanism, and the stability criterion of the system under the dynamic mechanism is given.

The fourth chapter combines dynamic event-triggered control with optimal control to ensure that the controlled system achieves stability under discrete control signals generated by the dynamic mechanism while minimizing a performance cost function. A neural network algorithm is designed to approximate the optimal control law when solving the Hamiltonian equation of the system.

The fifth chapter summarizes the main research contents and conclusions of this paper, and looks forward to the future development direction on this basis.

Huang Chao(Mathematics)

Supervised by Wu Xiaotai

KEY WORDS: discrete-time systems, dynamic event triggered control, optimal control, input disturbances

目 录

摘要	I
第 1 章 绪 论	- 1 -
1.1 研究背景与研究意义.....	- 1 -
1.2 国内外研究现状.....	- 3 -
1.3 论文内容安排.....	- 5 -
第 2 章 预备知识	- 6 -
2.1 李雅普诺夫稳定性理论.....	- 6 -
2.2 最优控制理论.....	- 6 -
2.3 相关引理.....	- 7 -
2.4 主要符号说明.....	- 8 -
第 3 章 离散系统的动态事件触发控制	- 9 -
3.1 问题描述.....	- 9 -
3.2 主要结果.....	- 10 -
3.3 数值仿真.....	- 14 -
3.5 本章小结.....	- 21 -
第 4 章 带扰动的离散系统动态事件触发最优控制	- 22 -
4.1 问题描述.....	- 22 -
4.2 事件触发控制设计.....	- 23 -
4.3 神经网络算法设计.....	- 26 -
4.5 数值仿真.....	- 29 -
4.6 本章小结.....	- 32 -
第 5 章 总结与展望	- 33 -
参考文献	- 34 -
攻读硕士期间取得的学术成果	- 38 -
致谢	- 39 -

第1章 绪论

1.1 研究背景与研究意义

离散系统被广泛应用于数字信号处理、数字控制、优化算法等众多领域^[1-2], 一直是专家学者们研究的热点。离散系统有着灵活性高、抗干扰能力强、精度高、经济性、抗延迟等优点, 研究离散系统具有较强的现实意义。近年来, 由于事件触发控制的兴起, 事件触发控制在控制工程领域得到了广泛应用。传统采样控制方法往往采用固定时间的采样间隔, 而众所周知的是, 这些基于固定时间触发的控制方法往往会导致对有限计算和通信资源的过度使用。大部分由电池供电的嵌入式系统或远程控制系统, 通过网络完成数据通信通常需要耗费大量的通信能源^[3-4]。而且, 在当下大多数的网络化系统应用中的控制器和状态估计器都是远程部署这种新范式下, 控制器和估计器的设计过程就需要充分地考虑由有限带宽及有限计算处理能力所带来的资源受限约束^[5]。因此, 研究网络化系统的资源有效控制与估计问题对于当下环境具有重要意义。为了有效地利用系统中的计算和通信资源, 迫切的需要一种能够在数据传输交互中保证能够达到控制预期效果和估计性能的基础上, 有效利用资源的控制方法。于是事件触发机制(Event-triggered mechanism, ETM)应运而生。相较于传统周期采样控制, 事件触发控制的特点在于系统的输入不会定期更新, 而只在违背了预先设定的事件触发条件时才会触发更新^[6], 这使得事件触发控制相较于传统周期采样控制触发次数更少, 从而进一步节约资源, 同时也缓解了一些网络诱导现象, 比如传输延迟、丢包等。这些现象通常不可避免地会影响到预期的系统控制性能。值得注意的是, 事件触发的思想已被广泛地用来管理一系列的系统操作和行为, 诸如数据采样、数据传输、数据通信、通信调度、控制器的更新等^[7]。由于事件触发机制能够使得系统在达到预期控制性能的同时极大程度地提升资源利用效率, 因此事件触发机制将在资源有限的场景中发挥重要作用^[8]。

近年来, 动态事件触发机制(Dynamic event-triggered mechanism, DETMs)正发展成为一种新兴技术。这主要是由于动态事件触发机制往往可以实现比传统事

件触发机制更高的资源利用效率,以及满足比传统事件触发机制更为灵活的系统设计要求。由于动态事件触发机制往往可以实现比传统事件触发机制更高的资源利用效率,以及满足比传统事件触发机制更为灵活的系统设计要求,从而得到广泛应用^[9-12]。

最优控制研究如何找到控制方法来优化目标函数。最优控制问题一般由四个部分组成:系统数学模型、目标值、代价函数、容许控制。最优控制问题一般是找到一个容许的控制方案,将研究的系统从其初始状态转移到目标集的过程中最小化性能指标函数,这个性能指标函数是预设的用来反应系统总体控制性能的函数,最优控制律可以通过对预先指定的性能指标^[13]的最小化来驱动系统到达稳定状态。这个性能指标函数通常被选为二次形式。对于非线性系统,最优代价函数潜在地等价于所谓的哈密顿-雅可比-贝尔曼(Hamilton-Jacobi-Bellman equation, HJB)方程^[14]的解。由于非线性和偏导数,这个方程难以解析求解。因此,在控制系统领域中,已经开发出大量的学习算法来求得 HJB 方程的近似解,其中自适应动态规划(Adaptive dynamic programming, ADP)算法是较为有效的代表^[15-18]。

ADP 技术最初被应用于离散时间系统的优化设计^[19]。对于连续情况, Murra 等^[20]在稳定性条件下首次证明了算法的收敛性。基于此,许多优秀的算法成果连续取得突破。一些算法采用了一种称为策略迭代的强化学习技术,该技术采用了行动者-批评者结构,通过两个迭代步骤来实现近似。具体来说,评判者评估一个给定的控制策略,而行动者随后对其进行改进。像许多智能学习算法^[21-25]一样,神经网络也发挥着至关重要的作用,实际求解 HJB 方程的关键是利用神经网络来实现代价函数的近似。经典的基于策略迭代的算法需要准确的系统信息,因此,利用神经网络的函数近似来重建系统动力学的方法得到广泛应用。例如, Zhang 等^[26]利用评判者—行动者算法结构来解决 H_∞ 的鲁棒控制问题,并使用一个标识符神经网络对动力学进行建模。Vamvoudakis 等^[27]提出了一种在线同步 IRL 算法,该算法利用连续积分区间的信息更新网络权值。同样地,通过记录不同时间间隔内的积分强化信号。上述研究的控制回路都是基于时间触发策略,即定期采样系统信息,频繁地释放控制动作。因此,使用事件触发策略的替代是研究的一个方向,它可以避免冗余的控制更新和不必要的数据传输

一些学者在事件触发机制的启发下设计事件触发条件并将其用于 ADP 算法当中,这个想法激发了许多类似的研究^[28-30]。在实际实现 ADP 算法时,会将神经网络集成到控制回路中,这使得关注通信浪费和计算负担尤为重要。因此,触发和控制策略的最优协同设计同样是一个热点,并因此得到了广泛的研究。这些研究可以大致分为两个方向:(1)使用已知算法解决基于事件触发策略的控制问题^[31-33]; (2)研究基于事件触发策略的算法解决控制问题^[34-39]。这些事件驱动算法都将状态采样和控制计算减少了 70%以上,提高了训练效率。此外,通过理论上计算最小触发间隔,可以很好地排除瞬时齐诺行为。

在本文中,考虑动态事件触发机制对系统控制的影响,并提出了一种离散系统动态事件触发控制的研究方法。所得结论在丰富离散系统事件触发控制研究成果的同时,也将动态事件触发控制的一些研究进一步推广到离散系统中;同时设计了一类动态事件触发机制以降低离散系统的采样和控制频率,相关研究是对事件触发控制相关研究的持续深化与拓展。由于离散系统的优化问题已经成为当下的热点,本文考虑离散非线性系统的优化问题,将动态事件触发控制思想代入优化控制问题当中,充分考虑了实际问题中有扰动控制背景下的优化问题,并且利用 ADP 思想设计了神经网络近似估计求解 HJB 方程。

1.2 国内外研究现状

离散系统控制领域的相关研究许多文献取得了丰富的成果。在控制领域系统的稳定性问题是研究的基础,众多学者在这方面取得了许多成果。Zhou 等^[40]研究了具有广义开关信号的离散时间切换非线性系统的输入到状态稳定性(Input-to-state stability, ISS),提出了充分的条件来保证所考虑的离散时间切换非线性系统的输入状态稳定性。张霄力等^[41]研究了一类由多个离散子系统构成的切换系统,通过使用 Lyapunov 稳定理论分析了系统的渐近稳定性,并且最后给出这类系统全局渐近稳定的两个充分条件。Wu 等^[42]通过 Lyapunov 克拉索夫斯基函数法和平均脉冲区间法研究了脉冲随机延迟系统的输入状态稳定性。

事件触发控制作为可以节省通信资源,抗干扰能力强等特点的一种采样控制方法而受到广大学者的关注,国外学者 Dorf 等^[43]提出了事件触发机制这一概念,这一机制通过设计触发条件来改变系统采样频率,极大程度减少控制次数。

目前,事件触发控制的思想已经被广泛应用于解决通信资源有限以及网络带宽受限等问题。与传统的采样控制方式相比,事件触发控制优势较为明显。由于事件触发控制不依赖于周期性的采样信号来执行控制,因此事件触发控制执行的间隔不是恒定的而是时变的。因此,事件触发控制将更好地利用计算能力和通信资源。众多基于事件触发控制采样的文献都假设通信网络能精准传递系统状态等信息,故而信息在传输过程中需要多次执行信息交换,这些信息交换将极大占用通信网络中系统的传输和反馈的带宽。对此,Tabuada^[44]重新讨论了嵌入式处理器调度稳定控制任务的问题。研究了一种较为简单的事件触发调度算法,通过测量某一误差是否超过状态范数来决定在哪一时刻执行控制任务,将定期控制放宽到依赖某一事件触发的控制。紧接着,在学者 Kiumars 等^[45]研究中,放宽了状态反馈控制需要依赖系统全状态测量这一限制。研究结果表明,可以找到一个事件触发误差的阈值,使得以这个阈值设立的触发条件能够完成近似于任意精度的连续状态反馈控制。这种事件触发控制方法也表现出较强的抗干扰性,在受到较小的扰动时并不会引起触发更新。

随着对事件触发控制机制的研究,学者 Girard 等^[46]在此基础上提出了动态事件触发机制,以实现比传统事件触发机制更高的资源利用效率,以及满足比传统事件触发机制更为灵活的系统设计要求。Ming 等^[47]将动态事件触发机制和自适应动态规划方法结合,提出了一种具有动态事件触发策略的值函数公式用于解决离散系统中的最优跟踪问题。Cheng 等^[48]提出了一种新的动态事件触发近似最优控制策略,通过采用动态事件触发控制方案,可以同时实现保持系统稳定性、近似最小化成本函数、节省通信和计算资源的目的。Su 等^[49]研究了基于四元数姿态表示的改进自主水下航行器的自适应动态事件触发控制方案,使自主水下航行器系统的控制性能与控制器到执行器通道中通信频率之间的平衡更容易实现。

目前,优化控制领域内,针对离散系统的优化控制问题的研究成果丰硕^[50-53]。例如, Fisher 等^[51]提出了一种在一般约束条件下求解组合离散时间最优控制和最优参数选择问题的计算方法。所采用的方法是将问题转换为可以使用标准优化软件求解的非线性规划问题。Song 等^[53]基于自适应动态规划方法,考虑了一类有干扰的离散时间非线性系统。采用一种新的值迭代算法解决最优定点跟踪控制问题。

1.3 论文内容安排

第 1 章绪论部分介绍了研究内容的选题背景以及动态事件触发采样控制和优化控制的国内外研究成果；第 2 章为预备知识部分，介绍了研究中用到的 Lyapunov 稳定性定理、最优控制理论以及一些符号和相关定理的介绍；第 3 章研究了事件触发控制问题，一方面通过引入动态变量的动态事件触发条件设计，另一方面研究了离散系统在事件触发控制下系统稳定性以及事件触发控制的性质；第 4 章研究了动态事件触发控制下带扰动离散系统的最优问题，基于动态事件触发条件减少控制次数的同时最小化性能指标函数，最后设计了神经网络算法近似求解 HJB 方程；第 5 章对全文内容进行总结与展望。

第2章 预备知识

本章主要介绍文中涉及的主要符号、数学工具、数学模型以及相关引理。

2.1 李雅普诺夫稳定性理论

Lyapunov 稳定性理论是俄国学者李亚普洛夫提出的，广泛用于证明线性、非线性、时变等多种系统的稳定性，是控制领域稳定性研究需要用到的重要理论依据。下面主要介绍稳定性判断相关理论知识也就是 Lyapunov 第二方法。

2.1.1 Lyapunov 稳定性理论

考虑如下离散时间系统：

$$x(k+1) = f(x(k)), \quad (2-1)$$

其中 $x(k) \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N}$ 是系统的状态向量，假定 $x=0$ 是这个系统的一个平衡点。

定理 2.1^[54]：对于式 (2-1) 中的离散时间系统是渐近稳定的，如果存在具有连续偏导数的标量函数 $V(x(k))$ ，满足

(1) $V(x, k)$ 是正定的；

(2) $\Delta V(x(k))$ 是负定的；

那么系统 (2-1) 在原点处一致渐近稳定。若 $\Delta V(x(k))$ 是半负定的，则系统 (2-1) 在原点处是一致稳定的。

对于一个确定的系统，Lyapunov 函数的形式并不唯一，只要使其满足定理中的条件即可。Lyapunov 函数最常见的构造形式为二次型函数，即：

$$V(x(k)) = x^T(k) L x(k), \quad (2-2)$$

其中 $x^T(k)$ 为系统状态 $x(k)$ 的转置， L 为拉普拉斯矩阵。

2.2 最优控制理论

最优控制主要有以下四个组成部分：

(1)状态方程：状态方程如下：

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (2-3)$$

其中， $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 为状态向量， $u(t) \in \mathbb{R}^r$ 为控制向量。

(2)容许控制：考虑现实环境限制，控制系统中的控制变量总是会受到一些限制，所以其取值会有一些限制。将控制变量的范围称为控制域，通常为有界闭集，用 $U \in \mathbb{R}^r$ 表示。容许控制表示为

$$u \in U. \quad (2-4)$$

(3)目标集：在最优控制问题中，系统收敛的终点状态为 $x(T)$ ，其用状态空间里某一点集表示，表示为：

$$S = \{x(T) | \phi(x(T), T) = 0\}, \quad (2-5)$$

其中， $\phi(x(T), T)$ 是 k 维向量函数， S 称为目标集。

(4)性能指标：最优控制中需要一个表示优劣的数量指标来反映控制的好坏，表达式为

$$J(u(\cdot)) = \phi(x(T), T) + \int_{t_0}^T L(x(t), u(t), t) dt. \quad (2-6)$$

式(2-6) 为复合型性能指标表示在整个控制过程中，对整体控制好坏的一个量化标准，它与状态控制以及终点状态有关。前者 $\phi(x(T), T)$ 表示仅对终点状态有要求的指标；后者 $L(x(t), u(t), t)$ 表示对整个状态和控制过程有要求的指标。

最优控制就是在容许控制域(2-4)中，选取一个控制 $u(t)$ ，在时间间隔 $[t_0, T]$ 内，将研究系统的状态方程从初始状态 x_0 转移到目标集 S 上，并且能使性能指标式(2-6)有极值。选择的最优控制律记作 $u^*(t)$ ，所对应的轨线为最优系统状态轨线，记作 $x^*(t)$ 。

2.3 相关引理

定义 2.1^[54]：对于实数集的子函数 $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ，如果存在常数 K 使得

$$|f(a) - f(b)| \leq K|a - b|, \quad \forall a, b \in D, \quad (2-7)$$

则称函数 f 是 Lipschitz 连续的, 对于满足条件的最小常数 K 是函数 f 的 Lipschitz 常数。

定义 2.2^[54]: 如果一个函数 $\alpha: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ 是连续的, 严格递增的并且 $\alpha(0) = 0$, 则称函数 α 为 $\mathcal{K}$ 类函数, 此外, 如果 $t \rightarrow \infty$ 时函数 $\alpha \rightarrow \infty$, 则称 α 为 $\mathcal{K}_\infty$ 类函数。

2.4 主要符号说明

符号表示	符号说明
$\mathbb{R}$	实数集
L	拉普拉斯矩阵
$\mathbb{R}^n$	n 维实向量空间
$\mathbb{R}^{n \times n}$	$n \times n$ 维实矩阵空间
$\mathbb{R}_0^+$	正实数集
$\mathbb{N}$	非负整数集
$A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$	元素为 a_{ij} 的 $n \times n$ 阶矩阵
X^T	向量 X 的转置
$\ x\ $	x 的范数

第3章 离散系统的动态事件触发控制

本章研究了一类离散系统的动态事件触发控制。首先，设计了一类静态事件触发机制，分析了静态事件触发条件下系统的稳定性。其次，在设计的静态事件触发机制基础上，引入了一类动态事件触发机制，验证了动态事件触发机制的有效性，并证明了动态事件触发比静态事件触发更加有效地降低了控制频率。最后，借助仿真算例展示了结论的可行性。

3.1 问题描述

3.1.1 系统描述与定义

本文考虑非线性离散系统系统的动力学方程如下：

$$x(k+1) = f(x(k), u(k)), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (3-1)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$ 为系统的状态向量， $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是非线性函数，控制输入满足 $u(k) \in \mathbb{R}^m$ 满足

$$u(k) = px(k_i), \quad k_i \leq k < k_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (3-2)$$

其中 $p \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 为反馈控制矩阵， k_i 为采样时刻，由预先设定的事件触发机制决定并更新。相邻采样间隔通过零阶保持器保持信号值不变。测量误差 $e(k) = x(k_i) - x(k)$ 。

系统(3-1)可以表示为

$$x(k+1) = f(x(k), p(x(k) + e(k))). \quad (3-3)$$

下面给出 ISS-Lyapunov 函数定义，以保证系统(3-3)关于测量误差 $e(k)$ 的输入状态稳定性。

定义 3.1^[55]: 对于系统(3-3),如果存在一个连续可微的函数 $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ 和 $\mathcal{K}_\infty$ 类函数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha$ 和 γ ，使得对于任意的 $x, e \in \mathbb{R}^n$ 满足

$$\begin{aligned}\alpha_1(\|x(k)\|) &\leq V(x(k)) \leq \alpha_2(\|x(k)\|), \\ V(f(x(k), u(k))) - V(x(k)) &\leq -\alpha(\|x(k)\|) + \gamma(\|e(k)\|),\end{aligned}\tag{3-4}$$

则函数 V 是系统(3-3)的 ISS-Lyapunov 函数。

3.2 主要结果

本节对非线性离散系统(3-3)分别设计了静态和动态事件触发条件, 分析两种条件下系统(3-3)的稳定性并证明了动态事件触发进一步降低了触发频率, 最后给出线性离散系统下的推论。

3.2.1 静态事件触发条件下系统的稳定性分析

假设静态事件触发条件如下:

$$k_{i+1} = \inf \{k > k_i \mid \sigma\alpha\|x(k)\| - \gamma\|e(k)\| \leq 0\},\tag{3-5}$$

这里事件触发参数 $0 < \sigma < 1$ 。

定理 3.1: 对于任意的 $0 < \sigma < 1$, 系统(3-3)在静态事件触发条件(3-5)作用下满足渐近稳定性。

证明: 由静态事件触发条件(3-5)有

$$\gamma\|e(k)\| \leq \sigma\alpha\|x(k)\|.\tag{3-6}$$

以满足定义 3.1 的一个连续可微函数 V 为 Lyapunov 函数, 结合式(3-6)可得 $V(x(k))$ 的一阶差分:

$$\begin{aligned}\Delta V(x(k)) &= V(f(x(k), p(e(k) + x(k)))) - V(x(k)) \\ &\leq -\alpha(\|x(k)\|) + \gamma(\|e(k)\|) \\ &\leq -\alpha(\|x(k)\|) + \sigma\alpha(\|e(k)\|) \\ &= (\sigma - 1)\alpha(\|x(k)\|).\end{aligned}\tag{3-7}$$

由 $0 < \sigma < 1$ 可知 $\Delta V(x(k)) < 0$, 于是系统(3-3)在事件触发条件(3-5)下满足渐近稳定性。

3.2.2 动态事件触发条件下系统的稳定性分析

为了进一步减少静态事件触发的次数, 本节将引入一类动态事件触发条件,

它使用一个内部动态变量 $\eta(k)$ 满足：

$$\eta(k+1) = \lambda \eta(k) + \sigma \alpha \|x(k)\| - \gamma \|e(k)\|, \quad \eta(0) \geq 0, \quad (3-8)$$

这里参数 $0 < \lambda < 1$ 。值得指出的是，动态变量的加入使得 $\sigma \alpha \|x(k)\| - \gamma \|e(k)\|$ 的值不需要始终满足非负性，保证其平均值满足非负性即可。

加入动态变量后动态事件触发条件如下：

$$k_{i+1} = \inf \left\{ k > k_i \mid \frac{1}{\beta} \eta(k) + \sigma \alpha \|x(k)\| - \gamma \|e(k)\| \leq 0 \right\}, \quad (3-9)$$

这里参数 $\beta \geq \frac{1}{\lambda}$ 。当 $\beta \rightarrow +\infty$ ，则动态事件触发条件(3-9)可转化为静态事件触发条件(3-5)。

下面将通过引理，展示动态变量 $\eta(k)$ 的相关性质。

引理 3.1： 当参数 $0 < \sigma < 1$ 、 $\eta(0) \geq 0$ 、 $0 < \lambda < 1$ 和 $\beta \geq \frac{1}{\lambda}$ 时，对于任意的 $k_i \leq k < k_{i+1}$ ，动态变量 $\eta(k) \geq 0$ 。

证明：由动态事件触发条件(3-9)可知有 $\frac{1}{\beta} \eta(k) + \sigma \alpha \|x(k)\| - \gamma \|e(k)\| \geq 0$ 对于任意的 $k_i \leq k < k_{i+1}$ 恒成立，结合式(3-8)有：

$$\begin{aligned} \eta(k+1) &= \lambda \eta(k) + \sigma \alpha \|x(k)\| - \gamma \|e(k)\| \\ &\geq \left(\lambda - \frac{1}{\beta} \right) \eta(k) \\ &\geq \cdots \geq \left(\lambda - \frac{1}{\beta} \right)^{k+1} \eta(0) \\ &\geq 0, \end{aligned} \quad (3-10)$$

对于任意的 $k_i \leq k < k_{i+1}$ 恒成立，证毕。

接下来，将证明在动态事件触发条件(3-9)作用下系统(3-3)的稳定性。

定理 3.2： 对于任意的 $0 < \sigma < 1$ 、 $\eta(0) \geq 0$ 、 $0 < \lambda < 1$ 和 $\beta \geq \frac{1}{\lambda}$ ，系统(3-3)在动态事件触发条件(3-9)下满足渐近稳定性。

证明：注意到式(3-5)和(3-8)，构造函数 Lyapunov 函数为：

$$W(x(k), \eta(k)) = V(x(k)) + \eta(k). \quad (3-11)$$

显然，函数 W 正定，对其进行一阶差分可得：

$$\begin{aligned}\Delta W(x(k), \eta(k)) &= V(x(k+1)) - V(x(k)) + \eta(k+1) - \eta(k) \\ &\leq -\alpha \|x(k)\| + \gamma \|e(k)\| + \lambda \eta(k) + \sigma \alpha \|x(k)\| \\ &\quad - \gamma \|e(k)\| - \eta(k) \\ &\leq (\sigma - 1) \|x(k)\| + (\lambda - 1) \eta(k).\end{aligned}\tag{3-12}$$

由 $0 < \sigma < 1$ 和 $0 < \lambda < 1$ 可知 $\Delta W(x(k), \eta(k)) < 0$ 。系统(3-3)在动态事件触发控制条件(3-9)下满足渐近稳定性，证毕。

假设 $k_i \in \mathbb{R}_0^+$ 表示当前事件触发时刻， k_{i+1}^s 表示由静态事件触发条件(3-5)决定的下一触发时刻， k_{i+1}^d 表示由动态事件触发条件(3-9)所确定的下一触发时刻。接下来，我们将通过理论证明所提出的离散系统动态事件触发机制比静态事件触发机制相邻的触发间距更大。

定理 3.3: 对于任意的 $0 < \sigma < 1$ 、 $\eta(0) \geq 0$ 、 $0 < \lambda < 1$ 和 $\beta \geq \frac{1}{\lambda}$ ，分别由静态事件触发条件(3-5)和动态事件触发条件(3-9)确定的 k_{i+1}^s 和 k_{i+1}^d ，满足不等式 $k_{i+1}^d \geq k_{i+1}^s$ 。

证明：利用反证法，假设 $k_{i+1}^d < k_{i+1}^s$ 成立。根据静态事件触发条件(3-5)可知，对于任意的 $k_i \leq k < k_{i+1}$ 均有

$$\sigma \alpha \|x(k)\| - \gamma \|e(k)\| \geq 0.\tag{3-13}$$

在动态事件触发条件(3-9)的触发时刻，可得

$$\begin{aligned}0 &\geq \lambda \eta(k_{i+1}^d) + \sigma \alpha \|x(k_{i+1}^d)\| - \gamma \|e(k_{i+1}^d)\| \\ &\geq \sigma \alpha \|x(k_{i+1}^d)\| - \gamma \|e(k_{i+1}^d)\|.\end{aligned}\tag{3-14}$$

容易看出，当动态事件触发机制达到触发条件时必定有静态事件触发机制达到触发条件，即假设不成立。因此， $k_{i+1}^d \geq k_{i+1}^s$ ，证毕。

注 3.1: 动态事件触发的优势体现在相对于静态事件触发可以实现更高的资源利用效率，以及更为灵活的系统设计要求。一方面，动态事件触发机制只需消耗更少的资源就可以控制系统达到预期状态。另一方面，动态事件触发机制可以通过调整内部动态变量 $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ 来改变触发条件结构，从而具有更好的适用性。

3.2.2 线性系统的情况

考虑如下线性离散系统：

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad (3-15)$$

这里系统状态 $x \in \mathbb{R}^n$ ，参数矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ， $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ，反馈控制器 $u(k) \in \mathbb{R}^m$ 满足

$$u(k) = Kx(k). \quad (3-16)$$

假设存在一个反馈控制器 $u(k) = Kx(k)$ 使得系统(3-15)是渐进稳定的，选定系统(3-18)的 Lyapunov 函数为 $V(x) = x^T(k)Px(k)$ ，则对于任意对称正定矩阵 $\tilde{Q}$ ，存在一个对称正定矩阵 P 满足：

$$(A + BK)^T P (A + BK) - P = -\tilde{Q}. \quad (3-17)$$

注 3.2: 与文献[13]类似，本文使用 LQR 方法求解未知矩阵 $e(k) = x(k_i) - x(k)$ 和最优反馈增益矩阵 $e(k) = x(k_i) - x(k)$ 。在给定性能函数的前提下，通过求解黎卡提方程，可以得到确保式 (3-17) 成立的矩阵 $e(k) = x(k_i) - x(k)$ 和 $e(k) = x(k_i) - x(k)$ ，同时矩阵 $e(k) = x(k_i) - x(k)$ 被用于优化性能函数。在系统的模拟仿真过程中，该方法还具有简单且便于实现的特点。

考虑数据采样与测量误差 $e(k) = x(k_i) - x(k)$ ，系统(3-15)可转化为：

$$x(k+1) = (A + BK)x(k) + BKe(k), \quad k_i \leq k < k_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots. \quad (3-18)$$

对 Lyapunov 函数为 $V(x) = x^T(k)Px(k)$ 进行一阶差分有：

$$\begin{aligned} V(x(k+1)) - V(x(k)) &= -x^T(k)Qx(k) + 2x^T(k)(A + BK)^T PBKe(k) \\ &\quad + e^T(k)K^T B^T PBKe(k). \end{aligned} \quad (3-19)$$

对于上式有下列不等式成立

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(P)r^2 \leq V(x(k)) \leq \lambda_{\max}(P)r^2 \\ \Delta V(x(k)) \leq -\frac{1}{2}\lambda_{\min}(Q)\|x(k)\|^2 + \left(\frac{2\|(A + BK)^T PBK\|^2}{\lambda_{\min}(Q)} + \|K^T B^T PBK\|\right)\|e(k)\|^2, \end{aligned} \quad (3-20)$$

这里， $\lambda_{\min}(P)$ ， $\lambda_{\max}(P)$ 为矩阵 P 的最小和最大特征值， $\lambda_{\min}(Q)$ 为矩阵 Q 的最小特征值，上式表明选定的 Lyapunov 方程满足定义 3.1。

于是，设计静态事件触发条件如下：

$$k_{i+1} = \inf \left\{ \frac{1}{2} \sigma \lambda_{\min}(Q) \|x(k)\|^2 - \left(\frac{2 \|(A+BK)^T PBK\|^2}{\lambda_{\min}(Q)} + \|K^T B^T PBK\| \right) \|e(k)\|^2 \leq 0 \right\}, \quad (3-21)$$

其中 $0 < \sigma < 1$ 是给定参数。

同样地，基于静态事件触发条件(3-20)设计新的动态事件触发机制，其中动态变量 $\eta(k)$ 和动态事件触发条件分别被定义为：

$$\eta(k+1) = \lambda \eta(k) + \frac{1}{2} \sigma \lambda_{\min}(Q) \|x(k)\|^2 - \left(\frac{2 \|(A+BK)^T PBK\|^2}{\lambda_{\min}(Q)} + \|K^T B^T PBK\| \right) \|e(k)\|^2, \quad (3-22)$$

$$k_{i+1} = \inf \left\{ k > k_i \mid \frac{1}{\beta} \eta(k) + \frac{1}{2} \sigma \lambda_{\min}(Q) \|x(k)\|^2 \leq \left(\frac{2 \|(A+BK)^T PBK\|^2}{\lambda_{\min}(Q)} + \|K^T B^T PBK\| \right) \|e(k)\|^2 \right\}, \quad (3-23)$$

其中参数 $0 < \lambda < 1$, $\beta \geq \frac{1}{\lambda}$, $\eta(0) > 0$ 。

对于离散线性系统(3-18)，在静态事件触发和动态事件触发条件控制下，系统同样是渐进稳定的，此外，动态事件触发机制同样拥有比静态事件触发机制更大的相邻触发间距，以上结论的证明方法与非线性离散情况类似，故不予赘述。

3.3 数值仿真

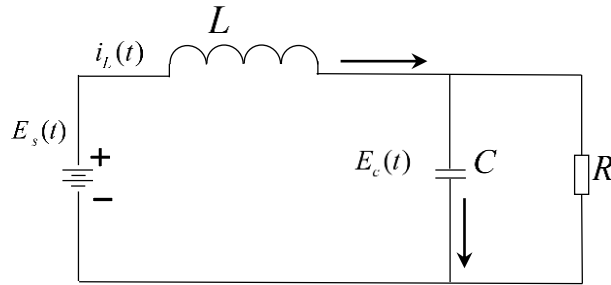


图 3.1 升压转换器电路系统

考虑基于 PWM(脉冲宽度调制)驱动的升压转换器^[56]，如图 3.1 所示。 E_s 、 C 、 R 、 L 分别为源电压、电容、负载电阻和电感。该物理模型可以描述为

$$\begin{cases} \dot{E}_s(t) = -\frac{1}{RC}E_c(t) + \frac{1}{C}i_L(t), \\ \dot{i}_L(t) = -\frac{1}{L}E_c(t) + E_s(t), \end{cases} \quad (3-24)$$

其中状态变量和控制输入被定义为 $x(t) = [E_c(t) i_L(t)]^T$ 和 $u(t) = E_s(t)$ 。将上述系统写为以下离散形式：

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k). \quad (3-25)$$

其中矩阵 $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}$ 。这里取 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -0.2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2 \end{bmatrix}$ 。接下来，

使用LQR方法确定控制器的最优控制序列并定义其目标函数为

$$J(u) = \sum_{k=0}^{\infty} [x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Ru(k)], \quad (3-26)$$

这里矩阵 $Q = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$ ，最优控制器 $u^*(k) = Kx(k)$ 并且矩阵

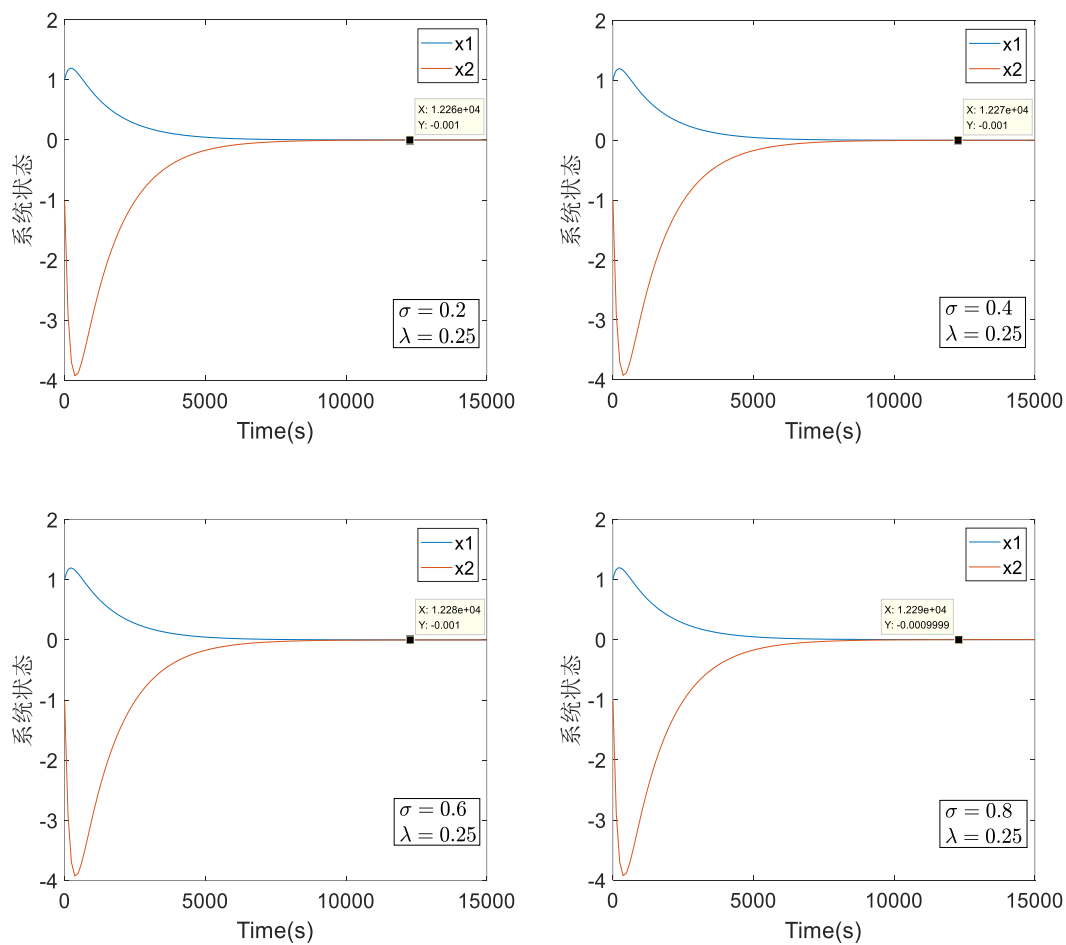
$K = -(R + B^T P B)^{-1} B^T P A$ ，矩阵 P 是黎卡提 (Riccati) 方程 $P = A^T P (A + BK) + Q$ 的

唯一对称正定解。定义 Lyapunov 函数为 $V(x) = x^T(k)Px(k)$ ，矩阵

$\tilde{Q} = P - (A + BK)^T P (A + BK)$ 。假设初始状态 $x(0) = [1 \ -1]^T$ ，接下来分别讨论不同的参数 σ 和 λ 对系统收敛以及触发次数的影响。

表格 3.1 参数 σ 选择及实验结果

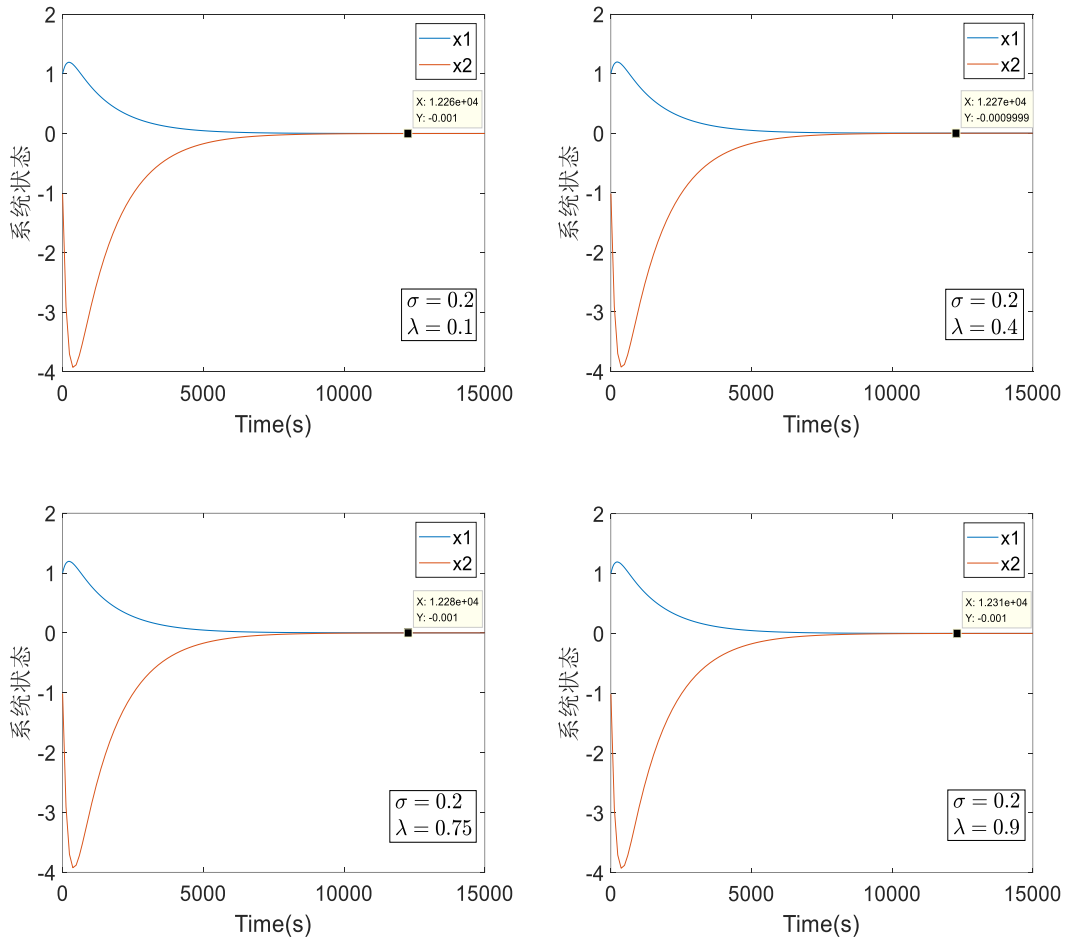
σ	0.2	0.4	0.6	0.8
λ	0.25	0.25	0.25	0.25
收敛时间	12260	12070	12280	12290
触发次数	99	97	96	95

图 3.2 不同 σ 影响下系统状态图

从得到的实验结果来看，在参数 σ 增大的同时使得触发条件变得更加宽松，触发次数将随着参数 σ 增大而减少，达到收敛的时间也将增大。

表格 3.2 参数 λ 选择及实验结果

λ	0.1	0.4	0.75	0.9
σ	0.2	0.2	0.2	0.2
收敛时间	12260	12070	12280	12290
触发次数	99	97	96	95


 图 3.2 不同 λ 影响下系统状态图

从实验结果 3.2 对比来看,随着参数 λ 的增大,触发条件同样变得更加宽松,触发次数将随着参数 λ 增大而减少,达到收敛的时间也同样增大。在实际应用中应充分考虑系统收敛速度与触发次数,选择最合适的参数。

下面,分别给出线性离散系统(3-28)在在两种事件采样控制机制下的仿真图。

选取参数 $\sigma = 0.2$, $\lambda = 0.2$, $\frac{1}{\beta} = 0.01$, $\eta(0) = 0.1$ 通过仿真得到以下结果,图 3.3

为无控制下系统状态图,图 3.4 为静态事件触发机制下系统的状态误差轨迹图,图中可以看到在各触发时刻状态误差都被重置为零,同时系统误差也收敛为零。在图 3.5 中,列出了静态事件触发控制下系统状态轨迹图,虚线表示系统状态分量 $x_1(k)$,实线表示系统状态分量 $x_2(k)$,由图 3.6 可以看出系统的状态值最终能够收敛到零,相较于图 3.3 控制效果明显。图 3.6 表示 Lyapunov 函数的演变轨迹,可以看出函数值随时间增长最终收敛到零,也就是说离散系统最终可以在静

态事件触发机制作用下实现渐近稳定。图 3.7 给出了静态事件触发机制下的相邻触发间距变化图，纵轴表示每个触发时刻距离上一次触发时刻的时间间隔，由图 3.7 可知触发间距是非周期的且其值变化呈增长趋势。

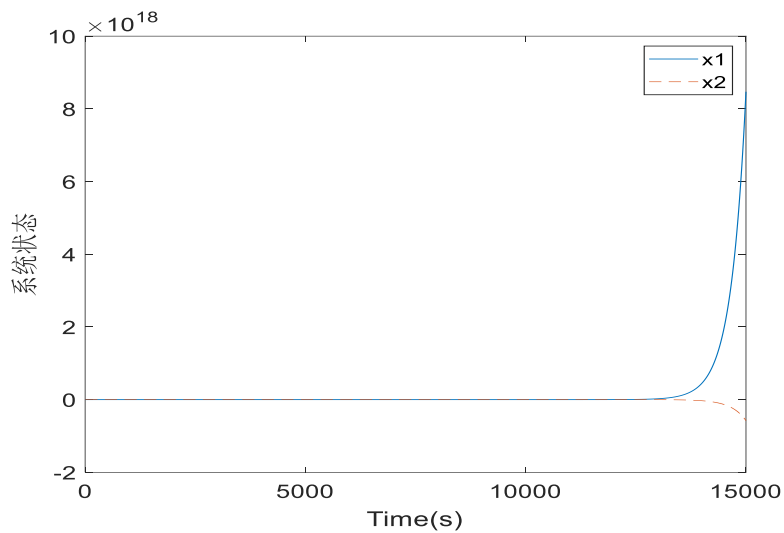


图 3.3 无控制下系统状态

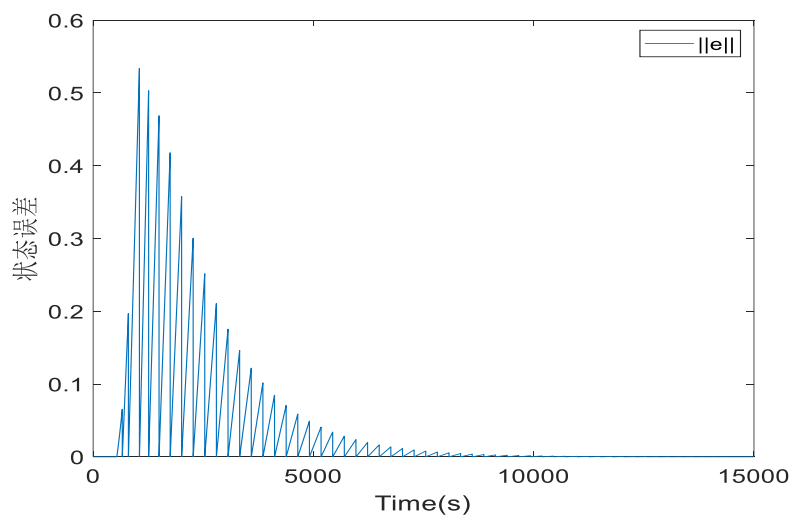


图 3.4 静态事件触发系统状态误差

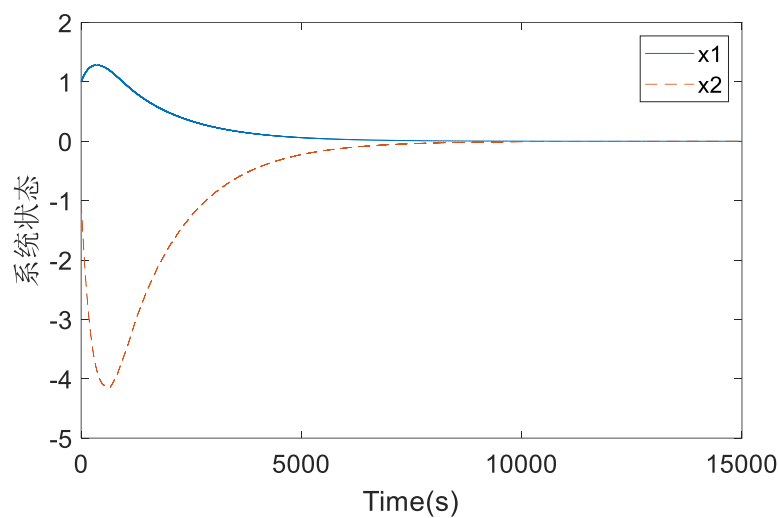


图 3.5 静态事件触发系统状态轨迹

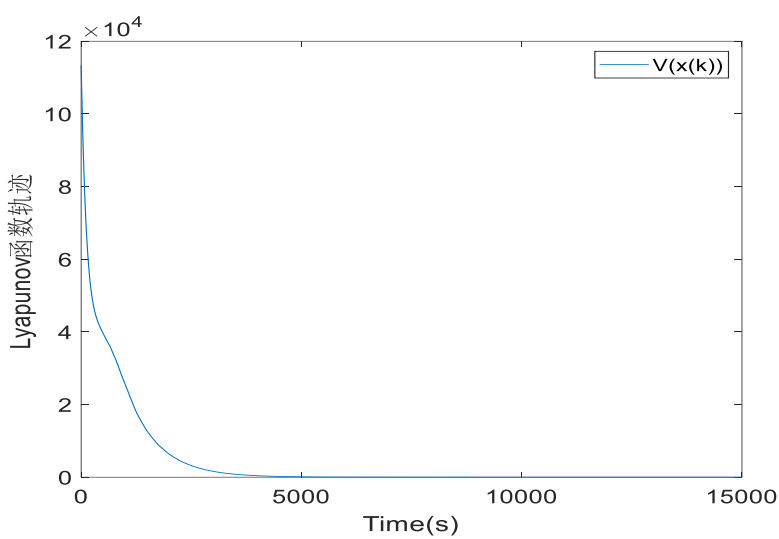


图 3.6 Lyapunov 函数轨迹

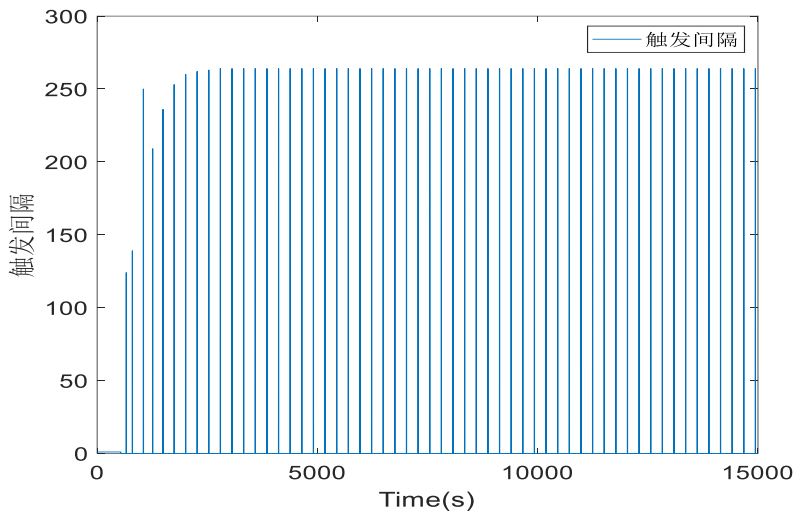


图 3.7 静态事件触发间隔

针对动态事件触发控制,通过仿真得到以下结果,图 3.8-3.11 则分别给出了动态事件触发机制下系统状态误差轨迹、系统状态轨迹、Lyapunov 函数轨迹以及相邻触发间距的示意图。由上述仿真图容易看出,动态事件触发机制下系统的状态误差值、系统状态值和 Lyapunov 函数值均随时间变化逐渐收敛到零,这表明在静态事件触发条件中引入动态变量后仍能确保受控系统实现渐近稳定。

对比图 3.7 与图 3.11,可以看出后者的相邻触发间距明显大于前者。因此,动态事件触发机制具有更大的触发阈值和更少的触发次数,能更好地节约控制资源。

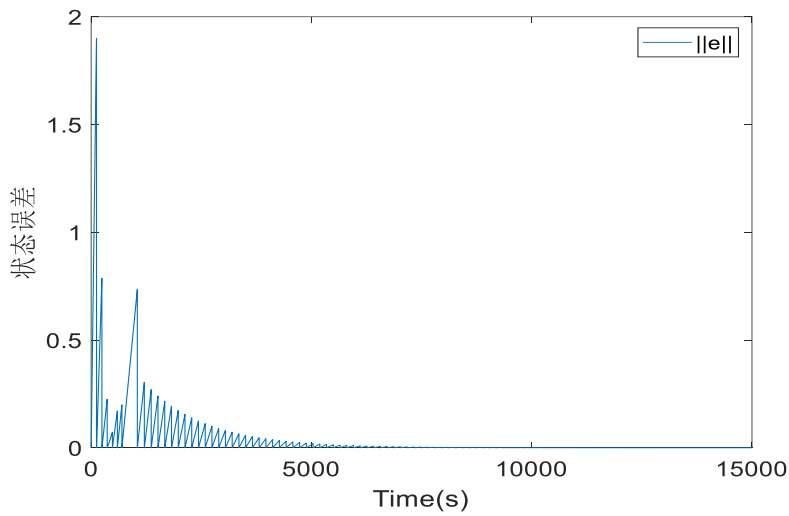


图 3.8 动态事件触发系统状态误差图

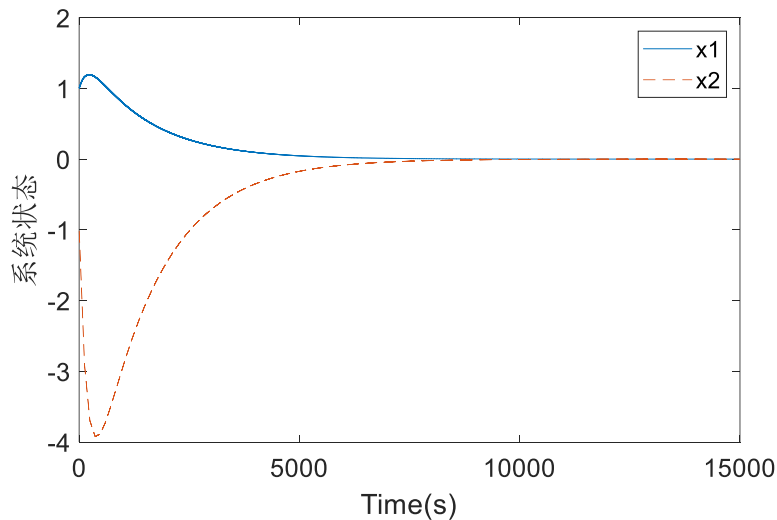


图 3.9 动态事件触发条件系统状态轨迹

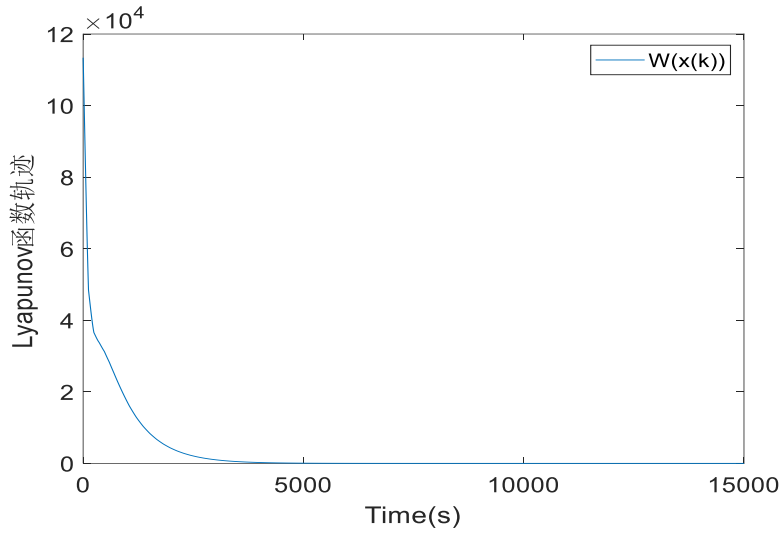


图 3.10 Lyapunov 函数轨迹

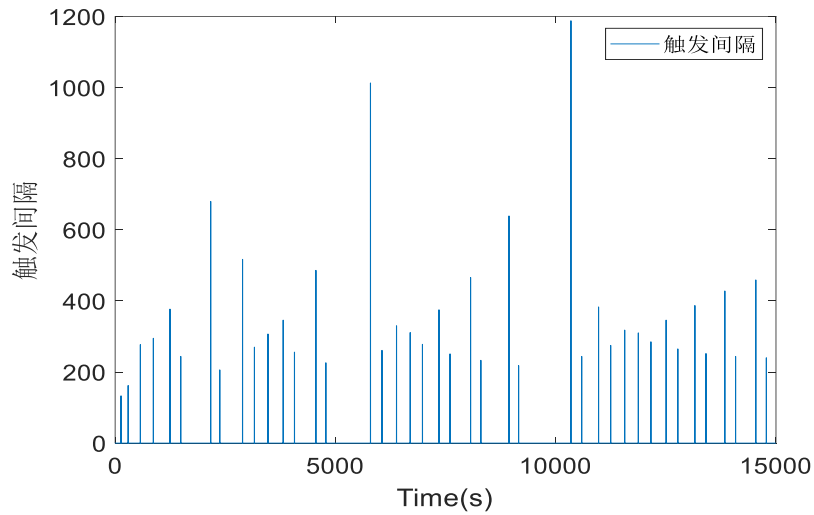


图 3.11 动态事件触发间隔

3.5 本章小结

本文在现有文献基础上分别研究了静态和动态事件触发机制下一类非线性离散系统的稳定性分析问题，设计了相应的静态和动态事件触发条件，给出了两类事件触发控制器作用下离散系统的稳定性判据。研究发现，两类事件触发机制都能确保受控离散系统的渐近稳定性，并且相较于静态事件触发机制，动态事件触发机制能够显著减少整个控制过程中的触发次数，从而更有利于节约控制资源。最后，通过使用 Matlab 软件进行数值仿真，通过实例验证了所得研究结果的有效性。

第4章 带扰动的离散系统动态事件触发最优控制

本章将动态事件触发控制与最优控制相结合,确保被控系统在动态事件触发机制生成的控制信号下实现稳定的同时最小化性能成本函数。在求解系统的 HJB 方程时,设计了一类神经网络算法来近似估计最优控制律。

4.1 问题描述

4.1.1 系统描述与定义

考虑如下非线性离散系统:

$$x_{k+1} = f(x_k) + g(x_k)u(x_k) + h(x_k)d(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4-1)$$

其中 $x_k = x(k) \in \mathbb{R}^n$ 代表系统状态变量, $u_k = u(x(k)) \in \mathbb{R}^m$ 是控制输入变量, 满足 $u_k \in \Lambda$, $\Lambda = \{u_k \mid u_{ik} \leq \bar{u}_i\}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $d_k \in \mathbb{R}^m$ 是外部扰动, 满足 $d_k \in \Omega$, $\Omega = \{d_k \mid d_{ik} \leq \bar{d}_i\}$, $i = 1, 2, \dots, m$ 。 $f(x_k)$ 可微, 并且 $f(0) = 0$ 。

假设 4.1: 假设系统(4-1)是可控的, 且函数 $f(x_k) + g(x_k)u(x_k) + h(x_k)d(x_k)$ 利普希兹连续。

定义如下性能指标函数:

$$J(x_k) = \sum_{j=k}^{\infty} (x_j^T Q x_j + U(x_j) - r^2 d_j^T d_j), \quad (4-2)$$

其中 $U(x_k) = u^T(x_k) R u(x_k)$, R 和 Q 是对称正定矩阵, $\bar{U} = \text{diag}[\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m]$ 。 ϕ 是有界一对一单调递增函数满足 $\phi(\cdot) \leq 1$, $r \geq 0$ 表示外部扰动对于总体性能影响。

基于(4-2), 可将性能指标函数变为下面形式

$$J(x_k) = x_k^T Q x_k + U(x_k) - r^2 d_k^T d_k + J(x_{k+1}). \quad (4-3)$$

最优控制是将性能指标函数最小化, 因此, 将最优性能指标函数表示为

$$V^*(x_k) = \min_{u_k} J(x_k, u_k) \quad (4-4)$$

根据最优控制理论, 结合式(4-3)和(4-4), 哈密顿方程可定义为:

$$H(x_k, u_k, d_k) = x_k^T Q x_k + U(x_k) - r^2 d_k^T d_k + V^*(x_{k+1}) - V^*(x_k). \quad (4-5)$$

最优控制和最差扰动分别定义 u_k^* 和 d_k^* 如下：

$$\begin{aligned} u_k^* &= \arg \min_{u_k} H(x_k, u_k, d_k), \\ d_k^* &= \arg \max_{d_k} H(x_k, u_k, d_k). \end{aligned} \quad (4-6)$$

具体表达式可以通过对式(4-5)哈密顿方程分别关于 u_k^* 和 d_k^* 求偏导得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(x_k, u_k, d_k)}{\partial u_k} = 0 &\Rightarrow u_k^* = \bar{U}\varphi\left(-\frac{1}{2}(\bar{U}R)^{-1}g^T(x_k)\frac{\partial V^*(x_{k+1})}{x_{k+1}}\right), \\ \frac{\partial H(x_k, u_k, d_k)}{\partial d_k} = 0 &\Rightarrow d_k^* = \frac{h^T(x_k)}{2r^2}\frac{\partial V^*(x_{k+1})}{\partial x_{k+1}}, \end{aligned} \quad (4-7)$$

其中 V^* 代表最优性能指标函数。

将最优策略 u_k^* 和最差扰动 d_k^* 代入式(4-5)，可以得到 HJB 方程如下：

$$H(x_k, u_k^*, d_k^*) = x_k^T Q x_k + u_k^{*T} R u_k^* - r^2 d_k^{*T} d_k^* + V^*(x_{k+1}) - V^*(x_k) = 0. \quad (4-8)$$

注：无论是最优控制、最差扰动都与 $\frac{\partial V^*(x_{k+1})}{x_{k+1}}$ 紧密相关，然而非线性系统

中直接求解 $\frac{\partial V^*(x_{k+1})}{x_{k+1}}$ 往往较为困难，因此，通常要求解近似解来代替实际解。

目前很多基于强化学习的最优控制算法可以用于求解此类问题，我们将在 4.3 节中设计神经网络算法求解式(4-8)。

4.2 事件触发控制设计

本节中，为了降低数据的采样频率和控制器的更新次数，引入了事件触发机制。在事件触发机制中，控制器状态仅在事件误差超过预设的阈值时才会更新，相邻两个触发时刻之间通过零阶保持(ZOH)保持不变。由于离散时间系统中的采样时间间隔始终是时间的整数倍，可以保证最小采样时间不会趋于零，保证不会发生芝诺行为。将时间 $\{k_i\}_{i=0}^{\infty}$ 表示触发的瞬间，因此反馈控制律可以改写为

$$u_k = u(x_{k_i}), k \in [k_i, k_{i+1}), \quad (4-9)$$

其中 x_{k_i} 为触发时刻的状态变量，事件触发误差定义如下

$$e_k = x_{k_i} - x_k, k \in [k_i, k_{i+1}). \quad (4-10)$$

因此，系统(4-1)的动力学方程可表示为

$$x_{k+1} = f(x_k) + g(x_k)u(e_k + x_k) + h(x_k)d_k. \quad (4-11)$$

假设 4.2 假设函数 V 是连续可微的，并且满足^[52]下列条件

$$\begin{aligned} \alpha_1(\|x\|) \leq V(x_k) \leq \alpha_2(\|x\| + \bar{d}), \\ V(x_{k+1}) - V(x_k) \leq -\alpha(\|x_k\|) + \gamma(\|e_k\|) + \alpha(\|\bar{d}_k\|), \end{aligned} \quad (4-12)$$

其中 $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ 和 γ 是 $\mathcal{K}_\infty$ 类函数。假设静态事件触发条件如下：

$$k_{i+1} = \inf \left\{ k > k_i \mid \delta\alpha(\|x(k)\|) - \gamma(\|e(k)\|) - \alpha(\|\bar{d}_k\|) \leq 0 \right\}, \quad (4-13)$$

其中事件触发参数 $0 < \delta < 1$ ， $\bar{d} \geq d_k$ 为扰动的上限。

定理 4.1: 对于任意的 $0 < \delta < 1$ ，系统(4-11)在静态事件触发条件(4-13)作用下满足渐近稳定性。

证明：由静态事件触发条件(4-13)可以保证

$$\gamma(\|e(k)\|) \leq \delta\alpha(\|x(k)\|) - \alpha(\|\bar{d}_k\|). \quad (4-14)$$

以满足定义 1 的一个连续可微函数 V 为 Lyapunov 函数，结合式(4-14)可得 V 的一阶差分：

$$\begin{aligned} \Delta V(x(k)) &= V(f(x(k), p(e(k) + x(k)))) - V(x(k)) \\ &\leq -\alpha(\|x(k)\|) + \gamma(\|e(k)\|) + \alpha(\|\bar{d}_k\|) \\ &\leq -\alpha(\|x(k)\|) + \delta\alpha(\|x(k)\|) + \alpha(\|\bar{d}_k\|) - \alpha(\|\bar{d}_k\|) \\ &= (\delta - 1)\alpha(\|x(k)\|), \end{aligned} \quad (4-15)$$

由 $0 < \delta < 1$ 可知 $\Delta V(x(k)) < 0$ ，于是系统(4-11)在事件触发条件(4-13)下满足渐近稳定性。

在最优控制中，常常选取最优性能指标函数作为 Lyapunov 函数，由于其差分 $V^*(x_{k+1}) - V^*(x_k) = -x_k^T Q x_k - u^T(x_k) R u(x_k) + r^2 d_k^{*T} d_k^*$ 是上面一般情况的一个特例，显然在 $\alpha(\|\bar{d}_k\|) \geq r^2 d_k^{*T} d_k^*$ 时其差分小于零，同样可证明系统(4-11)满足渐进稳定性，后面动态事件触发证明系统稳定性同样适用。

4.2.2 动态事件触发条件下系统的稳定性分析

为了进一步减少静态事件触发的次数，本小节在上一节基础上引入动态事件

触发条件。设计内部动态变量 $\eta(k)$ 为：

$$\eta(k+1) = \xi\eta(k) + \delta\alpha\|x(k)\| - \gamma\|e(k)\| - \alpha(\|\bar{d}_k\|), \quad \eta(0) \geq 0, \quad (4-16)$$

这里参数 $0 < \xi < 1$ 。

加入动态变量后动态事件触发条件如下：

$$k_{i+1} = \inf \left\{ k > k_i \mid \frac{1}{\beta}\eta(k) + \delta\alpha\|x(k)\| - \gamma\|e(k)\| - \alpha(\|\bar{d}_k\|) \leq 0 \right\}, \quad (4-17)$$

这里参数 $\beta \geq \frac{1}{\xi}$ 。当 $\beta \rightarrow +\infty$ ，则动态事件触发条件(4-17)可转化为静态事件触发条件(4-13)。

引理 4.1： 当参数 $0 < \delta < 1$ 、 $\eta(0) \geq 0$ 、 $0 < \xi < 1$ 和 $\beta \geq \frac{1}{\xi}$ 时，对于任意的 $k_i \leq k < k_{i+1}$ ，动态变量 $\eta(k) \geq 0$ 。

证明：由动态事件触发条件(4-17)可知有 $\delta\alpha\|x(k)\| - \gamma\|e(k)\| - \alpha(\|\bar{d}_k\|) \geq \frac{1}{\beta}\eta(k)$

对于任意的 $k_i \leq k < k_{i+1}$ 恒成立，结合式(4-16)有：

$$\begin{aligned} \eta(k+1) &= \xi\eta(k) + \delta\alpha\|x(k)\| - \gamma\|e(k)\| - \alpha(\|\bar{d}_k\|) \\ &\geq \left(\xi - \frac{1}{\beta} \right) \eta(k) \\ &\geq \cdots \geq \left(\xi - \frac{1}{\beta} \right)^{k+1} \eta(0) \\ &\geq 0. \end{aligned} \quad (4-18)$$

对于任意的 $k_i \leq k < k_{i+1}$ 恒成立，证毕。

接下来，将证明在动态事件触发条件(4-17)作用下系统(4-11)的稳定性。

定理 4.2： 对于任意的 $0 < \delta < 1$ 、 $\eta(0) \geq 0$ 、 $0 < \xi < 1$ 和 $\beta \geq \frac{1}{\xi}$ ，系统(4-11)在动态事件触发条件(4-17)下满足渐近稳定性。

证明：结合式(4-15)和(4-18)，构造 Lyapunov 函数为：

$$W(x(k), \eta(k)) = V(x(k)) + \eta(k). \quad (4-19)$$

显然，函数 W 正定，对其进行一阶差分可得：

$$\begin{aligned}
 \Delta W(x(k), \eta(k)) &= V(x(k+1)) - V(x(k)) + \eta(k+1) - \eta(k) \\
 &\leq -\alpha \|x(k)\| + \gamma \|e(k)\| + \alpha(\|\bar{d}_k\|) + \xi \eta(k) + \delta \alpha \|x(k)\| \\
 &\quad - \gamma \|e(k)\| - \alpha(\|\bar{d}_k\|) - \eta(k) \\
 &\leq (\delta - 1) \|x(k)\| + (\xi - 1) \eta(k).
 \end{aligned} \tag{4-20}$$

由 $0 < \delta < 1$ 和 $0 < \xi < 1$ 可知 $\Delta W(x(k), \eta(k)) < 0$ 。系统(4-11)在动态事件触发控制条件(4-17)下满足渐近稳定性，证毕。

4.3 神经网络算法设计

在本节，我们将使用神经网络去学习 HJB 方程。在神经网络中有两个神经网络模块：评判者神经网络和执行者神经网络。使用评判者神经网络来逼近最优性能指标函数，使用执行者神经网络来逼近控制策略和干扰策略。

4.3.1 评判者神经网络设计

最优性能指标函数在理想条件下可由三层神经网络模型逼近得到，性能指标函数(4-2)可以表达为

$$V(x_k) = W_V^T \sigma_V(x_k) + \varepsilon_{V,k}, \tag{4-21}$$

其中 $W_V \in \mathbb{R}^{l_v}$ 是目标函数的未知权重， $\sigma_V(x_k)$ 是输入层到隐层的激活函数， $\varepsilon_{V,k}$ 代表重构误差。

结合(4-21)式，方程(4-5)可以构造为

$$W_V^T \Delta \sigma_V(x_k) + x_k^T Q x_k + U(x_k) - r^2 d_k^T d_k + \Delta \varepsilon_{V,k} = 0, \tag{4-22}$$

其中 $\Delta \sigma_V(x_k) = \sigma_V(x_{k+1}) - \sigma_V(x_k)$, $\Delta \varepsilon_{V,k} = \varepsilon_{V,k+1} - \varepsilon_{V,k}$ 。

实际系统中，理想权值矩阵 W_V 的值难以计算，因此，构造近似性能指标函数 $V(x_k)$ 如下。

$$V(x_k) = W_{V,k}^T \sigma_V(x_k), k \in [k_i, k_{i+1}), \tag{4-23}$$

其中 $W_{V,k}^T \in \mathbb{R}^{l_v}$ 表示估计权重， $\sigma_V(x_{k_i})$ 表示基于事件的激活函数，

由于近似估计理想值和估计值之间存在误差，根据式(4-22)，近似估计的 HJB

方程估计误差 $e_{V,k}$ 可以表达为

$$e_{V,k} = x_k^T Q x_k + U(x_k) - r^2 d_k^T d_k + V(x_{k+1}) - V(x_k). \quad (4-24)$$

结合(4-23)和(4-24)式，将估计误差代入，HJB 方程可以重新表达为

$$e_{V,k} = x_k^T Q x_k + U(x_k) - r^2 d_k^T d_k + W_{V,k}^T \sigma_V(x_k), \quad k \in [k_i, k_{i+1}), \quad (4-25)$$

其中 $\Delta \sigma_V(x_{k_i}) = \sigma_V(x_{k_{i+1}}) - \sigma_V(x_{k_i})$ 。

通过梯度下降法最小化误差函数 $e_{V,k}$ ，评判者神经网络的更新律如下

$$W_{V,k}^T = \begin{cases} W_{V,k-1}^T - \frac{\alpha_V \Delta \sigma_V(x_{k-1}) e_{V,k-1}^T}{\Delta \sigma_V^T(x_{k-1}) \Delta \sigma_V(x_{k-1}) + 1}, & k = k_i, \\ W_{V,k-1}^T, & k \in (k_{i-1}, k_i), \end{cases} \quad (4-26)$$

其中 $\alpha_V > 0$ 是学习率。

4.3.2 执行者神经网络设计

本小节我们将设计两个执行者神经网络来近似最优控制策略 u_k 和最差扰动策略 d_k 。

最优控制策略 u_k 和最差扰动策略 d_k 设计为

$$\begin{aligned} u_k &= W_u^T \sigma_u(x_k) + \varepsilon_{u,k}, \\ d_k &= W_d^T \sigma_d(x_k) + \varepsilon_{d,k}, \end{aligned} \quad (4-27)$$

其中 $W_u \in \mathbb{R}^{l_u \times m}$, $W_d \in \mathbb{R}^{l_d \times m}$ 是分别是控制输入和扰动的未知权重, $\sigma_u(x_k) \in \mathbb{R}^{l_u}$ 和 $\sigma_d(x_k) \in \mathbb{R}^{l_d}$ 代表时变激活函数, $\varepsilon_{u,k}$, $\varepsilon_{d,k} \in \mathbb{R}^m$ 是重构误差。

所以近似最优输入和近似最差扰动可以表达为

$$\begin{aligned} u_k &= W_{u,k}^T \sigma_u(x_{k_i}), \\ d_k &= W_{d,k}^T \sigma_d(x_{k_i}), \quad k \in [k_i, k_{i+1}), \end{aligned} \quad (4-28)$$

其中 $W_{u,k}^T, W_{d,k}^T$ 表示估计权重, $\sigma_u(x_{k_i}), \sigma_d(x_{k_i})$ 为基于事件触发的激活函数。代入式(4-23)，估计控制输入可以重写为

$$u_{V,k} = \bar{U} \phi \left(-\frac{1}{2} (\bar{U} R)^{-1} g^T(x_{k_i}) \nabla \sigma_V^T(x_{k_{i+1}}) W_{V,k}^T \right), \quad (4-29)$$

其中 $\nabla \sigma_V(x_{k_i+1}) = \frac{\partial \nabla \sigma_V(x_{k_i+1})}{\partial x_{k+1}}$ 。因此，控制输入的估计误差 $e_{u,k}$ $k \in [k_i, k_{i+1})$ 可以描述为

$$e_{u,k} = W_{u,k}^T \sigma_u(x_{k_i}) + \bar{U} \phi \left(-\frac{1}{2} (\bar{U} R)^{-1} g^T(x_{k_i}) \nabla \sigma_V^T(x_{k_i+1}) W_{V,k}^T \right). \quad (4-30)$$

扰动估计可以表示为

$$d_{V,k} = \frac{h^T(x_{k_i})}{2r^2} \nabla \sigma_V^T(x_{k_i+1}) W_{V,k}^T, \quad (4-31)$$

根据式(4-23)，扰动估计的误差 $e_{d,k}$ 可以表示为

$$e_{d,k} = W_{d,k}^T \sigma_d(x_{k_i}) - \frac{h^T(x_{k_i})}{2r^2} \nabla \sigma_V^T(x_{k_i+1}) W_{V,k}^T, \quad (4-32)$$

基于最小二乘法，选择控制策略的权重更新规律为

$$W_{u,k} = \begin{cases} W_{u,k-1} - \frac{\alpha_u \Delta \sigma_u(x_{k-1}) e_{u,k-1}^T}{\Delta \sigma_u^T(x_{k-1}) \Delta \sigma_u(x_{k-1}) + 1}, & k = k_i, \\ W_{u,k-1}, & k \in (k_{i-1}, k_i), \end{cases} \quad (4-33)$$

其中 $\alpha_u > 0$ 是执行者网络的学习率

同样的，扰动策略的更新律为

$$W_{d,k} = \begin{cases} W_{d,k-1} - \frac{\alpha_d \Delta \sigma_d(x_{k-1}) e_{d,k-1}^T}{\Delta \sigma_d^T(x_{k-1}) \Delta \sigma_d(x_{k-1}) + 1}, & k = k_i, \\ W_{d,k-1}, & k \in (k_i, k_{i+1}), \end{cases} \quad (4-34)$$

其中 $\alpha_d > 0$ 是执行者网络的学习率。

4.5 数值仿真

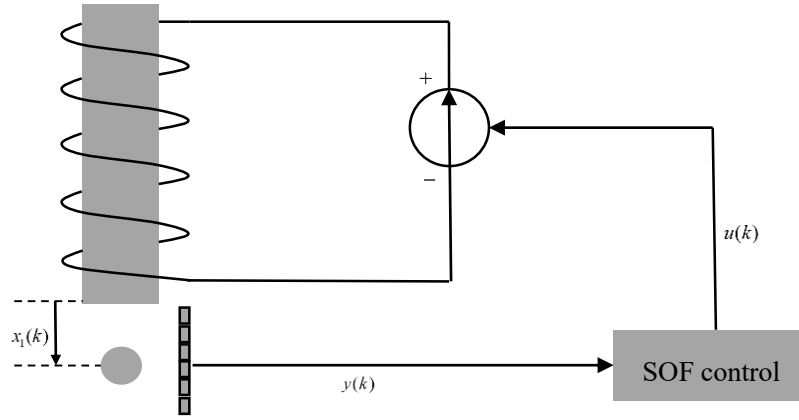


图 4.1 磁悬浮系统图

考虑图 4.1 中所示的磁悬浮系统的非线性模型^[57]。其系统动力学用以下表达式表示：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{g\mu(\mu x_1(t) + 2\mu y_0 + 2)x_1(t)}{(1 + \mu(x_1(t)) + y_0)^2} x_1(t) - \frac{K_m}{m} x_2(t) \\ &\quad + \frac{\lambda\mu}{2m(1 + \mu(x_1(t)) + y_0)^2} u(t),\end{aligned}\quad (4-35)$$

其中， $\dot{x}_1(t)$ 和 $\dot{x}_2(t)$ 分别为球围绕期望位置和垂直速度的偏差。所需的位置是 $y_0 = 0.05m$ 。应用具有采样周期 T 的欧拉离散化并在系统中加入扰动项，系统(4-35)可以描述为如下二维系统：

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -x_1(k) + x_2(k) \\ x_2(k+1) = f(x(k)) + g(x(k))u(k) + h(x(k), d(k)), \end{cases}\quad (4-36)$$

其中 $f(x(k)) = -0.5(x_1(k) + x_2(k)) + 0.5x_2(k)\sin(x_1(k))$ ， $g(x(k)) = \sin(x_1(k))$ ， $h(x(k), d(k)) = \sin(x_1(k)d(k))$ ， $x(k) = [x_1(k), x_2(k)]^T \in \mathbb{R}^2$ 表示系统状态， $u_k \in \mathbb{R}$ 和 $d_k \in \mathbb{R}$ 分别表示输入控制和额外扰动，其边界分别满足 $|u_k| < 1$ 和 $|d_k| < 10$ 。给定系统状态初始值 $x(0) = [1, -1]$ ，初始扰动 $d_0 = -1$ ，矩阵 $Q = R = I$ 。动态事件触发条件(4-17)中给定参数 $\delta = 0.8$ 、 $\eta(0) = 0$ 、 $\xi = 1$ 和 $\beta = 10$ 。由于神经

网络中参数的选择会极大地影响系统的控制性能。为了使系统具有更好的性能，选择神经网络的初始值为 $[-1, 3, 1.5]$ ，并分别选择 2 个神经网络的时变激活函数 $[x_1^2(k), x_1(k)x_2(k), x_1^2(k)]^T$ ，设定 $T = 0.1s$ 得到的仿真图如下。

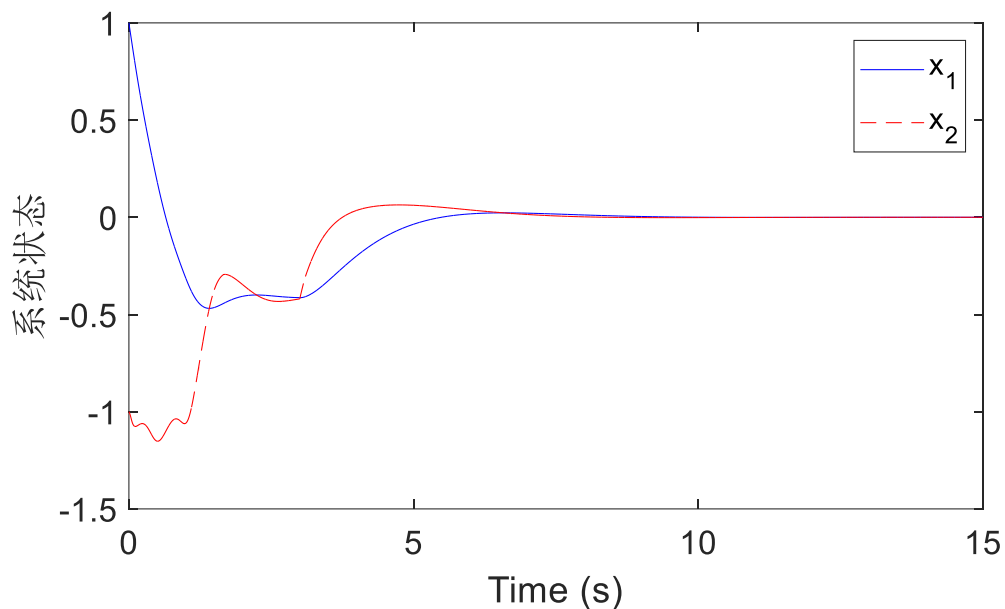


图 4.2 系统状态轨迹

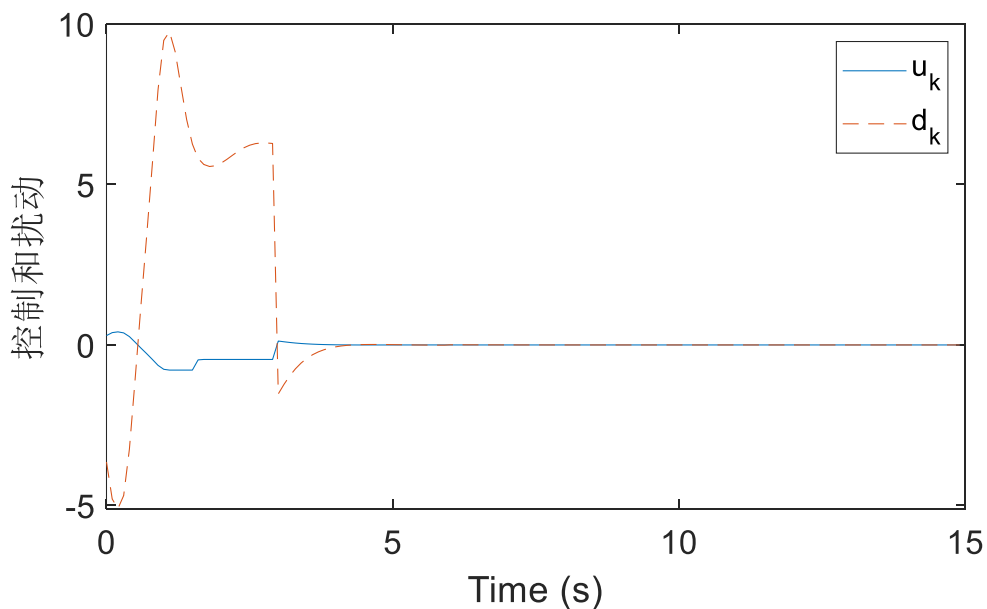


图 4.3 控制和扰动输入轨迹

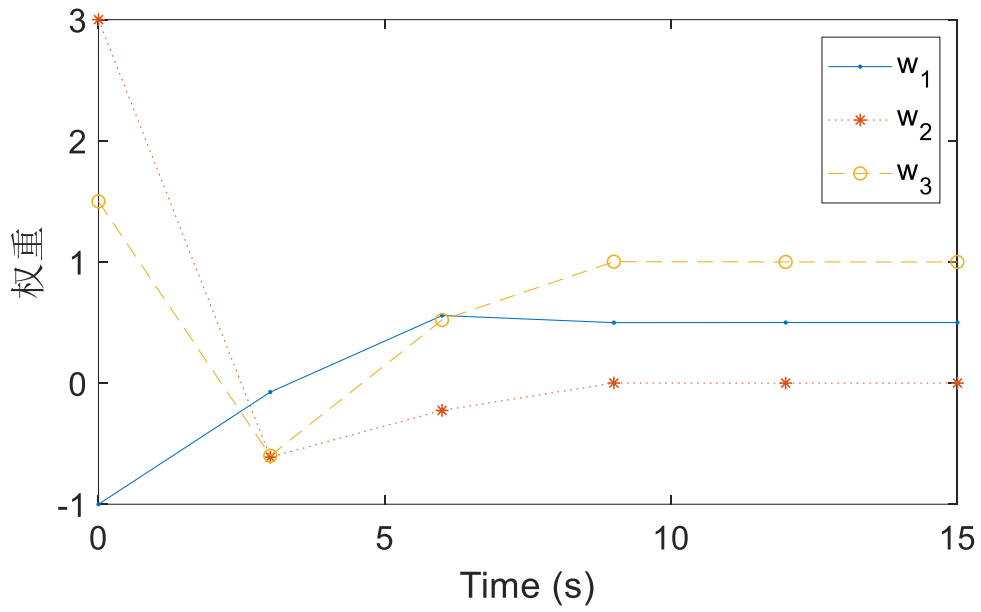


图 4.4 权重更新轨迹

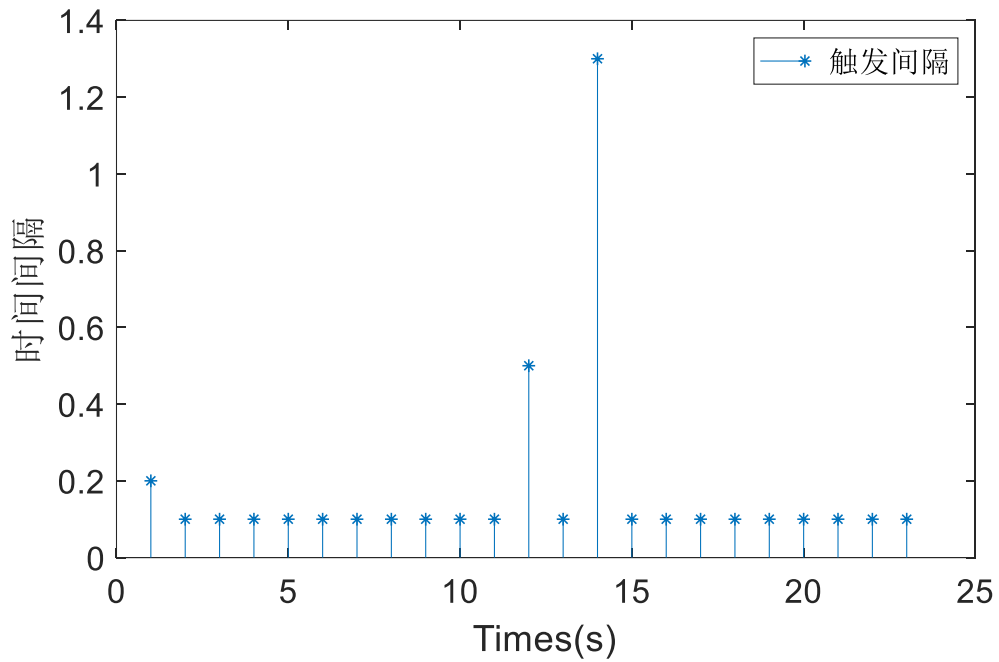


图 4.5 事件触发间隔

图 4.2 是系统的状态轨迹，从图中可以看到系统状态最终收敛到零。图 4.3 是控制信号的额外扰动，可以从图中看出，这两个变量最终也收敛到零。图 4.4 是神经网络权重更新的轨迹，权重在神经网络每迭代 30 次后更新一次，多次迭代后权重最终趋于稳定。图 4.5 是前 25 次动态事件触发的触发间隔图，图中 x 轴表示动态事件触发次数， y 轴表示离散的采样信号点之间的时间间隔，可以看出

控制方法极大得节约了控制成本。

4.6 本章小结

研究了受外部扰动的离散时间非线性系统的动态事件触发最优控制。为了优化非线性系统的性能,我们定义了一个性能指标函数,然后建立了相应的 HJB 方程。基于贝尔曼优化原理,从 HJB 方程出发,设计了最优控制策略和最坏扰动策略。为了降低控制策略和干扰策略的更新频率,我们引入了一种事件触发的更新机制。随后,设计了一个动态事件触发条件,并用 Lyapunov 方法证明了系统的稳定性。为了求解最优控制策略,开发了神经网络结构,分别逼近最优值函数、最优控制策略和最坏扰动策略。最后用一个例子说明了模型的有效性。

第 5 章 总结与展望

本文主要研究了离散系统的动态事件触发控制和优化问题。首先研究了离散系统的事件触发控制问题，设计了静态事件触发条件和动态事件触发条件，证明了在这些条件下能保证系统的稳定性。同时，也从理论层面证明了动态事件触发控制在资源节约方面有着较好性能。最后用一个仿真例子说明了理论的有效性。其次研究的是带扰动的离散系统动态事件触发最优控制。在上一章节研究的离散系统动态事件触发控制机制的基础上讨论了一类更具有现实意义的带扰动的离散系统，同时将研究推广到了最优控制中。首先给定了系统的性能指标函数，最优控制问题的目的就是找到一个容许范围内的控制律使得此性能函数达到最小值。与上一节研究一样考虑了动态事件触发控制，设计了新的动态事件触发条件，使得具有扰动的离散系统能够达到稳定状态，通过理论证明了动态事件触发条件下系统的稳定性。文中需要通过设计并求解 HJB 方程找到最优控制律。由于 HJB 方程难以直接求得解析解，因此本文设计了评判者—行动者神经网络通过逼近最优性能指标函数、最优控制律和最差扰动输入，利用梯度下降法更新近似函数权重，从而使得设计的估计函数与理想函数近似。

本文主要研究离散系统，提出了一类动态事件触发的控制方法，取得了一些有意义的成果。但由于作者自身水平有限，文章的研究内容还可以继续深化改进。主要内容有：

1. 实际系统中，控制可能不会持续进行，研究间歇性的事件触发控制方法可能更符合现实需求。将本文工作推广到间歇性动态事件触发控制的研究当中，将是比较有意义的工作。

2. 本文中设计的事件触发条件的实际性能会受到选择的参数影响，分析事件触发条件中每个参数对于控制性能的具体影响将是一个具有挑战的工作。

参考文献

- [1] Boukas E K, Liu Z K. Robust H_{∞} control of discrete-time Markovian jump linear systems with mode-dependent time-delays[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2001, 46(12):1918-1924.
- [2] Wang D, Liu D, Li H, etc. An approximate optimal control approach for robust stabilization of a class of discrete-time nonlinear systems with uncertainties[J]. IEEE Transactions on Systems Man Cybernetics-Systems, 2016, 46(5):713-717.
- [3] Ghor H EL, Aggoune E H M. Energy efficient scheduler of aperiodic jobs for real-time embedded systems[J]. International Journal of Automation & Computing, 2020, 17(5):733-743.
- [4] Miskowicz M. Event-Based Control and Signal Processing[J]. Chemical Papers, 2016, 52(3):581-582.
- [5] Zou L, Wang Z D, Han Q L, etc. Moving Horizon Estimation for Networked Time-Delay Systems Under Round-Robin Protocol[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2019, 64(12):5191-5198.
- [6] Heemels W P M H, Donkers M C F, Teel A R. Periodic event-triggered control for linear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2013, 58(4):847-861.
- [7] Ge X, Han Q L, Zhang X M, etc. Dynamic Event-triggered Control and Estimation: A Survey[J]. International Journal of Automation and Computing 2021, 18(6):857-886.
- [8] Ge X H, Han Q L, Ding L, etc. Dynamic event-triggered distributed coordination control and its applications: A survey of trends and techniques[J]. IEEE Transactions on Systems, 2020 50(9):3112-3125.
- [9] Ackermann J. Sampled-data control systems: analysis and synthesis, robust system design[M]. Springer Science & Business Media, 1985.
- [10] Chen T W, Francis B. Optimal sampled-data control systems[M]. Springer Science & Business Media, 1995.
- [11] Hetel L, Fiter C, Omran H, etc. Recent developments on the stability of systems with aperiodic sampling: An overview[J]. Automatica, 2017, 76:309-335.
- [12] Wang X, Lemmon M D. Event design in event-triggered feedback control systems[C]. 2008 47th IEEE conference on decision and control, 2008 28:2105-2110.
- [13] Kahne S, Lee E. Optimal control: An introduction to the theory and its applications[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1966, 12(3):345-347.
- [14] Lewis F L, Vrabie D. Reinforcement learning and adaptive dynamic programming for feedback control[J]. IEEE circuits and systems magazine, 2009, 9(3):32-50.

-
- [15]Jiang H, Zhang H, Luo Y, etc. Neural-network-based robust control schemes for nonlinear multiplayer systems with uncertainties via adaptive dynamic programming[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2019, 49(3):579-588.
- [16]Mu C, Wang K, Sun C. Policy-iteration-based learning for nonlinear player game systems with constrained inputs[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2020, 14:20-26.
- [17]Na J, Wang B, Li G, etc. Nonlinear constrained optimal control of wave energy converters with adaptive dynamic programming[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2019, 66(10):7904-7915.
- [18]Mu C, Wang K, Ni Z, etc. Cooperative differential gamebased optimal control and its application to power systems[J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2020, 16(8):5169-5179.
- [19]Wang F, Zhang H, Liu D. Adaptive dynamic programming: An introduction[J]. IEEE computational intelligence magazine, 2009, 4(2):39-47.
- [20]Murray J J, Cox C J, Lendaris G G, etc. Adaptive dynamic programming [J]. IEEE transactions on systems, man, and cybernetics, 2002, 32(2):140-153.
- [21]He W, Yan Z, Sun C, etc. Adaptive neural network control of a flapping wing micro aerial vehicle with disturbance observer[J]. IEEE transactions on cybernetics, 2017, 47(10):3452-3465.
- [22]Qiu T, Wang H, Li K, etc, Sangaiah A K, Chen B. SIGMM: A novel machine learning algorithm for spammer identification in industrial mobile cloud computing[J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2019, 15(4):2349-2359.
- [23]Liu L, Liu Y, Tong S. Neural networks-based adaptive finite-time fault-tolerant control for a class of strict-feedback switched nonlinear systems[J]. IEEE transactions on cybernetics, 2019, 49(7):2536-2545.
- [24]Zhang H, Luo Y, Liu D. Neural-network-based near-optimal control for a class of discrete-time affine nonlinear systems with control constraints[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2009, 20(9):1490-1503.
- [25]Zhang H, Feng T, Yang G H, etc. Distributed cooperative optimal control for multiagent systems on directed graphs: An inverse optimal approach[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2015, 45(7):1315-1326.
- [26]Zhang H, Qin C, Jiang B, etc. Online adaptive policy learning algorithm for H_∞ state feedback control of unknown affine nonlinear discrete-time systems[J]. IEEE transactions on cybernetics 2014, 44(12):2706-2718.
- [27]Vamvoudakis K G, Vrabie D, Lewis F L. Online adaptive algorithm for optimal control with integral reinforcement learning[J]. Robust Nonlinear Control, 2014 24(17):2686-2710.
- [28]Donkers M C, Heemels W P. Output-based event-triggered control with guaranteed L^∞ -gain and improved and decentralized event-triggering[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012 57(6):1362-1376.

-
- [29]Fan Y, Yang Y, Zhang Y. Sampling-based event-triggered consensus for multi-agent systems[J]. *Neurocomputing*, 2016 191:141-147.
 - [30]Li B, Liu Y, Kou K I, etc. Event-triggered control for the disturbance decoupling problem of boolean control networks[J]. *IEEE transactions on cybernetics*, 2018, 48(9):2764-2769.
 - [31]Zhang Q, Zhao D, Wang D. Event-based robust control for uncertain nonlinear systems using adaptive dynamic programming[J]. *IEEE transactions on neural networks and learning systems*, 2018, 29(1):37-50.
 - [32]Heydari A. Optimal codesign of control input and triggering instants for networked control systems using adaptive dynamic programming[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2019, 66(1):482-490.
 - [33]Mu C, Wang K. Approximate-optimal control algorithm for constrained zero-sum differential games through event-triggering mechanism[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2019, 95(4):2639-2657.
 - [34]Sahoo A, Xu H, Jagannathan S. Neural network-based event triggered state feedback control of nonlinear continuous-time systems[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2016, 27(3):497-509.
 - [35]Zhong X, He H. An event-triggered ADP control approach for continuous-time system with unknown internal states[J]. *IEEE transactions on cybernetics*, 2017, 47(3):683-694.
 - [36]Xue S, Luo B, Liu D. Event-triggered adaptive dynamic programming for zero-sum game of partially unknown continuous-time nonlinear systems[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2018 17:124-131.
 - [37]Sahoo A, Xu H, Jagannathan S. Approximate optimal control of affine nonlinear continuous-time systems using event-sampled neurodynamic programming[J]. *IEEE transactions on neural networks and learning systems*, 2017, 28(3):639-652.
 - [38]Yang X, H. He, Liu D. Event-triggered optimal neuro-controller design with reinforcement learning for unknown nonlinear systems[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2019, 49(9):1866-1878.
 - [39]Zhu Y, Zhao D, He H, etc. Event-triggered optimal control for partially unknown constrained-input systems via adaptive dynamic programming[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2017, 64(5):4101-4109.
 - [40]Zhou L, Ding H, and Xiao X. Input-to-state stability of discrete-time switched nonlinear systems with generalized switching signals[J]. *Applied Mathematics and Computation* 2021, 392:125727
 - [41]张霄力, 刘玉忠, 赵军. 一类离散切换系统的渐近稳定性[J]. *控制理论与应用*, 2002, (05):774-776.
 - [42]Wu X, Tang Y, Zhang W. Input-to-state stability of impulsive stochastic delayed systems under linear assumptions[J]. *Automatica*, 2016, 66(C):195-204.

- [43]Dorf R, Farren M, Phillips C. Adaptive sampling frequency for sampled-data control systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1962, 7(1): 38-47.
- [44]Tabuada P. Event-triggered real-time scheduling of stabilizing control tasks [J]. IEEE Transactions on Automatic control, 2007 52(9):1680-168.
- [45]Kiumarsi B, Lewis F L, Modares H, etc. Reinforcement Q-learning for optimal tracking control of linear discrete-time systems with unknown dynamics[J], Automatica, 2014, 50(4):1167-1175.
- [46]Girard A. Dynamic triggering mechanisms for event-triggered control[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(7):1992-1997.
- [47]Ming Z, Zhang H, Yan Y, etc. Tracking control of discrete-time system with dynamic event-based adaptive dynamic programming[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2022, 69(8):3570-3574.
- [48]Cheng S, Zhu M, Fu Y, etc. Dynamic event-triggered approximate optimal control strategy for nonlinear systems[J]. International Journal of Control, Automation and Systems, 2022, 20(5):1-10.
- [49]Su Z, Lin X, Huang B, etc. Improved dynamic event-triggered anti-unwinding control for autonomous underwater vehicles[J]. Ocean Engineering, 2023, 272:113619.
- [50]Zhang H, Cui L, Luo Y. Near-optimal control for nonzero-sum differential games of continuous-time nonlinear systems using singlenetwork ADP[J]. IEEE transactions on cybernetics, Cybern, 2013, 43(1):206-216.
- [51]Fisher M E, Jennings L S. Discrete-time optimal control problems with general constraints[J]. ACM Transactions on Mathematical Software, 1992, 18(4):401-413.
- [52]Zou B, Zhao W, Zhang H. Event-triggered optimal control of discrete-time nonlinear system with external disturbance[C]. Hefei, China, 2022 41st Chinese Control Conference, 2022, 345-350.
- [53]Song R, Zhu L. Optimal fixed-point tracking control for discrete-time nonlinear systems via ADP[J]. IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica, 2019, 6(3):52-61.
- [54]Øksendal, Bernt. Stochastic differential equations[M]. Springer Berlin Heidelberg, 2003.
- [55]Jiang Z P. Wang Y. Input-to-state stability for discrete-time nonlinear systems. Automatica, 2001, 37(6), 857-869.
- [56]Ma L, Sun H, Zong G. Feedback passification of switched stochastic time - delay systems with multiple disturbances via DOBC[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2020, 30(4):1696-1718.
- [57]Pessim P S, Peixoto M L, Palhares R M, etc. Static output-feedback control for Cyber-physical LPV systems under DoS attacks[J]. Information Sciences, 2021, 563:241-255.

攻读硕士期间取得的学术成果

在安徽工程大学学报投稿一篇《离散系统的动态事件触发控制》\已录用

致谢

三年时光，转瞬即逝，回想起 2021 年刚来读研的我，怀揣着对研究生生活的憧憬与紧张踏入了校园。在一篇一篇论文的钻研下，在导师的指导下，在家人朋友的鼓励下，我的研究生生活过得简单而充实。临近毕业，我想对他们真心的表达感谢。

首先，我最感谢的是我的研究生导师老师吴小太教授。在学术研究中吴老师一丝不苟的指导我们如何进行论文查阅以及撰写论文，在日常生活中同样会与我们谈笑风生，亦师亦友。其次，我要感谢张振华老师。在论文写作上同样给予了我许多指导，在讨论学术的过程中同样提高了我的知识储量和学习技巧。在这里我想对你们说“老师，感谢有你”。

最后，我要感谢我的家人以及同学们。感谢我的家人，一直支持着我读书。寒窗苦读十余载，如果没有起早贪黑，辛勤劳作的父母支持我哪会有我今天的成果，以后我要好好报答你们。我同样要感谢我的同学们，在研究生三年中我的同学无论是在学习上还是在生活上对我的帮助都十分巨大，尤其是我的师兄吴光磊、同门曹汉秋等，“愿君如此山水，滔滔岌岌风云起”。

“因为困难多壮志，不教红尘惑坚心”，与你们的峥嵘岁月都将成为我人生前进路上最雄厚，最坚定的动力。