

分类号: (O157.5)

密 级: 公开

单位代码: 10363

学 号: 2211020133

题目 广义谱唯一图的判定研究

题目 ON GRAPHS BEING DETERMINED BY
THEIR GENERALIZED SPECTRUM

学 生 姓 名: 郭松林

指 导 教 师: 王伟 教授

专 业: 数学

研 究 方 向: 图论

论文答辩日期: 2024 年 5 月 29 日

安徽工程大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：我恪守学术道德，崇尚严谨学风。所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已明确注明和引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品及成果的内容。论文为本人亲自撰写，我对所写的内容负责，并完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

学位论文作者签名：郭松林

日期：2024年6月3日

安徽工程大学学位论文版权使用授权书

学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅或借阅。本人授权安徽工程大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保密☐，在 年解密后适用本版权书。

本学位论文属于

不保密☒

学位论文作者签名：郭松林

指导教师签名：王伟

日期： 2024 年 6 月 3 日

日期： 2024 年 6 月 3 日

广义谱唯一图的判定研究

摘要

图谱理论中的谱唯一图的判定问题一直没有得到解决. 现有的谱唯一图的判定方法基本上都需要图带有特殊结构, 无法扩展到更一般的图中. 近几年, Wang 和 Yu 给出了广义谱唯一图的一种新的判定方法, 这个方法不同于之前的那些做法, 它不依赖图的特殊结构, 即设

$$\theta(G) = \gcd \left\{ 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \det W, \Delta(G) \right\}$$

是奇数且没有带平方的因子, 那么 G 就是广义谱唯一图. 接着 Qiu 等将上述结果的一部分推广到自逆定向图的广义斜邻接谱中. 即: 若自逆定向图 G^σ 的道矩阵行列式除以 $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ 是奇数且无平方的因子的, 那么此自逆定向图是广义斜邻接谱唯一的. 那么一个很自然的问题是: 当 $\theta(G)$ 是奇数但有带平方的因子的时候该怎样判定这个图是否是广义谱唯一的? 同时对自逆定向图的广义斜邻接谱唯一判定能否做出些改进? 本文研究重点是上述两个问题. 主要成果如下:

1. 设 $G \in \mathcal{G}_n^c$ 且 $\theta(G)$ 是奇数. 如果对 $\theta(G)$ 中的每一个重的奇素因子 p 和 $\Phi_p(G; x)$ 中的每一个重因式 $\phi(x)$, 若

$$\min \{ \text{ord}_p(\det \phi(A)), \text{ord}_p(\det \phi(A+J)) \} = \deg \phi(x).$$

那么 G 是广义谱唯一的.

2. 我们限制在自逆定向图类中考虑广义斜邻接谱唯一定向图, 尽管图类缩小了, 但此限制下得到了较为简单的一个判定条件.

关键词: 广义谱, 道矩阵, 可控图, 有理正交矩阵, 定向图.

ON GRAPHS BEING DETERMINED BY THEIR GENERALIZED SPECTRUM

ABSTRACT

The problem of judging the spectral uniqueness of graphs in graph theory has not been solved. The existing methods of judging spectral uniqueness basically require the graph to have a special structure, which cannot be extended to more general graphs. In recent years, Wang and Yu have proposed a new method to determine the generalized spectral uniqueness of graphs. This method is different from previous ones as it does not rely on the special structure of the graph. If

$$\theta(G) = \gcd \left\{ 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \det W, \Delta(G) \right\}$$

is odd and square-free, then G is DGS. Furthermore, Qiu has proved that part of the above result also holds for the generalized skew-adjacency spectrum of self-converse oriented graph. When the determinant of the walk matrix of a self-converse oriented graph, divided by $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$, is odd and square-free, then the self-converse oriented graph is determined by its generalized skew-adjacency spectrum. And, a natural question arises: how should we determine whether a graph is determined by its generalized spectrum when $\theta(G)$ is odd but has squared factors? Can we also make some improvements to the unique determination of the generalized skew-adjacency spectrum for self-converse oriented graph? The main achievements are as follows:

1. Let $G \in \mathcal{G}_n^c$ such that $\theta(G)$ is odd. If for each multiple prime factor p of $\theta(G)$ and for each multiple irreducible factor $\phi(x)$ of $\Phi_p(G; x)$,

$$\min \left\{ \text{ord}_p(\det \phi(A)), \text{ord}_p(\det \phi(A+J)) \right\} = \deg \phi(x),$$

Then G is determined by its generalized skew-adjacency spectrum.

2. When considering the generalized skew-adjacency spectrum to uniquely determine oriented graphs within the class of self-converse oriented graph, although the class of graphs has been narrowed, a simpler criterion for determination is obtained under this restriction.

KEY WORDS: Generalized spectrum, Walk matrix, Controllable graph, Rational orthogonal matrix, Oriented graph.

目 录

摘要.....	I
ABSTRACT.....	II
第 1 章 绪论.....	1
1.1 课题研究背景及意义.....	1
1.2 课题研究现状.....	2
1.3 研究内容和主要结果.....	4
第 2 章 预备知识.....	6
2.1 主要符号.....	6
2.2 基本概念.....	7
2.3 相关引理.....	9
第 3 章 广义谱唯一图的一个判定准则.....	12
3.1 引言.....	12
3.2 在 $\mathbb{F}_p$ 上的内积空间.....	12
3.3 定理 1.2 的证明.....	14
3.4 模拟实验结果.....	18
第 4 章 自逆定向图广义斜谱限制唯一的一个判别准则.....	22
4.1 关键引理及其证明.....	22
4.2 实验举例.....	25
第 5 章 结论与展望.....	27
5.1 主要研究内容.....	27
5.2 研究工作展望.....	28
参考文献.....	29
攻读硕士期间取得的学术成果.....	33
致谢.....	34
附录.....	35

第 1 章 绪 论

1.1 课题研究背景及意义

图论最早追溯到 18 世纪瑞典天才数学家欧拉对柯尼斯堡七桥问题的研究. 在 1738 年, 欧拉成功的解了上面这一问题, 该论文被认为是图论的第一篇论文. 基于此欧拉也被认为是图论的开创者. 由于图论易于理解的特点, 在它起步的时候, 常常被人们当做游戏, 不受重视, 发展十分缓慢. 直到 20 世纪之后, 受益于计算机的影响, 图论这门新兴的学科也得到了快速的发展. 如今图论正处于蓬勃发展的时期, 在几何, 物理, 优化, 控制, 信息论, 化学等领域中都有着非常广泛的应用. 尤其在近几十年来, 结构图论, 代数图论, 算法图论等都得到了十分快速的发展.

另外图论有着广泛的实际应用, 可以解决一些实际问题. 像旅行商问题, 匹配问题, 哈密顿路径问题, 四色问题, 图同构问题等. 在计算机方面, 图论也有着广泛的使用, 如在深度学习, 机器学习中.

近几十年来, 图谱吸引着许多领域的研究人员, 现在已经发展成一个较为独立的研究领域, 即图谱理论. 我们将描述图矩阵的特征值称为图的谱, 主要有邻接谱, 拉普拉斯谱, 无符号拉普拉斯谱, 塞德尔谱等. 虽然图谱研究主要使用线性代数的工具, 尤其是发展完善的矩阵理论, 但是图谱理论本身具有自己鲜明的特点, 作为图的一个不变量, 图谱中蕴含着大量的图的组合信息和结构信息, 因此是不能被等同于矩阵论的. 图谱理论是图论和代数间的一个交叉领域. 当今图谱的发展趋于多元化. 随着研究时间的增加, 所研究的范围也越来越广范, 从简单图的邻接谱, 到定向图的斜邻接谱^[1, 2], 再到混合图的厄米特谱^[3, 4, 5]等.

另外, 在研究有机物分子的结构这一过程中, 出现了 Hückel 理论, 在这一过程中将化学分子看作一个图, 其中把原子看作点, 原子和图的点是一一对应的, 原子间的电子键则映射成图中的两点之间的连线. 这样就将其抽象成为一个图. 主要研究这个图邻接矩阵的特征值和其对应分子的电子能级的关系. 除此之外, 得益于 20 世纪中期 Günthard 和 Primas^[6]论文里对化学问题的探索和 Fisher^[7]对 Kac^[8]对著名的“听音辨鼓”问题的研究 (就是用图来表示鼓, 在用图谱来表示鼓的声音), 产生了图谱理论上一个长期没有得到解决的问题: 图谱唯一性问题.

就是说那些图的谱是唯一的（和它同谱的图都和它同构）。这一个是图谱理论中的一个热点问题，也是核心问题。

1.2 课题研究现状

图谱唯一问题最早开始在 20 世纪人们对化学问题的探索，在那时候起，研究从员从下面两个方面进行了研究：一是对非谱唯一图找到其所有的同谱图；二是找到所有谱唯一图类。现在，在这两方面的研究都有了非常多的成果。

在 21 世纪开始的时候，van Dam 和 Haemers^[9]对有关谱唯一图问题的结果做了基本的总结。到 1973 年时，Schwenk^[10]得到一个非常著名的结论：谱唯一的树在树中所占的比例为零。接着，Godsil 和 McKay^[11]在构造同谱图的方法上取得重要的进展，提出了如今被称为 Godsil-Mckay 变换（简称 GM 变换）的方法来构造同谱图。后来，Wang^[12]提出了广义同谱的定义，即原图同谱加补图同谱被称为图的广义同谱。这开阔了图谱研究的内容，且接着关于上述这种构造方法，Qiu^[13]在广义谱中给出了一个与 GM 变换平行的广义同谱图的构造方法。除了同谱图的构造，在谱唯一图中也发展了一些构造方法，Mao^[14]在论文中给出了显示构造广义谱唯一图的两个方法和构造 Φ -谱唯一图的方法。关于同谱图和谱唯一图的构造，都依赖图具有某些结构，这使得在 Haemers 提出了著名猜想（Haemers 猜想）：“几乎所有的图都是由谱确定的”上进展不是很理想。现在，已经有一些图^[15]被证明是谱唯一的，但是它们的证明要求图具有特定的结构。另外除了简单图的邻接谱之外，如今在其它各种图的不同谱也有相对应的研究，具体可见^[16-26]这些文章。

2006 年，Wang^[12,27]提出的图广义谱确定的概念。Wang 得到了在可控图中两个图若是广义同谱的，那它们对应的邻接矩阵将会是有理正交相似的。由此，Wang 发现了可控图道矩阵的行列式和图广义谱唯一性存在着密切的联系。在 2017 年，Wang^[28]在组合论 B 杂志上发表了另一篇十分重要的学术论文，定义图 G 的道矩阵是 $W = W(G) = [e, Ae, \dots, A^{n-1}e]$ （ e 是全一向量），之后利用道矩阵的行列式得到了广义谱唯一图的一个简单的判定条件：若 n 阶可控图 G 满足 $2^{\lfloor n/2 \rfloor} \det W$ 是无平方因子的奇数，则 G 是广义谱唯一图（即称图 G 是 DGS）。之后 Wang 使用计算机对判定条件进行模拟，结果上大致有百分之二十的图满足其判定条件（也就是 DGS 的）。上面满足这些判据的图都是随机的，不会具有特殊的结构，所以这个方法可以推广到更多的图类中去。我们收集了一些最近有关

图广义谱刻画类型的文章，具体可见文献^[28-41]。下面对此进行一些介绍。

现在，Wang 上面关于广义谱唯一图的判定准则，在很多图类谱类中都有了类似的推广。Qiu^[29]给出了简单图广义无符号 Laplace 谱唯一图的一个类似的判定条件，且其模拟实验结果是： $n \equiv 0 \pmod{4}$ 时，大致有百分之七的图满足其判定条件； $n \not\equiv 0 \pmod{4}$ 是偶数，大约有百分之十二的图满足其判定条件。这和上的邻接矩阵得到的结果不是很一致。接着 Li^[30]进一步给出广义 A_α 谱唯一图的一个判定条件。在 Qiu^[13]的博士论文中关于一类正则图证明了它们是 Φ -谱确定的。Qiu 等^[31]对欧拉图类广义谱也做了刻画，其主要是对有理正交矩阵的级是偶素数 2 和整数 4 的情况给出排除准则。另外 Wang 等^[32]在混合图的厄米特矩阵中也得到了一些结果，尤其是对自逆混合图。在定向图中 Qiu^[2]给出了一个类似的判据，并对非自逆定向图提出了广义弱谱确定的概念。Wang 等^[33]在竞赛图中的得到较好的结果，Wang 等^[34]在几乎可控图中证明了在图广义同谱和邻接矩阵间相似的联系是由两个理正交矩阵建立起来的，并由此将可控图的广义谱唯一性的判据推广到了几乎可控图中，主要是具有两个对称点的几乎可控图。接着 Li^[35]等将几乎可控图在简单图广义邻接谱中的结果推广到了广义 A_α 谱中去。

对于一个简单图 G ，若 $2^{\lfloor n/2 \rfloor} \det W$ 是奇数但带有平方因子时，Wang 等^[27]给出的排除条件可以判定其是否是 DGS 的，但这个此条件要求 $\text{rank}_p W = n-1$ ；另外 Wang 等^[36]给出的改进条件也可以判定其是否是 DGS 的，此时要求 W 的最后一个不变因子 $d_n(W)$ 是无平方因子的。以上两个判据可以处理 $2^{\lfloor n/2 \rfloor} \det W$ 是奇数但带有平方因子的情况，但都受到一定的限制。下面是最近的一个结果，令 $\Delta(G) = \prod (\alpha_i - \alpha_j)^2$ 是图 G 的判别式，在 Wang 和 Yu^[37]中被提出，并利用判别式得到关于广义谱唯一图的一个判据，若下式

$$\theta(G) = \gcd \left\{ 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \det W, \Delta(G) \right\}$$

是奇数且无平方因子，则图 G 是广义谱唯一图。

下面是上述结果的定理形式，在文章^[37]中被提出，对文章^[28, 38]中的结果进行了改进。

定理 1.1^[28, 37, 38] 设 $G \in \mathcal{G}_n^c$ 。如果 $\theta(G)$ 是奇数且无平方因子，那么 G 是 DGS。

最近 Qiu 等^[39]在不具有对称点几乎可控图也做出了刻画，且 Qiu 等^[40]又提

出一种带有对称点的非可控图和有对称点的非可控图广义同谱的概念,并对此做出刻画. Wang 等^[41]通过有理正交矩阵构造同谱图,得到一种只具有一个广义同谱图的图类,这是广义谱刻画问题中定性到定量的一个转变. 此外 Liu^[42]刻画了一些谱唯一的图类. 更多关于广义谱确定的问题可见 Wang^[43].

1.3 研究内容和主要结果

本文主要内容安排如下:

第二章主要介绍本文所需要的基础知识,其中包括基础概念,基本定理,基本引理. 第三章是本文的主要部分,利用反证的思想,若可控图不是广义谱唯一的,那么一定存在一个有理正交矩阵使其邻接矩阵和另一个图的邻接矩阵相似,而有理正交矩阵在有限域中会带来一个邻接矩阵不变的迷向子空间,所以使用准素分解定理判断特征子空间是否是迷向子空间,再由迷向子空间的一些特点得出结论,取此结论的逆否命题,作为我们的判定准则. 第四章则研究定向图,对自逆定向图的广义斜邻接谱唯一性给出一些结论,主要是将图类限制到自逆定向图类中,也就是说自逆图是限制下广义斜邻接谱唯一的,那么它的广义斜同谱图只能是在非自逆定向图中找到. 其主要是发现自逆定向图和自逆定向图同谱时,使其斜邻接矩阵相似的有理正交矩阵具有一些特殊的性质,由此,利用反证法,先假设其同谱,得到一个结论,取结论的逆否命题,作为其限制下广义斜谱唯一的一个判定准则. 第五章对本文做了个总结.

本文主要研究内容包括下面几个方面:

1. 给出一个充分条件作为判据,在下式

$$\theta(G) = \gcd \left\{ 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \det W, \Delta(G) \right\}$$

带有平方因子时,也可判定一些图是否是广义谱唯一的. 其定理如下:

定理 1.2 设 $G \in \mathcal{G}_n^c$ 且 $\theta(G)$ 是奇数. 如果对 $\theta(G)$ 中的每一个重的奇素因子 p 和 $\Phi_p(G; x)$ 中的每一个重因式 $\phi(x)$,

$$\min \left\{ \text{ord}_p(\det \phi(A)), \text{ord}_p(\det \phi(A+J)) \right\} = \deg \phi(x). \quad (1.1)$$

那么 G 是 DGS.

推论 1.1 设 $G \in \mathcal{G}_n^c$ 且 $\theta(G)$ 是奇数. 如果对 $\theta(G)$ 中的每一个重的奇素因子 p 和 $\Phi_p(G; x)$ 中的每一个重因式 $\phi(x)$, 都有下式成立

$$\gcd\{\Phi_p(G; x), \Phi'_p(G, x)\} = 1, \text{ over } \mathbb{F}_p,$$

那么 G 是 DGS.

创新之处: 在 1.2 节中说了最开始的判定准则要求道矩阵行列式不带有奇素因子的平方. 排除条件和改进条件克服上面这一缺陷, 但对道矩阵的不变因子有特殊要求. 对于带有判别式的结果也要求二者的公因式不带有奇素因子的平方. 我们在判别式和道矩阵都带有奇素因子的平方时, 给出一个更一般的判别准则, 其不要求道矩阵不变因子有特殊的分布. 即不再要求最后一个不变因子是无平方因子或者道矩阵在有限域中的秩有特殊性. 主要的想法是以准素分解定理和空间的迷向作为突破口, 最终得到一个简单的判据, 判定一类图是 DGS 的. 具有较好的计算复杂度和实验结果.

2. 给出一个限制在自逆定向图类中的广义斜邻接谱唯一定向图的一个判定条件.

已有的结果是: 自逆定向图 G^σ 的道矩阵行列式除以 $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ 是奇数且无平方的因子时此自逆定向图是广义斜邻接谱唯一的.

经过上面的讨论, 我们知道的判据都是要求 G^σ 的道矩阵不包含奇素数的平方因子, 我们希望得到个更一般的判据, 即能够去掉道矩阵行列式平方因子的限制, 但我们最终只能在限制到自逆定向图类中做到这一点. 最终得到的是限制于自逆定向图类中的广义斜邻接谱唯一定向图的一个判据. 证明主要用到一些矩阵的初等计算和有限域的知识.

第2章 预备知识

本部分主要介绍本文中所涉及到的主要符号、基本概念、基本定理以及相关公式. 称一个图为简单图当它既没有自环也没有两条连杆连接到同一对顶点; 同时称一个图是定向图, 当给简单图赋予一个定向 σ , 那么定向图就是按照 σ 给简单图的每一条边赋予一个方向所得到的有向图. 本文主要研究简单图和自逆定向图.

2.1 主要符号

本部分主要总结介绍本文中出现的符号以方便阅读. 其中本文未标明的符号和术语可参考文献^[22-37].

符号表

符号	含义
p	素数
G	简单图
$\bar{G}$	图 G 的补图
G^σ	定向图
$\mathbb{Z}$	整数环
$\mathbb{Q}$	有理数域
$\mathbb{F}_p$	模 p 剩余类环
$W(G)$	图 G 的道矩阵
$A(G)$	图 G 的邻接矩阵
$S(G^\sigma)$	定向图 G^σ 的斜邻接矩阵
$\mathcal{G}_n^c$	所有 n 阶可控图所成集合
$d_n(W)$	矩阵 W 的第 n 个不变因子
$\text{rank}_p(M)$	矩阵 M 在有限域中的秩
$\text{ord}_p(m)$	整数 m 对应 p 的阶

e	全一向量
J	全一矩阵
$\ell(Q)$	有理正交矩阵 Q 的级
$\mathcal{X}(S; x)$	矩阵 S 的特征多项式
$\Delta(G)$	图 G 的判别式
$\mathcal{N}_p(M)$	矩阵 M 在有限域中的零空间
$\text{RO}_n(\mathbb{Q})$	所有 n 阶有理正交正则矩阵所成集合

2.2 基本概念

设 $G = (V(G), E(G))$ 是一个简单图, $V(G)$ 是 G 的顶点集, $E(G)$ 是 G 的边集. 用 v_i 表示图 G 中的第 i 个顶点, 令 $A(G)$ 是图 G 的邻接矩阵定义如下:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{若 } (v_i, v_j) \text{ 是图 } G \text{ 中的一条边;} \\ 0 & \text{其它.} \end{cases}$$

一个图的邻接矩阵的特征值称为图的特征值, 图的所有特征值的多重集称为图的谱, 因而研究图的特征值问题就是研究其对应邻接矩阵的特征值问题.

相应的, A 的道矩阵是整数矩阵定义如下:

$$W = W(G) = [e, Ae, \dots, A^{n-1}e],$$

其中 e 是全一的列向量. 关于道矩阵, 其秩和图的可控性紧密相关, 文章^[44]介绍若图道矩阵满秩 ($\det W(G) \neq 0$), 我们称图 G 为可控图, 否则就是非可控图. 本文得到的判据便是限制在可控图类中.

对于定向图 G^σ 是按照 σ 给每一条边都赋予方向所得到的有向图, 其斜邻接矩阵 $S(G^\sigma) = (s_{ij})$ 定义如下, 第一次是在文章^[1]被提出:

$$s_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{如果 } (v_i, v_j) \text{ 是图 } G \text{ 的一条弧;} \\ -1 & \text{如果 } (v_j, v_i) \text{ 是图 } G \text{ 的一条弧;} \\ 0 & \text{其它.} \end{cases}$$

斜道矩阵在文献^[2]定义如下. 记为:

$$W(G^\sigma) = [e, S(G^\sigma)e, \dots, S^{n-1}(G^\sigma)e].$$

另外自逆定向图是指斜邻接矩阵的转置等于负的这个斜邻接矩阵的图.

在文献^[37]中, 介绍了用特征多项式 $\det(xI - A)$ 的判别式表示图 G 的判别式, 记为 $\Delta(G)$ 或者 $\Delta(A)$. 即:

$$\Delta(G) = \prod_{i < j} (\alpha_i - \alpha_j)^2,$$

其中 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 是图的特征值. 从文献^[41]中可以知道 $\Delta(G)$ 是偶的整数. 此外, 对于道矩阵, 由文献^[28]可以知道 $2^{\lfloor n/2 \rfloor} \det W(G)$ 也是整数. 为了方便, 我们组合 $\Delta(G)$ 和 $\det W$ 得到下面这个变量.

定义 2.1^[37] 对于顶点数为 n 的图 G , 我们定义

$$\theta(G) = \gcd \left\{ 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \det W, \Delta(G) \right\},$$

其中 $\gcd\{.,.\}$ 表示两个整数的最大公因子.

关于简单图 G , 记 $\bar{G}$ 为其补图, 顶点集和原图相同, 但两个顶点有边当且仅当原图 G 中两个顶点无边. 把 $\text{Spec}(G)$ 记为图 G 邻接矩阵的所有特征值 (包括重数) 组成的集合, 叫做图 G 的邻接谱. 另外我们称 $(\text{Spec}(G), \text{Spec}(\bar{G}))$ 为图 G 的广义谱. 若存在一个简单图 H , 有 $(\text{Spec}(G), \text{Spec}(\bar{G})) = (\text{Spec}(H), \text{Spec}(\bar{H}))$, 我们称 G 和 H 是广义同谱的. 那么如果图 G 的所有广义同谱图都和 G 是同构的, 我们就称图 G 是广义谱唯一图, 简称 DGS. 由上面的定义可以知道 $\theta(G)$ 是广义同谱不变量. 即若图 H 和图 G 广义同谱, 那么 $\theta(G) = \theta(H)$.

对于定向图, 若 $S(G^\sigma) + tJ$ 和 $S(H^\tau) + tJ$ 有相同的谱, 我们则称 G^σ 和 H^τ 是 $\mathbb{R}$ -同谱, 其中 t 是任意实数. 那么上述 $t \in \{0, 1\}$ 时, 我们称 G^σ 和 H^τ 是广义斜同谱的. 那么如果图 G^σ 的所有广义斜同谱图都和 G^σ 是同构的, 我们就称图 G^σ 是广义斜谱唯一图, 简称 DGSS.

定义 2.2^[36] 设 p 是一个奇素数, G 是一个图邻接矩阵为 A . 我们定义

$$\Phi_p(G; x) = \gcd \{ \mathcal{X}(A; x), \mathcal{X}(A + J; x) \} \in \mathbb{F}_p[x],$$

其中 J 是全一矩阵, $\mathcal{X}(A; x) = \det(xI - A)$ 是矩阵 A 的特征多项式, $\gcd$ 是表示在 $\mathbb{F}_p$ 上取最大公因式.

定义 2.3 对于整数 m 和素数 p , 我们定义

$$\text{ord}_p(m) = \begin{cases} \max\{k : k \geq 0 \text{ 和 } p^k \mid m\} & \text{若 } m \neq 0, \\ \infty & \text{若 } m = 0. \end{cases}$$

定义 2.4 设 p 是一个奇素数且 $\mathcal{X}(S; x) \in \mathbb{F}_p[x]$, 其中 S 表示定向图 G^σ 的斜邻接矩阵. $\mathcal{X}(S; x)$ 的标准分解式为 $\mathcal{X}(S; x) = \phi_1^{r_1} \phi_2^{r_2} \cdots \phi_s^{r_s}$.

定义:

$$U_i = \mathcal{N}_p(W^T(G^\sigma)) \cap \mathcal{N}_p(\phi_i(S)).$$

如果 $\dim U_i = s$, 令 $\bar{U}_i = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s]$ 是整数矩阵, 其中 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ 表示 U_i 于 $\mathbb{F}_p$ 中的一组基.

2.3 相关引理

这一小节先给出一些后面章节要用到的引理, 在介绍 Wang 等证明图广义谱唯一判据的主要策略和一些结论, 接着给出一些 Qiu 等在自逆定向图广义斜谱唯一性判定中的一些结果.

对于一个 $n \times n$ 的整数矩阵 U , 如果 $\det(U) = \pm 1$, 则称 U 是幺模矩阵. 下面介绍一些众所周知的结果.

引理 2.1^[45] 对于任何一个整数 $n \times n$ 矩阵 M , 如果存在两个单模矩阵 U 和 V 使得 UMV 是一个对角矩阵 $S = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ 并且其中的 $d_i \mid d_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. 我们称这个对角矩阵 $S = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ 是矩阵 M 的史密斯正规形, 同时非零的 d_i 被称为 M 的第 i 个初等因子.

对任意一个素数 p , 我们用 $\text{rank}_p M$ 和 $\text{nullity}_p M$ 分别表示矩阵 M 在有限域 $\mathbb{F}_p$ 上的秩和零度.

引理 2.2 令 M 是一个 $n \times n$ 的整数矩阵, 其秩是 r 和史密斯型 (SNF) 是

$$S = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n),$$

其中当 $r < n$ 时 $d_{r+1} = \dots = d_n = 0$. 那么, 对任意的素数 p ,

- (i) $\text{rank}_p M = \max(\{0\} \cup \{i : p \nmid d_i\})$ 和 $\text{nullity}_p M = \max(\{0\} \cup \{i : p \mid d_{n+1-i}\})$;
- (ii) $Mx \equiv 0 \pmod{p^2}$ 有一个整数解 $x \not\equiv 0 \pmod{p}$ 当且仅当 $p^2 \mid d_n$.

上述引理中的第一个断言是众所周知的, 第二个断言在文章^[38]中有它的证明.

下面得几个结论就是证明一个图是否是广义谱唯一图的主要思想和策略.

为了方便,我们先介绍几个概念和定义. 一个正交矩阵 Q 满足 $Qe = e$, 我们就称这个 Q 是正则的. 另外我们用 $RO_n(\mathbb{Q})$ 表示所有 n 阶有理正交正则矩阵构成的集合. 可以看到 $RO_n(\mathbb{Q})$ 关于传统的矩阵乘法构成一个群.

定义

$$\mathcal{Q}(G) = \{Q \in RO_n(\mathbb{Q}) : Q^T A(G) Q \text{ 是一个 } (0,1)\text{-矩阵}\}.$$

定义 2.4 对一个有理数构成的矩阵 Q , 我们用 $\ell(Q)$ 或者 ℓ 表示为 Q 的级, ℓ 就是 k , 其中 k 满足: kQ 是整数矩阵最小的正整数 k . 也就是说, $\ell(Q)$ 是 Q 中所有元素分母的最小公倍数.

可以看到若一个矩阵 $Q \in RO_n(\mathbb{Q})$ 有级 $\ell=1$ 当且仅当 Q 是一个置换矩阵.

引理 2.3^[27] 设 $G \in \mathcal{G}_n^c$. 图 G 和 H 的邻接矩阵是 $A(G)$ 和 $A(H)$. 那么 G 和 H 广义同谱当且仅当存在唯一的有理正交矩阵 $Q^T = W(H)W^{-1}(G)$ 使得下式成立:

$$Q^T A(G) Q = A(H), \quad Q^T e = e.$$

引理 2.4^[27] 设 $G \in \mathcal{G}_n^c$. 那么 G 是广义谱唯一图 (DGS) 当且仅当 $\mathcal{Q}(G)$ 仅包含置换矩阵, 即: 对于 $Q \in \mathcal{Q}(G)$ 都有 $\ell(Q)=1$.

上面这个引理就解释了如何判断一个可控图是否是广义谱唯一图的一个策略. 下面三个引理总结了这方面一些基本的结果.

引理 2.5^[27, 28, 37, 38] 设 $G \in \mathcal{G}_n^c$ 和 $Q \in \mathcal{Q}(G)$. 用 ℓ 表示 $\ell(Q)$, 那么下面结论成立:

- (i) 令 $d_n(W)$ 是 W 的第 n 个不变因子, 则 $\ell | d_n(W)$ 且 $\ell | \det W$.
- (ii) 令 p 是 $\det W$ 的奇素因子, 则 $p | \ell$;
- (iii) 任何 ℓ 的素因子一定是判别式 Δ 的因子;
- (iv) 如果 p 是 Δ 的素的因子, 那么 p 不整除 ℓ ;
- (v) 如果 $2^{\lfloor n/2 \rfloor} \det W$ 是奇数, 那么 ℓ 也是奇数.

引理 2.6^[27] (排除条件). 设 $G \in \mathcal{G}_n^c$ 和 p 是一个奇素数, 且 $\text{rank}_p W = n-1$. 假设 $W^T z \equiv 0 \pmod{p}$ 有非平凡的解 $z_0 \in \mathbb{Z}^n$. 如果 $z_0^T z_0 \not\equiv 0 \pmod{p}$, 那么对于任意 $Q \in \mathcal{Q}(G)$ 有 p 不整除 $\ell(Q)$.

对于首一多项式 $f \in \mathbb{F}_p[x]$ 有标准分解式 $f = \prod_{1 \leq i \leq r} f_i^{e_i}$. 其中我们用 $\text{sfp}(f)$ 表示其 f 没有重因式的部分.

引理 2.7^[36] (改进条件). 令 $G \in \mathcal{G}_n^c$ 和 p 是一个奇素数, 且 p 是 $d_n(W)$ 的单因子. 如果

$$\deg \text{sfp}(\Phi_p(G; x)) = \text{nullity}_p W,$$

那么对于任意 $Q \in \mathcal{Q}(G)$ 有 p 不整除 $\ell(Q)$.

下面是一些定向图中的结果.

引理 2.8^[2] 设 G^σ 和 H^τ 是可控自逆定向图, 若 G^σ 和 H^τ 广义斜同谱, 那么存在唯一的有理正交矩阵 Q 使得 $Q^T S(G^\sigma) Q = S(H^\tau)$.

定义

$$\mathcal{Q}(G^\sigma) = \{Q \in \mathbb{R}O_n(Q) : Q^T S(G^\sigma) Q = S(H^\tau), G^\sigma, H^\tau \text{ 是定向图}\}.$$

引理 2.9^[2] 设 G^σ 可控自逆定向图. 那么 G^σ 是广义斜邻接谱唯一的, 当且仅当 $\mathcal{Q}(G^\sigma)$ 仅包含置换矩阵.

引理 2.10^[2] 设 G^σ 可控自逆定向图且 $Q \in \mathcal{Q}(G^\sigma)$. 对任意奇素因子 p , 如果 $p^2 \nmid \det W(G^\sigma)$, 那么 $p \nmid \ell(Q)$.

引理 2.10^[2] 设 G^σ 可控自逆定向图且 $Q \in \mathcal{Q}(G^\sigma)$. 若 $2^{\lfloor n/2 \rfloor} \det W(G^\sigma)$ 是奇数, 则 $2 \nmid \ell(Q)$.

第3章 广义谱唯一图的一个判定准则

3.1 引言

本章主要用对称矩阵的准素分解定理来刻画图广义谱性的唯一性,并给出一个充分条件,判断一类简单图是广义谱唯一的. 所得到的结果是定理 1.2, 内容上是在 $\theta(G)$ 具有一些平方因子的情况下, 给出一个算术准则来判断 G 是否是广义谱唯一的.

创新在于: 其结果上假设 $\theta(G)$ 是奇数, 但允许它含有一个或者多个奇的重素因子的情况下, 给出了一个图是广义谱唯一的判定条件. 显然, 上述讨论会带来下面这个情况. 即, 令 p 是奇素数则 $p^2 \mid \det W$. 事实上, 对于上述的情况, 在 W 上也已经有了一些关于图广义谱唯一性的充分条件. 一个是在文章^[34]中, 假设 $\text{rank}_p W = n-1$ 时的排除条件; 另一个是在文章^[33]中, 假设 $d_n(W)$ 是无平方因子时的改进条件. 但定理 1.2 移除了上面在道矩阵中限制的两个条件, 考虑了更一般的 $\theta(G)$ 带有平方因子的情况, 且在模拟实验中, 比之前的判定条件效果好一些, 这是定理的主要创新之处.

本章结果的证明主要遵循了文章^[36, 37, 38]中的思路, 但几个创新性的想法对于结果的证明是不可缺少的.

本章的结构安排如下: 文章在 3.2 小节介绍有限域中内积空间的概念, 更多可见文献^[36]. 在 3.3 小节给出定理 1.2 的具体证明. 并在 3.4 小节中给出两个例子说明定理 1.2 如何使用和它具有的有效性. 另外给出所做模拟的实验数据, 主要将定理 1.2 和定理 1.1 进行比较. 如: 在顶点为 20 的时候随机生成 10000 个图, 分别看定理 1.1 和定理 1.2 各自能判断多少图是广义谱唯一的. 其代码放在文章末尾的附录中.

3.2 在 $\mathbb{F}_p$ 上的内积空间

设 p 是一个奇素数. 我们用 $\mathbb{F}_p^n$ 表示带有标准内积的 n -维线性空间. 设 u 和 v 是 $\mathbb{F}_p^n$ 中的两个向量, 若满足 $u^T v = 0$ 我们称 u, v 正交且表示为 $u \perp v$. 与之类似, 若任意的 $u \in U$ 和 $v \in V$ 都有 $u^T v = 0$, 则称两个空间是正交的并用 $U \perp V$ 来表示. 若一个非零向量 $u \in \mathbb{F}_p^n$ 满足 $u^T u = 0$, 即我们则称 u 是迷向向量. 此外, 对任意一

个子空间 $V \subset \mathbb{F}_p^n$, 它的正交补空间是

$$V^\perp = \{u \in \mathbb{F}_p^n : v^T u = 0 \text{ 对任意的 } v \in V\}.$$

若子空间 $V \subset V^\perp$, 我们称 V 是全迷向空间.

设 A 是 $\mathbb{F}_p$ 中一个 $n \times n$ 的对称矩阵, 我们可以将 A 看作一个线性变换. 那么若在 $\mathbb{F}_p^n$ 中 A 的一个子空间 V 满足: 任意 $x \in V$ 都有 $Ax \in V$, 我们称 V 是 A 的不变子空间. 另外, 我们对任意 A 的不变子空间 V , 我们用 $A|_V$ 表示 A 限制在 V 中的线性变换. 接下来我们需要一些线性代数中的结果, 如通常被提到的准素分解定理.

引理 3.1^[40] (准素分解定理) 设 $\mathcal{X}(A; x) \in \mathbb{F}_p[x]$ 是矩阵 A 的特征多项式且

$$\mathcal{X}(A; x) = \phi_1^{r_1}(x) \phi_2^{r_2}(x) \cdots \phi_k^{r_k}(x),$$

是 $\mathcal{X}(A; x)$ 的标准分解式. 设 $V_i = \ker \phi_i^{r_i}(A), i = 1, \dots, k$. 可得到

- (i) $\mathbb{F}_p^n = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$;
- (ii) 每一个 V_i 是 A 不变的;
- (iii) $A|_{V_i}$ 上的特征多项式为 $\phi_i^{r_i}(x)$;
- (iv) 存在多项式 $h_1(x), \dots, h_k(x)$, 使得 $h_i(A)$ 作用于 V_i 是单位变换, 作用于 $V_j (j \neq i)$ 是零变换;
- (v) 对任意 A 不变子空间 U , 得到 $U = (U \cap V_1) \oplus (U \cap V_2) \oplus \cdots \oplus (U \cap V_k)$.

引理 3.2 使用引理 3.1 的概念, 得到下面结论

- (i) $\ker \phi_i(A)$ 是 A 不变的, 且 $\{0\} \neq \ker \phi_i(A) \subset V_i$;
- (ii) 对于每一个非零的 A 不变子空间 U , 都被包含在某些 V_i 中, 且 $\dim U = r \cdot \deg \phi_i(x) \quad r \in \{1, 2, \dots, r_i\}$, 并因此有 $\dim U \geq \deg \phi_i(x)$.

证明: 由引理 3.1, 得到 V_i 非零. 因此 $\phi_i(A)$ 和 $\phi_i^{r_i}(A)$ 是奇异的. 这意味着 $\ker \phi_i(A)$ 非零. 此外, $\ker \phi_i(A) \subset \ker \phi_i^{r_i}(A) = V_i$ 且 $\ker \phi_i(A)$ 是 A 不变的. 由此证明了 (i).

因为 U 是 A 不变的且 $U \subset V_i$, 我们得到 $\mathcal{X}(A|_U; x)$ 整除 $\mathcal{X}(A|_{V_i}; x)$. 注意到 $\phi_i(x)$ 不可约和 $\mathcal{X}(A|_{V_i}; x) = \phi_i^{r_i}(x)$. 由于 U 非零, 所以 $\mathcal{X}(A|_U; x)$ 的次数不等于 0, 因此得到 $\mathcal{X}(A|_U; x) = \phi_i^r(x)$, 其中 $r \leq r_i$. 即:

$$\dim U = \deg \mathcal{X}(A|_U; x) = r \cdot \deg \phi_i(x).$$

证毕 □

引理 3.3 设 A 是 $\mathbb{F}_p$ 中一个对称矩阵且 U 是全迷向的 A 不变子空间. 使用定理 3.1 中的概念得到:

- (i) 在 $i \neq j$ 时有 $V_i \perp V_j$;
- (ii) $V_i^\perp = V_1 \oplus \cdots \oplus V_{i-1} \oplus V_{i+1} \oplus \cdots \oplus V_k$;
- (iii) 若 $\phi_i(x)$ 是单因式, 那么 $U \cap V_i = \{0\}$;
- (iv) $U = \oplus (U \cap V_i)$, 其中指标 i 满足 $r_i \geq 2$.

证明: 设 ξ 和 η 分别是 V_i 和 V_j 中的向量. 通过引理 3.1 (iv) 和 A 是对称矩阵, 可以得到

$$\xi^T \eta = (h_i(A)\xi)^T \eta = \xi^T (h_i(A))\eta = 0.$$

这就证明了 (i).

通过 (i), 我知道 $V^\perp \supset \oplus_{j \neq i} V_j$. 另一方面, 由 $V^\perp$ 空间的定义, 可以得到 $\dim V^\perp = n - \dim V_i$. 注意到 $\dim(\oplus_{j \neq i} V_j) = n - \dim V_i$, 可知 $V^\perp$ 就等于 $\oplus_{j \neq i} V_j$. 即证明了 (ii).

设 $S = U \cap V_i$. 通过 U 和 V_i 可以知道 S 是 A 不变的. 假设 $S \neq \emptyset$, 我们断言 $S = V_i$. 因为 S 是 V_i 的子空间, 所以 $\mathcal{X}(A|_S; x)$ 整除 $\mathcal{X}(A|_{V_i}; x)$. 但由于 $\mathcal{X}(A|_{V_i}; x)$ 是 $\phi_i(x)$ 是不可约多项式, 故必须有 $\mathcal{X}(A|_S; x) = \mathcal{X}(A|_{V_i}; x)$. 因此断言 $S = V_i$ 成立. 又因为 $V_i = S \subset U$ 且 U 是全迷向的空间, 所以 $V^\perp \supset U^\perp \supset U \supset V_i$. 联合 (ii) 可以看到 $\oplus_{j \neq i} V_j \supset V_i$, 这同定理 3.1 (i) 矛盾, 因此假设 $S \neq \emptyset$ 不成立. 这就证明了 (iii). 通过 (iii) 和引理 3.1 (v), 很容易得到本引理最后一条断言. □

引理 3.4 设 A 是任意整数矩阵, 且 $\phi(x)$ 是 $\mathcal{X}(A; x)$ 在有限域 $\mathbb{F}_p$ 上的不可约因式. 那么

$$\text{ord}_p(\det \phi(A)) \geq \deg \phi(x).$$

证明: 设 $S = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ 是整数矩阵 $\phi(A)$ 的 SNF. 注意到, 在有限域 $\mathbb{F}_p$ 中, $\phi(A)$ 的零度等于 $\dim \ker \phi(A)$, 且引理 3.2 意味着 $\text{nullity}_p \phi(A) \geq \deg \phi(A)$. 设 $t = \deg \phi(x)$. 那么通过引理 2.1 和引理 2.2, 我们知道 $p \mid d_{n-t+1}$, 因此得到 $p^t \mid \det \phi(A)$. 这就证明了 $\text{ord}_p(\det \phi(A)) \geq t$. □

通过引理 3.4 不难看出, 若 $\phi(x)$ 是 $\mathcal{X}(A; x)$ 和 $\mathcal{X}(A+J; x)$ 在有限域 $\mathbb{F}_p$ 上的不可约公因式, 则

$$\min\{\text{ord}_p(\det \phi(A)), \text{ord}_p(\det \phi(A+J))\} \geq \deg \phi(x). \quad (2.1)$$

组合等式 (1.1) 和不等式 (2.1), 定理 1.2 就是说, 若 G 不是 DGS 的, 那么不等式将会严格成立.

3.3 定理 1.2 的证明

我们通过反证来证明定理 1.2. 令 G 是一个有 n 个顶点的图且 $\theta(G)$ 是奇数且无平方因子. 假设图 G 不是广义谱唯一图 (DGS). 那么, 通过引理 2.4, 存在矩阵 $Q \in \mathcal{Q}(G)$ 且 $\ell > 1$. 按照引理 2.5 (v), 我们知道 ℓ 是奇数. 令 p 是 ℓ 的任意奇素因子, 并且在接下来的讨论中固定这个 p . 由引理 2.5 (i), 我们知道 $p \mid \det W$. 进一步由引理 2.5 (ii), 知道 $p^2 \mid \det W$. 与之类似, 通过引理 2.5 (iv) 和 (iii) 知道 $p^2 \mid \Delta$. 因此得到 $p^2 \mid \theta(G)$.

设 $\hat{Q} = \ell \cdot Q$. 我们用 $\text{col}(\hat{Q})$ 表示 $\hat{Q}$ 在有限域 $\mathbb{F}_p$ 上的列空间, 它是 $\mathbb{F}_p^n$ 的子空间.

引理 3.5 子空间 $\text{col}(\hat{Q}) \subset \mathbb{F}_p^n$ 非零, 全迷向, 且 $(A+tJ)$ 不变的空间, 其中 $t \in \{0, 1\}$.

证明: 由于 $\ell > 1$, 我们知道 $\hat{Q} \not\equiv 0 \pmod{p}$ 且 $\text{col}(\hat{Q})$ 非零. 设 $\alpha = \hat{Q}c_1 \in \mathbb{Z}^n$ 和 $\beta = \hat{Q}c_2 \in \mathbb{Z}^n$, 其中 $c_1, c_2 \in \mathbb{Z}^n$. 另外因为 $\hat{Q}^T \hat{Q} = \ell^2 I \equiv 0 \pmod{p}$, 所以得到 $\alpha^T \beta \equiv 0 \pmod{p}$. 因此, $\text{col}(\hat{Q})$ 是全迷向空间. 最后, 通过 $Q \in \mathcal{Q}(G)$, 我们有 $Qe = e$ 和 $Q^T A Q = B$, 其中 B 是 $(0, 1)$ -矩阵. 由上述, 在整数环 $\mathbb{Z}$ 中可得方程 $A\hat{Q} = \hat{Q}B$, 且在有限域 $\mathbb{F}_p$ 中亦成立. 故得到 $\text{col}(\hat{Q})$ 是 A 不变的. 此外, 由于 $J\hat{Q} = \ell J \equiv 0 \pmod{p}$, 即, 映射 J 限制在 $\text{col}(\hat{Q})$ 上是零. 因此得到 $\text{col}(\hat{Q})$ 也是 $A+J$ 不变的. $\square$

设 $\mathcal{X}(A; x) = \phi_1^{r_1}(x) \phi_2^{r_2}(x) \cdots \phi_k^{r_k}(x)$ 是 $\mathcal{X}(A; x)$ 在有限域 $\mathbb{F}_p$ 上的标准分解式, 根据引理 3.5 和 3.3 可得:

$$\text{col}(\hat{Q}) = \bigoplus_{i \in I} \left(\text{col}(\hat{Q}) \cap \ker \phi_i^{r_i}(A) \right),$$

其中 $I = \{i: r_i \geq 2\}$. 由于 $\text{col}(\hat{Q})$ 非平凡, 我们知道 I 不是空集并且至少有一个子

空间 $\text{col}(\hat{Q}) \cap \ker \phi_i^{r_i}(A)$ 是非零的. 对上述这样的 i , 断言 $\text{col}(\hat{Q}) \cap \ker \phi_i(A)$ 也是非零. 另 $S = \text{col}(\hat{Q}) \cap \ker \phi_i^{r_i}(A)$. 那么我们得到下面这一结果:

$$\{0\} \neq S \supset \phi_i(A)S \supset \phi_i^2(A)S \supset \cdots \supset \phi_i^{r_i}(A)S = \{0\}.$$

设 $j \in \{0, \dots, r_i\}$ 是使得 $\phi_i^j(A)S$ 非零的最小的指标. 那么显然由 $j < r_i$ 且有 $\phi_i^{j+1}(A)S = \{0\}$. 注意到 $\text{col}(\hat{Q}) \supset S \supset \phi_i^j(A)S$, 可以得到:

$$S = \text{col}(\hat{Q}) \cap \ker \phi_i(A) \supset \phi_i^j(A)S.$$

这就证明上面的断言. 并由此给出下面这个定义.

定义 3.1 令 $\phi(x)$ 是 $\mathcal{X}(A; x)$ 在 $\mathbb{F}_p$ 中一个固定的重不可约因式, 且使得 $\text{col}(\hat{Q}) \cap \ker \phi(A)$ 非零.

引理 3.6 这个不可约的 $\phi(x)$ 也是 $\mathcal{X}(A+J; x)$ 的重因式并且有:

$$\text{col}(\hat{Q}) \cap \ker \phi(A) = \text{col}(\hat{Q}) \cap \ker \phi(A+J).$$

证明: 令 $T = \text{col}(\hat{Q}) \cap \ker \phi(A)$ 和 $\xi \in T$. 注意到 T 是 A 不变的, 我们有

$$A^m T \subset T \subset \text{col}(\hat{Q}) \text{ 和 } A^m \xi \in \text{col}(\hat{Q}),$$

其中 m 是任意非负整数. 由于 $J\hat{Q} = \ell JQ = \ell J \equiv 0 \pmod{p}$ 和 $A^m \xi \in \text{col}(\hat{Q})$, 我们得到在 $\mathbb{F}_p$ 中 $JA^m \xi = 0$. 如此就可得到 $(A+J)^m \xi = A^m \xi$ 对任意非负整数 m 成立. 另由于 $\xi \in \ker \phi(A)$, 我们得到 $\phi(A+J)\xi = \phi(A)\xi = 0$.

又因为 $\xi \in \text{col}(\hat{Q}) \cap \ker \phi(A)$, 我们知道 $\xi \in \ker \phi(A+J)$, 并由 ξ 的任意性可得到:

$$\text{col}(\hat{Q}) \cap \ker \phi(A) \subset \text{col}(\hat{Q}) \cap \ker \phi(A+J).$$

将上述 A 和 $A+J$ 的角色对调, 可以得到上面相反的包含关系, 这就证明了引理的后半部分.

接下来证明前半部分, 我们首先断言 $\phi(x) \mid \mathcal{X}(A+J; x)$. 若不然, 得到 $\phi(x)$ 和 $\mathcal{X}(A+J; x)$ 互素, 且存在两个多项式 $u(x), v(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ 使得下式成立:

$$u(x)\phi(x) + v(x)\mathcal{X}(A+J; x) = 1.$$

这意味着:

$$u(A+J)\phi(A+J)\xi + v(A+J)\mathcal{X}(A+J; A+J)\xi = \xi.$$

由 ξ 的假设知道 $\phi(A+J)\xi = 0$. 另外由哈密顿凯莱定理知道 $\mathcal{X}(A+J; A+J)$ 是零矩阵. 因此 $\xi = 0$, 这与 ξ 的假设矛盾, 这就证明了这个断言.

剩下的是 $\phi(x)$ 在 $\mathcal{X}(A+J; x)$ 中不是单因式. 通过引理 3.5, 注意到 $\text{col}(\hat{Q})$ 是全迷向的且是 $A+J$ 不变的. 那么若 $\phi(x)$ 是单因是, 那么引理 3.3 (iii) 意味着:

$$\text{col}(\hat{Q}) \cap \ker \phi(A+J) = \{0\}.$$

但是 $\text{col}(\hat{Q}) \cap \ker \phi(A+J) = \text{col}(\hat{Q}) \cap \ker \phi(A)$ 是非零的, 这是矛盾的. 这就完成了引理的证明. $\square$

回顾 $\Phi_p(G; x) = \gcd\{\mathcal{X}(A; x), \mathcal{X}(A+J; x)\} \in \mathbb{F}_p[x]$. 由于 $\phi(x)$ 在 $\mathcal{X}(A; x)$ 和 $\mathcal{X}(A+J; x)$ 中都是重因式, 可以很容易得到 $\phi(x)$ 也是 $\Phi_p(G; x)$ 的重因式. 我们记录它作为下面的结果.

命题 3.1 多项式 $\phi(x)$ 是 $\Phi_p(G; x)$ 的不可约重因式.

命题 3.2 在上面的假设下, 下面这一不等式严格成立:

$$\min\{\text{ord}_p(\det \phi(A)), \text{ord}_p(\det \phi(A+J))\} > \deg \phi(x).$$

证明: 我们仅证明 $\text{ord}_p(\det \phi(A)) > \deg \phi(x)$ 且另一部分, 即 $(A+J)$ 可由相同的方式得到. 令 $T = \text{col}(\hat{Q}) \cap \ker \phi(A)$. 通过引理 3.2 可知 T 非零, A 不变且维数至少是 $\deg \phi(x)$. 如果 $\dim \ker \phi(A) > \deg \phi(x)$, 那么和引理 3.4 的证明相似可以得到 $\text{ord}_p(\det \phi(A)) \geq \dim \ker \phi(A) > \deg \phi(x)$. 假设 $\dim \ker \phi(A) = \deg \phi(x)$. 因此, $T = \ker \phi(A)$, 即有 $\ker \phi(A) \subset \text{col}(\hat{Q})$.

假设 ξ, η 是 $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ 中的任意向量且使得 $\phi(A)\xi \equiv \phi(A)\eta \equiv 0 \pmod{p}$. 我们断言:

$$\xi^T \phi(A) \eta \equiv 0 \pmod{p^2}.$$

因为 $\ker \phi(A) \subset \text{col}(\hat{Q})$, 我们得到在有限域 $\mathbb{F}_p$ 中 $\xi, \eta \in \text{col}(\hat{Q})$ 并且我们可以写

$$\xi = \hat{Q}u + p\alpha, \eta = \hat{Q}v + p\beta,$$

其中 $u, v, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n$. 此外, 注意到 A 是对称矩阵, 我们有

$$\begin{aligned} \xi^T \phi(A) \eta &= (\hat{Q}u + p\alpha)^T \phi(A) (\hat{Q}v + p\beta) \\ &\equiv u^T (\hat{Q}^T \phi(A) \hat{Q}) v + p\alpha^T \phi(A) \hat{Q}v + p\beta^T \phi(A) \hat{Q}u \pmod{p^2}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

因为 $p \mid \ell$ 和 $Q^T A^m Q = B^m$ 是整数矩阵对任意正整数 m 成立, 所以就很容易得到

$$\hat{Q}^T \phi(A) \hat{Q} = \ell^2 Q^T \phi(A) Q \equiv 0 \pmod{p^2}.$$

由于 $\ker \phi(A) \subset \text{col}(\hat{Q})$, 我们可以得到 $\phi(A)(\hat{Q}v) \equiv 0 \pmod{p}$ 并因此

$$p\alpha^T \phi(A) (\hat{Q}v) \equiv 0 \pmod{p^2}.$$

与之相似, 我们也可以得到

$$p\beta^T\phi(A)(\hat{Q}u) \equiv 0 \pmod{p^2}.$$

如此就可由上式 (3.1) 知道 $\xi^T\phi(A)\eta \equiv 0 \pmod{p^2}$ ，这就证明了这个断言。

记 $s = \dim \ker \phi(A)$ ，令 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ 是 s 个整数向量且是有限域 $\mathbb{F}_p$ 中 $\ker \phi(A)$ 的一组基。那么通过上面的断言，我们知道 $\xi_i^T\phi(A)\eta \equiv 0 \pmod{p^2}$ ，即得到：

$$\xi_i^T \frac{\phi(A)\eta}{p} \equiv 0 \pmod{p}, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

又注意到 $\xi_i^T\phi(A) = (\phi(A)\xi_i)^T \equiv 0 \pmod{p}$ ，得到：

$$\begin{pmatrix} \xi_1^T \\ \xi_2^T \\ \vdots \\ \xi_s^T \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \phi(A), \frac{\phi(A)\eta}{p} \end{bmatrix} \equiv 0 \pmod{p},$$

故此有

$$\text{rank}_p \begin{bmatrix} \phi(A), \frac{\phi(A)\eta}{p} \end{bmatrix} \leq n - s.$$

注意 $\text{rank}_p \phi(A) = n - s$ ，如此就可以得到

$$\text{rank}_p \begin{bmatrix} \phi(A), \frac{\phi(A)\eta}{p} \end{bmatrix} = \text{rank}_p \phi(A).$$

且存在一个整数向量 γ 使得

$$\frac{\phi(A)\eta}{p} \equiv \phi(A)\gamma \pmod{p}.$$

两边同乘以 p 得到

$$\phi(A)(\eta - p\gamma) \equiv 0 \pmod{p^2}.$$

我们假设在 $\mathbb{Q}$ 上 $\phi(A)$ 是满秩的，否则 $\text{ord}_p \phi(A) = \infty$ 。设 d_i 是 $\phi(A)$ 的第 i 个不变因子 ($i = 1, 2, \dots, n$)。由于 $\eta \not\equiv 0 \pmod{p}$ ，通过引理 2.2 我们得到 $p^2 \mid d_n$ 。此外，因为 $\dim \ker \phi(A) = \deg \phi(x) = s$ ，那么至少有 s 个不变因子被 p 整除。所以

有下式 $\det \phi(A) = \pm d_1 d_2 \cdots d_n$, 可知 $p^{s+1} \mid \det \phi(A)$, 即 $\text{ord}_p(\det \phi(A)) > \deg \phi(x)$. 这就证明了这个引理. $\square$

证明定理 1.2: 命题 3.2 和等式 (1.1) 矛盾, 即完全证明了定理 1.2. $\square$

3.4 模拟实验结果

在这一小节中, 我们给出具体模拟的实验数据来说明判定条件的有效性, 给一些例子来说明通过定理 1.2 是如何判定图是谱唯一的. 这里所有的图都用 Mathematica 随机产生. 并使用计算机对定理 1.1 和定理 1.2 进行比较, 代码存放在附录中.

首先, 给几个例子来说明定理 1.2.

例 3.1: 令 $n=12$, 给定图 G 的邻接矩阵如下所示:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

可以计算出

$$\begin{aligned} \theta(G) &= \gcd \left\{ 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \det W, \Delta(G) \right\} \\ &= \gcd \{-20514573, 424319456090918385320095315960579067904\} \\ &= 3^3, \end{aligned}$$

可见它是奇数, 但带有平方因子. 因此定理 1.1 不在适用这个例子. 此外这个图道矩阵的 SNF 是

$$\text{diag}(1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2 \times 3, 2 \times 3^2 \times 759799).$$

另外，我们看到排除条件和改进条件都不能排除素因子 $3 \mid \ell(Q)$, $Q \in \mathcal{Q}(G)$. 接下来使用定理 1.2., 可以注意到 $\Phi_3(G; x)$ 的重因式是 $(x+1)^2$. 而另一方面因为

$$\det \phi(A) = \det(A+I) = -3 \times 5^2 \text{ 和 } \det \phi(A+J) = \det(A+J+I) = -3^2 \times 23.$$

其满足等式 (1), 因此通过定理 1.2 知道 G 是广义谱唯一图(DGS).

例 1 说明了定理 1.2 比较排除条件和改进条件具有的一些优点. 即我们不需要 $\text{rank}_p W = n-1$ 或者 p 是 $d_n(W)$ 的单因式的假设. 另外定理 1.2 似乎比改进条件效果要好一些, 下面给出一个例子说明.

例 3.2: 令 $n=10$, 给定图 G 的邻接矩阵如下所示:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

它的道矩阵 SNF 如下:

$$\text{diag}(1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2 \times 3, 2 \times 3, 2 \times 3 \times 7 \times 19).$$

其最后一个不变因子是无平方因子的, 我们尝试用改进条件排除 $p=3$, 可能有 $3 \mid \ell(Q)$, $Q \in \mathcal{Q}(G)$. 计算出 $\Phi_3(G; x) = (x+1)^3$ 和 $\text{sfp}(\Phi_3(G; x)) = (x+1)$. 因此有 $\deg \text{sfp}(\Phi_3(G; x)) = 1 < 3 = \text{nullity}_3 W$. 因此改进条件在这个图上是失效的.

计算 $\theta(G) = 3^3$ 且 $\Phi_3(G; x)$ 仅有的不可约重因式是 $(x+1)$, 使用定理 1.2 验证 $\det(A+I) = 6$, $\det(A+J+I) = 12$ 因此有

$$\min \{ \text{ord}_3(\det \phi(A)), \text{ord}_3(\det \phi(A+J)) \} = 1 = \deg \phi(x).$$

因此, 通过定理 1.2 图 G 是广义谱唯一的(DGS).

最后, 我们通过表 1 给出一些实验的结果来说明定理 1.2 相较于定理 1.1, 排除条件和改进条件看起来是更有效的. 使用 Mathematica 对 $n \in \{10, 15, \dots, 50\}$ (顶点数), 利用图模型 $G(n, p)$, 其中 $p = 0.5$ 随机产生 10000 个图. 例如: 对 $n=50$,

在 10000 个图中有 3516 个图的 $\theta(G)$ 是奇数. 对这些图, 有 2865 个图满足定理 1.1 的条件, 再通过排除条件和改进条件可以被增加到 3089 个. 使用定理 1.2 可得到 3199 个图是广义谱唯一的. 如下表 1 所示:

表 1: 定理 1.1 和定理 1.2 的比较

n	odd	1.1	1.1+EC+IC	1.2
10	3264	2915	3042	3094
15	3494	2875	3094	3212
20	3377	2730	2962	3098
25	3500	2838	3089	3195
30	3375	2704	2964	3095
35	3491	2764	3034	3195
40	3518	2878	3120	3427
45	3407	2772	3008	3123
50	3516	2865	3089	3199

其中 odd 表示奇数的 θ , EC 表示排除条件, IC 表示改进条件.
模拟代码见附录.

第4章 自逆定向图广义斜谱限制唯一的一个判别准则

我们本章主要是考虑限制在图类中定向图广义斜谱唯一性的判定. 即自逆定向图 G^σ 是限制下广义斜谱唯一的(DGSS), 当且仅当任意和 G^σ 广义斜同谱的自逆定向图 H^τ 与 G^σ 是同构的

本章的证明思路主要来自文章^[2, 36, 37, 38]中的思想, 但几个创新性的想法对于结果的证明是不可缺少的.

主要的结果是下面这个定理.

定理 4.1 令 G^σ 是可控自逆定向图, $2^{\lfloor n/2 \rfloor} \det W(G^\sigma)$ 是有平方因子的奇数, 若对每一个 $p^2 \mid 2^{\lfloor n/2 \rfloor} \det W(G^\sigma)$ 的奇素数 p 和每一个 U_i , 我们要么有 $\dim U_i < \deg \phi_i(x)$, 要么有 $\dim U_i = \deg \phi_i(x)$ 时满足下面任意一个条件

- (i) $\bar{U}_i^T \bar{U}_i \not\equiv 0 \pmod{p}$;
- (ii) $\bar{U}_i^T P^T \bar{U}_i \not\equiv 0 \pmod{p}$;
- (iii) $\bar{U}_i^T P^T \phi_i(S) \bar{U}_i \not\equiv 0 \pmod{p^2}$.

那么 G^σ 是限制在自逆图类中广义斜邻接谱唯一的(RDGSS).

4.1 关键引理及其证明

下面这一引理主要来自于 Qiu^[2], 我们将其限制在自逆定向图中从新考虑, 发现其带有另外的特点. 这个特点是本节证明思路的主要基石.

引理 4.1^[2]: 设 G^σ 是可控的自逆定向图, 若存在自逆定向图 H^τ 与其广义斜同谱. 那么存在置换矩阵 P_1, P_2 和有理正交矩阵 Q 使得下式成立.

$$\begin{cases} Q^T P_1^T Q = P_2^T; \\ Q^T S(G^\sigma) Q = S(H^\tau); \\ P_1^T S(G^\sigma) P_1 = -S(G^\sigma); \\ P_2^T S(H^\tau) P_2 = -S(H^\tau); \\ Q^T P_1^T S^k(G^\sigma) Q = (-1)^k S^k(H^\tau) P_2, \end{cases}$$

其中 $k \geq 1$ 是整数.

证明: 由于 G^σ 和 H^τ 都是自逆定向图, 通过引理 2.8, 即可得到置换矩阵 P_1, P_2 和有理正交矩阵 Q 满足方程:

$$\begin{cases} Q^T S(G^\sigma) Q = S(H^\tau); \\ P_1^T S(G^\sigma) P_1 = -S(G^\sigma); \\ P_2^T S(H^\tau) P_2 = -S(H^\tau), \end{cases}$$

从上面这一方程中我们可以得到：

$$Q^T P_1^T S(G^\sigma) P_1 Q = P_2^T Q^T S(G^\sigma) Q P_2,$$

化简得：

$$Q P_2 Q^T P_1^T S(G^\sigma) P_1 Q P_2^T Q^T = S(G^\sigma).$$

注意到 G^σ 是可控的，且 $P_1 Q P_2^T Q^T$ 是有理正交矩阵，通过引理 2.8 中 Q 的唯一性，我们知道 $P_1 Q P_2^T Q^T$ 只能是单位矩阵，如此得到 $Q^T P_1^T Q = P_2^T$ 。

接着利用上面这一方程，我们有：

$$Q^T P_1^T S^k(G^\sigma) P_1 Q = (-1)^k S^k(H^\tau).$$

其中 k 是正整数。在等式两边同时右乘 $Q^T P_1^T Q = P_2^T$ 得到：

$$Q^T P_1^T S^k(G^\sigma) Q = (-1)^k S^k(H^\tau) P_2.$$

如此便完成了证明。 □

引理 4.2 设 $\mathcal{X}(S; x) \in \mathbb{F}_p[x]$ 是矩阵 S 的特征多项式且

$$\mathcal{X}(S; x) = \phi_1^{r_1} \phi_2^{r_2} \cdots \phi_k^{r_k},$$

是 $\mathcal{X}(S; x)$ 的标准分解式， S 是斜对称矩阵。设 $V_i = \mathcal{N}(\phi_i^{r_i}(S))$, $i = 1, \dots, k$ 。那么可得到：

- (i) $\mathbb{F}_p^n = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$;
- (ii) 每一个 V_i 是 S 不变的;
- (iii) $S|_{V_i}$ 上的特征多项式为 $\phi_i^{r_i}(x)$;
- (iv) 对任意 S 不变的子空间 U ，我们有 $U = (U \cap V_1) \oplus (U \cap V_2) \oplus \cdots \oplus (U \cap V_k)$ 。

引理 4.3 使用引理 4.2 的概念，得到下面结论

- (i) $\mathcal{N}(\phi_i^{r_i}(S))$ 是 S 不变的;
- (ii) 对任意 S 不变的子空间 U ，如果 $U \cap \mathcal{N}(\phi_i^{r_i}(S))$ 非零，那么 $U \cap \mathcal{N}(\phi_i(S))$ 非零;
- (iii) 每一个非零的 S 不变子空间 U 被包含在某些 V_i 中，且 $\dim U = r \cdot \deg \phi_i(x)$ $r \in \{1, 2, \dots, r_i\}$ ，并因此有 $\dim U \geq \deg \phi_i(x)$ 。

我们通过反证来证明。令 G^σ 是一个有 n 个顶点的图且 $2^{\lfloor n/2 \rfloor} \det W(G^\sigma)$ 是奇数且有平方因子。假设图 G 不是广义谱唯一图 (RDGSS)。那么，通过引理 2.8，

存在矩阵 Q 且 $\ell > 1$. 按照引理 2.10, 我们知道 ℓ 是奇数. 令 p 是 ℓ 的任意奇素因子, 并且在接下来的讨论中固定这个 p . 我们知道 $p^2 \mid \det W$. 同简单图类似, 设 $\hat{Q} = \ell \cdot Q$. 我们用 $\text{col}(\hat{Q})$ 表示 $\hat{Q}$ 在有限域 $\mathbb{F}_p$ 上的列空间, 它是 $\mathbb{F}_p^n$ 的子空间, 且 $\text{col}(\hat{Q})$ 是 S 的不变子空间, 另外由于 G^σ 是自逆定向图, 我们考虑的是限制在自逆图类中广义斜邻接谱唯一, 所以有置换矩阵 P , 使得 $P^T S(G^\sigma) P = -S(G^\sigma)$ 且主要的策略就是由引理 4.1 中的有理正交矩阵具有一些特殊的性质来导出矛盾.

由引理 4.2 和 4.3 (ii), 我们知道一定存在 $\text{col}(\hat{Q}) \cap \mathcal{N}_p(\phi_i(S))$ 非零. 由 $U_i = \mathcal{N}_p(W^T(G^\sigma)) \cap \mathcal{N}_p(\phi_i(S))$ 且 $\text{col}(\hat{Q}) \subset \mathcal{N}_p(W^T(G^\sigma))$. 可知道 $\text{col}(\hat{Q}) \cap U_i$ 非零, 下面定义:

定义 4.1: 令 $U = \mathcal{N}_p(W^T(G^\sigma)) \cap \mathcal{N}_p(\phi_i(S))$ 是 $\mathbb{F}_p^n$ 中固定的子空间, 其中 $\text{col}(\hat{Q}) \cap U$ 非零.

引理 4.4: 若 $\dim U = \deg \phi_i(x)$, 那么下面方程成立:

$$\begin{cases} \bar{U}^T \bar{U} \equiv 0 \pmod{p}; \\ \bar{U}^T P^T \bar{U} \equiv 0 \pmod{p}; \\ \bar{U}^T P^T \phi_i(S) \bar{U} \equiv 0 \pmod{p^2}. \end{cases}$$

证明: 由 U 的定义和 $\dim U = \deg \phi_i(x)$, 再通过引理 4.3 (iii), 我们知道 $U = \text{col}(\hat{Q}) \cap \mathcal{N}_p(\phi_i(S))$. 令 $\eta, \eta_i \in U$, $\xi = P\eta_i$. 我们断言

$$\xi^T \phi_i(S) \eta \equiv 0 \pmod{p^2}.$$

由于 $U = \text{col}(\hat{Q})$, 我们可以写

$$\eta = \hat{Q}v + p\beta, \quad \xi = P\hat{Q}u + p\alpha,$$

其中 $u, v, \beta, \alpha \in \mathbb{Z}^n$. 注意到 $S^T = -S$, 得到

$$\begin{aligned} \xi^T \phi_i(S) \eta &= (P\hat{Q}u + p\alpha)^T \phi_i(S) (\hat{Q}v + p\beta) \\ &\equiv u^T (\hat{Q}^T P^T \phi_i(S) \hat{Q}) v + p\alpha^T \phi_i(S) \hat{Q}v + p\beta^T \phi_i(-S) P\hat{Q}u \pmod{p^2}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

由引理 4.1 得 $Q^T P^T S^m Q$ 是整数矩阵, 其中 m 是正整数. 因此得到

$$\hat{Q}^T P^T \phi_i(S) \hat{Q} = \ell^2 Q^T P^T \phi_i(S) Q \equiv 0 \pmod{p}.$$

又因为 $U = \mathcal{N}_p(\phi_i(S))$, 可以看到 $\phi_i(S) \hat{Q}v \equiv 0 \pmod{p}$, 因此有

$$p\alpha^T \phi_i(S) \hat{Q}v \equiv 0 \pmod{p}.$$

与之相似, 通过我们知道 $P\hat{Q}u \subset \mathcal{N}_p(\phi_i(-S))$, 并因此有

$$p\beta^T \phi_i(-S)P\hat{Q}u \equiv 0 \pmod{p^2}.$$

通过上面的讨论和等式(4.1), 就可知道 $\xi^T \phi_i(S)\eta \equiv 0 \pmod{p^2}$. 证明了这个断言.

根据 $\bar{U}$ 的定义是空间 U 中任意基所构成的矩阵, 由(4.1)知方程中的 $\bar{U}^T P^T \phi(S)\bar{U} \not\equiv 0 \pmod{p^2}$ 成立. 对于 $\bar{U}^T \bar{U} \not\equiv 0 \pmod{p}$, $\bar{U}^T P^T \bar{U} \not\equiv 0 \pmod{p}$, 可利用引理 4.1 得到:

$$\begin{aligned} \xi^T \eta &= (P\hat{Q}u + p\alpha)^T (P\hat{Q}v + p\beta) \equiv 0 \pmod{p}, \\ \eta^T \eta &= (\hat{Q}v + p\beta)^T (\hat{Q}v + p\beta) \equiv 0 \pmod{p}. \end{aligned}$$

即定理得证. $\square$

定理 4.1 的证明: 引理 4.4 和 4.3 (iii) 同定理 4.1 中条件和方程矛盾, 得证. $\square$

4.2 实验举例

本小节给出一个例子来说明定理 4.2 如何使用, 此外用这个例子解释广义斜同谱唯一图和限制在自逆定向图中的广义斜谱唯一图的区别.

例 4.1. 令 $n=6$, 给定图 G^σ 的斜邻接矩阵如下所示:

$$S(G^\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

通过 Mathematica 计算出 $\det W(G^\sigma) = 2^3 \times 19^2$ 和在有限域 $\mathbb{F}_p$ 中特征多项式的分解式为 $\mathcal{X}(G^\sigma; x) = (x+7)^2 (x+12)^2 (x^2+11)$. 进一步得到:

$$\begin{cases} \mathcal{N}_{19}(W^T(G^\sigma)) = \text{span}\{(4, 6, 13, 14, 0, 1), (14, 3, 0, 15, 5, 1)\}; \\ \mathcal{N}_{19}(S(G^\sigma) + 12I) = \text{span}\{(4, 6, 13, 14, 0, 1)\}; \\ \mathcal{N}_{19}(S(G^\sigma) + 7I) = \text{span}\{(14, 3, 0, 15, 5, 1)\}. \end{cases}$$

其中 I 是单位矩阵. 设

$$\begin{cases} U_1 = \mathcal{N}_{19}(S(G^\sigma) + 14I) \cap \mathcal{N}_{19}(W^T(G^\sigma)) = \text{span}\{(4, 6, 13, 14, 0, 1)\}; \\ U_2 = \mathcal{N}_{19}(S(G^\sigma) + 7I) \cap \mathcal{N}_{19}(W^T(G^\sigma)) = \text{span}\{(14, 3, 0, 15, 5, 1)\}. \end{cases}$$

由上述定向图是自逆定向图，可以得到下式：

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 且使得 } P^T S(G^\sigma) P = -S(G^\sigma).$$

进一步设

$$\bar{U}_1^T = (4, 6, 13, 14, 0, 1), \quad \bar{U}_2^T = (14, 3, 0, 15, 5, 1).$$

很容易看出

$$\dim U_1 = \dim U_2 = \deg(x+14) = \deg(x+7) = 1.$$

那么可以验证：

$$\begin{cases} \bar{U}_1^T P^T (S(G^\sigma) + 12I) \bar{U}_1 = 2 \times 19 \times 29 \not\equiv 0 \pmod{p^2}; \\ \bar{U}_2^T P^T (S(G^\sigma) + 7I) \bar{U}_2 = 3 \times 19 \not\equiv 0 \pmod{p^2}. \end{cases}$$

通过上述知道这个图满足定理 4.1 中的条件，由此得到没有其它的自逆定向图和它是广义斜同谱的(RDGSS).

此外注意到存在非自逆定向图 H^τ 其斜邻接矩阵如下：

$$S(H^\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

容易验证 H^τ 和 G^σ 广义斜同谱. 另外找到有理正交正则矩阵如下：

$$Q = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} -1 & -8 & 8 & 14 & 0 & 6 \\ 8 & 7 & 12 & 2 & 0 & -10 \\ -8 & 12 & 7 & -2 & 0 & 10 \\ 6 & 10 & -10 & 11 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 19 & 0 \\ 14 & -2 & 2 & -6 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

其中 $Q^T S(G^\sigma) Q = S(H^\tau)$ ，这就着 G^σ 存在广义斜同谱图 H^τ ，即 G^σ 不是 DGSS.

第 5 章 结论和展望

5.1 主要研究内容

本节主要是对本文内容进行总结. 本文在简单图的广义谱唯一性的判定方法上做了一些研究. 其主要依赖线性代数和有限域的知识. 除了简单图, 也在自逆定向图的斜邻接谱中做了一些研究, 其结果不如简单图中的结果简练, 但也在自逆定向图类中做了一点刻画.

于简单图中得到的定理如下:

定理: 设 $G \in \mathcal{G}_n^c$ 且 $\theta(G)$ 是奇数. 如果对 $\theta(G)$ 中的每一个重的奇素因子 p 和 $\Phi_p(G; x)$ 中的每一个重因式 $\phi(x)$,

$$\min \{ \text{ord}_p(\det \phi(A)), \text{ord}_p(\det \phi(A+J)) \} = \deg \phi(x).$$

那么 G 是 DGS.

在此定理的基础上, 得到下面这一推论:

推论: 设 $G \in \mathcal{G}_n^c$ 且 $\theta(G)$ 是奇数. 如果对 $\theta(G)$ 中的每一个重的奇素因子 p 和 $\Phi_p(G; x)$ 中的每一个重因式 $\phi(x)$, 都有下式成立

$$\gcd \{ \Phi_p(G; x), \Phi'_p(G; x) \} = 1, \text{ over } \mathbb{F}_p,$$

那么 G 是 DGS.

上面这一结果主要是跟随 Wang^[12]提出的简单图广义谱确定的研究思路. 推广现有的广义谱确定的判别方法.

于自逆定向图中得到的定理如下:

定理: 令 G^σ 是可控自逆定向图, $2^{\lfloor n/2 \rfloor} \det W(G^\sigma)$ 是有平方因子的奇数, 若对每一个 $p^2 \mid 2^{\lfloor n/2 \rfloor} \det W(G^\sigma)$ 的奇素数 p 和每一个 U_i , 要么 $\dim U_i < \deg \phi_i(x)$, 要么有 $\dim U_i = \deg \phi_i(x)$ 时满足下面任意一个条件

- (i) $\bar{U}_i^T \bar{U}_i \not\equiv 0 \pmod{p}$;
- (ii) $\bar{U}_i^T P^T \bar{U}_i \not\equiv 0 \pmod{p}$;
- (iii) $\bar{U}_i^T P^T \phi_i(S) \bar{U}_i \not\equiv 0 \pmod{p^2}$.

那么 G^σ 是限制在自逆图类中广义斜邻接谱唯一的.

上面这一结果主要是跟随 Qiu^[12]提出的自逆定向图广义斜谱确定的研究思路. 将其图类限制在自逆定向图中, 在进行了研究.

在简单图中的主要创新: 其结果上假设 $\theta(G)$ 是奇数, 但允许它含有一个或者多个奇的重素因子的情况下, 给出了一个图是广义谱唯一的判定条件. 显然, 上述讨论会带来下面这个情况. 即, 令 p 是奇素数则 $p^2 \mid \det W$. 事实上, 对于上述的情况, 在 W 上也已经有了一些关于图广义谱唯一性的充分条件. 一个是在文章^[34]中, 假设 $\text{rank}_p W = n-1$ 时的排除条件; 另一个是在文章^[33]中, 假设 $d_n(W)$ 是无平方因子时的改进条件. 但定理 1.2 移除了上面在道矩阵中限制的两个条件, 考虑了更一般的 $\theta(G)$ 带有平方因子的情况, 且在模拟实验中, 比之前的判定条件效果好一些, 这是定理的主要创新之处.

5.2 研究工作展望

对图的广义谱唯一性问题, 根据本文的研究, 本小节给出未来可进一步研究的内容:

基于第三章未来可研究的问题:

1. 在模拟实验中发现定理 1.2 对有理正交矩阵级为 2 的排除情况和定理 1.1^[23,32,34]对级为 2 的排除情况总是相同的. 就是说这两个定理在对素因子 2 做排除时有可能是等价的, 那么是否可以证明两个定理在此种情况下确实是等价的?

2. Wang^[12]提出的广义谱唯一性的研究思路依赖于广义同谱图邻接矩阵间的有理正交相似性, 那么上述这种方法是否能在谱的唯一性中起到作用?

3. 定理 1.2 主要针对简单图的邻接矩阵. 另外 Wang^[32]考虑了混合图厄米特谱唯一的问题, 那么能否使用在赫尔米特矩阵上使用准素分解定理, 将定理 1.2 推广到混合图中?

4. 在实验过程中发现满足改进条件^[36]的图, 总是满足定理 1.2 的, 那么是否可以说清楚这两个判别条件之间的关系, 是很有意思的一件事情.

基于第四章未来可研究的问题:

5. 定理 4.1 是限制在自逆定向图类中考虑的, 那么, 是否可以去掉自逆图类这一限制得到更一般的结果?

参考文献

- [1] W. T. Tutte. The factorization of linear graphs[J]. J. Lond. Math. Soc. 1947, 22: 107-111.
- [2] L. Qiu, W. Wang, W. Wang. Oriented graphs determined by their generalized skew spectrum[J]. Linear Algebra Appl, 2021, 622(1): 316-332.
- [3] J. Liu, X. Li. Hermitian-adjacency matrices and Hermitian energies of mixed graphs[J]. Linear Algebra Appl, 2015, 466: 182-207.
- [4] K. Guo, B. Mohar. Hermitian adjacency matrix of digraphs and mixed graphs[J]. J. Graph Theory. 2017, 85 (1): 324-340.
- [5] B. Mohar. Hermitian adjacency spectrum and switching equivalence of mixed graphs[J]. Linear Algebra Appl. 2016, 489: 324-340
- [6] Günthard HH, Primas H. Zusammenhang von Graphentheorie und MO-Theorie von Molekeln mit Systemen konjugierter Bindungen[J]. Helv. Chem. Acta, 1956, 39(6): 1645-1653.
- [7] Fisher ME. On hearing the shape of a drum[J]. J. Combin. Theory, 1966, 1(1): 105-125.
- [8] Kac M. Can one hear the shape of a drum?[J]. Amer. Math. Monthly, 1966, 73(4): 1-23.
- [9] E. R. van Dam, W. H. Haemers. Which graphs are determined by their spectrum? [J]. Linear Algebra Appl, 2003, 373(1): 241-272.
- [10] A. J. Schwenk. Almost all trees are cospectral[J]. New Directions in the Theory of Graphs, 1973: 275-307.
- [11] C. D. Godsil, B. D. McKay. Constructing cospectral graphs[J]. Aequationes Math, 1982, 25(1): 257-268.
- [12] 王卫. 图的谱唯一性研究[D]. 西安交通大学, 2006.
- [13] 邱丽红. 图的广义谱确定[D]. 西安交通大学, 2021.
- [14] 毛利欢. 谱唯一图的判定及其构造方法研究[D]. 西安交通大学, 2017.

- [15] M. Liu, X. Gu. Spectral characterization of the complete graph removing a path: Completing the proof of Camara–Haemers Conjecture[J]. *Discrete Math*, 2021, 344(4): 112275.
- [16] X. Liu, Y. Zhang, X. Gui, The multi-fan graphs are determined by their Laplacian spectra[J]. *Discrete Math*, 2008, 308(18): 4267-4271.
- [17] W. Wang, Z. Yan, L. Mao. Proof of a conjecture on the determinant of the walk matrix of rooted product with a path [J]. *Linear Multilinear Algebra*, 2024, 72(5): 828-840.
- [18] J. H. Koolen, S. Hayat, Q. Iqbal. Hypercubes are determined by their distance spectra[J]. *Linear Algebra Appl*, 2016, 505(15): 97-108.
- [19] H. Lin, X. Liu, J. Xue. Graphs determined by their $A\alpha$ -spectra[J]. *Discrete Math*, 2019, 342(2): 441-450.
- [20] X. Lei, J. Wang. Spectral determination of graphs with one positive anti-adjacency eigenvalue[J]. *Appl. Math. Comput*, 2022, 422(1): 126995.
- [21] L. K. Pinheiro, B. S. Souza, V. Trevisan. Determining graphs by the complementary spectrum[J]. *Discuss. Math. Graph Theory*, 2020, 40(2): 607-620.
- [22] S. Akbari, W. H. Haemers, H. R. Maimani, L. P. Majd. Signed graphs cospectral with the path[J]. *Linear Algebra Appl*, 2018, 553(15): 104-116.
- [23] B. Mohar. Hermitian adjacency spectrum and switching equivalence of mixed graphs[J]. *Linear Algebra Appl*, 2016, 489(15): 324-340.
- [24] P. Wissing, E. R. van Dam. The negative tetrahedron and the first infinite family of connected digraphs that are strongly determined by the Hermitian spectrum[J]. *J. Combin. Theory, Ser. A*, 2020, 173: 105232.
- [25] B. Yuan, Y. Wang, J. Xu. Characterizing the mixed graphs with exactly one positive eigenvalue and its application to mixed graphs determined by their H-spectra[J]. *Appl. Math. Comput*, 2020, 380(3): 125279.
- [26] P. Wissing, E. R. van Dam. Spectral fundamentals and characterizations of signed directed graphs[J]. *J. Combin. Theory, Ser. A*, 2022, 187: 105573.
- [27] W. Wang, C. Xu. A sufficient condition for a family of graphs being determined

- by their generalized spectra[J]. *European J. Combin*, 2006, 27(6): 826-840.
- [28] W. Wang. A simple arithmetic criterion for graphs being determined by their generalized spectra[J]. *J. Combin. Theory, Ser. B*, 2017, 122: 438-451.
- [29] L. Qiu, Y. Ji, W. Wang. A new arithmetic criterion for graphs being determined by their generalized Q-spectrum[J]. *Discrete Math*, 2019, 342(10): 2770-2782.
- [30] S. Li, W. Sun. An arithmetic criterion for graphs being determined by their generalized $A\alpha$ -spectra[J]. *Discrete Math*, 2021, 344(8): 112469.
- [31] L. Qiu, Y. Ji, W. Wang. On the generalized spectral characterizations of Eulerian graphs[J]. *Electron. J. Combin*, 2019, 26 (1): P1.9
- [32] W. Wang, L. Qiu, J. Qian, W. Wang. Generalized spectral characterization of mixed graphs[J]. *Electron. J. Combin*, 2020, 27(4): P4.55.
- [33] W. Wang, W. Wang, L. Qiu. Spectral characterizations of tournaments[J]. *Discrete Math*, 2022, 345(8): 112918.
- [34] W. Wang, F. Liu, W. Wang. Generalized spectral characterizations of almost controllable graphs[J]. *European J. Combin*, 2021, 96: 103348.
- [35] S. Li, J. Wang. On the generalized $A\alpha$ -spectral characterizations of almost α -controllable graphs[J]. *Discrete Math*, 2022, 345(8): 112913.
- [36] W. Wang, W. Wang, F. Zhu. An improved condition for a graph to be determined by its generalized spectrum[J]. *European J. Combin*, 2023, 108: 103638.
- [37] W. Wang, T. Yu. Square-free discriminants of matrices and the generalized spectral characterizations of graphs, arXiv:1608. 01144.
- [38] W. Wang. Generalized spectral characterization revisited[J]. *Electron. J. Combin*, 2013, 20(4): P4.
- [39] L. Qiu, W. Wang, W. Wang, H. Zhang. A new criterion for almost controllable graphs being determined by their generalized spectra[J]. *Discrete Math*, 2022, 345(11): 113060.
- [40] L. Qiu, G. Qiu, L. Mao. Generalized spectral characterizations of a new family of noncontrollable graphs[J]. *Linear Algebra Appl*, 2024, 683(15): 211-234.
- [41] W. Wang, W. Wang, T. Yu. Graphs with at most one generalized cospectral

- mate[J]. Electron. J. Combin, 2023, 30(1): P1.38.
- [42] 刘奋进. 图邻接谱确定问题的一些研究[D]. 新疆大学, 2012.
- [43] 王卫. 图谱确定问题综述[J]. 广州大学学报. 2019, 18: 1671-4229.
- [44] C.D. Godsil. Controllable subsets in graphs[J]. Ann. Comb. 2012, 16: 733-744.
- [45] M. Newman. Integral Matrices[M]. Academic Press, New York, 1972.
- [46] K. Hoffman, R. Kunze. Linear Algebra, second ed[M]. Prentice-Hall, 1971.

攻读硕士期间取得的学术成果

已发表的学术论文:

- [1] **Guo Songlin**, Wang Wei , Wang Chuanming. Disproof of a conjecture on the minimum Wiener index of signed trees[J]. Applied Mathematics and Computation, 2023, 439: 127577.
- [2] Wang Wei, Wang Chuanming, **Guo Songlin**. On the walk matrix of the Dynkin graph D_n [J]. Linear Algebra and its Applications, 2022, 653: 193-206.
- [3] **Guo Songlin**, Wang Wei , Wang Wei. Primary decomposition theorem and generalized spectral characterization of graphs. (在投)

致 谢

本篇论文即将完成，回想高中，本科和研究生这些年的经历，感慨万千，但能读上研究生感觉非常幸运了。

在刚开始接触代数图论这个方向的时候，就看一些视频课，也不知道怎么学，不知到学这些有什么用。好在王老师在开始的时候就给了一个问题让我考虑。这让我在一段时间里有了方向，可是问题总是很困难的，在很长一段时间都没有什么头绪，这让我相当苦恼。后面开组会和老师交流，换了问题，才慢慢找到向前的方向和动力。但还是焦虑的，在这焦虑的一段时间里，我爷爷奶奶来过学校一趟，这让我感到很安心，能将心思静下来做问题。也同室友相互交流经验，这让我感觉不很孤独。后面一次偶然的观察，找到所做问题的一个反例。我告诉王老师这个发现，接下来在老师的帮助下，投了第一篇文章。这使得我有信心做接下来的问题。

感谢那些帮助过我的人，特别是王伟老师，从研究方向，论文撰写在到代码编写，都亲自教导。借此机会对王伟老师表示最诚挚的感谢和敬意！

感谢我的高中朋友们，远飞，朱光辉，王维禄，张学坤，杨闯，刘全兴，刘魁佳，王梦飞，在我上学期间对我的帮助和鼓励，能够认识你们亦是非常幸运的事，和你们一起收获很多快乐！

感谢我研究生期间的同学和室友，姚钰琪，曹汉秋，王越，李亮，董鹏博，张东元，杨铭，章森，吴开强，潘德发，陈林，王龙，黄超，在研究生期间对我的帮助和鼓励！

感谢爷爷奶奶，父母和所有家人，对我的理解和支持！

感谢所有关心我的亲朋好友，借此机会，衷心向所有关心和帮助我的人表示最诚挚的谢意和祝福！

附录

整数 num 关于素数 p 阶的计算编程:

```
ordp[num_,prime_]:=
Module[{n=num,p=prime,Res=0},
If[n==0,Return[Infinity]];
While[Mod[n,p]==0,Res++;n/=p;];
Return[Res];
];
```

矩阵多项式函数的编程:

```
MatrixPolynomial[mat_,poly_]:=
Module[{M=mat,n,B,f=poly,L,i,Res},
L=CoefficientList[f,x];
n=Length[M];
Res=L[[1]]*IdentityMatrix[n];
For[i=2;B=IdentityMatrix[n],i<=Length[L],i++,
B=M.B;
Res=Res+L[[i]]*B;
];
Return[Res];
];
```

定理 1.1 和定理 1.2 的模拟编程:

```
n=10;
T=1000;
Res=Table[0,{T}];
For[n=10,n<=50,n=n+5,
Oddtheta=0;
DGSbyThm1=0;
DGSbyThm1ECIC=0;
DGSbyThm2=0;
```

```

J=Table[1,{n},{n}];
W=Table[1,{n},{n}];
For[s=1,s<=T,s++,
A=AdjacencyMatrix[RandomGraph[BernoulliGraphDistribution[n,1/2]]];
  For[i=2,i<=n,i++,W[[i,i]]=A.W[[i,i-1]]];
  dW=Det[W]/Power[2,Floor[n/2]];
  If[Mod[dW,2]==0,Continue[]];
  Oddtheta++;
  chi=CharacteristicPolynomial[A,x];
  dis=Discriminant[chi,x];
  theta=Abs[GCD[dW,dis]];
  If[SquareFreeQ[theta],DGSbyThm1++;DGSbyThm1ECIC++;DGSbyThm2++;Continue[]];
  L=FactorInteger[theta];
  mL={};
  For[i=1,i<=Length[L],i++,
  If[L[[i,2]]>=2,mL=Join[mL,{L[[i,1]]}]];
  ];
  chj=CharacteristicPolynomial[A+J,x];
  S=Diagonal[SmithDecomposition[W][[2]]];
  For[i=1;flag=1,i<=Length[mL],i++,
  p=mL[[i]];
  If[Mod[S[[n-1]],p]==0&&Mod[S[[n]],p^2]==0,flag=0,
  If[Mod[S[[n-1]],p]!=0,
  z=NullSpace[Transpose[W],Modulus->p][[1]];
  If[Mod[z.z,p]==0,flag=0],
  phi=PolynomialGCD[chi,chj,Modulus->p];
  F=FactorSquareFreeList[phi,Modulus->p];
  sfp=Product[F[[t,1]],{t,1,Length[F]}];
  degsfp=Length[CoefficientList[sfp,x]]-1;

```

```

        If[degsfp<n-MatrixRank[W,Modulus->p],flag=0];
    ];
];
If[flag==0,Break[;,];
];
If[flag==1,DGSbyThm1ECIC++];
For[i=1;Flag=1,i<=Length[mL],i++,
p=mL[[i]];
phi=PolynomialGCD[chi,chj,Modulus->p];
F=FactorList[phi,Modulus->p];
mF={};
For[j=2,j<=Length[F],j++,
    If[F[[j,2]]>=2,mF=Join[mF,{F[[j,1]]}]];
];
For[j=1,j<=Length[mF],j++,
    m=Min[ordp[Det[MatrixPolynomial[A,mF[[j]]]],p],
        ordp[Det[MatrixPolynomial[A+J,mF[[j]]]],p]];
    If[m>Length[CoefficientList[mF[[j]],x]]-1,Flag=0];
    If[Flag==0,Break[;,];
];
If[Flag==0,Break[;,];
];
If[Flag==1,DGSbyThm2++];
];
Print["Graph order n=",n,"n","odd_theta=",Oddtheta,"n","DGS by the
odd squarefree criterion (Theorem 1)=",DGSbyThm1,"n","DGS by
Theorem 1 together with EC and IC=",DGSbyThm1ECIC,"n","DGS by
the new criterion (Theorem 2)=",DGSbyThm2];
]

```