
分类号 O174.2
密 级：公开

学校代码：10363
学 号：2211020130

题 目 变指数 Herz-Morrey 空间中若干算子的
有界性研究

英文并列
题 目 The Boundedness of Several Operators in
Variable Herz-Morrey Spaces

学生姓名： 刘可欣

指导教师： 王立伟 教授

专 业： 数学

研究方向： 调和分析

论文答辩日期： 2024 年 5 月 29 日

安徽工程大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：我恪守学术道德，崇尚严谨学风。所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已明确注明和引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品及成果的内容。论文为本人亲自撰写，我对所写的内容负责，并完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

学位论文作者签名：刘可欣

日期：2024年6月3日

安徽工程大学学位论文版权使用授权书

学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅或借阅。本人授权安徽工程大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保密 ☐，在 _____ 年解密后适用本版权书。

本学位论文属于

不保密 ☒。

学位论文作者签名：

刘可欣

指导教师签名：

王立伟

日期： 2024 年 6 月 3 日

日期： 2024 年 6 月 3 日

变指数 Herz-Morrey 空间中若干算子的有界性研究

摘 要

调和分析起源于 Euler 和 Fourier 等人对热传导方程的研究, 几个世纪以来, 高维奇异积分算子理论的提出极大地推动了调和分析的研究和发展, 使其成为了分析数学中的一个重要的分支。近年来, 由于变指数函数空间在流体力学、图像修复和具有非标准增长条件的偏微分方程中有着重要的应用, 人们对变指数函数空间及相关算子的有界性研究越来越感兴趣。许多学者引入了一系列新的变指数函数空间, 并相继证明了这些变指数函数空间上某些算子的有界性, 基于这些研究, 本学位论文研究了几类算子和它们的交换子在变指数 Herz-Morrey 空间中的有界性, 主要成果如下:

第一章中, 概述了变指数函数空间的发展历史和国内外相关研究的现状, 并介绍了本学位论文的主要研究内容。

第二章中, 研究了向量值次线性算子 T 与 BMO 函数 b 生成的交换子 $[b, T]$ 在具有加权变指数 Herz-Morrey 空间 $\dot{MK}_{q(\cdot), p(\cdot)}^{\alpha(\cdot), \lambda}(\omega)$ 中的有界性。证明了若 $b \in \text{BMO}(\mathbb{R}^n)$, 且次线性算子 T 满足一定的尺寸条件, 则交换子 $[b, T]$ 在加权变指数 Herz-Morrey 空间上有界。

第三章中, 研究了 Riesz 位势算子的交换子 $[b, I_\beta]$ 在极大变指数 Herz-Morrey 空间 $\dot{MK}_{\lambda, q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), r, \theta}(\mathbb{R}^n)$ 中的有界性, 证明了在变指数 $\alpha(\cdot)$ 和 $q(\cdot)$ 满足一定条件下, 交换子 $[b, I_\beta]$ 是从 $\dot{MK}_{\lambda, q_1(\cdot)}^{\alpha(\cdot), r, \theta}(\mathbb{R}^n)$ 到 $\dot{MK}_{\lambda, q_2(\cdot)}^{\alpha(\cdot), r, \theta}(\mathbb{R}^n)$ 上

有界的。

第四章中,证明了 Marcinkiewicz 积分算子 μ_Ω 在极大变指数 Herz-Morrey 空间 $M\dot{K}_{\lambda,q(\cdot)}^{\alpha(\cdot),r,\theta}(\mathbb{R}^n)$ 中的有界性。

本学位论文主要对经典函数空间中几类算子及交换子的有界性进行了拓展,将这些算子的有界性推广至变指数 Herz-Morrey 空间,进一步丰富了变指数 Herz-Morrey 空间理论。

关键词: 次线性算子, Riesz 位势算子, Marcinkiewicz 积分算子, 交换子, 变指数 Herz-Morrey 空间

The Boundedness of Several Operators in Variable Herz-Morrey Spaces

ABSTRACT

Harmonic analysis originated from the study of heat conduction equations by Euler and Fourier et al., for centuries, the proposal of high-dimensional singular integral operator theory has greatly promoted the research and development of harmonic analysis, making it an important branch in analytical mathematics. In recent years, due to the important applications of variable exponent function spaces in fluid dynamics, image restoration, and partial differential equations with non-standard growth conditions, there has been increasing interest in the study of the boundedness of variable exponential function spaces and related operators. Many scholars have introduced a series of new variable exponent function spaces and successively proved the boundedness of certain operators on these spaces, based on these research foundations, this thesis investigates the boundedness of several types of operators and their commutators in variable exponent Herz-Morrey spaces. The main results are as follows:

In Chapter 1, the development of variable exponent function space and the current status of related research at home and abroad are

summarized, and the main content of this thesis is introduced.

In Chapter 2, the boundedness of the commutator of $[b, T]$ generated by the vector-valued sublinear operator T and BMO function b in the weighted variable exponent Herz-Morrey space $M\dot{K}_{q(\cdot), p(\cdot)}^{\alpha(\cdot), \lambda}(\omega)$ is studied. We prove that if $b \in \text{BMO}(\mathbb{R}^n)$, and the sublinear operator T satisfies certain size conditions, then the commutator $[b, T]$ is bounded in the weighted variable exponent Herz-Morrey space $M\dot{K}_{q(\cdot), p(\cdot)}^{\alpha(\cdot), \lambda}(\omega)$.

In Chapter 3, we prove the boundedness of the commutator of the Riesz potential operator $[b, I_\beta]$ in grand variable Herz-Morrey space $M\dot{K}_{\lambda, q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), r, \theta}(\mathbb{R}^n)$. We proved that under certain conditions satisfied by the variable exponents $\alpha(\cdot)$ and $q(\cdot)$, the commutator $[b, I_\beta]$ is bounded from $M\dot{K}_{\lambda, q_1(\cdot)}^{\alpha(\cdot), r, \theta}(\mathbb{R}^n)$ to $M\dot{K}_{\lambda, q_2(\cdot)}^{\alpha(\cdot), r, \theta}(\mathbb{R}^n)$.

In Chapter 4, we prove the boundedness of Marcinkiewicz integral operator μ_Ω in grand variable Herz-Morrey space $M\dot{K}_{\lambda, q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), r, \theta}(\mathbb{R}^n)$.

This thesis mainly extends the boundedness of several types of operators and commutators in classical function spaces, and extends the boundedness of these operators to variable exponent Herz-Morrey spaces, the theory of variable exponent Herz-Morrey spaces is further enriched.

KEY WORDS: Sublinear operator, Riesz potential operator, Marcinkiewicz integral operators, Commutators, Variable Herz-Morrey space

目录

摘 要.....	I
ABSTRACT.....	III
第一章 绪论.....	1
1.1 研究背景.....	1
1.2 国内外研究现状.....	2
1.3 主要研究内容.....	3
第二章 向量值次线性算子的交换子在变指数 Herz-Morrey 空间上的加权估计 ..	4
2.1 引言及主要结果.....	4
2.2 主要引理.....	6
2.3 主要定理的证明.....	8
第三章 Riesz 位势算子的交换子在极大变指数 Herz-Morrey 空间中的有界性...18	
3.1 引言及主要结果.....	18
3.2 主要引理.....	20
3.3 主要结果的证明.....	21
第四章 Marcinkiewicz 算子在极大变指数 Herz-Morrey 空间中的有界性	27
4.1 引言及主要结果.....	27
4.2 主要引理.....	28
4.3 主要结果的证明.....	28
结论与展望.....	35
参考文献.....	36
硕士期间发表论文.....	40
致谢.....	41

第一章 绪论

1.1 研究背景

Euler 和 Fourier 等人对热传导方程的研究是调和分析的起源,最初研究的问题围绕 Fourier 级数的收敛性、求和法等,Calderón 和 Zygmund 提出的高维奇异积分算子理论推动了调和分析的研究和发展,几个世纪以来,调和分析已经成为了分析数学中的一个重要的分支,并广泛的应用于各个领域。比如经典的 Herz 空间 $\dot{K}_{p,q}^\alpha(\mathbb{R}^n)$ 及 $K_{p,q}^\alpha(\mathbb{R}^n)$ 在调和分析和偏微分方程中具有重要的应用,例如,它已被用于散度型椭圆方程的正则性理论、傅里叶变换的可和性以及 Hardy 空间上乘子的特征刻画中。

近年来,人们对变指数函数空间的研究越来越感兴趣。一方面由于变指数函数空间与经典函数空间具有本质的区别,例如变指数 Lebesgue 空间 $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 不具有平移不变性,即 $p(\cdot)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中是非常数,则总存在 $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 和 $h \in \mathbb{R}^n$, 使得 $f(x+h) \notin L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, 因此研究这些函数空间具有自身的理论意义。另一方面有界变指数函数空间及其算子在流体力学、图像恢复、非标准生长条件下的偏微分方程等方有着重要的应用。自从 Kováčik 和 Rákosník 系统地研究了变指数 Lebesgue 空间 $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 及变指数 Sobolev 空间 $W^{k,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 的性质之后,许多新的变指数函数空间被陆续引入,如变指数 Morrey 空间,变指数 Herz 空间以及加权变指数函数空间等。

1976 年,Coifman, Rochberg 和 Weiss^[1] 引入了一类非卷积算子 T_b 定义为交换子,他们证明了当且仅当 $b \in \text{BMO}(\mathbb{R}^n)$, 交换子 T_b 在某 $L^p(\mathbb{R}^n)$ ($1 < p < \infty$) 空间上有界。陆善镇和杨大春在文献[2]中给出的中心 $\text{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 空间 $\text{CBMO}_q(\mathbb{R}^n)$ ($1 < p < \infty$) 的定义,引起了许多学者研究奇异积分算子交换子在 $b \in \text{CBMO}_q(\mathbb{R}^n)$ 时的有界性。基于上述研究背景,本学位论文将进一步研究一些算子及其交换子在变指数函数空间中的有界性。

1.2 国内外研究现状

Herz 空间、Herz-Morrey 空间等一些空间上重要问题之一是次线性算子的有界性。向量值次线性算子在齐次 Herz 空间的有界性被 Hernández, Li, Lu 和 Yang^[3]证明。Lu 和 Xu^[6]建立了齐次 Herz-Morrey 空间 $\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ 上一些次线性算子的有界性。Izuki^[7-8]首先引入了具有变指数的 Herz-Morrey 空间 $\dot{MK}_{q,p(\cdot)}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, 并建立了满足一些尺寸条件的向量值次线性算子的有界性, 之后证明了变指数 Herz 空间上一些次线性算子的有界性。Wu^[9]证明了具有变量指数的 Herz-Morrey 空间 $\dot{MK}_{p,q(\cdot)}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ 上的次线性算子的有界性。Dong 等人^[10]将 Izuki^[7]的主要结果推广到具有两个变指数的 Herz-Morrey 空间 $\dot{MK}_{q,p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),\lambda}(\mathbb{R}^n)$ 。Wang 等人^[11]进一步研究了这些向量值次线性算子在加权变指数 Herz-Morrey 空间。

波兰数学家 Orlicz^[12]于 1931 年提出了变指数 Lebesgue 空间。Kovacik 和 Rakosnik 在文献[13]中系统地研究了变指数 Lebesgue 空间, 推动了这类空间的实际应用^[14-17]。之后, 许多学者对其他的变指数空间进行研究, 如 Morrey 空间^[18], Herz-Morrey 空间^[19], Hardy 空间^[20-21], Besov 空间^[22]等。Samko^[23]证明了 Riesz 位势算子 I_β 在空间 $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ 中有界。Diening^[24]证明了 Riesz 位势算子 I_β 是从 $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^d)$ 到 $L^{p^\#(\cdot)}(\mathbb{R}^d)$ 上有界的。Cruz-Uribe 等人^[25]证明了 Riesz 位势算子 I_β 是从 $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ 到 $L^{q(\cdot)}(\Omega)$ 有界的。Di Fazio 和 Ragusa^[26]证明了, 若 $b \in \text{BMO}(\mathbb{R}^n)$, 交换子 $[b, I_\beta]$ 是从经典 Morrey 空间 $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ 有界的。Chen 和 Song^[27]证明了与 $\mathcal{L}$ 相关的 Riesz 位势算子 I_β 及其交换子 $[b, I_\beta]$ 是从 $M_{\alpha,v}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ 到 $M_{\alpha,v}^{p_1,q_1}(\mathbb{R}^n)$ 上有界的。Stein^[28]在 1956 年首先引入了 n 维的 Marcinkiewicz 积分算子, 并证明了, 如果 $\Omega \in \text{Lip}_\alpha(\mathbb{S}^{n-1}) (0 < \alpha \leq 1)$, Marcinkiewicz 积分算子 μ_Ω 是 (p, p) 型, 且 $1 < p \leq 2$ 时, 为弱 $(1,1)$ 型。Torchinsky 和 Wang 在[29]中提出了 Marcinkiewicz 积分的加权有界性, 他们证明了, 若 $\Omega \in \text{Lip}_\alpha(\mathbb{S}^{n-1}) (0 < \alpha \leq 1)$, $w \in A_p (1 < p < \infty)$, 则 μ_Ω 在 $L^p(w)$ 上有界。

极大变指数函数空间在调和分析中有很重要的作用，有界集合上的极大 Lebesgue 空间在文献[30-31]中引入，Rafeiro 和 Samko 在文献[32]中定义了极大 Lebesgue 序列空间，Soria 和 Weiss 在文献[33]中引入了一类次线性算子，Rafeiro 和 Zaighum 在文献[34-35]中定义了极大变指数 Herz 空间 $\dot{K}_{q(\cdot)}^{\alpha(\cdot),p,\theta}(\mathbb{R}^n)$ 和 $K_{q(\cdot)}^{\alpha(\cdot),p,\theta}(\mathbb{R}^n)$ ，并证明这一类次线性算子在极大变指数 Herz 空间中是有界的。Sultan 和 Azmi 等人^[36]定义了极大变指数 Herz-Morrey 空间。

1.3 主要研究内容

受上述工作启发，本学位论文主要研究了向量值次线性算子的交换子 $[b, T]$ 在加权变指数 Herz-Morrey 空间 $M\dot{K}_{q(\cdot),p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),\lambda}(\omega)$ 中的有界性，Riesz 位势算子 I_β 的交换子 $[b, I_\beta]$ 在极大变指数 Herz-Morrey 空间 $M\dot{K}_{\lambda,q(\cdot)}^{\alpha(\cdot),r,\theta}(\mathbb{R}^n)$ 中的有界性，Marcinkiewicz 积分算子 μ_Ω 在极大变指数 Herz-Morrey 空间 $M\dot{K}_{\lambda,q(\cdot)}^{\alpha(\cdot),r,\theta}(\mathbb{R}^n)$ 中的有界性。这些结果进一步丰富了变指数 Herz-Morrey 空间理论。

第二章 向量值次线性算子的交换子在变指数 Herz-Morrey 空间上的加权估计

2.1 引言及主要结果

本章中, 我们考虑满足下面尺寸条件的次线性算子

$$|Tf(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{-n} |f(y)| dy, \quad x \notin \text{supp } f, \quad (2.1)$$

f 是可积且具有紧支集的函数。Soria 和 Weiss^[33]首次考虑了条件(2.1)。调和分析中有许多经典算子满足这个条件, 例如 Calderón-Zygmund 积分算子以及其它一些奇异积分算子^[3-11]。

设 $b \in \text{BMO}(\mathbb{R}^n)$, 由满足条件(2.1)的次线性算子 T 和 b 生成的交换子定义为

$$[b, T] = b(x)Tf(x) - T(bf)(x).$$

本章中定义 $B := \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| < r\}$, $B_k = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 2^k\}$, $R_k = B_k \setminus B_{k-1}$, $\chi_k = \chi_{R_k}$ ($k \in \mathbb{Z}$) 表示 R_k 的特征函数。

设 $p(\cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow [1, \infty)$ 为可测函数, 变指数空间定义为

$$L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \text{ 为 } \mathbb{R}^n \text{ 上的可测函数} : \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right)^{p(x)} dx < \infty, \lambda > 0 \right\}.$$

若赋予下面的 Luxemburg 范数

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right)^{p(x)} dx \leq 1 \right\},$$

则 $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 成为 Banach 空间。给定一个开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $L_{loc}^{p(\cdot)}(\Omega)$ 定义为

$$L_{loc}^{p(\cdot)}(\Omega) = \{ f : f \in L^{p(\cdot)}(K) \text{ 对所有紧支集 } K \subset \Omega \}.$$

设 $p(\cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$, 我们使用以下记号

$$\begin{aligned} p_- &:= \text{ess inf } \{p(x) : x \in \mathbb{R}^n\}, \\ p_+ &:= \text{ess sup } \{p(x) : x \in \mathbb{R}^n\}, \\ \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n) &:= \{p(\cdot) \text{ 为可测函数} : p_- > 0 \text{ 且 } p_+ < \infty\}, \end{aligned}$$

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}^n) := \{p(\cdot) \text{ 为可测函数} : p_- > 1 \text{ 且 } p_+ < \infty\}.$$

若 $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 且 ω 在 $\mathbb{R}^n$ 上是一个非负可测函数，则加权变指数 Lebesgue 空间 $L^{p(\cdot)}(\omega)$ 定义为

$$L^{p(\cdot)}(\omega) := \{f \text{ 为复值的可测函数} : f\omega \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)\}.$$

当赋予范数 $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)} := \|f\omega\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$ 时， $L^{p(\cdot)}(\omega)$ 是 Banach 空间。

定义 2.1.1 设 $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ ，称非负可测函数 $\omega \in A_{p(\cdot)}$ ，如果对所有 $B \subset \mathbb{R}^n$ 有

$$\frac{1}{|B|} \|\omega \chi_B\|_{L^{p(\cdot)}} \|\omega^{-1} \chi_B\|_{L^{p'(\cdot)}} \lesssim 1.$$

变指数 Muckenhoupt 权 $A_{p(\cdot)}$ 首先由 Cruz-Urbe 等^[37]引入。容易看出，若 $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 且 $\omega \in A_{p(\cdot)}$ ，则 $\omega^{-1} \in A_{p(\cdot)}$ 。

设 $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ 。Hardy-Littlewood 极大算子 M 定义为

$$Mf(x) := \sup_{x \in B} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

其中上确界 $\mathbb{R}^n$ 取遍中所有包含 x 的开球 B 。

定义 2.1.2^[38] 设 ω 为非负可测函数。给定一个函数序列 $\{f_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ ，变指数混合序列空间 $l^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})$ 定义为

$$\rho_{l^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(\omega))}(\{f_j\}_j) := \sum_{j \in \mathbb{Z}} \inf \left\{ \lambda_j : \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|f_j(x)\omega(x)|}{\lambda_j^{\frac{1}{q(x)}}} \right)^{p(x)} dx \leq 1 \right\},$$

其中 $\lambda^{\frac{1}{\infty}} = 1$ 。如果 $q^+ < \infty$ 或者 $q(\cdot) \leq p(\cdot)$ ，上式可写为

$$\rho_{l^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(\omega))}(\{f_j\}_j) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left\| |f_j \omega|^{q(\cdot)} \right\|_{L^{q(\cdot)}(\omega)}^{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}}.$$

范数为

$$\| \{f_j\}_j \|_{l^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(w))} := \inf \left\{ \mu > 0 : \rho_{l^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(w))} \left(\left\{ \frac{f_j}{\mu} \right\}_j \right) \leq 1 \right\}.$$

定义 2.1.3^[11] 设 $p(\cdot), q(\cdot) \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in [0, \infty)$ 且 $\alpha(\cdot)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有界实值可测函数。齐次加权变指数 Herz-Morrey 空间定义为

$$MK_{q(\cdot), p(\cdot)}^{\alpha(\cdot), \lambda}(\omega) := \left\{ f \in L_{loc}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \omega) : \|f\|_{MK_{q(\cdot), p(\cdot)}^{\alpha(\cdot), \lambda}(\omega)} < \infty \right\},$$

其中

$$\|f\|_{MK_{q(\cdot), p(\cdot)}^{\alpha(\cdot), \lambda}(\omega)} := \sup_{L \in \mathbb{Z}} 2^{-L\lambda} \left\| (2^{\alpha(\cdot)k} f \chi_k)_{k \leq L} \right\|_{l^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(\omega))}.$$

在文献[11]的基础上，本章研究向量值次线性算子 T 与 BMO 函数 b 生成的交换子 $[b, T]$ 在加权变指数 Herz-Morrey 空间 $MK_{q(\cdot), p(\cdot)}^{\alpha(\cdot), \lambda}(\omega)$ 上的有界性。主要结果如下：

定理 2.1.1 设 $r \in (1, \infty)$, $\alpha(\cdot), q(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{P}_0^{log}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{P}_\infty^{log}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$, $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$, $\omega \in A_{p(\cdot)}$, $\lambda - n\delta_1 < \alpha(0)$, $\alpha_\infty < n\delta_2$, 其中 $\delta_1, \delta_2 \in (0, 1)$ 是引理 2.2.5 中的常数。若 $b \in \text{BMO}(\mathbb{R}^n)$, 次线性算子 T 满足条件(3.1)且交换子 $[b, T]$ 满足向量值不等式

$$\left\| \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} |[b, T]f_j|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^{p(\cdot)}(w)} \leq C \|b\|_{\text{BMO}} \left\| \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} |f_j|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^{p(\cdot)}(w)}.$$

对于 $\mathbb{R}^n$ 上所有局部可积函数序列 $\{f_j\}_{j=1}^\infty$, 则

$$\left\| \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} |[b, T]f_j|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{MK_{q(\cdot), p(\cdot)}^{\alpha(\cdot), \lambda}(\omega)} \leq C \|b\|_{\text{BMO}} \left\| \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} |f_j|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{MK_{q(\cdot), p(\cdot)}^{\alpha(\cdot), \lambda}(\omega)}.$$

2.2 主要引理

引理 2.2.1^[37] 设 $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$, $\omega \in A_{p(\cdot)}$, 则对每个 $f \in L^{p(\cdot)}(\omega)$ 有

$$\|(Mf)\omega\|_{L^{p(\cdot)}} \leq C \|f\omega\|_{L^{p(\cdot)}}.$$

引理 2.2.2^[11] 设 $p(\cdot) \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in [0, \infty)$, ω 是一个权函数且 $\alpha(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 。

若 $\alpha(\cdot), q(\cdot) \in \mathcal{P}_0^{\log}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{P}_\infty^{\log}(\mathbb{R}^n)$, 则对于任何 $f \in L_{loc}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \omega)$ 有

$$\|f\|_{\dot{MK}_{q(\cdot), p(\cdot)}^{\alpha(\cdot), \lambda}(\omega)} \approx \max \left\{ \sup_{L \leq 0, L \in \mathbb{Z}} 2^{-L\lambda} \|2^{k\alpha(0)}(f\chi_k)_{k \leq L}\|_{l^{q_0}(L^{p(\cdot)}(\omega))}, \right. \\ \left. \sup_{L > 0, L \in \mathbb{Z}} \left[2^{-L\lambda} \|2^{k\alpha(0)}(f\chi_k)_{k < 0}\|_{l^{q_0}(L^{p(\cdot)}(\omega))} + 2^{-L\lambda} \|2^{k\alpha_\infty}(f\chi_k)_{k=0}^L\|_{l^{q_\infty}(L^{p(\cdot)}(\omega))} \right] \right\},$$

此处及以后 $q_0 := q(0)$ 。

一个局部可积函数 b 被称为属于 $BMO(\mathbb{R}^n)$ 空间, 如果它满足

$$\|b\|_{BMO} := \sup_B \frac{1}{|B|} \int_B |b(y) - b_B| dy < \infty,$$

其中表示中 b_B 表示 b 在 B 上的平均, 即 $b_B := \frac{1}{|B|} \int_B b(t) dt$ 。

引理 2.2.3^[39] 设 $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$, $\omega \in A_{p(\cdot)}$, $k > j$

($k, j \in \mathbb{N}$), 则

$$\sup_{B \subset \mathbb{R}^n} \frac{1}{\|\chi_B\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}} \|(b - b_B)\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)} \approx \|b\|_{BMO},$$

$$\|(b - b_{B_l})\chi_{B_k}\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)} \leq C(k - j) \|b\|_{BMO} \|\chi_{B_k}\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)}.$$

引理 2.2.4^[40] 设 X 为 Banach 函数空间, 若 $f \in X$ 且 $g \in X'$ (X' 是 X 的对偶空间), 则有以下广义 Hölder 不等式成立

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_X \|g\|_{X'}.$$

引理 2.2.5^[41] 若 $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$ 且 $\omega \in A_{p(\cdot)}$, 则对 $\mathbb{R}^n$ 中的所有球 B 和所有可测子集 $E \subset B$, 有

$$\frac{\|\chi_E\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)}}{\|\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)}} \leq C \left(\frac{|E|}{|B|} \right)^{\delta_1}, \quad \frac{\|\chi_E\|_{L^{p'(\cdot)}(\omega^{-1})}}{\|\chi_B\|_{L^{p'(\cdot)}(\omega^{-1})}} \leq C \left(\frac{|E|}{|B|} \right)^{\delta_2},$$

其中 δ_1, δ_2 为常数且 $0 < \delta_1, \delta_2 < 1$ 。

引理 2.2.6 设 $0 < p < \infty, \varepsilon > 0, k > j$ ($k, j \in \mathbb{Z}$), 则对于非负序列 $\{a_j\}_{j=-\infty}^\infty$ 有

$$\left\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} (k-j) 2^{-|k-j|\varepsilon} a_k \right)^p \right\}^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

证：当 $0 < p < 1$ 且 $k > j (k, j \in \mathbb{Z})$ 时，我们有

$$\left\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} (k-j) 2^{-|k-j|\varepsilon} a_k \right)^p \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^p \sum_{j=-\infty}^{\infty} (k-j)^p 2^{-|k-j|\varepsilon p} \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

当 $1 < p < \infty$ 时，由 Hölder 不等式，我们有

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} (k-j) 2^{-|k-j|\varepsilon} a_k \right)^p \right\}^{\frac{1}{p}} &\leq \left\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{\frac{-|k-j|\varepsilon p}{2}} a_k^p \right) \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} (k-j)^{p'} 2^{\frac{-|k-j|\varepsilon p'}{2}} \right)^{\frac{p}{p'}} \right\}^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^p \sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{\frac{-|k-j|\varepsilon p}{2}} \right\}^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

2.3 主要定理的证明

定理 2.1.1 的证明：由于有界紧支集函数集合在 $L^{p(\cdot)}(\omega)$ 中是稠密的，故我们只考虑有界紧支集函数。设 $\{f_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 是一个有界紧支集函数序列，我们将其分解为

$$f_j = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_j \chi_l = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_j^l.$$

由引理 2.2.2，我们有

$$\begin{aligned} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |[b, T] f_j|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{\dot{MK}_{q(\cdot), p(\cdot)}^{\alpha(\cdot), \lambda}(\omega)} &\approx \max \left\{ \sup_{L \leq 0, L \in \mathbb{Z}} 2^{-L\lambda} \left\| \left(2^{k\alpha(0)} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |[b, T] f_j|^r \right)^{\frac{1}{r}} \chi_k \right) \right\|_{l^{q_0}(L^{p(\cdot)}(w))}, \right. \\ &\quad \left. \sup_{L > 0, L \in \mathbb{Z}} \left[2^{-L\lambda} \left\| \left(2^{k\alpha(0)} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |[b, T] f_j|^r \right)^{\frac{1}{r}} \chi_k \right) \right\|_{k < 0} \right]_{l^{q_0}(L^{p(\cdot)}(w))} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2^{-L\lambda} \left\| \left(2^{k\alpha_\infty} \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} |[b, T]f_j|^r \right)^{\frac{1}{r}} \chi_k \right)_{k=0}^L \right\|_{l^{q_\infty}(L^{p(\cdot)}(w))} \\
 & := \max \left\{ U, \sup_{L>0, L \in \mathbb{Z}} \{V, W\} \right\},
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 U &:= \sup_{L \leq 0, L \in \mathbb{Z}} 2^{-L\lambda} \left\| \left(2^{k\alpha(0)} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |[b, T]f_j|^r \right)^{\frac{1}{r}} \chi_k \right)_{k \leq L} \right\|_{l^{q_0}(L^{p(\cdot)}(w))}, \\
 V &:= 2^{-L\lambda} \left\| \left(2^{k\alpha(0)} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |[b, T]f_j|^r \right)^{\frac{1}{r}} \chi_k \right)_{k < 0} \right\|_{l^{q_0}(L^{p(\cdot)}(w))}, \quad L > 0, \\
 W &:= 2^{-L\lambda} \left\| \left(2^{k\alpha_\infty} \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} |[b, T]f_j|^r \right)^{\frac{1}{r}} \chi_k \right)_{k=0}^L \right\|_{l^{q_\infty}(L^{p(\cdot)}(w))} \right\}, \quad L > 0.
 \end{aligned}$$

由于 W 的估计与 U 的估计相似, 故我们只需证明

$$U, V \leq C \|b\|_{\text{BMO}} \left\| \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} |f_j|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{\dot{MK}_{q(\cdot), p(\cdot)}^{\alpha(\cdot), \lambda}(\omega)}.$$

对于 U , 由 Minkowski 不等式, 我们有

$$\begin{aligned}
 U &= \sup_{L \leq 0, L \in \mathbb{Z}} 2^{-L\lambda} \left\| \left(2^{k\alpha(0)} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{l=-\infty}^{\infty} [b, T]f_j^l \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} \chi_k \right)_{k \leq L} \right\|_{l^{q_0}(L^{p(\cdot)}(w))} \\
 &\leq \sup_{L \leq 0, L \in \mathbb{Z}} 2^{-L\lambda} \left\{ \sum_{k=-\infty}^L 2^{k\alpha(0)q(0)} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{l=-\infty}^{\infty} [b, T]f_j^l \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} \chi_k \right\|_{L^{p(\cdot)}(w)}^{q(0)} \right\}^{\frac{1}{q(0)}} \\
 &\leq C \sup_{L \leq 0, L \in \mathbb{Z}} 2^{-L\lambda} \left\{ \sum_{k=-\infty}^L 2^{k\alpha(0)q(0)} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{l=-\infty}^{k-2} [b, T]f_j^l \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} \chi_k \right\|_{L^{p(\cdot)}(w)}^{q(0)} \right\}^{\frac{1}{q(0)}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + C \sup_{L \leq 0, L \in \mathbb{Z}} 2^{-L\lambda} \left\{ \sum_{k=-\infty}^L 2^{k\alpha(0)q(0)} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{l=k-1}^{k+1} [b, T] f_j^l \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} \chi_k \right\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)}^{q(0)} \right\}^{\frac{1}{q(0)}} \\
 & + C \sup_{L \leq 0, L \in \mathbb{Z}} 2^{-L\lambda} \left\{ \sum_{k=-\infty}^L 2^{k\alpha(0)q(0)} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{l=k+2}^{\infty} [b, T] f_j^l \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} \chi_k \right\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)}^{q(0)} \right\}^{\frac{1}{q(0)}} \\
 & := U_1 + U_2 + U_3.
 \end{aligned}$$

先估计 U_1 , 当 $l \leq k-2, x \in R_k, k \in \mathbb{Z}$ 时, 由 Minkowski 不等式, 我们有

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{l=-\infty}^{k-2} [b, T] f_j^l \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} & \leq C \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{l=-\infty}^{k-2} \int_{R_l} |b(x) - b(y)| |x - y|^{-n} |f_j(y)| dy \right)^r \right\}^{\frac{1}{r}} \\
 & \leq C \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{l=-\infty}^{k-2} 2^{-kn} \int_{R_l} |b(x) - b(y)| |f_j(y)| dy \right)^r \right\}^{\frac{1}{r}} \\
 & \leq C \sum_{l=-\infty}^{k-2} 2^{-kn} \int_{R_l} |b(x) - b(y)| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j(y)|^r \right)^{\frac{1}{r}} dy \\
 & \leq C \sum_{l=-\infty}^{k-2} 2^{-kn} \int_{R_l} (|b(x) - b_{B_l}| + |b_{B_l} - b(y)|) \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j(y)|^r \right)^{\frac{1}{r}} dy \quad (2.2) \\
 & \leq C \sum_{l=-\infty}^{k-2} 2^{-kn} \left\{ \int_{R_l} |b(x) - b_{B_l}| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j(y)|^r \right)^{\frac{1}{r}} dy \right. \\
 & \quad \left. + \int_{R_l} |b_{B_l} - b(y)| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j(y)|^r \right)^{\frac{1}{r}} dy \right\}.
 \end{aligned}$$

为方便起见, 我们定义 $F = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j(y)|^r \right)^{\frac{1}{r}}$, 则由式(2.2), 定义 2.1, 引理 2.2.3-

2.2.5, 我们有

$$\begin{aligned}
 & \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{l=-\infty}^{k-2} [b, T] f_j^l \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} \chi_k \right\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)} \\
 & \leq C \left\| \chi_k \sum_{l=-\infty}^{k-2} 2^{-kn} \left(\int_{R_l} |b(x) - b_{B_l}| F dy + \int_{R_l} |b_{B_l} - b(y)| F dy \right) \right\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq C \sum_{l=-\infty}^{k-2} 2^{-kn} \|F \chi_l\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)} \left\{ \| (b(x) - b_{B_l}) \chi_k \|_{L^{p(\cdot)}(\omega)} \| \chi_l \|_{L^{p'(\cdot)}(\omega)} \right. \\
 &\quad \left. + \| (b_{B_l} - b(y)) \chi_l \|_{L^{p'(\cdot)}(\omega)} \| \chi_k \|_{L^{p(\cdot)}(\omega)} \right\} \\
 &\leq C \sum_{l=-\infty}^{k-2} 2^{-kn} \|F \chi_l\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)} \|b\|_{BMO} \left\{ (k-l) \| \chi_{B_k} \|_{L^{p(\cdot)}(\omega)} \| \chi_l \|_{L^{p'(\cdot)}(\omega)} \right. \\
 &\quad \left. + \| \chi_{B_l} \|_{L^{p'(\cdot)}(\omega)} \| \chi_k \|_{L^{p(\cdot)}(\omega)} \right\} \\
 &\leq C \sum_{l=-\infty}^{k-2} 2^{-kn} \|F \chi_l\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)} \|b\|_{BMO} (k-l) \| \chi_{B_k} \|_{L^{p(\cdot)}(\omega)} \| \chi_{B_k} \|_{L^{p'(\cdot)}(\omega)} \frac{\| \chi_{B_l} \|_{L^{p'(\cdot)}(\omega)}}{\| \chi_{B_k} \|_{L^{p'(\cdot)}(\omega)}} \\
 &\leq C \|b\|_{BMO} \sum_{l=-\infty}^{k-2} (k-l) 2^{(l-k)n\delta_2} \|F \chi_l\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)}.
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

由式(2.3)和引理 2.2.6, 我们有

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \sup_{L \leq 0, L \in \mathbb{Z}} 2^{-L\lambda} \left\{ \sum_{k=-\infty}^L 2^{k\alpha(0)q(0)} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{l=-\infty}^{k-2} [b, T] f_j^l \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} \chi_k \right\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)}^{q(0)} \right\}^{\frac{1}{q(0)}} \\
 &\leq C \|b\|_{BMO} \sup_{L \leq 0, L \in \mathbb{Z}} 2^{-L\lambda} \left\{ \sum_{k=-\infty}^L 2^{k\alpha(0)q(0)} \left(\sum_{l=-\infty}^{k-2} (k-l) 2^{(l-k)n\delta_2} \|F \chi_l\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)} \right)^{q(0)} \right\}^{\frac{1}{q(0)}} \\
 &\leq C \|b\|_{BMO} \sup_{L \leq 0, L \in \mathbb{Z}} 2^{-L\lambda} \left\{ \sum_{k=-\infty}^L \left(\sum_{l=-\infty}^{k-2} 2^{l\alpha(0)} \|F \chi_l\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)} (k-l) 2^{(l-k)(n\delta_2 - \alpha(0))} \right)^{q(0)} \right\}^{\frac{1}{q(0)}} \\
 &\leq C \|b\|_{BMO} \sup_{L \leq 0, L \in \mathbb{Z}} 2^{-L\lambda} \left\{ \sum_{l=-\infty}^{L-2} 2^{l\alpha(0)q(0)} \|F \chi_l\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)}^{q(0)} \right\}^{\frac{1}{q(0)}} \\
 &\leq C \|b\|_{BMO} \|F\|_{M\dot{K}_{q(\cdot), p(\cdot)}^{\alpha(\cdot), \lambda}(\omega)},
 \end{aligned}$$

其中 $2^{(l-k)(n\delta_2 - \alpha(0))} = 2^{-|k-l|\varepsilon}$, $\varepsilon = n\delta_2 - \alpha(0) > 0$ 。

对于 U_2 , 当 $k-1 \leq l \leq k+1$, $x \in R_k$, $k \in \mathbb{Z}$, 利用 $[b, T]$ 在 $L^{p(\cdot)}(\omega)$ 上的有界性和 Minkowski 不等式, 我们有

$$\begin{aligned}
 &\left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{l=k-1}^{k+1} [b, T] f_j^l \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} \chi_k \right\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)} \leq C \left\| \left(\sum_{l=k-1}^{k+1} \left| \sum_{j=1}^{\infty} [b, T] f_j^l \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} \chi_k \right\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)} \\
 &\leq C \sum_{l=k-1}^{k+1} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} [b, T] f_j^l \right)^{\frac{1}{r}} \chi_l \right\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)} \\
 &\leq C \|b\|_{BMO} \sum_{l=k-1}^{k+1} \|F \chi_l\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)}.
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}
 U_2 &= \sup_{L \leq 0, L \in \mathbb{Z}} 2^{-L\lambda} \left\{ \sum_{k=-\infty}^L 2^{k\alpha(0)q(0)} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{l=k-1}^{k+1} [b, T] f_j^l \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} \chi_k \right\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)}^{q(0)} \right\}^{\frac{1}{q(0)}} \\
 &\leq C \|b\|_{\text{BMO}} \sup_{L \leq 0, L \in \mathbb{Z}} 2^{-L\lambda} \left\{ \sum_{k=-\infty}^L 2^{k\alpha(0)q(0)} \sum_{l=k-1}^{k+1} \|F \chi_l\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)}^{q(0)} \right\}^{\frac{1}{q(0)}} \\
 &\leq C \|b\|_{\text{BMO}} \sup_{L \leq 0, L \in \mathbb{Z}} 2^{-L\lambda} \left\{ \sum_{l=-\infty}^{L+1} \sum_{k=-\infty}^{l-1} 2^{k\alpha(0)q(0)} \|F \chi_l\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)}^{q(0)} \right\}^{\frac{1}{q(0)}} \\
 &\leq C \|b\|_{\text{BMO}} \sup_{L \leq 0, L \in \mathbb{Z}} 2^{-L\lambda} \left\{ \sum_{l=-\infty}^{L+1} 2^{k\alpha(0)q(0)} \|F \chi_l\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)}^{q(0)} \right\}^{\frac{1}{q(0)}} \\
 &\leq C \|b\|_{\text{BMO}} \|F\|_{M\dot{K}_{q(\cdot), p(\cdot)}^{\alpha(\cdot), \lambda}(\omega)}.
 \end{aligned}$$

下面估计 U_3 ，当 $l \geq k+2$, $x \in R_k, k \in \mathbb{Z}$ ，根据式(2.2)和式(2.3)，我们有

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{l=k+2}^{\infty} [b, T] f_j^l \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} \chi_k \right\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)} \leq C \|b\|_{\text{BMO}} \sum_{l=k+2}^{\infty} (l-k) 2^{(k-l)n\delta_1} \|F \chi_l\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)}. \quad (2.5)$$

从而

$$\begin{aligned}
 U_3 &= \sup_{L \leq 0, L \in \mathbb{Z}} 2^{-L\lambda} \left\{ \sum_{k=-\infty}^L 2^{k\alpha(0)q(0)} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{l=k+2}^{\infty} [b, T] f_j^l \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} \chi_k \right\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)}^{q(0)} \right\}^{\frac{1}{q(0)}} \\
 &\leq C \|b\|_{\text{BMO}} \sup_{L \leq 0, L \in \mathbb{Z}} 2^{-L\lambda} \left\{ \sum_{k=-\infty}^L 2^{k\alpha(0)q(0)} \left(\sum_{l=k+2}^L (l-k) 2^{(k-l)n\delta_1} \|F \chi_l\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)} \right)^{q(0)} \right\}^{\frac{1}{q(0)}} \\
 &\quad + C \|b\|_{\text{BMO}} \sup_{L \leq 0, L \in \mathbb{Z}} 2^{-L\lambda} \left\{ \sum_{k=-\infty}^L 2^{k\alpha(0)q(0)} \left(\sum_{l=L+1}^0 (l-k) 2^{(k-l)n\delta_1} \|F \chi_l\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)} \right)^{q(0)} \right\}^{\frac{1}{q(0)}} \\
 &\quad + C \|b\|_{\text{BMO}} \sup_{L \leq 0, L \in \mathbb{Z}} 2^{-L\lambda} \left\{ \sum_{k=-\infty}^L 2^{k\alpha(0)q(0)} \left(\sum_{l=1}^{\infty} (l-k) 2^{(k-l)n\delta_1} \|F \chi_l\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)} \right)^{q(0)} \right\}^{\frac{1}{q(0)}} \\
 &:= U_{31} + U_{32} + U_{33}.
 \end{aligned}$$

对于 U_{31} ，利用引理 2.2.6，我们有

$$\begin{aligned}
 U_{31} &= C \|b\|_{\text{BMO}} \sup_{L \leq 0, L \in \mathbb{Z}} 2^{-L\lambda} \left\{ \sum_{k=-\infty}^L 2^{k\alpha(0)q(0)} \left(\sum_{l=k+2}^L (l-k) 2^{(k-l)n\delta_1} \|F\chi_l\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)} \right)^{q(0)} \right\}^{\frac{1}{q(0)}} \\
 &\leq C \|b\|_{\text{BMO}} \sup_{L \leq 0, L \in \mathbb{Z}} 2^{-L\lambda} \left\{ \sum_{k=-\infty}^L \left(\sum_{l=k+2}^L 2^{l\alpha(0)} (l-k) 2^{(k-l)(n\delta_1+\alpha(0))} \|F\chi_l\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)} \right)^{q(0)} \right\}^{\frac{1}{q(0)}} \\
 &\leq C \|b\|_{\text{BMO}} \sup_{L \leq 0, L \in \mathbb{Z}} 2^{-L\lambda} \left\{ \sum_{l=-\infty}^{L+2} 2^{l\alpha(0)q(0)} (l-k) \|F\chi_l\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)}^{q(0)} \right\}^{\frac{1}{q(0)}} \\
 &\leq C \|b\|_{\text{BMO}} \|F\|_{\dot{MK}_{q(\cdot),p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),\lambda}(\omega)},
 \end{aligned}$$

其中 $2^{(k-l)(n\delta_1+\alpha(0))} = 2^{-|k-l|\varepsilon}$, $\varepsilon = n\delta_1 + \alpha(0) > 0$ 。

对于 U_{32} ，当 $n\delta_1 + \alpha(0) - \lambda > 0$ 时，我们有

$$\begin{aligned}
 U_{32} &= C \|b\|_{\text{BMO}} \sup_{L \leq 0, L \in \mathbb{Z}} 2^{-L\lambda} \left\{ \sum_{k=-\infty}^L 2^{k\alpha(0)q(0)} \left(\sum_{l=L+1}^0 (l-k) 2^{(k-l)n\delta_1} \|F\chi_l\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)} \right)^{q(0)} \right\}^{\frac{1}{q(0)}} \\
 &\leq C \|b\|_{\text{BMO}} \sup_{L \leq 0, L \in \mathbb{Z}} 2^{-L\lambda} \left\{ \sum_{k=-\infty}^L \left(2^{k(n\delta_1+\alpha(0))} \sum_{l=L+1}^0 2^{l\alpha(0)} \|F\chi_l\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)} (l-k) 2^{-l(n\delta_1+\alpha(0))} \right)^{q(0)} \right\}^{\frac{1}{q(0)}} \\
 &\leq C \|b\|_{\text{BMO}} \sup_{L \leq 0, L \in \mathbb{Z}} \sup_{l \leq 0} 2^{-l\lambda} 2^{l\alpha(0)} \|F\chi_l\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)} 2^{-L\lambda} \left\{ \sum_{k=-\infty}^L \left(2^{k(n\delta_1+\alpha(0))} \sum_{l=L+1}^0 (l-k) 2^{-l(n\delta_1+\alpha(0)-\lambda)} \right)^{q(0)} \right\}^{\frac{1}{q(0)}} \\
 &\leq C \|b\|_{\text{BMO}} \|F\|_{\dot{MK}_{q(\cdot),p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),\lambda}(\omega)} \sup_{L \leq 0, L \in \mathbb{Z}} 2^{L(-n\delta_1-\alpha(0))} \left(\sum_{k=-\infty}^L 2^{k(n\delta_1+\alpha(0))q(0)} \right)^{\frac{1}{q(0)}} \\
 &\leq C \|b\|_{\text{BMO}} \|F\|_{\dot{MK}_{q(\cdot),p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),\lambda}(\omega)}.
 \end{aligned}$$

对于 U_{33} ，当 $n\delta_1 + \alpha(0) - \lambda > 0$ 时，有

$$\begin{aligned}
 U_{33} &= C \|b\|_{\text{BMO}} \sup_{L \leq 0, L \in \mathbb{Z}} 2^{-L\lambda} \left\{ \sum_{k=-\infty}^L 2^{k\alpha(0)q(0)} \left(\sum_{l=1}^{\infty} (l-k) 2^{(k-l)n\delta_1} \|F\chi_l\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)} \right)^{q(0)} \right\}^{\frac{1}{q(0)}} \\
 &\leq C \|b\|_{\text{BMO}} \sup_{L \leq 0, L \in \mathbb{Z}} 2^{-L\lambda} \left\{ \sum_{k=-\infty}^L \left(2^{k(n\delta_1+\alpha(0))} \sum_{l=1}^{\infty} 2^{l\alpha_{\infty}} \|F\chi_l\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)} (l-k) 2^{-l(n\delta_1+\alpha_{\infty})} \right)^{q(0)} \right\}^{\frac{1}{q(0)}} \\
 &\leq C \|b\|_{\text{BMO}} \sup_{L \leq 0, L \in \mathbb{Z}} \sup_{l \geq 1} 2^{-l\lambda} 2^{l\alpha_{\infty}} \|F\chi_l\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)} 2^{-L\lambda} \left\{ \sum_{k=-\infty}^L \left(2^{k(n\delta_1+\alpha(0))} \sum_{l=1}^{\infty} 2^{l\alpha_{\infty}} (l-k) 2^{-l(n\delta_1+\alpha_{\infty}-\lambda)} \right)^{q(0)} \right\}^{\frac{1}{q(0)}} \\
 &\leq C \|b\|_{\text{BMO}} \|F\|_{\dot{MK}_{q(\cdot),p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),\lambda}(\omega)} \sup_{L \leq 0, L \in \mathbb{Z}} 2^{-L\lambda} \left\{ \sum_{k=-\infty}^L 2^{k(n\delta_1+\alpha(0))q(0)} \right\}^{\frac{1}{q(0)}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq C \|b\|_{\text{BMO}} \|F\|_{\dot{MK}_{q(\cdot),p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),\lambda}(\omega)} \sup_{L \leq 0, L \in \mathbb{Z}} 2^{L(-\lambda+n\delta_1+\alpha(0))} \\
 &\leq C \|b\|_{\text{BMO}} \|F\|_{\dot{MK}_{q(\cdot),p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),\lambda}(\omega)}.
 \end{aligned}$$

结合 U_1 , U_2 , U_3 的估计, 我们有

$$U \leq C \|b\|_{\text{BMO}} \left\| \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} |f_j|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{\dot{MK}_{q(\cdot),p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),\lambda}(\omega)}.$$

接下来估计 V , 利用 Minkowski 不等式, 我们有

$$\begin{aligned}
 V &= 2^{-L\lambda} \left\| \left(2^{k\alpha(0)} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |[b, T]f_j|^r \right)^{\frac{1}{r}} \chi_k \right) \right\|_{L^{q_0}(\mathcal{L}^{p(\cdot)}(\omega))} \leq C 2^{-L\lambda} \left\{ \sum_{k=0}^L 2^{k\alpha_{\infty}q_{\infty}} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} |[b, T]f_j^l|^r \right)^{\frac{1}{r}} \chi_k \right\| \right\}^{\frac{1}{q_{\infty}}} \\
 &\leq C 2^{-L\lambda} \left\{ \sum_{k=0}^L 2^{k\alpha_{\infty}q_{\infty}} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{k-2} |[b, T]f_j^l|^r \right)^{\frac{1}{r}} \chi_k \right\| \right\}^{\frac{1}{q_{\infty}}} + C 2^{-L\lambda} \left\{ \sum_{k=0}^L 2^{k\alpha_{\infty}q_{\infty}} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=k-1}^{k+1} |[b, T]f_j^l|^r \right)^{\frac{1}{r}} \chi_k \right\| \right\}^{\frac{1}{q_{\infty}}} \\
 &\quad + C 2^{-L\lambda} \left\{ \sum_{k=0}^L 2^{k\alpha_{\infty}q_{\infty}} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=k+2}^{\infty} |[b, T]f_j^l|^r \right)^{\frac{1}{r}} \chi_k \right\| \right\}^{\frac{1}{q_{\infty}}} \\
 &:= V_1 + V_2 + V_3.
 \end{aligned}$$

对于 V_1 , 由式(2.2)和式(2.3), 我们有

$$\begin{aligned}
 V_1 &= 2^{-L\lambda} \left\{ \sum_{k=0}^L 2^{k\alpha_{\infty}q_{\infty}} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{k-2} |[b, T]f_j^l|^r \right)^{\frac{1}{r}} \chi_k \right\| \right\}^{\frac{1}{q_{\infty}}} \\
 &\leq C \|b\|_{\text{BMO}} 2^{-L\lambda} \left\{ \sum_{k=0}^L 2^{k\alpha_{\infty}q_{\infty}} \left(\sum_{l=-\infty}^{k-2} (k-l) 2^{(l-k)n\delta_2} \|F\chi_l\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)} \right)^{q_{\infty}} \right\}^{\frac{1}{q_{\infty}}} \\
 &\leq C \|b\|_{\text{BMO}} 2^{-L\lambda} \left\{ \sum_{k=0}^L 2^{k\alpha_{\infty}q_{\infty}} \left(\sum_{l=-\infty}^{-1} (k-l) 2^{(l-k)n\delta_2} \|F\chi_l\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)} \right)^{q_{\infty}} \right\}^{\frac{1}{q_{\infty}}} \\
 &\quad + C \|b\|_{\text{BMO}} 2^{-L\lambda} \left\{ \sum_{k=0}^L 2^{k\alpha_{\infty}q_{\infty}} \left(\sum_{l=0}^{k-2} (k-l) 2^{(l-k)n\delta_2} \|F\chi_l\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)} \right)^{q_{\infty}} \right\}^{\frac{1}{q_{\infty}}} \\
 &:= V_{11} + V_{12}.
 \end{aligned}$$

注意到若 $l < 0$ ，由引理 2.2.2，我们有

$$\begin{aligned}
 \|F\chi_l\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)} &= 2^{-l\alpha(0)} \left(2^{l\alpha(0)q(0)} \|F\chi_l\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)}^{q(0)} \right)^{\frac{1}{q(0)}} \\
 &\lesssim 2^{-l\alpha(0)} \left(\sum_{t=-\infty}^l 2^{t\alpha(0)q(0)} \|F\chi_l\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)}^{q(0)} \right)^{\frac{1}{q(0)}} \\
 &\lesssim 2^{l(\lambda-\alpha(0))} 2^{-l\lambda} \left(\sum_{t=-\infty}^l \|2^{t\alpha(0)} F\chi_l\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)}^{q(0)} \right)^{\frac{1}{q(0)}} \\
 &\lesssim 2^{l(\lambda-\alpha(0))} \|F\|_{\dot{MK}_{q(\cdot),p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),\lambda}(\omega)}.
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

对于 V_{11} ，若 $q_\infty > 1$ ，由 $n\delta_2 - \alpha(0) > 0$ 和 $n\delta_2 - \alpha_\infty > 0$ ，利用 Minkowski 不等式及式(2.6)，我们有

$$\begin{aligned}
 V_{11} &= C \|b\|_{\text{BMO}} 2^{-L\lambda} \left\{ \sum_{k=0}^L 2^{k\alpha_\infty q_\infty} \left(\sum_{l=-\infty}^{-1} (k-l) 2^{(l-k)n\delta_2} \|F\chi_l\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)} \right)^{q_\infty} \right\}^{\frac{1}{q_\infty}} \\
 &\lesssim 2^{-L\lambda} \sum_{k=0}^L \left(\sum_{l=-\infty}^{-1} 2^{k\alpha_\infty q_\infty} (k-l) 2^{(l-k)n\delta_2 q_\infty} \|F\chi_l\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)}^{q_\infty} \right)^{\frac{1}{q_\infty}} \\
 &\lesssim 2^{-L\lambda} \sum_{l=-\infty}^{-1} 2^{ln\delta_2} \|F\chi_l\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)} \left(\sum_{k=0}^L (k-l) 2^{-k(n\delta_2 - \alpha_\infty)q_\infty} \right)^{\frac{1}{q_\infty}} \\
 &\lesssim 2^{-L\lambda} \sum_{l=-\infty}^{-1} 2^{ln\delta_2} 2^{l(\lambda-\alpha(0))} \|F\|_{\dot{MK}_{q(\cdot),p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),\lambda}(\omega)} \\
 &\lesssim \|F\|_{\dot{MK}_{q(\cdot),p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),\lambda}(\omega)} 2^{-L\lambda} \left(\sum_{l=-\infty}^{-1} 2^{l(\lambda+n\delta_2-\alpha(0))} \right) \\
 &\lesssim \|F\|_{\dot{MK}_{q(\cdot),p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),\lambda}(\omega)}.
 \end{aligned}$$

若 $q_\infty < 1$ ，由 $n\delta_2 - \alpha(0) > 0$ ， $n\delta_2 - \alpha_\infty > 0$ 及式(2.5)，我们有

$$\begin{aligned}
 V_{11} &\leq C \|b\|_{\text{BMO}} 2^{-L\lambda} \left\{ \sum_{k=0}^L 2^{k\alpha_\infty q_\infty} \sum_{l=-\infty}^{-1} \|F\chi_l\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)}^{q_\infty} (k-l)^{q_\infty} 2^{(l-k)n\delta_2 q_\infty} \right\}^{\frac{1}{q_\infty}} \\
 &= C \|b\|_{\text{BMO}} 2^{-L\lambda} \left\{ \sum_{l=-\infty}^{-1} 2^{l\alpha_\infty q_\infty} \|F\chi_l\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)}^{q_\infty} \sum_{k=0}^L (k-l)^{q_\infty} 2^{-k(n\delta_2 - \alpha_\infty)q_\infty} \right\}^{\frac{1}{q_\infty}} \\
 &\leq C \|b\|_{\text{BMO}} 2^{-L\lambda} \left(\sum_{l=-\infty}^{-1} 2^{l\alpha_\infty q_\infty} \|F\chi_l\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)}^{q_\infty} \right)^{\frac{1}{q_\infty}} \\
 &\leq C \|b\|_{\text{BMO}} \|F\|_{\dot{MK}_{q(\cdot),p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),\lambda}(\omega)} 2^{-L\lambda} \left(\sum_{l=-\infty}^{-1} 2^{l(\lambda+n\delta_2-\alpha(0))q_\infty} \right)^{\frac{1}{q_\infty}}
 \end{aligned}$$

$$\leq C \|b\|_{\text{BMO}} \|F\|_{M\dot{K}_{q(\cdot),p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),\lambda}(\omega)}.$$

对于 V_{12} ，由 $n\delta_2 - \alpha_\infty > 0$ 和引理 2.2.6，我们有

$$\begin{aligned} V_{12} &= C \|b\|_{\text{BMO}} 2^{-L\lambda} \left\{ \sum_{k=0}^L 2^{k\alpha_\infty q_\infty} \left(\sum_{l=0}^{k-2} (k-l) 2^{(l-k)n\delta_2} \|F \chi_l\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)} \right)^{q_\infty} \right\}^{\frac{1}{q_\infty}} \\ &= C \|b\|_{\text{BMO}} 2^{-L\lambda} \left\{ \sum_{k=0}^L \left(\sum_{l=0}^{k-2} 2^{l\alpha_\infty} \|F \chi_l\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)} (k-l) 2^{(l-k)(n\delta_2 - \alpha_\infty)} \right)^{q_\infty} \right\}^{\frac{1}{q_\infty}} \\ &\leq C \|b\|_{\text{BMO}} 2^{-L\lambda} \left\{ \sum_{l=0}^{k-2} 2^{l\alpha_\infty q_\infty} \|F \chi_l\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)}^{q_\infty} \right\}^{\frac{1}{q_\infty}} \\ &\leq C \|b\|_{\text{BMO}} \|F\|_{M\dot{K}_{q(\cdot),p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),\lambda}(\omega)}, \end{aligned}$$

其中 $2^{(k-l)(n\delta_2 - \alpha_\infty)} = 2^{-|k-l|\varepsilon}$, $\varepsilon = n\delta_2 - \alpha_\infty > 0$ 。

对于 V_2 ，由式(2.4)，我们有

$$\begin{aligned} V_2 &= C \|b\|_{\text{BMO}} 2^{-L\lambda} \left\{ \sum_{k=0}^L 2^{k\alpha_\infty q_\infty} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{l=k-1}^{k+1} [b, T] f_j^l \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} \chi_k \right\| \right\}^{\frac{1}{q_\infty}} \\ &\leq C \|b\|_{\text{BMO}} 2^{-L\lambda} \left\{ \sum_{k=0}^L 2^{k\alpha_\infty q_\infty} \sum_{l=k-1}^{k+1} \|F \chi_l\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)}^{q_\infty} \right\}^{\frac{1}{q_\infty}} \\ &\leq C \|b\|_{\text{BMO}} 2^{-L\lambda} \left\{ \sum_{l=-1}^{L+1} \sum_{k=0}^{l-1} 2^{k\alpha_\infty q_\infty} \|F \chi_l\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)}^{q_\infty} \right\}^{\frac{1}{q_\infty}} \\ &\leq C \|b\|_{\text{BMO}} 2^{-L\lambda} \left\{ \sum_{l=-1}^{L+1} 2^{l\alpha_\infty q_\infty} \|F \chi_l\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)}^{q_\infty} \right\}^{\frac{1}{q_\infty}} \\ &\leq C \|b\|_{\text{BMO}} \|F\|_{M\dot{K}_{q(\cdot),p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),\lambda}(\omega)}. \end{aligned}$$

下面估计 V_3 ，由式(2.5)，我们有

$$\begin{aligned} V_3 &\leq C \|b\|_{\text{BMO}} 2^{-L\lambda} \left\{ \sum_{k=0}^L 2^{k\alpha_\infty q_\infty} \left(\sum_{l=k+2}^{\infty} (l-k) 2^{(k-l)n\delta_1} \|F \chi_l\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)} \right)^{q_\infty} \right\}^{\frac{1}{q_\infty}} \\ &\leq C \|b\|_{\text{BMO}} 2^{-L\lambda} \left\{ \sum_{k=0}^L \left(\sum_{l=k+2}^{L+2} (l-k) 2^{k\alpha_\infty} 2^{(k-l)n\delta_1} \|F \chi_l\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)} \right)^{q_\infty} \right\}^{\frac{1}{q_\infty}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + C \|b\|_{\text{BMO}} 2^{-L\lambda} \left\{ \sum_{k=0}^L \left(\sum_{l=L+3}^{\infty} (l-k) 2^{k\alpha_{\infty}} 2^{(k-l)n\delta_1} \|F\chi_l\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)} \right)^{q_{\infty}} \right\}^{\frac{1}{q_{\infty}}} \\
 & := V_{31} + V_{32}.
 \end{aligned}$$

对于 V_{31} ，利用引理 2.2.6，我们有

$$\begin{aligned}
 V_{31} & = C \|b\|_{\text{BMO}} 2^{-L\lambda} \left\{ \sum_{k=0}^L \left(\sum_{l=k+2}^{L+2} (l-k) 2^{k\alpha_{\infty}} 2^{(k-l)n\delta_1} \|F\chi_l\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)} \right)^{q_{\infty}} \right\}^{\frac{1}{q_{\infty}}} \\
 & = C \|b\|_{\text{BMO}} 2^{-L\lambda} \left\{ \sum_{k=0}^L \left(\sum_{l=k+2}^{L+2} (l-k) 2^{l\alpha_{\infty}} 2^{(k-l)(n\delta_1+\alpha_{\infty})} \|F\chi_l\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)} \right)^{q_{\infty}} \right\}^{\frac{1}{q_{\infty}}} \\
 & \leq C \|b\|_{\text{BMO}} 2^{-L\lambda} \left\{ \sum_{l=L+3}^{L+2} 2^{l\alpha_{\infty}q_{\infty}} \|F\chi_l\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)}^{q_{\infty}} \right\}^{\frac{1}{q_{\infty}}} \\
 & \leq C \|b\|_{\text{BMO}} \|F\|_{\dot{MK}_{q(\cdot),p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),\lambda}(\omega)}.
 \end{aligned}$$

其中 $2^{(k-l)(n\delta_1+\alpha_{\infty})} = 2^{-|k-l|\varepsilon}$, $\varepsilon = n\delta_1 + \alpha_{\infty} > 0$ 。

对于 V_{32} ，由 $n\delta_1 + \alpha_{\infty} - \lambda > 0$ ，我们有

$$\begin{aligned}
 V_3 & = C \|b\|_{\text{BMO}} 2^{-L\lambda} \left\{ \sum_{k=0}^L \left(\sum_{l=L+3}^{\infty} (l-k) 2^{k\alpha_{\infty}} 2^{(k-l)n\delta_1} \|F\chi_l\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)} \right)^{q_{\infty}} \right\}^{\frac{1}{q_{\infty}}} \\
 & \leq C \|b\|_{\text{BMO}} \sup_{l \geq 1} 2^{-l\lambda} 2^{l\alpha_{\infty}} \|F\chi_l\|_{L^{p(\cdot)}(\omega)} 2^{-L\lambda} \left\{ \sum_{k=0}^L \left(2^{k(n\delta_1+\alpha_{\infty})} \sum_{l=L+3}^{\infty} (l-k) 2^{-l(n\delta_1+\alpha_{\infty}-\lambda)} \right)^{q_{\infty}} \right\}^{\frac{1}{q_{\infty}}} \\
 & \leq C \|b\|_{\text{BMO}} \|F\|_{\dot{MK}_{q(\cdot),p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),\lambda}(\omega)} 2^{-L\lambda} \left\{ \sum_{k=0}^L 2^{k(n\delta_1+\alpha_{\infty})q_{\infty}} (L-k) 2^{-L(n\delta_1+\alpha_{\infty}-\lambda)q_{\infty}} \right\}^{\frac{1}{q_{\infty}}} \\
 & \leq C \|b\|_{\text{BMO}} \|F\|_{\dot{MK}_{q(\cdot),p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),\lambda}(\omega)} 2^{-L\lambda} \left\{ 2^{L\lambda q_{\infty}} \sum_{k=0}^L 2^{k(n\delta_1+\alpha_{\infty})q_{\infty}} (L-k) 2^{(k-L)(n\delta_1+\alpha_{\infty}-\lambda)q_{\infty}} \right\}^{\frac{1}{q_{\infty}}} \\
 & \leq C \|b\|_{\text{BMO}} \|F\|_{\dot{MK}_{q(\cdot),p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),\lambda}(\omega)}.
 \end{aligned}$$

结合 V_1 ， V_2 ， V_3 的估计，我们有

$$V \leq C \|b\|_{\text{BMO}} \left\| \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} |f_j|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{\dot{MK}_{q(\cdot),p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),\lambda}(\omega)}.$$

从而定理 2.1.1 得证。

第三章 Riesz 位势算子的交换子在极大变指数 Herz-Morrey 空间中的有界性

3.1 引言及主要结果

Riesz 位势算子定义如下

$$I_\beta f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)dy}{|x-y|^{n-\beta}}, \quad 0 < \beta < n.$$

当 $\beta q_1(y) < n$ 时, 我们定义 $q_1(\cdot)$ 的 Sobolev 共轭指标为

$$\frac{1}{q_2(y)} = \frac{1}{q_1(y)} - \frac{\beta}{n}, \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

Riesz 位势算子的交换子定义为

$$[b, I_\beta](f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (b(x) - b(y)) |x-y|^{\beta-n} f(y) dy, \quad 0 < \beta < n.$$

Samko^[23]证明了 Riesz 位势算子 I_β 在空间 $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ 中有界。Diening^[24]证明了 Riesz 位势算子 I_β 是从 $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^d)$ 到 $L^{p^\#(\cdot)}(\mathbb{R}^d)$ 上有界的。Cruz-Urbe 等^[25]证明了 Riesz 位势算子是从 $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ 到 $L^{q(\cdot)}(\Omega)$ 有界的。Di Fazio 和 Ragusa^[26]证明了, 若 $b \in \text{BMO}(\mathbb{R}^n)$, 交换子 $[b, I_\beta]$ 是从经典 Morrey 空间 $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ 有界的。Chen 和 Song^[27]证明了与 $\mathcal{L}$ 相关的 Riesz 位势算子 I_β 及其交换子 $[b, I_\beta]$ 是 $M_{\alpha,v}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ 到 $M_{\alpha,v}^{p_1,q_1}(\mathbb{R}^n)$ 有界的。

定义 3.1.1 设 $\alpha \in \mathbb{R}, 0 \leq \lambda < \infty, 0 < r < \infty, q(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 。变指数的 Herz-Morrey 空间定义为

$$MK_{\lambda,q(\cdot)}^{\alpha,r}(\mathbb{R}^n) = \left\{ g \in L_{loc}^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) : \|g\|_{MK_{\lambda,q(\cdot)}^{\alpha,r}(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\},$$

其中

$$\|g\|_{MK_{\lambda,q(\cdot)}^{\alpha,r}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k \alpha r} \|g \chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^r \right)^{\frac{1}{r}}.$$

极大变指数函数空间在调和分析中有很重要的作用，有界集合上的极大 Lebesgue 空间在[30-31]中引入，Rafeiro 和 Samko 在文献[32]中定义了极大 Lebesgue 序列空间，Soria 和 Weiss 在文献[33]中引入了一类次线性算子，Rafeiro 和 Zaighum 在文献[34-35]中定义了极大变指数 Herz 空间 $\dot{K}_{q(\cdot)}^{\alpha(\cdot),p,\theta}(\mathbb{R}^n)$ 和 $K_{q(\cdot)}^{\alpha(\cdot),p,\theta}(\mathbb{R}^n)$ ，并证明这一类次线性算子在极大变指数 Herz 空间中是有界的。Sultan 和 Azmi 等人^[36]定义了极大变指数 Herz-Morrey 空间。

定义 3.1.2 设 $1 \leq r < \infty, \theta > 0$ 。极大 Lebesgue 序列空间定义为

$$\|X\|_{l^{r,\theta}(\mathbb{X})} := \sup_{\varepsilon > 0} \left(\varepsilon^\theta \sum_{k \in \mathbb{X}} \|x_k\|^{r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} = \sup_{\varepsilon > 0} \varepsilon^{\frac{\theta}{r(1+\delta)}} \|X\|_{l^{r(1+\delta)}(\mathbb{X})} < \infty,$$

其中 $X = \{x_k\}_{k \in \mathbb{X}}$ 。满足如下包含关系：

$$l^{r(1-\delta)} \subset l^r \subset l^{r,\theta_1} \subset l^{r,\theta_2} \subset l^{r(1+\delta)},$$

其中 $0 < \delta < \frac{1}{r}, \delta > 0, 0 < \theta_1 \leq \theta_2$ 。

定义 3.1.3 设 $\theta > 0, 0 \leq \lambda < \infty, 1 \leq r < \infty, \alpha(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ，且 $q: \mathbb{R}^n \rightarrow [1, \infty)$ 。齐次极大变指数 Herz-Morrey 空间定义为

$$M\dot{K}_{\lambda,q(\cdot)}^{\alpha(\cdot),r,\theta}(\mathbb{R}^n) = \left\{ g \in L_{loc}^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) : \|g\|_{M\dot{K}_{\lambda,q(\cdot)}^{\alpha(\cdot),r,\theta}(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\},$$

其中

$$\|g\|_{M\dot{K}_{\lambda,q(\cdot)}^{\alpha(\cdot),r,\theta}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{\delta > 0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k \alpha(\cdot) r(1+\delta)} \|g \chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}}.$$

定义 3.1.4 若 $\alpha(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^n), 1 \leq q_- \leq q_+ < \infty, 1 = \frac{1}{q(\cdot)} + \frac{1}{q'(\cdot)}, \lambda = \lambda_1 + \lambda_2, r_i \in (0, \infty)$

$i = 1, 2, \frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}, \alpha(\cdot) = \alpha_1(\cdot) + \alpha_2(\cdot)$ ，则

$$\|fg\|_{M\dot{K}_{\lambda,1}^{\alpha(\cdot),r,\theta}} \leq \|f\|_{M\dot{K}_{\lambda,q(\cdot)}^{\alpha_1(\cdot),r_1,\theta}} + \|f\|_{M\dot{K}_{\lambda,q'(\cdot)}^{\alpha_2(\cdot),r_2,\theta}}.$$

受文献[36]的启发，本章进一步研究 Riesz 势算子 I_β 的交换子 $[b, I_\beta]$ 在极大变指数 Herz-Morrey 空间 $M\dot{K}_{\lambda,q(\cdot)}^{\alpha(\cdot),r,\theta}(\mathbb{R}^n)$ 中的有界性，主要结果如下：

定理 3.1.1 设 $b \in \text{BMO}(\mathbb{R}^n)$, $0 < \beta \leq 1, \theta > 0, 1 < r < \infty, \alpha(\cdot), q(\cdot) \in \mathcal{P}_\infty^{\log}(\mathbb{R}^n)$, q_1

满足 $\frac{1}{q_2} = \frac{1}{q_1} - \frac{\beta}{n}$, $y \in \mathbb{R}^n$, 使得

$$(1) \quad \beta - \frac{n}{q_i(0)} < \alpha(0) < \frac{n}{q'_i(0)}, \quad i=1,2;$$

$$(2) \quad \beta - \frac{n}{q_{i\infty}} < \alpha_\infty < \frac{n}{q'_{i\infty}}, \quad i=1,2.$$

则 Riesz 位势算子的交换子是 $M\dot{K}_{\lambda, q_1(\cdot)}^{\alpha(\cdot), r, \theta}(\mathbb{R}^n)$ 到 $M\dot{K}_{\lambda, q_2(\cdot)}^{\alpha(\cdot), r, \theta}(\mathbb{R}^n)$ 有界的。

3.2 主要引理

引理 3.2.1^[42] 设 $b \in \text{BMO}(\mathbb{R}^n)$, $k > l$ ($k, l \in \mathbb{N}$)。若 $q(\cdot) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\sup_{B \subset \mathbb{R}^n} \frac{1}{\|\chi_B\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}} \|(b - b_B)\chi_B\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \approx \|b\|_{\text{BMO}},$$

$$\|(b - b_{B_l})\chi_{B_k}\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq C(k-l)\|b\|_{\text{BMO}} \|\chi_{B_k}\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.$$

引理 3.2.2^[42] 设 $q(\cdot) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, δ 为常数, 且 $0 < \delta < 1$, 则对所有可测子集

$E \subset B$,

$$\frac{\|\chi_B\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}}{\|\chi_E\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}} \leq C \frac{|B|}{|E|}, \quad \frac{\|\chi_E\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}}{\|\chi_B\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}} \leq C \left(\frac{|E|}{|B|} \right)^\delta.$$

引理 3.2.3^[31] 设 $D > 1, q(\cdot) \in \mathcal{P}_\infty^{\log}(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\frac{1}{c_0} t^{\frac{n}{q(0)}} \leq \|\chi_{B(0, Dt) \setminus B(0, t)}\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq c_0 t^{\frac{n}{q(0)}}, \quad 0 < t \leq 1,$$

$$\frac{1}{c_\infty} t^{\frac{n}{q_\infty}} \leq \|\chi_{B(0, Dt) \setminus B(0, t)}\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq c_\infty t^{\frac{n}{q_\infty}}, \quad t \geq 1,$$

其中 $c_0, c_\infty \geq 1$.

引理 3.2.4^[10] (广义 Hölder 不等式) 设 $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, $p(\cdot) \in \mathcal{P}$

$(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)| dx \leq r_p \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)},$$

其中 $r_p = 1 + \frac{1}{p_-} - \frac{1}{p_+}$.

3.3 主要结果的证明

定理 3.1.1 的证明：设 $f \in \dot{MK}_{\lambda, q_2(\cdot)}^{\alpha(\cdot), r, \theta}$ ，记 $f(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f(x)\chi_l(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_l(x)$.

$$\begin{aligned} & \| [b, I_\beta](f) \|_{\dot{MK}_{\lambda, q_2(\cdot)}^{\alpha(\cdot), r, \theta}} \\ &= \sup_{\delta > 0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha(\cdot)r(1+\delta)} \| [b, I_\beta](f)\chi_k \|_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\ &\leq C \sup_{\delta > 0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha(\cdot)r(1+\delta)} \left(\sum_{l=-\infty}^k \| [b, I_\beta](f\chi_l)\chi_k \|_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\ &\quad + C \sup_{\delta > 0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha(\cdot)r(1+\delta)} \left(\sum_{l=k+1}^{\infty} \| [b, I_\beta](f\chi_l)\chi_k \|_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\ &:= W_1 + W_2. \end{aligned}$$

首先估计 W_1 ，由 Minkowski 不等式，我们有

$$\begin{aligned} W_1 &\leq C \sup_{\delta > 0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} 2^{k\alpha(\cdot)r(1+\delta)} \left(\sum_{l=-\infty}^k \| [b, I_\beta](f\chi_l)\chi_k \|_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\ &\quad + C \sup_{\delta > 0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=0}^{k_0} 2^{k\alpha(\cdot)r(1+\delta)} \left(\sum_{l=-\infty}^k \| [b, I_\beta](f\chi_l)\chi_k \|_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\ &:= W_{11} + W_{12}. \end{aligned}$$

当 $x \in R_k$ ， $y \in R_l$ ， $l \leq k$ ，由 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned} & | [b, I_\beta](f\chi_l)(x) | \\ &\leq \int_{R_l} |b(x) - b(y)| |x - y|^{\beta-n} |f_l(y)| dy \\ &\leq C 2^{-k(\beta-n)} \left(|b(x) - b_{B_l}| \int_{R_l} |f_l(y)| dy + \int_{R_l} |b_{B_l} - b(y)| |f_l(y)| dy \right) \\ &\leq C 2^{-k(\beta-n)} \|f\chi_l\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \left(|b(x) - b_{B_l}| \|\chi_l\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} + \|(b_{B_l} - b(y))\chi_l\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right). \end{aligned}$$

由引理 3.2.1 和引理 3.2.2 可得

$$\begin{aligned}
 & \left\| ([b, I_\beta](f\chi_l)(x))\chi_k \right\|_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \\
 & \leq C 2^{k(\beta-n)} \|f\chi_l\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \left(\| (b-b_{B_l})\chi_k \|_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \| \chi_l \|_{L^{q_1'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right. \\
 & \quad \left. + \| (b_{B_l}-b)\chi_l \|_{L^{q_1'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \| \chi_k \| \right) \\
 & \leq C \|b\|_{BMO} 2^{k(\beta-n)} \|f\chi_l\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \left((k-l) \| \chi_{B_k} \|_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \| \chi_l \|_{L^{q_1'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right. \\
 & \quad \left. + \| \chi_{B_l} \|_{L^{q_1'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \| \chi_k \|_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right) \quad (3.1) \\
 & \leq C(k-l) \|b\|_{BMO} \|f\chi_l\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} 2^{k(\beta-n)} \frac{|B_k|}{|R_k|} \| \chi_k \|_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \frac{|B_l|}{|R_l|} \| \chi_l \|_{L^{q_1'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \\
 & \leq C(k-l) \|b\|_{BMO} \|f\chi_l\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} 2^{k(\beta-n)} \| \chi_k \|_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \| \chi_l \|_{L^{q_1'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.
 \end{aligned}$$

由引理 3.2.3 可得

$$2^{k(\beta-n)} \| \chi_k \|_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \| \chi_l \|_{L^{q_1'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq C 2^{k(\beta-n)} 2^{\frac{kn}{q_2(0)}} 2^{\frac{ln}{q_1'(0)}} \leq C 2^{\frac{(l-k)n}{q_1'(0)}}. \quad (3.2)$$

对于 W_{11} , 因为 $\frac{n}{q_1'(0)} - \alpha(0) > 0$, $2^{-r(1+\delta)} < 2^{-r}$, 由式(3.1)、式(3.2)、Hölder 不

等式及 Fubini 定理, 我们有

$$\begin{aligned}
 W_{11} & \leq C \|b\|_{BMO} \sup_{\delta>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} 2^{k\alpha(\cdot)r(1+\delta)} \left(\sum_{l=-\infty}^k (k-l) \|f\chi_l\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} 2^{\frac{(l-k)n}{q_1'(0)}} \right)^{r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\
 & \leq C \|b\|_{BMO} \sup_{\delta>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\sum_{l=-\infty}^k 2^{l\alpha(0)} (k-l) \|f\chi_l\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} 2^{(l-k)(\frac{n}{q_1'(0)}-\alpha(0))} \right)^{r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\
 & \leq C \|b\|_{BMO} \sup_{\delta>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\sum_{l=-\infty}^k 2^{l\alpha(0)r(1+\delta)} \|f\chi_l\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{r(1+\delta)} 2^{\frac{1}{2}(l-k)(\frac{n}{q_1'(0)}-\alpha(0))r(1+\delta)} \right) \right. \\
 & \quad \left. \times \left(\sum_{l=-\infty}^k (k-l)^{(r(1+\delta))'} 2^{\frac{1}{2}(l-k)(\frac{n}{q_1'(0)}-\alpha(0))(r(1+\delta))'} \right)^{\frac{r(1+\delta)}{(r(1+\delta))'}} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\
 & \leq C \|b\|_{BMO} \sup_{\delta>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} \sum_{l=-\infty}^{k-2} 2^{l\alpha(0)r(1+\delta)} \|f\chi_l\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{r(1+\delta)} 2^{\frac{1}{2}(l-k)(\frac{n}{q_1'(0)}-\alpha(0))r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\
 & \leq C \|b\|_{BMO} \sup_{\delta>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \sum_{l=-\infty}^{-1} 2^{l\alpha(0)r(1+\delta)} \|f\chi_l\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{r(1+\delta)} \sum_{k=l}^{-1} 2^{\frac{1}{2}(l-k)(\frac{n}{q_1'(0)}-\alpha(0))r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq C \|b\|_{BMO} \sup_{\delta>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\delta^\theta \sum_{l=-\infty}^{k_0} 2^{l\alpha(\cdot)r(1+\delta)} \|f \chi_l\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\ &\leq C \|b\|_{BMO} \|f\|_{\dot{MK}_{\lambda, q_1(\cdot)}^{\alpha(\cdot), r, \theta}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

对于 W_{12} ，由 Minkowski 不等式可得

$$\begin{aligned} W_{12} &\leq C \sup_{\delta>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=0}^{k_0} 2^{k\alpha(\cdot)r(1+\delta)} \left(\sum_{l=-\infty}^{-1} \|[b, I_\beta](f \chi_l) \chi_k\|_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\ &\quad + C \sup_{\delta>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=0}^{k_0} 2^{k\alpha(\cdot)r(1+\delta)} \left(\sum_{l=0}^k \|[b, I_\beta](f \chi_l) \chi_k\|_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\ &:= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

对于 I_2 ，与 W_{11} 的估计方法相同，用 $q'_{1\infty}$ 代替 $q'_1(0)$ ，且 $\frac{n}{q'_{1\infty}} - \alpha_\infty > 0$ 。

对于 I_1 ，由定理 3.2.3 可得

$$2^{k(\beta-n)} \|\chi_k\|_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\chi_l\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq C 2^{k(\beta-n)} 2^{\frac{kn}{q_{2\infty}}} 2^{\frac{ln}{q'_1(0)}} \leq C 2^{\frac{-kn}{q'_{1\infty}}} 2^{\frac{ln}{q'_1(0)}}. \quad (3.3)$$

因为 $\alpha_\infty - \frac{n}{q'_{1\infty}} < 0$ ， $2^{-r(1+\delta)} < 2^{-r}$ ，由式(3.1)、式(3.3)及 Hölder 不等式，可得

$$\begin{aligned} I_1 &\leq C \|b\|_{BMO} \sup_{\delta>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=0}^{k_0} 2^{k\alpha(\cdot)r(1+\delta)} \left(\sum_{l=-\infty}^{-1} (k-l) \|f \chi_l\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} 2^{\frac{-kn}{q'_{1\infty}}} 2^{\frac{ln}{q'_1(0)}} \right)^{r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\ &\leq C \|b\|_{BMO} \sup_{\delta>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=0}^{k_0} 2^{k(\alpha_\infty - \frac{n}{q'_{1\infty}})r(1+\delta)} \left(\sum_{l=-\infty}^{-1} 2^{l\alpha(0)} (k-l) \|f \chi_l\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} 2^{(l-k)(\frac{n}{q'_1(0)} - \alpha(0))} \right)^{r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\ &\leq C \|b\|_{BMO} \sup_{\delta>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\delta^\theta \left(\sum_{l=-\infty}^{-1} 2^{l\alpha(0)} (k-l) \|f \chi_l\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} 2^{(l-k)(\frac{n}{q'_1(0)} - \alpha(0))} \right)^{r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\ &\leq C \|b\|_{BMO} \sup_{\delta>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\delta^\theta \left(\sum_{l=-\infty}^{-1} 2^{l\alpha(0)r(1+\delta)} \|f \chi_l\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{r(1+\delta)} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left(\sum_{l=-\infty}^{-1} (k-l)^{(r(1+\delta))'} 2^{\frac{1}{2}(l-k)(\frac{n}{q'_1(0)} - \alpha(0))(r(1+\delta))'} \right)^{\frac{r(1+\delta)}{r(1+\delta)'}} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq C \|b\|_{BMO} \sup_{\delta>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\delta^\theta \sum_{l=-\infty}^{k_0} 2^{l \alpha(\cdot) r(1+\delta)} \|f \chi_l\|_{L^{q_l(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\
 &\leq C \|b\|_{BMO} \|f\|_{\dot{MK}_{\lambda, q_l(\cdot)}^{\alpha(\cdot), r, \theta}(\mathbb{R}^n)}.
 \end{aligned}$$

接下来估计 W_2 ，当 $x \in R_k$ ， $y \in R_l$ ， $l \geq k+1$ ，由 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}
 &|[b, I_\beta](f \chi_l)(x)| \\
 &\leq \int_{R_l} |b(x) - b(y)| |x - y|^{\beta-n} |f_l(y)| dy \\
 &\leq C 2^{-l(\beta-n)} \left(|b(x) - b_{B_l}| \int_{R_l} |f_l(y)| dy + \int_{R_l} |b_{B_l} - b(y)| |f_l(y)| dy \right) \\
 &\leq C 2^{-l(\beta-n)} \|f \chi_l\|_{L^{q_l(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \left(\|b(x) - b_{B_l}\| \chi_l\|_{L^{q_l(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} + \|(b_{B_l} - b(y)) \chi_l\|_{L^{q_l(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right).
 \end{aligned}$$

由引理 3.2.1 和引理 3.2.2 可得

$$\begin{aligned}
 &\|([b, I_\beta](f \chi_l)(x)) \chi_k\|_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \\
 &\leq C 2^{l(\beta-n)} \|f \chi_l\|_{L^{q_l(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \left(\|(b - b_{B_l}) \chi_k\|_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\chi_l\|_{L^{q_l(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right. \\
 &\quad \left. + \|(b_{B_l} - b) \chi_l\|_{L^{q_l(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\chi_k\| \right) \\
 &\leq C \|b\|_{BMO} 2^{l(\beta-n)} \|f \chi_l\|_{L^{q_l(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \left((l-k) \|\chi_{B_k}\|_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\chi_l\|_{L^{q_l(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right. \\
 &\quad \left. + \|\chi_{B_l}\|_{L^{q_l(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\chi_k\|_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right) \\
 &\leq C(l-k) \|b\|_{BMO} \|f \chi_l\|_{L^{q_l(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} 2^{l(\beta-n)} \frac{|B_k|}{|R_k|} \|\chi_k\|_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \frac{|B_l|}{|R_l|} \|\chi_l\|_{L^{q_l(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \\
 &\leq C(l-k) \|b\|_{BMO} \|f \chi_l\|_{L^{q_l(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} 2^{l(\beta-n)} \|\chi_k\|_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\chi_l\|_{L^{q_l(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

由 Minkowski 不等式，我们有

$$\begin{aligned}
 W_2 &\leq C \sup_{\delta>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} 2^{k \alpha(\cdot) r(1+\delta)} \left(\sum_{l=k+1}^{\infty} \|[b, I_\beta](f \chi_l) \chi_k\|_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\
 &\quad + C \sup_{\delta>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=0}^{k_0} 2^{k \alpha(\cdot) r(1+\delta)} \left(\sum_{l=k+1}^{\infty} \|[b, I_\beta](f \chi_l) \chi_k\|_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\
 &:= W_{21} + W_{22}.
 \end{aligned}$$

对于 W_{22} ，由引理 3.2.3 可得

$$2^{l(\beta-n)} \|\chi_k\|_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\chi_l\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq C 2^{l(\beta-n)} 2^{\frac{kn}{q_2\infty}} 2^{\frac{ln}{q_1\infty}} \leq C 2^{\frac{(k-l)n}{q_1\infty}}. \quad (3.5)$$

另一方面，我们知道

$$\begin{aligned} \|F\chi_l\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} &= 2^{-l\alpha_\infty} \left(2^{l\alpha_\infty r(1+\delta)} \|F\chi_l\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\ &\leq C 2^{-l\alpha_\infty} \left(\sum_{t=-\infty}^l 2^{t\alpha_\infty r(1+\delta)} \|F\chi_t\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\ &\leq C 2^{-l\alpha_\infty} 2^{l\lambda} 2^{-l\lambda} \delta^{\frac{-\theta}{r(1+\delta)}} \left(\delta^\theta \sum_{t=-\infty}^l 2^{t\alpha_\infty r(1+\delta)} \|F\chi_t\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\ &\leq C 2^{-l\alpha_\infty} 2^{l\lambda} \delta^{\frac{-\theta}{r(1+\delta)}} \|f\|_{M\dot{K}_{\lambda, q_1(\cdot)}^{\alpha(\cdot), r, \theta}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

因为 $\frac{n}{q_{1\infty}} + \alpha_\infty - \lambda > 0$ ， $2^{-r(1+\delta)} < 2^{-r}$ ，由式(3.4)、式(3.5)、式(3.6)及 Hölder 不

等式，我们有

$$\begin{aligned} W_{22} &\leq C \|b\|_{BMO} \sup_{\delta>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=0}^{k_0} 2^{k\alpha(\cdot)r(1+\delta)} \left(\sum_{l=k+1}^{\infty} (l-k) \|f\chi_l\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} 2^{\frac{(k-l)n}{q_{1\infty}}} \right)^{r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\ &\leq C \|b\|_{BMO} \sup_{\delta>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=0}^{k_0} \left(\sum_{l=k+1}^{\infty} 2^{l\alpha_\infty} (l-k) \|f\chi_l\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} 2^{(k-l)(\frac{n}{q_{1\infty}} + \alpha_\infty)} \right)^{r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\ &\leq C \|b\|_{BMO} \|f\|_{M\dot{K}_{\lambda, q_1(\cdot)}^{\alpha(\cdot), r, \theta}(\mathbb{R}^n)} \sup_{\delta>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\sum_{k=0}^{k_0} 2^{k\lambda r(1+\delta)} \left(\sum_{l=k+1}^{\infty} (l-k) 2^{(k-l)(\frac{n}{q_{1\infty}} + \alpha_\infty - \lambda)} \right)^{r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\ &\leq C \|b\|_{BMO} \|f\|_{M\dot{K}_{\lambda, q_1(\cdot)}^{\alpha(\cdot), r, \theta}(\mathbb{R}^n)} \sup_{\delta>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\sum_{k=0}^{k_0} 2^{k\lambda r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\ &\leq C \|b\|_{BMO} \|f\|_{M\dot{K}_{\lambda, q_1(\cdot)}^{\alpha(\cdot), r, \theta}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

对于 W_{21} ，由 Minkowski 不等式，我们有

$$\begin{aligned} W_{31} &\leq C \sup_{\delta>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} 2^{k\alpha(\cdot)r(1+\delta)} \left(\sum_{l=k+1}^{-1} \|[b, I_\beta](f\chi_l)\chi_k\|_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\ &\quad + C \sup_{\delta>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} 2^{k\alpha(\cdot)r(1+\delta)} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \|[b, I_\beta](f\chi_l)\chi_k\|_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} := V_1 + V_2. \end{aligned}$$

对于 V_1 ，与 w_{22} 的估计方法相同，用 $q_1(0)$ 代替 $q_{1\infty}$ ，且 $\frac{n}{q_1(0)} + \alpha(0) - \lambda > 0$ 。

对于 V_2 ，由定理 3.2.3 可得

$$2^{l(\beta-n)} \|\chi_k\|_{L^{q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\chi_l\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq C 2^{l(\beta-n)} 2^{\frac{kn}{q_2(0)}} 2^{\frac{ln}{q_{1\infty}'}} \leq C 2^{\frac{kn}{q_1(0)}} 2^{\frac{-ln}{q_{1\infty}}}. \quad (3.7)$$

因为 $\frac{n}{q(0)} + \alpha(0) - \lambda > 0$ ， $2^{-r(1+\delta)} < 2^{-r}$ ，由式(3.4)、式(3.6)、式(3.7)及 Hölder

不等式，我们有

$$\begin{aligned} V_2 &\leq C \|b\|_{BMO} \sup_{\delta>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} 2^{k\alpha(\cdot)r(1+\delta)} \left(\sum_{l=0}^{\infty} (l-k) \|f\chi_l\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} 2^{\frac{kn}{q_1(0)}} 2^{\frac{-ln}{q_{1\infty}}} \right)^{r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\ &\leq C \|b\|_{BMO} \sup_{\delta>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} 2^{k(\alpha(0)+\frac{n}{q_1(0)})r(1+\delta)} \left(\sum_{l=0}^{\infty} 2^{l\alpha_\infty} (l-k) \|f\chi_l\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} 2^{-l(\frac{n}{q_{1\infty}}+\alpha_\infty)} \right)^{r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\ &\leq C \|b\|_{BMO} \sup_{\delta>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{-1} 2^{k(\alpha(0)+\frac{n}{q_1(0)})r(1+\delta)} \left(\sum_{l=0}^{\infty} 2^{l\alpha_\infty} (l-k) \|f\chi_l\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} 2^{-l(\frac{n}{q_{1\infty}}+\alpha_\infty-\lambda)} \right)^{r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\ &\leq C \|b\|_{BMO} \|f\|_{\dot{MK}_{\lambda,q_1(\cdot)}^{\alpha(\cdot),r,\theta}(\mathbb{R}^n)} \sup_{\delta>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{-1} 2^{k(\alpha(0)+\frac{n}{q_1(0)})r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\ &\leq C \|b\|_{BMO} \|f\|_{\dot{MK}_{\lambda,q_1(\cdot)}^{\alpha(\cdot),r,\theta}(\mathbb{R}^n)} \sup_{\delta>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{-1} 2^{k(\alpha(0)+\frac{n}{q_1(0)}-\lambda)r(1+\delta)} 2^{k\lambda r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\ &\leq C \|b\|_{BMO} \|f\|_{\dot{MK}_{\lambda,q_1(\cdot)}^{\alpha(\cdot),r,\theta}(\mathbb{R}^n)} \sup_{\delta>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{-1} 2^{k\lambda r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\ &\leq C \|b\|_{BMO} \|f\|_{\dot{MK}_{\lambda,q_1(\cdot)}^{\alpha(\cdot),r,\theta}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

因此，结合以上估计定理 3.1.1 证明完毕。

第四章 Marcinkiewicz 算子在极大变指数 Herz-Morrey 空间中的有界性

4.1 引言及主要结果

设 $\mathbb{S}^{n-1}$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上的单位球面, 设 $\Omega \in L^1(\mathbb{S}^{n-1})$ 是零阶齐次函数满足

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega(x') d\sigma(x') = 0, \quad (4.1)$$

其中 $x' = \frac{x}{|x|}, x \neq 0$.

Marcinkiewicz 积分算子 μ_Ω 定义为

$$\mu_\Omega(f)(x) = \left(\int_0^\infty \left| \int_{|x-y| \leq t} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}} f(y) dy \right|^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{1/2}. \quad (4.2)$$

由 μ_Ω 和 $b \in \text{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 生成的交换子定义为

$$[b, \mu_\Omega](f)(x) = \left(\int_0^\infty \left| \int_{|x-y| \leq t} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}} (b(x) - b(y)) f(y) dy \right|^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{1/2}. \quad (4.3)$$

Stein^[28]在 1956 年首先引入了 n 维的 Marcinkiewicz 积分算子, 并证明了, 如果 $\Omega \in \text{Lip}_\alpha(\mathbb{S}^{n-1}) (0 < \alpha \leq 1)$, Marcinkiewicz 积分算子 μ_Ω 是 (p, p) 型, 且 $1 < p \leq 2$ 时, 为弱 $(1,1)$ 型. Torchinsky 和 Wang 在[29]中提出了 Marcinkiewicz 积分的加权有界性, 他们证明了, 若 $\Omega \in \text{Lip}_\alpha(\mathbb{S}^{n-1}) (0 < \alpha \leq 1)$, $w \in A_p (1 < p < \infty)$, 则 μ_Ω 在 $L^p(w)$ 上有界。关于该算子的最新研究进展见文献[43-45]。

本章的主要结果如下:

定理 4.1.1 设 $0 < v \leq 1, \alpha(\cdot), q(\cdot) \in \mathcal{P}_\infty^{\log}(\mathbb{R}^n), 1 < q_- \leq q_+ < \infty, 1 \leq r < \infty,$

$\Omega \in L^s(\mathbb{S}^{n-1}), s > q'^-$ 。 α 满足:

$$(1) \quad \frac{-n}{q(0)} - v - \frac{n}{s} < \alpha(0) < \frac{n}{q'(0)} - v - \frac{n}{s},$$

$$(2) \quad \frac{-n}{q_\infty} - v - \frac{n}{s} < \alpha_\infty < \frac{n}{q'_\infty} - v - \frac{n}{s},$$

则对任意的 $f \in \dot{MK}_{\lambda, q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), r, \theta}(\mathbb{R}^n)$ 有

$$\|\mu_\Omega(f)\|_{\dot{MK}_{\lambda, q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), r, \theta}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{\dot{MK}_{\lambda, q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), r, \theta}(\mathbb{R}^n)}.$$

4.2 主要引理

引理 4.2.1^[46] 设 X 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测集。若 $1 \leq p_-(X) \leq p_+(X) < \infty$ 以及 $q_-, r_- > 1$, 则

$$\|fg\|_{L^{r(\cdot)}(X)} \leq \|f\|_{L^{p(\cdot)}(X)} \|g\|_{L^{q(\cdot)}(X)},$$

其中 $f \in L^{p(\cdot)}(X)$, $g \in L^{q(\cdot)}(X)$ 及 $\frac{1}{r(x)} = \frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)}$.

引理 4.2.2^[47] 若 $a > 0, 1 \leq s \leq \infty, 0 < d \leq s$ 及 $-n + (n-1)d/s < v < \infty$, 则

$$\left(\int_{|y| \leq a|x|} |y|^v |\Omega(x-y)|^d dy \right)^{1/d} \leq |x|^{(v+n)/d} \|\Omega\|_{L^s(\mathbb{S}^{n-1})}.$$

4.3 主要结果的证明

定理 4.1.1 的证明: 记 $f(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f(x) \chi_l(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_l(x)$.

$$\begin{aligned} & \|\mu_\Omega(f)\|_{\dot{MK}_{\lambda, q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), r, \theta}(\mathbb{R}^n)} \\ &= \sup_{\delta > 0} \sup_{k_0 > 0} 2^{-k_0 \lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha(\cdot)r(1+\delta)} \|\mu_\Omega(f) \chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\ &\leq C \sup_{\delta > 0} \sup_{k_0 > 0} 2^{-k_0 \lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha(\cdot)r(1+\delta)} \left(\sum_{l=-\infty}^k \|\mu_\Omega(f) \chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{r(1+\delta)} \right)^{r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\ &\quad + C \sup_{\delta > 0} \sup_{k_0 > 0} 2^{-k_0 \lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha(\cdot)r(1+\delta)} \left(\sum_{l=k+1}^{\infty} \|\mu_\Omega(f) \chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{r(1+\delta)} \right)^{r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\ &:= U_1 + U_2. \end{aligned}$$

首先估计 U_1 , 当 $x \in R_k, y \in R_l$ 及 $l \leq k$, 则 $|x-y| \asymp |x| \asymp 2^k$, 由均值理论, 我

们有

$$\left| \frac{1}{|x-y|^2} - \frac{1}{|x|^2} \right| \lesssim \frac{|y|}{|x-y|^3}. \quad (4.4)$$

则

$$\begin{aligned} |\mu_\Omega(f\chi_l)(x)| &\leq \left(\int_0^{|x|} \left| \int_{|x-y|\leq t} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}} f_l(y) dy \right|^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{1/2} \\ &\quad + \left(\int_{|x|}^\infty \left| \int_{|x-y|\leq t} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}} f_l(y) dy \right|^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{1/2} \\ &:= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

由式(4.1), Minkowski 不等式及广义的 Hölder 不等式, 我们有

$$\begin{aligned} I_1 &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^{n-1}} |f_l(y)| \left(\int_{|x-y|}^{|x|} \frac{dt}{t^3} \right)^{1/2} dy \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^{n-1}} |f_l(y)| \left| \frac{1}{|x-y|^2} - \frac{1}{|x|^2} \right|^{1/2} dy \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^{n-1}} |f_l(y)| \frac{|y|^{1/2}}{|x-y|^{3/2}} dy \\ &\leq C \frac{2^{l/2}}{|x|^{n+1/2}} \int_{R_l} |\Omega(x-y)| |f(y)| dy \\ &\leq C 2^{(l-k)/2} 2^{-kn} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\Omega(x-\cdot)\chi_l(\cdot)\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

同理可得

$$I_2 \leq C 2^{-kn} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\Omega(x-\cdot)\chi_l(\cdot)\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.$$

因此, 我们有

$$|\mu_\Omega(f\chi_l)(x)| \leq C 2^{-kn} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\Omega(x-\cdot)\chi_l(\cdot)\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}. \quad (4.5)$$

因为 $s > q^-$, 且定义 $q(\cdot)$ 满足 $\frac{1}{q'(x)} = \frac{1}{q(x)} + \frac{1}{s}$, 则由引理 4.2.2 及广义的

Hölder 不等式, 我们有

$$\begin{aligned} \|\Omega(x-\cdot)\chi_l(\cdot)\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} &\leq C \|\Omega(x-\cdot)\chi_l(\cdot)\|_{L^s} \|\chi_l(\cdot)\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C 2^{-lv} \left(\int_{2^{l-1} < |y| < 2^l} |\Omega(x-y)|^s |y|^{sv} dy \right)^{1/s} \|\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C 2^{(k-l)(v+\frac{n}{s})} \|\Omega\|_{L^s(\mathbb{S}^{n-1})} \|\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

由 Minkowski 不等式可得

$$\begin{aligned}
 U_1 &\leq C \sup_{\delta>0} \sup_{k_0>0} 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} 2^{k\alpha(\cdot)r(1+\delta)} \left(\sum_{l=-\infty}^k \|\mu_\Omega(f)\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{r(1+\delta)} \right)^{r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\
 &\quad + C \sup_{\delta>0} \sup_{k_0>0} 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=0}^{k_0} 2^{k\alpha(\cdot)r(1+\delta)} \left(\sum_{l=-\infty}^k \|\mu_\Omega(f)\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{r(1+\delta)} \right)^{r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\
 &:= U_{11} + U_{12}.
 \end{aligned}$$

由引理 3.2.3 可得

$$2^{-kn} \|\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\chi_l\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq C 2^{-kn} 2^{\frac{kn}{q'(0)}} 2^{\frac{ln}{q'(0)}} \leq 2^{\frac{(l-k)n}{q'(0)}}.$$

估计 U_{11} ，因为 $\frac{n}{q'(0)} - \alpha(0) - v - \frac{n}{s} > 0$ ， $2^{-r(1+\delta)} < 2^{-r}$ ，由式(4.5)、式(4.6)、

Hölder 不等式及 Fubini 定理可得

$$\begin{aligned}
 U_{11} &\leq C \sup_{\delta>0} \sup_{k_0>0} 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\sum_{l=-\infty}^k 2^{l\alpha(0)} \|f\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} 2^{(l-k)(\frac{n}{q'(0)} - \alpha(0) - v - \frac{n}{s})} \right)^{r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\
 &\leq C \sup_{\delta>0} \sup_{k_0>0} 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\sum_{l=-\infty}^k 2^{l\alpha(0)r(1+\delta)} \|f\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{r(1+\delta)} 2^{\frac{1}{2}(l-k)(\frac{n}{q'(0)} - \alpha(0) - v - \frac{n}{s})r(1+\delta)} \right) \right. \\
 &\quad \left. \times \left(\sum_{l=-\infty}^k 2^{\frac{1}{2}(l-k)(\frac{n}{q'(0)} - \alpha(0) - v - \frac{n}{s})r(1+\delta)} \right)^{\frac{r(1+\delta)}{(r(1+\delta))'}} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\
 &\leq C \sup_{\delta>0} \sup_{k_0>0} 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \sum_{l=-\infty}^{-1} 2^{l\alpha(0)r(1+\delta)} \|f\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{r(1+\delta)} \sum_{k=l}^{-1} 2^{\frac{1}{2}(l-k)(\frac{n}{q'(0)} - \alpha(0) - v - \frac{n}{s})r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\
 &\leq C \sup_{\delta>0} \sup_{k_0>0} 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \sum_{l=-\infty}^{-1} 2^{l\alpha(0)r(1+\delta)} \|f\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{r(1+\delta)} \sum_{k=l}^{-1} 2^{\frac{1}{2}(l-k)(\frac{n}{q'(0)} - \alpha(0) - v - \frac{n}{s})r} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\
 &\leq C \sup_{\delta>0} \sup_{k_0>0} 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \sum_{l=-\infty}^{k_0} 2^{l\alpha(\cdot)r(1+\delta)} \|f\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\
 &\leq C \|f\|_{M\dot{K}_{\lambda,q(\cdot)}^{\alpha(\cdot),r,\theta}(\mathbb{R}^n)}.
 \end{aligned}$$

对于 U_{12} ，由 Minkowski 不等式可得

$$\begin{aligned}
 U_{12} &\leq C \sup_{\delta>0} \sup_{k_0>0} 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=0}^{k_0} 2^{k\alpha(\cdot)r(1+\delta)} \left(\sum_{l=-\infty}^{-1} \|\mu_\Omega(f)\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\
 &\quad + C \sup_{\delta>0} \sup_{k_0>0} 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=0}^{k_0} 2^{k\alpha(\cdot)r(1+\delta)} \left(\sum_{l=0}^k \|\mu_\Omega(f)\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\
 &:= A_1 + A_2.
 \end{aligned}$$

对于 A_1 ，由引理 3.2.3 可得

$$2^{-kn} \|\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\chi_l\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq C 2^{-kn} 2^{\frac{kn}{q_\infty}} 2^{\frac{ln}{q'(0)}} \leq C 2^{\frac{-kn}{q'_\infty}} 2^{\frac{ln}{q'(0)}}.$$

因为 $\alpha_\infty - \frac{n}{q'_\infty} + v + \frac{n}{s} < 0$ ， $2^{-r(1+\delta)} < 2^{-r}$ ，由式(4.5)、式(4.6)及 Hölder 不等式，

我们有

$$\begin{aligned}
 A_1 &\leq C \sup_{\delta>0} \sup_{k_0>0} 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=0}^{k_0} 2^{k\alpha_\infty r(1+\delta)} \left(\sum_{l=-\infty}^{-1} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} 2^{(k-l)(v+\frac{n}{s})} 2^{\frac{-kn}{q'_\infty}} 2^{\frac{ln}{q'(0)}} \right)^{r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\
 &\leq C \sup_{\delta>0} \sup_{k_0>0} 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(\alpha_\infty + v + \frac{n}{s} - \frac{n}{q'_\infty})r(1+\delta)} \left(\sum_{l=-\infty}^{-1} 2^{l\alpha(0)} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} 2^{l(\frac{n}{q'(0)} - v - \frac{n}{s} - \alpha(0))} \right)^{r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\
 &\leq C \sup_{\delta>0} \sup_{k_0>0} 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \left(\sum_{l=-\infty}^{-1} 2^{l\alpha(0)} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} 2^{l(\frac{n}{q'(0)} - v - \frac{n}{s} - \alpha(0))} \right)^{r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\
 &\leq C \sup_{\delta>0} \sup_{k_0>0} 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \left(\sum_{l=-\infty}^{-1} 2^{l\alpha(0)r(1+\delta)} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{r(1+\delta)} \right) \left(\sum_{l=-\infty}^{-1} 2^{l(\frac{n}{q'(0)} - v - \frac{n}{s} - \alpha(0))(r(1+\delta))'} \right)^{\frac{r(1+\delta)}{(r(1+\delta))'}} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\
 &\leq C \sup_{\delta>0} \sup_{k_0>0} 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \sum_{l=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha(\cdot)r(1+\delta)} \|f\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\
 &\leq C \|f\|_{MK_{\lambda, q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), r, \theta}(\mathbb{R}^n)}.
 \end{aligned}$$

对于 A_2 ，由引理 3.2.3 可得

$$2^{-kn} \|\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\chi_l\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq C 2^{-kn} 2^{\frac{kn}{q_\infty}} 2^{\frac{ln}{q'_\infty}} \leq C 2^{\frac{(l-k)n}{q'_\infty}}.$$

因为 $\frac{n}{q'_\infty} - \alpha_\infty - v - \frac{n}{s} < 0$, $2^{-r(1+\delta)} < 2^{-r}$, 由式(4.5)、式(4.6)、Hölder 不等式及

Fubini 定理可得

$$\begin{aligned}
 A_2 &\leq C \sup_{\delta>0} \sup_{k_0>0} 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=0}^{k_0} \left(\sum_{l=0}^k 2^{l\alpha_\infty} \|f \chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} 2^{(l-k)(\frac{n}{q'_\infty} - \alpha_\infty - v - \frac{n}{s})} \right)^{r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\
 &\leq C \sup_{\delta>0} \sup_{k_0>0} 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=0}^{k_0} \left(\sum_{l=0}^k 2^{l\alpha_\infty r(1+\delta)} \|f \chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{r(1+\delta)} 2^{\frac{1}{2}(l-k)(\frac{n}{q'_\infty} - \alpha_\infty - v - \frac{n}{s})r(1+\delta)} \right) \right. \\
 &\quad \times \left. \left(\sum_{l=0}^k 2^{\frac{1}{2}(l-k)(\frac{n}{q'_\infty} - \alpha_\infty - v - \frac{n}{s})r(1+\delta)'} \right)^{\frac{r(1+\delta)}{(r(1+\delta))'}} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\
 &\leq C \sup_{\delta>0} \sup_{k_0>0} 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \sum_{l=0}^{k_0} 2^{l\alpha_\infty r(1+\delta)} \|f \chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{r(1+\delta)} \sum_{k=l}^{k_0} 2^{\frac{1}{2}(l-k)(\frac{n}{q'_\infty} - \alpha_\infty - v - \frac{n}{s})r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\
 &\leq C \sup_{\delta>0} \sup_{k_0>0} 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \sum_{l=0}^{k_0} 2^{l\alpha_\infty r(1+\delta)} \|f \chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{r(1+\delta)} \sum_{k=l}^{k_0} 2^{\frac{1}{2}(l-k)(\frac{n}{q'_\infty} - \alpha_\infty - v - \frac{n}{s})r} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\
 &\leq C \sup_{\delta>0} \sup_{k_0>0} 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \sum_{l=-\infty}^{k_0} 2^{l\alpha(\cdot)r(1+\delta)} \|f \chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\
 &\leq C \|f\|_{\dot{MK}_{\lambda, q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), r, \theta}(\mathbb{R}^n)}.
 \end{aligned}$$

接下来估计 U_2 , 注意到 $x \in R_k$, $y \in R_l$, $l \geq k+1$ 及 $|x-y| \asymp |y| \asymp 2^l$, 与 I_1 和

I_2 的估计方法相同, 可以得到

$$|\mu_\Omega(f \chi_l)(x)| \leq C 2^{-ln} \|f \chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\Omega(x-\cdot) \chi_l(\cdot)\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}. \quad (4.7)$$

由 Minkowski 不等式可得

$$\begin{aligned}
 U_2 &\leq C \sup_{\delta>0} \sup_{k_0>0} 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} 2^{k\alpha(\cdot)r(1+\delta)} \left(\sum_{l=k+1}^{\infty} \|\mu_\Omega(f) \chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{r(1+\delta)} \right)^{r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\
 &\quad + C \sup_{\delta>0} \sup_{k_0>0} 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=0}^{k_0} 2^{k\alpha(\cdot)r(1+\delta)} \left(\sum_{l=k+1}^{\infty} \|\mu_\Omega(f) \chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{r(1+\delta)} \right)^{r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\
 &:= U_{21} + U_{22}.
 \end{aligned}$$

另一方面，我们知道

$$\begin{aligned}
 \|F\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} &= 2^{-l\alpha_\infty} \left(2^{l\alpha_\infty r(1+\delta)} \|F\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\
 &\leq C 2^{-l\alpha_\infty} \left(\sum_{t=-\infty}^l 2^{t\alpha_\infty r(1+\delta)} \|F\chi_t\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\
 &\leq C 2^{-l\alpha_\infty} 2^{l\lambda} 2^{-l\lambda} \delta^{\frac{-\theta}{r(1+\delta)}} \left(\delta^\theta \sum_{t=-\infty}^l 2^{t\alpha_\infty r(1+\delta)} \|F\chi_t\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\
 &\leq C 2^{-l\alpha_\infty} 2^{l\lambda} \delta^{\frac{-\theta}{r(1+\delta)}} \|f\|_{M\dot{K}_{\lambda,q(\cdot)}^{\alpha(\cdot),r,\theta}(\mathbb{R}^n)}.
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

由引理 3.2.3，我们有

$$2^{-ln} \|\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\chi_l\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq C 2^{-ln} 2^{\frac{kn}{q_\infty}} 2^{\frac{ln}{q_\infty}} \leq 2^{\frac{(k-l)n}{q_\infty}}.$$

对于 U_{22} ，因为 $\frac{n}{q_\infty} + \alpha_\infty + v + \frac{n}{s} - \lambda > 0$ ， $2^{-r(1+\delta)} < 2^{-r}$ ，由式(4.6)、(4.7)、式

(4.8)及 Hölder 不等式，我们有

$$\begin{aligned}
 U_{22} &\leq C \sup_{\delta>0} \sup_{k_0>0} 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=0}^{k_0} \left(\sum_{l=k+1}^{\infty} 2^{l\alpha_\infty} \|f\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} 2^{(k-l)(\frac{n}{q_\infty} + \alpha_\infty + v + \frac{n}{s})} \right)^{r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\
 &\leq C \|f\|_{M\dot{K}_{\lambda,q(\cdot)}^{\alpha(\cdot),r,\theta}(\mathbb{R}^n)} \sup_{\delta>0} \sup_{k_0>0} 2^{-k_0\lambda} \left(\sum_{k=0}^{k_0} 2^{k\lambda r(1+\delta)} \left(\sum_{l=k+1}^{\infty} \|f\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} 2^{(k-l)(\frac{n}{q_\infty} + \alpha_\infty + v + \frac{n}{s} - \lambda)} \right)^{r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\
 &\leq C \|f\|_{M\dot{K}_{\lambda,q(\cdot)}^{\alpha(\cdot),r,\theta}(\mathbb{R}^n)} \sup_{\delta>0} \sup_{k_0>0} 2^{-k_0\lambda} \left(\sum_{k=0}^{k_0} 2^{k\lambda r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\
 &\leq C \|f\|_{M\dot{K}_{\lambda,q(\cdot)}^{\alpha(\cdot),r,\theta}(\mathbb{R}^n)}.
 \end{aligned}$$

对于 U_{21} ，由 Minkowski 不等式可得

$$\begin{aligned}
 U_{31} &\leq C \sup_{\delta>0} \sup_{k_0>0} 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} 2^{k\alpha(\cdot)r(1+\delta)} \left(\sum_{l=k+1}^{-1} \|\mu_\Omega(f)\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{r(1+\delta)} \right)^{r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\
 &\quad + C \sup_{\delta>0} \sup_{k_0>0} 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} 2^{k\alpha(\cdot)r(1+\delta)} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \|\mu_\Omega(f)\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{r(1+\delta)} \right)^{r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} := B_1 + B_2.
 \end{aligned}$$

对于 B_1 , 与 U_{22} 的估计方法相同, 用 $q(0)$ 代替 q_∞ , 且 $\frac{n}{q(0)} + \alpha(0) + v + \frac{n}{s} - \lambda > 0$ 。

对于 B_2 , 由引理 3.2.3 可得

$$2^{-ln} \|\chi_k\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\chi_l\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq C 2^{-ln} 2^{\frac{kn}{q(0)}} 2^{\frac{ln}{q'_\infty}} \leq C 2^{\frac{kn}{q(0)}} 2^{\frac{-ln}{q_\infty}}.$$

因为 $\frac{n}{q_\infty} + \alpha_\infty + v + \frac{n}{s} - \lambda > 0$, $2^{-r(1+\delta)} < 2^{-r}$, 由式 (4.6)、式(4.7)、式(4.8)及

Hölder 不等式, 我们有

$$\begin{aligned} B_2 &\leq C \sup_{\delta>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} 2^{k\alpha(0)r(1+\delta)} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} 2^{(k-l)(v+\frac{n}{s})} 2^{\frac{kn}{q(0)}} 2^{\frac{-ln}{q_\infty}} \right)^{r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\ &\leq C \sup_{\delta>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} 2^{k(\frac{n}{q(0)} + \alpha(0) + v + \frac{n}{s})r(1+\delta)} \left(\sum_{l=0}^{\infty} 2^{l\alpha_\infty} \|f\chi_l\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} 2^{-l(\frac{n}{q_\infty} + \alpha_\infty + v + \frac{n}{s} - \lambda)} \right)^{r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\ &\leq C \|f\|_{MK_{\lambda, q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), r, \theta}(\mathbb{R}^n)} \sup_{\delta>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{-1} 2^{k(\frac{n}{q(0)} + \alpha(0) + v + \frac{n}{s})r(1+\delta)} \left(\sum_{l=0}^{\infty} 2^{-l(\frac{n}{q_\infty} + \alpha_\infty + v + \frac{n}{s} - \lambda)} \right)^{r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\ &\leq C \|f\|_{MK_{\lambda, q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), r, \theta}(\mathbb{R}^n)} \sup_{\delta>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{-1} 2^{k(\frac{n}{q(0)} + \alpha(0) + v + \frac{n}{s})r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\ &\leq C \|f\|_{MK_{\lambda, q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), r, \theta}(\mathbb{R}^n)} \sup_{\delta>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{-1} 2^{k(\frac{n}{q(0)} + \alpha(0) + v + \frac{n}{s} - \lambda)r(1+\delta)} 2^{k\lambda r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\ &\leq C \|f\|_{MK_{\lambda, q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), r, \theta}(\mathbb{R}^n)} \sup_{\delta>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{-1} 2^{k(\frac{n}{q(0)} + \alpha(0) + v + \frac{n}{s} - \lambda)r} 2^{k\lambda r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\ &\leq C \|f\|_{MK_{\lambda, q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), r, \theta}(\mathbb{R}^n)} \sup_{\delta>0} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\lambda r(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{r(1+\delta)}} \\ &\leq C \|f\|_{MK_{\lambda, q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), r, \theta}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

因此, 结合以上估计定理 4.1.1 证明完毕。

结论与展望

本学位论文对经典函数空间中几类算子及交换子的有界性进行了拓展, 将这些算子的有界性推广至变指数 Herz-Morrey 空间, 研究的关键成果包括:

(1) 证明了向量值次线性算子的交换子 $[b, T]$ 在加权变指数 Herz-Morrey 空间 $\dot{MK}_{q(\cdot), p(\cdot)}^{\alpha(\cdot), \lambda}(\omega)$ 中的有界性;

(2) Riesz 位势算子的交换子 $[b, I_\rho]$ 在极大变指数 Herz-Morrey 空间 $\dot{MK}_{\lambda, q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), r), \theta}(\mathbb{R}^n)$ 中的有界性;

(3) Marcinkiewicz 积分算子 μ_Ω 在极大变指数 Herz-Morrey 空间 $\dot{MK}_{\lambda, q(\cdot)}^{\alpha(\cdot), r), \theta}(\mathbb{R}^n)$ 中的有界性。

这些研究结果丰富了变指数 Herz-Morrey 空间理论, 也为未来的研究提供了新的方向。尽管本学位论文仅聚焦于变指数 Herz-Morrey 空间, 但未来的研究可以进一步拓展至其他函数空间, 探讨各类算子的有界性特征。

参考文献

- [1] Coifman R R, Rochberg R, Weiss R G. Factorization theorems for Hardy spaces in several variables[J]. *Annals of Mathematics*, 1976, 103(3): 611-635.
- [2] Lu S Z, Yang D C. The central BMO spaces and Littlewood-Paley operators[J]. *Approximation Theory and Its Applications*, 1995, 11(3): 72-94.
- [3] Hernández E, Yang D C. Interpolation of Herz spaces and applications[J]. *Mathematische Nachrichten*, 1999, 205(1): 69-87.
- [4] Lu S Z, Yang D C. The decomposition of weighted Herz space on and its applications[J]. *Science in China*, 1995, 38(2): 147-158.
- [5] Li X W, Yang D C. Boundedness of some sublinear operators on Herz spaces[J]. *Illinois Journal of Mathematics*, 1996, 40(3): 484-501.
- [6] Lu S Z, Xu L F. Boundedness of rough singular integral operators on the homogeneous Morrey-Herz spaces[J]. *Hokkaido Mathematical Journal*, 2005, 34(2): 299-314.
- [7] Izuki M. Boundedness of sublinear operators on Herz spaces with variable exponent and application to wavelet characterization[J]. *Analysis Mathematica*, 2010, 36(1): 33-50.
- [8] Izuki M. Boundedness of vector-valued sublinear operators on Herz-Morrey spaces with variable exponent[J]. *Research in the Mathematical Sciences*, 2009, 13(10): 243-253.
- [9] Wu J. Boundedness of some sublinear operators on Herz-Morrey spaces with variable exponent[J]. *Georgian Mathematical Journal*, 2014, 21(1): 101-111.
- [10] Dong B H, Xu J S. Herz-Morrey type Besov and Triebel-Lizorkin spaces with variable exponents[J]. *Banach Journal of Mathematical Analysis*, 2015, 9(1): 75-101.
- [11] Wang S R, Xu J S. Boundedness of vector-valued sublinear operators on weighted Herz-Morrey spaces with variable exponents[J]. *Open Mathematics*, 2021, 19(1): 412-426.

-
- [12]Orlicz W. Über konjugierte exponentenfolgen[J]. *Studia Mathematica*, 1931, 3(1): 200-211.
- [13]Kováčik O, Rákosník J. On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$ [J], *Czechoslovak Mathematical Journal*, 1991, 41(4): 592-618.
- [14]Harjulehto P, Hästö P, Lê Ú V, Nuortio M. Overview of differential equations with non-standard growth[J]. *Nonlinear Analysis*, 2010, 72: 4551-4574.
- [15]Růžička M. *Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical theory*[M]. Berlin: Springer, 2007: 43-151.
- [16]Zhikov V V. Averaging of functionals of the calculus of variations and elasticity theory[J]. *Mathematics of the USSR-izvestiya*, 1987, 29(1): 675-710.
- [17]Diening L. Maximal function on Musielak-Orlicz spaces and generalized Lebesgue spaces[J]. *Bulletin of Mathematical Sciences*, 2005, 129(8): 657-700.
- [18]Ho K-P. Intrinsic square functions on Morrey and Block spaces with variable exponents[J]. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 2017, 40(3): 995-1010.
- [19]Lu Y, Zhu Y P. Boundedness of some sublinear operators and commutators on Morrey-Herz spaces with variable exponents[J]. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 2015, 64(4): 969-987.
- [20]Nakai E, Sawano Y. Hardy spaces with variable exponents and generalized Campanato spaces[J]. *Journal of Functional Analysis*, 2012, 262(9): 3665-3748.
- [21]Wang H, Liu Z. The Herz-type Hardy spaces with variable exponent and their applications[J]. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 2012, 16(4): 1363-1389.
- [22]Yang D C, Zhuo C Q, Yuan W. Besov-type spaces with variable smoothness and integrability[J]. *Journal of Functional Analysis*, 2015, 269(6): 1840-1898.
- [23]Samko S. Convolution and potential type operators in $L^{p(x)}(\mathbb{R}^n)$ [J]. *Integral Transforms and Special Functions*, 1998, 7(3): 261-284.
- [24]Diening L. Riesz potential and Sobolev embeddings on generalized Lebesgue and Sobolev spaces $L^{p(\cdot)}$ and $W^{k,p(\cdot)}$ [J]. *Mathematische Nachrichten*, 2004, 268(1): 31-

43.

- [25]Capone C, Cruz-Urbe D, Fiorenza A. The fractional maximal operator and fractional integrals on variable L^p spaces[J]. Revista Matemática Iberoamericana, 2007, 23(3): 743-770.
- [26]Fazio G D, Ragusa M A. Commutators and Morrey spaces[J]. Bollettino Della Unione Matematica Italiana A, 1991, 5(3): 323-332.
- [27]Chen D X, Song L. The boundedness of the commutator for Riesz potential associated with schrödinger operator on Morrey spaces[J]. Analysis in Theory and Applications, 2014, 30(4): 363-368.
- [28]Stein E M. On the functions of Littlewood-Paley, Lusin, and Marcinkiewicz[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1958, 88(2): 430-466.
- [29]Torchinsky A, Wang S. A note on the Marcinkiewicz integral[J]. Colloquium Mathematicum, 1990, 60(1): 235-243.
- [30]Almeida A, Drihem D. Maximal, potential and singular type operators on Herz spaces with variable exponents[J]. Journal of Mathematical Analysis Applications, 2012, 394(2): 781-795.
- [31]Samko S. Variable exponent Herz spaces[J]. Mediterranean Journal of Mathematics, 2013, 10(4): 2007-2025.
- [32]Rafeiro H, Samko S, Umarkhadzhiev S. Grand Lebesgue sequence spaces[J]. Georgian Mathematical Journal, 2018, 25(2): 291-302.
- [33]Soria F, Weiss G. A remark on singular integrals and power weights[J]. Indiana University Mathematics Journal, 1994, 43(1): 187-204.
- [34]Nafis H, Rafeiro H, Zaighum M A. A note on the boundedness of sublinear operators on grand variable Herz spaces[J]. Journal of Inequalities and Application, 2020, 2020(1): 427-445.
- [35]Nafis H, Rafeiro H, Zaighum M A. Boundedness of Marcinkiewicz integral on grand variable Herz spaces[J]. Journal of Mathematical Inequalities, 2021, 96: 739-753.

- [36]Sultan B, Azmi F, Sultan M, Mehmood M, Mlaiki N. Boundedness of Riesz potential operator on grand Herz-Morrey spaces[J]. Axioms, 2022, 11(11): 583.
- [37]Cruz-Uribe D, Fiorenza A, Neugebauer C J. Weighted norm inequalities for the maximal operator on variable Lebesgue spaces[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2012, 394(2): 744-760.
- [38]Almeida A, Hästö P. Besov spaces with variable smoothness and integrability[J]. Journal of Functional Analysis, 2010, 258(5): 1628-1655.
- [39]Zhao H, Liu Z G. Boundedness of commutators of fractional integral operators on variable weighted Herz-Morrey spaces[J]. Advances in Mathematics(China), 2022, 51(1): 103-116.
- [40]Bennett C, Sharpley R C. Interpolation of operators[M]. Pure and Applied Mathematics, Vol. Boston, MA: Academic Press, 1988: 129.
- [41]Izuki M, Noi T. Boundedness of fractional integrals on weighted Herz spaces with variable exponent[J]. Journal of Inequalities and Applications, 2016, 2016: 1-15.
- [42]Izuki M. Herz and amalgam spaces with variable exponent, the Haar wavelets and greediness of the wavelet system[J]. East Journal on Approximations, 2009, 15(1): 87-110.
- [43]Liu F. Integral operators of Marcinkiewicz type on Triebel–Lizorkin spaces[J]. Mathematische Nachrichten, 2017, 290(1): 75-96.
- [44]Darweesh A, Ali M. Generalized parabolic Marcinkiewicz integral operators related to surfaces of revolution[J]. Mathematics, 2019, 7(12): 1200.
- [45]Han Y Y, Wu H. The commutators of Marcinkiewicz integral operators on weighted Hardy spaces[J]. Frontiers of Mathematics, 2023, 18(1): 167-183.
- [46]Cruz-Uribe D, Fiorenza A. Variable Lebesgue spaces: Foundations and Harmonic analysis[M]. Basel: Applied and Numerical Harmonic Analysis, 2013: 134-158.
- [47]Muckenhoupt B, Wheeden R L. Weighted norm inequalities for singular and fractional integrals[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1971, 161: 249-258.

硕士期间发表论文

- [1] 刘可欣, 王立伟. 向量值次线性算子的交换子在变指数 Herz-Morrey 空间上的加权估计[J]. 应用数学, 2024, 37(2): 496-508.

致谢

时光荏苒，硕士生涯的三年光阴即将落下帷幕。当我完成这最后一篇毕业论文时，内心的感慨如潮水般涌来。

我衷心感谢我的导师王立伟教授。在我撰写论文的过程中，导师给予了我无私的帮助和指导。从选题到写作，从修改到定稿，每一步都离不开导师的悉心指导。导师严谨的治学态度、深厚的学术造诣和丰富的实践经验都让我受益匪浅。王老师不仅在学术上对我严格要求，教会我专业知识，指引我如何深入挖掘论文的创新点，同时在生活中也给予了我诸多关怀。在此，我向导师表示最诚挚的感谢和最崇高的敬意。

感谢安徽工程大学数理与金融学院为我们营造了优越的学习环境和浓厚的学术氛围，使我们在这三年中能够安心专注于学业。感谢各位任课老师的悉心教诲，你们传授的专业知识将成为我人生中宝贵的财富，为未来的工作和生活指明方向。

最后，我要感谢我的家人，是你们的一直陪伴在我身边，给予我无尽的关爱与支持，每当我遇到困难与挫折时，感谢你们对我的鼓励，让我勇敢面对。

回首这段时光，心中充满感激与不舍。然而，人生就像一场旅程，我们总是在不断地告别与启程。愿我们在未来的岁月里，不忘初心，砥砺前行，继续书写人生的华章。