

分类号: O231.5

学校代码: 10363

密 级: 公开

学 号: 2211020141



安徽工程大学

Anhui Polytechnic University

硕士学位论文

题 目 一类带有私人观念的观念
动力学模型的研究

论 文 作 者 朱一新

指 导 教 师 何广 教授

学 科 (专 业) 数学

研 究 方 向 随机控制理论及应用

论文提交日期: 2024 年 06 月 02 日

分类号: O231.5

单位代码: 10363

密 级: 公开

学 号: 2211020141

题 目 一类带有私人观念的观念动力学模型的研究

英文并列

题 目 **A Research on a Class of Opinion Dynamics**
Models with Private Opinion

学生姓名: 朱一新

指导教师: 何广 教授

专 业: 数学

研究方向: 随机控制理论及应用

论文答辩日期: 2024 年 5 月 29 日

安徽工程大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：我恪守学术道德，崇尚严谨学风。所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已明确注明和引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品及成果的内容。论文为本人亲自撰写，我对所写的内容负责，并完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

学位论文作者签名：朱新

日期：2024 年 6 月 2 日

安徽工程大学学位论文版权使用授权书

学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅或借阅。本人授权可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保密 ☐，在 ____ 年解密后适用本版权书。

本学位论文属于

不保密 ☒。

学位论文作者签名：朱新

指导教师签名：李

日期：2024 年 6 月 2 日

日期：2024 年 6 月 2 日

一类带有私人观念的观念动力学模型的研究

摘 要

随着科学的发展和互联网技术的普遍，微博，抖音等社交网络已经成为人们获取信息的重要来源，越来越多的人在网络上发表自己的观点，信息的传播形式和方式发生了前所未有的改变。在这种情况下，人们的交互信息越来越复杂，人们在发表言论时，有可能因为群体的压力，心口不一，因此，考虑个体的表达观念和私人观念的差异具有重大的现实意义。在本文中，我们主要讨论了个体的私人观念和表达观念以及固执个体对观念演变的影响，同时也考虑了竞争机制以及分歧程度的下限。

首先，本文提出了一种新颖的观念动力学模型。同时考虑了私人观念，竞争关系以及固执个体，并利用图论和矩阵分析的相关理论对模型的收敛性进行了分析，研究发现当系统不具有开放性个体时，无论网络拓扑是否是结构平衡，私人观念和表达观念总是可以以指数级地速度快速收敛到稳定状态，同时稳定状态依赖于最初的私人观念，并且表达观念在演化的过程中被遗忘。之后利用数值仿真对所得结果进行了验证。

其次，本文研究了系统具有开放性个体的情况，研究发现如果系统存在开放性个体，则模型的收敛性取决于所有开放性个体的观念是否能够收敛到稳定状态，稳定的观念是否取决于初始表达观念，与开

放性个体组成的子网络的结构平衡有关，最后利用数值仿真验证了所得结论的有效性。

最后，我们对本文进行了总结和归纳，并对观念动力学未来的研究方向进行了展望。本文的研究成果对于进一步发展观念动力学，拓展个体信念系统的内涵，以及揭示观念产生、传播和聚合的演变规律具有重要意义。

关键词：观念动力学，私人观念，表达观念，固执个体，收敛性

A Research on a Class of Opinion Dynamics Models with Private Opinion

ABSTRACT

With the development of science and the popularization of Internet technology, social networks such as Weibo and Douyin have become an important source for people to obtain information, and more and more people express their opinions on the Internet, and the form and way of information dissemination have undergone unprecedented changes. In this case, people's interactive information is becoming more and more complex, and people may be inconsistent due to the pressure in the group when they express their opinions, so it is of great practical significance to consider the differences in the private opinion of individuals' public opinion. In this thesis, we mainly discuss the influence of the individual's private and expressed opinions and the stubborn individual on the evolution of opinion, but also consider the competition mechanism and the lower limit of the degree of disagreement.

Firstly, this thesis proposes a novel opinion dynamics model. At the same time, the private opinion, competition relationship and stubborn individual are considered, and the convergence of the model is analyzed by using the relevant theories of graph theory and matrix analysis, and it is found that when the system does not have open individuals, regardless of whether the network topology is structurally balanced or not, the

private and expressed opinions can always converge to the steady state at an exponential speed, and the stable state depends on the initial private opinion, and the expressed opinion is forgotten in the process of evolution. Numerical simulations were then used to verify the results.

Secondly, this thesis studies the situation that the system has open individuals, and finds that if there are open individuals in the system, the convergence of the model depends on whether the opinion of all open individuals can converge to a stable state, and whether the stable opinion depend on the structural balanced of the sub-network composed of open individuals of the initial expressed opinion and finally the validity of the conclusions is verified by numerical simulation.

At the end of this thesis, we summarize and summarize this thesis, and look forward to the future research directions of opinion dynamics. The findings of this thesis are of great significance for promoting the development of opinion dynamics, expanding the connotation of individual belief systems, and revealing the evolution of idea generation, propagation and aggregation.

Zhu Yixin (Mathematics)

Supervised by He Guang

KEY WORDS: Opinion Dynamics, Private Opinion , Expressed Opinion, Stubborn Individuals, Convergence

目录

摘 要	I
ABSTRACT	III
第 1 章 绪论	1
1.1 研究背景和意义	1
1.2 国内外研究现状	2
1.3 主要研究内容和论文结构	3
第 2 章 预备知识	5
2.1 符号	5
2.2 图论	5
2.3 DeGroot 模型简介	6
2.4 F-J 模型简介	7
第 3 章 不具有开放性个体的观念动力学模型的动力学分析	9
3.1 模型描述	9
3.2 备注及引理	11
3.3 主要结论	13
3.4 数值模拟	21
3.5 本章小节	25
第 4 章 具有开放性个体的观念动力学模型的动力学分析	26
4.1 模型描述	26
4.2 主要结论	27
4.3 数值模拟	30
4.4 本章小结	33
第 5 章 总结与展望	34
参考文献	36
硕士期间发表的论文	40
致谢	41

第 1 章 绪论

1.1 研究背景和意义

近些年来，观念动力学受到了社会控制理论、社会动力学，社会经济学，社会管理学等领域的广泛关注^[1-6]。观念动力学研究在不同媒介和情况下，观念的产生，扩散和聚集^[7-10]。例如公司董事会会议室，小学教室和在线社交媒体中个人观念的传播和聚集。它关注的是社交网络的基本问题：个体（智能体）在社会网络中如何受到他人的影响。我们所说的“观念”是指个体围绕社会事件的发生和发展对该事件持有的看法和态度，反映的是社会思潮和民心所向，是一种能够预测社会发展趋势，调节和调整社会关系，激励和监督社会群体，促进科技发展和推动工业进步的力量，它对社会进步有着广泛而深远的影响^[11-16]。

随着科技的发展和时代的进步，人们获取信息的形式发生了许多变化，从传统的电视，广播，报纸等单向性广播类信息到微博，微信，抖音等移动互联网信息，人们获取信息的方式更加多样便捷，获得的信息也更加及时，自由，量大。因此，人们在进行观念的交互时，表达的观念可能和心里所想的观念不同，在这种情况下，个体的私人观念和表达观念会出现差异，可能会产生信息级联，导致各种各样的情况发生。例如，在刑事审判中，超过三分之一的陪审员会私下投票反对陪审团的最终决定。民众的私人观念和公开表达观念之间的巨大差异可能会造成紧张和不满，从而产生严重的后果。无论是在陪审员、公司董事会会议室还是在普通大众中发生的敏感的政治问题，私人观念和表达观念中巨大且持续存在的分歧导致潜在的社会影响是明确的。在这种情形下，讨论私人观念和表达观念的产生、扩散和聚合有着重要的意义。

在社会网络中，竞争无处不在，竞争是指个人或集体之间寻求超越他人或者取得比他人更好成就的心理需求和行为，即每个参与者为了最大化获得利益，为了达到有吸引力的目标，毫不犹豫的牺牲他人的利益，因此它的积极作用是能使人们振作起来，向前迈进，促进社会进步，提高劳动生产率。在社会生活中，竞争总是以竞赛的形式表现出来，例如，篮球赛，数学建模比赛，跳舞比赛，绘画比赛等等。因此，竞争在社会网络中无处不在，考虑竞争因素对于我们研究的课题有着重要的意义。

1.2 国内外研究现状

在过去的几十年中,观念动力学引起了系统和控制工程群体的广泛关注,观念动力学主要是捕捉社会网络中的个体是如何互动和交换观念的,个体的观念可能会随着时间的推移而演变,因为个体有可能会学习邻居的观念。目前,许多的观念动力学模型,包括最经典的观念动力学模型都是依赖于个体的模型。1956年, French Jr 引入了基于个体的观念动力学模型,也是观念动力学中最经典的模型 DeGroot 模型^[17],该模型假设每个人的观念随着时间的变化而变化,个体使用加权平均将自己的观念以及邻居个体的观念相结合,以捕捉社会影响。如果网络满足某些连通性的条件,就会达到观念一致,即所有个体的观念是一致的^[18-22]。在 DeGroot 模型中,假设所有个体都具有简单认知能力,从而被视为同质个体。但是,在实际社会中,个体的认知通常都很复杂,并且存在差异,因此 Friedkin 和 Johnsen 引入了固执个体,提出了 Friedkin-Johnsen(F-J)模型^[23-24]。F-J 模型假设不同个体在原有认知方面具有不同程度的固执性,也就是说,固执个体不会忘记自己的原有认知,并且会受到外部条件的影响,因此 F-J 模型很难实现观念一致,文献[25-28]对 F-J 模型稳定性的充分条件进行了描述。

考虑到个体可能更愿意与观点相似的人交流,而忽略与自己观点有明显差异的人, Hegselmann-Krause (H-K)模型在文献[29]中被引入。在 H-K 模型中,每个个体都有一个置信区间,个体只接受其置信区间内的观念,而忽略置信区间外的观念,这意味着网络拓扑取决于个体的观念,因此 H-K 模型是时变的。对于每一组初始观念, H-K 模型总是在空闲时间收敛到稳定的状态,但这种稳定状态通常将个体分为几个群体^[30-31]。将 Friedkin 的社会权利理论与 DeGroot 模型相结合,提出了 DeGroot-Friedkin(D-F)模型^[32]。在 D-F 模型中,虽然个体之间的影响力保持恒定,但个体在影响网络中的自我认知权重是由其在社会中的权力所决定的。D-F 模型不仅关注观念的演变,也关注社会权利的演变。文献[33]研究了社会权利向量在问题序列上的演变,解释了社会网络中的分层现象。关于 D-F 模型的进一步研究,请参考文献[34-35]。

大多数的学术文献主要集中在个体之间的合作模式,却往往忽略了个体之间可能存在的竞争和对抗关系。然而,竞争是一种客观存在的现象,无论是人类社会还是大自然中,竞争始终是一个普遍存在的现象^[36-37]。在人类社会生活中,我

们在球类运动、健康评估、数学竞赛、投票等活动中，都可以看到对抗。因此，在建立观念动力学模型时，有必要考虑个体之间的合作与竞争。最近，具有竞争的观念动力学模型引起了广泛关注^[38-40]。

目前，大多数关于观念动力学的文章都集中在个人的表达观念上。然而，在很多情况下，个人的私人观念和表达观念可能存在差异，例如在陪审员或公司董事会会议室中讨论一些敏感的政治问题^[41]，在刑事审判中，超过三分之一的陪审员会私下投票反对陪审团的最终决定^[42]。人们私人观念和表达观念之间的巨大差异会引起不满和紧张，这可能会产生严重的后果。

1.3 主要研究内容和论文结构

本文的主要研究内容如下：首先，我们拓展了经典的 DeGroot 模型和 F-J 模型，提出了一种新颖的观念动力学模型。在这个模型中个体的私人观念，表达观念以及固执程度同时被考虑，个体私人观念的演化依赖于个体的私人观念和邻居个体的表达观念，而个体的表达观念是在邻居个体的平均表达观念的压力下形成的。其次，利用图论和矩阵理论，我们发现当不存在开放性个体时，不管社会网络是结构平衡还是结构不平衡的，个体的私人观念和表达观念总是快速收敛到稳定的状态，同时稳定的观念依赖于初始的私人观念，而个体的表达观念在演化的过程中被遗忘。接着，我们还分析了在一些特殊的条件下，可以通过表达观念的分歧程度来估计私人观念的分歧程度。如果存在开放性个体，模型的稳定性依赖于所有开放个体的观念是否可以收敛到稳定观念，稳定观念取决于最初的表达观念和开放个体组成的子网络是否是结构平衡的。最后我们利用数值仿真对所得结果进行了验证。

本文结构安排如下：

第一章：绪论。本章节主要围绕研究的背景，意义，国内外的研究现状进行了深入解读，并明确了本次研究的核心内容和论文架构。

第二章：预备知识。本章节重点探讨了本文所需要的数学符号和相关的专业名词，同时还详细介绍了常用的两个模型 DeGroot 模型和 F-J 模型。

第三章：在本章节中，我们构建了一个新颖的观念动力学模型，该模型同时考虑个体的私人观念和固执程度。我们对该模型不具有开放性个体的情况下进行

了深入分析，得到了模型能够收敛的必要条件，并且对最终的私人观念和表达观念的分歧程度进行分析，得到了一种利用表达观念的差异性评估私人观念的差异程度的方法，并通过数值模拟证实了我们的观点和结论。

第四章：在这一章节中，我们基于上述模型，考虑了该模型具有开放性个体的情况下，模型的收敛条件，并通过数值仿真验证了我们所得的结论是有效的。

第五章：总结与展望。

第 2 章 预备知识

2.1 符号

在本文中, $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^{m \times n}$ 分别表示维度为 n 和 $m \times n$ 维空间的矩阵。符号 $\mathbf{1}_n$ ($\mathbf{0}_n$) 表示一个 n 维列向量, 其中所有元素都是 1 (0)。 I_n 表示一个 n 阶单位矩阵, 它的主对角线上的元素都是 1, 其余元素都是 0。矩阵 A 的第 i 行第 j 列元素用 a_{ij} 表示。 $A \geq 0$ 意味着矩阵 A 是一个非负矩阵, 也就是对于所有的 i, j , 都有 $a_{ij} \geq 0$ 。 $|A|$ 表示矩阵 A 的每个元素 a_{ij} 都取其绝对值, 即将矩阵 A 中的每个元素 a_{ij} 都替换为其绝对值 $|a_{ij}|$ 。 $\rho(A)$ 表示矩阵 A 的谱半径。对于方阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\text{diag}(A) = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ 表示其主对角矩阵, 其中对角项为 $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ 。如果存在 $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1, \forall i$, 那么非负矩阵 A 被称为是行随机的。

2.2 图论

在本段中, 我们简洁地介绍和图论相关的一些定义。通常一个网络图可以被描述为 $G(V, E)$, 其中 $V = (v_1, v_2, \dots, v_N)$ 是节点集, $E \subseteq V \times V$ 是边集。如果 $V_1 \in V, E_1 \in E$, 则称图 $G(V_1, E_1)$ 是图 $G(V, E)$ 的子图。 $e_{ij} \in E((v_i, v_j) \in E)$ 表示从节点 i 到节点 j 存在一条边, 此时节点 i 称为节点 j 的邻居, $N_i = \{v_j : (v_j, v_i) \in E\}$ 称为 v_i 的邻居集。特别地, $e_{ii} \in E$ 表示在节点 v_i 中存在一个自环。对于一个非负矩阵 A , 如果 $a_{ij} > 0$ 当且仅当 $e_{ji} \in E$, 则称 A 为图 $G(V, E)$ 的加权邻接矩阵, 这时候也用 $G(A)$ 来表示图 $G(V, E)$ 。从 v_i 到 v_{i+k} 的有向路径 $(v_i, v_{i+1}), \dots, (v_{i+k-1}, v_{i+k})$ 被称为边序列, 其中序列中的每个节点都是唯一的 (除了开始节点和结束节点外, 其他节点都不允许重复)。如果存在一个节点 i , 使得从节点 i 到 $G(V, E)$ 中的其他节点有一条路径, 那么我们说图 $G(V, E)$ 包含一棵生成树, 节点 i 是根节点。

在图 $G(A)$ 中, 如果每个节点都是根节点, 这等价于 A 不可约, 则称图 $G(A)$ 是强连通的。结构平衡图是指符号图 $G(A)$ 是结构平衡的, 当且仅当这里存在一个规范变换矩阵 $\Gamma = \text{diag}[\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n]$, 使得 $\Gamma A \Gamma \geq 0$, 其中 $\tau_i \in \{-1, 1\}$, 那么我们称图 $G(A)$ (矩阵 A) 是结构平衡的。结构不平衡图是指符号图 $G(A)$ 是结构不平衡的, 当且仅当 $G(A)$ 中至少存在一个负权重的无向环。

2.3 DeGroot 模型简介

DeGroot 模型是观念动力学的基本模型, 在 1974 年被 DeGroot 提出, DeGroot 模型描述的是一群人在社会网络上就特定话题交换观念的过程, 由于个体进行反复互动, 从而使观念达成一致的过程。在 DeGroot 模型中, 个体的观念是由个体和其邻居在前一时刻的观念的加权平均值决定的。在由 n 个个体组成的社会网络 $G(W) = (V, E)$ 中, $x_i(t)$ 表示个体 i 在时刻 t 的观念, 其中 $t \in N$, 具体表示为

$$x_i(t+1) = \sum_{j=1}^n w_{ij} x_j(t), \quad (2.1)$$

其中社会网络对应的邻接矩阵 W 中的元素为 w_{ij} , 它表示个体的耦合关系, 如果 $w_{ij} > 0$, 则在每一次的迭代过程中, 个体 i 可以影响到个体 j , w_{ij} 越大, 个体 j 对个体 i 的影响越大。令 $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T \in \mathbb{R}^n$ 表示在时刻 t 时, n 个个体在某一特定话题上的观念。我们将系统(2.1)写成更加紧凑的形式:

$$x(t+1) = Wx(t), \quad (2.2)$$

其中, W 是一个行随机矩阵, 即行和为 1 的非负矩阵, 体现个体间的相互影响关系。 w_{ij} 表示个体 j 对个体 i 的影响权重, 在 DeGroot 模型框架下, 对于系统(2.2)的收敛性和一致性, 可以得到以下相关结果:

定义 2.3.1 (收敛性): 在 DeGroot 模型中, 若对于任意的初始观念 $x(0)$, 存在一个实数向量 $x^* \in \mathbb{R}^n$, 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = x^*$, 则称系统(2.2)是收敛的。

定义 2.3.2 (一致性): 若对于任意的初始观念 $x(0)$, 存在实数 α 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \alpha 1_n$, 则称系统(2.2)达成一致。

很明显, 一致性是收敛的一种特殊情况, 也就是说, 只有 x^* 的 n 个分量都收敛于相同的值 α 时才能达成一致。由系统(2.1)和(2.2)可知, 社会影响网络 G 上的观念演变过程为离散时间齐次 Markov 链(discrete-time homogeneous Markov chain), 随机矩阵 W 是状态转移矩阵。在文献[43]中, 作者给出了 DeGroot 模型达到一致的充分必要条件。

2.4 F-J 模型简介

在 DeGroot 模型中, 每个个体根据自己和邻居当前观点的加权平均值来更新自己的观点, 也就是说, 个体对于社会网络来说是开放的。但是, 在现实世界中, 经过广泛的谈论, 也经常会出现持续的分歧。为了解释这种持续的分歧, 1999 年, Friedkin 和 Johnsen 提出了 F-J 模型^[24], 引入了固执个体的概念。F-J 模型考虑了固执个体的存在, 他们会在一定程度上坚持自己最初的观点。由于固执个体的存在, F-J 模型中每个个体的观念演变如下:

$$x_i(k+1) = \xi_i \sum_{j=1}^n w_{ij} x_j(k) + (1 - \xi_i) x_i(0), \quad (2.3)$$

其中 $x_i(k) \in R$, $\xi_i \in [0, 1]$, 在这里 $x_i(k)$ 表示个体 i 的观念, ξ_i 表示个体 i 对人际影响的敏感度。自然地, $1 - \xi_i$ 代表个体 i 对其初始观念的固执程度。当 $0 < \xi_i < 1$ 时, 个体 i 属于固执个体, 会在一定程度上受到他人观念的影响, 同时也保留部分对自身初始观念的坚持。当 $\xi_i = 0$ 时, 个体 i 属于完全固执个体, 坚持自己的初始观念, 不受他人的影响。当 $\xi_i = 1$ 时, 个体 i 称为非固执个体, 很容易被别人影响。进一步地, 将上述系统(2.3)以更紧凑的矩阵形式表示为:

$$x(k+1) = \Xi Wx(k) + (I - \Xi)x(0), \quad (2.4)$$

其中 $\Xi = \text{diag}(\xi)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T \in \mathbb{R}^n$, W 是描述人际影响网络结构的行随机矩阵。在 DeGroot 模型中, 每个个体都完全接受社会影响, 这很有可能会使观念达成一致, 但是, 在 F-J 模型中, 在每次观念迭代的时候, 固执个体总是会考虑自己的初始意见。因此, F-J 模型很难达成共识。近几十年来, 随着多智能体系统和观念动力学模型的研究深入, F-J 模型也得到了进一步的发展, 下述是 F-J 模型收敛性的相关结论:

定理 2.4.1: 若 $G(W)$ 的每一个独立强分支都不完全由非固执节点组成的, 那么模型(2.3)收敛, 并且观念最终收敛的值为 $x^* = (I - \Xi W)^{-1}(I - \Xi)x(0)$ 。

在模型(2.3)中, 当 $\xi = 1_n$ 时, F-J 模型则恢复为经典的 DeGroot 模型, 因此 DeGroot 模型被看成是 F-J 模型的一种特殊情况。由上述结论我们可以观察到, 相较于经典的 DeGroot 模型, F-J 模型很难实现观念的一致, 因为矩阵 $(I - \Xi W)^{-1}(I - W)$ 的秩很难等于 1, 因此需要对网络中边的权重作很严格的限制。对于难以实现观念的一致这一现象, 一个合理的解释是存在固执个体使得网络中的观念没办法进行充分的聚合。

第3章 不具有开放性个体的观念动力学模型的动力学分析

考虑到在社会网络中的某个特定的话题上, 个体的私人观念和表达观念之间存在差异, 本章研究了社会网络中带有私人观念和表达观念以及固执个体的观念动力学模型。当系统中不具有开放性个体时, 无论社会网络是结构平衡的还是结构不平衡的, 私人观念和表达观念总是以指数级的速度快速收敛到一个稳定的状态, 同时, 这个稳定的观念依赖于初始的私人观念, 最初的表达观念则在演化过程中被遗忘。接着分析了稳定状态下观念之间的分歧程度, 得到了一种估计私人观念分歧程度下限的方法。最后, 通过数值仿真验证了所得结果的有效性。

3.1 模型描述

本章节, 我们考虑一种带有私人观念和表达观念的观念动力学模型。在一个由 n 个个体组成的社会网络中, 在时间 $t = \{1, 2, 3, \dots\}$ 时, 个体 i 对某一特定话题的私人观念和表达观念分别用 $y_i(t)$ 和 $\hat{y}_i(t)$ 来表示, 私人观念 $y_i(t)$ 和表达观念 $\hat{y}_i(t)$ 一般不同, 我们认为 $y_i(t)$ 是个体的真实观念, 个体会因为各种各样的原因可能不会表达他的真实观念 $y_i(t)$, 例如: 敏感的政治问题, 社会压力等等。在我们的模型中, 个体要遵循群体压力而表达自己的表达观点, 他们通过 $G(M)$ 描述的网络讨论他们的表达意见, 他们通过 $G(W)$ 描述的网络更新他们的私人观念。所以私人观念和表达观念是共演的, 个体 i 的私人观念 $y_i(t)$ 演化如下:

$$y_i(t+1) = \lambda_i w_{ii} y_i(t) + \lambda_i \sum_{j \neq i}^n w_{ij} \hat{y}_j(t) + (1 - \lambda_i) y_i(0), \quad (3.1)$$

个体 i 的表达观念 $\hat{y}_i(t)$ 的演化如下:

$$\hat{y}_i(t) = \phi_i y_i(t) + (1 - \phi_i) \sum_{j=1}^n m_{ij} \hat{y}_j(t-1), \quad (3.2)$$

在这里常数 $\lambda_i \in [0, 1]$ 代表着个体 i 对人际影响的敏感度, $1 - \lambda_i$ 代表着个体 i 对初始观念的固执程度, 当 $\lambda_i = 1$, 我们称个体 i 是非固执个体, 这意味着个体 i 喜欢

和其他个体沟通，或者很容易被其他个体影响。如果 $0 < \lambda_i < 1$ ，我们称个体 i 是固执个体，当固执个体与其他个体交流时，固执个体在一定程度上保持他的初始观念。特别的，当 $\lambda_i = 0$ ，我们称个体 i 是完全固执个体，这意味着个体 i 拒绝和其他个体沟通，或者忽视其他个体观念，完全固执个体的观念始终不会改变。在本文中，我们考虑了一种特殊的非固执个体，他们可以受其他固执个体的影响，这意味着存在一条从固执个体到非固执个体的路径，这种个体被称为隐形固执个体。为了方便我们的研究，我们对所有的个体进行重新分类，非开放性个体涵盖了三种情况，即完全固执个体、固执个体和隐形固执个体。这类个体在观念演化过程中表现出不同程度的固执性，他们的观念更新不仅受到社会影响，还会在一定程度上保持对初始观念的坚持。剩下的个体被称为开放性个体，他们既不是固执个体，也不受固执个体所影响。

耦合矩阵 $W = [w_{ij}]$ ($M = m_{ij}$) 表示通信拓扑，其中 w_{ij} 表示个体 i 对个体 j 的影响程度， $w_{ij} > 0$ 表示个体 i 信任个体 j ， $w_{ij} < 0$ 表示个体 i 不信任个体 j ，当然 $w_{ij} = 0$ 时表示个体 i 和个体 j 之间没有关系。在我们的模型中，我们同时考虑了个体的合作和竞争。本文假设 $|W|$ 和 $|M|$ 是行随机的矩阵，考虑到个体 i 更新私人观念和表达观念，个体 i 和个体 j 之间的关系不会发生改变，但在信任程度（对抗）上可能存在一些差异，也就是说 w_{ij} 和 m_{ij} 具有相同的符号，但允许存在大小差异。所以我们假设 $w_{ij} > 0 \Leftrightarrow m_{ij} > 0$ 和 $w_{ij} < 0 \Leftrightarrow m_{ij} < 0$ 。在这种情况下，矩阵 W 和 M （图形 $G(W)$ 和图像 $G(M)$ ）被认为是齐次的，用符号表示为 $W \sim M$ 或 $G(W) \sim G(M)$ 。在公式(3.2)中， $\sum_{j=1}^n m_{ij} \hat{y}_j(t-1)$ 表示个体 i 在时间 $t-1$ 时所看到的群体标准或规范，被称为个体 i 在 $t-1$ 时刻所感知到的当地表达观念。一个自然选择是对于所有 $j \in N_i$ ， $|m_{ij}| = |N_i|^{-1}$ ，对于所有的 $j \notin N_i$ ， $m_{ij} = 0$ ，其中 m_{ij} 的符号与 w_{ij} 的符号一致，当然，可以有一个合理的替代方案 $m_{ij} = w_{ij}$ ， $\forall i, j \in N$ 。

常数 $\phi_i \in (0,1)$ 编码了个体 i 对遵守群体标准压力的弹性以符合当地公众舆论。如果我们设置初始表达观念 $\hat{y}_i(0) = y_i(0)$ ，那么系统(3.1)表明当 $t=1$ 时， $y_i(1)$ 依赖于 $y_i(0)$ 。该结果表明，最终观念值将取决于 $y_i(0)$ ，但独立于 $\hat{y}_i(0)$ 。当然，我们也可以选择其他的初始值 $\hat{y}_i(0)$ ，最终的结果将表明，在温和的假设下，尽管瞬态会有所改变但最终观念将保持不变。

社会学文献表明，顺应表达观念的压力导致个体表达观念倾向于感知的群体标准^[35]。在我们的模型中，这种感知的群体标准由 $\sum_{j=1}^n m_{ij} \hat{y}_j(t)$ 表示。从众的压力可能源于不言而喻的传统、恐惧或与众不同，或在金钱激励、地位或奖励等驱动下加入团队的愿望^[35]。因此，系统(3.2)旨在捕捉个体 i 的表达观念，该观念等于由于规范压力（与 $1-\phi_i$ 成比例）而被修改或更改的个人观念，以更接近个体 i 所感知的表达观念，从而施加了一个力 $(1-\phi_i) \sum_{j=1}^n m_{ij} \hat{y}_j(t-1)$ 。 ϕ_i 捕捉到这样一个事实，即某些个体在表达自己的观念时往往受到比其他人更少的限制。

3.2 备注及引理

备注 3.2.1: 与现有的大多数模型（如 DeGroot 模型、F-J 模型、H-K 模型）不同，我们的模型同时考虑了私人观念和表达观念。此外，还充分研究了个体之间的对抗关系和固执个体。当 $\phi_i=1$ 时，我们的模型恢复为 F-J 模型^[17-18]；当 $\phi_i = \lambda_i = 1$ 时，我们的模型恢复为 DeGroot 模型^[31,33]。因此，我们的模型可以捕捉到社会个体的心理特征，可以更准确地刻画观念演化的特征。

备注 3.2.2: 在本文中， M 用于描述当地舆论 $\sum_{j=1}^n m_{ij} \hat{y}_j(t-1)$ 。通常，我们需要 $W \sim M$ 。通过随后的分析，我们发现，我们可以添加一些边，只要这些添加的边不改变个体之间的关系，我们就允许图 $G(M)$ 比图 $G(W)$ 有更多的边。换句话说，如果 $G(W) \sim G(M)$ 且，我们可以通过将节点 j 的边添加到节点 i 来获得

矩阵 M_1 (m_{ij} 的符号由个体之间的关系决定)。如果我们用 M_1 代替 M ，观念的一致性不会因此受到影响，但这将影响最终私人观念和表达观念之间的差异。如果需要更好地分析这种差异，则取一些特殊的 M ，例如， $M = [\text{sign}(w_{ij}) \frac{1}{N_i}]$ 或 $M = \Gamma 1_{n \times n} \Gamma$ ，其中 Γ 满足 $\Gamma W \Gamma \geq 0$ ， $\text{sign}(\cdot)$ 是符号函数。

为了获得我们的结果，我们还需要以下引理。

引理 3.2.1^[44]：对于任意 $A \in R_{n \times n}$ ， $\rho(A) \leq \rho(|A|)$ ；对于任意非负矩阵 $A, B \in R_{n \times n}$ ，如果 $(B - A) \geq 0$ ，则 $\rho(A) \leq \rho(B)$ 。

引理 3.2.2^[22]：设 $A \in R_{n \times n}$ 是一个随机矩阵。如果图 $G(A)$ 包含生成树，并且所有的根节点组成的强连通子图是非周期的，则 1 是 A 的唯一的最大特征值，其代数重数为 1。此外， $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 1_n w$ ，其中 $w = [w_1, w_2, \dots, w_n]$ 是特征值 1 对应的左特征向量，满足 $w_i \geq 0$ ， $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ 。特别地，如果 $G(A)$ 是强连通且非周期的，则对于所有的 $i \in N$ ， $w_i > 0$ 。

引理 3.2.3^[45]：假设 $|A|$ 是一个随机矩阵， $a_{ii} > 0$ 。如果 $G(A)$ 是强连通和结构不平衡的，或者由 $G(A)$ 的根节点组成的子图是结构不平衡的，则 $\rho(A) < 1$ 。

引理 3.2.4^[46]：假设 $A, B, C, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ，如果 $A, D, (A - BD^{-1}C)$ 是非奇异的， $(D - CA^{-1}B)$ 也是非奇异的，则

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & -A^{-1}BD \\ -D^{-1}CA & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix},$$

其中 $A = (A - BD^{-1}C)^{-1}$ ， $D = (D - CA^{-1}B)^{-1}$ 。

3.3 主要结论

为了更好的研究系统(3.1)和(3.2)，我们将把系统(3.1)和(3.2)改写成更加紧凑的形式。让 $y(t)=[y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)]^T$ 和 $\hat{y}(t)=[\hat{y}_1(t), \hat{y}_2(t), \dots, \hat{y}_n(t)]^T$ 表示影响网络中 n 个个体的私人观念和表达观念的列向量，让 $W=\widetilde{W}+\widehat{W}$ ，其中 $\widetilde{W}=\text{diag}[w_{11}, w_{22}, \dots, w_{nn}]$ ，定义 $\Lambda=\text{diag}(\lambda_i)$ 和 $\Phi=\text{diag}(\phi_i)$ ，将等式(3.2)带入等式(3.1)，根据 $\hat{y}_{i.lavg}(t)=\sum_{j \in \mathcal{N}_i} m_{ij} \hat{y}_j(t)$ ，我们可以得到

$$\begin{aligned} y_i(t+1) &= \lambda_i w_{ii} y_i(t) + \lambda_i \sum_{j \neq i}^n w_{ij} \phi_j y_j(t) + (1-\lambda_i) y_i(0) + \\ &\quad \lambda_i \sum_{j \neq i}^n w_{ij} (1-\phi_j) \sum_{k \in \mathcal{N}_j} m_{jk} \hat{y}_k(t-1). \end{aligned} \quad (3.3)$$

根据等式(3.2)和等式(3.3)，我们可以得到：

$$\begin{bmatrix} y(t+1) \\ \hat{y}(t) \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} y(t) \\ \hat{y}(t-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (I_n - \Lambda)y(0) \\ 0_n \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

P 的表示如下：

$$\begin{bmatrix} \Lambda(\widetilde{W} + \widehat{W}\Phi) & \Lambda\widehat{W}(I_n - \Phi)M \\ \Phi & (I_n - \Phi)M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

对于 W 和 P ，我们得到以下结果。

引理 3.3.1： 图 $G(W)$ 是结构平衡的当且仅当图 $G(P)$ 是结构平衡的。

证明： 当 $G(W)$ 结构平衡时，存在一个规范变换矩阵 Γ ，使得 $\Gamma W \Gamma \geq 0$ 。注意到 Λ ， I_n ， Φ ， Γ 是对角矩阵， $W \sim M$ ，我们有 $\Gamma P_{11} \Gamma = \Gamma \Lambda (\widetilde{W} + \widehat{W}\Phi) \Gamma = \Lambda (\Gamma \widetilde{W} \Gamma + \Gamma \widehat{W} \Gamma \Phi) \geq 0$ ， $\Gamma P_{12} \Gamma = \Gamma \Lambda \widehat{W} (I_n - \Phi) M \Gamma = \Lambda \Gamma \widehat{W} \Gamma (I_n - \Phi) \Gamma M \Gamma \geq 0$ ， $\Gamma P_{21} \Gamma = \Gamma \Phi \Gamma \geq 0$ ， $\Gamma P_{22} \Gamma = (I_n - \Phi) \Gamma M \Gamma \geq 0$ ，这意味着 $\text{diag}[\Gamma, \Gamma] P \text{diag}[\Gamma, \Gamma] \geq 0$ 。

反之，如果 $G(P)$ 是结构平衡的，则存在规范变换矩阵 $\Gamma=\text{diag}[\Gamma_1, \Gamma_2]$ ，使得 $\Gamma P \Gamma \geq 0$ 。这意味着 $\Gamma_2 P_{22} \Gamma_2 = \Gamma_2 (I_n - \Phi) M \Gamma_2 = (I_n - \Phi) \Gamma_2 M \Gamma_2 \geq 0$ 。因此 $\Gamma_2 M \Gamma_2 \geq 0$ ， $\Gamma_2 W \Gamma_2 \geq 0$ 。图 $G(W)$ 在结构上是平衡的。

引理 3.3.2: 如果系统中不存在开放个体, 则 $\rho(|P|) < 1$, $\rho(P) < 1$, $\rho(|P_{11}|) < 1$, $\rho(P_{11}) < 1$ 。特别是, 如果至少存在一个固执个体并且 $G(W)$ 是强连通的, 结论仍然成立。

证明: 构建矩阵 $F = \begin{bmatrix} 1 & 0_n^T & 0_n^T \\ \alpha & |P_{11}| & |P_{12}| \\ 0_n & |P_{21}| & |P_{22}| \end{bmatrix}$, 其中 $\alpha = 1_n - [|P_{11}|, |P_{12}|]1_{2n} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]^T$, 显然, 如果个体 i 是固执个体, 那么 $\alpha_i > 0$, 否则 $\alpha_i = 0$ 。 $G(F)$ 的顶点标注成 $N_0, N_1, \dots, N_{2n}$, 子图 $G(|P_{11}|)$ 和 $G(|P_{22}|)$ 的顶点分别为 $N_1, \dots, N_n$ 和 $N_{n+1}, \dots, N_{2n}$, 根据 α 的定义, 从顶点 N_0 到每个固执个体都存在一条边。这意味着顶点 N_0 至少有一条到子图 $G\left(\begin{bmatrix} 1 & 0_n^T \\ \alpha & |P_{11}| \end{bmatrix}\right)$ 中其他顶点的路径。对于 $P_{21} = \phi$, 所有 $j \in N$, 存在从 N_j 到 N_{n+j} 的边, 这意味着顶点 N_0 是 $G(F)$ 唯一的根节点。通过简单的计算, $F1_{2n+1} = 1_{2n+1}$, 这表明矩阵 F 是一个随机矩阵。根据引理 3.2.2, 1 是 F 的唯一的最大特征值, 其代数重数为 1。

$$\text{另一方面, } \text{Det}(\lambda I_{2n+1} - F) = \text{Det}\left(\begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0_{2n}^T \\ -\tilde{\alpha} & \lambda I_{2n} - |P| \end{bmatrix}\right) = (\lambda - 1)\text{Det}(\lambda I_{2n} - |P|),$$

这里 $\tilde{\alpha} = [\alpha^T, 0_n^T]^T$, 根据上面的讨论, 我们可以得出 $\rho(|P|) < 1$, 通过引理 3.2.1, 可得 $\rho(P) < 1$ 。让 $\tilde{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0_n^T \\ \beta & |P_{11}| \end{bmatrix}$, 这里 $\beta = 1_n - |P_{11}|1_n$, 与上述结论相似, 可以得到 $\rho(|P_{11}|) < 1$, $\rho(P_{11}) < 1$ 。显然, 如果存在固执个体, 并且 $G(W)$ 是强连通的, 则系统中不存在开放性个体。所以引理的结论仍然成立。完成证明。

定理 3.3.1: 如果系统中不存在开放个体, 则系统(3.1)和(3.2)是收敛的, 且

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y^* = Hy(0), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{y}(t) = \hat{y}^* = SHy(0), \quad (3.6)$$

其中 $H = (I_n - P_{11} - P_{12}(I_n - P_{22})^{-1}P_{21})^{-1}(I_n - \Lambda)$, $S = (I_n - P_{22})^{-1}P_{21}$ 都是非负的行随机矩阵。如果 W 是结构平衡的, 则 S 、 H 、 SH 也是结构平衡的, 且 $|S|$ 、 $|H|$ 是行随机的, S 是非奇异的。

证明： 根据引理 3.3.1, $\rho(P) < 1$ 。系统 (2.4) 是具有恒定输入 $[((I_n - \Lambda)y(0))^T, 0_n^T]^T$ 的时不变线性系统。利用线性系统理论^[47]的结果, 我们可以得出 $I_{2n} - P$ 是非奇异的, 并且系统(2.4)是以指数级收敛的速度快速收敛于

$$\begin{bmatrix} \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{y}(t) \end{bmatrix} = (I_{2n} - P)^{-1} \begin{bmatrix} (I_n - \Lambda)y(0) \\ 0_n \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

接下来, 我们将计算 $I_{2n} - P$ 。因为 $I_{2n} - P$, $I_n - P_{11}$, $I_n - P_{22}$ 都是非奇异的, 所以矩阵

$$\begin{bmatrix} I_n - P_{11} & -P_{12} \\ -P_{21} & I_n - P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times n} \\ (I_n - P_{22})^{-1}P_{21} & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n - P_{11} - P_{12}(I_n - P_{22})^{-1}P_{21} & -P_{12} \\ 0_{n \times n} & I_n - P_{22} \end{bmatrix}$$

也是非奇异的, 即 $I_n - P_{11} - P_{12}(I_n - P_{22})^{-1}P_{21}$ 是非奇异的, 根据引理 3.2.4, 我们可以得到

$$(I_{2n} - P)^{-1} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & (I_n - P_{11})^{-1}P_{12}\mathcal{D} \\ (I_n - P_{22})^{-1}P_{21}\mathcal{A} & \mathcal{D} \end{bmatrix},$$

其中, $\mathcal{A} = (I_n - P_{11} - P_{12}(I_n - P_{22})^{-1}P_{21})^{-1}$, $\mathcal{D} = (I_n - P_{22} - P_{21}(I_n - P_{11})^{-1}P_{12})^{-1}$ 。所以

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \mathcal{A}(I_n - \Lambda)y(0) = Hy(0), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{y}(t) = (I_n - P_{22})^{-1}P_{21}\mathcal{A}(I_n - \Lambda)y(0) = SHy(0)。$$

接下来我们将证明当 W 是结构平衡时, S , H 也是结构平衡的。如果 W 是结构平衡的, 则存在一个规范变换矩阵 Γ , 使得 $\Gamma W \Gamma \geq 0$ 。根据引理 3.3.1, P 也是结构平衡且 $\text{diag}[\Gamma, \Gamma]P \text{diag}[\Gamma, \Gamma] = |P| \geq 0$ 。根据引理 3.3.2, $\rho(|P|) < 1$, $\rho(|P_{11}|) < 1$, $\rho(|P_{22}|) < 1$ 。与上面的结论类似, 我们有

$$(I_{2n} - |P|)^{-1} = \begin{bmatrix} \mathfrak{A} & (I_n - |P_{11}|)^{-1}|P_{12}|\mathfrak{M} \\ (I_n - |P_{22}|)^{-1}|P_{21}|\mathfrak{A} & \mathfrak{M} \end{bmatrix},$$

这里 $\mathfrak{A} = (I_n - |P_{11}| - |P_{12}|(I_n - |P_{22}|)^{-1}|P_{21}|)^{-1}$, $\mathfrak{M} = (I_n - |P_{22}| - |P_{21}|(I_n - |P_{11}|)^{-1}|P_{12}|)^{-1}$ 。注意到

$$\begin{aligned} (I_{2n} - |P|)^{-1} &= \sum_{k=0}^{\infty} |P|^k \geq 0, \\ (I_n - |P_{22}|)^{-1} &= \sum_{k=0}^{\infty} |P_{22}|^k \geq 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

所以, $\mathfrak{A} \geq 0$, $\mathfrak{M} \geq 0$, $\mathfrak{h} = (I_n - |P_{22}|)^{-1}|P_{21}| \geq 0$, 又因为 $(I_{2n} - |P|)^{-1} = \text{diag}[\Gamma, \Gamma](I_{2n} - P)\text{diag}[\Gamma, \Gamma]^{-1} = \text{diag}[\Gamma, \Gamma](I_{2n} - P)^{-1}\text{diag}[\Gamma, \Gamma]$, 我们可以得到 $\mathfrak{A} = \Gamma A \Gamma \geq 0$, $\mathfrak{h} \mathfrak{A} = \Gamma S$, $A \Gamma = (\Gamma S \Gamma)(\Gamma A \Gamma) = (\Gamma S \Gamma) \mathfrak{A}$, 所以 $\mathfrak{h} = \Gamma S \Gamma \geq 0$, $\mathfrak{H} = \Gamma \mathfrak{A} \Gamma (I_n - \Lambda) = \Gamma \mathfrak{A} (I_n - \Lambda) \Gamma \geq 0$, 同时, $\mathfrak{h} \mathfrak{A} (I_n - \Lambda) = \Gamma S \Gamma \Gamma \mathfrak{H} \Gamma = \Gamma S \mathfrak{H} \Gamma \geq 0$, 可以得出 S, H, SH 是结构平衡。注意到 $P_{21} = \phi$ 是非奇异的, 所以 $\mathfrak{h}$ 是非奇异的。

接下来, 我们将证明 $|\mathfrak{S}| |\mathfrak{H}|$ 是行随机矩阵。首先, 因为 $|\mathfrak{S}| = \mathfrak{h}$, $|\mathfrak{H}| = \mathfrak{A} (I_n - \Lambda)$ $\mathfrak{h}$, 所以我们只要证明 $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{A} (I_n - \Lambda)$ 是行随机矩阵。由于 $\mathfrak{h}^{-1} = |P_{21}|^{-1} (I_n - |P_{22}|) = \phi^{-1} (I_n - |P_{22}|)$, 所以 $\mathfrak{h}^{-1} \mathbf{1}_n = |P_{21}|^{-1} (I_n - |P_{22}|) \mathbf{1}_n = \phi^{-1} (I_n - (I_n - \phi) |M|) \mathbf{1}_n = \phi^{-1} (I_n \mathbf{1}_n - (I_n - \phi) \mathbf{1}_n) = \phi^{-1} \phi \mathbf{1}_n = \mathbf{1}_n$, $\mathfrak{h} \mathbf{1}_n = \mathfrak{h} \mathfrak{h}^{-1} \mathbf{1}_n = \mathbf{1}_n$, 这意味着 $\mathfrak{h}$ 是一个行随机矩阵。另一方面, $\mathfrak{A}^{-1} = I_n - |P_{11}| - |P_{12}|(I_n - |P_{22}|)^{-1}|P_{21}| = I_n - |P_{11}| - |P_{12}| \mathfrak{h}$, 所以,

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}^{-1} \mathbf{1}_n &= (I_n - |P_{11}| - |P_{12}| \mathfrak{h}) \mathbf{1}_n \\ &= I_n \mathbf{1}_n - |P_{11}| \mathbf{1}_n - |P_{12}| \mathbf{1}_n \\ &= I_n \mathbf{1}_n - (|P_{11}| + |P_{12}|) \mathbf{1}_n \\ &= I_n \mathbf{1}_n - \Lambda \mathbf{1}_n \\ &= (I_n - \Lambda) \mathbf{1}_n, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$\mathbf{1}_n = (\mathfrak{A} \mathfrak{A}^{-1}) \mathbf{1}_n = \mathfrak{A} (\mathfrak{A}^{-1} \mathbf{1}_n) = \mathfrak{A} (I_n - \Lambda) \mathbf{1}_n = |\mathfrak{H}| \mathbf{1}_n$, 因此, $|\mathfrak{H}|$ 是行随机的。这样我们就完成了定理 3.3.1 的证明。

定理 3.3.1 表明, 如果不存在开放性个体, 最终的私人观念和表达观念取决于最初的私人观念, 但最初的表达观念以指数级增长的速度被遗忘。你可以选择任意

的初始表达观念，但它们不会影响最终的私人观念和表达观念。当然，瞬态会有所不同。当 $G(W)$ 是结构平衡的， $|S|$ 和 $|H|$ 也是结构平衡的，且矩阵 $|S|$ 和 $|H|$ 是行随机的。当 $G(W)$ 结构不平衡时， $|S|$ 和 $|H|$ 的具体特征可能相当复杂，这将是今后工作的重点之一。

推论 3.3.1: 如果 $G(W)$ 是强连通的，并且至少存在一个固执个体或者所有的 $\lambda_i < 1$ ，则定理 3.3.1 成立。

证明: 显然， $G(W)$ 是强连通的或者 $\lambda_i < 1$ ，这意味着社会网络中不存在开放性个体，因此定理 3.3.1 依然成立。

推论 3.3.2: 如果 $G(W)$ 是强连通非周期的，并且社会网络中不存在固执个体，则所有个体的观念将达到一致，即： $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{y}(t) = \alpha \mathbf{1}_n$ ，其中 α 是某个实数。

证明: 当社会网络中不存在固执个体时，系统(3.1)和(3.2)将变成经典的 DeGroot 模型，根据 DeGroot 模型结果，这里我们仅需证明当所有 λ_i 都取 1 时， $G(P)$ 是强连通的和非周期的即可。显然，当图 $G(W)$ 是强连通和非周期的时，图 $G(P_{11})$ 和图 $G(P_{22})$ 也是强连通和非周期的。注意到 P_{12} 和 P_{21} 都不是零矩阵，因此图 $G(P)$ 是强连通和非周期的。这样我们就完成推论 3.3.2 的证明。

备注 3.3.1: 当不考虑个体之间的竞争时，文献[35]指出，如果 $G(W)$ 是强连通非周期的，且 $0 < \lambda_i < 1$ ，则最终的私人观念和表达观念依赖于初始的私人观念并独立于初始的表达观念。定理 3.3.1 表明，即使网络不是强连通的，或者存在 $\lambda_i = 1$ 或 0，只要没有开放性个体，这个结论仍然成立。这说明我们的结果在一定程度上具有较强的适用性。如果 $G(W)$ 强连通且 $0 < \lambda_i < 1$ ，则 S 和 H 的特性会发生更好的变化。

推论 3.3.3: 假设 $G(W)$ 是结构平衡、强连通且非周期的。对于所有 $i \in N$ ，若 $0 < \lambda_i < 1$ ，则 $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = Hy(0)$ ， $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{y}(t) = SHHy(0)$ 。 S, H, SHH 也是结构平衡的，

$\mathcal{S} > 0, \mathbb{H} > 0$ 是行随机的。此外， $\mathcal{S}$ 和 $\mathbb{H}$ 是非奇异的。特别地，如果我们仍然要求 $W \geq 0$ ，则 $\mathcal{S} > 0$ 和 $\mathbb{H} > 0$ 是行随机，可逆的。

证明： $G(W)$ 的强连通性意味着不存在开放性个体。如果 $G(W)$ 是结构平衡的，强连通的，则定理 3.3.1 的结果是有效的。 $0 < \lambda_i < 1$ 表示 $I_n - \Lambda$ 是可逆的，根据定理 3.3.1 的证明， $\mathbb{H}$ 是可逆的。 $W \geq 0$ 表示 $\mathcal{S} > 0$ 和 $\mathbb{H} > 0$ 。因此，这里我们只需要证明 $|\mathcal{S}| > 0$ 和 $|\mathbb{H}| > 0$ 。对于所有 $i \in N$ ，当 $0 < \lambda_i < 1$ 时， $G(\Lambda(\tilde{W} + \widehat{W}\Phi)) \sim G(W)$ ，这意味着图 $G(|P|)$ 的子图 $G(|P_{11}|)$ 是强连通非周期的。由于 $G(M) \sim G(W)$ ，所以子图 $G(|P_{22}|) = (I_n - \phi)|M|$ 也是强连通和非周期的。 $|P_{21}| = \phi$ 意味着从子图 $G(|P_{11}|)$ 到子图 $G(|P_{22}|)$ 有 n 条边， $|P_{21}| = \Gamma\Lambda\widehat{W}(I_n - \Phi)M\Gamma = \Lambda\Gamma\widehat{W}\Gamma(I_n - \Phi)\Gamma M\Gamma \sim |\widehat{W}| \|M\| \neq 0$ ，因为 $G(W)$ 和 $G(M)$ 是强连通非周期的，所以从子图 $G(|P_{22}|)$ 到子图 $G(|P_{11}|)$ 至少存在一条边。我们可以得出图 $G(|P|)$ 是强连通和非周期的，因此矩阵 $|P|$ 和 $|P_{22}|$ 是本原的，这意味着存在正整数 K_1 和 K_2 使得 $(|P|)^{K_1} > 0, (|P_{22}|)^{K_2} > 0$ 。将公式(3.10)与定理 3.3.1 的证明相结合，可以得出： $\mathcal{S} > 0$ 和 $\mathbb{H} > 0$ 。

根据 $\mathcal{S}, \mathbb{H}$ 的特征，我们可以分析稳定状态下观念的分歧程度。为了便于表述，我们分别用 y^* 和 $\hat{y}^*$ 来表示最终的私人观念和表达观念。令 $x_{\max} = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 和 $x_{\min} = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 分别表示 $x \in \mathbb{R}^n$ 的最大项和最小项。

定理 3.3.2： 假设系统中没有开放性个体。如果 W 是结构平衡的，那么最终的观念将符合以下不等式：

$$|\hat{y}^*|_{\max} \leq |y^*|_{\max} \leq |y(0)|_{\max}, \quad (3.10)$$

此外，如果 $G(W)$ 是强连通非周期的并且 $0 < \lambda_i < 1$ ，只要 $\alpha \in \mathbb{R}$ ， $y(0) \neq \alpha \Gamma 1_n$ ，规范对角矩阵 Γ 满足 $\Gamma W \Gamma \geq 0$ ，则上述不等式是严格的。

证明：通过定理 3.3.1， $y^* = \mathbb{H}y(0)$ 和 $\hat{y}^* = \mathcal{S}y^*$ ，注意到 $|\mathcal{S}|$ 和 $|\mathbb{H}|$ 都是行随机的，所以

$$|y^*| = |\mathbb{H}y(0)| \leq |\mathbb{H}| |y(0)| \leq |\mathbb{H}| (|y(0)|_{\max} \mathbf{1}_n) = |y(0)|_{\max} \mathbf{1}_n, \quad (3.11)$$

即 $|y^*|_{\max} \leq |y(0)|_{\max}$ ，相似的，我们可以得到 $|\hat{y}^*|_{\max} \leq |y^*|_{\max}$ ，如果 $G(W)$ 是强连通非周期的并且 $0 < \lambda_i < 1$ ，则 $\Gamma \mathbb{H} \Gamma \geq 0$ ， $\Gamma \mathcal{S} \Gamma \geq 0$ 是行随机的，并且是不可约的。

因此，当 $y(0) \neq \alpha \mathbf{1}_n$ 时， $|\hat{y}^*|_{\max} \leq |y^*|_{\max} \leq |y(0)|_{\max}$ 。

备注 3.3.2：注意到 $|\hat{y}^*|_{\min}$ ， $|y^*|_{\min}$ 和 $|y(0)|_{\min}$ ，这三者之间的关系并不明确。例如如果矩阵 $\mathbb{H}$ 中有一行满足该行上存在不同符号的元素，对于 $y^* = \mathbb{H} \mathbf{1}_n$ ($y(0) = \mathbf{1}_n$)，显然 $|y^*|_{\min} < 1 = |y(0)|_{\min}$ 。另一方面，设 $0 < \beta \in \mathbb{R}^n$ ，满足 $\beta_{\max} > \beta_{\min}$ 和 $y(0) = \Gamma \beta$ ，我们有 $y^* = \mathbb{H}y(0) = \mathbb{H} \Gamma \beta = \Gamma (\Gamma \mathbb{H} \Gamma) \beta = \Gamma |\mathbb{H}| \beta$ ，所以， $|y^*|_{\min} = (|\mathbb{H}| \beta)_{\min} \geq \beta_{\min} = |y(0)|_{\min}$ ，因此他们之间的大小关系并不明确并且相对复杂。

推论 3.3.4：假设系统中没有开放性个体，如果 $W \geq 0$ ，则最终的观点符合以下不等式：

$$y(0)_{\max} \geq y^*_{\max} \geq \hat{y}^*_{\max}, \quad y(0)_{\min} \leq y^*_{\min} \leq \hat{y}^*_{\min}, \quad (3.12)$$

此外，如果 $G(W)$ 是强连通非周期的，并且 $0 < \lambda_i < 1$ ，只要 $y(0) \neq \alpha \mathbf{1}_n$ ，上述不等式是严格的。

证明：当 $W \geq 0$ 时，因为 $\mathcal{S} > 0$ 和 $\mathbb{H} > 0$ 是行随机的，结合随机矩阵的性质和定理 3.3.2 的证明，可以得出推论 3.3.4。

通过定理 3.3.1， y^* 和 $\hat{y}^*$ 之间的差异取决于 $\mathcal{S}$ ，也就是 M 和 ϕ 。换句话说，如果我们能获得更多的关于 M 和 ϕ 的信息，我们就可以深入的分析 y^* 和 $\hat{y}^*$ 之间的差异。 ϕ 捕捉到个体对压力的适应能力是很难提前获得的，但是它的上限和下限通常是可以估计的。当然一般来说，提前获得 M 也是困难的，但对于一个小

的社会群体（例如董事会），所有的成员都很熟悉，我们可以取 $m_{ij} = \frac{1}{n}$ 或者 $-\frac{1}{n}$ 。在这里，它们的合作与竞争关系与 W 是一致的，也就是，存在一个规范变换矩阵 Γ ，使得 $\Gamma W \Gamma \geq 0$ 和 $\Gamma M \Gamma \geq 0$ ，为了便于将来的讨论，我们假设个体被分为两个集合 $N_1 = \{1, 2, \dots, n_r\}$ 和 $N_2 = \{n_r + 1, n_r + 2, \dots, n\}$ ，在同一个集合中的个体处于合作关系，而不同集合之间的个体存在竞争关系。换句话说，存在一个规范变换矩阵 $\Gamma = \text{diag}\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$ ，使得 $\Gamma W \Gamma \geq 0$ 和 $\Gamma M \Gamma = \frac{1}{n} 1_{n \times n} > 0$ ，其中 $\Gamma_1 = \text{diag}\{1, 1, \dots, 1\}$ 和 $\Gamma_2 = \text{diag}\{-1, -1, \dots, -1\}$ ，在这种情况下，我们有以下推论：

推论 3.3.5: 假设系统中没有开放性个体，并且 $\Gamma W \Gamma \geq 0$ ，我们让 $M = \frac{1}{n} \Gamma 1_{n \times n} \Gamma$ ， $\varepsilon(\phi) = 1 - \frac{\phi_{\min}}{\phi_{\max}}(1 - \phi_{\max})$ ，其中 $\phi_{\max} = \max\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ ， $\phi_{\min} = \min\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ ，对于初始的私人观念 $y(0) \in \mathcal{Y} = \{y \in \mathbb{R}^n, \Gamma y \geq 0 \text{ 或者 } \Gamma y \leq 0\}$ ，

$$|\hat{y}^*|_{\max} - |\hat{y}^*|_{\min} \leq \varepsilon(\phi)(|y^*|_{\max} - |y^*|_{\min}). \quad (3.13)$$

证明： 定义函数 $V(x) = x_{\max} - x_{\min}$ ， $x \in \mathbb{R}^n$ ，则 $V(y(t))$ 代表观念 $y(t)$ 的分歧程度，对于一个行随机矩阵 A ，定义遍历系数 $\tau(A) = 1 - \min_{i,j \in \{1, \dots, n\}} \sum_{s=1}^n \min\{a_{is}, a_{js}\}$ ，则对函数 $V(x)$ 有 $V(Ax) \leq \tau(A)V(x)$ [48]，根据定理 3.3.1， $\hat{y}^* = \mathcal{S}y^* = \mathcal{S}\Gamma\Gamma y^*$ ，这意味着 $\Gamma\hat{y}^* = \Gamma\mathcal{S}y^* = \Gamma\mathcal{S}\Gamma\Gamma y^* = |\mathcal{S}| \Gamma y^*$ ，这导致

$$V(\Gamma\hat{y}^*) = V(|\mathcal{S}| \Gamma y^*) \leq \tau(|\mathcal{S}|)V(\Gamma y^*), \quad (3.14)$$

又因为，当 $M = n^{-1} 1_n 1_n^T$ 时，满足 $\tau(|\mathcal{S}|) \leq \varepsilon(\phi)$ [11]，我们可以得到

$$V(\Gamma\hat{y}^*) \leq \varepsilon(\phi)V(\Gamma y^*), \quad (3.15)$$

另一方面，如果 $y(0) \in \mathcal{Y}$ ， $y^* = \mathcal{H}\Gamma\Gamma y(0) = \Gamma(\Gamma\mathcal{H}\Gamma)\Gamma y(0) = \Gamma|\mathcal{H}|\Gamma y(0)$ ，那么 $y^* \in \mathcal{Y}$ 。类似地，我们可以得到 $\hat{y}^* \in \mathcal{Y}$ 。当 $y^*, \hat{y}^* \in \mathcal{Y}$ ，很容易可以得到， $V(\Gamma\hat{y}^*) = |\hat{y}^*|_{\max} - |\hat{y}^*|_{\min}$ 和 $V(\Gamma y^*) = |y^*|_{\max} - |y^*|_{\min}$ 。证明完毕。

$y(0) \in \mathcal{Y}$ 意味着对于 $i, j \in N_1(N_2)$, $y_i(0)y_j(0) \geq 0$, $i \in N_1(N_2)$, $j \in N_2(N_1)$, $y_i(0)y_j(0) \leq 0$ 。一般来说, 在同一个群体(合作关系)中个体的初始值具有相同的符号, 而不同群体(竞争关系)之间个体的初始值具有不同的符号。因此, 假设 $y(0) \in \mathcal{Y}$ 通常是有效的。众所周知, 观念分歧可能会造成紧张气氛, 甚至引发暴力事件^{[1],[19],[35]}。所以, 评估或监控分歧的程度是很有意义的, 它可能会更容易获得表达观念分歧的程度。如果我们得到了 $\phi_{\max}$ 和 $\phi_{\min}$, 我们可以根据(3.13)获得私人观念分歧水平的下界。如果 $y(0) \notin \mathcal{Y}$, 情况将变得更加复杂, 但不管怎样, 不等式(3.14)仍然成立, 这意味着 $(\Gamma \hat{y}^*)_{\max} - (\Gamma \hat{y}^*)_{\min} \leq \varepsilon(\phi)[(\Gamma y^*)_{\max} - (\Gamma y^*)_{\min}]$ 。由于 Γ 的存在, 仍然很难估计私人观念分歧的程度, 当然, 如果 $W \geq 0$, 也就是 $\Gamma = I_n$, 一切将变得清晰, 在这种情况下, 公式(3.14)意味着 $\hat{y}_{\max}^* - \hat{y}_{\min}^* \leq \varepsilon(\phi)(y_{\max}^* - y_{\min}^*)$ 。

3.4 数值模拟

在本节中, 我们将给出例子来观察系统的状态演化以验证我们获得的结论。

例 3.4.1: 在这个例子中, 我们考虑了一个具有 7 个社会个体的社会网络, 网络拓扑 W , M 和固执系数 Λ 如下:

$$W_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0 & -0.4 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & -0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & -0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.3 & -0.2 & 0.3 & 0.2 \\ -0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.3 \end{bmatrix},$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0 & -0.2 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & -0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & -0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.3 & -0.2 & 0.2 & 0.3 \\ -0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

$\Lambda_1 = \text{diag}[0, 0.1, 1, 1, 1, 1, 1]$ 。根据 W_1 ， M_1 和 Λ_1 可以很容易得出 $G(W_1) \sim G(M_1)$ 是结构平衡的，但并不是强连通的。将 W_1 和 M_1 相结合，我们可以观察到这里存在完全固执个体，固执个体和非固执个体，但不存在开放性个体。随机生成 $\phi_i \in (0, 1)$ ，根据定理 3.3.1，私人观念和表达观念都收敛到一个稳定状态，观念的演化如图 3-1 所示，从图 3-1 中，可以看出观念很快收敛到一个稳定的状态，并且 $|\hat{y}^*|_{\max} = |y^*|_{\max}$ 。

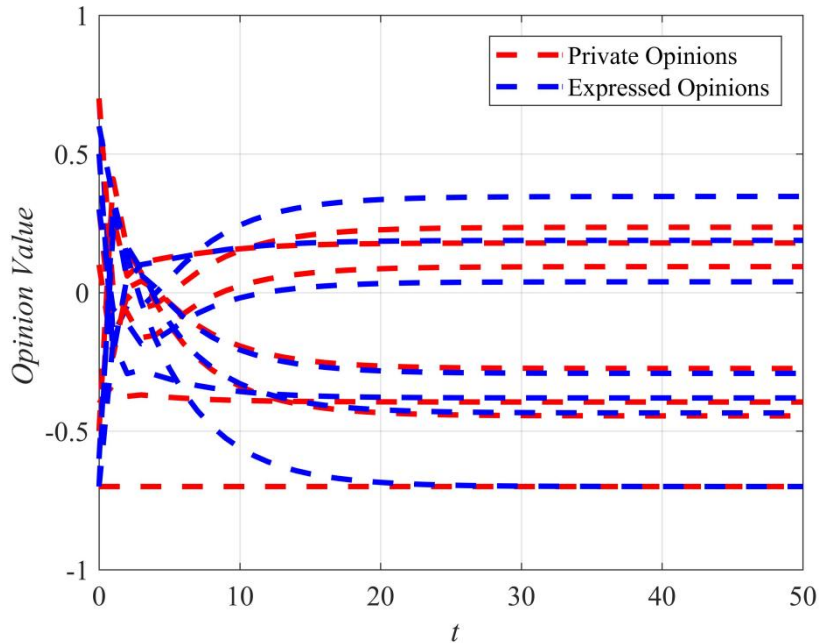


图 3-1 当 W 是结构平衡并且不是强连通时，个体的表达观念和私人观念的演化轨迹。

我们试图添加一些边使 W_1 和 M_1 强连通（结构平衡保持不变），我们让所有的个体都是固执个体（ $\lambda_i \in (0,1)$ ）。在这种情况下，意见的演变如图 3-2 所示。从图 3-2 可以看出 $|y(0)|_{\max} > |y^*|_{\max} > |\hat{y}^*|_{\max}$ ，这意味着固执个体和强连通性可能会加剧 $|\hat{y}^*|_{\max}$ 和 $|y^*|_{\max}$ 的差异。此外，让 $\phi_i \in (0.4, 0.5)$ ，也就是 $\varepsilon(\phi) = 0.6$ ，当初始观念和 M_1 满足推论 3.3.4 的要求时，我们可以得到 $|\hat{y}^*|_{\max} = 0.5802$ ， $|\hat{y}^*|_{\min} = 0.4906$ ， $|y^*|_{\max} = 0.6882$ ， $|y^*|_{\min} = 0.1376$ 。明显 $|\hat{y}^*|_{\max} - |\hat{y}^*|_{\min} \leq \varepsilon(\phi) (|y^*|_{\max} - |y^*|_{\min})$ ，这意味着 $\frac{|\hat{y}^*|_{\max} - |\hat{y}^*|_{\min}}{\varepsilon(\phi)}$ 可以作为 $(|y^*|_{\max} - |y^*|_{\min})$ 的下界。假设这个社会网络中不存在固执个体，根据推论 3.3.2，社会个体将达到一致，其观念的演化如图 3-3 所示，根据图 3-3，明显的可以看出，社会个体的所有观念快速的达到了一致。这表明了固执个体往往更容易引起观念的差异，从而对社会网络的和谐性产生不良的影响。

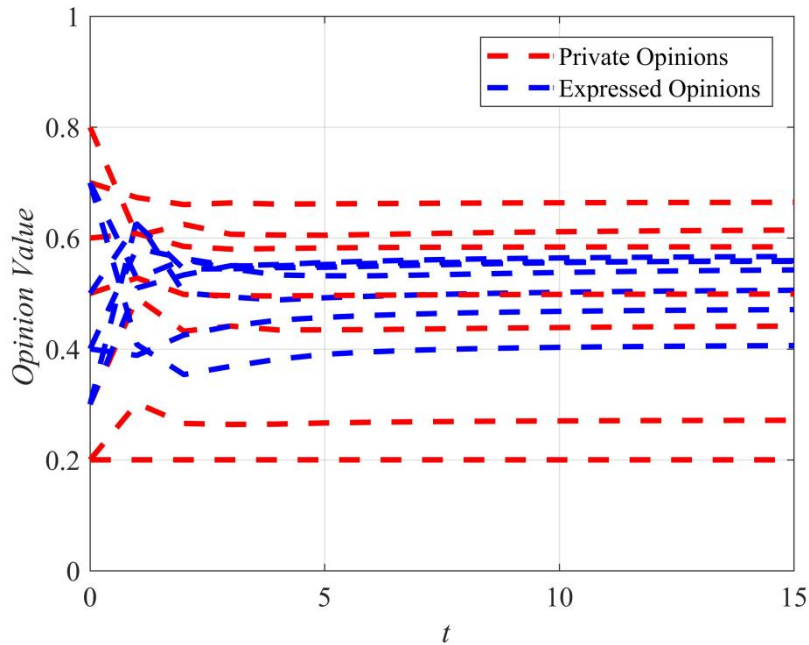


图 3-2 当 W 是结构平衡和强连通时，个体的表达观念和私人观念的演化轨迹。

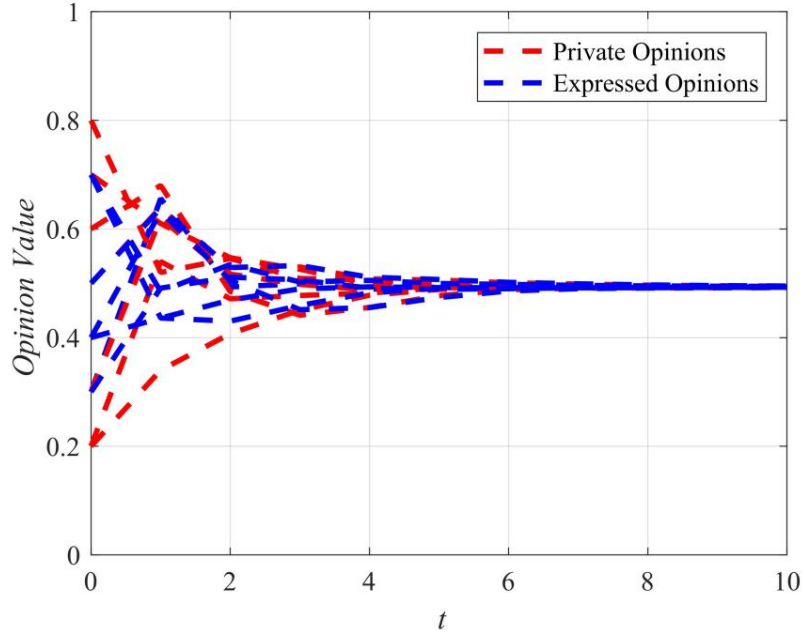


图 3-3 当固执个体不存在时，个体的表达观念和私人观念的演化轨迹。

我们将 W_1 和 M_1 重置如下：

$$W_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0 & 0.2 & -0.2 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.2 & -0.3 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.2 & 0.1 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.3 & 0.3 & 0 & -0.2 \\ 0 & -0.3 & 0 & 0 & 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ -0.2 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0.3 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0 & 0.2 & -0.2 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.2 & -0.3 & -0.1 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.4 & 0.2 & 0 & -0.2 \\ 0 & -0.3 & 0 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0.3 \\ -0.3 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0.3 & 0.3 \end{bmatrix},$$

根据上述矩阵,我们发现尽管社会网络是结构不平衡的,由于不存在开放性个体,所有的观念仍然可以以指数收敛的速度快速收敛到稳定的状态。图 3-4 展示了观念的演变轨迹。

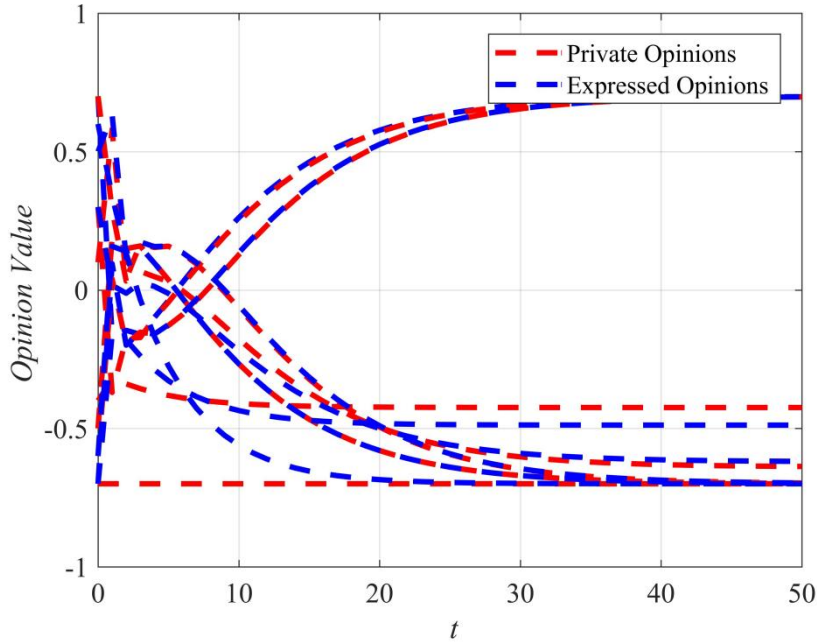


图 3-4 当 W 是结构不平衡时, 个体的表达观念和私人观念的演化轨迹。

3.5 本章小节

在这一章节中,我们提出了一种基于个体的人际影响网络的观念动力学模型,在这个模型中,我们不仅有表达观念和私人观念,同时还有固执个体,分析了当系统中存在开放性个体时,无论网络拓扑是否是结构平衡,我们的模型总是可以以指数收敛的速度快速收敛到稳定状态。

第4章 具有开放性个体的观念动力学模型的动力学分析

在本章中，我们对第三章提出的模型进行进一步的分析，我们探索了当系统中存在开放性个体时，观念的演变情况。在不失一般性的情况下，对所有个体进行重新分类，前 r 个个体为非开放性个体，其余个体为开放性个体，然后分别在网络拓扑是结构平衡和结构不平衡时，研究个体在社会网络中的观念演化的情况，得到若干观念收敛的条件。最后，我们通过数值模拟技术来验证我们理论分析得出的结论。

4.1 模型描述

在本节中，我们的系统允许开放性个体的存在。在不失一般性的情况下，我们假设个体 1 到 r 是非开放性个体，个体 $r+1$ 到 n 是开放个体。在这种情况下，

Λ , $\widehat{W}$, $\widetilde{W}$, M 可以被重写为以下分块矩阵：

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \mathbf{0}_{r \times (n-r)} \\ \mathbf{0}_{(n-r) \times r} & I_{n-r} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{W} = \begin{bmatrix} \widetilde{W}_{11} & \mathbf{0}_{r \times (n-r)} \\ \mathbf{0}_{(n-r) \times r} & \widetilde{W}_{22} \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \mathbf{0}_{r \times (n-r)} \\ \mathbf{0}_{(n-r) \times r} & \Phi_{22} \end{bmatrix},$$

$$\widehat{W} = \begin{bmatrix} \widehat{W}_{11} & \widehat{W}_{12} \\ \mathbf{0}_{(n-r) \times r} & \widehat{W}_{22} \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ \mathbf{0}_{(n-r) \times r} & M_{22} \end{bmatrix}。 \text{ 让 } \mathbf{Y}_1(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_r(t)]^T,$$

$$\mathbf{Y}_2(t) = [y_{r+1}(t), y_{r+2}(t), \dots, y_n(t)]^T, \quad \hat{\mathbf{Y}}_1(t) = [\hat{y}_1(t), \hat{y}_2(t), \dots, \hat{y}_r(t)]^T, \quad \hat{\mathbf{Y}}_2(t) = [\hat{y}_{r+1}(t), \hat{y}_{r+2}(t), \dots, \hat{y}_n(t)]^T。 \text{ 通过公式(2.4)，我们可以得到}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_1(t+1) = & \Lambda_{11}(\widetilde{W}_{11} + \widehat{W}_{11}\Phi_{11})\mathbf{Y}_1(t) + \Lambda_{11}\widehat{W}_{12}\Phi_{22}\mathbf{Y}_2(t) \\ & + \Lambda_{11}\widehat{W}_{11}(I_r - \Phi_{11})M_{11}\hat{\mathbf{Y}}_1(t-1) \\ & + \Lambda_{11}\widehat{W}_{11}(I_r - \Phi_{11})M_{12}\hat{\mathbf{Y}}_2(t-1) \\ & + \Lambda_{11}\widehat{W}_{12}(I_{n-r} - \Phi_{22})M_{22}\hat{\mathbf{Y}}_2(t-1) \\ & + (I_r - \Lambda_{11})\mathbf{Y}_1(0), \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{Y}_2(t+1) = (\widetilde{W}_{22} + \widehat{W}_{22}\Phi_{22})\mathbf{Y}_2(t) + \widehat{W}_{22}(I_{n-r} - \Phi_{22})M_{22}\hat{\mathbf{Y}}_2(t-1), \quad (4.2)$$

$$\hat{\mathbf{Y}}_1(t) = \Phi_{11}\mathbf{Y}_1(t) + (I_r - \Phi_{11})M_{11}\hat{\mathbf{Y}}_1(t-1) + (I_r - \Phi_{11})M_{12}\hat{\mathbf{Y}}_2(t-1), \quad (4.3)$$

$$\hat{Y}_2(t) = \Phi_{22}Y_2(t) + (I_{n-r} - \Phi_{22})M_{22}\hat{Y}_2(t-1). \quad (4.4)$$

让 $z_1(t) = [Y_1^T(t), \hat{Y}_1^T(t-1)]^T$, $z_2(t) = [Y_2^T(t), \hat{Y}_2^T(t-1)]^T$, 很明显, $z_1(t)$ 表示非开放性个体的私人观念和表达观念, $z_2(t)$ 表示开放性个体的私人观念和表达观念。我们令 $\Psi_{11} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \Phi_{11} & \alpha_{22} \end{bmatrix}$, $\Psi_{12} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ 0 & \beta_{22} \end{bmatrix}$, $\Psi_{22} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \Phi_{22} & \gamma_{22} \end{bmatrix}$ 。这里 $\alpha_{11} = \Lambda_{11}(\widetilde{W}_{11} + \widehat{W}_{11}\Phi_{11})$, $\alpha_{12} = \Lambda_{11}\widehat{W}_{11}(I_r - \Phi_{11})M_{11}$, $\alpha_{22} = (I_r - \Phi_{11})M_{11}$, $\beta_{11} = \Lambda_{11}\widehat{W}_{12}\Phi_{22}$, $\beta_{12} = \Lambda_{11}[\widehat{W}_{11}(I_r - \Phi_{11})M_{12} + \widehat{W}_{12}(I_{n-r} - \Phi_{22})M_{22}]$, $\beta_{22} = (I_r - \Phi_{11})M_{12}$, $\gamma_{11} = \widetilde{W}_{22} + \widehat{W}_{22}\Phi_{22}$, $\gamma_{12} = \widehat{W}_{22}(I_{n-r} - \Phi_{22})M_{22}$, $\gamma_{22} = (I_{n-r} - \Phi_{22})M_{22}$ 。通过公式(4.2)到(4.5), 系统(3.1)可以被重写为以下形式:

$$z_1(t+1) = \Psi_{11}z_1(t) + \Psi_{12}z_2(t) + z_1(0), \quad (4.5)$$

$$z_2(t+1) = \Psi_{22}z_2(t), \quad (4.6)$$

这里 $z_1(0) = [((I_r - \Lambda_{11})\mathbf{x}_1(0))^T, \mathbf{0}_r^T]^T$ 。

4.2 主要结论

在这个小节, 我们将对系统(4.5)和(4.6)的收敛性进行分析。

定理 4.2.1: 如果 $z_2(t)$ 收敛, 那么 $z_1(t)$ 也收敛。此外, 当 $\lim_{t \rightarrow \infty} z_2(t) = z_2^*$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z_1(t) = (I_{2r} - \Psi_{11})^{-1}(\Psi_{12}z_2^* + z_1(0))。$$

(1): 如果由开放性个体组成的图 $G(\widetilde{W}_{22} + \widehat{W}_{22})$ 是结构平衡, 强连通, 非周期的, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} z_2(t) = \varpi \text{diag}[\Gamma_1, \Gamma_2] \mathbf{1}_{2(n-r)}$, 这里 $\varpi = \partial[\mathbf{x}_2^T(1), \hat{\mathbf{x}}_2^T(0)]^T$ 。 $\partial = [\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_{2(n-r)}]$ 是矩阵 Ψ_{22} 的特征值为 1 的所对应的左特征向量, 并且满足 $\partial_i \neq 0$, $\sum_{i=1}^n |\partial_i| = 1$, $\mathbf{x}_2(1) = \widetilde{W}_{22}\mathbf{x}_2(0) + \widehat{W}_{22}\hat{\mathbf{x}}_2(0)$, 规范变换矩阵 Γ_1 满足 $\Gamma_1\widehat{W}_{22}\Gamma_1 \geq 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} z_1(t) = (I_{2r} - \Psi_{11})^{-1}(\varpi\Psi_{12}\Gamma_1\mathbf{1}_{2(n-r)} + z_1(0))$ 。

(2): 如果 $i = r+1, \dots, n$ 的 $w_{ii} > 0$, 并且图 $G(\widetilde{W}_{22} + \widehat{W}_{22})$ 是结构不平衡, 强连通的, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} z_2(t) = 0_{n-r}$, $\lim_{t \rightarrow \infty} z_1(t) = (I_{2r} - \Psi_{11})^{-1} z_1(0)$ 。

证明: 根据线性系统理论^[47], 当 $\rho(\Psi_{11}) < 1$, 只要 $z_2(t)$ 是收敛的, 那么 $z_1(t)$ 也是收敛的。类似于引理 3.2.1 的证明, 可以得到 $\rho(\Psi_{11}) < 1$, 所以当 $z_2(t)$ 收敛时, 那么 $z_1(t)$ 也收敛。同时取方程 (4.6) 两侧的极限, 注意到矩阵 $I_{2r} - \Psi_{11}$ 是可逆的, 你可以得到当 $\lim_{t \rightarrow \infty} z_2(t) = z_2^*$, 极限 $\lim_{t \rightarrow \infty} z_1(t) = (I_{2r} - \Psi_{11})^{-1} (\Psi_{12} z_2^* + z_1(0))$ 。

(1): 首先, 当 $\Gamma_1 \widehat{W}_{22} \Gamma_1 \geq 0$, 类似于引理 3.3.1 的证明, 我们有 $\text{diag}[\Gamma, \Gamma] \Psi_{22} \text{diag}[\Gamma, \Gamma] = |\Psi_{22}| \geq 0$, 也就是 Ψ_{22} 也是结构平衡的。接下来, 我们将证明图 $G(|\Psi_{22}|)$ 是强连通非周期的, 并且矩阵 $|\Psi_{22}|$ 是行随机的。由于对于所有的 $i \in N$, $W \sim M$, 所以当图 $G(\widetilde{W}_{22} + \widehat{W}_{22})$ 是强连通非周期的, 图 $G(|\Psi_{22}|)$ 的两个子图 $G(\gamma_{11})$ 和 $G(\gamma_{22})$ 也是强连通非周期的。注意到 $|\gamma_{12}| = \Gamma_1 \widehat{W}_{22} (I_{n-r} - \Phi_{22}) M_{22} \Gamma_1 = \Gamma_1 \widehat{W}_{22} \Gamma_1 (I_{n-r} - \Phi_{22}) \Gamma_1 M_{22} \Gamma_1 = |\widehat{W}_{22}| (I_{n-r} - \Phi_{22}) |M_{22}|$ 和 $G(|\widehat{W}_{22}|)$ 是强连通的, 所以 $|\gamma_{12}| \neq 0_{(n \times r) \times (n \times r)}$, 明显可以得到 $|\gamma_{21}| = \Phi_{22} \neq 0_{(n \times r) \times (n \times r)}$, 因此, 从子图 $G(|\gamma_{11}|)$ 到子图 $G(|\gamma_{22}|)$ 至少存在一条边, 反之亦然, 所以, 图 $G(|\Psi_{22}|)$ 是强连通的。考虑到在图 $G(|\Psi_{22}|)$ 中存在非周期子图 $G(|\gamma_{11}|)$ 和 $G(|\gamma_{22}|)$, 所以 $G(|\Psi_{22}|)$ 也是非周期的。通过简单的计算, 可以得到 $|\Psi_{22}| 1_{2(n-r)} = 1_{2(n-r)}$, 这表明矩阵 $|\Psi_{22}|$ 是行随机的。所以系统 (4.7) 是经典的 DeGroot 模型。将 $G(|\Psi_{22}|)$ 的连通性和非周期性与文献 [22] 和文献 [45] 中的经典的 DeGroot 模型相结合, 我们得到了 $\lim_{t \rightarrow \infty} z_2(t) = \varpi \text{diag}[\Gamma_1, \Gamma_2] 1_{2(n-r)}$, 也就是 $\lim_{t \rightarrow \infty} Y_2(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{Y}_2(t) = \varpi \Gamma_1 1_{n-r}$ 。

(2): 根据上述的论证, 如果 $\gamma_{12} \neq 0_{(n \times r) \times (n \times r)}$, 则 $G(|\Psi_{22}|)$ 是强连通的。如果 $\gamma_{12} = 0_{(n \times r) \times (n \times r)}$, 则由 $G(|\Psi_{22}|)$ 的所有根节点组成的子图 $G(\gamma_{11})$ 是强连通并且是结构不平衡的。我们构造一个矩阵 Ψ , 并且该矩阵满足 $\Psi \sim \Psi_{22}$, $|\Psi_{22}| \leq |\Psi|$,

$|\Psi|1_n = 1_n$ ，显然 $|\Psi|$ 是一个具有正对角项的随机矩阵， $G(\Psi_{22})$ 是强连通结构不平衡的，或者是由其所有的根节点组成的子图是结构不平衡的。通过引理 3.2.1 和引理 3.2.3 我们可以得出 $\rho(\Psi_{22}) \leq \rho(|\Psi_{22}|) \leq \rho(|\Psi|) < 1$ ，所以系统(4.7)是稳定的，即 $\lim_{t \rightarrow \infty} Y_2(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{Y}_2(t) = 0_{n-r}$ 和 $\lim_{t \rightarrow \infty} z_1(t) = (I_{2r} - \Psi_{11})^{-1} z_1(0)$ 。这就完成了定理 4.2.1 的证明。

通过定理 4.2.1，当固执个体和开放性个体同时存在时，整个系统是否完全收敛取决于开放性个体。当所有开放性个体的观念收敛时，整个系统是收敛的；否则，这个系统是发散的。如果不考虑私人观念和表达观念之间的差异，则系统(2.1)可以转化为经典的 F-J 模型。众所周知，对于经典的 F-J 模型^{[13],[23],[24]}，整个系统的收敛完全取决于开放性个体的观念收敛，尽管我们的模型扩展到经典的 F-J 模型，但这一结论仍然得到了很好的保留。

当由开放性个体组成的网络是结构不平衡时，在强连通的条件下，所有开放性个体的最终观念都会收敛到 0，无论他们的初始观念取什么值。在这一点上，非开放性个体的最终观念取决于他们最初的私人观念，并且独立于他们最初的表达观念。总之，当开放性个体组成的网络是结构不平衡且强连通时，所有个体最终的观点将独立于他们最初的表达观念。这一结论与定理 3.3.1 的一些结果是一致的。

另一方面，当由开放性个体组成的网络是结构平衡时，定理 4.2.1 表明，在一定条件下（开放性个体组成的网络是强连通的、非周期的。当然，根据符号 DeGroot 模型的相关结果，这里的强连通条件仍然可以变弱），开放性个体的最终观念（私人观念和表达观念）将达到模一致，并且他们的最终观念同时取决于他们对所有 $\sigma_i \neq 0$ 的初始私人观念和表达观念。对于相同的开放性个体来说，最终的私人观念和最终的表达观念没有区别。对于不同的开放性个体来说，他们最终的私人观念和最终的表达观念可能会有不同。显然，基于 $z_1(t)$ 的极限，我们还

可以观察到,非开放性个体的最终观念也取决于最初的私人观念和表达观念。定理 3.3.1 表明,当不存在开放性个体时,最终的观念只取决于最初的私人观念。然而,开放性个体可能会破坏这一结果。它们使最初的私人观念和表达观念对最终的观念产生影响。毫无疑问,随着开放性个体数量的增加,会有更多个体的初始表达观念会对最终的私人观念和表达观念产生影响。当所有人都是开放性个体时,这种影响达到其最大值。对于这种情况,我们有以下推论 4.2.1。

推论 4.2.1: 假设对于所有的 $i \in N, \lambda_i = 1$, 如果 $G(W)$ 是结构平衡, 强连通, 非周期的, 那么系统将会收敛到 $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{y}(t) = \alpha \Gamma 1_n$, 其中 $\alpha \in \mathbb{R}, \Gamma W \Gamma \geq 0$ 。如果 $G(W)$ 是结构不平衡, 强连通的, 并且 W 的所有对角项都大于 0, 那么 $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{y}(t) = \mathbf{0}_n$ 。

证明: $\lambda_i = 1$ 意味着所有的个体都是开放性个体, 因此系统(3.1)和系统(3.2)转化为系统(4.6), 通过引理 4.2.1 的证明, 可以很容易地证明推论 4.2.1。

推论 4.2.1 表明, 如果不存在固执个体, 那么在强连通的情况下, 最终的私人观念和表达观念之间的差异最终会消失。定理 3.3.1 表明, 如果存在固执个体, 即使网络是强连通的, 这种差异也会持续存在。因此, 我们可以得出结论, 固执个体的存在是造成这种差异的主要因素。众所周知, 如果不考虑私人观念, 固执个体会导致所表达的观念不一致^[13]。由此可见, 固执个体所带来的影响往往是负面的, 这将不利于整个社会群体的和谐。

4.3 数值模拟

接下来我们将通过例子来验证我们结论的正确性。

例 4.3.1: 在这个例子中, 我们考虑将考虑具有 30 个个体的社会网络, 其中 20 个个体是开放性个体。当由开放性个体组成的子网络是结构平衡的, 强连通的和非周期的时候, 观念的演变如图 4-1 所示, 从图 4-1 我们可以看出, 最终的私人观念和表达观念是一样的。当由开放性个体组成的子网络是结构不平衡, 强

连通时，观念的演变如图 4-2 所示。从图 4-2 我们可以看出开放性个体的最终私人观念和表达观念收敛到 0，非开放个体的最终私人观念和表达观念之间仍然存在差异。当系统中没有固执个体时，观念的演变如图 4-3（结构平衡）和图 4-4（结构不平衡）所示。我们可以观察到，如果所有个体都是开放性个体，那么最终的私人观念和表达观念实现了模一致，并且它们之间的差异完全消失。这进一步表明，固执个人是最终私人观念和表达观念之间差异的主要因素。对抗或竞争关系可能会导致观念分歧（私人观念或表达观念）。

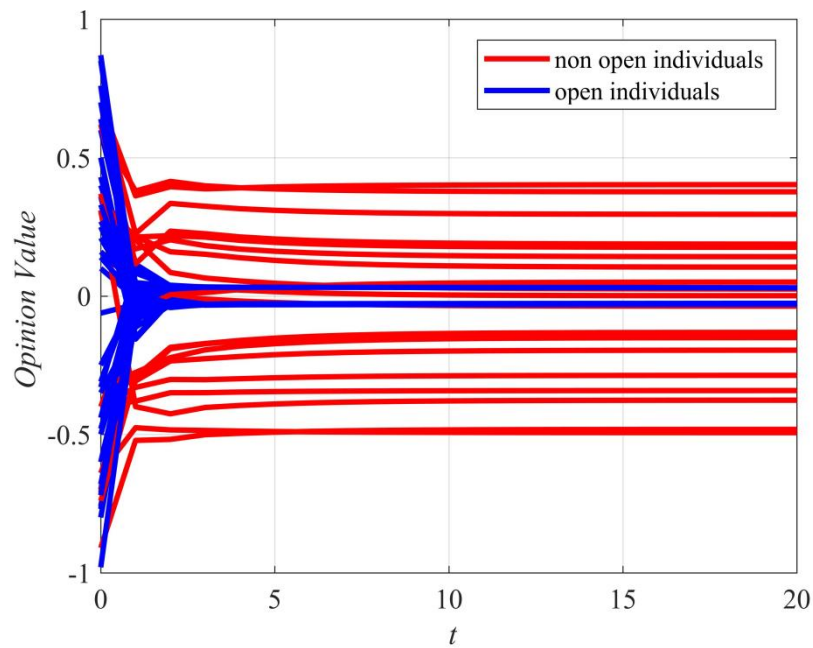


图 4-1 当开放性个体组成的子网络是结构平衡时，个体的表达观念和私人观念的演化轨迹。

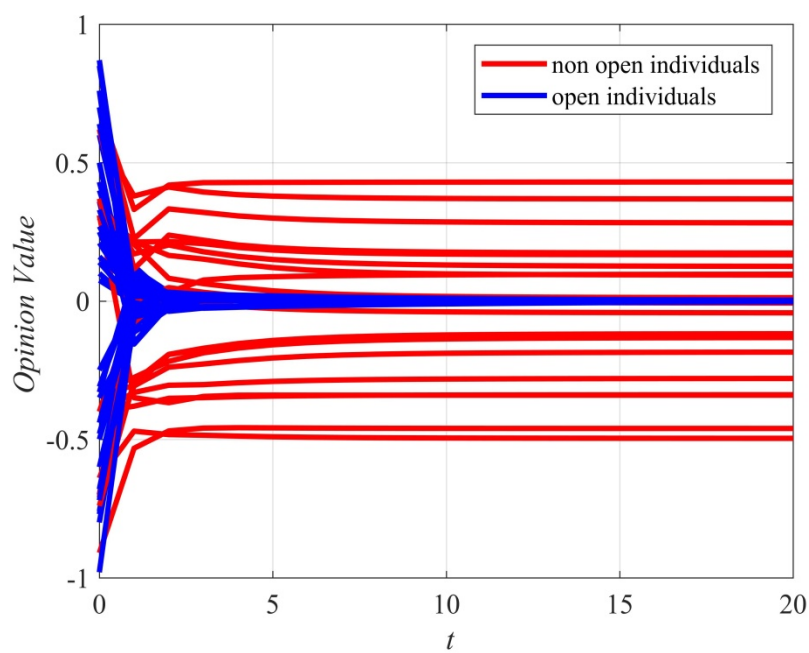


图 4-2 当开放性个体组成的子网络是结构不平衡时, 个体的表达观念和私人观念的演化轨迹。

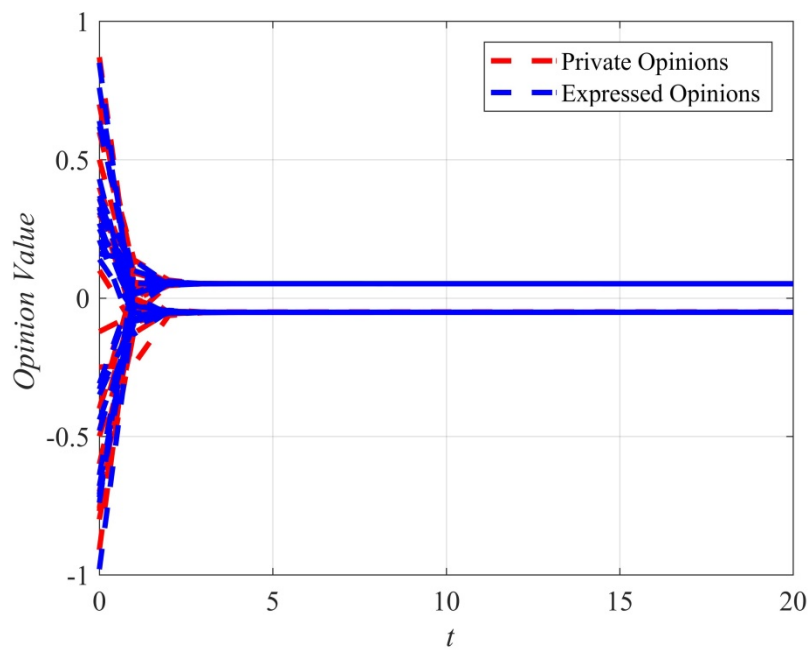


图 4-3 当所有个体都是开放性个体并且网络是结构平衡时, 个体的表达观念和私人观念的演化轨迹。

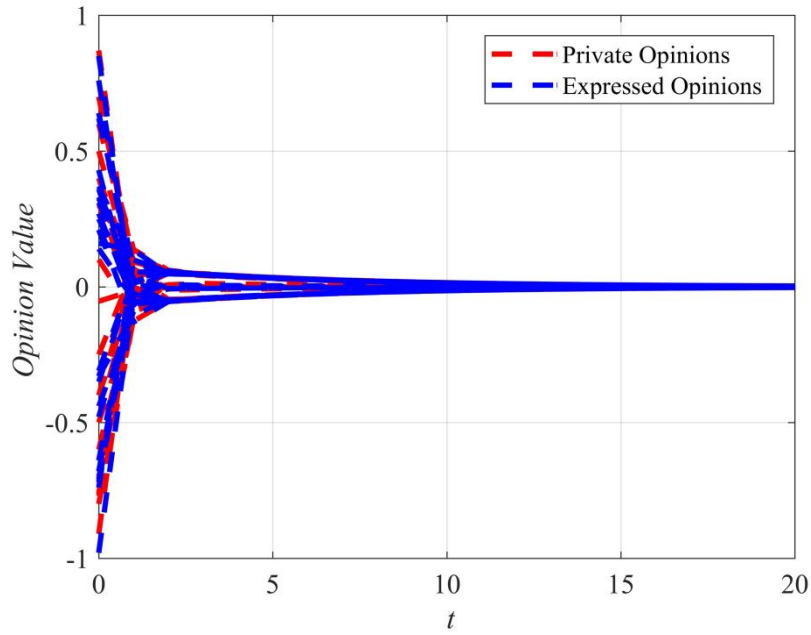


图 4.4 当所有个体都是开放性个体并且网络是结构不平衡时，个体的表达观念和私人观念的演化轨迹。

4.4 本章小结

在这一章节中，我们研究了带有开放性个体的观念动力学模型，为了方便研究，我们将所有的个体进行重新分类，我们发现重新分类后的网络拓扑的收敛性和开放性个体有关。当固执个体和开放性个体同时存在时，整个系统是否完全收敛取决于开放性个体。当所有开放性个体的观念是收敛时，整个系统是收敛的；否则，这个系统是发散的。当由开放性个体组成的网络是结构平衡时，开放性个体组成的网络是强连通的、非周期的，开放性个体的最终观念将达到模一致，并且他们的最终观念同时取决于他们对所有 $\sigma_i \neq 0$ 的初始私人观念和表达观念。另一方面，当由开放性个体组成的网络是结构不平衡时，在强连通的条件下，所有开放性个体的最终观念都会收敛到 0，无论他们的初始观念取什么值。也就是非开放性个体的最终观念取决于他们最初的私人观念，并且独立于他们最初表达的观念。

第5章 总结与展望

近年来,随着科技的不断发展,人们的交流方式在不断创新,信息传播的速度和量也在快速增长。因此,本文考虑了一种特殊的观念动力学模型,假设每个个体在观念的演化过程中,同时存在私人观念和表达观念,即每个个体会根据周围环境,不断调整和更新自己的观念。

此外,本文还考虑了固执个体对于观念的演变,固执个体在观念演变的过程中不易改变自己的观念,固执个体的存在使整个观念演变过程更加复杂,多样。同时,我们还考虑了竞争机制和分歧程度。本文的主要工作如下:

一、我们对经典的 F-J 模型进行了扩展,提出了一个不具有开放性个体的观念动力学模型,在这个模型中私人观念,表达观念,竞争关系,固执个体同时存在,我们发现无论社会网络是否是结构平衡的,私人观念和表达观念总是可以以指数级的速度快速收敛到一个稳定的状态,同时,这个稳定的观念依赖于初始的私人观念,最初的表达观念在演化的过程中被遗忘。最后,通过数值仿真对所得结果进行了数值模拟,验证了我们的结论是正确的。

二、我们提出了一个具有开放性个体的观念动力学模型。我们发现,当固执个体和开放性个体同时存在时,整个系统是否收敛完全取决于开放性个体。当所有开放性个体的观念趋于一致时,整个系统趋于一致;否则,系统是发散的。最后,通过数值仿真对所得结果进行了数值模拟,验证了我们的结论是正确的。

观念动力学是一门研究公众舆论和情绪的学科,不仅可以帮助政府、企业和个人了解社会舆论趋势,还可以帮助他们更好地应对舆论危机。虽然目前对于观念动力学的研究成果已经非常丰富,但是还是有许多值得思考的问题。结合现在的研究内容,还有以下几个问题需要进行改进及进一步的研究:

(1)当前对于观念动力学的研究大多是假设个体使用凸决策方式进行决策,这种决策方式必然会在一定程度上造成个体的收敛,然而在现实生活中,个体的

决策方式通常会更复杂。另外，目前观念动力学的研究中大多假设个体在决策时只用到前一时刻的信息，而对于带有记忆的决策方式仍然很少涉及。

(2)在本文中，我们只考虑了在系统中不存在开放性个体的情况下，当 $G(W)$ 是结构平衡时，矩阵 $|S|$ 和 $|W|$ 的特征，在未来我们将讨论 $G(W)$ 是结构不平衡时， $|S|$ 和 $|W|$ 的具体特征。

(3) 在本文中，我们只将逻辑矩阵引入到 DeGroot 模型和 F-J 模型这两个经典的观念动力学模型中，在未来我们计划将逻辑矩阵引入到其他具有实际应用价值的观念动力学模型中。

参考文献

- [1] Dong Y, Zhan M, Kou G, and Ding Z. A survey on the fusion process in opinion dynamics[J]. *Information Fusion*, 2018, 43: 57-65.
- [2] Chen G, Duan X, Friedkin N E, and Bullo F. Social power dynamics over switching and stochastic influence networks[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, 64(2): 582-597.
- [3] Tang Y, Qian F, Gao H, and Kurths J. Synchronization in complex networks and its application—a survey of recent advances and challenges[J]. *Annual Reviews in Control*, 2014, 38(2): 184-198.
- [4] 马振, 贾保先. 基于观点动力学的社交网络观点共识达成研究[J]. *中国传媒大学学报:自然科学版*, 2023, 30(2): 56-67.
- [5] Frasca P, Tarbouriech S, Zaccarian L. Hybrid models of opinion dynamics with opinion-dependent connectivity[J]. *Automatica*, 2019, 100: 153-161.
- [6] 刁苏蒙. 社交网络中个体交互行为和观点演化模式研究[D]. 北京交通大学, 2016.
- [7] Friedkin N E, Johnsen E C. Social influence network theory: A sociological examination of small group dynamics[M]. Cambridge University Press, 2011.
- [8] Zhang W, Han Q L, Tang Y, and Liu Y. Sampled-data control for a class of linear time-varying systems[J]. *Automatica*, 2019, 103: 126-134.
- [9] 邓舒予. 突发事件微博舆情意见领袖对网民情感倾向影响研究[D]. 哈尔滨理工大学, 2024.
- [10] 杨焱. 基于多 Agent 的社会网络社区发现方法[D]. 吉林大学, 2015.
- [11] He G, Ruan H, Wu Y, and Liu J. Opinion dynamics with competitive relationship and switching topologies[J]. *IEEE Access*, 2020, 9: 3016-3025.
- [12] 王龙, 田野, 杜金铭. 社会网络上的观念动力学[J]. *中国科学:信息科学*, 2018, 48(01): 3-23.
- [13] Wang X, Jiang B, Li B. Opinion dynamics on social networks[J]. *Acta Mathematica Scientia*, 2022, 42(6): 2459-2477.
- [14] Dong Y, Zha Q, Zhang H, Kou G, Fujita H, Chiclana F, and Herrera-Viedma E.

- Consensus reaching in social network group decision making: Research paradigms and challenges[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2018, 162: 3-13.
- [15] Wu X, Tang Y, Cao J, and Mao X. Stability analysis for continuous-time switched systems with stochastic switching signals[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 63(9): 3083-3090.
- [16] Zhang W, Han Q L, Tang Y, and Liu Y. Sampled-data control for a class of linear time-varying systems[J]. *Automatica*, 2019, 103: 126-134.
- [17] DeGroot M H. Reaching a consensus[J]. *Journal of the American Statistical association*, 1974, 69(345): 118-121.
- [18] Bauso D, Cannon M. Consensus in opinion dynamics as a repeated game[J]. *Automatica*, 2018, 90: 204-211.
- [19] Zou Y. Bipartite consensus of opinion dynamics through delivering credible information[J]. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2020, 8(2): 781-790.
- [20] Wu H, Zeng Y, Ma J, Yang L, Huang Q, and Liu Z. On the control of opinion dynamics in social networks[J]. *Physica A. Statistical Mechanics and its Applications*, 2014, 409: 183-198.
- [21] Shao J, Zheng W X, Shi L, and Cheng Y. Bipartite tracking consensus of generic linear agents with discrete-time dynamics over cooperation–competition networks[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, 51(11): 5225-5235.
- [22] Ren W, Beard R W. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(5): 655-661.
- [23] Friedkin N E, Johnsen E C. Social influence and opinions[J]. *Journal of mathematical sociology*, 1990, 15(3-4): 193-206.
- [24] Friedkin N E, Johnsen E C. Social Influence Networks and Opinion Change[J]. *Advances in Group Processes*, 1999, 16(1) : 1-29.
- [25] Bindel D, Kleinberg J, Oren S. How bad is forming your own opinion?[J]. *Games and Economic Behavior*, 2015, 92: 248-265.
- [26] Ghaderi J, Srikant R. Opinion dynamics in social networks with stubborn agents:

- Equilibrium and convergence rate[J]. Automatica, 2014, 50(12): 3209-3215.
- [27] Ravazzi C, Frasca P, Tempo R, and Ishii H. Ergodic randomized algorithms and dynamics over networks[J]. IEEE transactions on control of network systems, 2014, 2(1): 78-87.
- [28] Jia P, Mirtabatabaei A, Friedkin N E, and Bullo F. Opinion dynamics and the evolution of social power in Influence networks[J]. SIAM Rev, 2015, 57: 367-397.
- [29] Rainer H, Krause U. Opinion dynamics and bounded confidence: models, analysis and simulation[J]. 2002: 1-33.
- [30] Dittmer J C. Consensus formation under bounded confidence[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2001, 47(7): 4615-4621.
- [31] Blondel V D, Hendrickx J M, Tsitsiklis J N. On the 2R conjecture for multi-agent systems[C]//2007 European Control Conference (ECC). IEEE, 2007: 874-881.
- [32] Jia P, Mirtabatabaei A, Friedkin N E, and Bullo F. Opinion dynamics and the evolution of social power in influence networks[J]. SIAM review, 2015, 57(3): 367-397.
- [33] Xu Z, Liu J, Başar T. On a modified DeGroot-Friedkin model of opinion dynamics[C]//2015 American Control Conference (ACC). IEEE, 2015: 1047-1052.
- [34] Xia W, Liu J, Johansson K H, and Basar T. Convergence rate of the modified DeGroot-Friedkin model with doubly stochastic relative interaction matrices[C]//2016 American Control Conference (ACC). IEEE, 2016: 1054-1059.
- [35] Chen X, Liu J, Xu Z, and Baar T. Distributed evaluation and convergence of self-appraisals in social networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2016, 62(1): 291-304.
- [36] Zhu Y, Li S, Ma J, and Zheng Y. Bipartite consensus in networks of agents with antagonistic interactions and quantization[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2018, 65(12): 2012-2016.
- [37] Altafini C. Consensus problems on networks with antagonistic interactions[J]. IEEE transactions on Automatic Control, 2012, 58(4): 935-946.

- [38] Xue D, Hirche S, Cao M. Evolution of social power over influence networks containing antagonistic interactions[J]. *Information Sciences*, 2020, 540: 449-468.
- [39] Meng Z, Shi G, Johansson K H, Cao M, and Hong Y. Behaviors of networks with antagonistic interactions and switching topologies[J]. *Automatica*, 2016, 73: 110-116.
- [40] Lin X, Jiao Q, Wang L. Competitive diffusion in signed social networks: A game-theoretic perspective[J]. *Automatica*, 2020, 112: 108656.
- [41] Ye M, Qin Y, Govaert A. An influence network model to study discrepancies in expressed and private opinions[J]. *Automatica*, 2019, 107: 371-381.
- [42] Waters N L, Hans V P. A jury of one: Opinion formation, conformity, and dissent on juries[J]. *Journal of Empirical Legal Studies*, 2009, 6(3): 513-540.
- [43] Karlin S. A first course in stochastic processes[M]. Academic press, 2014.
- [44] Horn R A, Johnson C R. Matrix analysis[M]. Cambridge university press, 2012.
- [45] Liu J, Chen X, Başar T, and Belabbas M A. Exponential convergence of the discrete-and continuous-time Altafini models[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(12): 6168-6182.
- [46] Sain M K. Matrix Mathematics: Theory, Facts, and Formulas with Application to Linear Systems Theory [Book review; DS Bernstein][J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(8): 1539-1540.
- [47] Rugh W J. Linear system theory[M]. Prentice-Hall, Inc., 1996.
- [48] Seneta E. Non-negative matrices and Markov chains[M]. Springer Science & Business Media, 2006.

硕士期间发表的论文

- [1] 朱一新, 何广, 吴艳蕾. 带有表达和私人观念的观念动力学模型分析[J].
安徽师范大学学报, 2024. (已录用)

致谢

三年一瞬，聚散有时，我的研究生生涯迎来了尾声。回顾安工程的这三年，思绪良多，在这三年，我学会了很多，成长了很多，认识了很多朋友，受到了许许多多人的帮助，在此，我将向他们表达最真挚的感谢。

首先，我要感谢我的导师何广教授。在这三年，导师在生活和学习上给予了我很大的帮助，特别是小论文的撰写，老师不厌其烦的解决我的问题，并且逐字逐句帮我修改。在毕业之际，我想向何老师致以最崇高的敬意和最衷心的感谢，感谢他在学业上对我的悉心指导，以及在生活上给予我的热情帮助。他的教诲和榜样将永远激励我不断前行。

其次，我要感谢我的师姐师兄师弟师妹们。在我看论文看不懂时，师兄，师姐给我说怎么看，怎么找文献，当我开始做仿真，一头雾水，师兄给我推荐 B 站博主，让我快速进入仿真学习。在小论文的定稿过程中，师弟师妹们也不辞辛劳，帮我提出了很多宝贵的建议。愿我们都能怀揣热爱，奔赴山海。同时，要感谢 507 的小伙伴们，感谢大家在我论文初稿不顺时，帮我一起查找适合期刊，学报，在我心情不好时，鼓励我激励我帮助我。

最后，我要感谢我的父母和我的姐姐。他们用他们最无私的爱，让我无忧无虑，开开心心的成长；他们一直默默在支持我的每一个决定，让我做自己想做的。面对即将毕业，我有些迷茫，有些害怕，有些担忧，但我相信他们会默默支持我。马上毕业了，未来，我们一起奋斗，一起努力。最后，感谢你们对我的爱护与帮助，你们是我最强后盾。愿你们身体健康，平安喜乐。

2024 年 5 月 29 日

尚德敬学 唯实惟新

