

分类号: (F840.67)

单位代码: 10363

密 级: 公开

学 号: 2211020119

题 目 变利率环境下基于 CEV 模型的最优
再保险-投资问题研究

英文并列

题 目 Research on Optimal Reinsurance Investment
Problem Based on CEV Model in Variable
Interest Rate Environment

学生姓名: 徐文静

指导教师: 夏登峰教授

专 业: 数学

研究方向: 金融风险管理

论文答辩日期: 2024 年 5 月 29 日

安徽工程大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：我恪守学术道德，崇尚严谨学风。所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已明确注明和引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品及成果的内容。论文为本人亲自撰写，我对所写的内容负责，并完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

学位论文作者签名：徐静

日期：2024年6月1日

安徽工程大学学位论文版权使用授权书

学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅或借阅。本人授权可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保密 ☐，在 _____ 年解密后适用本版权书。

本学位论文属于

不保密 ☒.

学位论文作者签名：徐日静

指导教师签名：

日期：2024 年 6 月 1 日

日期：2024 年 6 月 1 日

变利率环境下基于 CEV 模型的最优再保险-投资问题研究

摘 要

保险公司的投资和再保险活动已成为整个保险业不可分割的一部分,同时也是保险公司经营业务的一种重要工具. 在金融市场中,盈利和亏损的不确定性虽然为企业提供了一定的获利机会,但是也存在相应的内在风险,保险公司不可避免的需要承担这些市场风险. 当风险无法合理避免时,保险公司很可能会陷入困境甚至导致破产,为了减少自身的风险,保险公司经常购买再保险. 同时,保险公司作为盈利性机构而寻求一种最优的投资策略,以满足实际需求,合理规划资本,并进行适当的投资以实现某些特定的目标. 因此,企业的风险管理在当今复杂多变的商业环境中已成为一个热门话题.

首先,我们引入随机利率研究了变利率下基于 CEV 模型的最优再保险-投资策略,使其进一步接近保险公司的实际投资情况. 其次,不再只考虑将资金投资于无风险资产和风险资产,而是也投资于零息债券,研究基于 CEV 模型下考虑零息债券的最优再保险投资策略. 假设保险公司的盈余过程由跳扩散风险模型刻画,为了保值增值,保险公司购买超额损失再保险来降低自身风险,同时考虑保险公司将其盈余投资于无风险资产和风险资产,其中,无风险资产的利率

服从 Vasicek 利率模型，风险资产价格遵循 Constant Elasticity of Variance (CEV) 模型。保险公司的目标是终端财富的期望效用最大化，在指数效用函数下，应用随机最优控制的方法建立值函数相应的 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 方程，并且通过求解得出最优再保险投资策略。采用 MATLAB 软件数值模拟，给出相关模型参数对最优策略的影响。

最后，对全文进行总结，并进行问题研究的展望。

关键词：超额损失再保险，跳-扩散模型，CEV 模型，HJB 方程，随机利率，零息债券

RESEARCH ON OPTIMAL REINSURANCE INVESTMENT PROBLEM BASED ON CEV MODEL IN VARIABLE INTEREST RATE ENVIRONMENT

ABSTRACT

The investment and reinsurance activities of insurance companies have become an integral part of the entire insurance industry, and are also an important tool for insurance company operations. In the financial market, although the uncertainty of profits and losses provides certain profit opportunities for enterprises, there are also corresponding inherent risks, and insurance companies inevitably need to bear these market risks. When risks cannot be reasonably avoided, insurance companies are likely to fall into difficulties or even bankruptcy. In order to reduce their own risks, insurance companies often purchase reinsurance. At the same time, insurance companies, as for-profit institutions, seek an optimal investment strategy to meet practical needs, plan capital reasonably, and make appropriate investments to achieve certain specific goals. Therefore, risk management for enterprises has become a hot topic in today's complex and ever-changing business environment.

Firstly, we introduce stochastic interest rates to study the optimal reinsurance investment strategy based on the CEV model under variable interest rates, making it closer to the actual investment situation of insurance companies. Secondly, we no longer only consider investing funds in risk-free and risky assets, but also in zero interest bonds. We study the optimal reinsurance investment strategy considering zero

interest bonds based on the CEV model. Assuming that the earnings process of an insurance company is characterized by a jump diffusion risk model, in order to preserve and increase value, the insurance company purchases excess loss reinsurance to reduce its own risk. At the same time, it is considered that the insurance company invests its earnings in both risk-free and risky assets. The interest rate of risk-free assets follows the Vasicek interest rate model, and the price of risky assets follows the Constant Elasticity of Variance (CEV) model. The goal of insurance companies is to maximize the expected utility of terminal wealth. Under the exponential utility function, the method of stochastic optimal control is applied to establish the corresponding Hamiltonian Jacobi Bellman (HJB) equation for the value function, and the optimal reinsurance investment strategy is obtained by solving it. Using MATLAB software for numerical simulation, provide the influence of relevant model parameters on the optimal strategy.

Finally, summarize the entire article and provide prospects for problem research.

Xu Wenjing (Mathematics)

Supervised by Xia Dengfeng

KEY WORDS: Excess loss reinsurance, Jump-diffusion model, CEV model, HJB equation, Stochastic interest rate, Zero-coupon bond

目录

摘 要	I
ABSTRACT	III
目录	V
第 1 章 绪 论	1
1.1 研究背景和意义	2
1.2 国内外研究现状	3
1.3 研究方法与创新点	6
1.4 论文内容及安排	7
第 2 章 预备知识	8
2.1 再保险-投资	8
2.2 盈余模型	8
2.3 利率模型	9
2.4 风险资产模型	10
2.5 效用函数	11
第 3 章 变利率下基于 CEV 模型的最优再保险投资策略	13
3.1 建立模型	13
3.2 HJB 方程和最优策略	15
3.3 数值分析	20
3.4 本章小结	21
第 4 章 基于 CEV 模型下考虑零息债券的最优再保险 投资策略	23
4.1 建立模型	23
4.2 HJB 方程和最优策略	25
4.3 数值分析	28
4.4 本章小结	30
第 5 章 总结与展望	31
参考文献	32
附 录	35
附录 A	35
附录 B	38

符号说明

符号	符号解释
$\mathcal{F}_t$	截止到 t 时刻的信息流
$R(t)$	盈余过程
m	绝对风险厌恶系数
c	保费率
$r(t)$	瞬时利率
σ_r	无风险利率的瞬时波动率
μ	风险资产的瞬时期望收益率
β	弹性参数
Π	容许策略组成的集合
$\pi^*(t)$	最优策略

第 1 章 绪 论

1.1 研究背景和意义

长期以来，全球经济在飞速发展，但经济全球化产生的激烈竞争也十分明显，同时也给人们带来了巨大的风险与挑战，再加上自然环境也变得越来越恶劣。也因为在如此的大背景环境下，保险行业的出现是推动经济展现旺盛活力的关键引擎，因而再保险行业的发展也日新月异，不仅保险业务在稳步增长而且市场的规模也在日益扩大。随着保险业的不断发展与进步，再保险活动已成为整个保险业不可分割的一部分，也是保险公司经营业务的一种重要工具。同时中国市场上再保险规模的日益扩大和发展，吸引了大量的国际再保险公司涌入中国再保险市场。因此，我国再保险公司的功能从一开始的转移风险也扩展到承保能力、稳健经营、限定责任、减少经营支出、开辟新业务等。我国再保险的发展突飞猛进并成为了全球非常关键的新兴再保险市场。

追溯到 2008 年，美国次贷危机引发全球金融海啸，从此全球经济增长开始放缓。回望 2018 年年初，由于华尔街的股市突然崩盘引发了全球股市剧烈震荡。多年来，全球金融危机屡次出现，世界各国的政府部门采取了一系列政策措施来应对经济的跌宕起伏。在当今全球化的金融经济中，由于市场当中的特殊性和持久的实证经验，决策者们对提出的传统理论假设产生了动摇。他们会因为市场大环境和自己的心理而变得不理性。为了填补这些瑕疵，同时更有效地管理风险和控制风险，开始进一步深入的研究，其中，将随机利率和零息债券纳入保险投资最优化问题的研究已成为科学界和实践界普遍关注的热点。

目前，全球经济正在发生变化，风险无处不在，时刻伴随在生活中的各个阶段，因而人们开始考虑如何降低自身的风险，这时保险公司便随之出现。保险公司是一个能够分担和转移个人或集体风险的专业机构，以签订相关合同的形式收取保费并且提供一定的担保责任，将其部分风险和责任转移给另外的保险公司。鉴于这些风险和责任，当保险公司在经营管理中出现波动时会影响公

司的正常发展，严重时很可能会出现破产。因此，可以通过再保险公司为保险公司提供更加强大的保险能力以及更大范围的去分散风险，这就是保险公司管理风险和控制波动的最好办法之一。再保险既能够分担保险公司在运营和发展时产生的风险，也能够增强一定抵抗市场风险的能力以及稳固其业务并在市场中开展新的业务。为此选择适合实际需求的再保险策略是保险公司管理者关注的主要热点议题之一。随着世界经济的不断发展，到处隐藏着大量的投资机会，当投资机遇一旦出现时，决策者们就会做出决策，考虑是否需要将一些自由的资金投资于金融市场当中，并最大限度地去提高这些资产产生的收益来抵消损失。因此，保险管理者也特别专注于如何选择最合理的投资策略来确保公司的稳定发展，这也成为保险公司迫切解决的问题。换言之，关于什么样比例的再保险和多少的投资才可以提高保险公司抵御市场风险的能力，从而能够达到提高相应收益的水平呢？最终，归根结底在金融和保险领域中如何选择这两种策略其实就是解答保险公司的最优投资与再保险策略问题。

1.2 国内外研究现状

保险风险理论是金融数学中特别关键的内容，对保险市场中出现的风险进行定量的描述发挥了至关重要的作用，也是保险公司准确定价产品、计算索赔额度和选择再保险方式等相关工作内容的重要基础。多年以来，金融理论发展历史源远流长，随着保险风险理论的研究不断发展与进步，研究者们对模型的选择也更加符合金融市场环境的实际需求，研究的众多相关问题也随之变得更加复杂多样，保险风险理论也成为人们普遍关注的热点议题，再保险和投资最优化问题的研究也成为各个领域下诸多学者们探究的焦点内容。其中，数学的一个分支内容最优化问题的研究是一个长久的课题，研究者们对这一问题进行了广泛而深入的探究，保险公司对于最优投资策略主要关注以下两种目标函数：(1)使保险公司的破产概率最小化；(2)使保险公司的终端财富期望效用最大化。

关于现代投资理论的发展，最早由美国经济学家 Markowitz^[1] 的研究开始，他研究了可能的投资回报和投资组合收益的特征受到资产风险的影响，并且创

立了现代投资组合理论. Samuelson^[2] 把 Markowitz^[1] 的一些模型进一步做了推广, 研究了最优消费投资问题, 消费效用随着时间的不断推移是单周期效用的贴现和, 对于常相对风险厌恶程度的效用函数的特殊情况, 导出了最优解的显式形式. Browne^[3] 的盈余模型是扩散风险模型, 验证了关于破产概率最小化和指数效用之间关系的长期猜想, 还求解了以破产时支付的预期贴现罚金最小化为目标的最优策略. Hipp 和 Plum^[4-5] 在经典风险模型下保险公司还可以采取相应的投资策略, 将部分或全部盈余投资于风险资产中, 最终能够得到保险公司破产概率最小化的最优投资策略. Liu 和 Yang^[6] 在 Hipp 和 Plum^[4-5] 的研究基础上考虑了一个非零利息率, 而他们的研究不能得到闭形式的解. 随后 Yang 和 Zhang^[7] 在风险过程为复合泊松过程的假设下受到标准布朗运动的干扰, 得到了当效用函数是指数的一个闭形式的解. Wang^[8] 将 Yang 和 Zhang^[7] 的结果推广到研究多种风险资产的情况. 梁志彬^[9] 在跳-扩散风险模型下使用随机最优控制的方法, 同时计算保费时用方差保费原理, 基于保险公司的目标是使终端财富的期望指数效用最大化研究最优投资-再保险问题. Cao 和 Wan^[10] 采用比例再保险的方式以终端财富的期望效用最大化为目标, 研究最优再保险和投资问题. Gu 和 Yang^[11] 研究了比例再保险和投资策略的不变方差弹性模型, 该模型假设过程遵循带有漂移的布朗运动. Lin 和 Li^[12] 针对延迟索赔风险模型, 在方差保费原理下, 使用扩散近似来近似保险公司的索赔过程, 利用动态规划原理来求解 HJB 方程, 得到使得终端财富期望指数效用最大的投资和再保险策略. 夏登峰等人^[13] 综合考虑了变利率下基于 SV 模型, 针对 ambiguity-averse insurer (AAI), 通过等价鞅变化转化为稳健性最优控制问题最终得到了最优再保险与投资策略.

与此同时, 波动率是影响投资组合选择的一个非常重要的因素, 在真实的金融市场中, 波动率总是随着多种信息的传播而波动. 因此, 如果将风险资产过程中的波动率视为常数, 则不能及时准确反应风险资产的波动情况. 这可能导致对风险资产风险的低估. 因此, 有必要研究随机波动率问题. Cox 和 Ross^[14] 提出了可以描述股票价格的 CEV 模型, 其中, 该模型的波动率是股票价格的幂函数, 是一个随机过程. CEV 模型一般用来计算期权的敏感性、隐含波动率和

理论价格,同时能够较好的阐述 Black-Scholes 模型中体现的经验偏差,例如波动率微笑.因此,许多学者深入的研究了关于 CEV 模型的最优投资组合问题.例如 Li 和 Gu^[15] 将风险资产的定价过程建模为 CEV 模型,并考虑了净利润条件和方差再保险保费原则,利用随机控制理论研究保险公司的最优比例再保险和投资策略. Lie^[16] 允许保险公司购买比例再保险同时将其盈余投资于一种价格过程遵循 CEV 模型的风险资产,以终端财富的期望 HARA 效用最大化为目标将随机控制理论和 Legendre 变换相结合最终得到了最优策略的明确表达式.李国柱和马世霞^[17] 基于 CEV 模型应用博弈论和随机动态规划技术,通过求解扩展的 HJB 方程得到了违约前和违约后的均衡策略和相应的值函数.蔡江佳和李全^[18] 基于借贷利率不同和 CEV 模型下计算最优投资策略的解析解.

鉴于 CEV 模型与随机利率相结合,使得最优策略的解析求解变得更加复杂,以上研究较少同时考虑 CEV 模型和随机利率来研究最优再保险投资策略.然而,在实际的市场中,利率不是一个常数,而是一个波动的过程,利率波动也是市场风险的重要来源,此外,利率是影响各种金融资产价格的重要宏观因素.因此,在最优再保险投资问题中,若利率为常数,很可能会低估投资组合管理中的一些风险,从而导致资源配置产生较大的误差.为此部分学者研究变利率情形. Vasicek^[19] 首先提出 Vasicek 模型描述随机利率.后来 Cox 等人^[20] 提出了 Cox-Ingersoll-Ross(CIR)随机利率模型. Guan 和 Liang^[21]、Li^[22] 等人都是考虑 Vasicek 利率模型,分别以终端财富期望效用最大化为目标研究了最优投资与再保险策略和均值方差模型下具有时间一致性的最优投资与再保险策略.聂高琴和常浩^[23] 假设保险公司通过购买比例再保险来转移索赔风险,研究了利率期限结构遵循 Vasicek 利率模型的最优投资和再保险问题. Li 和 Wu^[24] 研究利率期限结构服从 CIR 随机利率模型下的最优投资问题,同时假设股票价格的波动率正比于另一个 CIR 过程.杨鹏和林祥^[25] 考虑根据理赔额的大小来选择何种再保险方式研究了无风险资产和风险资产具有随机利率以及风险资产具有随机变差的最优投资和联合比例-超额损失再保险问题.其中利率遵循 CIR 利率模型.

保险公司最常见的再保险方式有如下两种:一是比例再保险,二是超额损失再保险.随着研究的深入超额损失再保险也成为学者们关注的热点问题.例

如 Bai 和 Guo^[26] 证明了在两个目标函数下, 采取超额损失再保险的方式总是优于比例再保险. 然后, 通过求解相应的 HJB 方程, 得到了其最优值函数的闭形式解和相应的最优策略. Gu 等人^[27] 将之前研究的比例再保险扩展到超额损失再保险, 风险资产价格过程采用 CEV 模型最终得到了最优策略. Zhao^[28] 等人研究了保险公司带跳扩散风险模型的最优超额损失再保险和投资问题, 允许保险公司购买再保险并资金投资于一种无风险资产和一种价格过程满足 Heston 模型的风险资产, 通过应用随机最优控制方法获得了价值函数的显示解和最优策略. Guo 等人^[29] 假设允许保险公司购买超额损失再保险来降低自身风险, 考虑在跳-扩散风险模型下最终得出最优再保险与投资策略. 其中, 风险资产的价格过程满足 CEV 模型, 累计索赔过程为指数分布.

另外, 考虑将资金投资于零息债券, 为保险公司提供更加多元化的投资策略, 也使其更加贴合实际的金融市场, 从而实现长久稳定的发展目标, 因此, 考虑零息债券的最优再保险-投资问题也就更加具有实际指导意义, 相关研究工作参见文献[30-34].

1.3 研究方法与创新点

在以往学者对再保险与投资的研究结果和实务的基础上, 首先, 我们引入随机利率, 假设保险公司的盈余过程由跳扩散风险模型来刻画, 将风险资产价格服从的 CEV 模型与无风险资产利率遵循的 Vasicek 模型相结合, 并考虑超额损失再保险, 使得最优策略的解析求解变得更加复杂. 另外, 在上述模型的基础上考虑将资金投资于零息债券, 进一步研究了基于 CEV 模型下考虑零息债券的最优超额损失再保险投资问题. 本文以终端财富的期望指数效用最大化为目标, 应用随机最优控制的方法建立了值函数相应的 HJB 方程, 并在指数效用函数下得到最优策略. 最后, 运用数值算例阐述模型参数对最优策略的影响.

论文的创新点:

(1)对于最优再保险-投资问题, 考虑了随机利率, 采用 Vasicek 利率模型, 假设存在无风险资产和风险资产的金融市场, 得到最优再保险-投资策略.

(2)在上述模型的基础上,考虑零息债券,保险公司将其盈余于投资在无风险资产,股票和零息债券三种资产,更加贴合市场实际,具有一定指导意义.

1.4 论文内容及安排

本文总共分为 5 章:

第 1 章:绪论,阐述研究背景、意义、成果、方法、创新点以及论文的内容结构安排.

第 2 章:介绍本文在开展研究工作时需要用到的相关基础知识,为后续工作内容的展开提供理论基础.

第 3 章:假设保险公司的盈余过程由跳扩散风险模型来刻画,为了保值增值,允许保险公司购买超额损失再保险并将资金投资于一种利率服从 Vasicek 模型的无风险资产和一种价格过程满足 CEV 模型的风险资产.保险公司的目标是最大化终端财富的预期指数效用,应用随机最优控制的方法建立了值函数相应的 HJB 方程,并在指数效用函数下求解得到最优策略.最后,运用数值算例方法阐述了模型参数对最优策略的影响.

第 4 章:在上述模型的基础上,假设保险公司不再只考虑将资金投资于无风险资产和风险资产,而是也投资于零息债券,同时结合超额损失再保险,研究基于 CEV 模型下考虑零息债券的最优再保险与投资策略.然后,通过动态规划原理求解 HJB 方程,得到最优再保险与投资问题的显式解,运用数值模拟分析参数对最优再保险与投资策略的影响.

第 5 章:对全文进行总结与展望.

第 2 章 预备知识

2.1 再保险-投资

再保险-投资相关问题研究经历了长久的发展过程,再保险意思是保险公司会把其中的部分风险索赔和应承担的责任留给自己,并且把超出自己能力范围之外的一部分剩余风险和责任分散给另外的保险公司,这里愿意承担转移出来的部分风险和责任的公司被称之为再保险公司,可以通过与再保险公司签订不同的再保险形式来转移风险与责任,由于再保险的重要性和必要性,再保险合同是稳固保险和经济市场的重要工具.同时也可以通过投资最大化终端财富效应或者最小化破产概率来获得更多的收益,其相关研究取得较为丰富的成果,本文在研究最优再保险与投资策略问题过程中假设保险公司采用超额损失再保险的方式来降低自身风险以及稳定公司发展甚至更大范围的扩展经营业务.其中主要再保险方式有以下几种:

- 1、比例再保险 (Proportional reinsurance)
- 2、超额损失再保险 (Excess loss reinsurance)
- 3、联合比例-超额损失再保险 (Joint proportion - excess loss reinsurance)

2.2 盈余模型

1、经典风险模型

Browne^[3]运用经典风险模型来描述保险公司的盈余,保费收入和承担的索赔额组成了保险公司的盈余过程,具体模型如下:

$$R(t) = x_0 + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Z_i,$$

其中 $x_0 \geq 0$ 表示初始财富, $c > 0$ 表示保费率, N_t 表示到时刻 t 截止的累计索赔发生的次数, 满足参数为 λ 的 Poisson 过程. $\{Z_i, i=1,2,\dots\}$ 是一列独立同分布的有界随机变量.

2、扩散风险模型

为了更准确的刻画保险公司的盈余过程，可以利用标准布朗运动逼近的方法来近似替代原有的跳过程，得到如下的扩散模型：

$$R(t) = x_0 + ct + \beta W(t),$$

其中 $x_0 \geq 0$ 表示初始财富， $c > 0$ 表示保费率， $\beta W(t)$ 表示保险公司不确定的索赔。

3、跳扩散风险模型

由于保险公司财富过程存在一定的不确定因素，因此在研究最优再保险投资策略时可以考虑扩散项，也就是跳-扩散风险模型。

$$R(t) = x_0 + ct + \beta W(t) - \sum_{i=1}^{N_t} Z_i,$$

其中 $x_0 \geq 0$ 表示初始财富， $c > 0$ 表示保费率， β 表示正常数， $\{W(t), t \geq 0\}$ 是一个标准的布朗运动。

2.3 利率模型

在金融风险市场中，利率是最基本和最重要的一项指标，本文在研究最优再保险与投资策略过程中主要采用 Vasicek 模型。下面将简单介绍几种基本的利率模型。

1、即期利率模型

$$dr(t) = \alpha dt + \sigma_r dW(t),$$

2、仿射利率模型

$$dr(t) = (a - br(t))dt - \sqrt{k_1 r(t) + k_2} dW_r(t),$$

其中 a, b, k_1, k_2 是正常数， $W_r(t)$ 是一维标准布朗运动。当 $k_1 = 0$ 时，此模型退化成 Vasicek 模型；当 $k_2 = 0$ 时，模型退化成 CIR 模型， $2a > k_1$ 确保 $r(t) > 0$ 。

3、Vasicek 利率模型

$$dr(t) = (a - br(t))dt = \sigma_r W_r(t),$$

其中 a, b, σ_r 是正常数, σ_r 表示无风险利率的瞬时波动率.

4、CIR 模型

$$dr(t) = \sigma r(t)^{\frac{3}{2}} dW(t),$$

该模型中的扩散系数是非线性的.

2.4 风险资产模型

保险公司属于盈利机构, 为了获得稳定的利润, 以满足实际需求, 需要合理的规划资产, 并进行适当的投资以实现某些目标, 采取恰当投资活动不仅可以覆盖索赔产生的风险而且还可以增加相应的回报. 但是如果投资失败带来的相应损失也是不容乐观的, 因此, 怎样进行合理的投资决策才可以做到衡量轻重缓急, 最终能够达到保险公司期望的收益目标是一个大家极其关注的问题. 通常保险公司会选择股票、债券等一系列风险金融市场进行相应的投资. 本文在研究最优再保险与投资策略过程中主要采用 CEV 模型, 在实际的金融市场环境中, 以下是通常会使用的风险资产价格模型.

1、几何布朗运动模型 (B-S 模型)

$$dS(t) = \alpha S(t)dt + kS(t)dW(t),$$

其中 α 表示市场的期望收益率, $k > 0$ 表示股票市场的波动.

2、CEV 模型

$$dS(t) = S(t)\mu dt + \sigma S^{\beta+1}(t)dW_1(t),$$

其中 μ, σ 为正常数, $S(t)$ 为风险资产在 t 时刻的价值, μ 为风险资产的瞬时期望收益率, σS^{β} 为风险资产的瞬时波动率, β 为弹性参数, 当 $\beta = 0$ 时, CEV 模型将退化成 GBM 模型, $W_1(t)$ 是标准布朗运动.

3、Heston 模型

$$\begin{cases} dS(t) = S(t) \left[(r + \nu L(t))dt + \sqrt{L(t)}dW_1(t) \right], \\ dL(t) = k(\theta - L(t))dt + e\sqrt{L(t)}dW_2(t), \end{cases}$$

将常数利率变为随机利率，得以下模型：

$$\begin{cases} dS(t) = S(t) [r(t)dt + \sigma_s \sqrt{k_1 r(t) + k_2} (\lambda_r \sqrt{k_1 r(t) + k_2} dt + dW_r(t)) + \nu L(t)dt + \sqrt{L(t)}dW_s(t)], \\ dL(t) = \alpha(\delta - L(t))dt + \sigma_l \sqrt{L(t)}dW_l(t), \end{cases}$$

其中 $S(0) = s_0 > 0$, $L(0) = l_0 > 0$, ν , α , δ , σ_l , σ_s , λ_r 是正常数，满足 $2\alpha\delta \geq \sigma_l^2$,

来保证 $L(t) \geq 0$.

4、Lévy 过程

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) + S(t) \int_R zN(dt, dz),$$

其中 $r > 0$ 代表无风险的利率， $\sigma > 0$ 代表风险资产的波动率， $\{W(t), 0 \leq t \leq T\}$ 是

标准的布朗运动， $\int_0^t \int_R zN(dt, dz)$ 表示一个复合泊松过程。

2.5 效用函数

通常情况下，决策者们往往会利用一个和财富过程相互关联的函数来衡量其中的投资所产生的偏好，此时的函数被称之为效用函数。在现实的金融市场环境下，通常我们采取的效用函数是厌恶风险的。因此，会选择合适的效用函数来刻画最大化问题。本文在研究最优再保险与投资策略中，刻画最大化问题时选择的是 CARA 效用函数。即考虑 $\max E[U(x)]$ ，其中 $U(x)$ 表示效用函数，有两个重要的风险厌恶指标如下：

相对风险厌恶指标

$$r_R = -\frac{U''(x)}{U'(x)}x;$$

绝对风险厌恶指标

$$r_A = -\frac{U''(x)}{U'(x)}.$$

几种常用的效用函数如下：

1、幂效用函数 (CRRA)

$$U(x) = \frac{x^m}{m} (m < 1, m \neq 0),$$

并且

$$r_A = -\frac{U''(x)}{U'(x)} = -\frac{x^{m-1}}{(m-1)x^{m-2}} = \frac{1-m}{x},$$

$$r_R = -\frac{U''(x)}{U'(x)}x = -\frac{x^{m-1}}{(m-1)x^{m-2}}x = 1-m.$$

2、指数效用函数 (CARA)

$$U(x) = -\frac{e^{-mx}}{m} (m > 0),$$

并且

$$r_A = -\frac{U''(x)}{U'(x)} = -\frac{-me^{-mx}}{e^{-mx}} = k,$$

$$r_R = -\frac{U''(x)}{U'(x)}x = -\frac{-me^{-mx}}{e^{-mx}}x = kx.$$

3、对数效用函数

$$U(x) = \ln x,$$

并且

$$r_A = -\frac{U''(x)}{U'(x)} = \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x},$$

$$r_R = -\frac{U''(x)}{U'(x)}x = \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}}x = 1.$$

第3章 变利率下基于 CEV 模型的最优再保险投资策略

本章研究变利率下基于 CEV 模型的最优再保险投资策略. 假设保险公司的盈余过程由跳扩散风险模型来刻画, 为了保值增值, 允许保险公司购买超额损失再保险并将资金投资于一种利率服从 Vasicek 模型的无风险资产和一种价格过程满足 CEV 模型的风险资产, 保险公司的目标是最大化终端财富的预期指数效用. 接着, 应用随机最优控制的方法建立了值函数相应的 HJB 方程, 并在指数效用函数下求解得到最优策略. 最后, 运用数值算例方法阐述了模型参数对最优策略的影响.

3.1 建立模型

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ 是一个完备概率空间, $\mathcal{F}_t$ 是市场中截止到 t 时刻的信息流, 假设以下所有的随机过程均为 $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$ 适应的.

假设保险公司的盈余过程 $R(t)$ 满足跳-扩散风险模型, 由如下随机微分方程给出

$$R(t) = x_0 + ct + \alpha W(t) - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i,$$

其中 x_0 为初始盈余, $c > 0$ 为保险公司的保费率, $N(t)$ 表示到时刻 t 截止的累计索赔发生的次数, 满足参数为 λ 的 Poisson 过程. $\{Z_i, i = 1, 2, \dots\}$ 是一列独立同分布的有界随机变量, $F(z)$ 表示 Z_i 的分布函数, $D = \sup\{z : F(z) \leq 1\} < \infty$, 假定有, $F(0) = 0$, 当 $0 < z < D$, 有 $0 < F(z) < 1$, 当 $z \geq D$, 有 $F(z) = 1$, 其中 $E[Z_i] = \mu_\infty$, $E[Z_i^2] = \mu_\infty^2$. $\sum_{i=1}^{N(t)} Z_i$ 是一个复合泊松过程, 表示 $[0, t]$ 时间段的总索赔量, $W(t)$ 是一个标准的布朗运动, 常数 α 表示扩散系数.

保险人可以采用超额损失再保险的方式来降低自身风险. 假设 $a > 0$ 表示保险公司固定的超额损失预留水平, 保险公司需要支付的索赔额为 $Z_i^a = \min\{Z_i, a\}$, 其中 Z_i 表示第 i 次索赔的额度, $\bar{F}(x) = P(Z_i > x)$ 表示索赔率的分布函数.

$$\mu(a) = E(Z_i^a) = \int_0^a [1 - F(x)] dx = \int_0^a \bar{F}(x) dx,$$

$$\sigma^2(a) = E[(Z_i^a)^2] = \int_0^a 2x[1-F(x)]dx = \int_0^a 2x\bar{F}(x)dx.$$

设 η 表示保险公司的相对安全负荷系数, $\theta > \eta$ 表示再保险公司的相对安全负荷系数. 为了简便计算, 根据 Guo 等人^[29] 的假设, 假设利用期望值原则计算保费率 c , 得到保险保费 $c = (1+\eta)\lambda\mu_\infty$, 再保险保费为 $(1+\theta)\lambda(\mu_\infty - \mu(a))$, 保险公司单位时刻的保费收入率为:

$$c^a = (1+\eta)\lambda\mu_\infty - (1+\theta)\lambda(\mu_\infty - EZ_i^a) = (\eta - \theta)\lambda\mu_\infty + (1+\theta)\lambda EZ_i^a.$$

超额损失再保险后的盈余过程用 R_t^a 表示, 表示如下:

$$dR_t^a = c^a dt + \alpha dW(t) - d \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i^a = [(\eta - \theta)\lambda\mu_\infty + (1+\theta)\lambda\mu(a)] dt + \alpha dW(t) - d \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i^a.$$

另外, 假设保险公司还可以将其盈余投资于无风险资产(债券或银行账户)和风险资产(股票或基金).

无风险资产的价格 $S_0(t)$, 满足如下模型:

$$dS_0(t) = r(t)S_0(t)dt, S_0(0) = S_0 > 0,$$

其中 $r(t)$ 是瞬时利率, 其遵循 Vasicek 模型

$$dr(t) = (p - qr(t))dt + \sigma_r dW_1(t), r(0) = r_0 > 0,$$

其中 σ_r, p, q 为正常数, σ_r 表示无风险利率的瞬时波动率.

$S(t)$ 表示风险资产价格服从 CEV 模型

$$dS(t) = S(t)\mu dt + \sigma S^{\beta+1}(t)dW_1(t),$$

其中 μ, σ 为正常数, $\mu > r$ 为风险资产的瞬时期望收益率, σS^β 为风险资产的瞬时波动率, β 为弹性参数, $W_1(t)$ 是标准布朗运动, $W(t)$ 和 $W_1(t)$ 相互独立.

注释 1: 当 $\beta=0$ 时, CEV 模型将退化成 GBM 模型.

注释 2: 根据 Li 和 Gu^[15] 的假设, 假设净利润为正, 那么必须满足下列条件

$$c^a - \lambda EZ_i^a > 0,$$

即

$$\int_0^a \bar{F}(x)dx > (1 - \frac{\eta}{\theta})\mu_\infty. \quad (3.1)$$

这里假设 a_1 是所有 $a(t)$ 中的最小值 ($a_1 \leq D$). 由式(3.1)可知, 当 $a_1 > D$ 时, 则 $a^*(t) > a_1 > D$, 这与条件 $a(t) \leq D$ 相矛盾. 在这种情况下, 意味着保险公司有很强的能力承担所有的索赔, 不需要再保险, 不在本章研究范围内.

假设保险公司在 t 时刻投资于风险市场的资金总额用 $b(t)$ 表示, 剩余的资金数量则投资在无风险市场中. 记 $\pi = \{\pi(t) = (a(t), b(t)) : t \in [0, T]\}$ 表示保险公司在 t 时刻的再保险-投资策略. 因此, 在上述金融市场环境中, 保险公司的财富盈余过程 X_t^π 满足如下随机微分方程:

$$\begin{aligned} dX_t^\pi &= b(t) \frac{dS(t)}{S(t)} + (X_t^\pi - b(t)) \frac{dS_0(t)}{S_0(t)} + dR_t^a \\ &= [b(t)(\mu - r(t)) + X_t^\pi r(t) + (\eta - \theta)\lambda\mu_\infty + (1 + \theta)\lambda\mu(a)]dt \\ &\quad + b(t)\sigma S^\beta(t)dW_1(t) + \alpha dW(t) - d \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i^a. \end{aligned} \quad (3.2)$$

定义 3.1(可容许策略) 如果一个投资策略 $\pi(t)$ 满足:

- (1) 对 $\forall t \in [0, T], (a(t), b(t))$ 关于 $\mathcal{F}_t$ 是循序可测的;
- (2) $E[\int_0^T \pi^2(t)dt] < \infty$;
- (3) $a(t) \in [0, D]$;
- (4) 随机微分方程(3.2)有唯一解,

则称 $\pi(t)$ 为可容许策略, 记 Π 为所有可容许策略组成的集合.

保险公司需要求解最优投资策略 $\pi^*(t)$, 可以表述为以下的控制问题:

$$\max_{\pi \in \Pi} E[U(X(T))]. \quad (3.3)$$

通常假设效用函数 $U(\cdot)$ 是严格递增和严格凹的连续可微函数. 这里选用指数效用函数

$$U(x) = \xi - \frac{k}{m} e^{-mx},$$

其中 $k > 0$, $m > 0$, m 为绝对风险厌恶系数.

3.2 HJB 方程和最优策略

运用动态规划技术解决问题(3.3), 并给出相应的验证定理.

定义值函数

$$V(t, r, s, x) = \max_{\pi \in \Pi} E[U(X(T)) | r(t) = r, S(t) = s, X(t) = x]. \quad (3.4)$$

结合问题(3.4), 根据 Fleming 和 Soner^[35]可知, 如果 $V \in C^{1,2,2,2}$, 则 $V(t, r, s, x)$ 为下列 HJB 方程的一个连续解

$$\sup_{\pi \in \Pi} A^\pi V(t, r, s, x) = 0, \quad (3.5)$$

边界条件

$$V(T, r, s, x) = U(x). \quad (3.6)$$

其中

$$\begin{aligned} A^\pi V(t, r, s, x) = & V_t + (p - qr)V_r + \mu s V_s + [b(\mu - r) + xr + (\eta - \theta)\lambda\mu_\infty \\ & + (1 + \theta)\lambda\mu(a)]V_x + \frac{1}{2}\sigma_r^2 V_{rr} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^{2\beta+2} V_{ss} \\ & + \frac{1}{2}(b^2 \sigma^2 s^{2\beta} + \alpha^2)V_{xx} + b\sigma^2 s^{2\beta+1} V_{xs} + b\sigma\sigma_r s^\beta V_{xr} \\ & + \sigma\sigma_r s^{\beta+1} V_{rs} + \lambda E[V(t, r, s, x - Z_i^a) - V(t, r, s, x)]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

$V_t, V_r, V_s, V_x, V_{rr}, V_{ss}, V_{xx}, V_{xs}, V_{xr}, V_{rs}$ 分别表示 $V(t, r, s, x)$ 对变量 t, r, s, x 的一阶和二阶偏导数.

使用 Fleming 和 Soner^[35]以及 Yang 和 Zhang^[7] 研究的方法, 可以得到以下的验证定理.

定理 3.1 设 $H \in C^{1,2,2,2}$ 是 HJB 方程(3.5)在边界条件(3.6)下的凹解, 则

$$H(t, r, s, x) = V(t, r, s, x).$$

此时, 使 π^* 满足

$$A^{\pi^*} V(t, r, s, x) = 0,$$

对所有的 $(t, r, s, x) \in [0, T] \times R \times R \times R$, 那么 $\pi^* = (a^*(t), b^*(t))$ 是最优策略.

受文献[29]的启发, 可以推测解满足如下形式

$$H(t, r, s, x) = \xi - \frac{k}{m} e^{[-mx e^{(T-t)} + G_1(t, s) + G_2(t, r)]}, \quad (3.8)$$

其中 $G_1(\cdot)$ 和 $G_2(\cdot)$ 是待确定的函数, 边界条件 $G_1(T, s) = 0, G_2(T, r) = 0$.

根据式(3.7)和式(3.8)求最优投资策略, 由一阶条件得到最小值为

$$b^*(t) = \frac{(\mu - r) + \sigma^2 s^{2\beta+1} G_{1s} + \sigma\sigma_r s^\beta G_{2r}}{\sigma^2 s^{2\beta} m e^{(T-t)}},$$

其中

$$G_{1s} = -2\beta s^{-2\beta-1} \frac{(\mu-r)^2}{4r\beta\sigma^2} [e^{-2\beta r(T-t)} - 1],$$

$$G_{2r} = \frac{mx e^{(T-t)}}{\frac{\sigma_r}{\sigma^\beta} - q - 1} [1 - e^{\frac{(\frac{\sigma_r}{\sigma^\beta} - q - 1)(T-t)}{\sigma^\beta}}].$$

同样，如果 $a(t) \in [0, D]$ ，则 $0 < \bar{F}(a(t)) \leq 1$ ，可以得到最优再保险策略 $\bar{a}(t)$ （无约束条件）满足

$$\bar{a}(t) = \frac{\ln(1 + \theta)}{m e^{\frac{\sigma_r}{\sigma^\beta}(T-t)}}.$$

定理 3.2 指数效用下，所有 $t \in [0, T]$ ，问题(3.3)的最优投资策略为

$$\begin{aligned} b^*(t) &= \frac{(\mu-r) + \sigma^2 s^{2\beta+1} G_{1s} + \sigma \sigma_r s^\beta G_{2r}}{\sigma^2 s^{2\beta} m e^{(T-t)}} \\ &= \frac{2r(\mu-r) - (\mu-r)^2 [e^{-2\beta r(T-t)} - 1]}{2r\sigma^2 s^{2\beta} m e^{(T-t)}} + \frac{x\sigma_r}{\sigma_r - q\sigma^\beta - \sigma^\beta} [1 - e^{\frac{(\frac{\sigma_r}{\sigma^\beta} - q - 1)(T-t)}{\sigma^\beta}}]. \end{aligned}$$

证明见附录 A.

为了确定最优再保险策略 $a^*(t)$ ，将根据 $\bar{a}(t)$ 和 a_1 的值，从三种情况来讨论这个问题，得到不同情况下的最优投资策略表达式，当 $\bar{a}(t) < D$ 时，
 $t < \bar{T} := T + \ln \frac{mD}{\ln(1+\theta)}$. 类似文献[29]，关于 $a(t)$ 有以下讨论：

(1) $a_1 < \bar{a}(t) < D$

① 如果 $mD > \ln(1+\theta)$ ，($t < T < \bar{T}$)，则 $a^*(t) = \bar{a}(t)$ ， $\bar{a}(t) \in [0, D]$ ，此时最优策略为

$$a^*(t) = \frac{\ln(1 + \theta)}{m e^{\frac{\sigma_r}{\sigma^\beta}(T-t)}}.$$

② 如果 $mD < \ln(1+\theta)$ ，($t < \bar{T} < T$)，则 $a^*(t) = \bar{a}(t)$ ， $\bar{a}(t) \in [0, D]$ ，这意味保险公司不需要购买再保险，且 $\mu(D) = \mu_\infty$ ， $\sigma^2(D) = \sigma_\infty^2$. 因此，最优策略为

$$a^*(t) = \begin{cases} \bar{a}(t), & t < \bar{T} < T \\ D, & \bar{T} < t < T \end{cases}.$$

(2) $\bar{a}(t) < a_1 < D$

① 如果 $mD > \ln(1+\theta)$ ，($t < T < \bar{T}$)，则 $a^*(t) = a_1$ ， $\bar{a}(t) \in [0, D]$ ，此时最优策略为

$$a^*(t) = a_1.$$

② 如果 $mD < \ln(1+\theta)$, $(t < \bar{T} < T)$, 则 $a^*(t) = a_1$, $\bar{a}(t) \in [0, D)$, 此时最优策略为

$$a^*(t) = \begin{cases} a_1, & t < \bar{T} < T \\ D, & \bar{T} < t < T \end{cases}.$$

(3) $a_1 < D < \bar{a}(t)$

如果 $a_1 < D < \bar{a}(t)$, $t \in [0, T]$, 则 $a^*(t) = D$, 在此情形中, 最优再保险策略与情形(1)和(2)重合.

与上述(1)-(3)类似, 很容易得到如下情形:

(1) $a_1 < \bar{a}(t) < D$

① $T < \bar{T}$

$$B_2(t) = M(t) - \int_t^T g_2(\bar{a}(u), u) du, \quad t < T < \bar{T}.$$

② $\bar{T} < T$

$$B_2(t) = \begin{cases} M(t) - \int_t^T g_2(\bar{a}(u), u) du + m_1, & t < T < \bar{T} \\ M(t) - \int_t^T g_2(D, u) du, & \bar{T} < t < \bar{T} \end{cases}.$$

(2) $\bar{a}(t) < a_1 < D$

① $T < \bar{T}$

$$B_2(t) = M(t) - \int_t^T g_2(a_1(u), u) du, \quad t < T < \bar{T}.$$

② $\bar{T} < T$

$$B_2(t) = \begin{cases} M(t) - \int_t^T g_2(a_1(u), u) du + m_2, & t < \bar{T} < T \\ M(t) - \int_t^T g_2(D, u) du, & \bar{T} < t < T \end{cases}.$$

(3) $a_1 < D < \bar{a}(t)$

如果 $a_1 < D < \bar{a}(t)$, $t \in [0, T]$, 则 $a^*(t) = D$.

$$B_2(t) = M(t) - \int_t^T g_2(D, u) du.$$

综上所述, 可以得到了不同情形下对应的值函数形式.

(1) $a_1 < \bar{a}(t) < D$

① 如果 $mD > \ln(1+\theta)$, ($t < T < \bar{T}$), 则最优策略为 $a^*(t) = \bar{a}(t)$, 对应的值函数形式

$$V(t, r, s, x) = \xi - \frac{k}{m} \exp[-mxe^{(T-t)} + G_1(t, s) + G_{21}(t, r)], \quad t < T < \bar{T},$$

其中 $G_{21} = rB_1(t)e^{(T-t)} + M(t) - \int_t^T g_2(\bar{a}(u), u)du$.

② 如果 $mD < \ln(1+\theta)$, 则对应的值函数为

$$V(t, r, s, x) = \begin{cases} \xi - \frac{k}{m} \exp[-mxe^{(T-t)} + G_1(t, s) + G_{22}(t, r)], & t < \bar{T} < T \\ \xi - \frac{k}{m} \exp[-mxe^{(T-t)} + G_1(t, s) + G_{23}(t, r)], & \bar{T} < t < T \end{cases},$$

其中

$$G_{22} = rB_1(t)e^{(T-t)} + M(t) - \int_t^T g_2(\bar{a}(u), u)du + m_1,$$

$$G_{23} = rB_1(t)e^{(T-t)} + M(t) - \int_t^T g_2(D, u)du.$$

考虑 $V(t, r, s, x)$ 在时间 $\bar{T}$ 连续, 因此, 有 $m_1 = \int_{\bar{T}}^T g_2(\bar{a}(u), u)du - \int_{\bar{T}}^T g_2(D, u)du$.

(2) $\bar{a}(t) < a_1 < D$

① 如果 $mD > \ln(1+\theta)$, ($t < T < \bar{T}$), 则最优策略为 $a^*(t) = a_1$, 对应的值函数形式

$$V(t, r, s, x) = \xi - \frac{k}{m} \exp[-mxe^{(T-t)} + G_1(t, s) + G_{24}(t, r)], \quad t < T < \bar{T},$$

其中 $G_{24} = rB_1(t)e^{(T-t)} + M(t) - \int_t^T g_2(a_1, u)du$.

② 如果 $mD < \ln(1+\theta)$, 则对应的值函数为

$$V(t, r, s, x) = \begin{cases} \xi - \frac{k}{m} \exp[-mxe^{(T-t)} + G_1(t, s) + G_{24}(t, r)], & t < \bar{T} < T \\ \xi - \frac{k}{m} \exp[-mxe^{(T-t)} + G_1(t, s) + G_{23}(t, r)], & \bar{T} < t < T \end{cases},$$

其中

$$G_{23} = rB_1(t)e^{(T-t)} + M(t) - \int_t^T g_2(D, u)du,$$

$$G_{24} = rB_1(t)e^{(T-t)} + M(t) - \int_t^T g_2(a_1, u)du + m_2.$$

考虑 $V(t, r, s, x)$ 在时间 $\bar{T}$ 连续, 则 $m_2 = \int_{\bar{T}}^T g_2(a_1, u)du - \int_{\bar{T}}^T g_2(D, u)du, a_1 < D < \bar{a}(t)$.

(3) $a_1 < D < \bar{a}(t)$

如果 $a_1 < D < \bar{a}(t)$, $t \in [0, T]$, 则 $a^*(t) = D$, 在此情形中, 对应的值函数为

$$V(t, r, s, x) = \xi - \frac{k}{m} \exp[-mxe^{(T-t)} + G_1(t, s) + G_{23}(t, r)], \quad 0 < t < T,$$

其中 $G_{23} = rB_1(t)e^{(T-t)} + M(t) - \int_t^T g_2(D, u)du$.

3.3 数值分析

我们用数值分析分别阐述参数对最优投资策略和最优再保险策略的影响. 本章参数设定主要参考 Guo 等人^[29] 的参数设置, 相关参数如下:

表 3.1 参数配置

参数	t	T	q	s	x	σ	θ	m	β	μ	σ_r	r
取值	2	3	0.8	6	3	1	2	0.15	-0.68	0.082	0.08	0.02

3.3.1 参数对最优投资策略的影响

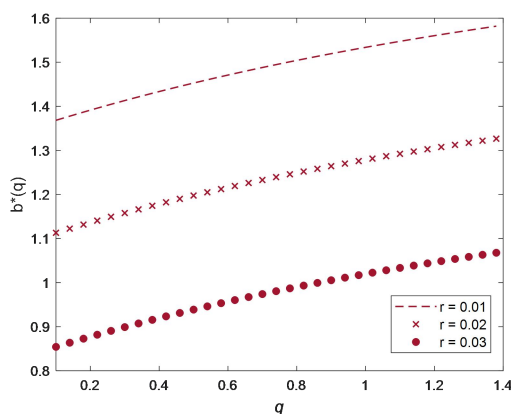


图 3.1 q 对最优投资策略 $b^*(t)$ 的影响

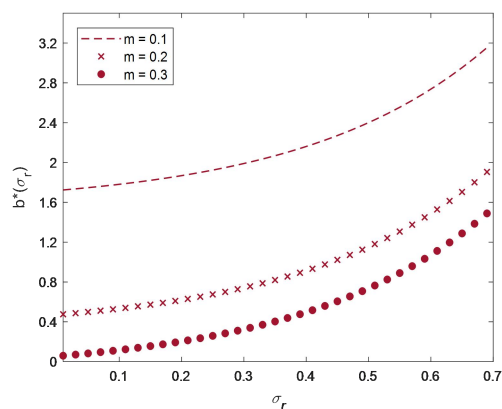


图 3.2 σ_r 对最优投资策略 $b^*(t)$ 的影响

如图 3.1 所示, 能够得出 r, q 对最优投资策略 $b^*(t)$ 的影响. 最优投资策略 $b^*(t)$ 随着 q 的增加而增加, 根据利率模型可知, q 越大, 意味着随机利率的期望收益越小, 保险公司从无风险资产当中获得的收益也越少. 因而, 保险公司更想将较多的资金数量投资在风险资产上. 其次, 当无风险利率 r 增加时, 此时的最优投资策略 $b^*(t)$ 反而在减少, 由于市场中无风险利率的增加, 保险公司更加

期望在无风险资产中投资更多的资金. 因此, 为了降低投资风险而减少风险资产的购买数量.

如图 3.2 所示, 能够得出 m , σ_r 对最优投资策略 $b^*(t)$ 的影响. $b^*(t)$ 与无风险利率的瞬时波动率 σ_r 呈现相同的变化趋势, 当 σ_r 增加, 保险公司为了规避相应的金融市场风险, 于是投资在无风险资产的资金数量将越来越少, 更倾向于将资金投资在风险资产上. 此外, 当 m 越大时, 最优投资策略反而越小, 这符合实际情况. 因为, m 越大意味着风险厌恶程度也越高, 为了降低破产的风险, 保险公司在风险资产上投资的资金会越来越少.

3.3.2 参数对最优再保险策略的影响

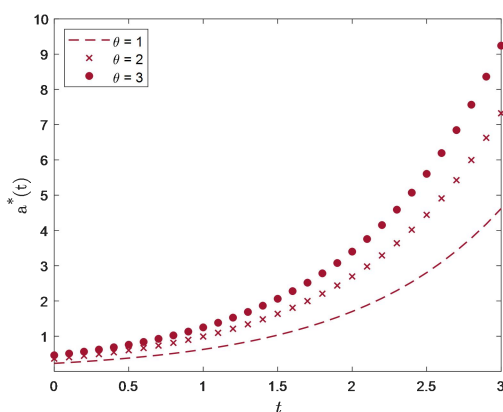


图 3.3 θ 对最优再保险策略 $a^*(t)$ 的影响

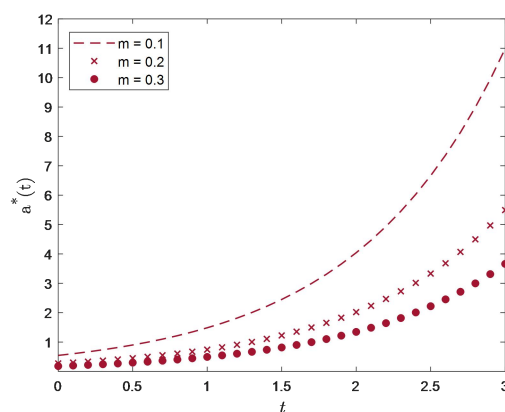


图 3.4 m 对最优再保险策略 $a^*(t)$ 的影响

如图 3.3 所示, 能够得到再保险人的安全负荷 θ 对最优再保险策略 $a^*(t)$ 的影响. 可以知道最优再保险策略随着再保险人的安全负荷 θ 的增加而增加. 这意味着保险人自身会承担较多的保险业务风险, 同时提高再保险的预留水平, 从而达到降低再保险的支付成本的目的.

如图 3.4 所示, 能够得到绝对风险厌恶系数 m 对最优再保险策略 $a^*(t)$ 的影响. 可以发现 $a^*(t)$ 随着绝对风险厌恶系数 m 的增加反而减少. 当 m 越大时, 保险公司规避风险的能力越强. 因此, 保险人更愿意通过购买较多的再保险来提高财务的稳定性.

3.4 本章小结

本章研究了变利率下基于 CEV 模型的最优超额损失再保险-投资问题. 在

此基础上保险公司的目标是使得终端财富的期望指数效用最大化,应用随机最优控制的方法,建立了值函数相应的 HJB 方程,并且在指数效用函数下得到了最优策略. 运用数值算例阐述模型参数对最优策略的影响,结果说明:最优投资策略 $b^*(t)$ 随着 q 和 σ_r 的增加而增加,当 q 和 σ_r 越大,保险公司更想将较多的资金数量投资在风险资产上;当 r 和 m 的增加时, $b^*(t)$ 反而在减少,当无风险利率 r 和风险厌恶系数 m 越大,保险公司反而会减少投资在风险资产上的资金数量;当 θ 增加时,保险公司会提高再保险的预留水平,来达到减少保费支出的目的;当绝对风险厌恶系数 m 越大时,保险人会购买较多的再保险来提高财务的稳定性. 结果符合市场实际和预期,最优策略为保险公司有效的管理和控制风险提供依据.

第 4 章 基于 CEV 模型下考虑零息债券的最优再保险

投资策略

本章考虑将资金投资于无风险资产，股票和零息债券三种资产中，同时结合超额损失再保险，研究基于 CEV 模型下考虑零息债券的最优再保险投资策略。假设利率遵循 Vasicek 利率模型，风险资产价格遵循 CEV 模型。以终端财富的效用最大化为目标，利用随机控制理论寻找最优值函数和最优再保险投资策略。最后，运用数值算例阐述模型参数对最优策略的影响。

4.1 建立模型

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ 是一个完备概率空间， $\mathcal{F}_t$ 是市场中截止到 t 时刻的信息流，假设以下所有的随机过程均为 $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$ 适应的。

假设保险公司的盈余过程 $R(t)$ 满足以下方程：

$$R(t) = x_0 + ct + \alpha W(t) - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i,$$

其中 x_0 为初始盈余， $c > 0$ 为保险公司的保费率， $N(t)$ 表示到时刻 t 截止的累计索赔发生的次数，满足参数为 λ 的 Poisson 过程。 $\{Z_i, i = 1, 2, \dots\}$ 是一列独立同分布的有界随机变量， $F(z)$ 表示 Z_i 的分布函数， $D = \sup\{z : F(z) \leq 1\} < \infty$ ，假设 $F(0) = 0$ ，当 $0 < z < D$ ，有 $0 < F(z) < 1$ ，当 $z \geq D$ ，有 $F(z) = 1$ ，其中 $E[Z_i] = \mu_\infty$ ，

$E[Z_i^2] = \mu_\infty^2$ 。 $\sum_{i=1}^{N(t)} Z_i$ 是一个复合泊松过程，表示 $[0, t]$ 时间段的总索赔量， $W(t)$ 是一个标准的布朗运动，常数 α 表示扩散系数。

为了降低自身风险，保险人可以购买超额损失再保险。假设 $a > 0$ 表示保险公司固定的超额损失预留水平，保险公司应承担的索赔额为 $Z_i^a = \min\{Z_i, a\}$ ，其中 Z_i 表示第 i 次索赔的额度， $\bar{F}(x) = P(Z_i > x)$ 表示索赔率的分布函数。

$$\mu(a) = E(Z_i^a) = \int_0^a [1 - F(x)] dx = \int_0^a \bar{F}(x) dx,$$

$$\sigma^2(a) = E[(Z_i^a)^2] = \int_0^a 2x[1-F(x)]dx = \int_0^a 2x\bar{F}(x)dx.$$

设 η 表示保险公司的相对安全负荷系数, $\theta > \eta$ 表示再保险公司的相对安全负荷系数. 为了简便计算, 根据 Guo 等人^[29] 的假设, 假设利用期望值原则计算保费率 c , 得到保险保费 $c = (1+\eta)\lambda\mu_\infty$, 再保险保费为 $(1+\theta)\lambda(\mu_\infty - \mu(a))$, 保险公司单位时刻的保费收入率为:

$$c^a = (1+\eta)\lambda\mu_\infty - (1+\theta)\lambda(\mu_\infty - EZ_i^a) = (\eta - \theta)\lambda\mu_\infty + (1+\theta)\lambda EZ_i^a.$$

超额损失再保险后的盈余过程用 R_t^a 表示, 表示如下:

$$dR_t^a = c^a dt + \alpha dW(t) - d \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i^a = [(\eta - \theta)\lambda\mu_\infty + (1+\theta)\lambda\mu(a)] dt + \alpha dW(t) - d \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i^a.$$

另外, 保险公司还可以将资金投资于无风险资产、风险资产和零息债券. 其中无风险资产和风险资产的价格过程类似第三章, 为了便于阅读, 如下所示:

无风险资产的价格过程, 满足方程

$$dS_0(t) = r(t)S_0(t)dt, S_0(0) = S_0 > 0,$$

其中 $r(t)$ 是瞬时利率, 其遵循 Vasicek 模型

$$dr(t) = (p - qr(t))dt + \sigma_r dW_r(t), r(0) = r_0 > 0,$$

风险资产价格服从 CEV 模型

$$dS(t) = S(t)\mu dt + \sigma S^{\beta+1}(t)dW_s(t),$$

其中 $W(t)$, $W_r(t)$ 和 $W_s(t)$ 相互独立.

$P(t)$ 表示期长为 T 的零息债券, 且满足:

$$dP(t) = P(t)[(r(t) + \eta_1(t)\sigma_1(t))dt + \sigma_1(t)dW_r(t)],$$

其中 $\sigma_1(t) = \frac{\sigma_r}{q}(e^{-q(T-t)} - 1)$, $\eta_1(t)$ 为时间 t 的确定函数.

假设保险公司在 t 时刻投资于股票和零息债券的资金总额分别用 $b(t)$ 和 $c(t)$ 表示, 剩余的资金投资于无风险市场. 记 $\pi = \{\pi(t) = (a(t), b(t), c(t)) : t \in [0, T]\}$ 表示保险公司在 t 时刻的再保险-投资策略. 因此, 在上述金融市场环境中, 保险公司的财富盈余过程 X_t^π 满足如下随机微分方程:

$$\begin{aligned}
 dX_t^\pi &= b(t) \frac{dS(t)}{S(t)} + c(t) \frac{dP(t)}{P(t)} + (X_t^\pi - b(t) - c(t)) \frac{dS_0(t)}{S_0(t)} + dR_t^a \\
 &= [b(t)(\mu - r(t)) + X_t^\pi r(t) + c(t)\eta_1\sigma_1 + (\eta - \theta)\lambda\mu_\infty + (1 + \theta)\lambda\mu(a)]dt \\
 &\quad + b(t)\sigma S^\beta(t)dW_s(t) + c(t)\sigma_1 dW_r(t) + \alpha dW(t) - d \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i^a.
 \end{aligned}$$

保险公司想要获得最优投资策略 $\pi^*(t)$ 可使终端财富的期望效用最大化, 并表述为以下的控制问题:

$$\max_{\pi \in \Pi} E[U(X(T))]. \quad (4.1)$$

通常假设效用函数 $U(\cdot)$ 是严格递增和严格凹的连续可微函数. 这里选用指数效用函数

$$U(x) = \xi - \frac{k}{m} e^{-mx},$$

其中 $k > 0$, $m > 0$, m 为绝对风险厌恶系数.

4.2 HJB 方程和最优策略

运用动态规划技术解决问题(4.1), 并给出相应的验证定理.

定义值函数

$$V(t, r, s, x) = \max_{\pi \in \Pi} E[U(X(T)) | r(t) = r, S(t) = s, X(t) = x]. \quad (4.2)$$

结合问题(4.2), 根据 Fleming 和 Soner^[35] 可知, 如果 $V \in C^{1,2,2,2}$, 则 $V(t, r, s, x)$ 为下列 HJB 方程的一个连续解

$$\sup_{\pi \in \Pi} A^\pi V(t, r, s, x) = 0, \quad (4.3)$$

边界条件

$$V(T, r, s, x) = U(x). \quad (4.4)$$

其中

$$\begin{aligned}
 A^\pi V(t, r, s, x) &= V_t + (p - qr)V_r + \mu s V_s + [b(\mu - r) + xr + c\eta_1\sigma_1 + (\eta - \theta)\lambda\mu_\infty \\
 &\quad + (1 + \theta)\lambda\mu(a)]V_x + \frac{1}{2}\sigma_r^2 V_{rr} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^{2\beta+2} V_{ss} + \frac{1}{2}(b^2\sigma^2 s^{2\beta} + c^2\sigma_1^2 \\
 &\quad + \alpha^2)V_{xx} + b\sigma^2 s^{2\beta+1} V_{xs} + c\sigma_1\sigma_r V_{xr} + \lambda E[V(t, r, s, x - Z_i^a) - V(t, r, s, x)]
 \end{aligned} \quad (4.5)$$

其中 $V_t, V_r, V_s, V_x, V_{rr}, V_{ss}, V_{xx}, V_{xs}, V_{xr}$ 分别表示 $V(t, r, s, x)$ 对变量

t, r, s, x 的一阶和二阶偏导数.

使用 Fleming 和 Soner^[35] 以及 Yang 和 Zhang^[7] 研究的方法, 可以得到以下的验证定理.

定理 4.1 设 $H \in C^{1,2,2,2}$ 是 HJB 方程(4.3)在边界条件(4.4)下的凹解, 则

$$H(t, r, s, x) = V(t, r, s, x).$$

此时, 使 π^* 满足

$$A^{\pi^*} V(t, r, s, x) = 0,$$

对所有的 $(t, r, s, x) \in [0, T] \times R \times R \times R$, 那么 $\pi^* = (a^*(t), b^*(t))$ 是最优策略.

受文献[29]的启发, 可以推测解满足如下形式

$$H(t, r, s, x) = \xi - \frac{k}{m} e^{[-mx e^{(T-t)} + G_1(t, s) + G_2(t, r)]}, \quad (4.6)$$

其中 $G_1(\cdot)$ 和 $G_2(\cdot)$ 是待确定的函数, 边界条件 $G_1(T, s) = 0$, $G_2(T, r) = 0$.

根据式(4.5)和式(4.6)求最优投资策略, 由一阶条件得到最小值为

$$\begin{aligned} b^*(t) &= \frac{(\mu - r) + \sigma^2 s^{2\beta+1} G_{1s}}{\sigma^2 s^{2\beta} m e^{(T-t)}}, \\ c^*(t) &= \frac{\eta_1 + \sigma_r G_{2r}}{\sigma_1 m e^{(T-t)}}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} G_{1s} &= -2\beta s^{-2\beta-1} \frac{(\mu - r)^2}{4r\beta\sigma^2} [e^{-2\beta r(T-t)} - 1], \\ G_{2r} &= \frac{mx e^{(T-t)}}{q+1} [e^{(-q-1)(T-t)} - 1]. \end{aligned}$$

同样, 如果 $a(t) \in [0, D]$, 则 $0 < \bar{F}(a(t)) \leq 1$, 可以得到最优再保险策略 $\bar{a}(t)$ 满足

$$\bar{a}(t) = \frac{\ln(1 + \theta)}{m e^{(T-t)}}.$$

定理 4.2 指数效用下, 所有 $t \in [0, T]$, 问题(4.1)的最优投资策略为

$$\begin{aligned} b^*(t) &= \frac{(\mu - r) + \sigma^2 s^{2\beta+1} G_{1s}}{\sigma^2 s^{2\beta} m e^{(T-t)}} = \frac{2r(\mu - r) - (\mu - r)^2 [e^{-2\beta r(T-t)} - 1]}{2r\sigma^2 s^{2\beta} m e^{(T-t)}}, \\ c^*(t) &= \frac{\eta_1 + \sigma_r G_{2r}}{\sigma_1 m e^{(T-t)}} = \frac{(q+1)\eta_1 + \sigma_r mx [e^{-q(T-t)} - e^{(T-t)}]}{(q+1)\sigma_1 m e^{(T-t)}}. \end{aligned}$$

证明见附录 B.

为了确定最优再保险策略 $a^*(t)$ ，将根据 $\bar{a}(t)$ 和 a_1 的值，从三种情况来讨论这个问题，关于 $a(t)$ 讨论同第三章，这里不再赘述。最终得到不同情形下对应的值函数形式，如下所示：

(1) $a_1 < \bar{a}(t) < D$

① 如果 $mD > \ln(1+\theta)$ ， $(t < T < \bar{T})$ ，则最优策略为 $a^*(t) = \bar{a}(t)$ ，对应的值函数形式

$$V(t, r, s, x) = \xi - \frac{k}{m} \exp[-mxe^{(T-t)} + G_1(t, s) + G_{21}(t, r)], \quad t < T < \bar{T}$$

其中 $G_{21} = rB_1(t)e^{(T-t)} + M(t) - \int_t^T g_3(\bar{a}(u), u)du$ 。

② 如果 $mD < \ln(1+\theta)$ ，则对应的值函数为

$$V(t, r, s, x) = \begin{cases} \xi - \frac{k}{m} \exp[-mxe^{(T-t)} + G_1(t, s) + G_{22}(t, r)], & t < \bar{T} < T \\ \xi - \frac{k}{m} \exp[-mxe^{(T-t)} + G_1(t, s) + G_{23}(t, r)], & \bar{T} < t < T \end{cases},$$

其中

$$G_{22} = rB_1(t)e^{(T-t)} + M(t) - \int_t^{\bar{T}} g_3(\bar{a}(u), u)du + m_1,$$

$$G_{23} = rB_1(t)e^{(T-t)} + M(t) - \int_{\bar{T}}^T g_3(D, u)du.$$

考虑 $V(t, r, s, x)$ 在时间 $\bar{T}$ 连续，因此，有 $m_1 = \int_{\bar{T}}^T g_3(\bar{a}(u), u)du - \int_{\bar{T}}^T g_3(D, u)du$ 。

(2) $\bar{a}(t) < a_1 < D$

① 如果 $mD > \ln(1+\theta)$ ， $(t < T < \bar{T})$ ，则最优策略为 $a^*(t) = a_1$ ，对应的值函数形式

$$V(t, r, s, x) = \xi - \frac{k}{m} \exp[-mxe^{(T-t)} + G_1(t, s) + G_{24}(t, r)], \quad t < T < \bar{T},$$

其中 $G_{24} = rB_1(t)e^{(T-t)} + M(t) - \int_t^T g_3(a_1, u)du$ 。

② 如果 $mD < \ln(1+\theta)$ ，则对应的值函数为

$$V(t, r, s, x) = \begin{cases} \xi - \frac{k}{m} \exp[-mxe^{(T-t)} + G_1(t, s) + G_{24}(t, r)], & t < \bar{T} < T \\ \xi - \frac{k}{m} \exp[-mxe^{(T-t)} + G_1(t, s) + G_{23}(t, r)], & \bar{T} < t < T \end{cases},$$

其中

$$G_{23} = rB_1(t)e^{(T-t)} + M(t) - \int_t^T g_3(D, u)du,$$

$$G_{24} = rB_1(t)e^{(T-t)} + M(t) - \int_t^T g_3(a_1, u)du + m_2.$$

考虑 $V(t, r, s, x)$ 在时间 $\bar{T}$ 连续, 则 $m_2 = \int_{\bar{T}}^T g_3(a_1, u)du - \int_{\bar{T}}^T g_3(D, u)du, a_1 < D < \bar{a}(t)$.

(3) $a_1 < D < \bar{a}(t)$

如果 $a_1 < D < \bar{a}(t)$, $t \in [0, T]$, 则 $a^*(t) = D$, 在此情形中, 对应的值函数为

$$V(t, r, s, x) = \xi - \frac{k}{m} \exp[-mxe^{(T-t)} + G_1(t, s) + G_{23}(t, r)], \quad t < T < \bar{T},$$

其中 $G_{23} = rB_1(t)e^{(T-t)} + M(t) - \int_t^T g_3(D, u)du$.

4.3 数值分析

我们利用数值分析分别阐述了一系列参数对最优投资策略和最优再保险策略产生的影响. 相关参数假设如下:

表 4.1 参数配置

参数	η_1	t	T	q	s	x	σ	θ	m	β	μ	σ_r	r
取值	0.04	2	4	0.8	6	3	1	2	0.15	-0.68	0.082	0.08	0.02

4.3.1 参数对最优投资策略的影响

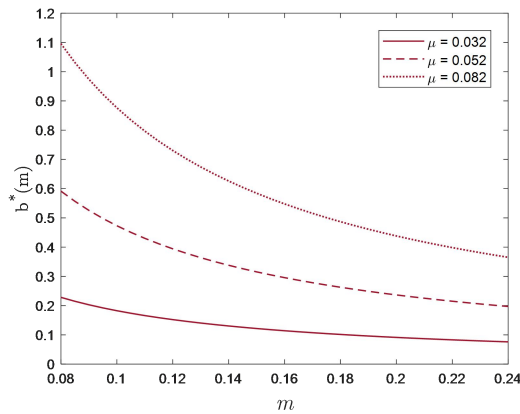


图 4.1 m 对最优投资策略 $b^*(t)$ 的影响

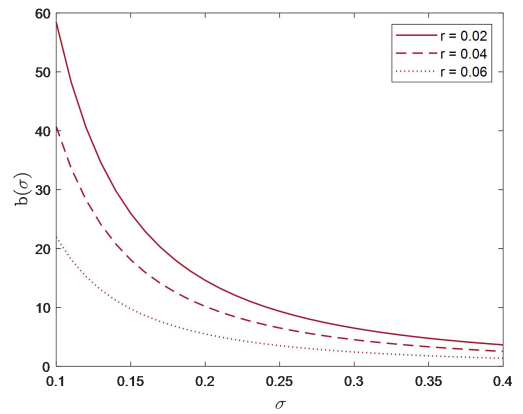


图 4.2 σ 对最优投资策略 $b^*(t)$ 的影响

如图 4.1 所示, 能够得出 m , μ 对最优投资策略 $b^*(t)$ 的影响. 当 m 越大时,

最优投资策略反而越小, 这符合实际情况. 因为, m 越大意味着风险厌恶程度也越高, 因而保险公司会减少投资在风险资产上的资金数量来降低破产的风险. 此外, $b^*(t)$ 与风险资产的瞬时期望收益率 μ 具有相同的变化趋势, 当 μ 增加, $b^*(t)$ 也随之增加, 保险公司将会向风险金融市场投入更多的资金.

如图 4.2 所示, 够得出 σ , r 对最优投资策略 $b^*(t)$ 的影响. 当 σ 增加时, 意味着风险资产的瞬时波动率也随之增加, 当 r 增加时, 表示无风险利率增加. 因此, 当 σ , r 增加时, 保险公司更愿意将资金投资在无风险资产中, 为了降低投资风险而减少风险资产的购买数量.

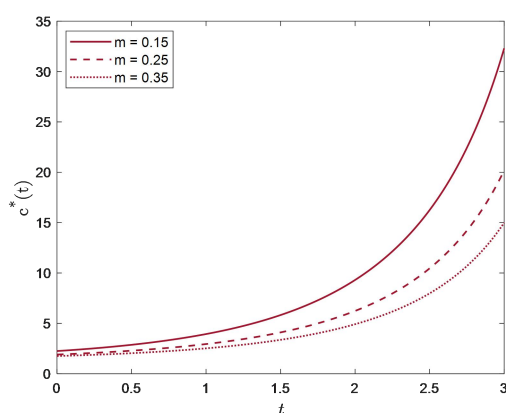


图 4.3 m 对最优投资策略 $c^*(t)$ 的影响

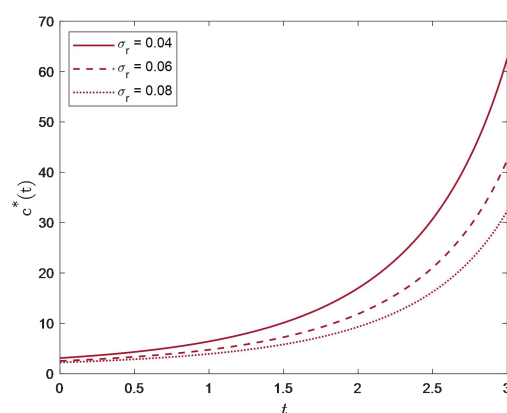
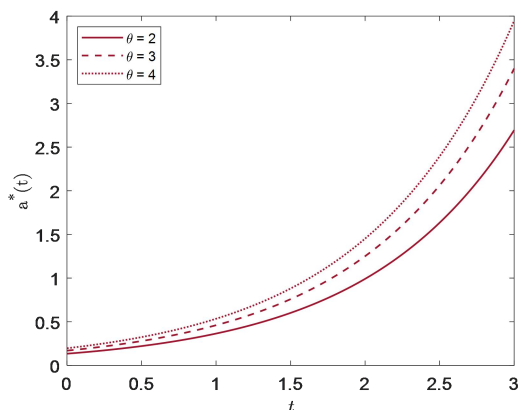
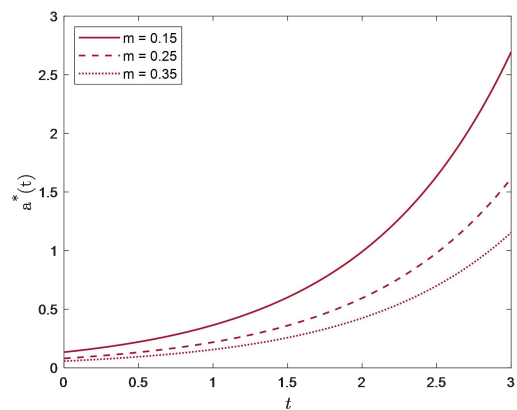


图 4.4 σ_r 对最优投资策略 $c^*(t)$ 的影响

如图 4.3 所示, 能够得出 m 对最优投资策略 $c^*(t)$ 的影响. 当 m 增加时, 投资者对风险厌恶程度增加, 保险公司为了规避风险, 因而投资于股票和零息债券上的资金数量就越来越少, 更倾向于将资金投资在无风险资产上.

如图 4.4 所示, 能够得出 σ_r 对最优投资策略 $c^*(t)$ 的影响. 当 σ_r 越大时, 无风险利率的瞬时波动率也随之增加, 从而导致零息债券的波动率也随着增加. 因此, 投资者为了规避风险, 从而减少投资在零息债券上的资金数量.

4.3.2 参数对最优再保险策略的影响

图 4.5 θ 对最优再保险策略 $a^*(t)$ 的影响图 4.6 m 对最优再保险策略 $a^*(t)$ 的影响

如图 4.5 所示，能够得到再保险人的安全负荷 θ 对最优再保险策略 $a^*(t)$ 的影响。可以知道最优再保险策略随着再保险人的安全负荷 θ 的增加而增加。这意味着保险人自身会承担较多的保险业务风险，同时提高再保险的预留水平，从而达到降低再保险的支付成本的目的。

如图 4.6 所示，能够得到绝对风险厌恶系数 m 对最优再保险策略 $a^*(t)$ 的影响。发现最优再保险策略 $a^*(t)$ 随着 m 的增加而减少。当 m 越大时，保险公司规避风险的能力越强。因此，保险人更愿意通过购买较多的再保险来提高财务的稳定性。

4.4 本章小结

为了更加贴近实际的金融市场，本章不再只考虑将资金投资于无风险资产和风险资产中，而是也投资于零息债券，同时结合超额损失再保险，研究基于 CEV 模型下考虑零息债券的最优再保险投资策略。假设无风险资产的利率遵循 Vasicek 利率模型，风险资产的价格遵循 CEV 模型。以终端财富的效用最大化为目标，利用随机控制理论寻找最优值函数和最优再保险投资策略。最后，运用数值算例阐述模型参数对最优策略的影响。

第 5 章 总结与展望

文章是在考虑变利率的基础之上进行了相应的研究工作，其中风险模型有经典的跳-扩散风险模型，利率模型为 Vasicek 随机利率模型，风险资产价格过程遵循 CEV 模型；保险公司采用超额损失再保险的方式来降低自身风险；其目标是终端财富的期望指数效用最大化。通过数值模拟得到一系列模型参数对最优策略的影响。其中风险厌恶系数和利率风险对最优策略的影响较大。本文主要的相关研究工作和主要结论如下所示：

1. 引入变利率，并将其盈余投资于无风险资产和风险资产中，研究了变利率下基于 CEV 模型的最优再保险投资策略。保险公司的目标是终端财富的期望效用最大化，应用随机最优控制的方法建立了值函数相应的 HJB 方程，并在指数效用函数下求解得到最优策略。最后通过数值模拟得到模型参数对最优策略的影响。

2. 保险公司在研究投资策略时考虑了将资金投资于无风险资产，风险资产和零息债券中，同时结合超额损失再保险，研究基于 CEV 模型下考虑零息债券的最优再保险投资策略。以终端财富的期望效用最大化为目标，利用随机控制理论寻找最优值函数和最优再保险与投资策略。最后，运用数值算例阐述模型参数对最优策略的影响。

由于自己知识水平的限制，研究内容也存在许多需要改进之处，在以后的研究工作中将更加关注自身专业知识和学术水平的提升。并且在后续的研究内容上可以在如下几个方面进行深入的探讨：

1. 在再保险方式的选择问题上，本文仅仅考虑了保险公司可以采用的是超额损失再保险的策略来降低自身的风险，但是在实际的金融市场当中还可以选择其他种类的再保险方式，例如联合比例-超额损失再保险的方式。

2. 本文还可以考虑通胀环境下的金融市场，使其更接近保险公司的实际投资情况。

3. 本文在刻画最大化问题时选择的是指数效用函数，还可以考虑其他的效用函数，例如幂效用函数和对数效用函数等。

参考文献

- [1] Markowitz H. Portfolio selection: efficient diversification of investment[M]. New York: John Wiley and Sons, 1959, 101-104.
- [2] Samuelson P. Lifetime portfolio selection by dynamic stochastic programming[J]. Review Economics and Stochastics, 1969, 51(3): 239-246.
- [3] Browne S. Optimal investment policies for a firm with a random risk process: exponential utility and minimizing the probability of ruin[J]. Mathematics of operations research, 1995, 20(4): 937-958.
- [4] Hipp C, plum M. Optimal investment for insurers[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2000, 27(2): 215-228.
- [5] Hipp C, Plum, M. Optimal investment for investors with state dependent income, and for insurers[J]. Finance and Stochastics, 2003, 7(3): 299- 321.
- [6] Liu C, Yang H. Optimal investment for an insurer to minimize its probability of ruin[J]. North American Actuarial Journal, 2004, 8(2): 11-31.
- [7] Yang H, Zhang L. Optimal investment for insurer with jump-diffusion risk process[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2005, 37(3): 615-634.
- [8] Wang N. Optimal investment for an insurer with exponential utility preference[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2007, 40(1): 77-84.
- [9] 梁志彬. 跳扩散盈余过程的最优投资和最优再保险, 数学学报(中文版), 2008, 51(6): 1195-1204.
- [10] Cao Y, Wan N. Optimal proportional reinsurance and investment based on Hamilton-Jacobi-Bellman equation[J]. Insurance Mathematics and Economics, 2009, 4(2)5: 157-162.
- [11] Gu M, Yang Y, Li S, etc. Constant elasticity of variance model for proportional reinsurance and investment strategies[J]. Insurance Mathematics and Economics, 2010, 46(3): 580-587.
- [12] Lin X, Li Y. Optimal investment and optimal reinsurance policy for jump-diffusion risk model[J]. Acta Mathematica Applicatae Sinica, 2013, 36(5): 791-802.

- [13] 夏登峰, 苑伟杰, 费为银. 变利率下基于 SV 模型的最优再保险-投资研究[J]. 运筹与管理, 2023, 32(6): 200-204.
- [14] Cox J, Ross S. The valuation of options for alternative stochastic processes[J]. Journal of Financial Economics, 1976, 3(1): 145-166.
- [15] Li Q, Gu M. Optimal reinsurance and investment policies with the CEV stock market[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series, 2016, 32(3): 647-658.
- [16] 聂高琴. CEV 模型下最大化 HARA 效用的最优再保险与投资策略[J]. 数学的实践与认识, 2019, 49(23): 249-255.
- [17] 李国柱, 马世霞. 在 CEV 模型下带违约风险的时间一致再保险投资博弈[J]. 数学杂志, 2020, 40(6): 662-672.
- [18] 蔡江佳, 李全. 基于存贷利差和常弹性方差模型的最优投资策略[J]. 宁波大学学报(理工版), 2021, 34(5): 49-54.
- [19] Vasicek O. An equilibrium characterization of the term structure[J]. Journal of Financial Economics, 1977, 5(4): 627-627.
- [20] Cox J, Ingersoll J, Ross S. A theory of the term structure of interest rates[J]. Econometrica, 1985, 53(2): 385-408.
- [21] Guan G, Liang Z. Optimal reinsurance and investment strategies for insurer under interest rate and inflation risks[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2014, 55: 105-115.
- [22] Li D, Rong X, Zhao H. Time-consistent reinsurance-investment strategy for a mean-variance insurer under stochastic interest rate model and inflation risk[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2015, 64:28-44.
- [23] 聂高琴, 常浩. Vasicek 利率与 Heston 模型下的最优投资和再保险[J]. 应用数学, 2020, 33(2): 525-533.
- [24] Li J, Wu R. Optimal investment problem with stochastic interest rate and stochastic volatility: maximizing a power utility[J]. Applied Stochastic Models in Business and Industry, 2009, 25(3): 407-420.

- [25] 杨鹏, 林祥. 具有随机利率、随机变差的最优投资和联合比例-超额损失再保险[J]. 经济数学, 2012, 29(1): 43-46.
- [26] Bai L, Guo J. Optimal dynamic excess-of-loss reinsurance and multidimensional portfolio selection[J]. Science China Mathematics, 2010, 53(7): 1787-1804.
- [27] Gu A, Guo X, Li Z, etc. Optimal control of excess-of-loss reinsurance and investment for insurers under a CEV model[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2012, 51(3): 674-684.
- [28] Zhao H, Rong X, Zhao Y. Optimal excess-of-loss reinsurance and investment problem for an insurer with jump-diffusion risk process under the Heston model[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2013, 53(3): 504-514.
- [29] Guo M, Kan X, Shu H. Optimal investment and reinsurance problem with jump-diffusion model[J]. Communications in Statistics-Theory and Methods, 2021, 50(5): 1082-1098.
- [30] Korn R, Kraft H. A stochastic control approach to portfolio problems with stochastic interest rates[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2002, 40(4):1250-1269.
- [31] 常浩, 荣喜民. Vasicek 利率模型下带有负债的投资组合优化[J]. 上海交通大学学报, 2013, 47(3): 465-471.
- [32] 元丽霞, 常浩. 仿射利率模型下的最优再保险-投资策略[J]. 系统工程, 2018, 36(3): 34-40.
- [33] 周蕊, 荣喜民, 赵慧. CIR 模型下保险公司最优投资再保险策略研究[J]. 工程数学学报, 2018, 35(3): 246-257.
- [34] 李丹萍, 林玉容, 曾燕. 随机利率与随机波动率模型下保险公司的均衡再保险-投资策略[J]. 计量经济学报, 2021, 1(4): 904-920.
- [35] Fleming W, Soner H. Controlled Markov processes and viscosity solutions [M]. The United States of America: Springer New York, 2006.

附录

附录 A

定理 3.2 的证明

证明：在指数效用函数下，假设方程的解满足如下形式

$$H(t, r, s, x) = \xi - \frac{k}{m} e^{[-mxe^{(T-t)} + G_1(t, s) + G_2(t, r)]}, \quad (\text{A.1})$$

其中 $G_1(T, s) = 0$, $G_2(T, r) = 0$, 从式(A.1)可得到

$$\begin{aligned} H_t &= (H - \xi)[mxe^{(T-t)} + G_{1t} + G_{2t}], H_r = (H - \xi)[G_{2r}], \\ H_s &= (H - \xi)[G_{1s}], H_x = (H - \xi)[-me^{(T-t)}], \\ H_{rr} &= (H - \xi)[G_{2r}^2 + G_{2rr}], H_{ss} = (H - \xi)[G_{1s}^2 + G_{1ss}], \\ H_{xx} &= (H - \xi)[m^2e^{2(T-t)}], H_{xr} = (H - \xi)[G_{2r}][-me^{(T-t)}], \\ H_{xs} &= (H - \xi)[G_{1s}][-me^{(T-t)}], H_{rs} = (H - \xi)[G_{1s}G_{2r}], \\ E[H(t, r, s, x - Z_i^a) - H(t, r, s, x)] &= (H - \xi)me^{(T-t)} \int_0^a e^{mxe^{(T-t)}} \bar{F}(x) dx. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

将式(A.2)代入方程(3.5), 由于 $H(t, r, s, x) - 1 < 0$, 对于 $0 < t < T$, 有

$$\begin{aligned} &mxe^{(T-t)} + G_{1t} + G_{2t} + (p - qr)G_{2r} + \mu s G_{1s} + [xr + (\eta - \theta)\lambda\mu_\infty][-me^{(T-t)}] \\ &+ \frac{1}{2}\sigma_r^2(G_{2r}^2 + G_{2rr}) + \frac{1}{2}\sigma^2s^{2\beta+2}(G_{1sr} + G_{1ss}) + \frac{1}{2}\alpha^2m^2e^{2(T-t)} + \sigma\sigma_rs^{\beta+1}G_{1s}G_{2r} \\ &+ \inf\left\{-b(\mu - r) + \frac{1}{2}b^2\sigma^2s^{2\beta}me^{(T-t)} - b\sigma^2s^{2\beta+1}G_{1s} - b\sigma\sigma_rs^\beta G_{2r}\right\}me^{(T-t)} \\ &+ \inf\left\{-(1 + \theta)\lambda\mu(a) + \lambda\int_0^a e^{mxe^{(T-t)}} \bar{F}(x) dx\right\}me^{(T-t)} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

设

$$g_1(b(t), t) = [-b(\mu - r) + \frac{1}{2}b^2\sigma^2s^{2\beta}me^{(T-t)} - b\sigma^2s^{2\beta+1}G_{1s} - b\sigma\sigma_rs^\beta G_{2r}]me^{(T-t)},$$

$$g_2(a(t), t) = [-(1 + \theta)\lambda\mu(a) + \lambda\int_0^a e^{mxe^{(T-t)}} \bar{F}(x) dx]me^{(T-t)}.$$

对 $g_1(b(t), t)$ 中的 b 求导, 得到

$$b^*(t) = \frac{(\mu - r) + \sigma^2s^{2\beta+1}G_{1s} + \sigma\sigma_rs^\beta G_{2r}}{\sigma^2s^{2\beta}me^{(T-t)}}.$$

对 $g_2(a(t), t)$ 中的 a 求导, 得到

$$\bar{a}(t) = \frac{\ln(1 + \theta)}{me^{(T-t)}}.$$

将 $(a^*(t), b^*(t))$ 代入式(A.3), 得到

$$\begin{aligned} & mxe^{(T-t)} + G_{1t} + G_{2t} + (p - qr)G_{2r} + rsG_{1s} - xrm e^{(T-t)} - (\eta - \theta)\lambda\mu_\infty me^{(T-t)} \\ & + \frac{1}{2}\sigma_r^2 G_{2rr} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^{2\beta+2} G_{1ss} + \frac{1}{2}\alpha^2 m^2 e^{2(T-t)} - \frac{(\mu-r)^2}{2\sigma^2 s^{2\beta}} - \frac{(\mu-r)\sigma_r}{\sigma s^\beta} G_{2r} \quad (A.4) \\ & + [-(1+\theta)\lambda \int_0^{\frac{\ln(1+\theta)}{me^{(T-t)}}} \bar{F}(x)dx + \lambda \int_0^{\frac{\ln(1+\theta)}{me^{(T-t)}}} e^{mx(T-t)} \bar{F}(x)dx] me^{(T-t)} = 0. \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} K(t) &= mxe^{(T-t)} - (\eta - \theta)\lambda\mu_\infty me^{(T-t)} + \frac{1}{2}\alpha^2 m^2 e^{2(T-t)} \\ &+ [-(1+\theta)\lambda \int_0^{\frac{\ln(1+\theta)}{me^{(T-t)}}} \bar{F}(x)dx + \lambda \int_0^{\frac{\ln(1+\theta)}{me^{(T-t)}}} e^{mx(T-t)} \bar{F}(x)dx] me^{(T-t)}. \end{aligned}$$

因为式(A.4)对所有的 t, r, s, x 都成立, 所以将其分解为如下两个偏微分方程

$$G_{1t} + rsG_{1s} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^{2\beta+2} G_{1ss} - \frac{(\mu-r)^2}{2\sigma^2 s^{2\beta}} = 0, \quad (A.5)$$

$$G_{2t} + (p - qr)G_{2r} + \frac{1}{2}\sigma_r^2 G_{2rr} - \frac{(\mu-r)\sigma_r}{\sigma s^\beta} G_{2r} - xrm e^{(T-t)} + K(t) = 0. \quad (A.6)$$

接下来, 将以上两个偏微分方程的求解过程表示为如下两个引理来进行求解:

引理 3.1 假设方程(A.5)解的形式为

$$G_1(t, s) = A_1(t)s^{-2\beta} + A_2(t), \quad (A.7)$$

且 $A_1(T) = A_2(T) = 0$, 则 $A_1(t)$ 和 $A_2(t)$ 分别由式(A.10)和式(A.11)表示.

证明 将式(A.7)代入方程(A.5), 消除对 s 的依赖, 得到以下两个微分方程

$$A_1'(t) - 2\beta r A_1(t) - \frac{(\mu-r)^2}{2\sigma^2} = 0, \quad A_1(T) = 0, \quad (A.8)$$

$$A_2'(t) + \sigma^2(2\beta^2 + \beta)A_1(t) = 0, \quad A_2(T) = 0. \quad (A.9)$$

解方程(A.8)和(A.9), 可得

$$A_1(t) = \frac{(\mu-r)^2}{4r\beta\sigma^2} [e^{-2\beta r(T-t)} - 1], \quad (A.10)$$

$$A_2(t) = -\frac{(2\beta+1)(\mu-r)^2}{4r} \left[(T-t) + \frac{e^{-2\beta r(T-t)} - 1}{2\beta r} \right]. \quad (A.11)$$

引理 3.2 假设方程(A.6)解的形式为

$$G_2(t, r) = rB_1(t)e^{(T-t)} + B_2(t), \quad (A.12)$$

且 $B_1(T) = B_2(T) = 0$, 则 $B_1(t)$ 和 $B_2(t)$ 分别由式(A.15)和式(A.16)表示.

证明 将式(A.12)代入方程(A.6), 消除对 r 的依赖, 得到以下两个微分方程

$$B_1'(t) + \left(\frac{\sigma_r}{\sigma^\beta} - q - 1\right)B_1(t) - mx = 0, \quad B_1(T) = 0, \quad (\text{A.13})$$

$$B_2'(t) + \left(p - \frac{\mu\sigma_r}{\sigma^\beta}\right)e^{(T-t)}B_1(t) + K(t) = 0, \quad B_2(T) = 0 \quad (\text{A.14})$$

解方程(A.13)和(A.14), 可得

$$B_1(t) = \frac{mx[1 - e^{\left(\frac{\sigma_r}{\sigma^\beta} - q - 1\right)(T-t)}]}{\frac{\sigma_r}{\sigma^\beta} - q - 1}, \quad (\text{A.15})$$

$$\begin{aligned} B_2(t) = & \frac{mx}{\frac{\sigma_r}{\sigma^\beta} - q - 1} \left(\frac{\mu\sigma_r}{\sigma^\beta} - p \right) \left[(1 - e^{(T-t)}) + \frac{e^{\left(\frac{\sigma_r}{\sigma^\beta} - q\right)(T-t)}}{\frac{\sigma_r}{\sigma^\beta} - q} \right] + mx[e^{(T-t)} - 1] \\ & - (\eta - \theta)\lambda m\mu_\infty[e^{(T-t)} - 1] + \frac{\alpha^2 m^2}{4}[e^{2(T-t)} - 1] - \int_t^T g_2(a^*(u), u)du. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

为了简便, 令

$$\begin{aligned} B_2(t) = & \frac{mx}{\frac{\sigma_r}{\sigma^\beta} - q - 1} \left(\frac{\mu\sigma_r}{\sigma^\beta} - p \right) \left[(1 - e^{(T-t)}) + \frac{e^{\left(\frac{\sigma_r}{\sigma^\beta} - q\right)(T-t)}}{\frac{\sigma_r}{\sigma^\beta} - q} \right] + mx[e^{(T-t)} - 1] \\ & - (\eta - \theta)\lambda m\mu_\infty[e^{(T-t)} - 1] + \frac{\alpha^2 m^2}{4}[e^{2(T-t)} - 1]. \end{aligned}$$

综上: 定理 3.2 得证.

附录 B

定理 4.2 的证明

证明：类似定理 3.2，假设方程的解满足如下形式

$$H(t, r, s, x) = \xi - \frac{k}{m} e^{[-mxe^{(T-t)} + G_1(t, s) + G_2(t, r)]}, \quad (\text{B.1})$$

其中 $G_1(T, s) = 0$, $G_2(T, r) = 0$, 从式(B.1)可得到

$$\begin{aligned} H_t &= (H - \xi)[mxe^{(T-t)} + G_{1t} + G_{2t}], H_r = (H - \xi)[G_{2r}], \\ H_s &= (H - \xi)[G_{1s}], H_x = (H - \xi)[-me^{(T-t)}], \\ H_{rr} &= (H - \xi)[G_{2r}^2 + G_{2rr}], H_{ss} = (H - \xi)[G_{1s}^2 + G_{1ss}], \\ H_{xx} &= (H - \xi)[m^2e^{2(T-t)}], H_{xr} = (H - \xi)[G_{2r}][me^{(T-t)}], \\ H_{xs} &= (H - \xi)[G_{1s}][me^{(T-t)}], \\ E[H(t, r, s, x - Z_i^a) - H(t, r, s, x)] &= (H - \xi)me^{(T-t)} \int_0^a e^{mxe^{(T-t)}} \bar{F}(x) dx. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

将式(B.2)代入方程(4.3)，由于 $H(t, r, s, x) - 1 < 0$ ，对于 $0 < t < T$ ，有

$$\begin{aligned} & mxe^{(T-t)} + G_{1t} + G_{2t} + (p - qr)G_{2r} + \mu s G_{1s} + [xr + (\eta - \theta)\lambda\mu_\infty][me^{(T-t)}] \\ & + \frac{1}{2}\sigma_r^2(G_{2r}^2 + G_{2rr}) + \frac{1}{2}\sigma^2 s^{2\beta+2}(G_{1s}^2 + G_{1ss}) + \frac{1}{2}\alpha^2 m^2 e^{2(T-t)} \\ & + \inf_{b \in R} \left\{ \left[-b(\mu - r) + \frac{1}{2}b^2\sigma^2 s^{2\beta} me^{(T-t)} - b\sigma^2 s^{2\beta+1} G_{1s} \right] me^{(T-t)} \right\} \\ & + \inf_{c \in R} \left\{ \left[-c\eta_1\sigma_1 + \frac{1}{2}c^2\sigma_1^2 me^{(T-t)} - c\sigma_1\sigma_r G_{2r} \right] me^{(T-t)} \right\} \\ & + \inf_{a \in [0, D]} \left\{ \left[-(1 + \theta)\lambda\mu(a) + \lambda \int_0^a e^{mxe^{(T-t)}} \bar{F}(x) dx \right] me^{(T-t)} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

类似定理 3.2 的证明过程，可以得

$$\begin{aligned} b^*(t) &= \frac{(\mu - r) + \sigma^2 s^{2\beta+1} G_{1s}}{\sigma^2 s^{2\beta} me^{(T-t)}}. \\ c^*(t) &= \frac{\eta_1 + \sigma_r G_{2r}}{\sigma_1 me^{(T-t)}}, \\ \bar{a}(t) &= \frac{\ln(1 + \theta)}{me^{(T-t)}}. \end{aligned}$$

将 $(a^*(t), b^*(t), c^*(t))$ 代入式(B.3)，得到

$$\begin{aligned}
 & mxe^{(T-t)} + G_{1t} + G_{2t} + (p - qr)G_{2r} + rsG_{1s} - xrm e^{(T-t)} - (\eta - \theta)\lambda\mu_\infty me^{(T-t)} \\
 & + \frac{1}{2}\sigma_r^2 G_{2rr} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^{2\beta+2} G_{1ss} + \frac{1}{2}\alpha^2 m^2 e^{2(T-t)} - \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2 s^{2\beta}} - \frac{1}{2}\eta_1^2 - \eta_1\sigma_r G_{2r} \quad (B.4) \\
 & + \left[-(1 + \theta)\lambda \int_0^{\frac{\ln(1+\theta)}{me^{(T-t)}}} \bar{F}(x)dx + \lambda \int_0^{\frac{\ln(1+\theta)}{me^{(T-t)}}} e^{mx e^{(T-t)}} \bar{F}(x)dx \right] me^{(T-t)} = 0,
 \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}
 K(t) = & mxe^{(T-t)} - (\eta - \theta)\lambda\mu_\infty me^{(T-t)} + \frac{1}{2}\alpha^2 m^2 e^{2(T-t)} - \frac{1}{2}\eta_1^2 \\
 & + \left[-(1 + \theta)\lambda \int_0^{\frac{\ln(1+\theta)}{me^{(T-t)}}} \bar{F}(x)dx + \lambda \int_0^{\frac{\ln(1+\theta)}{me^{(T-t)}}} e^{mx e^{(T-t)}} \bar{F}(x)dx \right] me^{(T-t)}.
 \end{aligned}$$

因为式(B.4)对所有的 t, r, s, x 都成立，所以将其分解为如下两个偏微分方程

$$G_{1t} + rsG_{1s} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^{2\beta+2} G_{1ss} - \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2 s^{2\beta}} = 0, \quad (B.5)$$

$$G_{2t} + (p - qr - \eta_1\sigma_r)G_{2r} + \frac{1}{2}\sigma_r^2 G_{2rr} - xrm e^{(T-t)} + K(t) = 0 \quad (B.6)$$

接下来，将以上两个偏微分方程的求解过程表示为如下两个引理来进行求解，其中(B.5)方程的求解过程与附录 B(A.5)方程的求解过程相同，这里不再赘述。

引理 4.1 假设方程(B.6)解的形式为

$$G_2(t, r) = rB_1(t)e^{(T-t)} + B_2(t), \quad (B.7)$$

且 $B_1(T) = B_2(T) = 0$ ，则 $B_1(t)$ 和 $B_2(t)$ 分别由式(B.10)和式(B.11)表示。

证明 将式(B.7)代入方程(B.6)，消除对 r 的依赖，得到以下两个微分方程

$$B_1'(t) + (-q - 1)B_1(t) - mx = 0, \quad (B.8)$$

$$B_2'(t) + (p - \eta_1\sigma_r)e^{(T-t)}B_1(t) + K(t) = 0. \quad (B.9)$$

解方程(B.8)和(B.9)，可得

$$B_1(t) = \frac{mx[e^{(-q-1)(T-t)} - 1]}{q + 1}, \quad (B.10)$$

$$\begin{aligned}
 B_2(t) = & \frac{(\eta_1\sigma_r - p)mx}{q + 1} \left[(e^{(T-t)} - 1) + \frac{1}{q}(e^{-q(T-t)} - 1) \right] + mx[e^{(T-t)} - 1] \\
 & - (\eta - \theta)\lambda\mu_\infty m[e^{(T-t)} - 1] + \frac{\alpha^2 m^2}{4}[e^{2(T-t)} - 1] - \frac{1}{2}\eta_1^2(T - t) \\
 & - \int_t^T g_3(a^*(u), u)du,
 \end{aligned} \quad (B.11)$$

为了简便，令

$$\begin{aligned} M(t) = & \frac{(\eta_1 \sigma_r - p)mx}{q+1} \left[(e^{(T-t)} - 1) + \frac{1}{q} (e^{-q(T-t)} - 1) \right] + mx [e^{(T-t)} - 1] \\ & - (\eta - \theta) \lambda \mu_\infty m [e^{(T-t)} - 1] + \frac{\alpha^2 m^2}{4} [e^{2(T-t)} - 1] - \frac{1}{2} \eta_1^2 (T - t). \end{aligned}$$

综上：定理 4.2 得证.

硕士期间发表的论文

- [1] 徐文静, 夏登峰, 杨铭, 韩雪伟. 变利率下基于CEV模型的最优再保险与投资策略[J]. 安徽工程大学学报. (录用)
- [2] 杨铭, 夏登峰, 徐文静, 韩雪伟. HARA效用下考虑DC养老金带有死亡和伤残返还条款的最优投资问题[J]. 安徽师范大学学报(自然科学版)2024, 47(2): 112-117.
- [3] 韩雪伟, 夏登峰, 杨铭, 徐文静. 部分信息与损失厌恶下DC型养老金最优投资策略[J]. 安庆师范大学学报. (终审)

致 谢

时光荏苒，研究生生涯即将结束，三年的学习生活让我受益匪浅。经过一年多的磨练，毕业论文终于完成了。回顾往日的收集、整理、思考、停滞、修改和最终完成的过程，我遇到了如此多的良师益友，无论在学习上还是生活上都给予我无私的帮助，让我在充满温馨的环境中度过了三年的大学生活，现在我要向他们表示最诚挚的感谢。

首先，我要深深地感谢我的导师。夏登峰教授渊博的专业知识，严谨的治学态度，精益求精的工作作风，平易近人的人格魅力对我影响深远。在选题、资料收集和写作阶段，夏老师都倾注了极大的关怀和鼓励。在论文的写作过程中，每当我有什么疑惑的时候，夏老师总是会孜孜不倦地给我指点；在论文修改阶段，他一字一句批改，逐字核对，提出了许多中肯的指导意见，使我在研究和写作的过程中不至于迷失方向，顺利完成论文写作。他对我的关心和教导我将永远铭记。借此机会，我对夏登峰老师表示深深的感谢。

其次，我要感谢三年来一直陪伴在我身边的同学和朋友，有你们的存在使我的大学生活丰富多彩。感恩知己，我们一起努力，一起进步，虽然最终我们都天各一方，但希望你们能够前程似锦，以梦为马，不负韶华。

然后我要感谢我的家人，谢谢你们一路以来默默的陪伴，让我无忧无虑的长大，在我最困难的时候，给我肩膀依靠。你们是我前进路上最大的底气，也谢谢你们，把最好的都给了我。

最后，我要向参与我论文评审和答辩的各位专家学者表示感谢，正是您们的辛勤工作和付出，对我的论文提出了宝贵的意见和建议，才使我的论文得以完善和提升。

谨以此对所有关心帮助过我的人表示衷心的感谢！祝你们一切顺利，幸福美满！

2024 年 6 月 2 日