

分类号: TP391

密 级: 公开

学校代码: 10363

学 号: 2210910108



安徽工程大学

Anhui Polytechnic University

# 硕士学位论文

题 目 基于低秩张量约束的缺失多视  
图聚类算法研究

论 文 作 者 汲广艳

指 导 教 师 卢桂馥 教授 张志伟 副教授

学 科 ( 专 业 ) 软件工程

研 究 方 向 领域软件工程

论文提交日期: 2024 年 5 月 23 日

分类号: TP391  
密 级: 公开

单位代码: 10363  
学 号: 2210910108

题 目 基于低秩张量约束的缺失多视图聚类算法研究

题 目 Research on incomplete multi-view clustering algorithms based on  
low-rank tensor constraint

学生姓名: 汲广艳

指导教师: 卢桂馥(教授)/张志伟(副教授)

专 业: 软件工程

研究方向: 领域软件工程

论文答辩日期: 2024 年 5 月 24 日

## 安徽工程大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：我恪守学术道德，崇尚严谨学风。所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已明确注明和引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品及成果的内容。论文为本人亲自撰写，我对所写的内容负责，并完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

学位论文作者签名：波丁艳

日期：2024年5月23日

## 安徽工程大学学位论文版权使用授权书

学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅或借阅。本人授权安徽工程大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保密 ☐，在\_\_\_\_\_年解密后适用本版权书。

本学位论文属于

不保密 ☒。

学位论文作者签名：汲广艳

日期：2024年5月23日

指导教师签名：李松彪

日期：2024年5月23日

# 基于低秩张量约束的缺失多视图聚类算法研究

## 摘 要

随着大数据时代的发展,数据的维度和复杂度也在不断增加,数据标注的成本十分高昂。聚类作为无监督学习领域中研究最多、应用最广的技术,在处理高维数据方面表现出优越性能。根据聚类视图的个数,可以将聚类划分为单视图聚类和多视图聚类。在现实生活中,往往很难获得完整的视图信息,于是产生了缺失的多视图数据。研究人员提出了一系列针对缺失多视图数据的聚类算法,并取得良好的聚类结果,然而这些方法的性能仍然存在进一步提高的空间。因此,针对现有的缺失多视图聚类算法存在的部分局限,本文设计了三种创新的缺失多视图聚类算法,主要的研究内容和创新点如下:

针对传统聚类算法无法处理具有任意视图缺失的情况,提出了基于共识隐表示的缺失多视图聚类算法(Consensus Latent Incomplete Multi-view Clustering with Low-rank Tensor Constraint, CLIMVC/LTC)。CLIMVC/LTC 首先利用隐表示模型来生成缺失的视图,使缺失视图补全的过程更加灵活。为了探索不同视图数据之间的高阶相关性信息和一致性信息,该方法引入低秩张量约束项和共识表示学习项。CLIMVC/LTC 通过将隐表示模型、低秩张量约束和共识表示学习融合到一个统一的框架中提高聚类性能,并利用增广拉格朗日乘子法 (Augmented Lagrangian Multiplier, ALM) 优化目标函数。在四个公开数据集上的实验结果验证了所提方法的有效性。

针对亲和矩阵的学习过程与聚类过程分离的问题,提出了一种新颖的缺失多视图聚类方法,即融合表征学习与 k-means 的一步式缺失多视图聚类算法 (One-step Incomplete Multi-view Clustering with Low-rank Tensor Graph Learning, OIMVC/LTGL)。具体来说, OIMVC/LTGL 首先利用视图之间的邻接关系来补全相似图矩阵,为了挖掘不同视图之间的高阶相关性,该方法将相似图矩阵拼接成一个三阶张量,并施加低秩约束。为了探索视图之间的一致性信息,该方法引入共识表示项来学习最优共识表示。最后,对共识表示矩阵引入谱旋转,直接获得

聚类标签。OIMVC/LTGL 将自适应图学习、低秩张量约束、共识表示学习和聚类融合到一个统一的优化框架中，这些步骤相互促进从而获得更好的聚类性能。在真实数据集上与其他聚类算法进行对比，实验结果验证了该算法的有效性。

针对基于图的聚类算法在处理大规模数据集时具有较高计算复杂度的问题，提出了一种基于 Schatten  $p$  范数和张量化二部图的缺失多视图聚类算法 (Scalable Incomplete Multi-view Clustering via Tensor Schatten  $p$ -norm and Tensorized Bipartite Graph, SIMVC/TSTBG)，SIMVC/TSTBG 将张量化二部图、图补全和低秩张量约束融合到一个联合框架中。具体而言，该方法首先基于选定的  $m$  个锚点和  $n$  个数据点构造二部图，将图的大小从  $n \times n$  减小至  $n \times m$  ( $m \ll n$ )，大大降低了计算复杂度。其次，该方法利用图补全技术自适应地补全缺失的二部图，从而降低了缺失视图信息对聚类结果的影响。为了探索缺失视图之间的联系和挖掘视图之间的高阶信息，该方法将二部图拼接成一个三阶张量，并对其施加低秩约束，即张量 Schatten  $p$  范数。与现有的缺失多视图聚类算法对比，所提方法在多个缺失数据集上表现出更低的时间复杂度和更高的聚类性能。

**关键词：**无监督学习，缺失多视图聚类，低秩张量约束，图学习，共识表示学习

# Research on incomplete multi-view clustering algorithms based on low-rank tensor constraint

## ABSTRACT

With the development of the era of big data, the dimension and complexity of data are also increasing, and the cost of data labeling is very high. As the most researched and widely used technique in the field of unsupervised learning, clustering shows excellent performance in processing high-dimensional data. According to the number of clustering views, we divide clustering into single view clustering and multi-view clustering. In real life, it is often difficult to obtain complete view information. Many experts and scholars have successively proposed clustering algorithms to deal with incomplete multi-view data. However, the clustering performance of these methods can be further improved. Therefore, to address some of the limitations of the existing clustering algorithms for incomplete multi-view data, we design three innovative incomplete multi-view clustering algorithms. The proposed research content and innovations are as follows:

To solve the problem that traditional clustering algorithms cannot handle the case of missing arbitrary view, we propose a novel method, i.e., consensus latent incomplete multi-view clustering with low-rank tensor constraint (CLIMVC/LTC). We firstly use a latent model to generate the missing view, which makes the process of missing view completion more flexible. To explore the higher-order correlation and consistency information between different view, CLIMVC/LTC utilizes the low-rank tensor constraint term and the consensus representation term. The latent model, low-rank tensor constraint and consensus representation learning term are integrated into a unified framework, which improve the clustering performance. The objective function is optimized by augmented Lagrange multiplier method. Experimental results on four

public datasets verify the effectiveness of CLIMVC/LTC.

To solve the problem of separation between affinity matrix learning process and clustering process, we propose an ingenious IMVC method, one-step incomplete multi-view clustering with low-rank tensor graph learning (OIMVC/LTGL). Specifically, we first utilize the adjacency relationship between views to complete the similarity graph matrices. Second, we stack all similarity graph matrices into a third-order tensor. To mine higher-order correlations among different views, we impose a low-rank tensor constraint, the tensor nuclear norm (TNN), into the constructed tensor. Third, to explore consistent information between views, we introduce a common representation learning term to learn the optimal consensus representation. Last, we introduce spectral rotation to the consensus representation matrices to directly obtain the clustering labels. This method combines graph learning, low-rank tensor constraint, common representation learning and clustering into a unified optimization framework. These steps reinforce each other to achieve better clustering performance. Compared with other clustering algorithms on real datasets, the experimental results verify the effectiveness of OIMVC/LTGL.

To solve the problem that graph-based clustering algorithms have high computational complexity when dealing with large-scale datasets, we innovatively propose a scalable incomplete multi-view clustering via the tensor Schatten  $p$ -norm and tensorized bipartite graph (SIMVC/TSTBG) method, which combines tensorized bipartite graph, graph completion, and tensor low-rank constraint into a joint framework. Concretely, we first construct bipartite graphs based on the selected  $m$  anchor points and the  $n$  data points, reducing the size of the graph from  $n \times n$  to  $n \times m$  ( $m \ll n$ ), which considerably reduces the computational complexity. Second, we adaptively complete the missing bipartite graph, which reduces the effect of missing view information on the clustering results. Third, to explore connections between missing views and mine high-order information between views, we splice the bipartite graphs into a tensor and impose a tensor low-rank constraint, i.e., the tensor Schatten  $p$ -norm, on it. Compared with existing algorithms, the proposed method shows lower time complexity and higher

clustering performance on incomplete multi-view datasets.

**KEY WORDS:** Unsupervised learning, incomplete multi-view clustering, low-rank tensor constraint, graph learning, consensus representation learning

# 目录

|                              |    |
|------------------------------|----|
| 第 1 章 绪论.....                | 1  |
| 1.1 研究背景与意义.....             | 1  |
| 1.2 研究现状.....                | 3  |
| 1.2.1 基于矩阵分解学习的缺失多视图聚类.....  | 3  |
| 1.2.2 基于多核学习的缺失多视图聚类.....    | 4  |
| 1.2.3 基于图学习的缺失多视图聚类.....     | 5  |
| 1.2.4 基于深度学习的缺失多视图聚类.....    | 5  |
| 1.3 主要研究内容与创新点.....          | 6  |
| 1.4 论文的结构安排.....             | 8  |
| 第 2 章 相关知识介绍.....            | 10 |
| 2.1 缺失多视图聚类.....             | 10 |
| 2.2 张量学习.....                | 10 |
| 2.2.1 基本概念.....              | 10 |
| 2.2.2 张量奇异值分解.....           | 11 |
| 2.2.3 张量范数.....              | 12 |
| 2.3 增广拉格朗日乘子法.....           | 12 |
| 2.4 聚类评价指标.....              | 13 |
| 2.5 本章小结.....                | 14 |
| 第 3 章 基于共识隐表示的缺失多视图聚类算法..... | 15 |
| 3.1 引言.....                  | 15 |
| 3.2 基于共识隐表示的缺失多视图聚类算法.....   | 16 |
| 3.2.1 CLIMVC/LTC 模型搭建.....   | 16 |
| 3.2.2 CLIMVC/LTC 模型求解.....   | 17 |
| 3.2.3 CLIMVC/LTC 算法主要流程..... | 22 |
| 3.2.4 CLIMVC/LTC 算法复杂度.....  | 22 |
| 3.3 实验及分析.....               | 23 |

|                                                |    |
|------------------------------------------------|----|
| 3.3.1 实验设置.....                                | 23 |
| 3.3.2 对比实验结果与分析.....                           | 24 |
| 3.3.3 参数敏感度分析.....                             | 27 |
| 3.3.4 收敛性分析.....                               | 28 |
| 3.4 本章小结.....                                  | 29 |
| 第 4 章 融合表征学习与 k-means 的一步式缺失多视图聚类算法.....       | 30 |
| 4.1 引言.....                                    | 30 |
| 4.2 融合表征学习与 k-means 的一步式缺失多视图聚类算法.....         | 31 |
| 4.2.1 OIMVC/LTGL 模型搭建.....                     | 31 |
| 4.2.2 OIMVC/LTGL 模型求解.....                     | 33 |
| 4.2.3 OIMVC/LTGL 算法主要流程.....                   | 37 |
| 4.2.4 OIMVC/LTGL 算法复杂度.....                    | 38 |
| 4.3 实验及分析.....                                 | 38 |
| 4.3.1 实验设置.....                                | 38 |
| 4.3.2 对比实验结果与分析.....                           | 39 |
| 4.3.3 统计分析.....                                | 42 |
| 4.3.4 运行时间与复杂度比较.....                          | 45 |
| 4.3.5 参数敏感度分析.....                             | 45 |
| 4.3.6 消融实验.....                                | 47 |
| 4.3.7 收敛性分析.....                               | 48 |
| 4.4 本章小结.....                                  | 49 |
| 第 5 章 基于 Schatten $p$ 范数和张量化二部图的缺失多视图聚类算法..... | 50 |
| 5.1 引言.....                                    | 50 |
| 5.2 基于 Schatten $p$ 范数和张量化二部图的缺失多视图聚类算法.....   | 51 |
| 5.2.1 SIMVC/TSTBG 模型搭建.....                    | 51 |
| 5.2.2 SIMVC/TSTBG 模型求解.....                    | 53 |
| 5.2.3 SIMVC/TSTBG 算法主要流程.....                  | 57 |
| 5.2.4 SIMVC/TSTBG 算法复杂度.....                   | 57 |
| 5.3 实验及分析.....                                 | 58 |

|                       |    |
|-----------------------|----|
| 5.3.1 实验设置.....       | 58 |
| 5.3.2 对比实验结果与分析.....  | 59 |
| 5.3.3 运行时间与复杂度比较..... | 62 |
| 5.3.4 模型分析.....       | 63 |
| 5.4 本章小结.....         | 65 |
| 第 6 章 总结与展望.....      | 66 |
| 6.1 工作总结.....         | 66 |
| 6.2 未来展望.....         | 66 |
| 参考文献.....             | 68 |
| 攻读学位期间获得的成果.....      | 72 |
| 致 谢.....              | 73 |

## 第 1 章 绪论

### 1.1 研究背景与意义

在机器学习中,根据学习过程中是否需要标注的训练数据,分为有监督学习,半监督学习和无监督学习。聚类作为无监督学习中研究最多,应用最广的一项技术,受到了学术界的广泛关注。聚类主要研究的是如何利用数据自身的特性来准确地将数据分割成有意义的组或簇的问题。聚类分析可以帮助研究人员发现数据中的内在结构、找到数据的模式和规律。根据聚类视图的个数,可以将聚类划分为单视图聚类和多视图聚类<sup>[1-3]</sup>。

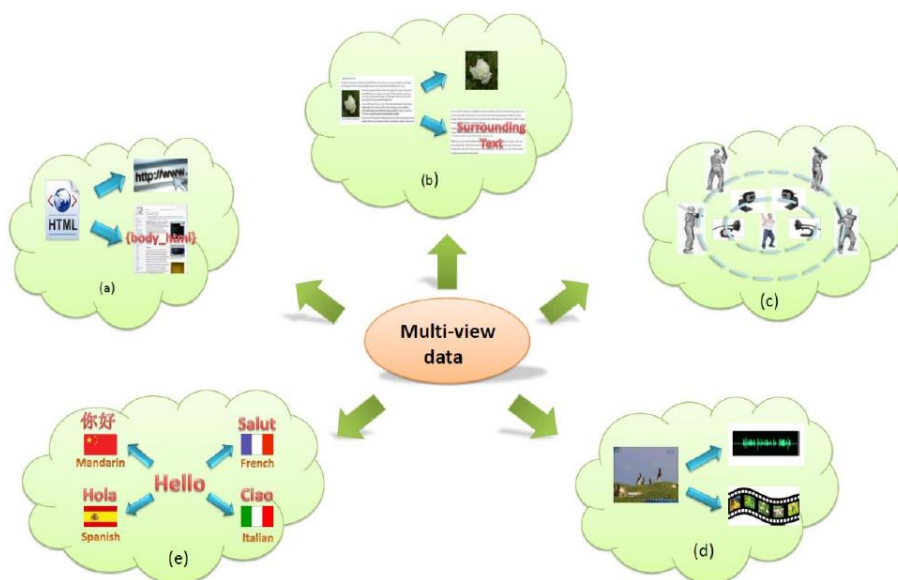


图 1-1 多视图数据<sup>[4]</sup>

对一个视图组成的数据的聚类称为单视图聚类。多视图数据<sup>[5,6]</sup> (Multi-view data, MVD) 是指来自不同数据源或具有不同特征表示的数据,这些数据源或特征提供了不同的视角和信息,有助于更全面地理解和描述数据,如图 1-1 所示。例如一张图片可以由它的颜色信息,纹理信息和形状信息共同描述。多视图数据可以提供比单视图数据更丰富的信息,并更清楚地揭示数据的内部结构。多视图数据具有一致性和互补性,一方面,多视图数据中的不同视图本质上是对同一目标对象的不同描述和表示,因此,多视图数据本质上是一致的。另一方面,多视

图数据中的不同视图具有不同的侧重点,不同视图之间的差异形成了互补性关系,因此,多视图数据是互补的。有效地利用多视图数据的一致性和互补性可以帮助获得目标对象更具有判别性的表示。对多视图数据聚类称为多视图聚类<sup>[7-9]</sup> (Multi-view Clustering, MVC),它可以充分利用多视图数据的优势,提高聚类结果的准确性和稳定性。

在现实生活中,由于数据收集过程中的错误、设备故障、权限限制或其他原因,多视图数据中往往存在缺失的情况,即某些视图中的部分数据缺失或不完整,如图 1-2 所示。缺失数据会对多视图聚类算法的性能和稳定性产生不利影响,因此,研究和解决缺失多视图聚类问题<sup>[10-12]</sup> (Incomplete Multi-view Clustering, IMVC) 成为一个重要的课题。

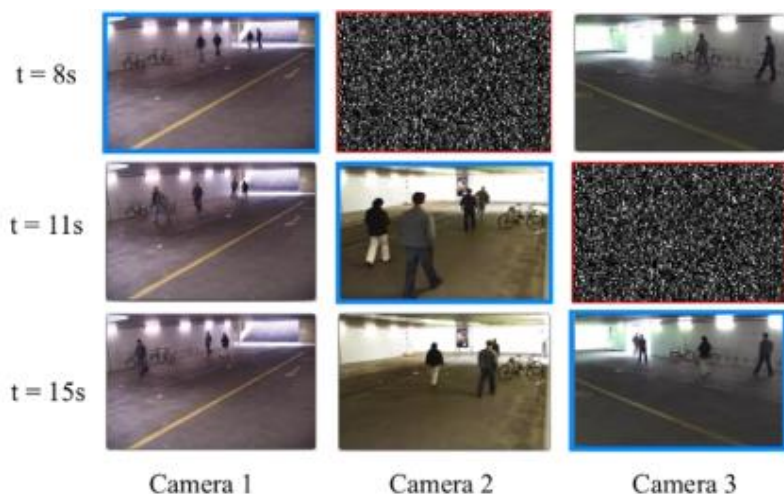


图 1-2: 缺失多视图数据

缺失多视图聚类算法在各个领域都有广泛的应用。例如,在推荐系统中,用户的行为和兴趣往往有多个视图,用户在电商网站上的购买记录、浏览历史、评分等,采用缺失多视图聚类可以将具有相似兴趣和行为模式的用户聚类在一起,从而提供个性化的推荐服务。在医学图像处理中,医学图像通常有多个模态,如 MRI、CT 等。每个模态提供了不同的视图,可以反映不同的图像特征,由于现实原因,部分模态的信息可能是缺失的,通过缺失多视图聚类算法将多个模态的图像视图进行聚类分析,可以将相似的图像区域聚为一类,从而实现疾病分类和诊断。因此,开展缺失多视图聚类方面的研究对实际应用具有重要的意义。

综上所述,本章从聚类出发,详细介绍了单视图聚类,多视图聚类与缺失多

视图算法的研究背景,本文的研究对于缺失多视图聚类算法的理论研究和现实应用都具有重要的意义与价值。不仅有助于更深入地理解聚类分析的原理和方法,还为解决现实世界中复杂数据的聚类问题提供了新的思路和方法。

## 1.2 研究现状

现有的缺失多视图聚类方法按照不同的学习机制可以划分为基于矩阵分解学习、基于多核学习、基于图学习、基于深度学习四大类。

### 1.2.1 基于矩阵分解学习的缺失多视图聚类

基于矩阵分解学习的缺失多视图聚类方法利用矩阵分解学习多视图数据的潜在特征,同时处理缺失数据,然后融合多个视图的潜在表示信息,挖掘多视图数据的本质结构,从而实现较高的聚类准确性。

Li 等人<sup>[13]</sup>提出了一种部分多视图聚类算法 (Partial Multi-View Clustering, PVC), PVC 通过非负矩阵分解建立一个潜在子空间来工作,在该子空间中,不同视图中对应于同一示例的实例彼此接近,并且同一视图中的类似实例(属于不同示例)被很好地分组。Zhao 等人<sup>[14]</sup>提出了 IMG (Incomplete multi-modality Grouping),通过添加图拉普拉斯项,IMG 可以从低维潜在表示学习到一个完整的图。然而,上述方法只适用于处理包含两个视图的数据,缺乏灵活性。当视图数扩展到三个及以上时,上述方法无效。因此,Shao 等人<sup>[15]</sup>提出了 MIC (Multi-Incomplete-view Clustering),将视图数扩展到两个以上的不完整视图。在 MIC 的基础上,Shao 等人<sup>[16]</sup>进一步提出了 OMVC (Online Multi-View Clustering),使得 MIC 可以应用于在线学习。Hu 等人<sup>[17]</sup>提出一种双对齐不完整多视图聚类(Doubly Aligned Incomplete Multi-view Clustering, DAIMC),DAIMC 利用给定的实例对齐信息来学习所有视图的公共潜在特征矩阵,同时利用  $L_{2,1}$  范数正则化回归模型对齐各个视图的基矩阵,以减少缺失实例的影响。Wen 等人<sup>[18]</sup>提出 IMC\_GRMF (Incomplete Multi-view Clustering via Graph Regularized Matrix Factorization),IMC\_GRMF 同时利用每个视图的局部信息和视图之间的互补信息来学习所有样本的共同潜在表示,并且没有引入任何额外的正则化项来保持数据的局部几何结构。最近,Liu 等人<sup>[19]</sup>提出了 IMC-NLT (Incomplete Multi-view Clustering using Non-negative matrix factorization and a Low-rank Tensor),IIMC-NLT 是第一个将

降维方法生成的低维表示与低秩张量模型相结合的缺失多视图聚类方法。

然而，基于矩阵分解学习的缺失多视图聚类方法仍然面临一些挑战，如何选择合适的矩阵分解算法以及如何更好地处理不完整的视图数据等问题。因此，仍需要进一步的研究和改进来提高缺失多视图聚类的性能。

### 1.2.2 基于多核学习的缺失多视图聚类

在传统的多核聚类中，输入的核矩阵需要是完整的，即所有视图的数据都应该是可用的。然而，在实际应用中，由于数据采集的限制或其他原因，某些视图的数据可能不完整。基于多核学习的缺失多视图聚类方法使用多核学习的思想将多个视图的数据表示为核矩阵，将缺失多视图聚类问题转化为多核矩阵补全问题，并利用这些核矩阵来捕捉不同视图之间的相似性和差异性。

Zhang 等人<sup>[20]</sup>提出了一种新的基于核方法的模糊 C 均值聚类算法 (Kernel Fuzzy C-means, KFCM)，用于处理不完整数据的聚类问题。KFCM 算法使用非线性映射将数据映射到一个潜在的更高维特征空间，然后在该空间中进行聚类。此外，KFCM 算法采用了一种更健壮的核诱导度量，这使得它在处理不完整数据时表现出更好的性能。

Liu 等人<sup>[21]</sup>提出一种晚期融合策略的缺失多视图聚类算法 LF-IMVC (Late Fusion Incomplete Multi-View Clustering)，与早期融合不同，LF-IMVC 使用晚期融合策略，首先对每个不完整的基矩阵进行聚类，然后使用共识聚类矩阵来填补缺失的部分。

Liu 等人<sup>[22]</sup>提出了一种新的算法 EE-IMVC (Efficient and Effective Incomplete Multi-View Clustering)，用于解决在缺失多核 k 均值聚类中遇到的密集计算和复杂优化的问题。EE-IMVC 利用学习的共识聚类矩阵计算由不完整视图生成的每个缺失基矩阵，有效地结合了聚类和填补过程。此外，在 EE-IMVC 的基础上，还提出了一种改进的算法，称为 EE-R-IMVC (Efficient and Effective Regularized Incomplete Multi-View Clustering)，它通过引入先验知识来正则化共识聚类矩阵，进一步提升了聚类性能。

尽管多核学习的方法在处理缺失多视图数据方面取得了一定的进展，但它们仍然面临一些挑战，如如何选择合适的核函数、处理大规模数据集的计算复杂性、以及对噪声数据的鲁棒性。未来的研究需要设计更高效的算法，同时考虑效率和

性能，以及更鲁棒的模型来处理这些挑战。

### 1.2.3 基于图学习的缺失多视图聚类

基于图学习的缺失多视图聚类方法旨在通过相似图揭示不同视图之间的连接关系，探索多视图数据的几何结构。

Wang 等人<sup>[23]</sup>提出了 PIC (Perturbation-oriented Incomplete multi-view Clustering)，PIC 将特征值缺失问题转化为相似图矩阵补全问题，利用有效的相似性填充方法来减少由于特征缺失引起的风险，并利用扰动理论学习一致的拉普拉斯矩阵进行最终的聚类步骤。Wen 等人<sup>[24]</sup>提出了一种基于自适应图学习的缺失多视图谱聚类算法 (Incomplete Multiview Spectral Clustering with Adaptive Graph Learning, IMSC\_AGL)，IMSC\_AGL 联合学习一致的低维表示和相似图，以获得全局最优的一致表示，但它没有同时利用视图内和视图间的信息，因此，Wen 等人<sup>[25]</sup>提出 AGC\_IMC (Adaptive Graph Completion based Incomplete Multi-View Clustering)，AGC\_IMC 利用视图间的信息和视图内的信息学习完整图，最后学习具有判别性的共识表示矩阵。张量技术在聚类领域具有广泛应用，因此，Wen 等人<sup>[26]</sup>提出一种基于低秩张量图学习的缺失多视图聚类算法 (Low-rank tensor graph learning, LASAR)，将张量技术与图学习融合在一个框架中，利用视图之间的邻接关系补全视图信息，降低缺失视图对聚类的影响，并利用张量低秩约束探索视图间的高阶信息。

最近，Li 等人<sup>[27]</sup>提出一种利用联合分区和图学习的新方法 (Joint Partition and Graph, JPG)，JPG 方法在分区空间中融合了不完整或完整的多视图信息，并从最终图中获取共识信息，JPG 特别适用于处理数据中存在大量缺失值的情况。

基于图学习的缺失多视图聚类方法在多个领域中都有应用，如社交网络分析、生物信息学和推荐系统等。基于图学习的缺失多视图聚类方法在处理具有复杂结构和高维特征的数据时表现出良好的性能，但也需要不断地优化和改进以适应更广泛的应用需求。

### 1.2.4 基于深度学习的缺失多视图聚类

基于深度学习的缺失多视图聚类是一种利用深度学习技术来处理多视图数据中存在缺失的情况的方法。深度学习通过多层神经网络模型学习数据的更高级的表示和更具判别性的特征，从而能够在缺失多视图聚类中发挥重要作用。

Zhao 等人<sup>[28]</sup>提出一种深度聚类算法，旨在通过深度矩阵分解框架来学习多视图数据的层次语义。利用半非负矩阵分解（Semi-NMF）来逐层学习数据的表示，并在最后一层强制所有视图的非负表示相同，以最大化各视图之间的互信息。此外，为了尊重每个视图数据的内在几何结构，引入了图正则化器来耦合深度结构的输出表示。

Zhang 等人<sup>[29]</sup>提出 CPM-Nets(Cross Partial Multi-View Networks)模型，并将对抗方法引入模型，提高缺失数据所生成潜在表示的完备性。通过构建隐空间表示还原完整视图，并根据结构化约束获得强泛化能力分类模型。

Wen 等人<sup>[30]</sup>提出 CDIMC-net(Cognitive Deep Incomplete Multi-view Clustering network)模型，CDIMC-net 通过结合特定于视图的深度编码器、图嵌入策略和自步学习策略，捕获每个视图的高级特征和局部结构。此外，基于人类认知学习原理，即从简单到复杂，CDIMC-net 引入了一种自步学习策略，选择最有信心的样本进行模型训练，以减少异常值的负面影响。

Lin 等人<sup>[31]</sup>从信息论的角度出发，认为跨视图的一致性学习和数据恢复是一体两面的问题，两者能够相互促进，提出了 COMPLETER 方法，利用对比学习最大化两个视图的互信息，实现跨视图的一致性的表示学习，最小化条件熵，丢弃掉不一致的信息，进而促进一致性学习。

通过利用深度学习的能力来学习数据的高级表示和特征，以及处理缺失数据的能力，可以提高多视图聚类的准确性和鲁棒性。

### 1.3 主要研究内容与创新点

本课题对近年来多视图聚类以及缺失多视图聚类的国内外研究现状进行了详细的梳理，了解了目前缺失多视图聚类的发展历程。针对基于缺失数据的多视图聚类方法进行了深入地研究，通过分析现有算法的不足，提出了有效的改进算法。本文的研究内容框架图如图 1-3 所示。

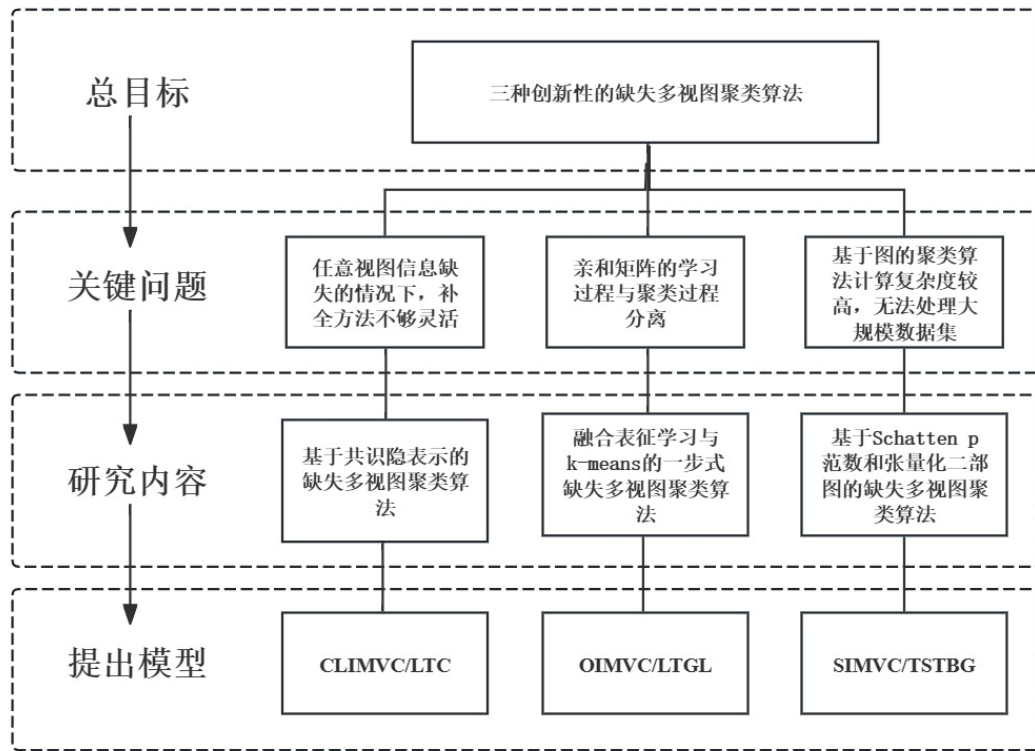


图 1-3 研究内容框架图

主要研究工作和创新点总结如下：

(1) 传统的缺失数据补全方法通常使用零值或者平均值对缺失的视图数据进行填充。然而，这种方法无法灵活地处理不同类型的数据缺失，也有可能造成类簇结构的改变。传统的多视图聚类算法通常只考虑视图间的低阶关联，即仅考虑两两视图之间的相关性。然而，视图之间可能存在更高阶的关联，例如视图的共享信息、互补信息或者高阶信息等。本文提出了一种新的算法，即基于共识隐表示的缺失多视图聚类算法(Consensus Latent Incomplete Multi-view Clustering with Low-rank Tensor Constraint, CLIMVC/LTC)。具体来说，首先利用隐表示模型来生成缺失的视图，使缺失视图补全的过程更加灵活。然后，利用低秩张量约束项和共识表示项探索不同视图数据之间的高阶信息和一致信息。将隐表示模型、低秩张量约束和共识表示学习融合到一个统一的框架中来提高聚类性能，充分的实验证明了所提方法的有效性。

(2) 现有的缺失多视图聚类方法往往采用谱聚类或  $k$ -means 对得到的亲和矩阵进行聚类，即将亲和矩阵的学习过程与聚类过程分离。聚类结果高度依赖于输入的亲和矩阵的质量，若亲和矩阵的学习过程存在问题或不准确，可能会导致

聚类质量下降。针对此问题,本文提出了一种新颖的缺失多视图聚类方法,即融合表征学习与 k-means 的一步式缺失多视图聚类算法 (One-step Incomplete Multi-view Clustering with Low-rank Tensor Graph Learning, OIMVC/LTGL), 将亲和矩阵的学习与聚类过程融合到一个框架中,以获得更好的聚类性能。具体来说,首先利用视图之间的邻接关系来补全相似图矩阵,降低缺失数据对聚类结果的影响。其次,对共识表示矩阵引入谱旋转,直接获得聚类标签。将自适应图学习、低秩张量约束、共识表示学习和聚类结合到一个统一的优化框架中,这些步骤相互促进获得更好的聚类性能。在公开数据集上的实验结果验证了所提方法的有效性。

(3) 基于图的缺失多视图聚类方法因其在探索数据非线性结构方面的良好性能而受到广泛关注。然而,拉普拉斯矩阵特征分解和图构造通常具有较高的计算复杂度。其次,大多数方法没有考虑缺失视图的影响,忽略了不同视图之间的潜在关系。第三,很少有算法同时考虑视图内和视图间信息进行聚类。因此,本文创新地提出了一种基于张量 Schatten  $p$  范数和张量化二部图的可扩展缺失多视图聚类方法 (Scalable Incomplete Multi-view Clustering via Tensor Schatten  $p$ -norm and Tensorized Bipartite Graph, SIMVC/TSTBG), SIMVC/TSTBG 将张量化二部图、图补全和张量低秩约束结合到一个联合框架中。与其他 IMVC 方法相比,在 7 个数据集上的结果充分显示了 SIMVC/TSTBG 的高效性和有效性。

## 1.4 论文的结构安排

本文分为六个章节,其中第 3 至第 5 章为论文主体。

第 1 章是绪论,首先,本文梳理了缺失多视图聚类算法的背景和发展现状;其次,介绍了本文工作的研究重点和组织架构。

第 2 章为相关理论及技术,主要介绍了缺失多视图聚类的相关理论,其中包括张量技术、增广拉格朗日乘子法和常用的聚类评价指标。

第 3 章提出了一种基于共识隐表示的缺失多视图聚类算法 (CLIMVC/LTC),并详细介绍了 CLIMVC/LTC 的提出过程、求解及优化过程、复杂度分析、参数分析和收敛性分析,并设计了充分的实验证明所提方法的有效性。

第 4 章提出了融合表征学习与 k-means 的一步式缺失多视图聚类算法 (OIMVC/LTGL),并详细介绍了 OIMVC/LTGL 的提出过程、求解及优化过程、复杂度分析、统计分析、参数分析和收敛性分析,在公开数据集上验证了

OIMVC/LTGL 优越的聚类性能。

第 5 章提出了一种基于 Schatten  $p$  范数和张量化二部图的缺失多视图聚类算法 (SIMVC/TSTBG)，并详细介绍了 SIMVC/TSTBG 的提出过程、求解及优化过程、复杂度分析、运行时间比较、参数分析和收敛性分析，大量的实验结果证明了所提出方法的高效性。

第 6 章是本文的总结与展望。

## 第 2 章 相关知识介绍

### 2.1 缺失多视图聚类

缺失多视图聚类是一种处理多视图数据中存在缺失的情况下的聚类方法。在现实世界中，数据往往来自不同的视图或特征集，例如文本、图像、传感器等。每个视图都提供了数据的一种表征方式，但往往不同视图之间存在不完整或缺失的数据。缺失多视图聚类的目标是将多视图数据进行聚类，即将相似的样本分到同一个簇中，同时尽可能地利用多视图之间的互补信息。

首先，缺失数据的处理是关键步骤之一。由于不同视图中存在缺失的数据，需要采用适当的方法来处理这些缺失值，以便在聚类过程中能够更好地利用数据的结构。常用的方法包括插值、矩阵补全、生成对抗网络和图补全等。插值方法通过利用已知数据来估计缺失值，例如使用均值、线性插值或基于 KNN 的插值等。矩阵补全方法则通过估计缺失数据的潜在结构，将缺失值补全为完整的数据矩阵。生成对抗网络则可以通过生成缺失视图的伪造数据，来填充缺失视图的信息。

其次，传统的聚类算法往往只适用于单一视图数据，无法直接处理多视图数据。因此，需要设计新的聚类算法来充分利用多视图数据之间的相关性和互补性。一种常用的方法是基于图模型的聚类，图模型可以通过图切割、谱聚类等方法来将样本划分为不同的簇。另一种方法是基于矩阵分解的聚类，将多视图数据表示为一个低秩矩阵的分解，以捕捉数据的潜在结构。还有其他一些方法结合了深度学习、核学习和图神经网络等技术，以提高聚类性能和处理缺失数据的能力。

缺失多视图聚类算法通过综合利用多视图数据的信息，可以更准确地进行聚类分析，从而为各种领域的数据分析任务提供有价值的解决方案。

### 2.2 张量学习

#### 2.2.1 基本概念

张量可以看作是多维数组或矩阵的自然扩展，它可以表示具有更高维度的数据结构。张量学习是一种处理高维数据的机器学习方法，它基于张量（tensor）的概念进行建模和分析。

在张量学习中,通过对高维数据进行张量分解、张量降维和张量重构等操作,可以提取和表示数据的潜在结构和特征。这有助于降低数据的维度,减少冗余信息,并提高数据分析和机器学习任务的效果。常见的标量,向量和矩阵可以表示为零阶张量,一阶张量和二阶张量。张量示意图如图所示

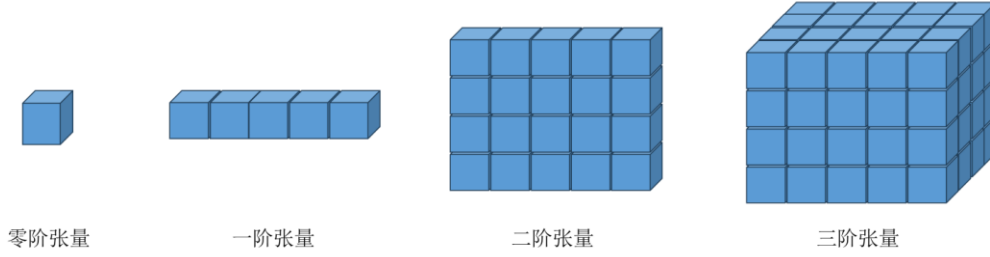


图 2-1 张量示意图

### 2.2.2 张量奇异值分解

张量分解是张量学习中的关键操作之一。它将高维张量分解为低秩张量的乘积形式,以捕捉数据的潜在结构和特征。在本文中常用到的为张量奇异值分解(t-SVD),因此下面会详细介绍关于 t-SVD 分解的知识<sup>[32,33]</sup>。

**定义 2-1 (块循环矩阵):** 给定张量  $\mathcal{B} \in R^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ , 它的块循环矩阵定义为:

$$bcirc(\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} \mathcal{B}^{(1)} & \mathcal{B}^{(n_3)} & \dots & \mathcal{B}^{(2)} \\ \mathcal{B}^{(2)} & \mathcal{B}^{(1)} & \dots & \mathcal{B}^{(3)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{B}^{(n_3)} & \mathcal{B}^{(n_3-1)} & \dots & \mathcal{B}^{(1)} \end{bmatrix} \in R^{n_1 n_3 \times n_2 n_3} \quad (2.1)$$

**定义 2-2 (展开和折叠运算):** 给定张量  $\mathcal{B} \in R^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ , 展开和折叠运算定义如下:

$$unfold(\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} \mathcal{B}^{(1)} \\ \mathcal{B}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathcal{B}^{(n_3)} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$fold(unfold(\mathcal{B})) = \mathcal{B} \quad (2.3)$$

**定义 2-3 (正交张量):** 张量  $\mathcal{A} \in R^{n_1 \times n_2 \times n_3}$  是正交张量, 如果

$$\mathcal{A}^T * \mathcal{A} = \mathcal{A} * \mathcal{A}^T = \mathcal{I} \quad (2.4)$$

$\mathcal{I}$  是单位张量, 第一个前向切片是一个  $n_1 \times n_1$  的单位矩阵, 其他前向切片都是 0。

**定义 2-4 (张量 t-product):** 给定张量  $\mathcal{B} \in R^{n_1 \times n_2 \times n_3}$  和另一个张量  $\mathcal{C} \in R^{n_2 \times n_4 \times n_3}$ , 两个张量的 t-product 可以定义为

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} * \mathcal{C} = \text{fold} \{ \text{bcirc}(\mathcal{B}) \text{unfold}(\mathcal{C}) \} \in R^{n_1 \times n_4 \times n_3} \quad (2.5)$$

**定义 2-5 (张量奇异值分解):** 给定一个张量  $\mathcal{A} \in R^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ , 它的张量奇异值分解 (t-SVD) 可以描述为

$$\mathcal{A} = \mathcal{U} * \mathcal{S} * \mathcal{V}^T \quad (2.6)$$

$\mathcal{U} \in R^{n_1 \times n_1 \times n_3}$  和  $\mathcal{V} \in R^{n_2 \times n_2 \times n_3}$  是对角张量,  $\mathcal{S} \in R^{n_1 \times n_2 \times n_3}$  是 f-对角张量<sup>[34]</sup>。

### 2.2.3 张量范数

**定义 2-6 (张量核范数):** 已知三阶张量  $\mathcal{A} \in R^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ , 其张量核范数可以定义为

$$\|\mathcal{A}\|_{\text{TNN}} = \sum_{i=1}^{\min(n_1, n_2)} \sum_{k=1}^{n_3} |S_f(i, i, k)| \quad (2.7)$$

其中  $S_f$  可以通过快速傅里叶变换 (FFT) 获得<sup>[35]</sup>。

**定义 2-7 (张量 Schatten  $p$ -范数):** 已知三阶张量  $\mathcal{B} \in R^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ ,  $h = \min(n_1, n_2)$ , 其张量 Schatten  $p$ -范数可以描述为

$$\|\mathcal{B}\|_{S_p} = \left( \sum_{v=1}^{n_3} \|\bar{\mathcal{B}}^{(v)}\|_{S_p}^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \sum_{v=1}^{n_3} \sum_{j=1}^h \sigma_j(\bar{\mathcal{B}}^{(v)})^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.8)$$

其中  $0 < p < 1$ ,  $\sigma_j(\bar{\mathcal{B}}^{(v)})$  表示  $\bar{\mathcal{B}}^{(v)}$  的第  $j$  个奇异值<sup>[36]</sup>。

## 2.3 增广拉格朗日乘子法

增广拉格朗日乘子法 (Augmented Lagrangian Method, ALM) 是一种用于求解约束优化问题的数值优化方法。它将原始的带约束问题转化为无约束问题, 通过引入拉格朗日乘子和罚函数来逐步逼近原问题的最优解。

增广拉格朗日乘子法的基本思想是将原始问题转化为一个具有约束的无约束问题。假设原始问题为最小化目标函数  $f(x)$ , 在一定约束条件下, 即

$$\begin{cases} \min f(x) \\ \text{s.t. } h(x) = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

其中  $h(x)$  是约束条件。为了处理约束, 可以将其引入拉格朗日函数, 形成增广拉格朗日函数:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T(h(x)) + \frac{\mu}{2} \|h(x)\|_F^2 \quad (2.10)$$

其中， $\lambda$  是拉格朗日乘子， $\mu$  是一个惩罚参数。增广拉格朗日函数不仅考虑了目标函数的最小化，还考虑了约束条件的满足程度。为了处理约束条件，增广拉格朗日法引入了罚函数，将约束条件融入目标函数中。

具体求解过程中，增广拉格朗日乘子法采用交替迭代的方式进行。首先，固定拉格朗日乘子  $\lambda$  的值，通过求解无约束优化问题  $\min L(x, \lambda)$  来更新变量  $x$ 。然后，在更新  $x$  后，通过更新拉格朗日乘子  $\lambda$ ，使约束条件更好地满足。这个过程迭代执行，直到达到收敛条件为止。

增广拉格朗日乘子法的优点是能够将约束问题转化为无约束问题，并通过拉格朗日乘子和罚函数来逐步逼近最优解，它在求解约束优化问题中具有较好的收敛性和数值稳定性。

## 2.4 聚类评价指标

在实际应用中，常常需要综合考虑多个评价指标来进行聚类结果的综合评估。在本章中选取了三个常见的聚类评价指标进行详细介绍。

**准确率 (Accuracy, ACC)** 是一种用于评估聚类算法性能的指标。它衡量了聚类结果与真实标签之间的相似度。

$$ACC = \frac{\sum_{i=1}^n \delta(s_i, \text{map}(r_i))}{n} \quad (2.11)$$

其中， $r_i$ ， $s_i$  分别表示数据  $x_i$  所对应的获得的标签和真实标签， $n$  为数据总的个数， $\delta$  表示函数如下

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{if } x = y \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

而式中的  $\text{map}$  则表示最佳类标的重现分配，才能保证统计的正确。一般的该最佳重分配可以通过匈牙利算法实现，从而在多项式时间内求解该任务分配问题。

ACC 的取值范围为 0 到 1，值越接近 1 表示聚类结果与真实标签越相似，值越接近 0 表示聚类结果与真实标签越不相似。

**标准化互信息 (Normalized Mutual Information, NMI):** 标准化互信息衡量了聚类结果与真实标签之间的互信息量。它将互信息进行归一化, 范围在 $[0, 1]$ 之间。NMI 越接近 1 表示聚类结果与真实标签的一致性越好。

$$NMI(\Omega, C) = \frac{I(\Omega, C)}{(H(\Omega) + H(C)) / 2} \quad (2.12)$$

其中,  $I$  表示互信息(Mutual Information),  $H$  表示熵。互信息  $I(\Omega, C)$  表示给定类簇信息  $C$  的前提条件下, 类别信息  $\Omega$  的增加量, 或者说其不确定度的减少量。

**纯度 (Purity, PUR):** 纯度度量了聚类结果中每个簇所包含的样本与最多的真实类别之间的比例。纯度越高, 表示聚类结果中每个簇内部的样本更趋于同一真实类别, 聚类结果更纯净。

$$\text{Purity}(\Omega, C) = \frac{1}{N} \sum_k \max_j |w_k \cap c_j| \quad (2.13)$$

其中,  $N$  表示总的样本个数,  $\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_K\}$  表示聚类簇划分,  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_J\}$  表示真实类别划分。上述过程即给每个聚类簇分配一个类别, 且为这个类别的样本在该簇中出现的次数最多, 然后计算所有  $K$  个聚类簇的这个次数之和再归一化即为最终值。  $\text{Purity} \in [0, 1]$ , 越接近 1 表示聚类结果越好。

## 2.5 本章小结

本章主要对缺失多视图聚类算法的研究基础进行了概述。首先概述缺失多视图聚类算法; 然后介绍了张量相关的知识; 随后介绍了本文求解目标函数使用的增广拉格朗日乘子法, 最后为后续章节实验部分用到的聚类评价标准 ACC、NMI、PUR 提供了理论定义。

## 第3章 基于共识隐表示的缺失多视图聚类算法

### 3.1 引言

为了解决缺失多视图聚类问题，一个自然的想法是补全缺失的信息，然后利用传统的多视图聚类算法进行聚类。例如，一些方法使用零值或近邻点的平均值来填充缺失的视图，然后使用传统的多视图聚类方法进行聚类<sup>[13]</sup>。Trivedi 等人提出了一种利用视图之间的相关性来补全内核矩阵的方法<sup>[37]</sup>。但是这些方法具有以下限制（1）视图补全方法不够灵活，导致视图间信息不平衡，无法保证聚类准确性；（2）视图之间的一致性和相关性信息未得到充分探索；（3）未考虑数据的簇结构。

因此，为了解决上述问题，本章提出了一种新的算法，即基于共识隐表示的缺失多视图聚类算法（Consensus Latent Incomplete Multi-View Clustering with Low-Rank Tensor Constraint, CLIMVC/LTC）。首先，CLIMVC/LTC 使用隐表示模型来动态生成缺失视图，而不是直接使用零值或平均值来填充缺失视图，从而保证了聚类的准确性。其次，多视图数据是对同一事物不同方面的描述，因此多视图信息具有一致性和互补性。为了探索一致性信息，引入了一个共识表示学习项。此外，为了探索视图之间的相关性和高阶信息，将自表示矩阵拼接成一个三阶张量，并将张量核范数（Tensor Nuclear Norm, TNN）施加到构建的张量上。根据文献<sup>[38]</sup>，共识表示项可以保证自表示矩阵具有  $c$  个连通分量，其中  $c$  是聚类的数量，它考虑了数据的簇结构。CLIMVC/LTC 将缺失视图补全，低秩张量约束和共识表示学习融合到一个优化框架中，以获得更好的聚类结果。本章的贡献如下：

1. 本章提出了一种新的缺失多视图聚类算法，即 CLIMVC/LTC。CLIMVC/LTC 使用基于隐表示的生成模型来动态生成缺失的视图信息，通过恢复缺失的视图信息，可以更好地挖掘缺失视图的潜在信息。
2. CLIMVC/LTC 将缺失视图补全、低秩张量约束和共识表示学习融合到一个框架中，这有利于探索视图之间的相关性和一致性，获得更好的聚类效果。
3. 本章利用 ALM 求解 CLIMVC/LTC 算法，在 4 个公开数据集上取得了良好的聚类性能。

## 3.2 基于共识隐表示的缺失多视图聚类算法

### 3.2.1 CLIMVC/LTC 模型搭建

为了解决缺失多视图聚类问题,与传统方法中使用零值或近邻点的均值来填充视图不同,本章使用一个基于隐表示  $H$  的模型以生成缺失的视图。假设存在一个潜在的表示空间生成每个视图,它从本质上描述了数据,并从不同角度揭示了潜在结构的共同表征<sup>[39]</sup>。因此,隐表示模型为:

$$\begin{aligned} \min_{H, P^{(v)}, E_1^{(v)}} \sum_{v=1}^V \|E_1^{(v)}\|_{2,1} \\ \text{s.t. } X^{(v)} \Omega^{(v)} = (P^{(v)} H + E_1^{(v)}) \Omega^{(v)} \end{aligned} \quad (3.1)$$

其中  $X^{(v)} \in R^{d \times n}$  表示第  $v$  个视图数据,  $\Omega^{(v)} \in R^{n \times n}$  表示第  $v$  个视图的指示矩阵,指示数据是否缺失,  $P^{(v)} \in R^{d \times k}$  表示投影函数,  $H \in R^{k \times n}$  表示隐表示,  $E_1^{(v)} \in R^{d \times n}$  表示重建误差项。具体来说,  $\Omega^{(v)}$  是一个对角指标矩阵,当  $\Omega_{ii}^{(v)} = 0$  时,表示第  $v$  个视图的第  $i$  个样本丢失,当  $\Omega_{ii}^{(v)} = 1$  时,表示样本存在。 $n$  表示样本数,  $d$  和  $k$  分别代表样本和隐表示  $H$  的维度。 $X^{(v)} \Omega^{(v)}$  表示第  $v$  个视图的未缺失数据。

生成缺失视图后,  $P^{(v)} H + E_1^{(v)}$  表示完整的视图信息,使用  $P^{(v)} H + E_1^{(v)} = (P^{(v)} H + E_1^{(v)}) Z^{(v)} + E_2^{(v)}$  可以获取每个视图的子空间自表示矩阵,其中  $Z^{(v)}$  和  $E_2^{(v)}$  表示第  $v$  个视图的子空间自表示矩阵和误差矩阵<sup>[40,41]</sup>。此外,可以使用 TNN 来探索视图之间的高阶相关性。然后,公式(3.1)可以重新表示为:

$$\begin{aligned} \min_{Z, H, P^{(v)}, E_1^{(v)}, E_2^{(v)}} \|Z\|_{TNN} + \sum_{v=1}^V \left( \lambda_1 \|E_1^{(v)}\|_{2,1} + \lambda_2 \|E_2^{(v)}\|_{2,1} \right) \\ \text{s.t. } X^{(v)} \Omega^{(v)} = (P^{(v)} H + E_1^{(v)}) \Omega^{(v)}, \\ P^{(v)} H + E_1^{(v)} = (P^{(v)} H + E_1^{(v)}) Z^{(v)} + E_2^{(v)}, \\ Z = \Psi(Z^{(1)}, Z^{(2)}, \dots, Z^{(V)}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

其中  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  是超参数,函数  $\Psi(\cdot)$  将  $Z^{(v)}$  拼接成一个张量,  $\|Z\|_{TNN}$  表示 TNN 的低秩约束。

然而,对于公式(3.2),多视图数据之间的一致性没有得到充分的探索,并且数据的簇结构也没有考虑到。因此,为了探索多个视图的一致性信息和给定数据的簇结构,将共识表示学习项融合到公式(3.2)中,最终目标函数表示为:

$$\begin{aligned}
 & \min_{\mathcal{Z}, H, P^{(v)}, E_1^{(v)}, E_2^{(v)}, U} \|\mathcal{Z}\|_{TNN} + \sum_{v=1}^V \left( \lambda_1 \|E_1^{(v)}\|_{2,1} + \lambda_2 \|E_2^{(v)}\|_{2,1} \right) + \lambda_3 \text{tr}(U^T L_{Z^{(v)}} U) \\
 & \text{s.t. } X^{(v)} \Omega^{(v)} = (P^{(v)} H + E_1^{(v)}) \Omega^{(v)}, \\
 & P^{(v)} H + E_1^{(v)} = (P^{(v)} H + E_1^{(v)}) Z^{(v)} + E_2^{(v)}, \\
 & \mathcal{Z} = \Psi(Z^{(1)}, Z^{(2)}, \dots, Z^{(V)}), 0 \leq Z^{(v)} \leq 1, Z^{(v)} \mathbf{1} = \mathbf{1}, \\
 & \text{diag}(Z^{(v)}) = 0, U^T U = I
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

其中  $L_{Z^{(v)}} = D_{Z^{(v)}} - Z^{(v)}$ ， $D_{Z^{(v)}}$  是一个对角矩阵，其对角线元素为

$$(D_{Z^{(v)}})_{ii} = \sum_{j=1}^n (Z_{i,j}^{(v)} + Z_{j,i}^{(v)}) / 2。$$

$U \in R^{n \times c}$  表示多视图数据的共识表示， $c$  表示类的数量，

它的第  $i$  行可以被认为是第  $i$  个样本的共识表示。

在公式(3.3)中，CLIMVC/LTC 将缺失视图补全、隐表示模型、低秩张量约束和共识表示学习整合到一个统一的框架中，CLIMVC/LTC 的目标是充分探索视图之间的信息和数据的类簇结构以实现良好的聚类性能。

CLIMVC/LTC 的流程图如图 3-1 所示。

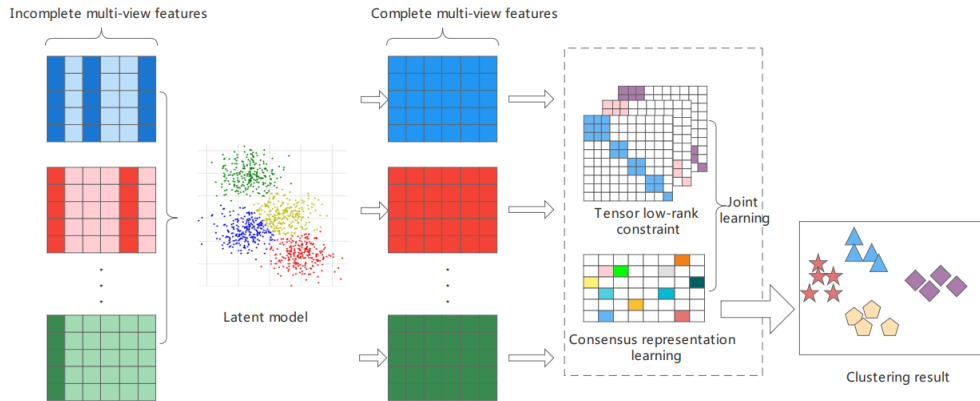


图 3-1 CLIMVC/LTC 的流程图

### 3.2.2 CLIMVC/LTC 模型求解

为了解决公式(3.3)，引入中间变量  $\mathcal{G}$  用于分离变量， $X_c^{(v)}$  表示生成的完整数据。

$$\begin{aligned}
 & \min_{\mathbf{Z}, H, P^{(v)}, E_1^{(v)}, E_2^{(v)}, U} \|\mathcal{G}\|_{TNN} + \sum_{v=1}^V \left( \lambda_1 \|E_1^{(v)}\|_{2,1} + \lambda_2 \|E_2^{(v)}\|_{2,1} + \lambda_3 \text{tr}(U^T L_{Z^{(v)}} U) \right) \\
 & \text{s.t. } X^{(v)} \Omega^{(v)} = X_c^{(v)} \Omega^{(v)}, \\
 & X_c^{(v)} = X_c^{(v)} Z^{(v)} + E_2^{(v)}, \\
 & \mathbf{Z} = \Psi(Z^{(1)}, Z^{(2)}, \dots, Z^{(V)}), 0 \leq Z^{(v)} \leq \mathbf{1}, Z^{(v)} \mathbf{1} = \mathbf{1}, \\
 & \text{diag}(Z^{(v)}) = 0, U^T U = I, \\
 & \mathbf{Z} = \mathcal{G}, X_c^{(v)} = P^{(v)} H + E_1^{(v)}
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

在求解公式(3.4)时，由于它包含多个变量，可以使用 ALM 进行求解，通过固定其他变量来交替更新每个变量，然后解决每个变量对应的优化子问题<sup>[42]</sup>。公式(3.4)的增广拉格朗日函数表示如下：

$$\begin{aligned}
 & L\left(\{X_c^{(v)}; P^{(v)}; Z^{(v)}; E_1^{(v)}; E_2^{(v)}\}_{v=1}^V; U; H; \mathcal{G}\right) \\
 & = \|\mathcal{G}\|_{TNN} + \langle \mathbf{Y}, \mathbf{Z} - \mathcal{G} \rangle + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{Z} - \mathcal{G}\|_F^2 \\
 & + \sum_{v=1}^V \left( \lambda_1 \|E_1^{(v)}\|_{2,1} + \lambda_2 \|E_2^{(v)}\|_{2,1} + \langle Y_1^{(v)}, X_c^{(v)} - P^{(v)} H - E_1^{(v)} \rangle + \frac{\mu}{2} \|X_c^{(v)} - P^{(v)} H - E_1^{(v)}\|_F^2 \right. \\
 & + \langle Y_2^{(v)}, X^{(v)} \Omega^{(v)} - X_c^{(v)} \Omega^{(v)} \rangle + \frac{\mu}{2} \|X_c^{(v)} \Omega^{(v)} - X^{(v)} \Omega^{(v)}\|_F^2 \\
 & + \langle Y_3^{(v)}, X_c^{(v)} - X_c^{(v)} Z^{(v)} - E_2^{(v)} \rangle + \frac{\mu}{2} \|X_c^{(v)} - X_c^{(v)} Z^{(v)} - E_2^{(v)}\|_F^2 \\
 & \left. + \lambda_3 \text{tr}(U^T L_{Z^{(v)}} U) \right) \\
 & \text{s.t. } U^T U = I, 0 \leq Z^{(v)} \leq \mathbf{1}, Z^{(v)} \mathbf{1} = \mathbf{1}, \text{diag}(Z^{(v)}) = 0
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

1.  $H$ -子问题：保留与  $H$  相关的项：

$$L(H) = \sum_{v=1}^V \left( \langle Y_1^{(v)}, X_c^{(v)} - P^{(v)} H - E_1^{(v)} \rangle + \frac{\mu}{2} \|X_c^{(v)} - P^{(v)} H - E_1^{(v)}\|_F^2 \right) \tag{3.6}$$

得到与  $H$  相关的导数并将其设置为零，通过以下规则更新  $H$

$$H^* = \left( \sum_{v=1}^V P^{(v)T} P^{(v)} \right)^{-1} \left( \sum_{v=1}^V P^{(v)T} \left( X_c^{(v)} + \frac{Y_1^{(v)}}{\mu} - E_1^{(v)} \right) \right) \tag{3.7}$$

2.  $P^{(v)}$ -子问题：关于求解  $P^{(v)}$  的目标函数表示为：

$$L(P^{(v)}) = \langle Y_1^{(v)}, X_c^{(v)} - P^{(v)} H - E_1^{(v)} \rangle + \frac{\mu}{2} \|X_c^{(v)} - P^{(v)} H - E_1^{(v)}\|_F^2 \tag{3.8}$$

可以得到：

$$P^{(v)*} = \left( \left( X_c^{(v)} + \frac{Y_1^{(v)}}{\mu} - E_1^{(v)} \right) H^T \right) (HH^T)^{-1} \quad (3.9)$$

3.  $Z^{(v)}$ -子问题：保留与  $Z^{(v)}$  相关的项，可以得到：

$$\begin{aligned} L(Z^{(v)}) &= \langle Y_3^{(v)}, X_c^{(v)} - X_c^{(v)} Z^{(v)} - E_2^{(v)} \rangle + \frac{\mu}{2} \|X_c^{(v)} - X_c^{(v)} Z^{(v)} - E_2^{(v)}\|_F^2 \\ &+ \langle Y^{(v)}, Z^{(v)} - G^{(v)} \rangle + \frac{\rho}{2} \|Z^{(v)} - G^{(v)}\|_F^2 + \lambda_3 \text{tr}(U^T L_{Z^{(v)}} U) \\ \text{s.t. } 0 \leq Z^{(v)} \leq 1, Z^{(v)} \mathbf{1} &= \mathbf{1}, \text{diag}(Z^{(v)}) = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

为了有效优化关于  $Z^{(v)}$  的子问题，可以分两步处理寻找解决方案。首先，重写公式(3.10)为如下最小化问题<sup>[43,44]</sup>。

$$\begin{aligned} \tilde{Z}^{(v)} &= \arg \min_{Z^{(v)}} \langle Y_3^{(v)}, X_c^{(v)} - X_c^{(v)} Z^{(v)} - E_2^{(v)} \rangle + \frac{\mu}{2} \|X_c^{(v)} - X_c^{(v)} Z^{(v)} - E_2^{(v)}\|_F^2 \\ &+ \langle Y^{(v)}, Z^{(v)} - G^{(v)} \rangle + \frac{\rho}{2} \|Z^{(v)} - G^{(v)}\|_F^2 + \lambda_3 \text{tr}(U^T L_{Z^{(v)}} U) \end{aligned} \quad (3.11)$$

设  $Q_{i,j} = \|U_{i,:} - U_{j,:}\|_2^2$ ,  $U_{i,:}$  表示  $U$  的第  $i$  行，将  $\text{tr}(U^T L_{Z^{(v)}} U)$  可以转换成如下形式：

$$\begin{aligned} \text{tr}(U^T L_{Z^{(v)}} U) &= \text{tr}(U^T D_{Z^{(v)}} U) - \text{tr}(U^T Z^{(v)} U) \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n (D_{Z^{(v)}})_{ii} U_{i,:} U_{i,:}^T - 2 \sum_{i,j=1}^n Z_{i,j}^{(v)} U_{i,:} U_{j,:}^T + \sum_{j=1}^n (D_{Z^{(v)}})_{jj} U_{j,:} U_{j,:}^T \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n Z_{i,j}^{(v)} \|U_{i,:} - U_{j,:}\|_F^2 = \frac{1}{2} \mathbf{1}^T (Q \odot Z^{(v)}) \mathbf{1} = \frac{1}{2} \text{tr}(ZQ) \end{aligned} \quad (3.12)$$

与求解上面的  $H$  子问题类似，可以得到一个近似解：

$$\tilde{Z}^{(v)} = \left( X_c^{(v)T} X_c^{(v)} + I \right)^{-1} \left( \begin{aligned} &X_c^{(v)T} X_c^{(v)} + G^{(v)} - X_c^{(v)T} E_2^{(v)} \\ &+ \frac{\left( X_c^{(v)T} Y_3^{(v)} - Y^{(v)} - \frac{\lambda_3}{2} Q^T \right)}{\mu} \end{aligned} \right) \quad (3.13)$$

第二，根据文献<sup>[45]</sup>，通过求解式(3.14)可以获得  $Z^{(v)}$  的最优解。

$$\begin{aligned} \min_{Z^{(v)}} &\|Z^{(v)} - \tilde{Z}^{(v)}\| \\ \text{s.t. } 0 \leq Z^{(v)} \leq 1, Z^{(v)} \mathbf{1} &= \mathbf{1}, \text{diag}(Z^{(v)}) = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

4.  $X_c^{(v)}$ -子问题：保留与  $X_c^{(v)}$  相关的项，得到如下：

$$\begin{aligned}
 L(X_c^{(v)}) &= \langle Y_1^{(v)}, X_c^{(v)} - P^{(v)}H - E_1^{(v)} \rangle + \frac{\mu}{2} \|X_c^{(v)} - P^{(v)}H - E_1^{(v)}\|_F^2 \\
 &+ \langle Y_2^{(v)}, X_c^{(v)}\Omega^{(v)} - X^{(v)}\Omega^{(v)} \rangle + \frac{\mu}{2} \|X_c^{(v)}\Omega^{(v)} - X^{(v)}\Omega^{(v)}\|_F^2 \\
 &+ \langle Y_3^{(v)}, X_c^{(v)} - X_c^{(v)}Z^{(v)} - E_2^{(v)} \rangle + \frac{\mu}{2} \|X_c^{(v)} - X_c^{(v)}Z^{(v)} - E_2^{(v)}\|_F^2
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

与解决上面的  $H$  子问题类似, 可以得到

$$\begin{aligned}
 X_c^{(v)} &= \left( \begin{array}{c} P^{(v)}H + X^{(v)}\Omega^{(v)^T}\Omega^{(v)^T} + E_2^{(v)}(I - Z^{(v)^T}) \\ + E_1^{(v)} - \left( \frac{Y_1^{(v)} + \Omega^{(v)^T}Y_2^{(v)} + Y_3^{(v)}(I - Z^{(v)^T})}{\mu} \right) \end{array} \right) \\
 &\quad \left( I + \Omega^{(v)^T}\Omega^{(v)^T} - (I - Z^{(v)^T})(I - Z^{(v)^T}) \right)^{-1}
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

5.  $E_1^{(v)}$ -子问题: 保留与  $E_1^{(v)}$  相关的项, 可以得到:

$$L(E_1^{(v)}) = \lambda_1 \|E_1^{(v)}\|_{2,1} + \langle Y_1^{(v)}, X_c^{(v)} - P^{(v)}H - E_1^{(v)} \rangle + \frac{\mu}{2} \|X_c^{(v)} - P^{(v)}H - E_1^{(v)}\|_F^2 \tag{3.17}$$

$E_1^{(v)}$  的子问题可以转换为以下形式:

$$\begin{aligned}
 E_1^{(v)*} &= \arg \min_{E_1^{(v)}} \lambda_1 \|E_1^{(v)}\|_{2,1} + \Phi(Y_1^{(v)}, X_c^{(v)} - P^{(v)}H - E_1^{(v)}) \\
 &= \arg \min_{E_1^{(v)}} \frac{\lambda_1}{\mu_1} \|E_1^{(v)}\|_{2,1} + \frac{1}{2} \|E_1^{(v)} - R\|
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

其中  $R$  是通过垂直连接矩阵  $X_c^{(v)} - P^{(v)}H + Y_1 / \mu_1$  形成的。根据引理 4.1<sup>[32]</sup>可以得到  $E_1^{(v)}$  的最优解。

$$E_{:,i}^* = \begin{cases} \frac{\|R_{:,i}\|_2 - \frac{\lambda_1}{\mu_1}}{\|R_{:,i}\|_2} R_{:,i} & \|R_{:,i}\|_2 > \frac{\lambda_1}{\mu_1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{3.19}$$

其中  $R_{:,i}$  表示  $R$  的第  $i$  列。

6.  $E_2^{(v)}$ -子问题: 保留与  $E_2^{(v)}$  有关的项, 可以得到:

$$\begin{aligned}
 L(E_2^{(v)}) &= \lambda_2 \|E_2^{(v)}\|_{2,1} + \langle Y_3^{(v)}, X_c^{(v)} - X_c^{(v)}Z^{(v)} - E_2^{(v)} \rangle + \frac{\mu}{2} \|X_c^{(v)} - X_c^{(v)}Z^{(v)} - E_2^{(v)}\|_F^2 \\
 &\tag{3.20}
 \end{aligned}$$

$E_2^{(v)}$  的子问题可以转换为以下形式：

$$\begin{aligned} E_1^{(v)*} &= \arg \min_{E_2^{(v)}} \lambda_1 \|E_2^{(v)}\|_{2,1} + \Phi(Y_3^{(v)}, X_c^{(v)} - X_c^{(v)} Z^{(v)} - E_2^{(v)}) \\ &= \arg \min_{E_2^{(v)}} \frac{\lambda_1}{\mu_1} \|E_2^{(v)}\|_{2,1} + \frac{1}{2} \|E_2^{(v)} - D\| \end{aligned} \quad (3.21)$$

其中  $D$  是通过垂直连接矩阵  $X_c^{(v)} - X_c^{(v)} Z^{(v)} + Y_3 / \mu_2$  形成的。根据引理 4.1<sup>[32]</sup>可以得到  $E_2^{(v)}$  的最优解。

$$E_{2,i}^* = \begin{cases} \frac{\|D_{:,i}\|_2 - \frac{\lambda_2}{\mu_2}}{\|D_{:,i}\|_2} D_{:,i} & \|D_{:,i}\|_2 > \frac{\lambda_2}{\mu_2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.22)$$

其中  $D_{:,i}$  表示  $D$  的第  $i$  列。

**7.  $U$  -子问题：**关于求解  $U$  的目标函数表示为：

$$\begin{aligned} \min_U \sum_{v=1}^V \text{tr}(U^T L_{Z^{(v)}} U) \\ \text{s.t. } U^T U = I \end{aligned} \quad (3.23)$$

其最优解为矩阵  $\sum_{v=1}^V L_{Z^{(v)}}$  的前  $k$  个最小特征值对应的特征向量集。

**8.  $\mathcal{G}$  -子问题：**通过以下规则对  $\mathcal{G}$  进行更新：

$$\mathcal{G}^* = \arg \min_{\mathcal{G}} \|\mathcal{G}\|_{\text{TN}} + \frac{\rho}{2} \left\| \mathcal{G} - \left( \mathcal{Z} + \frac{\mathcal{P}}{\rho} \right) \right\|_F^2 \quad (3.24)$$

根据文献<sup>[46]</sup>中的定理 3 和定理 4，可以得到公式(3.24)的最优解如下：

$$\mathcal{G}^* = \Gamma_{n_3/\rho}(\mathcal{F}) = \mathcal{U}^* \Gamma_{n_3/\rho}(\mathcal{S})^* \mathcal{V}^T \quad (3.25)$$

其中  $\mathcal{F} = \mathcal{Z} + \frac{\mathcal{P}}{\rho} = \mathcal{U}^* \mathcal{S}^* \mathcal{V}^T$ ， $\Gamma_{n_3/\rho}(\mathcal{S}) = \mathcal{S}^* \mathcal{J}$ ， $\mathcal{J}$  是  $f$  对角张量，且其对角元

素在傅里叶域中为  $\mathcal{J}_f(i, i, j) = (1 - \frac{n_3/\rho}{\mathcal{S}_f^{(j)}(i, i)})_+$ 。

**9. 更新拉格朗日乘子项：**各个乘子系数矩阵更新如下：

$$\begin{aligned}
Y_1^{(v)} &= Y_1^{(v)} + \mu \left( X_c^{(v)} - P^{(v)} H - E_1^{(v)} \right) \\
Y_2^{(v)} &= Y_2^{(v)} + \mu \left( X_c^{(v)} \Omega^{(v)} - X^{(v)} \Omega^{(v)} \right) \\
Y_3^{(v)} &= Y_3^{(v)} + \mu \left( X_c^{(v)} - X_c^{(v)} S^{(v)} - E_2^{(v)} \right) \\
\mathcal{Y}^* &= \mathcal{Y} + \mu (\mathcal{S} - \mathcal{G}) \\
\mu &= \min(\max_u, \rho\mu)
\end{aligned} \tag{3.26}$$

### 3.2.3 CLIMVC/LTC 算法主要流程

---

#### 算法 1: CLIMVC/LTC

---

**输入:** 缺失多视图数据和指示矩阵  $\{X^{(v)}, \Omega^{(v)}\}_{v=1}^V$ , 参数  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

类簇数  $K$

**输出:** 聚类结果

**初始化:**  $\mu = 10^{-5}, \varepsilon = 10^{-5}, \rho = 1.5, \max_u = 10^{10}$

$\{Z^{(v)}, E^{(v)}, G^{(v)}, \{Y_i^{(v)}\}_{i=1}^4\}_{v=1}^V = 0 \quad H, \{P^{(v)}, X_c^{(v)}\}_{v=1}^V$

**While** not converged **do**

    分别使用公式(3.7)和(3.23)更新  $H$  和  $U$ ;

    对每个视图执行:

        更新变量  $P^{(v)}, Z^{(v)}, X_c^{(v)}, E_1^{(v)}, E_2^{(v)}, Y^{(v)}$ ;

    分别使用公式(3.24)和公式(3.26)更新  $\mathcal{G}$  和  $\mathcal{Y}^*$

    使用公式(3.26)更新  $\mu$

    检查收敛条件:

$$\|X_c^{(v)} - P^{(v)} H - E_1^{(v)}\|_\infty < \varepsilon$$

$$\|X_c^{(v)} - X_c^{(v)} Z^{(v)} - E_2^{(v)}\|_\infty < \varepsilon$$

$$\|Z^{(v)} - G^{(v)}\|_\infty < \varepsilon$$

**End**

将  $U$  应用到 K-means 聚类中

---

### 3.2.4 CLIMVC/LTC 算法复杂度

根据算法 1, CLIMVC/LTC 的计算复杂度主要包括更新

$H, P^{(v)}, Z^{(v)}, X_c^{(v)}, E_1^{(v)}, E_2^{(v)}, U, \mathcal{G}$ 。具体而言，更新  $H$  的复杂度为  $o(v(k^2d + kdn) + k^3 + k^2n)$ ，其中  $v$ 、 $n$ 、 $d$  和  $k$  分别表示视图数、样本数、多视图特征的平均维数和隐表示的维数。

更新  $P^{(v)}$  的主要复杂度是矩阵乘法和隐表示矩阵求逆。因此，它需要  $o(v(kdn + k^2n + k^3))$ 。更新  $Z^{(v)}$  和  $X_c$  的主要复杂度为  $o(vn^3)$ 。对于更新  $E^{(v)}$  和乘子项系数，主要复杂度是矩阵乘法，即  $o(v(kdn + kn^2))$ 。求解  $U$  时，找到前  $k$  个最小特征值对应的特征向量需要  $o(kn^2)$ 。由于  $\mathcal{G}$  在优化时使用了 FFT 和 t-svd，因此复杂度为  $o(vn^2 \log(n) + v^2n^2)$ 。总体而言，算法 1 的复杂度为  $o(v(k^2d + kdn + k^2n + k^3 + n^3 + kn^2 + n^2 \log n + vn^2) + kn^2)$ 。在多视图聚类中，一般  $n \gg v$ ，总体复杂度为  $o(t(v(k^2d + kdn + k^3 + n^3) + kn^2))$ ，其中  $t$  是迭代次数。

### 3.3 实验及分析

在本章中进行了一些实验来证明 CLIMVC/LTC 的有效性。所有实验均在配备 AMD Ryzen 7 PRO 4750U CPU、16G RAM 和 MATLAB 2019b (64 位) 的电脑上进行。

#### 3.3.1 实验设置

##### 数据集

在实验中选择了四个公开数据集，其信息总结在表 3-1 中。

**Yale**<sup>1</sup>包含 15 个人的图像，每个人有 11 张在不同表情、姿势和光线下获得的人脸图像<sup>[47]</sup>。

**MSRC**<sup>2</sup>是一个场景识别数据集。在实验中，本章从 210 幅图像中选取 7 个类别组成实验数据集，每个图像有六个特征表示<sup>[48]</sup>。

**ORL**<sup>3</sup>包含 40 个人的图像，每个人有 10 张不同的图像，在不同的时间、不同的光线条件下拍摄，面部表情也各不相同<sup>[49]</sup>。

**Handwritten**<sup>4</sup>包含 2000 个样本和 10 个数字类别 (0-9)，每个样本有 6 个

<sup>1</sup> <http://vision.ucsd.edu/content/yale-face-database>

<sup>2</sup> [Image Understanding - Microsoft Research](http://imageunderstanding.microsoft.com/)

<sup>3</sup> <https://cam-orl.co.uk/facedatabase.html>

<sup>4</sup> [UCI Machine Learning Repository: Multiple Features Data Set](http://mlr.cs.umich.edu/datasets.php)

视图特征<sup>[50]</sup>。

表 3-1 四个数据集的统计信息

| 数据集         | 样本数  | 视图数 | 类簇数 | 视图维度                    |
|-------------|------|-----|-----|-------------------------|
| Yale        | 165  | 3   | 15  | 4096/3304/5462          |
| ORL         | 400  | 3   | 40  | 4096/3304/6750          |
| Handwritten | 2000 | 6   | 10  | 240/76/216/47/64/6      |
| MSRC        | 210  | 6   | 7   | 1302/48/512/100/256/210 |

### 对比算法

在实验中,选取了如下 7 种缺失多视图聚类方法与 CLIMVC/LTC 综合比较。

BSV<sup>[14]</sup>: BSV 首先使用可用实例的平均值填补缺失的视图,然后分别对每个视图执行 k-means 聚类。选择最佳聚类效果作为最终聚类结果。

PVC<sup>[13]</sup>: PVC 通过对两个视图执行非负矩阵分解来学习潜在表示。

DAIMVC<sup>[17]</sup>: DAIMVC 将样本对齐和基矩阵对齐以学习一个公共表示矩阵。

PIC<sup>[23]</sup>: PIC 利用有效的相似性填充方法来降低因缺乏特征而导致的风险,并利用扰动理论学习共识拉普拉斯矩阵进行最终聚类。

UEAF<sup>[51]</sup>: UEAF 同时重构缺失视图,学习多视图数据的共识表示,并引入图正则化项,以保证共识表示的一致性。

AGC\_IMC<sup>[25]</sup>: AGC\_IMC 利用图补全和共识表示学习进行聚类。

GM-PMVC<sup>[52]</sup>: GM-PMVC 通过利用现有视图信息之间的邻接关系补全视图信息,学习更具判别性的共识表示。

### 3.3.2 对比实验结果与分析

在实验中,使用聚类准确率(ACC)和归一化互信息(NMI)作为评价指标。评价指标的范围为[0-100],如果值越大,表示聚类效果越好。数据集的缺失率由 10%到 50%,步长为 10%。

表 3-2 和表 3-3 列出了不同对比算法在不同缺失率下在四个数据集上实现的聚类性能,最佳聚类性能结果以粗体标记。可以得出以下几点结论:

(1) 随着缺失率的增加,各种算法的聚类性能都有一定的下降。这说明视图的缺失对聚类结果有很大影响。因此,降低因缺失视图而造成的不利影响对实现良好的聚类结果起着至关重要的作用。

(2) 与 CLIMVC/LTC 相比,BSV 在所有情况下的 ACC 分别比 CLIMVC/LTC 低 75.37%、73.11%、69.27%、69.94%和 56.68%。由此可以得出结论,单纯使

表 3-2 不同算法的 ACC

| 数据集         | 算法/缺失率  | 10%          | 20%          | 30%          | 40%          | 50%          |
|-------------|---------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| MSRC        | BSV     | 28.78        | 35.34        | 41.33        | 34.30        | 35.31        |
|             | PVC     | 70.10        | 57.74        | 55.71        | 54.29        | 56.19        |
|             | DAIMC   | 81.19        | 82.71        | 80.24        | 79.81        | 77.33        |
|             | PIC     | 78.57        | 79.05        | 74.76        | 73.81        | 79.52        |
|             | UEAF    | 73.81        | 67.14        | 56.67        | 46.67        | 42.86        |
|             | AGC_IMC | 83.81        | 77.62        | 72.86        | 70.95        | 57.14        |
|             | GM_PMVC | 98.38        | 97.71        | 97.48        | 94.33        | 85.43        |
|             | Ours    | <b>99.81</b> | <b>99.52</b> | <b>98.05</b> | <b>98.24</b> | <b>94.48</b> |
| ORL         | BSV     | 21.86        | 25.92        | 25.76        | 24.29        | 24.27        |
|             | PVC     | 57.53        | 53.76        | 53.93        | 46.99        | 46.48        |
|             | DAIMC   | 67.05        | 67.85        | 67.58        | 67.70        | 66.43        |
|             | PIC     | 70.75        | 72.25        | 73.00        | 75.25        | 74.25        |
|             | UEAF    | 52.25        | 50.25        | 41.50        | 38.75        | 29.00        |
|             | AGC_IMC | 65.25        | 62.00        | 56.00        | 34.75        | 26.50        |
|             | GM_PMVC | 94.05        | 92.33        | 91.22        | 85.18        | 72.60        |
|             | Ours    | <b>97.23</b> | <b>99.03</b> | <b>95.03</b> | <b>94.23</b> | <b>80.95</b> |
| Yale        | BSV     | 21.19        | 35.67        | 28.15        | 34.12        | 32.85        |
|             | PVC     | 48.73        | 47.18        | 47.30        | 46.09        | 38.24        |
|             | DAIMC   | 56.79        | 56.91        | 55.03        | 54.00        | 57.21        |
|             | PIC     | 75.76        | 69.09        | 68.48        | 65.45        | 63.64        |
|             | UEAF    | 49.70        | 47.27        | 36.97        | 44.24        | 31.52        |
|             | AGC_IMC | 51.52        | 54.55        | 46.06        | 29.70        | 26.67        |
|             | GM_PMVC | 33.82        | 29.52        | 35.27        | 27.88        | 26.06        |
|             | Ours    | <b>86.61</b> | <b>92.06</b> | <b>92.73</b> | <b>73.94</b> | <b>64.85</b> |
| Handwritten | BSV     | 58.40        | 57.80        | 33.52        | 27.86        | 26.08        |
|             | PVC     | 71.09        | 61.46        | 60.54        | 57.63        | 56.64        |
|             | DAIMC   | 79.62        | 78.22        | 77.41        | 74.57        | 71.66        |
|             | PIC     | 79.00        | 74.70        | 77.80        | 84.75        | 85.25        |
|             | UEAF    | 51.15        | 50.35        | 41.70        | 41.70        | 28.75        |
|             | AGC_IMC | 84.15        | 85.20        | 87.00        | 85.20        | 84.50        |
|             | GM_PMVC | 99.94        | <b>99.96</b> | <b>99.81</b> | 99.65        | 99.60        |
|             | Ours    | <b>99.95</b> | 99.93        | <b>99.81</b> | <b>99.83</b> | <b>99.83</b> |

表 3-2 不同算法的 NMI

| 数据集         | 算法/缺失率   | 10%          | 20%          | 30%          | 40%          | 50%          |
|-------------|----------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| MSRC        | BSV      | 25.77        | 36.53        | 33.02        | 30.97        | 22.78        |
|             | PVC      | 62.22        | 49.78        | 46.86        | 41.15        | 43.59        |
|             | DAIMC    | 71.12        | 72.42        | 69.42        | 68.77        | 66.34        |
|             | PIC      | 73.66        | 70.66        | 70.69        | 66.13        | 69.11        |
|             | UEAF     | 62.37        | 55.86        | 44.82        | 34.15        | 33.42        |
|             | AGC_IMC  | 79.87        | 72.96        | 71.18        | 62.01        | 49.91        |
|             | GM_P MVC | 96.67        | 95.52        | 94.80        | 88.67        | 80.83        |
|             | Ours     | <b>99.57</b> | <b>98.92</b> | <b>95.58</b> | <b>96.54</b> | <b>88.98</b> |
| ORL         | BSV      | 49.43        | 50.31        | 49.64        | 48.13        | 46.82        |
|             | PVC      | 75.38        | 72.52        | 71.15        | 64.43        | 64.10        |
|             | DAIMC    | 83.21        | 84.18        | 83.34        | 83.19        | 82.59        |
|             | PIC      | 84.50        | 85.61        | 87.13        | 86.02        | 86.02        |
|             | UEAF     | 68.39        | 66.31        | 56.61        | 55.56        | 44.17        |
|             | AGC_IMC  | 79.32        | 77.01        | 68.97        | 49.34        | 38.72        |
|             | GM_P MVC | 98.10        | 97.26        | 96.14        | 92.80        | 83.64        |
|             | Ours     | <b>99.02</b> | <b>99.72</b> | <b>97.33</b> | <b>96.42</b> | <b>88.44</b> |
| Yale        | BSV      | 39.46        | 49.03        | 41.50        | 46.63        | 42.80        |
|             | PVC      | 53.89        | 52.72        | 51.43        | 50.07        | 43.63        |
|             | DAIMC    | 62.28        | 62.46        | 60.30        | 59.49        | 61.30        |
|             | PIC      | 74.99        | 72.30        | 71.20        | 68.02        | 66.81        |
|             | UEAF     | 56.34        | 53.68        | 37.70        | 46.29        | 35.87        |
|             | AGC_IMC  | 57.91        | 59.09        | 49.14        | 36.02        | 27.05        |
|             | GM_P MVC | 45.47        | 40.27        | 43.96        | 29.96        | 27.86        |
|             | Ours     | <b>89.42</b> | <b>95.25</b> | <b>93.87</b> | <b>74.33</b> | <b>67.03</b> |
| Handwritten | BSV      | 62.41        | 59.98        | 44.07        | 26.18        | 24.78        |
|             | PVC      | 63.15        | 60.54        | 58.00        | 51.91        | 51.58        |
|             | DAIMC    | 73.48        | 72.54        | 70.84        | 67.98        | 65.57        |
|             | PIC      | 80.76        | 76.25        | 78.92        | 84.03        | 84.68        |
|             | UEAF     | 51.98        | 44.92        | 37.43        | 32.96        | 26.53        |
|             | AGC_IMC  | 88.72        | 87.45        | 87.67        | 87.04        | 85.27        |
|             | GM_P MVC | 99.84        | <b>99.89</b> | <b>99.47</b> | 99.07        | 98.94        |
|             | Ours     | <b>99.86</b> | 99.82        | <b>99.47</b> | <b>99.54</b> | <b>99.56</b> |

用平均值来填充缺失的视图不利于提高聚类效果，忽视视图间的互补性信息会导致聚类性能下降。

(3) 在缺失率从 10%到 50%的过程中，CLIMVC/LTC 均优于其他对比算法，尤其是在 Yale 数据集。在 ACC 指标上，CLIMVC/LTC 在五个缺失率下分别高于算法 GM\_P MVC 52.79%、62.54%、57.46%、46.06%和 38.79%。这得益于使用隐表示模型来完善视图信息，减少了视图信息缺失带来的负面影响，并充分挖掘了视图之间的一致性和相关性。

### 3.3.3 参数敏感度分析

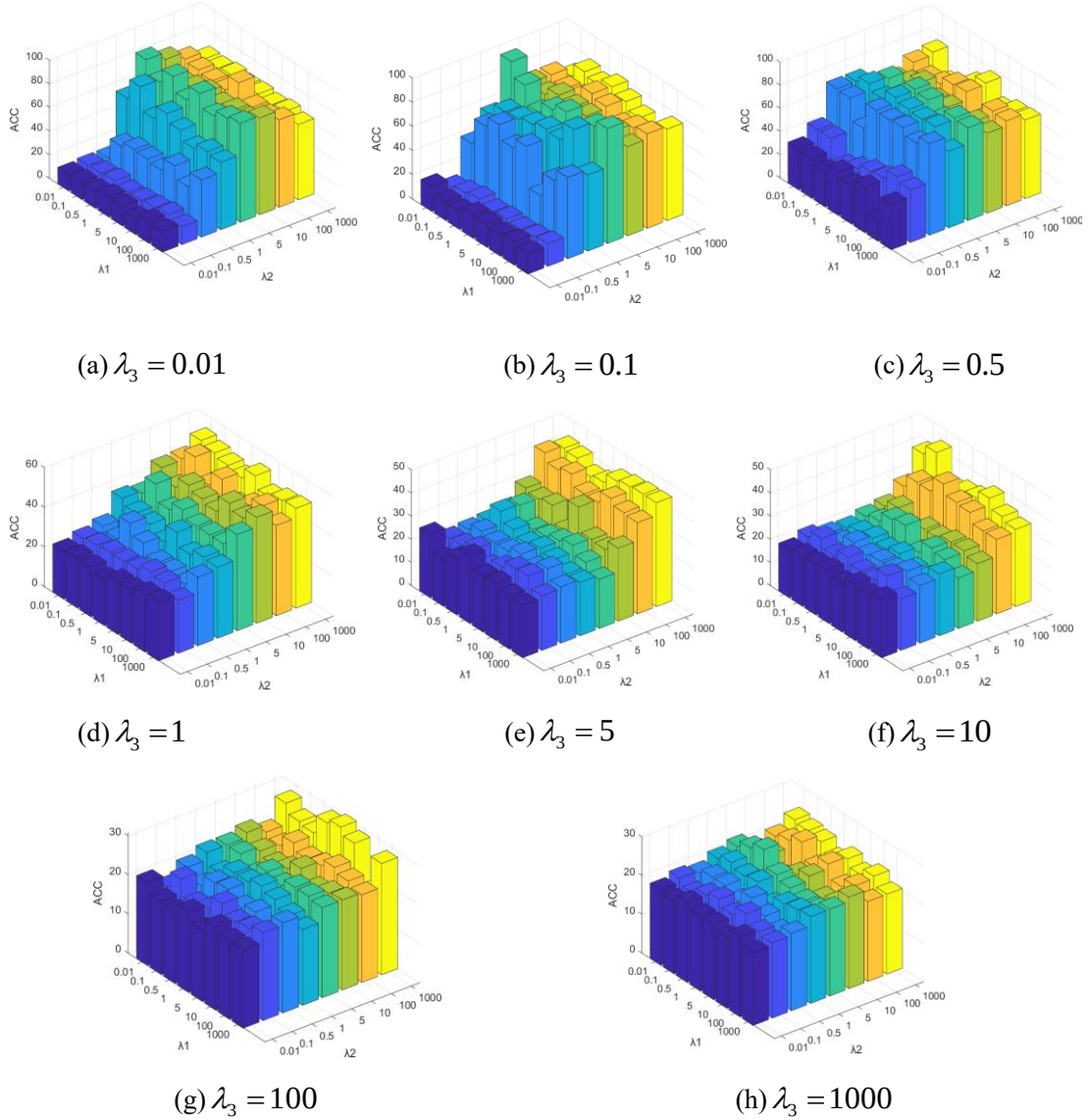


图 3-2 缺失率为 50%的 Yale 数据集在不同参数条件下的准确率

本章提出的算法 CLIMVC/LTC 包含三个超参数。将超参数的范围设置为  $[0.01, 0.1, 0.5, 1, 5, 10, 100, 1000]$ 。在 Handwritten 和 MSRC 数据集上，它们分别设置为 0.1、5 和 0.1；在 ORL 数据集上，设置为 0.05、5 和 0.01；在 Yale 数据集上，将它们设置为 0.5、5 和 0.1。在实验中，可以发现当超参数设置较大时，聚类性能会显著降低。图 3-2 显示了三个超参数对缺失率为 50% 的 Yale 数据集的影响。可以看出，当  $\lambda_3$  设置为较大的值时，模型的聚类效果明显下降。为了获得更好的聚类性能，建议将  $\lambda_1$  设置在  $[0.01, 0.1, 0.5]$  范围内， $\lambda_2$  设置在  $[1, 5]$  范围内， $\lambda_3$  设置在  $[0.01, 0.1, 0.5]$  范围内。

### 3.3.4 收敛性分析

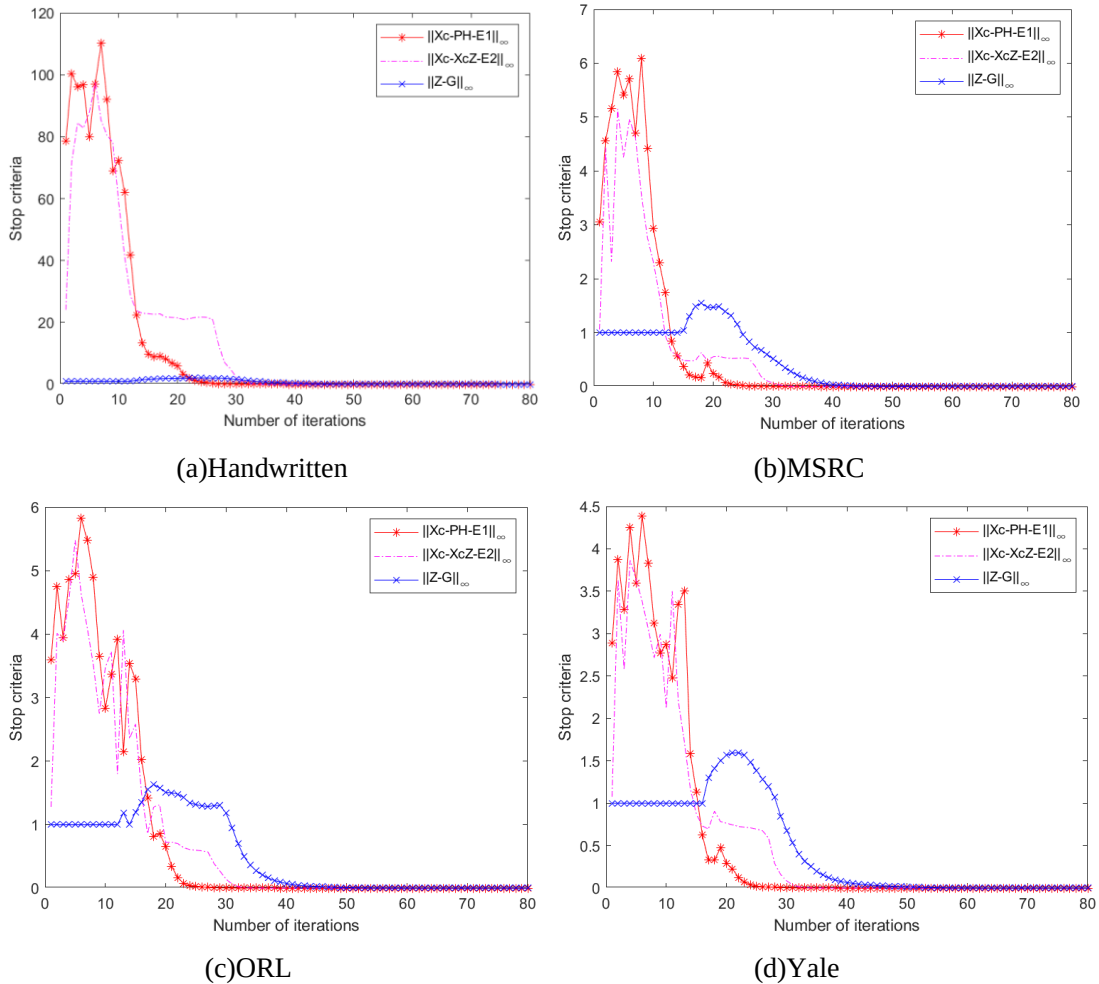


图 3-3 Handwritten, MSRC, ORL 和 Yale 数据集的收敛曲线

本章提出的优化方法包含多个变量和约束条件。图 3-3 显示了缺失率为 50% 时在四个数据集上生成的收敛曲线。x 轴表示迭代次数，y 轴表示收敛条件值。

从图 3-3 可以看出,在有限的执行迭代次数下,收敛曲线下降较快,证明本章的优化方法可以快速达到收敛状态。

### 3.4 本章小结

本章提出了一种新的缺失多视图聚类算法,称为 CLIMVC/LTC。与现有算法不同,本章使用隐表示模型来生成缺失的视图。此外,本章有效地利用低秩张量约束和共识表示学习来充分探索视图之间的高阶相关性和一致性信息。CLIMVC/LTC 将缺失视图补全、低秩张量约束和共识表示学习集成到一个统一的框架中,它们相互作用有助于提高聚类效果。针对 CLIMVC/LTC 的求解,提出了一种基于 ALM 的优化算法。与现有的缺失多视图聚类方法相比,CLIMVC/LTC 的实验结果验证了其有效性。

## 第 4 章 融合表征学习与 k-means 的一步式缺失多视图聚类算法

### 4.1 引言

为了解决缺失多视图聚类问题，专家学者们已经提出了许多新颖的算法。文献<sup>[13]</sup>利用可用实例来学习基于非负矩阵分解的潜在子空间表示。但是，这种方法忽略了缺失数据的随机性。Shao 等人用平均特征值补全了缺失的视图，然后利用传统的多视图聚类方法<sup>[15]</sup>。但是，当缺失率较高时，此方法会改变多视图数据的结构，从而导致聚类分析的性能下降。Wen 等人提出了一个模型，该模型可以恢复丢失的视图信息并学习所有视图的完整相似图<sup>[53]</sup>。然而，该方法将相似图的学习过程与聚类过程分离，不利于获得最佳聚类结果。

尽管上述方法表现较好的聚类性能，但它们仍然存在局限性。因此，本章提出了一种新的缺失多视图聚类方法，即融合表征学习与 k-means 的一步式缺失多视图聚类算法（One-step Incomplete Multi-view Clustering with Low-rank Tensor Graph Learning, OIMVC/LTGL）。具体来说，首先利用视图之间的邻接关系来补全相似图矩阵。其次，将所有相似图矩阵拼接成一个三阶张量。为了挖掘不同视图之间的高阶相关性，将张量核范数施加到构造的张量上。第三，引入一个共识表示学习项来学习最优共识表示。许多缺失多视图聚类方法得到聚类指示矩阵后，然后使用 k-means 或谱聚类得到聚类结果。与它们不同，OIMVC/LTGL 通过将谱旋转引入共识表示矩阵来获得最终的聚类标签，而无需谱聚类或 k-means 步骤。本章的贡献总结如下：

- 1.本章提出了一种创新的缺失多视图聚类算法 OIMVC/LTGL,该方法利用视图之间的邻接关系自适应地补全相似图矩阵，并将图学习、低秩张量约束、共识表示学习和聚类结合到一个统一的框架中。

- 2.与其它缺失多视图聚类算法不同,OIMVC/LTGL 通过在共识表示矩阵中引入谱旋转来直接获得聚类标签。

- 3.本章使用 ALM 方法来解决优化问题，在五个知名数据集的聚类结果证明了 OIMVC/LTGL 的优越性。

## 4.2 融合表征学习与 k-means 的一步式缺失多视图聚类算法

### 4.2.1 OIMVC/LTGL 模型搭建

缺失多视图聚类问题一直受到广泛关注。由于缺少数据，传统的多视图聚类方法无法正常工作。IMVC 方法在处理不完整的多视图数据方面具有良好的性能。然而，现有的 IMVC 方法将表示学习与聚类分开，并且视图之间的高阶信息没有得到很好的探索。这种方法不利于获得最佳聚类效果。为了解决这个问题，本章提出了 OIMVC/LTGL 方法，OIMVC/LTGL 的提出过程将在本章中具体描述。

OIMVC/LTGL 的一般流程图如图 4-1 所示。

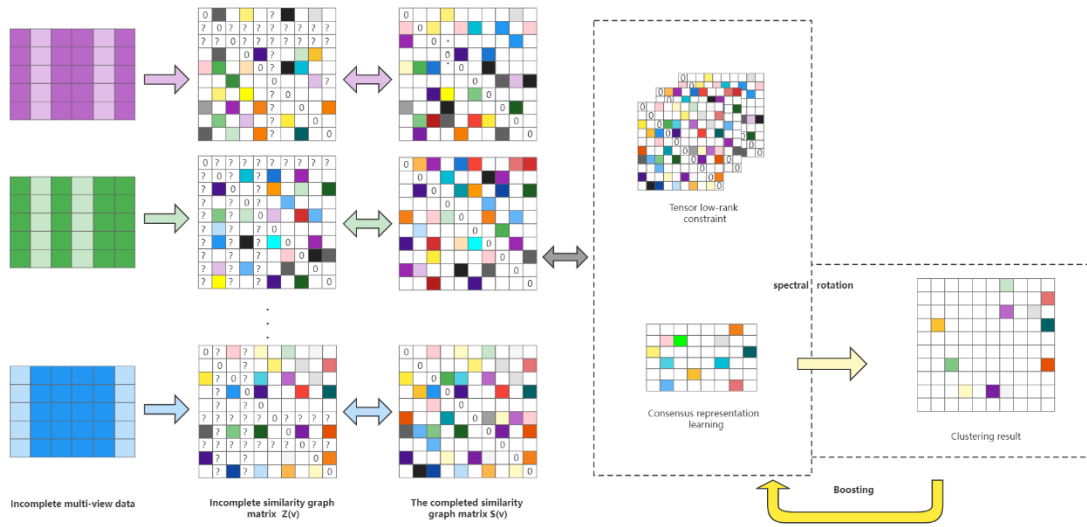


图 4-1 OIMVC/LTGL 算法流程图

获取完整的相似图对聚类性能具有至关重要的影响。如果出现数据缺失的情况，那么很明显无法直接构建完整的相似图。获得完整的相似图成为 IMVC 问题的一部分。在本章中，OIMVC/LTGL 使用样例之间的邻接关系来补全相似图。

视图之间存在一定的相关性，因为多视图数据包含对同一实例的不同描述。假设一个实例中至少存在一个视图，则可以使用此视图信息推断有关该实例的其他视图的信息。因此，可以使用视图之间的邻接关系来补全相似图。因此，图学习模型可以描述为：

$$\begin{aligned} \min_{S^{(v)}, U} \sum_{v=1}^l \left( \| (S^{(v)} - Z^{(v)}) \odot W^{(v)} \|_F^2 \right) \\ \text{s.t. } 0 \leq S^{(v)} \leq 1, S^{(v)} \mathbf{1} = \mathbf{1}, \text{diag}(S^{(v)}) = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

其中  $S^{(v)} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  是第  $v$  个视图的相似图，其元素表示第  $i$  个样本和第  $j$  个样本之间

的相似性； $Z^{(v)} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  是从第  $v$  个视图的非缺失样本中构建的相似图； $W^{(v)} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  是权重矩阵，其元素值为 0 或 1。如果第  $v$  个视图的第  $i$  和第  $j$  个样本存在，则  $W_{i,j}^{(v)} = 1$ ；否则， $W_{i,j}^{(v)} = 0$ 。  $S^{(v)} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  是本章旨在恢复的完整相似图。

相似图恢复完整后，可以使用 TNN 挖掘视图之间的高阶相关性。公式(4.1)可以更新为：

$$\begin{aligned} \min_{S^{(v)}, U} \sum_{v=1}^l \left( \left\| (S^{(v)} - Z^{(v)}) \odot W^{(v)} \right\|_F^2 \right) + \lambda_1 \|\mathcal{S}\|_{TNN} \\ \text{s.t. } 0 \leq S^{(v)} \leq 1, S^{(v)} \mathbf{1} = \mathbf{1}, \text{diag}(S^{(v)}) = 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

其中  $\mathcal{S}$  是三阶张量，它是由相似图矩阵  $S^{(v)}$  堆叠形成的。

然而，各视图之间信息的一致性信息尚未充分探索。因此，使用一个共识表示学习项来探索视图之间信息的一致性。公式(4.2)可以更新为：

$$\begin{aligned} \min_{S^{(v)}, U} \sum_{v=1}^l \left( \left\| (S^{(v)} - Z^{(v)}) \odot W^{(v)} \right\|_F^2 + \lambda_2 \text{tr}(U^T L_{S^{(v)}} U) \right) + \lambda_1 \|\mathcal{S}\|_{TNN} \\ \text{s.t. } U^T U = I, 0 \leq S^{(v)} \leq 1, S^{(v)} \mathbf{1} = \mathbf{1}, \text{diag}(S^{(v)}) = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

其中  $L_{S^{(v)}} = D_{S^{(v)}} - S^{(v)} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ， $D_{S^{(v)}} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  是一个对角矩阵，其对角线元素为  $(D_{S^{(v)}})_{i,i} = \sum_{j=1}^n (S_{i,j}^{(v)} + S_{j,i}^{(v)}) / 2$ ， $U \in \mathbf{R}^{n \times c}$  是多视图数据的共识表示。

获得共识表示矩阵后，通常利用 k-means 或谱聚类以获得聚类结果，但共识表示学习的过程与聚类过程隔离，不利于获得最佳聚类结果。与其他算法不同，本章引入旋转矩阵  $R$  来共同优化共识表示和聚类结果。公式(4.3)可以按如下方式更新：

$$\begin{aligned} \min_{S^{(v)}, U, Y, R} \sum_{v=1}^l \left( \left\| (S^{(v)} - Z^{(v)}) \odot W^{(v)} \right\|_F^2 + \lambda_2 \text{tr}(U^T L_{S^{(v)}} U) \right) \\ + \lambda_1 \|\mathcal{S}\|_{TNN} + \lambda_3 \sum_{i=1}^n \sum_{c=1}^k (Y_{i,c})^\gamma \|\mathbf{t}_c - U_{i,:} R\|_2^2 \\ \text{s.t. } U^T U = I, 0 \leq S^{(v)} \leq 1, S^{(v)} \mathbf{1} = \mathbf{1}, \text{diag}(S^{(v)}) = 0, R^T R = I, Y_{i,c} \geq 0, Y_{i,:} \mathbf{1} = 1 \end{aligned} \quad (4.4)$$

其中  $\gamma$  是系数， $\mathbf{t}_c$  是  $1 \times k$  维的用于区分每个聚类的维度向量， $U_{i,:}$  是  $U$  的第  $i$  行， $R$  是旋转矩阵。 $\mathbf{t}_c$  表示第  $c$  个元素等于 1 且其他元素为 0 的向量，其中  $c \in \{1, 2, \dots, k\}$ 。

#### 4.2.2 OIMVC/LTGL 模型求解

由于目标函数包含许多变量，因此公式(4.4)很难直接求得其解。在本章中，使用 ALM 求解每个变量的优化子问题，并得到方程的解。

首先，为了分离变量，引入中间变量  $\mathcal{A}$ ：

$$\begin{aligned} \min_{S^{(v)}, U, Y, R} & \sum_{v=1}^l \left( \left\| (S^{(v)} - Z^{(v)}) \odot W^{(v)} \right\|_F^2 + \lambda_2 \text{tr}(U^T L_{S^{(v)}} U) \right) \\ & + \lambda_1 \|\mathcal{A}\|_{TNN} + \lambda_3 \sum_{i=1}^n \sum_{c=1}^k (Y_{i,c})^\gamma \|\mathbf{t}_c - U_{i,:} R\|_2^2 \\ \text{s.t. } & U^T U = I, 0 \leq S^{(v)} \leq 1, S^{(v)} \mathbf{1} = \mathbf{1}, \text{diag}(S^{(v)}) = 0, \\ & R^T R = I, Y_{i,c} \geq 0, Y_{i,:} \mathbf{1} = 1, \mathcal{S} = \mathcal{A} \end{aligned} \quad (4.5)$$

其次，公式(4.5)可以进一步写成：

$$\begin{aligned} \min_{S^{(v)}, U, Y, R} & \sum_{v=1}^l \left( \left\| (S^{(v)} - Z^{(v)}) \odot W^{(v)} \right\|_F^2 + \lambda_2 \text{tr}(U^T L_{S^{(v)}} U) \right) + \lambda_1 \|\mathcal{A}\|_{TNN} \\ & + \frac{\mu}{2} \left\| \mathcal{S} - \mathcal{A} + \frac{\mathcal{C}}{\mu} \right\|_F^2 + \lambda_3 \sum_{i=1}^n \sum_{c=1}^k (Y_{i,c})^\gamma \|\mathbf{t}_c - U_{i,:} R\|_2^2 \\ \text{s.t. } & U^T U = I, 0 \leq S^{(v)} \leq 1, S^{(v)} \mathbf{1} = \mathbf{1}, \text{diag}(S^{(v)}) = 0, R^T R = I, Y_{i,c} \geq 0, Y_{i,:} \mathbf{1} = 1 \end{aligned} \quad (4.6)$$

其中  $\mathcal{C}$  是与张量  $\mathcal{S}$  维数相同的张量， $C^{(v)} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  ( $1 \leq v \leq l$ ) 由  $l$  个矩阵组成， $\mu$  是惩罚项系数。

##### 1. $S^{(v)}$ -子问题

保留与  $S^{(v)}$  相关的项，可以获得：

$$\begin{aligned} \min_{S^{(v)}} & \left\| (S^{(v)} - Z^{(v)}) \odot W^{(v)} \right\|_F^2 + \lambda_2 \text{tr}(U^T L_{S^{(v)}} U) + \frac{\mu}{2} \left\| S^{(v)} - A^{(v)} + \frac{C^{(v)}}{\mu} \right\|_F^2 \\ \text{s.t. } & 0 \leq S^{(v)} \leq 1, S^{(v)} \mathbf{1} = \mathbf{1}, \text{diag}(S^{(v)}) = 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

令  $H_{i,j} = \|U_{i,:} - U_{j,:}\|_F^2$ ，所以  $\text{tr}(U^T L_{S^{(v)}} U) = \frac{1}{2} H_{i,j} \sum_{v=1}^l S_{i,j}^{(v)}$ 。公式(4.7)可以转换为：

$$\begin{aligned} \min_{S^{(v)}} & (S^{(v)})^2 W^{(v)} + (S^{(v)})^2 \frac{\mu}{2} - 2Z^{(v)} W^{(v)} S^{(v)} + \frac{1}{2} \lambda_2 H S^{(v)} - \frac{\mu}{2} (A^{(v)} - \frac{C^{(v)}}{\mu}) S^{(v)} \\ \text{s.t. } & 0 \leq S^{(v)} \leq 1, S^{(v)} \mathbf{1} = \mathbf{1}, \text{diag}(S^{(v)}) = 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

接下来，可以得到：

$$\begin{aligned} \min_{S^{(v)}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (S_{i,j}^{(v)} - M_{i,j}^{(v)})^2 \\ \text{s.t. } 0 \leq S^{(v)} \leq \mathbf{1}, S^{(v)} \mathbf{1} = \mathbf{1}, \text{diag}(S^{(v)}) = 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\text{其中 } M_{i,j}^{(v)} = \frac{Z_{i,j}^{(v)} W_{i,j}^{(v)} - \frac{\lambda_2 H_{i,j}}{4} + \frac{\mu A_{i,j}^{(v)} - C_{i,j}^{(v)}}{2}}{W_{i,j}^{(v)} + \mu / 2}。$$

由于方程中的每一行变量  $S^{(v)}$  彼此独立，因此可以逐行优化，然后得到变量  $S^{(v)}$  的最优解，公式(4.9)表示如下。

$$S_{i,j}^{(v)} = \begin{cases} (M_{i,j}^{(v)} + \eta_i^{(v)})_+, & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases} \quad (4.10)$$

其中  $(a)_+ = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ 0, & a < 0 \end{cases}$ ，根据约束  $S^{(v)} I = I$ ，可以得到：

$$\eta_i^{(v)} = \frac{1 - \sum_{j=1, j \neq i}^n M_{i,j}^{(v)}}{n-1} \quad (4.11)$$

## 2. $U$ -子问题:

保留与  $U$  相关的项，可以获得：

$$\begin{aligned} \min_U \sum_{v=1}^l \left( \lambda_2 \text{tr}(U^T L_{S^{(v)}} U) \right) + \lambda_3 \sum_{i=1}^n \sum_{c=1}^k (Y_{i,c})^\gamma \|\mathbf{t}_c - U_{i,:} R\|_2^2 \\ \text{s.t. } U^T U = I \end{aligned} \quad (4.12)$$

根据<sup>[54]</sup>，可以得到：

$$\min_U \sum_{i=1}^n \sum_{c=1}^k (Y_{i,c})^\gamma \|\mathbf{t}_c - U_{i,:} R\|_2^2 = \max_U \text{tr}(U^T G R^T) \quad (4.13)$$

其中  $G \in \mathbf{R}^{n \times k}$ ，其第  $i$  行是  $G_{i,:} = \sum_{c=1}^k (Y_{i,c})^\gamma \mathbf{t}_c$ 。显然， $\min_U \sum_{i=1}^n \sum_{c=1}^k (Y_{i,c})^\gamma \|\mathbf{t}_c - U_{i,:} R\|_2^2$  等

同于  $\max_U \sum_{i=1}^n \sum_{c=1}^k (Y_{i,c})^\gamma \text{tr}(R^T (U_{i,:})^T \mathbf{t}_c)$ ，因此

$$\begin{aligned}
 \max_U \sum_{i=1}^n \sum_{c=1}^k (Y_{i,c})^\gamma \operatorname{tr} \left( R^T (U_{i,:})^T \mathbf{t}_c \right) &= \max_U \sum_{i=1}^n \sum_{c=1}^k (Y_{i,c})^\gamma \operatorname{tr} \left( \mathbf{t}_c R^T (U_{i,:})^T \right) \\
 &= \max_U \sum_{i=1}^n \operatorname{tr} \left( (U_{i,:})^T G_{i,:} R^T \right) \\
 &= \operatorname{tr} (U^T G R^T)
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

其中  $G_{i,:} = \sum_{c=1}^k (Y_{i,c})^\gamma \mathbf{t}_c$ 。公式(4.12)可以更新如下：

$$\begin{aligned}
 \min_U \lambda_2 \operatorname{tr} (U^T L_{S^{(v)}} U) - \lambda_3 \operatorname{tr} (U^T G R^T) \\
 \text{s.t. } U^T U = I
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

根据<sup>[55]</sup>，将公式(4.15)转换为无约束形式：

$$L(U, \Lambda) = -\lambda_2 \operatorname{tr} (U^T L_{S^{(v)}} U) + \lambda_3 \operatorname{tr} (U^T G R^T) - \operatorname{tr} (\Lambda (U^T U - I)) \tag{4.16}$$

其中  $\Lambda$  是对称的拉格朗日乘子矩阵。

取  $U$  的导数，可以得到：

$$\frac{\partial L}{\partial U} = -2\lambda_2 L_{S^{(v)}} U + \lambda_3 G R^T - 2U \Lambda = 0 \tag{4.17}$$

$$\text{令 } E = -\lambda_2 L_{S^{(v)}} U + \frac{\lambda_3 G R^T}{2} :$$

$$U \Lambda = E \tag{4.18}$$

设  $E$  的 SVD 为：

$$E = \tilde{U} \tilde{S} \tilde{V}^T \tag{4.19}$$

根据公式(4.18)(4.19)，通过对矩阵的基本运算，可以得到：

$$\begin{aligned}
 (U \Lambda)^T U \Lambda &= E^T E \\
 \Lambda^T U^T U \Lambda &= (\tilde{U} \tilde{S} \tilde{V}^T)^T \tilde{U} \tilde{S} \tilde{V}^T \\
 \Lambda^T \Lambda &= \tilde{V} \tilde{S}^2 \tilde{V}^T
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

因此，可以获得：

$$\Lambda = \tilde{V} \tilde{S} \tilde{V}^T \tag{4.21}$$

因此，公式(4.15)的解是：

$$U = \tilde{U} \tilde{V}^T \tag{4.22}$$

其中  $\tilde{U}, \tilde{V}$  分别是  $E$  的左奇异矩阵和右奇异矩阵。

### 3. $\mathcal{A}$ -子问题:

$$\min_{\mathcal{A}} \lambda_1 \|\mathcal{A}\|_{TNN} + \frac{\mu}{2} \left\| \mathcal{S} - \mathcal{A} + \frac{\mathcal{C}}{\mu} \right\|_F^2 \quad (4.23)$$

这是一个基于 t-SVD 的张量核范数最小化问题<sup>[56]</sup>, 其闭式解可以根据文献<sup>[57]</sup>求解。

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \Upsilon_{n\mu/\lambda_1}(\mathcal{S} + \mathcal{C}/\mu) \\ &= \mathcal{U} * \Upsilon_{n\mu/\lambda_1}(\Sigma) * \mathcal{V}^T \end{aligned} \quad (4.24)$$

其中  $\mathcal{S} + \mathcal{C}/\mu = \mathcal{U} * \Sigma * \mathcal{V}^T$ ,  $\Upsilon_{n\mu/\lambda_1}(\Sigma) = \Sigma * \mathcal{J}$ ,  $\mathcal{J} \in R^{n \times l \times n}$  是 f-对角张量, 它在傅里叶域中的对角元素是  $\mathcal{J}_f(i, i, j) = \max(1 - \frac{n\mu/\lambda_1}{\Sigma_f^{(j)}(i, i)}, 0)$ 。

### 4. $R$ -子问题

保留与  $R$  相关的项, 可以获得:

$$\begin{aligned} \min_R \sum_{i=1}^n \sum_{c=1}^k (Y_{i,c})^\gamma \|\mathbf{t}_c - U_{i,:} R\|_2^2 \\ s.t. R^T R = I \end{aligned} \quad (4.25)$$

根据公式(4.14), 公式(4.25)等价于:

$$\begin{aligned} \max_R \text{tr}(R^T U^T G) \\ s.t. R^T R = I \end{aligned} \quad (4.26)$$

其中  $G_{i,:} = \sum_{c=1}^k (Y_{i,c})^\gamma \mathbf{t}_c$ , 设  $U^T G$  的 SVD 为:

$$U^T G = U_R S_R V_R^T \quad (4.27)$$

根据<sup>[54]</sup> 可以得到:

$$R = U_R V_R^T \quad (4.28)$$

其中  $U_R, V_R$  分别是  $U^T G$  的左奇异矩阵和右奇异矩阵

### 5. $Y$ -子问题

通过保留与  $Y$  相关的项, 可以获得:

$$\begin{aligned} \sum_{c=1}^k (Y_{i,c})^\gamma \|\mathbf{t}_c - U_{i,:} R\|_2^2 \\ s.t. Y_{i,c} \geq 0, Y_{i,:} \mathbf{1} = 1 \end{aligned} \quad (4.29)$$

令  $P_{i,c} = \|\mathbf{t}_c - U_{i,:}R\|_2^2$ , 公式(4.29)可以转换为:

$$\begin{aligned} & \sum_{c=1}^k (Y_{i,c})^\gamma P_{i,c} \\ & \text{s.t. } Y_{i,c} \geq 0, Y_{i,:} \mathbf{1} = 1 \end{aligned} \quad (4.30)$$

如果  $\gamma=1$ , 那么

$$Y_{i,c} = \langle c = \arg_j \min P_{i,j} \rangle \quad (4.31)$$

如果参数为真,  $\langle \cdot \rangle$  为 1, 否则为 0。如果  $\gamma > 1$ , 则:

$$Y_{i,c} = \frac{(P_{i,c})^{\frac{1}{1-\gamma}}}{\sum_{c=1}^k (P_{i,c})^{\frac{1}{1-\gamma}}} \quad (4.32)$$

6.C-子问题:

变量  $\mathbf{C}$  的更新公式可以描述为:

$$\mathbf{C}^{(v)} = \mathbf{C}^{(v)} + \mu(\mathbf{S}^{(v)} - \mathbf{A}^{(v)}) \quad (4.33)$$

$\mu$  的更新公式可以描述为:

$$\mu = \min(\rho\mu, \mu_0) \quad (4.34)$$

其中  $\rho$  和  $\mu_0$  是常量。

#### 4.2.3 OIMVC/LTGL 算法主要流程

OIMVC/LTGL 的主要步骤在算法 1 中描述。

---

##### 算法 1: OIMVC/LTGL

---

**输入:** 缺失多视图数据  $\{X^{(v)}\}_{v=1}^l$ , 指示矩阵  $\mathbf{G} \in \mathbf{R}^{n \times l}$ ,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \gamma$

类簇数  $k, \mu = 0.01$ , and  $\rho = 1.2$ .

**输出:** 聚类标签  $\mathbf{Y}$ .

**初始化:** 构造  $k$  近邻图  $\mathbf{Z}^{(v)} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , 相似图元素指示矩阵  $\mathbf{W}^{(v)} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,

$\mathbf{C}^{(v)} = \mathbf{0}$ , and  $\mathbf{R} = \mathbf{I}_k$ .

**While** not converged **do**

1. 使用公式(4.10)更新  $\mathbf{S}^{(v)}$

- 2.使用公式(4.22)更新  $U$
- 3.使用公式(4.24)更新  $\mathcal{A}$
- 4.使用公式(4.33)更新  $\mathcal{C}$
- 5.使用公式(4.28)更新  $R$
- 6.使用公式(4.31)或公式(4.32)更新  $Y$

**End**

返回聚类标签  $Y$ .

#### 4.2.4 OIMVC/LTGL 算法复杂度

根据算法 1 中描述的过程, OIMVC/LTGL 的计算复杂度主要包括更新  $S^{(v)}, U, \mathcal{A}, \mathcal{C}, R, Y$

具体来说, 更新  $S^{(v)}$  和  $\mathcal{C}$  仅包含简单的矩阵运算, 计算复杂度可以忽略不计。 $\mathcal{A}$  的更新需要  $O(l n^2 \log(n) + l^2 n^2)$ , 其中  $n$  和  $l$  分别表示样本数和视图数。更新  $U$  需要花费  $O(n^3)$ ,  $R$  和  $Y$  的更新分别需要  $O(l k^3)$  和  $O(l n k^2 + n k)$ , 其中  $k$  是集群的数量。总体而言, 算法 1 的复杂性为  $O(l n^2 \log(n) + l^2 n^2 + n^3 + l k^3 + l n k^2 + n k)$ 。在多视图聚类中, 通常  $n \gg l$ , 总体复杂度为  $O(t(l n^2 \log(n) + l^2 n^2 + n^3))$ , 其中  $t$  为迭代次数。

### 4.3 实验及分析

#### 4.3.1 实验设置

在实验中, 选择了五个基准数据集 (Caltech7, ORL, YaleA, COIL20 和 BBC-Sport), 其信息汇总在表 4-1 中。下面描述了有关这些数据集的更多详细信息。

**Caltech7** 数据集包含 7 种类型的目标和 1474 个样本, 这些样本源自著名的目标识别数据库 Caltech101<sup>[58]</sup>。

**COIL20** 数据集包含从不同角度拍摄的 20 个物体的图片, 每个类别包含 72 张图片, 总共 1440 个样本。

**BBC-Sport** 数据集是一个文本数据集, 包含四个特征和 116 个样本, 分别属于田径、板球、足球、橄榄球和网球五个类别。

关于 ORL 数据集和 YaleA 数据集的介绍见第三章。

表 4-1 五个数据集的统计数据

| 数据集       | 样本数  | 视图数 | 类别数 | $d_1$ | $d_2$ | $d_3$ | $d_4$ | $d_5$ | $d_6$ |
|-----------|------|-----|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Caltech7  | 1474 | 6   | 7   | 48    | 40    | 254   | 198   | 512   | 928   |
| ORL       | 400  | 4   | 40  | 512   | 59    | 864   | 254   | -     | -     |
| YaleA     | 165  | 3   | 15  | 9     | 512   | 50    | -     | -     | -     |
| COIL20    | 1440 | 4   | 20  | 1024  | 944   | 4096  | 576   | -     | -     |
| BBC-Sport | 116  | 4   | 5   | 1991  | 2063  | 2113  | 2158  | -     | -     |

### 对比算法

在实验中，使用 BSV<sup>[14,15]</sup>、PVC<sup>[13]</sup>、DAIMVC<sup>[17]</sup>、PIC<sup>[23]</sup>、UEAF<sup>[51]</sup>、AGC\_IMC<sup>[25]</sup>（算法介绍见第三章）和 LASAR<sup>[26]</sup>与 OIMVC/LTGL 与进行综合比较。

LASAR<sup>[26]</sup>：LASAR 利用视图之间的邻接信息补全相似图矩阵，并学习聚类的共识表示矩阵。

#### 4.3.2 对比实验结果与分析

为了量化不同聚类算法的性能，使用聚类准确率（ACC）和归一化互信息（NMI）作为评价指标。上述评价指标的范围为[0-100]。值越高，聚类效果越好。数据集的缺失率从 10%到 50%，步长为 10%。 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  的设置范围为[0.0001, 0.001, 0.01, 0.1, 1, 10, 100]。 $\gamma$  的设置范围为[1.3, 1.5, 1.7, 1.9, 2.1, 2.3, 2.5, 2.7]。

表 4-2 和表 4-3 列出了具有不同缺失率的五个数据集在不同方法中的性能。最佳聚类性能结果以粗体标记。（1）随着缺失率的增加，各种方法的聚类性能下降。这说明视图缺失对聚类结果有很大影响。与其他方法相比，OIMVC/LTGL 在 Caltech7、YaleA、COIL20 和 BBC-Sport 数据集上获得了最高的性能。在缺失率为 50%的情况下，OIMVC/LTGL 的准确率在这四个数据集上分别比第二好的方法高出 22.73%、6.06%、4.44%和 10.35%。（2）当缺失率较低时，LASAR 和 AGC\_IMC 在 ORL 数据集上的表现优于本章所提方法。原因可能是在这些情况下，相似图的补全不够准确，从而影响了最终的聚类效果。然而，OIMVC/LTGL 仍然是所有比较方法中的第二好或第三好。当缺失率为 50%时，所提算法的精度

高于LASAR算法15%，这充分证明了引入谱旋转直接获得聚类标签的效率。(3) 单视图聚类效果几乎是所有方法中最差的，说明充分利用多视图数据的互补性有利于增强聚类效果。

以上对实验结果的分析充分证明了所提方法的优越性。OIMVC/LTGL 的优越性归因于以下两个原因：1.利用视图之间的邻接关系来实现相似图的自适应补全。2.在共识表示中引入谱旋转，直接输出聚类标签，获得最优聚类效果。

表 4-2 五个数据集在不同方法上的 ACC

| 数据集      | 算法/缺失率  | 10%          | 20%          | 30%          | 40%          | 50%          |
|----------|---------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| Caltech7 | BSV     | 54.65        | 54.49        | 54.54        | 54.53        | 54.38        |
|          | PVC     | 49.77        | 46.84        | 45.26        | 44.88        | 46.06        |
|          | DAIMC   | 43.08        | 51.76        | 41.52        | 42.81        | 49.86        |
|          | PIC     | 66.85        | 65.39        | 64.24        | 64.79        | 62.71        |
|          | UEAF    | 41.75        | 42.13        | 38.90        | 33.80        | 31.59        |
|          | AGC_IMC | 65.54        | 66.15        | 66.76        | 65.94        | 64.99        |
|          | LASAR   | 69.20        | 69.60        | 64.72        | 63.84        | 52.99        |
|          | Ours    | <b>87.45</b> | <b>87.11</b> | <b>87.38</b> | <b>86.57</b> | <b>87.72</b> |
| ORL      | BSV     | 21.86        | 25.92        | 25.76        | 24.29        | 24.27        |
|          | PVC     | 57.53        | 53.76        | 53.93        | 46.99        | 46.48        |
|          | DAIMC   | 67.05        | 67.85        | 67.58        | 67.70        | 66.43        |
|          | PIC     | 75.25        | 72.25        | 73.00        | 74.25        | 70.75        |
|          | UEAF    | 52.25        | 50.25        | 41.50        | 38.75        | 29.00        |
|          | AGC_IMC | 65.25        | 62.00        | 56.00        | 34.75        | 26.50        |
|          | LASAR   | <b>86.25</b> | <b>89.75</b> | <b>88.00</b> | <b>75.25</b> | 58.50        |
|          | Ours    | 77.75        | 67.92        | 77.92        | 73.61        | <b>73.50</b> |
| YaleA    | BSV     | 41.82        | 44.85        | 40.03        | 37.73        | 38.18        |
|          | PVC     | 54.12        | 50.85        | 58.97        | 41.91        | 53.76        |
|          | DAIMC   | 56.97        | 63.64        | 56.97        | 53.94        | 61.82        |
|          | PIC     | 39.45        | 57.52        | 35.88        | 45.58        | 57.52        |
|          | UEAF    | 33.21        | 33.58        | 29.64        | 29.82        | 32.54        |
|          | AGC_IMC | 70.30        | 62.42        | 50.30        | 40.00        | 33.33        |
|          | LASAR   | 70.91        | 60.00        | 58.79        | 60.00        | 42.42        |
|          | Ours    | <b>74.55</b> | <b>74.55</b> | <b>77.58</b> | <b>63.03</b> | <b>67.88</b> |
| COIL20   | BSV     | 26.50        | 22.15        | 19.75        | 19.24        | 21.21        |

|           |         |              |              |              |              |              |
|-----------|---------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
|           | PVC     | 68.04        | 70.39        | 68.82        | 63.85        | 61.52        |
|           | DAIMC   | 71.04        | 73.33        | 70.63        | 68.68        | 71.53        |
|           | PIC     | 79.83        | 79.88        | 79.28        | 78.12        | 78.72        |
|           | UEAF    | 70.06        | 68.63        | 68.62        | 66.66        | 57.61        |
|           | AGC_IMC | <b>84.86</b> | 81.32        | 80.00        | 78.26        | 75.00        |
|           | LASAR   | 78.61        | 77.64        | 78.96        | 80.42        | 79.17        |
|           | Ours    | 79.10        | <b>84.58</b> | <b>86.25</b> | <b>83.54</b> | <b>83.61</b> |
| BBC-Sport | BSV     | 45.52        | 38.49        | 50.04        | 40.34        | 36.51        |
|           | PVC     | 69.74        | 65.65        | 70.17        | 58.19        | 60.86        |
|           | DAIMC   | 60.78        | 59.14        | 59.74        | 55.26        | 57.16        |
|           | PIC     | 78.36        | 78.45        | 69.09        | 77.16        | 70.47        |
|           | UEAF    | 77.59        | 62.93        | 60.34        | 68.10        | 60.34        |
|           | AGC_IMC | 75.86        | 72.41        | 70.69        | 66.38        | 31.90        |
|           | LASAR   | 79.31        | 77.59        | 72.41        | 74.14        | 75.86        |
|           | Ours    | <b>87.07</b> | <b>94.83</b> | <b>87.07</b> | <b>93.97</b> | <b>86.21</b> |

表 4-3 五个数据集在不同方法上的 NMI

| 数据集      | 算法/缺失率  | 10%          | 20%          | 30%          | 40%          | 50%          |
|----------|---------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| Caltech7 | BSV     | 29.68        | 4.20         | 17.73        | 16.42        | 2.09         |
|          | PVC     | 47.57        | 47.36        | 47.10        | 44.18        | 44.88        |
|          | DAIMC   | 48.33        | 51.39        | 47.05        | 43.32        | 51.89        |
|          | PIC     | 63.13        | 60.83        | 57.01        | 62.42        | 55.61        |
|          | UEAF    | 27.28        | 24.91        | 23.20        | 20.00        | 18.60        |
|          | AGC_IMC | 56.48        | 52.94        | 52.36        | 51.22        | 50.97        |
|          | LASAR   | 62.54        | 64.02        | 53.99        | 52.61        | 49.22        |
|          | Ours    | <b>76.90</b> | <b>75.71</b> | <b>77.39</b> | <b>74.60</b> | <b>59.09</b> |
| ORL      | BSV     | 49.43        | 50.31        | 49.64        | 48.13        | 46.82        |
|          | PVC     | 75.38        | 72.52        | 71.15        | 64.43        | 64.10        |
|          | DAIMC   | 83.21        | 84.18        | 83.34        | 83.19        | 82.59        |
|          | PIC     | 84.50        | 85.61        | 87.13        | 86.02        | 86.02        |
|          | UEAF    | 68.39        | 66.31        | 56.61        | 55.56        | 44.17        |
|          | AGC_IMC | 79.32        | 77.01        | 68.97        | 49.34        | 38.72        |
|          | LASAR   | <b>94.28</b> | <b>94.89</b> | <b>93.72</b> | 86.61        | 77.59        |
|          | Ours    | 89.59        | 80.88        | 86.27        | <b>86.79</b> | <b>83.16</b> |
| YaleA    | BSV     | 48.75        | 53.54        | 47.76        | 45.39        | 44.08        |

|           |         |              |              |              |              |              |
|-----------|---------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
|           | PVC     | 68.10        | 62.55        | 66.27        | 52.73        | 64.37        |
|           | DAIMC   | 69.78        | 70.72        | 62.84        | 62.23        | 70.09        |
|           | PIC     | 46.25        | 60.78        | 44.51        | 50.25        | 61.05        |
|           | UEAF    | 41.30        | 40.60        | 35.71        | 35.75        | 36.76        |
|           | AGC_IMC | 71.92        | 63.95        | 53.16        | 46.95        | 37.48        |
|           | LASAR   | 76.47        | 67.08        | 64.37        | <b>66.54</b> | 51.51        |
|           | Ours    | <b>76.91</b> | <b>77.06</b> | <b>80.86</b> | 65.87        | <b>70.65</b> |
| COIL20    | BSV     | 41.87        | 38.54        | 35.54        | 35.01        | 34.03        |
|           | PVC     | 77.08        | 77.44        | 74.37        | 69.94        | 70.37        |
|           | DAIMC   | 80.31        | 80.93        | 81.94        | 79.87        | 81.49        |
|           | PIC     | 91.55        | 89.29        | <b>90.30</b> | 87.74        | <b>89.14</b> |
|           | UEAF    | 78.85        | 77.79        | 77.59        | 75.44        | 64.02        |
|           | AGC_IMC | <b>92.96</b> | <b>91.03</b> | 88.71        | 86.89        | 85.47        |
|           | LASAR   | 90.08        | 90.51        | 87.50        | <b>88.94</b> | 87.20        |
|           | Ours    | 88.75        | 89.89        | 89.61        | 88.49        | 87.55        |
| BBC-Sport | BSV     | 40.12        | 30.24        | 33.76        | 23.57        | 24.21        |
|           | PVC     | 52.80        | 46.72        | 49.43        | 41.07        | 45.03        |
|           | DAIMC   | 49.29        | 44.18        | 47.63        | 43.00        | 46.49        |
|           | PIC     | 79.70        | 76.03        | 68.28        | 76.81        | 68.64        |
|           | UEAF    | 65.89        | 48.34        | 54.96        | 50.33        | 47.43        |
|           | AGC_IMC | 64.20        | 66.28        | 58.76        | 39.82        | 6.27         |
|           | LASAR   | 75.45        | 71.60        | 67.01        | 67.26        | 60.65        |
|           | Ours    | <b>84.95</b> | <b>90.13</b> | <b>79.17</b> | <b>83.67</b> | <b>83.77</b> |

#### 4.3.3 统计分析

为了验证 OIMVC/LTGL 的统计特性, 对实验结果进行了 Friedman 检验和 Nemenyi 事后检验。

Friedman 检验假设  $k$  个算法在  $N$  个数据集上具有相同的性能。第一步是计算  $T_F$  值。

$$T_F = \frac{(N-1)T_{x^2}}{N(k-1)-T_{x^2}} \quad (4.35)$$

其中  $T_{x^2} = \frac{12}{k(k+1)} \left( \sum_{i=1}^k r_i^2 + \frac{k(k+1)^2}{4} \right)$ ,  $r_i$  表示第  $i$  个算法在  $N$  个数据集上的平均排

名。 $T_F$  服从具有自由度  $k-1$  和自由度  $(k-1)(N-1)$  的  $F$  分布。

根据得到的  $T_F$  值, 当  $\alpha = 0.05$  时, 可以将它们与常用的  $F$  检验临界值进行比较。如果获得的  $T_F$  值超过  $F$  检验对应的临界值, 则“ $k$  个算法在  $N$  个数据集上表现相同”的假设被拒绝。 $k$  个算法的性能具有差异显著, 需要事后检验来进一步区分算法, 常用的是 Nemenyi 事后检验。

Nemenyi 事后检验计算平均排名差异的临界值范围。

$$CD = q_\alpha \sqrt{\frac{k(k+1)}{6N}} \quad (4.36)$$

在实验中,  $N=5$ ,  $k=8$ 。根据公式(4.35), 计算得到表 4-4 中不同缺失率的 ACC 和 NMI 对应的  $T_F$  值。当  $\alpha = 0.05$  时, 所有算法具有相同性能的假设被拒绝。因此, 需要使用 Nemenyi 事后测试来继续验证。根据公式(4.36)计算临界值域  $CD=3.6313$ 。为了直观地显示所提出的算法与其他算法之间的差异, 绘制了 Friedman 测试图表, 如图 4-2 和图 4-3 所示。可以发现, 与其他方法相比, OIMVC/LTGL 在所有指标中的平均排名最高。总之, OIMVC/LTGL 在 ACC 和 NMI 上与其他对比算法存在显著差异。

表 4-4 不同缺失率下 ACC 和 NMI 对应的  $T_F$  值

| 缺失率 | $T_F$   |         |
|-----|---------|---------|
|     | ACC     | NMI     |
| 0.1 | 8.9630  | 9.4615  |
| 0.2 | 13.3554 | 11.4412 |
| 0.3 | 9.6364  | 8.8834  |
| 0.4 | 9.2911  | 16.7921 |
| 0.5 | 7.4754  | 11.6716 |

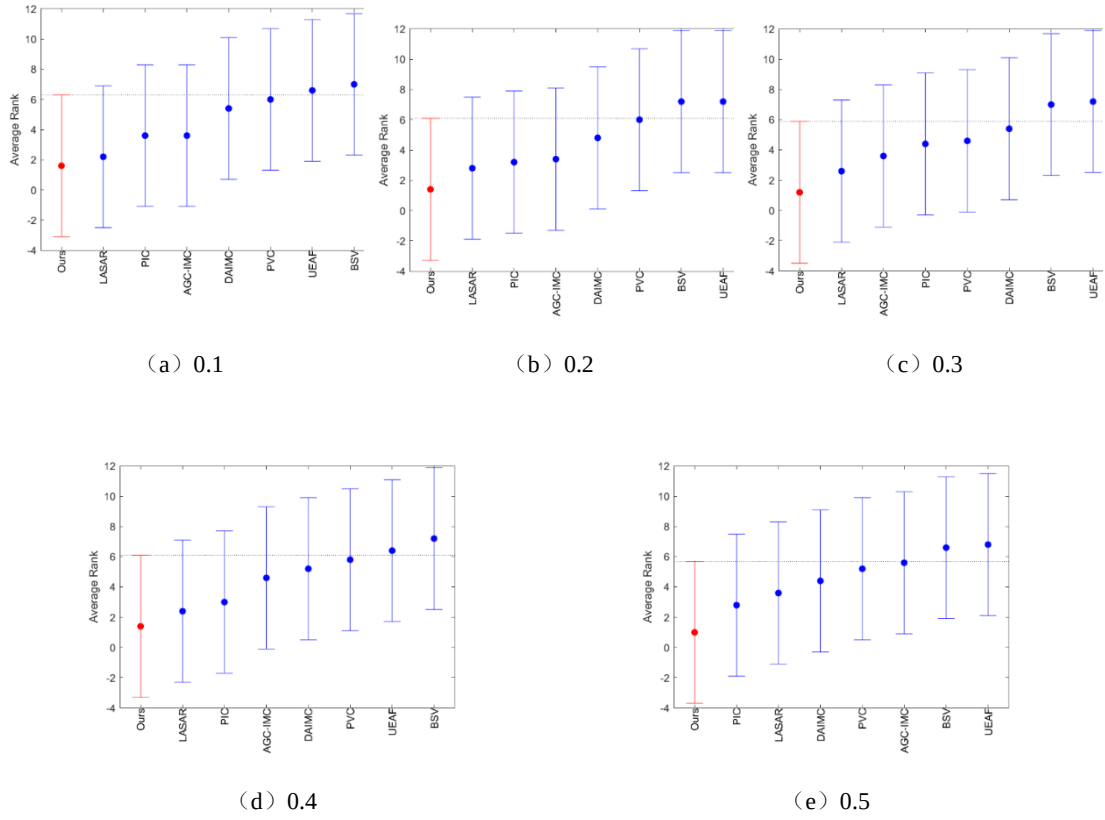


图 4-2 不同缺失率下 ACC 的 Friedman 测试图

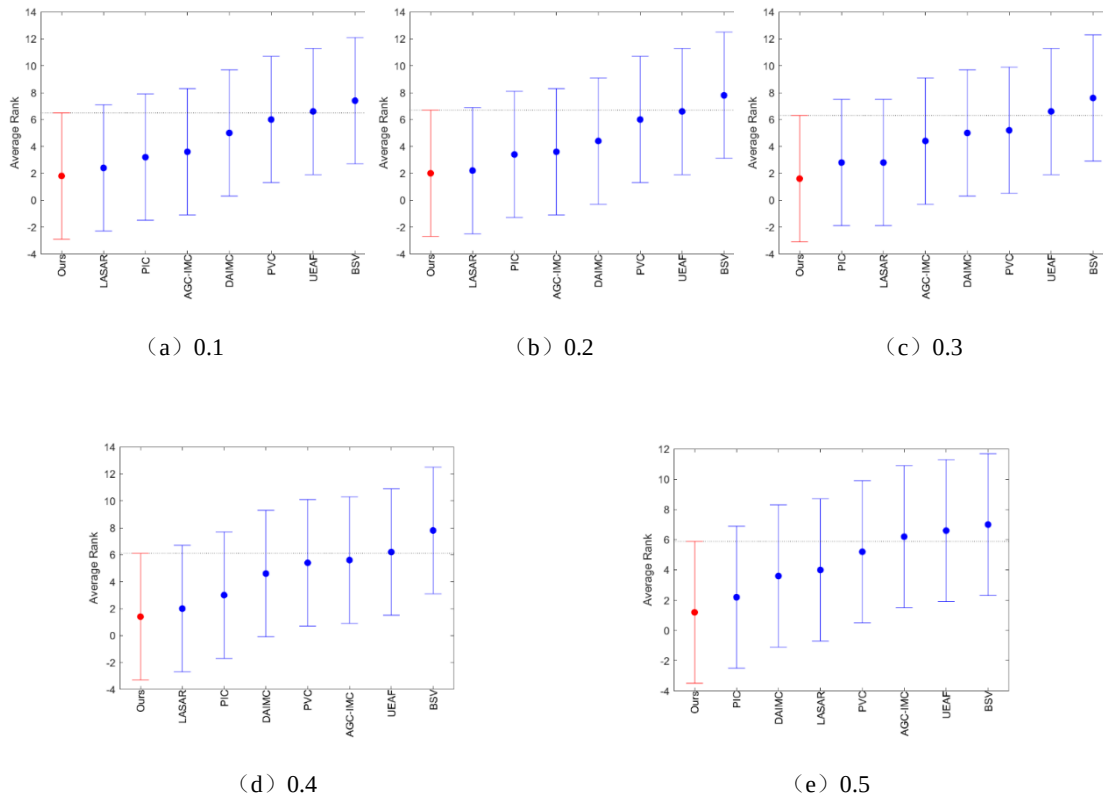


图 4-3 不同缺失率下 NMI 的 Friedman 测试图

#### 4.3.4 运行时间与复杂度比较

在本章中，表 4-5 列出了每种算法的计算复杂度，在五个数据集上记录每种算法的运行时间，并计算表 4-5 中的平均运行时间。本章所提算法具有相对较高的算法复杂度。平均运行时间最快的算法是 BSV。与其他算法相比，本章所提算法的平均运行时间适中。尽管 OIMVC/LTGL 的运行速度比一些方法（如 UEAF 和 LASAR）慢，但与它们相比，本章所提算法实现了显著的性能改进。

表 4-5 不同方法的运行时间和算法复杂度

| 算法/<br>数据集  | 运行时间（秒）      |       |           |             |               |             | 计算复杂度                                          |
|-------------|--------------|-------|-----------|-------------|---------------|-------------|------------------------------------------------|
|             | Caltec<br>h7 | ORL   | Yale<br>A | COI<br>L20  | BBC-<br>Sport | 平均运<br>行时间  |                                                |
| BSV         | 10.22        | 0.92  | 0.55      | 4.61        | 0.49          | 3.36        | $O(t \sum_{v=1}^l m_v^2 n)$                    |
| PVC         | 321.7<br>9   | 79.51 | 3.83      | 1853.<br>16 | 9.93          | 453.64      | $O(t \sum_{v=1}^l m_v n_v d + t n d^2)$        |
| DAIM<br>C   | 192.5<br>4   | 11.22 | 4.00      | 682.0<br>7  | 289.5<br>5    | 235.88      | $O(t(T n c m_{\max} + l m_{\max}^3))$          |
| PIC         | 73.43        | 1.41  | 0.54      | 26.26       | 0.39          | 20.41       | $O(l^3 n^2 k + m^3)$                           |
| UEAF        | 10.24        | 1.35  | 0.97      | 27.11       | 3.27          | 8.59        | $O\left(t(2n^3 + \sum_{v=1}^l m_v c^2)\right)$ |
| AGC-<br>IMC | 3696.<br>16  | 96.03 | 5.73      | 1374.<br>36 | 5.27          | 1035.5<br>1 | $O(t c n^2)$                                   |
| LASA<br>R   | 13.42        | 2.04  | 0.86      | 15.09       | 0.74          | 6.43        | $O(t(l n^2 \log(n) + l^2 n^2 + c n^2))$        |
| Ours        | 127.0<br>1   | 8.24  | 2.71      | 76.92       | 2.05          | 43.39       | $O(t(l n^2 \log(n) + l^2 n^2 + n^3))$          |

$t$  是迭代次数， $l$  是视图数， $n$  是样本数， $c$  是类别数， $d$  是维度， $m_{\max}$  是所有视图的最大特征维

度。

#### 4.3.5 参数敏感度分析

本章提出的方法包含四个超参数： $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \gamma$ ，参数的选择对实验结果起着至关重要的作用。在实验中， $\gamma$  始终设置为 1.3。因此在实验中，只有三个超参数

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  需要调整。图 4-4 显示了  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  对缺失率为 50% 的 BBC-Sport 数据集的影响。图 5 显示了  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  对缺失率为 30% 的 YaleA 数据集的影响。随着  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  的变化, 算法的性能也随之变化。图 4-4 和图 4-5 显示, 当设置为相对较大的值 (例如 100) 时, 模型的聚类性能表现出一定的下降。为了获得更好的聚类性能, 建议将  $\lambda_1$   $\lambda_2$  和  $\lambda_3$  分别设置在  $[0.01 \ 0.1]$ 、 $[0.001 \ 0.01]$  和  $[0.0001 \ 0.001 \ 0.01]$  范围内。

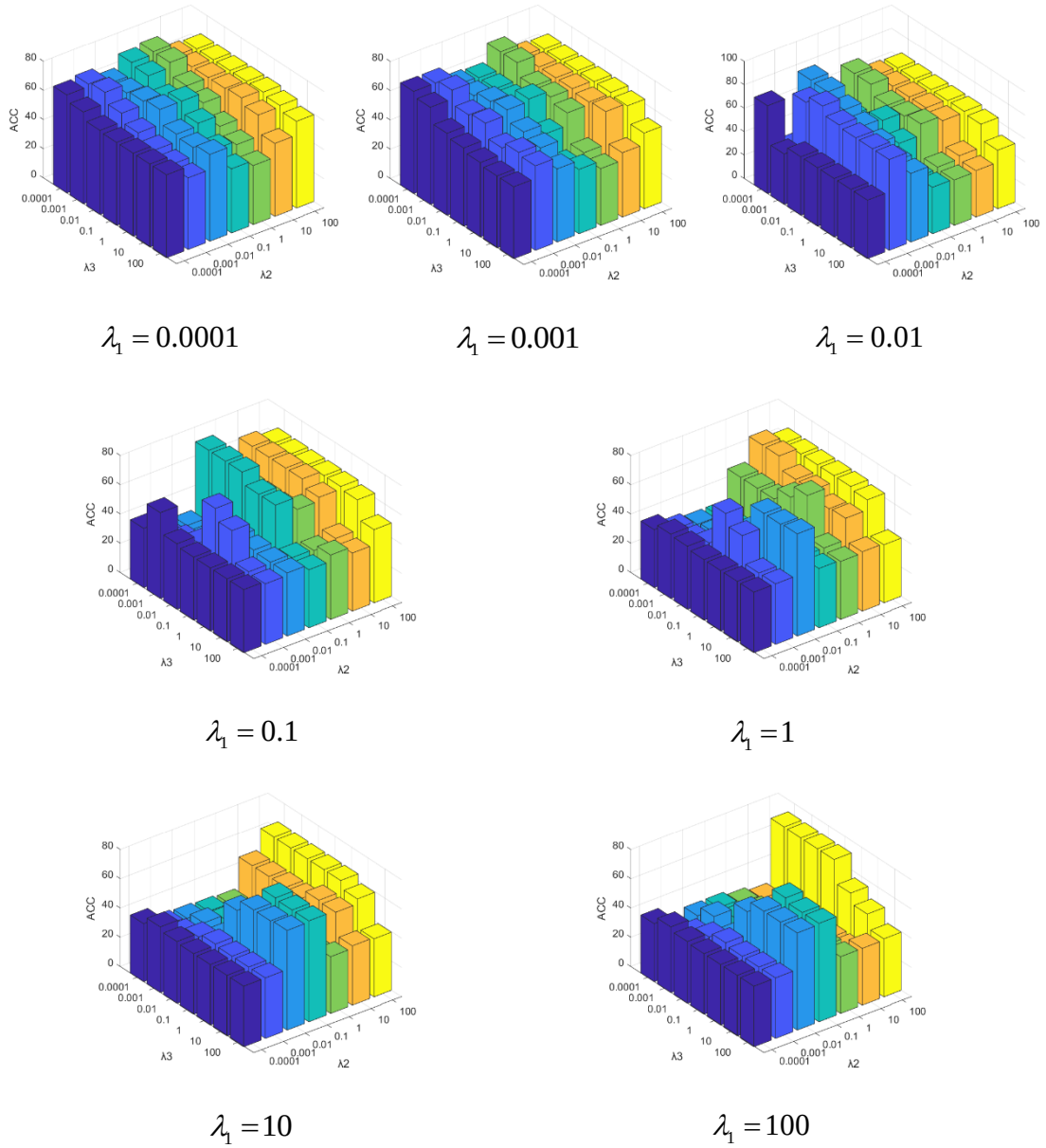


图 4-4 缺失率为 50% 的 BBC-Sport 数据集的 ACC

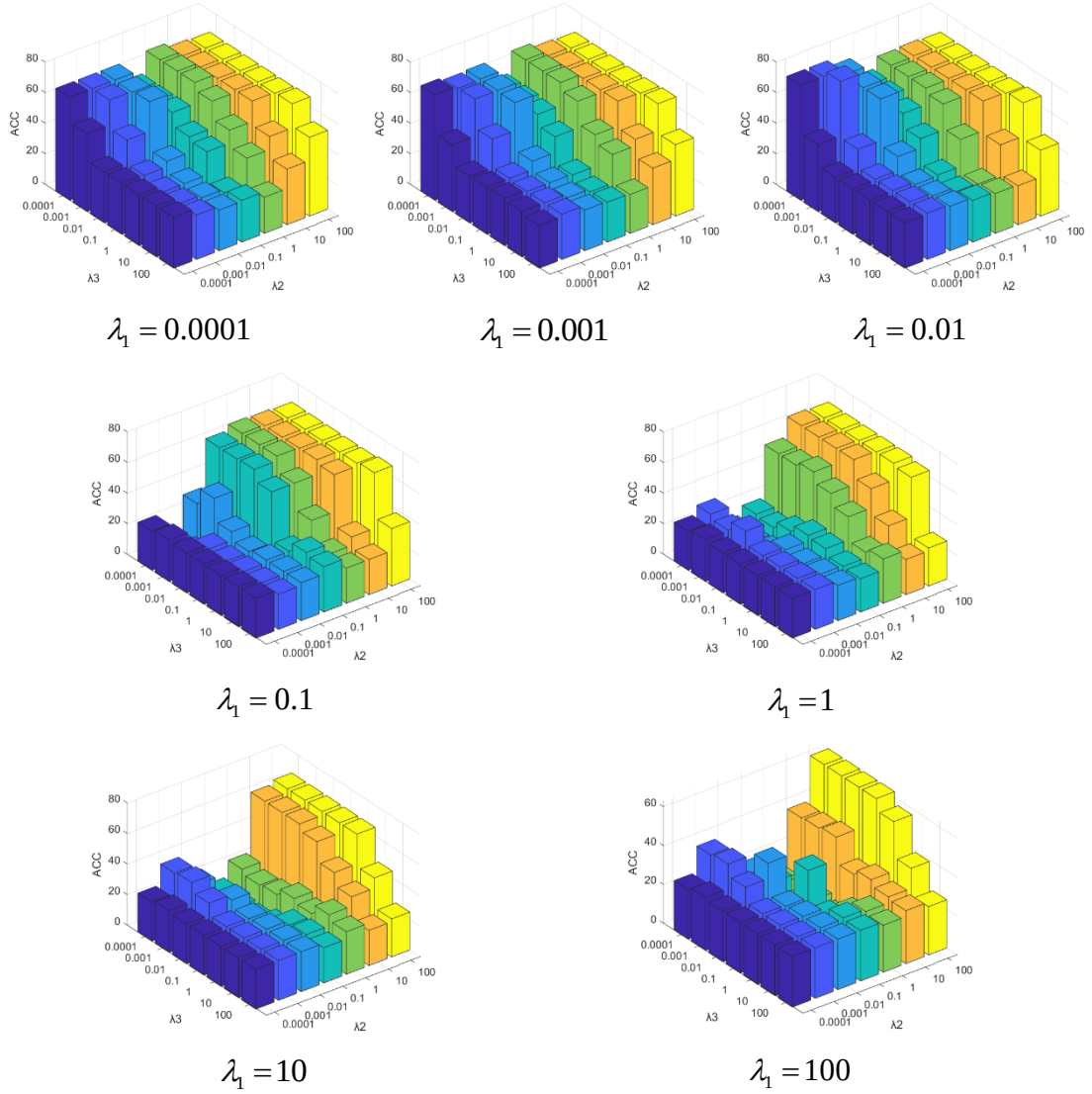


图 4-5 缺失率为 30%的 YaleA 数据集的 ACC

#### 4.3.6 消融实验

为了进一步证明 OIMVC/LTGL 的有效性，进行了消融实验。将去张量低秩约束的模型命名为退化模型 1，并将取消一步策略的模型命名为退化模型 2。表 4-6 和表 4-7 显示了 Caltech7 数据集在不同缺失率下的 ACC 和 NMI 指标的比较。值得注意的是，OIMVC/LTGL 在所有缺失率中都实现了最佳结果。这充分证明了张量低秩约束探索高阶信息的有效性和一步策略的效率。

表 4-6 Caltech7 数据集在退化模型和 OIMVC/LTGL 的 ACC

| 方法/缺失率     | 0.1   | 0.2   | 0.3   | 0.4   | 0.5   |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| OIMVC/LTGL | 87.45 | 87.11 | 87.38 | 86.57 | 87.72 |
| 退化模型 1     | 61.06 | 62.42 | 63.70 | 63.37 | 63.77 |
| 退化模型 2     | 69.2  | 69.6  | 64.72 | 63.84 | 52.99 |

表 4-7 Caltech7 数据集在退化模型和 OIMVC/LTGL 的 NMI

| 方法/缺失率     | 0.1   | 0.2   | 0.3   | 0.4   | 0.5   |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| OIMVC/LTGL | 76.9  | 75.71 | 77.39 | 74.6  | 59.09 |
| 退化模型 1     | 48.33 | 49.64 | 48.54 | 43.56 | 43.43 |
| 退化模型 2     | 62.54 | 64.02 | 53.99 | 52.61 | 49.22 |

#### 4.3.7 收敛性分析

本章提出的优化方法包含多个变量和约束。图 4-6 显示了缺失率为 50% 时五个数据集的收敛曲线。x 轴表示迭代次数，y 轴表示收敛条件值。图 4-6 显示，在有限的迭代次数中，收敛最终趋于平衡。

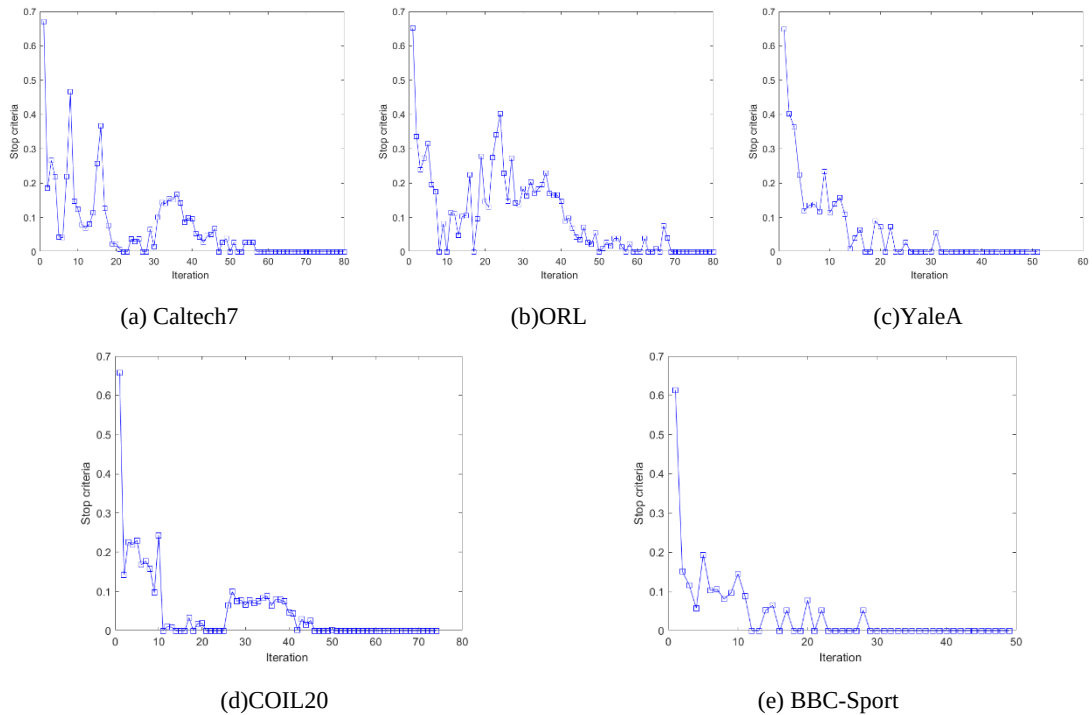


图 4-6 Caltech7, ORL, YaleA, COIL20 和 BBC-Sport 数据集的收敛曲线

#### 4.4 本章小结

本章提出了一种创新的缺失多视图聚类算法 OIMVC/LTGL，该算法将图学习、低秩张量约束、共识表示学习和聚类集成到一个框架中。OIMVC/LTGL 利用视图之间的邻接关系来实现相似图的自适应补全。与其他方法不同，该算法在共识表示矩阵中引入谱旋转，直接输出聚类标签，以获得更好的聚类结果。5 个知名数据集的实验结果充分证明了 OIMVC/LTGL 的优越性。消融实验结果进一步证明了算法的有效性。因此，融合表征学习和聚类过程的策略是否可以移植到其他算法中是一个值得研究的问题。通过对算法复杂度的分析和运行时间的比较，可以发现本章所提算法具有较高的复杂度。因此，OIMVC/LTGL 可能不适合处理大规模数据集。在未来工作中，将考虑如何使算法适用于大规模数据集，例如，通过选择锚点来降低复杂度<sup>[59,60]</sup>，还将考虑如何设计更有效的图补全策略，例如，使用样本的概率邻居来完成图或使用加权张量核范数来提高聚类性能。

## 第 5 章 基于 Schatten $p$ 范数和张量化二部图的缺失多视图聚类算法

### 5.1 引言

多视图聚类算法在处理多视图数据时表现出良好的性能,但它们假定所有视图信息都是完整的。然而,缺少视图的情况无处不在,从而产生了不完整的多视图聚类问题 (IMVC)。近年来,人们提出了许多 IMVC 算法。Li 等人提出了一种 IMVC 算法,该算法同时对两个视图进行非负矩阵分解 (NMF) 以获得潜在表示。然而,他们忽略了数据的全局结构<sup>[13]</sup>。然后,Zhao 等人提出了一种通过图拉普拉斯项考虑全局结构的方法<sup>[14]</sup>。当出现缺失数据时,第一种方法是在不考虑缺失数据的情况下对未缺失数据进行聚类,如上所述。第二种方法是补全缺失的视图,进而在完整的视图数据上进行聚类。例如,Shao 等人使用平均值来填充缺失的视图<sup>[15]</sup>。但是,这会影响数据的结构。现有的 IMVC 算法一般具有以下几种问题: 1. 计算复杂度高。2. 忽略了缺失视图对聚类结果的影响。3. 未同时考虑聚类的视图内和视图间信息。

针对上述问题,本章创新性地提出了一种基于 Schatten  $p$  范数和张量化二部图的缺失多视图聚类算法 (Scalable Incomplete Multi-view Clustering via Tensor Schatten  $p$ -norm and Tensorized Bipartite Graph, SIMVC/TSTBG)。具体来说,首先基于选定的  $m$  个锚点和已有的数据点构建二部图,将图的大小从  $n \times n$  减小到  $n \times m (m \ll n)$ ,其中  $n$  是数据样本的数量,这大大降低了计算复杂度。然后自适应地补全缺失的二部图,从而减少了缺失视图信息对聚类结果的影响。同时,为了获得干净的二部图矩阵并降低噪声,设计了误差矩阵并对其施加了  $l_1$  范数约束。为了利用视图内的信息,对每个视图的完整二部图施加了  $l_{1,2}$  范数约束。第三,张量技术在提高聚类性能方面取得了令人瞩目的成果。然而,据我们所知,目前没有将可扩展的 IMVC 方法与张量技术相结合的算法。为了探索缺失视图之间的联系并挖掘视图之间的高阶信息, SIMVC/TSTBG 将二部图拼接成一个张量,并在其上施加张量低秩约束,即张量 Schatten  $p$  范数。为确保得到的  $C^{(v)}$  有  $K$  个连

接分量, 设置  $\text{rank}(\tilde{L}^{(v)}) = n + m - K$ 。SIMVC/TSTBG 将张量化二部图、图补全和张量低秩约束结合到一个联合框架中。本章的贡献如下:

1. 据我们所知, SIMVC/TSTBG 是首次成功尝试将张量技术与可扩展的缺失视图聚类相结合的算法。

2. SIMVC/TSTBG 自适应地补全二部图, 并使用张量技术来探索视图之间的高阶相关性。SIMVC/TSTBG 同时考虑视图内和视图间的信息, 以获得更好的聚类性能。

3. 本章设计了一种高效的算法来求解 SIMVC/TSTBG。7 个数据集的聚类结果证明了 SIMVC/TSTBG 的有效性。

## 5.2 基于 Schatten p 范数和张量化二部图的缺失多视图聚类算法

### 5.2.1 SIMVC/TSTBG 模型搭建

本章主要描述了 SIMVC/TSTBG 的提出过程, 流程图如图 5-1 所示。

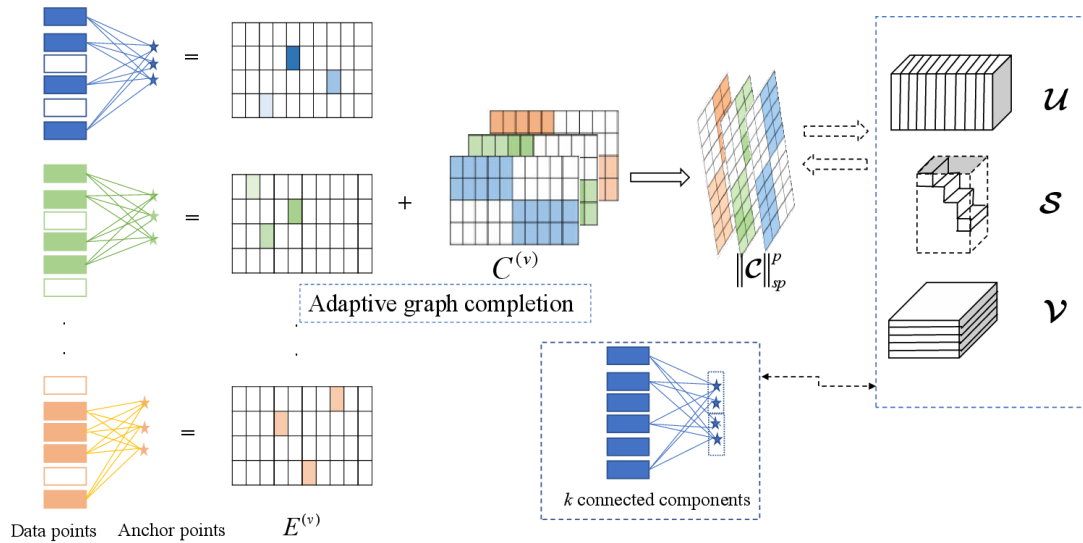


图 5-1 SIMVC/TSTBG 流程图

现有的基于图的多视图聚类方法大多直接基于  $n$  个样本点来构造相似图。构造的图大而稀疏, 有价值的信息往往存在于小部分数据点中。因此, 本章选择了一些具有代表性的样本点, 即锚点, 这些点可以很好地表达数据集的信息, 并覆盖整个数据集的结构, 以构建二部图。然后, 可以得到基于  $n$  个样本点和  $m$  个锚点的二部图  $B^{(v)} \in R^{n \times m}$ 。

在本章中，处理的对象为缺失的多视图数据（IMVD）。缺少大量数据很容易导致数据结构发生变化，从而影响最终的聚类结果。因此，定义了索引矩阵  $W^{(v)} \in R^{n \times m}$  来自适应地补全二部图。

$$W_{ij}^{(v)} = \begin{cases} 1, & \text{if } B_{ij}^{(v)} \neq 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5.1)$$

为了消除噪声，添加了一个误差项  $E^{(v)}$ ，从而得到更干净的二部图矩阵。然后，可以得到：

$$B^{(v)} \odot W^{(v)} = C^{(v)} \odot W^{(v)} + E^{(v)} \quad (5.2)$$

其中  $\odot$  表示点积。

为了获得每个视图更多的判别性信息，对二部图矩阵施加了  $l_{1,2}$  范数约束。然而，视图间的信息尚未得到很好的探索。为了探索视图之间的关系并挖掘视图之间的高阶信息，将二部图矩阵拼接成一个张量，并对其施加张量低秩约束。然后，可以得到：

$$\begin{aligned} \min_{C^{(v)}, E^{(v)}, P, \xi^{(v)}} & \|C\|_{sp}^p + \alpha \sum_{v=1}^V \|E^{(v)}\|_1 + \gamma \sum_{v=1}^V \|C^{(v)}\|_{1,2}^2 \\ \text{s.t. } & B^{(v)} \odot W^{(v)} = C^{(v)} \odot W^{(v)} + E^{(v)}, C^{(v)} \mathbf{1} = \mathbf{1}, C^{(v)} \geq 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

其中  $C \in R^{n \times V \times m}$ ， $\alpha$  和  $\gamma$  是两个平衡参数。

此外，不同的视图对聚类结果的贡献也不同。因此，设置了自适应权重以更合理地利用每个视图的信息，每个视图的初始值为  $\frac{1}{\xi^{(v)}}$ 。根据文献<sup>[36]</sup>中的定理 1，

为了确保获得的  $C^{(v)}$  有  $K$  个连接分量，设置  $\text{rank}(\tilde{L}^{(v)}) = n + m - K$ 。通过这种方式，共识图  $C = \sum_{v=1}^V \frac{C^{(v)}}{\xi^{(v)}} / \sum_{v=1}^V \frac{1}{\xi^{(v)}}$  也有  $K$  个连通分量。最终目标函数为：

$$\begin{aligned} \min_{C^{(v)}, E^{(v)}, P, \xi^{(v)}} & \|C\|_{sp}^p + \alpha \sum_{v=1}^V \|E^{(v)}\|_1 + \gamma \sum_{v=1}^V \|C^{(v)}\|_{1,2}^2 \\ \text{s.t. } & B^{(v)} \odot W^{(v)} = C^{(v)} \odot W^{(v)} + E^{(v)}, \sum_{v=1}^V \xi^{(v)} = 1, \xi^{(v)} \geq 0 \\ & \text{rank}(\tilde{L}^{(v)}) = n + m - K, C^{(v)} \mathbf{1} = \mathbf{1}, C^{(v)} \geq 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

其中  $\tilde{L}^{(v)} = I - D_{F^{(v)}}^{-\frac{1}{2}} F^{(v)} D_{F^{(v)}}^{-\frac{1}{2}}$  是  $F^{(v)} \in R^{(n+m) \times (n+m)}$  的归一化拉普拉斯矩阵,  $F^{(v)}$  定义为  $F^{(v)} = \begin{bmatrix} C^{(v)} \\ (C^{(v)})^T \end{bmatrix}$ ,  $D_{F^{(v)}}$  是对角矩阵,  $D_{F^{(v)}}(i, i) = \sum_{j=1}^{n+m} F^{(v)}(i, j)$ 。

综上所述, 首先基于选定的  $m$  个锚点构建二部图矩阵  $B^{(v)}$ 。为了获得干净的二部图矩阵  $C^{(v)}$  并降低噪声, 设计了误差矩阵  $E^{(v)}$  并对其施加了  $l_1$  范数约束, 并利用索引矩阵  $W^{(v)}$  自适应地补全缺失数据。为了挖掘视图之间的高阶信息, 将二部图  $C^{(v)}$  拼接成一个张量  $\mathcal{C}$ , 并对其施加张量低秩约束, 即张量 Schatten  $p$  范数。SIMVC/TSTBG 创新性地将张量化二部图、图补全和张量低秩约束结合到一个优化框架中。

### 5.2.2 SIMVC/TSTBG 模型求解

在本章中, 将介绍公式(5.4)的优化过程。公式(5.4)中的  $\text{rank}(\tilde{L}^{(v)}) = n + m - K$  很难直接求解, 这是一个非凸优化问题。因此, 参考文献<sup>[36]</sup>, 将公式(5.4)转换为如下等价形式。

$$\begin{aligned} \min_{C^{(v)}, E^{(v)}, P, \xi^{(v)}} & \|\mathcal{C}\|_{sp}^p + \alpha \sum_{v=1}^V \|E^{(v)}\|_1 + \gamma \sum_{v=1}^V \|C^{(v)}\|_{1,2}^2 + \beta \text{tr}(P^T \tilde{L}_C P) \\ \text{s.t. } & B^{(v)} \odot W^{(v)} = C^{(v)} \odot W^{(v)} + E^{(v)}, \sum_{v=1}^V \xi^{(v)} = 1, \xi^{(v)} \geq 0 \\ & C^{(v)} \mathbf{1} = \mathbf{1}, C^{(v)} \geq 0, P^T P = I \end{aligned} \quad (5.5)$$

其中  $P = [p_1, \dots, p_{n+m}] \in R^{(n+m) \times K}$  是共识指标矩阵,  $\tilde{L}_C = \sum_{v=1}^V \frac{1}{\xi^{(v)}} \tilde{L}^{(v)}$ ,  $\beta$  是隐藏参数。

根据  $\tilde{L}_C$  每次迭代后连接的组件数量自适应更新  $\beta$ 。首先为  $\beta$  分配一个非常小的初始值, 如果连通分量数小于  $K$ ,  $\beta$  则乘以 2, 如果数量超过  $K+1$ ,  $\beta$  则除以 2。

然后, 使用增广拉格朗日乘子法 (ALM) 交替求解每个变量。为了分离变量, 引入了中间变量  $\mathcal{J}, O^{(v)}$ 。公式(5.5)转换为:

$$\begin{aligned}
 & L(C^{(1)}, \dots, C^{(v)}, \mathcal{J}, O^{(1)}, \dots, O^{(v)}, E^{(1)}, \dots, E^{(v)}, P) \\
 &= \|\mathcal{J}\|_{sp}^p + \alpha \sum_{v=1}^V \|E^{(v)}\|_1 + \gamma \sum_{v=1}^V \|O^{(v)}\|_{1,2}^2 + \beta \text{tr}(P^T \tilde{L}_C P) \\
 &+ \sum_{v=1}^V (\langle Y_1^{(v)}, B^{(v)} \odot W^{(v)} - E^{(v)} - C^{(v)} \odot W^{(v)} \rangle \\
 &+ \sum_{v=1}^V + \frac{\mu}{2} \|B^{(v)} \odot W^{(v)} - E^{(v)} - C^{(v)} \odot W^{(v)}\|_F^2) \\
 &+ \langle \mathcal{Y}_2, \mathcal{C} - \mathcal{J} \rangle + \frac{\rho}{2} \|\mathcal{C} - \mathcal{J}\|_F^2 \\
 &+ \sum_{v=1}^V (\langle Y_3^{(v)}, C^{(v)} - O^{(v)} \rangle + \frac{\tau}{2} \|C^{(v)} - O^{(v)}\|_F^2)
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

其中  $Y_1^{(v)}$ ,  $Y_3^{(v)}$ ,  $\mathcal{Y}_2$  表示拉格朗日乘子,  $\mu$ ,  $\rho$ ,  $\tau$  是惩罚参数。

### 1. $C^{(v)}$ -子问题

保留与  $C^{(v)}$  相关的项, 可以得到:

$$\begin{aligned}
 & \min_{C^{(v)}} \langle Y_2^{(v)}, C^{(v)} - J^{(v)} \rangle + \frac{\rho}{2} \|C^{(v)} - J^{(v)}\|_F^2 + \beta \text{tr}(P^T \tilde{L}_C P) \\
 &+ \sum_{v=1}^V (\langle Y_3^{(v)}, C^{(v)} - O^{(v)} \rangle + \frac{\tau}{2} \|C^{(v)} - O^{(v)}\|_F^2) \\
 &+ \langle Y_1^{(v)}, B^{(v)} \odot W^{(v)} - E^{(v)} - C^{(v)} \odot W^{(v)} \rangle + \frac{\mu}{2} \|B^{(v)} \odot W^{(v)} - E^{(v)} - C^{(v)} \odot W^{(v)}\|_F^2 \\
 &s.t. C^{(v)} \mathbf{1} = \mathbf{1}, C^{(v)} \geq 0
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

其中  $\text{tr}(P^T \tilde{L}_C P) = \text{Constant} - 2 \sum_{v=1}^V \text{tr}(C^{(v)T} H^{(v)T})$ , 公式(5.7)可以转换为:

$$\begin{aligned}
 & \min_{C^{(v)}} \left\| \frac{\rho + \tau + \mu W^{(v)}}{2} C^{(v)} - \frac{\Lambda}{\rho + \tau + \mu W^{(v)}} \right\|_F^2 \\
 & s.t. C^{(v)} \mathbf{1} = \mathbf{1}, C^{(v)} \geq 0
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

其中

$$\begin{aligned}
 & \Lambda = \rho G^{(v)} + \mu Q^{(v)} + \tau \Upsilon^{(v)} + 2\beta H^{(v)T} \\
 & Q^{(v)} = B^{(v)} W^{(v)} - E^{(v)} W^{(v)} + \frac{1}{\mu} Y_1^{(v)} W^{(v)} \\
 & G^{(v)} = J^{(v)} - \frac{1}{\rho} Y_2^{(v)}, \quad \Upsilon^{(v)} = O^{(v)} - \frac{1}{\tau} Y_3^{(v)}
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

然后, 可以得到

$$c_i^{(v)*} = \left( \frac{\Lambda_i}{\rho + \tau + \mu W^{(v)}} + \gamma \mathbf{1} \right)_+ \quad (5.10)$$

## 2. $P$ -子问题

关于  $P$  的子问题描述如下：

$$P^* = \arg \min_{P^T P = I} \text{tr}(P^T \tilde{L}_C P) \quad (5.11)$$

$$\text{其中 } \tilde{L}_C = \sum_{v=1}^V \frac{1}{\xi^{(v)}} (I - D_{F^{(v)}}^{-\frac{1}{2}} F^{(v)} D_{F^{(v)}}^{-\frac{1}{2}})。$$

直接求解公式(5.11)的计算复杂度为  $O((n+m)^2 K)$ ，这对于大规模数据集问题效率不高。为了提高效率，需要使用高效的方法来解决这个问题。首先，通过使用简单矩阵代数，可以得到以下内容：

$$\text{tr}(P^T \tilde{L}_C P) = \sum_{v=1}^V \frac{1}{\xi^{(v)}} [\text{tr}(P^T P) - \text{tr}(P^T D_{F^{(v)}}^{-\frac{1}{2}} F^{(v)} D_{F^{(v)}}^{-\frac{1}{2}} P)] \quad (5.12)$$

因为  $P^T P = I$ ，公式(5.11) 等价于下面的最大化问题：

$$\max_{P^T P = I} \sum_{v=1}^V \frac{1}{\xi^{(v)}} \text{tr}(P^T D_{F^{(v)}}^{-\frac{1}{2}} F^{(v)} D_{F^{(v)}}^{-\frac{1}{2}} P) \quad (5.13)$$

令  $P = [P_U, P_M]^T$  和  $D_F^{(v)} = \text{diag}(D_U^{(v)}, D_M^{(v)})$ ，其中  $P_U \in R^{n \times K}$ ，是  $P$  的前  $n$  行，

$P_M \in R^{m \times K}$  是  $P$  剩余的  $m$  行。 $D_U^{(v)} \in R^{n \times P_U}$ ， $D_M^{(v)} \in R^{m \times m}$ ， $D_U^{(v)}(i, i) = \sum_{j=1}^m C^{(v)}(i, j)$ ，

$D_M^{(v)}(j, j) = \sum_{i=1}^n C^{(v)}(i, j)$ 。公式(5.13)可以表示为：

$$P^* = \arg \min_{P_U^T P_U + P_M^T P_M = I} 2\text{tr}(P_U^T W P_M) \quad (5.14)$$

$$\text{其中 } W = \sum_{v=1}^V \frac{C^{(v)} D_M^{(v)}^{-\frac{1}{2}}}{\xi^{(v)}}。$$

$P$  的最优解可以通过文献<sup>[36]</sup>中的定理 2 计算得到。

## 3. $E^{(v)}$ -子问题

关于  $E^{(v)}$  的子问题描述如下

$$E^{(v)*} = \arg \min_{E^{(v)}} \frac{\alpha}{\mu} \|E^{(v)}\|_1 + \frac{1}{2} \|E^{(v)} - \Gamma^{(v)}\|_F^2 \quad (5.15)$$

其中  $\Gamma^{(v)} = B^{(v)} \odot W^{(v)} - C^{(v)} \odot W^{(v)} + \frac{1}{\mu} Y_1^{(v)}$ .

公式(5.15)的最优解可以通过文献<sup>[61]</sup>求出。

#### 4. $\xi^{(v)}$ -子问题

关于  $\xi^{(v)}$  的子问题描述如下

$$\begin{aligned} \min_{\xi^{(v)}} \quad & \sum_{v=1}^V \frac{\text{tr}(P^T \tilde{L}_{F^{(v)}} P)}{\xi^{(v)}} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{v=1}^V \xi^{(v)} = 1, \xi^{(v)} \geq 0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

令  $\Delta^{(v)} = \sqrt{\text{tr}(P^T \tilde{L}_{F^{(v)}} P)}$ ，公式(5.16)变为

$$\begin{aligned} \min_{\xi^{(v)}} \quad & \sum_{v=1}^V \frac{\Delta^{(v)^2}}{\xi^{(v)}} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{v=1}^V \xi^{(v)} = 1, \xi^{(v)} \geq 0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

根据 Cauchy-Schwartz 不等式，可以求得关于  $\xi^{(v)}$  的解：

$$\xi^{(v)} = \frac{\Delta^{(v)}}{\sum_{v=1}^V \Delta^{(v)}} \quad (5.18)$$

#### 5. $O^{(v)}$ -子问题

保留与  $O^{(v)}$  的相关项，可以得到：

$$O^{(v)*} = \arg \min_{O^{(v)}} \frac{2\gamma}{\tau} \|O^{(v)}\|_{1,2}^2 + \frac{1}{2} \left\| O^{(v)} - \left( C^{(v)} + \frac{Y_3^{(v)}}{\tau} \right) \right\|_F^2 \quad (5.19)$$

公式(5.19)可以参考文献<sup>[62]</sup>求出。

#### 6. $\mathcal{J}$ -子问题

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}^* &= \arg \min_{\mathcal{J}} \|\mathcal{J}\|_{sp}^p + \langle \mathcal{Y}_2, \mathcal{C} - \mathcal{J} \rangle + \frac{\rho}{2} \|\mathcal{C} - \mathcal{J}\|_F^2 \\
 &= \arg \min_{\mathcal{J}} \frac{1}{\rho} \|\mathcal{J}\|_{sp}^p + \frac{1}{2} \left\| \mathcal{C} + \frac{\mathcal{Y}_2}{\rho} - \mathcal{J} \right\|_F^2
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

根据文献<sup>[36]</sup>中的定理 3,  $\mathcal{J}^*$  的最优解为:

$$\mathcal{J}^* = \Gamma_{\frac{1}{\rho}}(\mathcal{C} + \frac{\mathcal{Y}_2}{\rho}) \tag{5.21}$$

### 5.2.3 SIMVC/TSTBG 算法主要流程

SIMVC/TSTBG 的主要过程在算法 1 中描述。

---

#### 算法 1: SIMVC/TSTBG

---

**输入:** 集群数  $K$ , 锚点数  $m$ , 数据  $\{X^{(v)}\}_{v=1}^l$ , 索引矩阵  $W$

**输出:** 共识矩阵  $P$

构造二部图  $\{B^{(v)}\}_{v=1}^V \in R^{n \times m}$  (参考文献<sup>[36]</sup>)

**初始化:**  $C^{(v)} = B^{(v)}$ ,  $E^{(v)} = 0$ ,  $Y_1^{(v)} = 0$ ,  $\mathcal{Y}_2 = 0$ ,  $\mathcal{J} = 0$ ,

$\rho = 10^{-5}$ ,  $\mu = 10^{-5}$ ,  $\eta = 1.1$ ,  $\xi^{(v)} = 1/V$

**While** not converged **do**

1. 使用公式(5.10)更新  $C^{(v)}$
2. 使用公式(5.15)更新  $E^{(v)}$
3. 使用公式(5.14)更新  $P$
4. 使用公式(5.19)更新  $O^{(v)}$
5. 使用公式(5.20)更新  $\mathcal{J}$

**End**

返回聚类结果

---

### 5.2.4 SIMVC/TSTBG 算法复杂度

SIMVC/TSTBG 的计算复杂度由二部图的构造和公式(5.4)的优化两部分组成。第一步的复杂度为  $O(Vnmd + Vnm \log(m))$ , 其中  $V, n, m$  和  $K$  分别表示视图数、样本数、锚点数和集群数。第二步包括更新  $C^{(v)}, E^{(v)}, P, O^{(v)}, \mathcal{J}$ 。更新  $C^{(v)}$  和

$P$  分别需要  $O(VnmK + Vnm\log(m))$  和  $O(Vnm + m^2n)$ , 解决  $E^{(v)}$  和  $O^{(v)}$  需要  $O(Vnm)$ 。更新  $\mathcal{J}$  的成本为  $O(Vnm\log(Vn) + V^2mn)$ 。总体而言, SIMVC/TSTBG 的复杂度为  $O(m^2nt + Vnmt\log(Vn))$ , 其中  $t$  是迭代次数。一般来说  $m \ll n$ , 所以 SIMVC/TSTBG 的复杂度为  $O(m^2nt + Vnmd)$ , 与样本数  $n$  呈线性关系。

## 5.3 实验及分析

### 5.3.1 实验设置

在本章中进行了一些实验来证明 SIMVC/TSTBG 的有效性。所有实验均在配备 AMD Ryzen 7 PRO 4750U、Radeon Graphics 1.70 GHz 和 16G RAM、MATLAB 2019b (64 位) 的笔记本电脑上进行。

#### 数据集说明

在实验中使用以下七个数据集, 包括四个小型数据集和三个大型数据集, 具体信息如下。

表 5-1 七个数据集的统计信息

| Datasets      | $n$  | $V$ | $K$ | features                |
|---------------|------|-----|-----|-------------------------|
| BBCSport      | 116  | 4   | 5   | 1991/2063/2113/2158     |
| MSRC          | 210  | 6   | 7   | 1302/48/512/100/256/210 |
| ORL           | 400  | 4   | 40  | 512/59/864/254          |
| COIL20        | 1440 | 4   | 20  | 1024/944/4096/576       |
| Caltech101    | 9144 | 5   | 102 | 48/40/254/512/928       |
| Handwritten   | 2000 | 6   | 10  | 216/76/64/6/240/47      |
| Caltech101-20 | 2386 | 6   | 20  | 48/40/254/1984/512/928  |

#### 对比算法

BSV<sup>[14,15]</sup>、PIC<sup>[23]</sup> 和 AGC-IMVC<sup>[25]</sup> 的算法介绍见第三章。

IMSC-AGL<sup>[24]</sup>: IMSC\_AGL 使用自适应图学习来学习每个视图的完整图, 并获得共识表示。

TCIMC<sup>[63]</sup>: TCIMC 利用张量补全技术来构建完整的图。

FIMVC-VIA<sup>[64]</sup>: FIMVC\_VIA 学习单个视图的视图特定锚点, 并基于它们构建共识锚点图。

TBGL<sup>[36]</sup>: TBGL 将二部图拼接成一个张量, 并充分探索视图之间的信息以进行聚类。TBGL 无法直接解决缺失视图聚类问题, 因为它是为完整的多视图数据而设计的。因此, 在实验中使用可用实例的平均值来填充缺失的视图信息。

IMVC-CBG<sup>[60]</sup>: IMVC-CBG 将原始数据投射到潜在空间中, 学习共识二部图。

BSV 是多视图聚类 and 缺失多视图聚类领域最经典、最基础的对比算法。PIC、IMSC-AGL、TCIMC 和 AGC-IMVC 是经典的缺失多视图聚类方法。FIMVC-VIA 和 IMVC-CBG 是新提出的大规模数据集 IMVC 算法。TBGL 是一种高效且新提出的多视图聚类方法。

### 5.3.2 对比实验结果与分析

为了简化实验, 选择了五个缺失率为 50% 的数据集进行实验。具体来说, 从每个视图中随机删除 50% 的样本以获得不完整的数据集, 并使用准确率(ACC)、归一化互信息(NMI)、纯度(PUR)、F-score、精确率(Precision)和召回率(Recall)作为评价指标来衡量不同聚类算法的性能。对于上述所有度量值, 其值范围为[0-100]。值越高表示结果越好。公平地说, 我们将每个对比算法调整到最佳性能。重复每个实验十次以获得平均值和标准差, 如表 3-7 所示。最佳聚类性能结果以粗体标记。

(1) 与 IMVC 算法相比, BSV 算法的聚类性能较差。这是因为不同的视图描述了同一对象的不同特征, 而 IMVC 方法(即 PIC、IMSC-AGL、TCIMC、AGC-IMVC 和 FIMVC-VIA)可以利用视图之间的互补和一致信息来更好地进行聚类。但是, BSV 算法无法利用这些信息。

(2) 基于张量的 IMVC 算法, 即 SIMVC/TSTBG 和 TCIMC, 通常比其他 IMVC 算法具有更优越的性能。在 BBCSport、ORL 和 COIL20 数据集上, SIMVC/TSTBG 的聚类结果最好, TCIMC 的准确率第二或第三, 证明了张量技术的有效性。张量低秩约束可以很好地探索视图之间的高阶信息, 提高聚类性能。

(3) 在 4 个小数据集上, SIMVC/TSTBG 取得了最佳性能。在 BBCSport、ORL、MSRC 和 COIL20 数据集上, SIMVC/TSTBG 的准确率分别比次优算法高 9.57%、7.25%、24.76% 和 8.38%。SIMVC/TSTBG 之所以能取得如此优异的性能, 可能是由于 SIMVC/TSTBG 充分利用了视图内和视图间的信息, 并利用图补全技术来降低缺失视图对聚类结果的影响。

(4) 在大规模数据集 Caltech101 上, 大多数选择的对比算法都由于运行时间过长或内存不足而无法获得聚类结果。最近提出的可扩展 IMVC 算法

SIMVC/TSTBG、FIMVC-VIA 和 IMVC-CBG 在处理大规模数据集方面具有显著优势，因为它们都使用  $n \times m$  锚点图代替  $n \times n$  相似图进行聚类，大大提高了处理大规模数据集的效率。与 FIMVC-VIA 相比，SIMVC/TSTBG 在 Caltech101 数据集上的 6 个指标均远高于 FIMVC-VIA。例如，在 Caltech101 数据集上，SIMVC/TSTBG 的 ACC 比 FIMVC-VIA 高 34.25%，证明了 SIMVC/TSTBG 在处理大规模数据集时的有效性。与 IMVC-CBG 相比，所提算法在 5 个数据集的 6 个指标上也表现最好。

(5) 与 MVC 方法（即 TBGL）相比，SIMVC/TSTBG 在 5 个数据集上的所有指标中几乎都取得了最佳性能，除了 BBCSport 和 Caltech101 数据集上的召回率指标。例如，在 ORL 数据集上，SIMVC/TSTBG 的 ACC 比 TBGL 高 43.75%。TBGL 是用来解决多视图聚类问题的，不能直接处理缺失多视图数据。

表 5-2 缺失率为 50%的 BBCSport 数据集的聚类结果

| 算法        | ACC               | NMI               | PUR               | F-score           | Precision         | Recall            |
|-----------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| BSV       | 38.62±0.36        | 19.28±2.80        | 49.14±1.52        | 32.49±0.24        | 28.37±2.33        | 42.62±0.96        |
| PIC       | 77.59±0.00        | 75.03±0.00        | 88.79±0.00        | 75.83±0.00        | 78.66±0.00        | 73.21±0.00        |
| AGC-IMC   | 68.10±0.00        | 44.79±0.00        | 73.28±0.00        | 54.12±0.00        | 58.38±0.00        | 50.43±0.00        |
| TCIMC     | 82.93±0.39        | 70.14±0.72        | 85.52±0.39        | 78.34±0.67        | 81.97±0.57        | 75.02±0.75        |
| IMVC-AGL  | 71.55±3.79        | 61.28±4.79        | 80.17±3.79        | 64.38±5.24        | 68.07±5.25        | 61.08±5.27        |
| FIMVC-VIA | 69.66±0.01        | 58.02±0.02        | 79.14±0.01        | 60.70±0.01        | 61.66±0.01        | 59.78±0.02        |
| TBGL      | 30.17±0.00        | 3.65±0.00         | 32.76±0.00        | 37.35±0.00        | 23.79±0.00        | <b>86.76±0.00</b> |
| IMVC-CBG  | 67.24±0.00        | 53.72±1.78        | 75.86±0.00        | 55.22±0.00        | 55.00±0.00        | 64.08±1.39        |
| ours      | <b>92.50±0.42</b> | <b>82.76±0.66</b> | <b>92.50±0.42</b> | <b>87.93±0.60</b> | <b>90.04±0.24</b> | 85.91±0.93        |

表 5-3 缺失率为 50%的 ORL 数据集的聚类结果

| 算法        | ACC               | NMI               | PUR               | F-score           | Precision         | Recall            |
|-----------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| BSV       | 25.28±1.65        | 47.19±4.10        | 27.25±1.74        | 10.75±2.34        | 8.72±2.79         | 17.84±0.34        |
| PIC       | 72.75±0.00        | 83.61±0.00        | 75.25±0.00        | 60.93±0.00        | 57.42±0.00        | 64.89±0.00        |
| AGC-IMC   | 51.00±0.00        | 68.61±0.00        | 52.00±0.00        | 34.75±0.00        | 31.51±0.00        | 38.72±0.00        |
| TCIMC     | 71.35±0.22        | 80.26±0.45        | 74.45±0.21        | 55.05±0.94        | 49.39±1.73        | 62.23±0.90        |
| IMVC-AGL  | 68.00±1.20        | 78.07±1.17        | 69.25±1.17        | 50.27±3.82        | 44.38±5.83        | 57.94±1.46        |
| FIMVC-VIA | 61.24±0.02        | 75.15±0.01        | 63.73±0.01        | 42.86±0.02        | 38.31±0.02        | 48.66±0.02        |
| TBGL      | 36.25±0.00        | 35.81±0.00        | 37.50±0.00        | 5.74±0.00         | 3.02±0.00         | 56.94±0.00        |
| IMVC-CBG  | 47.44±1.33        | 64.56±0.90        | 51.26±1.09        | 21.77±1.73        | 14.98±1.67        | 71.73±0.88        |
| ours      | <b>80.00±3.67</b> | <b>89.86±1.42</b> | <b>82.28±3.20</b> | <b>72.80±4.05</b> | <b>71.18±4.18</b> | <b>74.49±3.98</b> |

表 5-4 缺失率为 50%的 MSRC 数据集的聚类结果

| 算法 | ACC | NMI | PUR | F-score | Precision | Recall |
|----|-----|-----|-----|---------|-----------|--------|
|----|-----|-----|-----|---------|-----------|--------|

|           |                   |                   |                   |                   |                   |                   |
|-----------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| BSV       | 35.57±2.28        | 23.93±1.62        | 36.95±1.54        | 25.95±1.09        | 22.52±1.34        | 89.00±0.00        |
| PIC       | 73.81±0.00        | 67.53±0.00        | 77.62±0.00        | 66.33±0.00        | 65.07±0.00        | 67.65±0.00        |
| AGC-IMC   | 74.29±0.00        | 58.46±0.00        | 74.29±0.00        | 56.36±0.00        | 54.91±0.00        | 57.90±0.00        |
| TCIMC     | 66.67±2.08        | 55.63±1.41        | 67.30±1.53        | 54.96±0.89        | 52.49±1.94        | 57.81±3.21        |
| IMVC-AGL  | 73.81±0.20        | 57.85±0.54        | 73.81±0.27        | 57.90±0.32        | 55.27±0.28        | 60.79±0.37        |
| FIMVC-VIA | 66.19±0.01        | 52.08±0.03        | 66.19±0.01        | 49.29±0.02        | 48.26±0.02        | 50.38±0.02        |
| TBGL      | 40.95±0.00        | 31.92±0.00        | 44.29±0.00        | 28.13±0.00        | 17.93±0.00        | 65.25±0.00        |
| IMVC-CBG  | 62.40±3.54        | 46.34±2.55        | 62.40±3.54        | 42.20±1.90        | 38.97±1.81        | 94.11±1.25        |
| ours      | <b>99.05±0.00</b> | <b>97.85±0.00</b> | <b>99.05±0.00</b> | <b>98.08±0.00</b> | <b>98.06±0.00</b> | <b>98.10±0.00</b> |

表 5-5 缺失率为 50%的 COIL20 数据集的聚类结果

| 算法        | ACC               | NMI               | PUR               | F-score           | Precision         | Recall            |
|-----------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| BSV       | 19.53±0.37        | 30.33±0.27        | 22.55±0.43        | 15.60±0.11        | 10.86±0.10        | 54.48±0.16        |
| PIC       | 77.36±0.00        | 87.06±0.00        | 80.83±0.00        | 75.23±0.00        | 71.32±0.00        | 79.58±0.00        |
| AGC-IMC   | 74.03±0.00        | 80.56±0.00        | 76.46±0.00        | 67.37±0.00        | 60.10±0.00        | 76.65±0.00        |
| TCIMC     | 73.61±0.12        | 83.32±0.54        | 77.29±0.00        | 69.88±0.96        | 63.54±0.88        | 77.63±0.30        |
| IMVC-AGL  | 62.01±2.65        | 71.65±0.97        | 66.32±1.21        | 51.45±2.00        | 45.77±3.57        | 58.73±1.51        |
| FIMVC-VIA | 70.95±0.03        | 76.39±0.01        | 73.30±0.02        | 63.55±0.02        | 62.37±0.02        | 64.77±0.01        |
| TBGL      | 39.31±0.00        | 40.99±0.00        | 42.43±0.00        | 14.71±0.00        | 8.40±0.00         | 58.91±0.00        |
| IMVC-CBG  | 59.66±0.71        | 68.24±0.43        | 61.66±0.53        | 50.10±0.68        | 46.11±0.95        | 85.65±0.89        |
| ours      | <b>85.74±0.91</b> | <b>92.48±0.25</b> | <b>89.02±0.54</b> | <b>83.50±0.88</b> | <b>77.51±1.58</b> | <b>90.50±0.08</b> |

表 5-6 缺失率为 50%的 Caltech101 数据集的聚类结果

| 算法        | ACC               | NMI               | PUR               | F-score           | Precision         | Recall            |
|-----------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| BSV       | 11.03±0.06        | 22.27±0.28        | 20.05±0.16        | 6.05±0.02         | 3.32±0.07         | 7.00±0.06         |
| PIC       | -                 | -                 | -                 | -                 | -                 | -                 |
| AGC-IMC   | -                 | -                 | -                 | -                 | -                 | -                 |
| TCIMC     | -                 | -                 | -                 | -                 | -                 | -                 |
| IMVC-AGL  | -                 | -                 | -                 | -                 | -                 | -                 |
| FIMVC-VIA | 21.63±0.01        | 40.98±0.00        | 39.57±0.01        | 16.26±0.01        | 29.48±0.02        | 11.22±0.01        |
| TBGL      | 9.41±0.00         | 2.04±0.00         | 10.13±0.00        | 5.45±0.00         | 2.80±0.00         | <b>94.77±0.00</b> |
| IMVC-CBG  | 22.32±0.72        | 35.96±0.44        | 34.76±0.37        | 12.95±1.30        | 10.55±0.96        | 76.46±1.43        |
| ours      | <b>55.88±2.03</b> | <b>82.30±0.62</b> | <b>81.05±1.23</b> | <b>41.60±1.88</b> | <b>76.10±2.99</b> | 28.63±1.36        |

“-”表示内存不足或运行时间过长，未获得聚类结果。

为了进一步验证 SIMVC/TSTBG 的有效性，选取了 Caltech101-20 和 Handwritten 两个数据集，并构建了一个缺失率为 50%的数据集，与 TBGL 进行比较。实验结果见表 5-7 和表 5-8。

实验结果表明，SIMVC/TSTBG 在处理缺失多视图数据时比 TBGL 具有显著优势，因为 SIMVC/TSTBG 可以自适应地补全缺失数据，而 TBGL 算法是用于处理完整的多视图数据。

表 5-7 缺失率为 50%的 Caltech101-20 数据集的聚类结果

| 算法   | ACC        | NMI        | PUR        | F-score    | Precision  | Recall     |
|------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| TBGL | 36.71±0.00 | 18.10±0.00 | 44.38±0.00 | 28.19±0.00 | 17.51±0.00 | 72.21±0.00 |
| ours | 72.19±3.62 | 80.52±1.79 | 93.13±0.73 | 64.03±4.23 | 94.90±1.22 | 48.42±4.52 |

表 5-8 缺失率为 50%的 Handwritten 数据集的聚类结果

| 算法   | ACC         | NMI         | PUR         | F-score     | Precision   | Recall      |
|------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| TBGL | 47.30±0.00  | 40.41±0.00  | 48.05±0.00  | 26.23±0.00  | 16.35±0.00  | 66.27±0.00  |
| ours | 100.00±0.00 | 100.00±0.00 | 100.00±0.00 | 100.00±0.00 | 100.00±0.00 | 100.00±0.00 |

### 5.3.3 运行时间与复杂度比较

表 5-9 不同算法的运行时间和计算复杂度

| 算法            | 运行时间（秒）      |         |          |            |                | 计算复杂度                             |
|---------------|--------------|---------|----------|------------|----------------|-----------------------------------|
|               | BBCSpor<br>t | OR<br>L | MSR<br>C | COIL2<br>0 | Caltech10<br>1 |                                   |
| BSV           | 1.26         | 3.36    | 1.37     | 7.18       | 1842.86        | $O(t \sum_{v=1}^V m_v^2 n)$       |
| PIC           | 0.83         | 1.01    | 0.40     | 25.47      | -              | $O(V^3 n^2 K + V^3)$              |
| AGC-<br>IMC   | 5.35         | 121.26  | 15.94    | 1118.18    | -              | $O(tn^2 K)$                       |
| TCIMC         | 6.95         | 108.99  | 23.97    | 4016.63    | -              | $O(n^3 + 2Vn^2 \log(n))$          |
| IMVC-<br>AGL  | 4.79         | 41.41   | 19.25    | 1034.17    | -              | $O(t(Kn^3 + n^3 + \sum_v n_v^3))$ |
| FIMVC<br>-VIA | 0.24         | 0.82    | 0.17     | 2.68       | 32.30          | $O(nm + nd + md)$                 |
| TBGL          | 1.78         | 21.90   | 7.06     | 609.96     | 6000.54        | $O(m^2 nt + Vnmd)$                |
| IMVC-<br>CBG  | 0.48         | 1.45    | 0.63     | 6.50       | 62.36          | $O(ndK + nmd + mdK)$              |
| Ours          | 0.46         | 3.03    | 1.80     | 31.57      | 105.84         | $O(m^2 nt + Vnmd)$                |

$t, n, V, K, n_v, m$  分别表示迭代次数、样本数、视图数、聚类数、第  $v$  个视图未缺失实例数和锚点数,  $m_v$  表示第  $v$  个视图的维度,  $d$  表示维度。

表 5-9 列出了每种算法的计算复杂度和运行时间。从表 5-9 中可以看出, 随着样本数量的增加, 大多数算法的运行时间也会增加。大多数 IMVC 算法的计算

复杂度为  $O(n^2)$  或  $O(n^3)$ ，这对于处理大规模数据集来说效率较低，而 SIMVC/TSTBG 的计算复杂度与  $n$  成线性关系。在处理大规模数据集 Caltech101 时，大多数 IMVC 方法，如 PIC、AGC-IMC、TCIMC 和 IMVC-AGL，由于时间复杂度高或内存不足而无法聚类，SIMVC/TSTBG、IMVC-CBG 和 FIMVC-VIA 表现出较高的运行效率。与 FIMVC-VIA 相比，虽然 FIMVC-VIA 的运行效率比 SIMVC/TSTBG 快，但 SIMVC/TSTBG 的聚类效果高于 FIMVC-VIA。

#### 5.3.4 模型分析

##### 参数设置

本章中有四个超参数： $\alpha$ 、 $\gamma$ 、 $\beta$  和  $p$ 。 $\alpha$ 、 $\gamma$  和  $\beta$  的设置范围为  $[0.000001, 0.00001, 0.0001, 0.001, 0.01, 0.1, 1, 10, 100]$ 。 $p$  的设置范围为  $[0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1]$ 。参数的选择对聚类结果有重要影响。固定  $p$  的值，在本章中分析了  $\alpha$ 、 $\gamma$  和  $\beta$  对聚类结果的影响。图 5-2 显示了  $\alpha$ 、 $\gamma$  和  $\beta$  对缺失率为 50% 的 MSRC 数据集的影响。如图 5-2 所示，当  $\alpha$  范围的为  $[0.000001, 0.00001, 0.0001, 0.001]$  或  $[0.01, 0.1, 1, 10, 100]$  时，SIMVC/TSTBG 的性能变化不大。这表明 SIMVC/TSTBG 对  $\alpha$  不是很敏感。当  $\gamma$  在  $[1, 10, 100]$  和  $\beta=1$  范围内时，SIMVC/TSTBG 达到最佳性能。

##### 张量 Schatten $p$ 范数的影响

$p$  的范围设置为  $[0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1]$ 。当  $p=1$  时，张量 Schatten  $p$  范数退化为张量核范数。以 MSRC 数据集为例，分析了不同  $p$  值对聚类结果的影响。如图 5-3 (a) 所示，不同的  $p$  值对聚类结果有显著影响，当  $p=0.5$  时，聚类效果最佳。因此，建议在 MSRC 数据集上将  $p$  值设置为 0.5。

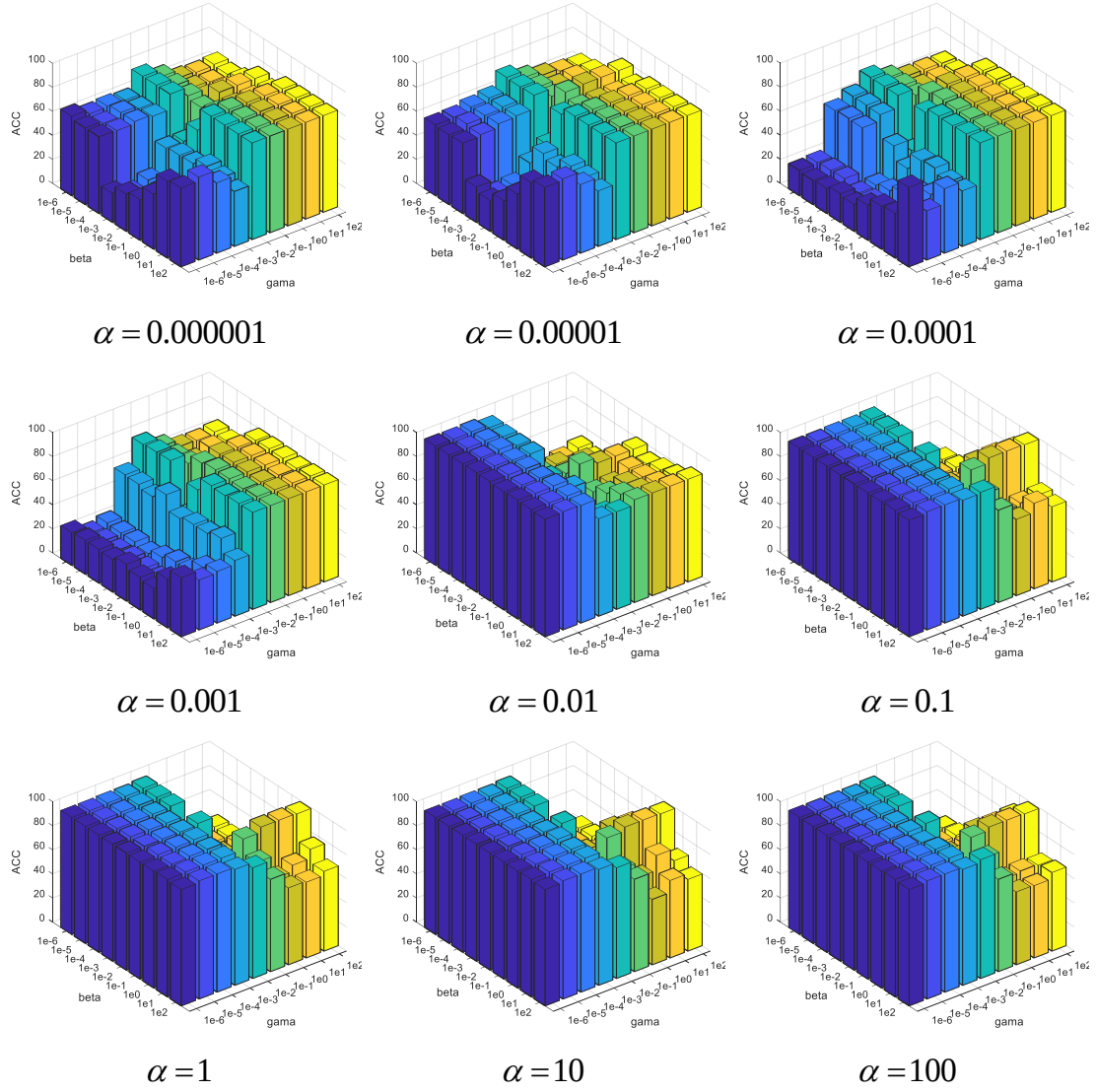


图 5-2 缺失率为 50% 的 MSRC 数据集的 ACC

### 锚点选择策略及锚点数量的影响

锚点的质量和数量对二部图的构建和聚类性能有重要影响。在本章采用基于方差的去相关锚点选择策略（VDA）选择锚点<sup>[36]</sup>。VDA 选择的锚点可以很好地表达数据的几何结构。以 MSRC 数据集为例，图 5-3（b）显示了 MSRC 数据集在不同锚点率下的 ACC 和 NMI 指标。当锚点率为 0.5 时，MSRC 数据集表现出最佳性能。从图 5-3（b）可以推断出，并不是锚点率越高，聚类效果越好。

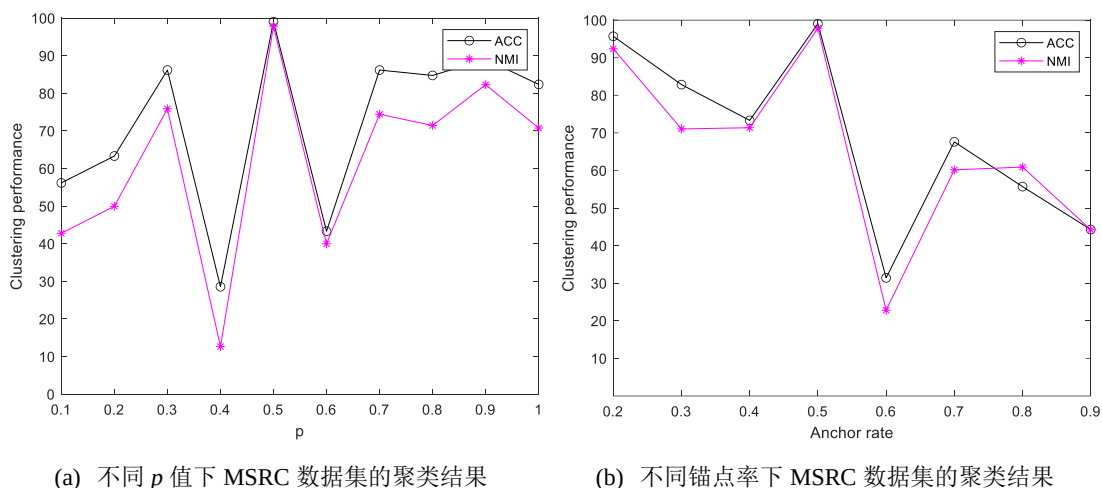


图 5-3 SIMVC/TSTBG 在缺失率为 50% 的 MSRC 数据集上的性能

## 5.4 本章小结

本章提出了一种创新的 IMVC 算法，即 SIMVC/TSTBG，该方法将张量化二部图、图补全和张量低秩约束集成到一个联合框架中。SIMVC/TSTBG 选择  $m$  个具有代表性的锚点来构建二部图，大大降低了相似图的规格。SIMVC/TSTBG 同时考虑了视图内的信息和视图间的信息，以获得更好的聚类结果。据我们所知，SIMVC/TSTBG 是第一个将张量技术与可扩展的 IMVC 方法相结合的成功实践。SIMVC/TSTBG 在 7 个数据集上取得了最佳的聚类结果，这表明 SIMVC/TSTBG 具有较高的性能。

但是，本章所提算法存在一些局限性，例如，所提算法在对比算法中运行速度不快，算法的时效性可以进一步提高。在未来工作中，将设计更高效的可扩展 IMVC 算法来解决大规模数据集，还考虑将本章想法扩展到 3D 对象，用于实际工程应用<sup>[65-67]</sup>。

## 第 6 章 总结与展望

### 6.1 工作总结

本章主要探讨在视图信息缺失情况下，如何更好的补全视图，获得较好的聚类结果，本章创新性地提出三种缺失多视图聚类算法。

首先，在第三章中提出一种基于共识隐表示的缺失多视图聚类算法，该方法利用隐表示模型动态生成缺失的视图信息，降低缺失信息对聚类结果的影响，并利用共识隐表示和低秩张量约束探索视图之间的一致性信息和高阶信息，最后通过实验数据证明所提算法有效提高了算法的聚类性能。

其次，在第四章中提出一种融合表征学习与  $k$ -means 的一步式缺失多视图聚类算法，该方法首先利用视图之间的邻接关系来补全相似图矩阵。其次，该方法将所有相似图矩阵拼接成一个三阶张量。为了挖掘不同视图之间的高阶相关性，将张量核范数施加到构造的张量上，并引入一个共识表示学习项来学习最优共识表示。OIMVC/LTGL 通过将谱旋转引入共识表示矩阵来获得最终的聚类标签，而无需谱聚类或  $k$ -means 步骤。

最后，在第五章中提出一种基于 Schatten  $p$  范数和张量化二部图的缺失多视图聚类算法，该算法首先基于选定的  $m$  个锚点和已有的数据点构建二部图，降低了相似图的规格。其次，该算法自适应地补全缺失的二部图，从而减少了缺失视图信息对聚类结果的影响。同时，为了获得干净的二部图矩阵并降低噪声，设计了误差矩阵并对其施加了  $l_1$  范数约束。该方法是首个将张量技术与可扩展的缺失多视图聚类算法相结合的成功实践，在 7 个数据集上的结果充分显示了 SIMVC/TSTBG 的高效性和有效性。

### 6.2 未来展望

尽管本文所提的缺失多视图聚类算法在聚类性能上展现出显著优势，但其在实际应用中仍面临一些局限性。具体而言，算法的计算复杂度相对较高，导致运行时间较长，这在处理大规模数据集时尤为突出。因此，针对这一挑战，未来工作将致力于设计更为高效的聚类算法，旨在降低算法的时间复杂度和空间复杂度，

从而使其能够适用于更大规模的数据集。

此外，为了进一步提升缺失数据的恢复质量和聚类的准确性，还将探索如何结合深度学习技术。深度学习，特别是自编码器和生成对抗网络（GAN），近年来在数据恢复和特征提取方面取得了显著进展。通过引入这些技术，期望能够更有效地处理缺失数据，并提升聚类算法的性能。具体来说，自编码器可以学习数据的内在表示，从而有助于恢复缺失信息；而 GAN 则能够生成与原始数据分布相似的数据，为聚类提供更为丰富的信息。

综上所述，未来的研究方向将聚焦于优化算法效率、结合深度学习技术，以及提升缺失数据的处理能力和聚类准确性，以期在缺失多视图聚类领域取得更好的成果。

## 参考文献

- [1] Ezugwu A E, Ikotun A M, Oyelade O O, et al. A comprehensive survey of clustering algorithms: State-of-the-art machine learning applications, taxonomy, challenges, and future research prospects[J]. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 2022, 110: 104743.
- [2] Fang U, Li M, Li J, et al. A Comprehensive Survey on Multi-view Clustering[J]. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 2023.
- [3] 谢德燕. 基于图学习的多视图聚类[D]. 西安电子科技大学, 2019.
- [4] Xu C, Tao D, Xu C. A survey on multi-view learning[J]. *arXiv preprint arXiv:1304.5634*, 2013: 1-59.
- [5] Chao G, Sun S, Bi J. A Survey on Multiview Clustering[J]. *IEEE Transactions on Artificial Intelligence*, 2021, 2: 146-168.
- [6] Blum A, Mitchell T. Combining labeled and unlabeled data with co-training[C]// *Proceedings of the eleventh annual Conference on Computational Learning Theory*, 1998: 92-100.
- [7] Yan K, Fang X, Xu Y, et al. Protein fold recognition based on multi-view modeling[J]. *Bioinformatics*, 2019, 35 (17): 2982-2990.
- [8] Wen J, Zhang Z, Zhang Z, et al. Generalized incomplete multiview clustering with flexible locality structure diffusion[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, 51 (1): 101-114.
- [9] Li J, Lu G, Zhang B, et al. Shared linear encoder-based multikernel gaussian process latent variable model for visual classification[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2021, 51: 534-547.
- [10] Wen J, Zhang Z, Fei L, et al. A Survey on Incomplete Multiview Clustering[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2022, 53: 1136-1149.
- [11] 董瑶, 付怡雪, 董永峰, et al. 不完整多视图聚类综述[J]. *计算机应用*: 1-13.
- [12] 王思为. 多视图特征与缺失特征聚类算法研究[D]. 国防科技大学, 2022.
- [13] Li S-Y, Jiang Y, Zhou Z-H. Partial multi-view clustering[C]// *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*, 2014: 1968-1974.
- [14] Zhao H, Liu H, Fu Y. Incomplete multi-modal visual data grouping[C]// *Proceedings of the Twenty-Fifth International Joint Conference on Artificial Intelligence*, 2016: 2392-2398.
- [15] Shao W, He L, Philip S Y. Multiple incomplete views clustering via weighted nonnegative matrix factorization with  $L_{2,1}$  regularization[C]// *Joint European Conference on Machine Learning and Knowledge Discovery in Databases*, 2015: 318-334.
- [16] Shao W, He L, Lu C-T, et al. Online multi-view clustering with incomplete views[C]// *2016 IEEE International Conference on Big Data (Big Data)*, 2016: 1012-1017.
- [17] Hu M, Chen S. Doubly aligned incomplete multi-view clustering[C]// *Proceedings*

- of the Twenty-Seventh International Joint Conference on Artificial Intelligence, 2018: 2262-2268.
- [18] Wen J, Zhang Z, Xu Y, et al. Incomplete multi-view clustering via graph regularized matrix factorization[C]//Proceedings of the European conference on computer vision (ECCV) workshops, 2018: 593-608.
- [19] Liu Z, Chen Z, Li Y, et al. IMC-NLT: Incomplete multi-view clustering by NMF and low-rank tensor[J]. Expert Systems with Applications, 2023, 221: 119742.
- [20] Zhang D-Q, Chen S-C. Clustering incomplete data using kernel-based fuzzy c-means algorithm[J]. Neural Processing Letters, 2003, 18: 155-162.
- [21] Liu X, Zhu X, Li M, et al. Late Fusion Incomplete Multi-View Clustering[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2019, 41: 2410-2423.
- [22] Liu X, Li M, Tang C, et al. Efficient and Effective Regularized Incomplete Multi-View Clustering[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2020, 43: 2634-2646.
- [23] Wang H, Zong L, Liu B, et al. Spectral Perturbation Meets Incomplete Multi-view Data[C]//Proceedings of the Twenty-Eighth International Joint Conference on Artificial Intelligence 2019: 3677-3683.
- [24] Wen J, Xu Y, Liu H. Incomplete multiview spectral clustering with adaptive graph learning[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2018, 50 (4): 1418-1429.
- [25] Wen J, Yan K, Zhang Z, et al. Adaptive Graph Completion Based Incomplete Multi-View Clustering[J]. IEEE Transactions on Multimedia, 2021, 23: 2493-2504.
- [26] Wen J, Yan K, Zhang Z, et al. Low-rank tensor graph learning based incomplete multi-view clustering[J]. Acta Automatica Sinica, 2021, 47: 1-13.
- [27] Li L, Wan Z, He H. Incomplete Multi-View Clustering With Joint Partition and Graph Learning[J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2021, 35: 589-602.
- [28] Zhao H, Ding Z, Fu Y. Multi-view clustering via deep matrix factorization[C]//Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence, 2017.
- [29] Zhang C, Cui Y, Han Z, et al. Deep partial multi-view learning[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2020, 44 (5): 2402-2415.
- [30] Wen J, Zhang Z, Xu Y, et al. Cdimc-net: Cognitive deep incomplete multi-view clustering network[C]//Proceedings of the Twenty-Ninth International Conference on International Joint Conferences on Artificial Intelligence, 2021: 3230-3236.
- [31] Lin Y, Gou Y, Liu Z, et al. COMPLETER: Incomplete multi-view clustering via contrastive prediction[C]//Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 2021: 11174-11183.
- [32] Kilmer M E, Martin C D. Factorization strategies for third-order tensors[J]. Linear Algebra and its Applications, 2011, 435 (3): 641-658.
- [33] Kilmer M E, Braman K S, Hao N, et al. Third-Order Tensors as Operators on Matrices: A Theoretical and Computational Framework with Applications in Imaging[J]. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 2013, 34: 148-172.
- [34] Zhang Z, Ely G, Aeron S, et al. Novel methods for multilinear data completion and

- de-noising based on tensor-SVD[C]//Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition,2014: 3842-3849.
- [35] Semerci O, Hao N, Kilmer M E, et al.Tensor-based formulation and nuclear norm regularization for multienergy computed tomography[J].IEEE Transactions on Image Processing,2014, 23 (4): 1678-1693.
- [36] Xia W, Gao Q, Wang Q, et al.Tensorized Bipartite Graph Learning for Multi-View Clustering[J].IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence,2022: 1-16.
- [37] Trivedi A, Rai P, Daumé Iii H, et al. Multiview clustering with incomplete views[C]//NIPS workshop,2010: 1-8.
- [38] Zhan K, Nie F, Wang J, et al.Multiview consensus graph clustering[J].IEEE Transactions on Image Processing,2018, 28 (3): 1261-1270.
- [39] Zhang C, Fu H, Hu Q, et al.Generalized Latent Multi-View Subspace Clustering[J].IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence,2020, 42: 86-99.
- [40] Liu G, Lin Z, Yan S, et al.Robust Recovery of Subspace Structures by Low-Rank Representation[J].IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence,2013, 35: 171-184.
- [41] Zhang C, Fu H, Liu S, et al. Low-rank tensor constrained multiview subspace clustering[C]//Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision,2015: 1582-1590.
- [42] Bertsekas D P. Constrained optimization and Lagrange multiplier methods[M]. Academic Press,2014.
- [43] Iliadis M, Wang H, Molina R, et al.Robust and Low-Rank Representation for Fast Face Identification With Occlusions[J].IEEE Transactions on Image Processing,2017, 26: 2203-2218.
- [44] Ren Z, Sun Q.Simultaneous Global and Local Graph Structure Preserving for Multiple Kernel Clustering[J].IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems,2021, 32: 1839-1851.
- [45] Huang J, Nie F, Huang H. A new simplex sparse learning model to measure data similarity for clustering[C]//Twenty-fourth International Joint Conference on Artificial Intelligence,2015: 3569-3575.
- [46] Gao Q, Xia W, Wan Z, et al. Tensor-SVD Based Graph Learning for Multi-View Subspace Clustering[C]//AAAI,2020: 3930-3937.
- [47] He X, Yan S, Hu Y, et al.Face recognition using laplacianfaces[J].IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence,2005, 27 (3): 328-340.
- [48] Winn J, Criminisi A, Minka T. Object categorization by learned universal visual dictionary[C]//Tenth IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV'05) Volume 1,2005: 1800-1807.
- [49] Samaria F S, Harter A C. Parameterisation of a stochastic model for human face identification[C]//Proceedings of 1994 IEEE Workshop on Applications of Computer Vision,1994: 138-142.
- [50] Van Breukelen M, Duin R P, Tax D M, et al.Handwritten digit recognition by combined classifiers[J].Kybernetika,1998, 34 (4): 381-386.

- [51] Wen J, Zhang Z, Xu Y, et al. Unified embedding alignment with missing views inferring for incomplete multi-view clustering[C]//Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence,2019: 5393-5400.
- [52] Zhao B-Y, Zhang C-Q, Chen L, et al. Generative Model For Partial Multi-view Clustering[J]. Acta Automatica Sinica,2021, 45 (08): 1867-1875.
- [53] Wen J, Zhang Z, Zhang Z, et al. Unified tensor framework for incomplete multi-view clustering and missing-view inferring[C]//Proceedings of the 35th AAAI Conference on Artificial Intelligence,2021: 10273-10281.
- [54] Zhang P, Liu X, Xiong J, et al. Consensus one-step multi-view subspace clustering[J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering,2020.
- [55] Pang Y, Xie J, Nie F, et al. Spectral clustering by joint spectral embedding and spectral rotation[J]. IEEE Transactions on Cybernetics,2018, 50 (1): 247-258.
- [56] Wu J, Lin Z, Zha H. Essential tensor learning for multi-view spectral clustering[J]. IEEE Transactions on Image Processing,2019, 28 (12): 5910-5922.
- [57] Hu W, Tao D, Zhang W, et al. The twist tensor nuclear norm for video completion[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems,2016, 28 (12): 2961-2973.
- [58] Li F-F, Rob F, Pietro P. Learning generative visual models from few training examples: An incremental bayesian approach tested on 101 object categories[C]//2004 Conference on Computer Vision and Pattern Recognition Workshop,2004: 178-178.
- [59] Yu X, Liu H, Lin Y, et al. Auto-weighted Sample-level Fusion with Anchors for Incomplete Multi-view Clustering[J]. Pattern Recognition,2022.
- [60] Wang S, Liu X, Liu L, et al. Highly-efficient incomplete large-scale multi-view clustering with consensus bipartite graph[C]//Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition,2022: 9776-9785.
- [61] Hale E T, Yin W, Zhang Y. Fixed-Point Continuation for  $\ell_1$ -Minimization: Methodology and Convergence[J]. SIAM J. Optim.,2008, 19: 1107-1130.
- [62] Ming D, Ding C. Robust Flexible Feature Selection via Exclusive  $L_{21}$  Regularization[C]//IJCAI,2019: 3158-3164.
- [63] Xia W, Gao Q, Wang Q, et al. Tensor completion-based incomplete multiview clustering[J]. IEEE Transactions on Cybernetics,2022, 52: 13635-13644.
- [64] Liu S, Liu X, Wang S, et al. Fast Incomplete Multi-view Clustering with View-independent Anchors[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems,2022: 1-12.
- [65] Liang Y, He F, Zeng X, et al. An improved loop subdivision to coordinate the smoothness and the number of faces via multi-objective optimization[J]. Integrated Computer-Aided Engineering,2022, 29 (1): 23-41.
- [66] Song Y, He F, Duan Y, et al. A kernel correlation-based approach to adaptively acquire local features for learning 3D point clouds[J]. Computer-Aided Design,2022, 146: 103196.
- [67] Wu Y, He F, Zhang D, et al. Service-oriented feature-based data exchange for cloud-based design and manufacturing[J]. IEEE Transactions on Services Computing,2015, 11 (2): 341-353.

## 攻读学位期间获得的成果

- [1] Guangyan Ji, and Gui-Fu Lu. "One-step incomplete multiview clustering with low-rank tensor graph learning." *Information Sciences* 615 (2022): 209-225. (第一作者, SCI, 中科院 1 区)
- [2] Guangyan Ji, Gui-Fu Lu, Bing Cai and Yangfan Du. "Unbalanced incomplete multi-view clustering based on low-rank tensor graph learning." *Expert Systems with Applications* 225 (2023): 120055. (第一作者, SCI, 中科院 1 区)
- [3] Guangyan Ji, Gui-Fu Lu and Bing Cai "Scalable incomplete multi-view clustering via tensor Schatten p-norm and tensorized bipartite graph." *Engineering Applications of Artificial Intelligence* 123 (2023): 106379. (第一作者, SCI, 中科院 2 区)
- [4] Guangyan Ji, and Gui-Fu Lu. "Consensus latent incomplete multi-view clustering with low-rank tensor constraint." *International Journal of Machine Learning and Cybernetics* (2023):1-13. (第一作者, SCI, 中科院 3 区)
- [5] Guangyan Ji, and Gui-Fu Lu. "A late fusion scheme for multi-graph regularized NMF." *Machine Vision and Applications* 34 (2023): 1-13. (第一作者, SCI, 中科院 4 区)

## 致 谢

时光飞逝如电，读书三载，转眼间已要划上句号，回顾求学生涯，感恩感谢遇见的每一个人。

首先，感谢我的导师卢桂馥老师，卢老师治学严谨，学识渊博。犹记得第一次语音通话时，卢老师一口“南方口音”，作为北方人的我当时还有点听不懂。入学后，在卢老师的悉心指导下走上了科研道路，初写论文，词句不通，逻辑不顺，卢老师耐心指导我修改每一句话，甚至于标点符号。论文被拒时，卢老师会安慰我不要灰心，论文接收时，卢老师会真诚祝贺我。每一篇论文的背后都离不开卢老师的辛勤教导。卢老师待人诚恳，平易近人，也会经常关心学生的生活。幸遇良师，受益匪浅，谆谆教诲，受用一生。

感谢 PRiSE 组的王勇老师在申请博士时对我的帮助，同时感谢 PRiSE 组的唐肝翌老师，李钧老师，范莉莉老师与其他老师，感谢他（她）们在我攻读硕士期间对我的关心与帮助。

感谢 712 和 715 实验室的师兄师姐，师弟师妹和同门好友们，同窗共读情难忘，友谊如水长伴行。感谢我的室友们，异乡求学，研途漫漫，我们始终关心和照顾着彼此，感情在一顿顿美食与一次次交谈中日益深厚。

感谢我的家人，一路走来无条件支持和信任我，给予我前进的勇气和动力，无论何时，你们都是我最坚强的后盾。

感谢我的人生挚友兼精神股东高雅，读研期间，你是我生活中最真诚的听众，会认真听我诉苦，耐心听我抱怨，得意时为我开心，失落时为我加油打气。量子也好，纠缠也好，我们能够感受到彼此的心意，同你分享喜悦与忧伤，让我觉得世界上有这样一个人与我同频共振。

感谢歌手李健老师，在无数次往返于宿舍，食堂，实验室的路上，耳机中的歌声陪伴着我，三点一线的枯燥生活因为你的歌声平添了几分诗意。“仿佛一束光，照亮了前方，也温暖了我；每一寸光阴，因为有了你，也多了意义。千言和万语说不尽感激，谢谢你。”

行文至此，已到终章，纵有不舍，终会离别。