

分类号: TU311.4

单位代码: 10363

密 级: 公开

学 号: 2211410101

题 目 微分求积法研究功能梯度矩形板的静动态力学特性

题 目 THE STUDY OF THE STATIC AND DYNAMIC
MECHANICAL PROPERTIES OF FUNCTIONALLY
GRADED RECTANGULAR PLATES USING THE
DIFFERENTIAL QUADRATURE METHOD

学生姓名: 刘 锋

指导教师: 葛仁余 (教授)

专 业: 应用力学与工程结构

研究方向: 计算固体力学

论文答辩日期: 2024 年 5 月 27 日

安徽工程大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：我恪守学术道德，崇尚严谨学风。所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已明确注明和引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品及成果的内容。论文为本人亲自撰写，我对所写的内容负责，并完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

学位论文作者签名：刘锋

日期：2024年5月27日

安徽工程大学学位论文版权使用授权书

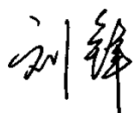
学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅或借阅。本人授权安徽工程大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保密 ☐，在 _____ 年解密后适用本版权书。

本学位论文属于

不保密 ☒。

学位论文作者签名：



指导教师签名：



日期：2024 年 5 月 27 日

日期：2024 年 5 月 27 日

微分求积法研究功能梯度矩形板的静动态力学特性

摘 要

近年来,材料组成体积分数沿某一方向逐渐变化的功能梯度材料(FGM)因其优越的力学和热学性能,在许多工程应用中受到了高度重视。作为航空航天结构的耐超高温材料,20世纪80年代中期,有学者引入了功能梯度材料概念,与传统的复合材料相比,功能梯度材料从一个表面到另一个表面,由于材料性能表现出平滑和连续的变化,因此,功能梯度材料在使用过程中可以避免开裂、分层现象、应力集中、以及残余应力,从而使工程结构完整性地保持在理想水平状态。其中,功能梯度板的静动态力学特性研究是一个重要的研究方向。本文以三维弹性理论为基础,对沿厚度方向变化的FGM矩形板在不同的板厚与板宽比值下的自由振动问题和静态力学性能进行了讨论。论文主要由以下三部分组成:

(1) 采用微分求积法(DQM),求解常微分方程组的多点边值问题。目前,求解各类常微分方程边值问题的通用方法主要有差分法、试射法、配点法和有限单元法,这些方法已得到广泛细致地研究,并相继开发一些通用程序。新近研究表明:采用微分求积法(DQM)编程序求解二维偏微分方程边值问题显露出较强的诱惑力,同时,也向微分方程多点边值问题的数值方法和软件开发提出了新挑战。论文基于微分求积法基本理论,将变系数常微分方程组多点边值问题转化为一组标准型广义代数方程组问题,利用高斯消去法中的三

角分解方法求解可获得待求的未知函数在所有离散节点上的近似解。建立了求解多个高阶边值问题的微分求积法(DQM)及程序,并将该算法用于结构动力学工程实际领域,研究微分求积法(DQM)的收敛性,数值计算的稳定性和精确性。同时,将微分求积法(DQM)作为一个通用方法,推广到求解线性混合阶常微分方程组边值问题。

(2) 针对功能梯度材料四边简支矩形厚板的自由振动问题,基于弹性力学三维弹性理论,建立了以矩形板位移分量为基本变量的一组变系数常微分特征方程组。论文将板位移分量采用双三角级数展开,将其代入控制微分方程组,采用微分求积法(DQM)将变系数常微分方程组特征值问题转化为一组标准型广义代数方程组特征值问题,最后由正交三角分解法(DQM)求解,可一次性地获得功能梯度材料四边简支矩形厚板的横向自由振动前若干阶固有频率及其相对应的模态函数。算例表明微分求积法(DQM)具有精度高、计算量少、便于使用等优点。

(3) 针对功能梯度材料四边简支矩形厚板的弯曲问题,基于三维弹性理论,本文创立了双三角级数展开的状态空间方程和微分求积法(DQM)相结合的半解析法新途径。获得了任意厚度、材料参数沿厚度方向连续变化的功能梯度材料四边简支矩形厚板三维弹性问题位移和应力场的半解析解。对于由各向同性材料以及正交各向异性材料制成的板,在采用相同的级数项数与相同载荷的情况下,微分求积法(DQM)计算值相对于状态空间法分析解更精确。本文提出的方法证明了其在解决均匀载荷下四边简支 FGM 矩形板静力学问题方

面的优越性。多个算例证明微分求积法(DQM) 对于不同的材料梯度与不同厚宽比板的位移应力问题都能给出相当精确的解, 展示了其在解决此类板的静力学问题方面的功效。此外, 本文还给出了不同材料参数下的 9 个力学量沿厚度方向的分布趋势, 可为解决均匀分布载荷下 FGM 矩形板的类似静力学问题所采用的其他方法提供参考。

关键词: 微分求积法, 四边简支, 功能梯度矩形板, 三维弹性理论, 弯曲与自由振动, 三维精确解

The study of the static and dynamic mechanical properties of functionally graded rectangular plates using the Differential Quadrature Method

ABSTRACT

In recent years, functionally graded materials (FGM), whose material composition volume fraction gradually changes along a certain direction, have received great attention in many engineering applications due to their superior mechanical and thermal properties. As an ultra-high temperature resistant material for aerospace structures, some scholars introduced the concept of functionally graded materials in the mid-1980s. Compared with traditional composite materials, functionally graded materials exhibit smooth transitions from one surface to another due to the material properties. and continuous changes, therefore, functionally graded materials can avoid cracking, delamination, stress concentration, and residual stress during use, thereby maintaining the integrity of the engineering structure at an ideal level. Among them, the study of static and dynamic mechanical properties of functionally graded plates is an important research direction. Based on the three-dimensional elastic theory, this paper discusses the free vibration problems and static mechanical properties of FGM rectangular plates that change along the thickness direction under different ratios of plate thickness and plate width. The paper mainly consists of the following three parts:

(1) Use differential quadrature method (DQM) to solve multi-point boundary value problems of ordinary differential equations. At present, the general methods for solving various types of boundary value problems of ordinary differential equations mainly include the difference method, the trial shot method, the collocation method and the finite element method. These methods have been extensively and carefully studied, and some general programs have been developed successively. Recent research shows that using differential quadrature method (DQM) to compile programs to solve boundary value problems of two-dimensional partial differential equations has shown strong temptation. At the same time, it has also proposed numerical methods and software development for multi-point boundary value problems of differential equations. new challenge. Based on the basic theory of differential quadrature method, this paper transforms the multi-point boundary value problem of a system of ordinary differential equations with variable coefficients into a set of standard generalized algebraic equations. The unknown function to be obtained can be obtained by using the trigonometric decomposition method in the Gaussian elimination method. Approximate solution at all discrete nodes. Established the differential quadrature method (DQM) and program to solve multiple high-order boundary value problems, and used the algorithm in the practical field of structural dynamics engineering to study the convergence of the differential quadrature method (DQM) and the stability

of numerical calculations accuracy and accuracy. At the same time, the differential quadrature method (DQM) is used as a general method to solve boundary value problems of linear mixed-order ordinary differential equations.

(2) Aiming at the free vibration problem of a four-sided simply supported rectangular thick plate of functionally graded material, based on the three-dimensional elasticity theory of elastic mechanics, a set of variable coefficient ordinary differential characteristic equations with the displacement component of the rectangular plate as the basic variable was established. In this paper, the plate displacement component is expanded by a double triangular series, substituted into the system of control differential equations, and the differential quadrature method (DQM) is used to transform the eigenvalue problem of a system of ordinary differential equations with variable coefficients into a set of eigenvalues of a set of standard generalized algebraic equations. The problem is finally solved by the orthogonal triangular decomposition method (DQM), which can obtain the first several natural frequencies of the transverse free vibration of the four-sided simply supported rectangular thick plate of functionally graded material and their corresponding modal functions at once. The calculation example shows that the differential quadrature method (DQM) has the advantages of high accuracy, low calculation amount, and ease of use.

(3) For the bending problem of simply supported rectangular thick plates with four sides of functionally graded materials, based on the three-dimensional elasticity theory, this paper creates a new semi-analytical method that combines the state space equation of the double triangular series expansion and the differential quadrature method (DQM). A semi-analytical solution to the displacement and stress field of the three-dimensional elastic problem of a simply supported rectangular thick plate with four sides of functionally graded material with arbitrary thickness and material parameters changing continuously along the thickness direction is obtained. For plates made of isotropic materials and orthotropic materials, when using the same number of series terms and the same load, the differential quadrature method (DQM) calculated value is more accurate than the state space method analytical solution. accurate. The method proposed in this paper proves its superiority in solving the static problem of a four-sided simply supported FGM rectangular plate under uniform load. Multiple examples have proven that the differential quadrature method (DQM) can provide quite accurate solutions to the displacement stress problems of plates with different material gradients and different thickness-to-width ratios, demonstrating its ability to solve static problems of such plates. effect. In addition, this article also gives the distribution trends of nine mechanical quantities along the thickness direction under different material parameters, which can provide a reference for other

methods used to solve similar static problems of FGM rectangular plates under uniformly distributed loads.

Keywords: Differential Quadrature Method, Simply supported on all four sides, FGM rectangular plate, Three-dimensional elasticity theory, Bending and Free Vibration, Three-dimensional exact solutions

目录

第 1 章 绪论.....	1
1.1 引言.....	1
1.2 功能梯度板的国内外研究现状.....	3
1.2.1 功能梯度板的静动态分析研究状况.....	3
1.2.2 横观各向同性板研究状况.....	6
1.2.3 正交各向异性板研究状况.....	8
1.3 本文研究的目的、意义和主要内容.....	11
1.3.1 研究目的.....	11
1.3.2 研究意义.....	11
1.3.3 研究内容.....	12
第 2 章 微分求积法求解常微分方程组多点边值问题.....	13
2.1 引言.....	13
2.2 微分求积法的基本公式.....	13
2.3 离散节点布点方式的选择.....	16
2.4 微分求积法的精度分析.....	17
2.5 本章小结.....	20
第 3 章 功能梯度材料矩形板自由振动分析.....	21
3.1 引言.....	21
3.2 功能梯度材料矩形板自由振动控制方程.....	22
3.3 算例分析.....	28
3.4 本章小结.....	43
第 4 章 功能梯度材料矩形板静力问题分析.....	44
4.1 引言.....	44
4.2 四边简支功能梯度矩形板静态控制方程.....	45
4.3 算例分析.....	49
4.4 本章小结.....	100
第 5 章 结论与展望.....	102
5.1 总结.....	102

5.2 创新点.....	102
5.3 展望.....	103
参考文献.....	104
攻读硕士学位期间发表的期刊论文.....	114
攻读硕士学位期间获奖情况.....	114
致 谢.....	115

第 1 章 绪论

1.1 引言

由于新制造技术的出现,材料科学已经预见到从传统金属向先进复合材料和智能材料的转变。在这种背景下,一种被称为功能梯度材料(Functionally Graded Material, FGM)的新型复合材料因其固有的力学性能受到了科学界的广泛关注。

尽管传统复合材料也表现出优异的性能,但它主要缺点是其分层失效,当纤维由于其独特的膨胀性能而受到高温应用时,纤维会与基体材料分离。为了克服这一缺陷,研究人员在 20 世纪 80 年代引入了一种新的复合材料,称为 FGM。这些材料也被称为先进的工程材料,因为它们能够在恶劣的环境条件下保持,而不会偏离组成材料的性能,在使用过程中减少了故障。FGM 显示了一种材料到另一种材料的组成梯度,而这在传统复合材料中会导致均匀混合物中组成材料的性能受损。成分梯度在微观结构中引入了非均匀性,这使得 FGM 在材料性能中表现出堆叠变化^[1-4]。这种新的复合材料因其具有的特殊力学性能,使其适用于各种行业,如生物医学、汽车和航空航天、建筑机械、兵器装备等。

板是工程和各种结构中普遍存在的重要组成部分,使用 FGM 复合材料制成的板对其进行力学性能分析显得至关重要。然而,由于其控制方程是一个三元偏微分方程组,因此求解变得复杂,尤其是在考虑到材料属性、几何形状、边界条件和荷载形式等多方面的复杂问题时。因此,长期以来对功能梯度材料板的力学性能分析一直是力学领域研究的难题和焦点。

在 FGM 板中,厚度维度相对于长宽维度来说较小,为了研究 FGM 板的振动和稳定性,许多学者采用了二维板块理论和三维弹性理论^[5]。二维板块理论包括经典板块理论(CLPT)、一阶剪切变形理论(FSDT)、二阶剪切变形理论(SSDT)、三阶剪切变形理论(TSDT)、高阶剪切变形理论(HSDT)、Levinson 板块理论^[6-7]等。与二维弹性理论相比,使用三维理论能够提高分析的准确性,但三维理论的计算成本相对较高,涉及复杂性较多。为应对此缺陷,引入了等效单层理论(ESL)^[8-9]。经典板块理论(CLPT)是等效单层理论(ESL)的最简形式,也被称为 Kirchhoff 理论^[10](KT),其假设板很薄,忽略横向剪切变形。然而,基尔霍夫薄板(KT)理论仅适用于薄板或薄壳结构,无法准确描述 FGM 中厚板及厚板的实际力学行为。由于经典薄板理论模型简化和排除了许多因素,它提供了一种方便的计算方法,满足了大

多数早期工程应用的精度要求，得到了广泛的使用。但随着FGM材料的发展，工程应用中一些板的厚宽比增大，薄板理论就不再满足相关精度的要求了。

等效单层理论(ESL)的下一个进阶是一阶剪切变形理论(FSDT)也被称为Reissner-Mindlin 板块理论^[11-13]，其考虑了横向剪切变形因素的影响，假设横向剪切应变在整个厚度方向上呈恒定分布，这样就可以初步分析部分中厚板的力学特性，在过去几十年也一直用于分析单向和多向功能梯度材料，这项工作标志着高阶剪切变形理论发展的开始，为后来的研究和发展奠定了基础。然而，一阶剪切变形理论(FSDT)需要引入剪切修正系数来调整板厚度上的剪切应力/应变偏离。由于剪切修正系数受到几何参数和边界条件等因素影响，使得确定它变得复杂。为解决此问题，便使用了三阶剪切/高阶剪切变形理论，它们都引入更多的参数来修正额外的变形效应，这样来计算相较其他理论则更为精确，这些理论对于一些中厚板和厚板的处理都有很高的精度。中厚板理论除了上文所提到的 FSDT 理论、TSDT 理论、HSDT 理论外，常见的还有 Sanders 板壳理论^[14]，它是经典板块理论(CLPT)的延伸，适用于中等厚度的板材，它引入了额外的参数来解释沿厚度方向的横向剪切应变的变化。Reissner-Mindlin 理论同样适用于中等厚度的板，该理论引入了新的变量来描述向剪切变形和横截面翘曲的影响。这些理论比薄板理论更加全面，通常在分析具有较大厚度的板或需要准确预测应力和变形时应用。

当板厚进一步增大(如厚宽比大于 $1/3$)，部分中厚板理论也会产生不小的误差，此时三阶剪切/高阶剪切变形理论对于此类的厚板仍然具有较高的精度。另外，Reddy 板理论^[15]基于精细的高阶位移场，计入了横向剪切变形的影响因素，适用于分析厚板，其提供的应力应变的结果依旧保持较高的准确度。Zienkiewicz-Zhu (Z-Z) 理论^[16]，该理论结合了有限元法和板理论的优点来分析厚板，常用于板结构的数值模拟。在选择厚板分析理论时，考虑板的具体特性、所需的精度水平以及可用的计算资源这三者的均衡是至关重要的，这种选择通常需要在计算效率和准确性之间做出权衡。此外，在实际工程应用中，经常采用有限元法等数值模拟方法来分析厚板的力学特性。

实际上以上各种板理论，都是为了降低三维弹性理论方程问题的求解难度，基本上都引入一些参数来简化控制方程，降低维数，即减少未知数个数来求解。其最终所得的方程与原方程并不能完全兼容，导致最终结果也只能为近似解，这与数值模拟所得的数值解有些类似。一方面，想求得三维精确解需要考虑所有弹

性参数，并满足所有的控制方程，其求解过程相当繁杂，计算量非常大，这与先前提到的计算效率与准确性的取舍相呼应。另一方面，现阶段的一些数值方法的解决方案有着很高的精确度，且其所需的时间成本远小于获得解析解的时间成本。

1.2 功能梯度板的国内外研究现状

本文主要研究了沿厚度方向变化的功能梯度矩形板的静态和动态力学特性。以下简要介绍了近年来关于不同类型功能梯度材料板的静态响应和自由振动的研究现状，以及横观各向同性材料板和正交各向异性材料板的各种形状板材的静动态分析，这些对于深入了解矩形板的静态和动态行为具有重要的参考价值。

1.2.1 功能梯度板的静动态分析研究状况

自功能梯度材料板问世以来，许多学者在给定板的不同条件下基于各种理论各种方法来研究其静动态力学特性，诸如应力应变、固有频率和临界屈曲荷载等。

在静态力学分析方面，Akavci^[17]等人通过改进的二维和准三维剪切变形理论对单层功能梯度材料(FGM)板进行了静力和模态分析。他们通过哈密顿原理推导了基本方程，并通过与现有研究结果的比较来验证其准确性，以确保所提出的理论的可靠性。Zhang^[18]等人基于比例边界有限元法和精确积分算法，提出了一种研究平面内功能梯度板中位移和应力分量分布的半解析解方法。该方法适用于对具有各种几何构型、边界条件、纵横比和梯度函数的功能梯度板进行弯曲分析。Kulkarni^[19]等人将逆三角剪切变形理论(ITSdT)扩展到功能梯度板的静态和屈曲分析中，并给出了全边简支功能梯度板的解析解。Pradhan^[20]等人在经典板理论的框架下，研究了功能梯度矩形板在各种可能边界条件下的静力分析。Thai^[21]等人提出了一种简单的功能梯度板弯曲分析的准三维理论，通过所有位移沿厚度的正弦变化来解释剪切变形和厚度拉伸效应。通过将横向位移划分为弯曲和剪切两部分，减少了该理论的未知量和控制方程，使其易于使用。Li^[22]等人提出了一种新的广义五变剪切变形理论来计算功能梯度板的静力响应。该方法的新颖之处在于假设形状参数为 m 的剪切应变函数随幂律指数变化，并根据哈密顿原理导出了控制方程和边界条件，获得了简支边界条件下 Navier 型的封闭解。Latifi^[23]等人研究了具有任意边支撑的矩形功能梯度薄板在比例双轴压缩载荷作用下的屈曲问题，并基于物理中性平面的经典板理论(CPT)推导了稳定性方程。Magouh^[24]等人基于扩展的 Stroh 类形式，阐述了电弹性单层和多层板三维静态问题的数学模型和半解析

解。所获得的数值结果表明了梯度因子、简并性和所施加的表面载荷以及激励对各种层压板的机械和电气响应的影响。李尧臣^[25]等人提出了压电功能梯度矩形板在竖向载荷作用下的近似理论与解析解。推导了板在周边简支同时又接地情况下中性层法线转角的解和用 Fourier 级数表示的电势解,证实了该方法即使在厚板情况下仍然具有很高的精度。刘涛^[26]等针对压电功能梯度板的静力学问题,建立了一种基于三阶剪切变形理论的等几何分析求解方法,推导出压电功能梯度板的相关等几何有限元方程。通过算例及相关文献对比,表明了本文求解方法的精确性和可靠性。杨智勇^[27]等人针对功能梯度材料矩形板问题,基于三维弹性理论,将位移和应力分量作为基本变量,将控制微分方程转化为常微分方程组的边值问题,并采用插值矩阵法求解,得到了功能梯度材料矩形板三维位移、应力场的半解析解。Li^[28]等提出了一种新的方法来获得时变载荷作用下层状矩形板三维粘弹性方程的解析解,以预测弯曲蠕变行为。Alinaghizadeh^[29]等人利用广义微分正交 (GDQ) 和牛顿迭代法对非线性弹性地基上变厚度双向功能梯度圆/环形扇形板的非线性弯曲进行了分析,并与文献中已有的结果进行了比较,结果非常吻合。Vafakhah^[30]等人利用位移势函数,给出了功能梯度 FGM 厚板弯曲的精确解,该解决方案适用于任何厚度不受限制的板以及所有 FGM 板。Vaghefi^[31]提出了承受热和机械载荷组合的功能梯度斜板的三维温度相关热弹塑性弯曲分析。制定并采用了一种新颖的无网格方法,该方法可以在 FGM 斜板的三维热弹塑性弯曲分析中提供高精度和稳定的结果。

在动态力学分析方面, Hosseini-Hashemi^[32]等人通过高阶剪切变形理论 (HSDT) 研究了厚矩形板的自由振动行为。他们引入了一种剪切修正因子,该因子依赖于材料的几何形状及其特性。Zaoui^[33]等人对二维和准三维剪切变形理论进行修正,以检验位于弹性地基上的 FGM 板的自由振动。所得结果与已有文献具有较好的准确性。Talha^[34]等人采用了一种改进的结构运动学方法,研究了有限元模拟功能梯度板的随机振动特性。该方法假定平面内位移呈立方变化,横向位移呈二次变化。Zhong^[35]等人采用了基于等几何分析 (IGA) 和高阶剪切变形理论 (HSDT) 的数值分析方法,研究多向变厚度函数梯度圆、椭圆和扇形板的自由振动。Jin^[36]等人提出了具有一般边界条件的任意厚功能梯度矩形板自由振动的三维精确解。Jha^[37]等人基于高阶剪切和剪切法向变形理论,给出了功能梯度弹性、矩形和简单支承板的自由振动响应。Mishra M^[38]等人采用一阶剪切变形理论 (FSDT) 和动刚

度法(DSM)对功能梯度材料 Levy 型板进行了自由振动分析。假设对于功能梯度板,密度和弹性模量沿板的横向沿幂律分布连续变化,详细讨论了材料梯度指数、宽高比、边界条件等不同板参数对频率的影响。Chen^[39]等人研究具有全局和局部几何缺陷的平面内双向功能梯度(BDFG)板在横向谐波激励下的非线性振动,数据结果表明梯度参数的变化和几何缺陷的存在改变了共振响应的非线性。胡宇达^[40]等针对陶瓷-金属功能梯度矩形板,在给出非均匀材料应力-应变关系及非线性几何方程的基础上,应用虚功原理导出了横向简谐激励力作用下功能梯度板的非线性振动偏微分方程。赵凤群^[41]等研究了切向均布随从力作用下简支功能梯度矩形板的非线性振动问题,讨论了随从力、梯度指标和边长比对板的动力特性的影响,得到了各种条件下板中心振幅与非线性基频的关系。Singh^[42]等人提出了一种基于三维弹性的复合材料功能梯度 levy 型矩形板自由振动分析的近似解析解。研究表明,材料性能的面内级配对矩形板的自由振动响应有显著影响,但影响程度在很大程度上取决于板的边缘支撑条件和结构。LomtePatil^[43]等人采用半解析方法,给出了简支功能梯度材料板的三维弹性解。将该方法与文献中可用的其他三维弹性方法进行全面比较,其所提出的半解析模型非常简单、高效且精度高。陈伟球^[44]等人采用层合模型近似模拟,结合状态空间法研究了考虑热弹性的FGM矩形板力学场等问题。Zhang^[45]等人运用精细剪切变形和应变梯度弹性理论进行研究,假定材料性能沿厚度方向随 ROM 变化,分析了弹性地基上 FGM 板的屈曲、弯曲和自由振动行为。Thai^[46]等提出了用于功能梯度板弯曲和振动分析的四种未知剪切变形理论的有限元公式,并对薄板和非常厚板进行了收敛试验和比较研究,以证明本公式的准确性。杨智勇^[47]针对功能梯度材料结构力学场问题的求解,建立了一个求解任意厚度及材料参数沿厚度方向连续变化的正交各向异性 FGM 矩形板弯曲和自由振动问题的半解析法。Van^[48]等基于高阶剪切变形理论,提出了一种新的四节点四边形板单元(MiQ4)有限元模型,用于功能梯度板的静态弯曲分析,该有限元模型具有精度高、收敛速度快的特点,尤其适用于薄板和超薄板。Maknun^[49]等人提出了一种离散剪切四边形(DSQ)单元,用于研究功能梯度材料(FGM)板结构的静态弯曲、自由振动和屈曲分析,其得到的结果是准确的,并且是最优收敛。

总体而言,上述众多学者通过各种理论或改进的理论来求功能梯度板的精确解,而以三维弹性理论本身为基准来研究的相对较少。随着近些年科学技术与计算机的飞速发展,探索准确且高效的数值计算方法成了学者们的深入研究方向。

1.2.2 横观各向同性板研究状况

横观各向同性板的研究有着重要的意义。首先,深入了解各向同性材料的力学性质对于工程设计至关重要。这种理解为工程师提供了选择合适材料以满足特定应用需求的关键信息。其次,通过研究各向同性板,能够更深入地了解材料的性能和行为,这对于新材料的开发、现有材料的改进以及结构设计的优化都具有重要意义。此外,横观各向同性板的研究在材料科学、土木工程、航空航天等领域具有广泛应用。通过深入了解这些材料的性质,可以更有效地设计和构建各种结构,提高其性能和耐久性。总体而言,横观各向同性板的研究对于推动工程技术的发展,提高材料和结构的性能具有重要的意义。基于上述原因近数十年来国内外许多学者对横观各向同性板做出了大量的静动态力学特性分析。

在静态力学分析方面,Zhou^[50]等人基于耦合应力压电理论,建立了分布载荷横向各向同性压电双层矩形微板的新模型。利用该模型,对简支双层微板的静态力学变形特性进行了研究,详细讨论了不同工况下长宽比对中心挠度的影响。Tash^[51]等人使用位移势函数提供了具有厚度变化的简支横向各向同性厚矩形板的弯曲解。结果表明,不同的厚度对横观各向同性板的弯矩和扭矩没有显著影响。Woodward^[52]等人提出了一种在横向荷载作用下,杨氏模量和剪切模量随厚度呈指数变化且泊松比恒定的单向各向同性功能最小板的三维弹性解。通过与各向同性功能梯度板的现有三维解以及经典和高阶板理论进行比较,验证了该解的准确性。He^[53]等人研究了由压磁层和压电层构成的横向各向同性多层铁质矩形板的电磁耦合效应,提出了一种新颖的方法来解决这一问题。Li^[54]等人对功能梯度压电圆板在受拉伸和弯曲作用下的三维特性进行了深入分析,采用了一种直接位移法,得到了在自由边和简支边条件下板的解析解。Yang^[55]等人基于三维弹性理论和广义 Mian & Spencer 方法,研究了由横向各向同性功能梯度材料和石墨烯纳米片(GPLs)增强的新型功能梯度纳米复合材料(GPLs)组成的夹紧椭圆板的热弹性响应,得到了热机械载荷作用下椭圆板的三维弹性解。杨博^[56]基于三维弹性理论研究了横观各向同性 FGM 板的弯曲问题。针对 Mian 和 Spencer 理论的不足。在两个方面作了推广,一是从各向同性板推广到横观各向同性板,二是不考虑板的横向荷载作用发展到受横向均布荷载作用。崔暘^[57]等利用推广后的 Main 和 Spencer 功能梯度板理论,研究了横观各向同性功能梯度简支矩形板在温度场作用下的热弹性

响应。Doumia^[58]等人分析了两层简支复合各向同性方板在分布静荷载作用下界面挠度和滑移的空间变化规律。Pagani^[59]等人研究了冯卡门理论对各向同性板的非线性变形的有效性,并进行了不同的修改,给出并讨论了每种情况下的后屈曲曲线和相关应力分布。结果显示,完整的格林-拉格朗日非线性模型可以准确地预测板的非线性行为,而其他近似方法在厚板受到较大旋转和偏转的情况下有相当大的不准确性。Hou^[60]等人基于格林函数对切向荷载作用下的横向各向同性板进行了精细化分析,并分别研究了切向点力和切向分布载荷在横向各向同性板中的应力分布。李翔宇^[61]研究了横观各向同性 FGM 轴对称结构(圆板和环板)的静力问题。在分析中将实心圆板的应力函数(或位移)展开成径向坐标的幂级数,其系数为厚度方向坐标的函数,并通过巧妙的逐次积分,导出了解析形式的解。Abali^[62]等人采用分析与计算相结合的方法,研究了各向同性功能梯度板在点荷载作用下的三维弹性变形。研究表明,通过使用基于等效应力测量的后验误差估计,即使在点荷载附近也可以获得准确的结果。Gandhe^[63]等人提出一种理论来描述板的正确热荷载响应以及剪切变形效应,该理论不需要引入剪切修正系数。将各向同性板在热荷载作用下的弯曲分析结果与其他理论的进行了比较,验证了本理论的准确性。Moslemi^[64]等人给出了横向各向同性矩形厚简支板在单轴或双轴均布面内载荷作用下的弹性屈曲问题的解析解,该解适用于任何厚度比不受限制的板,也适用于任何在板的各个方向上具有相同的面内力学性能的复合材料板。

在动态力学分析方面,Mahi^[65]等人提出了一种新的双曲剪切变形理论,适用于各向同性、功能梯度、夹层和层状复合板的弯曲和自由振动分析。Yang^[66]等人利用薄板大挠度理论,提出了一种确定边缘受弹性约束的矩形横向各向同性加筋板面内冲击动态弹性屈曲行为的解析方法。将该方法预测动力响应结果与文献和有限元结果进行了比较,结果吻合较好。Pradhan^[67]等人提出了四种新的反三角剪切变形理论,研究了各向同性厚矩形板在不同边界条件下的自由振动特性。Park^[68]等人提出了一种考虑面内旋转的双变量一阶剪切变形理论(S-FSDT),用于各向同性板的弯曲、屈曲和自由振动分析。传统 FSDT 和 S-FSDT 各项数值计算结果有高度的吻合,证明了 S-FSDT 面内旋转对各向同性板静动态分析预测的准确性。Thai^[69]等人基于修正应变梯度理论,提出了一种基于尺寸的四未知剪切变形模型,用于各向同性和夹层功能梯度微板的静态弯曲、自由振动和屈曲分析。Motamedi^[70]等人基于 Trefftz 方法的背景下,开发了一种新的无网格局部方法,以

解决任意形状的薄层复合板和各向同性的屈曲和自由振动相关的特征值问题。Gupta^[71]等人提出了一个解析模型，用于对可变厚度、薄各向同性和功能梯度的矩形微板进行非线性振动分析，该微板包含位于板中心线内的部分裂纹。Thai^[72]等人提出了一种广义剪切变形理论，用于各向同性和夹层板的功能梯度材料的静态、动态和屈曲分析。陈伟球^[73]等人研究了沿厚度方向材料参数为非均匀的功能梯度横观各向同性矩形板的自由振动。Neves^[74]等人推导了一种高阶剪切变形理论，用于模拟考虑沿厚度方向变化的功能梯度各向同性板，通过功能梯度各向同性板和功能梯度夹芯板的各项静动态分析的数值结果，得出该方法具有较高的效率。Nguyen^[75]等人针对各向同性和功能梯度夹层板的静力、屈曲和自由振动分析，提出了一种新的反三角剪切变形理论。它考虑了横向剪切应力的反三角分布，并满足无牵引边界条件，所得到的预测结果与现有剪切变形理论的可用解吻合较好，证明了所提理论的准确性。

上述横观各向同性板的研究中，学者们通过提出各种改进的理论或搭建新的模型来求得各向同性板静动态精确解，一些学者根据板厚度的不同情况使用了不同的剪切理论来求解析解。但随着计算机算力的发展，更多的学者选择以高阶剪切理论为基础，使用各种有限元方法求得数值解，这已然逐渐成为了一种趋势。

1.2.3 正交各向异性板研究状况

正交各向异性板的研究同样具有重要意义。正交各向异性板是一种具有不同材料方向性的板材，其力学性质在不同方向上有所不同。了解正交各向异性板的性质有助于工程师在结构设计中更好地利用材料的异性特性，有助于选择合适的材料，以满足特定方向上的性能需求。通过优化材料的方向性，可以设计出更轻、更强、更耐久的结构，这对于开发新材料或者调整现有材料的组合非常重要。此外正交各向异性板在仿生设计、航空航天和汽车工业等行业也有重要的作用。在工程制造中，结构轻量化是一个重要的目标，正交各向异性材料的研究可以帮助设计更轻但更强的部件。总体而言，正交各向异性板的研究有助于推动材料科学和工程领域的发展，为各种应用提供更高效、更创新的解决方案。正因为正交各向异性板的广阔应用前景，国内外许多学者对其各种形状、不同环境与边界条件下的力学性能展开了大量的分析与研究。

在静态力学特性分析方面，Lü^[76]等人通过微分求积法给出了正交各向异性多

向功能梯度板的半解析三维弹性解。材料特性沿平面内和厚度方向变化,遵循指数规律模型,并与单向功能梯度板的精确解进行了比较,有很高的吻合度。He^[77]等人给出了具有旋转约束边和自由边的正交各向异性矩形薄板弯曲问题的广义积分变换解,将得到的数值结果与已有的解析解和有限元解进行比较,显示所得解收敛速度快,精度高。Lopatin^[78]等人用里兹法研究了弹性正交各向异性基础上横向位移随厚度非线性变化的正交各向异性复合板的屈曲行为,与传统的模型相比,其开发的基础变形模型能够更准确地计算临界荷载。Li^[79]等人基于 Reissner 板理论,研究了功能梯度正交各向异性简支夹板在横向分布荷载作用下的弯曲力学性能。将结果与具有各向同性的方形夹板的弹性解和有限元解进行比较,验证了方案的有效性。Chinnaboon^[80]等人提出一种基于粘弹性地基的正交各向异性板块的解析模型,该模型使用分数阶导数 Kelvin-Voigt 模型,分数阶导数的加入提高了模型预测粘弹性响应的准确性。Belardi^[81]等人从位移和应力场确定的角度研究具有直线正交性的复合材料扇形板的线弹性行为。Mohammadi^[82]等人利用非局域弹性理论研究了正交各向异性单层石墨烯片纳米板在热环境下的剪切屈曲行为。并采用 DQM 方法,得到了临界剪切屈曲荷载的数值解。Mansouri^[83]等人研究了非均质、正交各向异性和负泊松比材料在弹性 Winkler-Pasternak 弹性介质上的一般四边形板的热屈曲。综合分析了一般四边形板的倾斜角、非均质指数、正交各向异性角、边界条件、基础刚度和材料的非均质性对屈曲温升的影响。Naderi^[84]等人提出了一种通过考虑预屈曲变形来求解厚正交各向异性板临界屈曲应力的准确方法。将得到的板的精确临界屈曲应力与忽略预屈曲变形得到的临界屈曲应力进行了比较。结果表明,预屈曲变形对临界屈曲应力有显著影响。Belardi^[85]等人对横向载荷剪切变形直线正交各向异性复合环形板的弹性弯曲进行了研究分析,并基于虚拟位移原理的应用,在编写满足边界条件的位移场近似函数后,根据 Ritz 方法进行求解。其解析解结果与有限元数值解有很高的吻合度。Alam^[86]等人给出了热载荷作用下非局部正交各向异性板临界温度和非线性临界后温度-挠度行为的封闭解析解,并以数值方式说明了临界状态下的行为。Gao^[87]等人提出一种考虑热环境下汞阻尼效应的 Winkler-Pasternak 弹性地基偏心复合正交各向异性板在不同轴向速度作用下的非线性动力特性和稳定性的解析计算方案。

在动态力学特性分析方面, Huang^[88]等人提出了具有一般边界条件的正交各向异性平面内功能梯度(IPFG)板弯曲和自由振动分析的切比雪夫谱方法。将计算

结果与已有文献解和有限元解进行了比较,证明了切比雪夫光谱法对正交各向异性 IPFG 板的静态和动态分析是有效的。Singh^[89]等人提出了一种精确的三维弹性和粘弹性自由振动公式,用于与压电感觉层集成的层内功能梯度正交各向异性板,将位移、应力和电变量作为保证逐点层间连续性和机电支撑条件的主要变量来进行求解。Joshi^[90]等人提出了一个解析模型,用于对位于中心处的内部裂纹的薄正交各向异性板和一般功能梯度矩形板进行振动分析。胡宇达^[91]等人研究了轴向运动正交各向异性条形薄板在线载荷作用下的超谐波共振问题。Haciyev^[92]等人对基于双参数弹性地基的双指数级变正交各向异性板块的振动进行了深入研究,特别关注了材料梯度、正交各向异性以及双参数弹性地基对振动频率参数的影响,并将当前的研究结果与以往的研究进行了对比验证,有较高的吻合度。Zhang^[93]等人利用广义积分变换技术获得了正交各向异性矩形薄板的解析自由振动解,通过与现有分析解的比较,验证了所得结果的一致性。胡君逸^[94]等人对热环境下正交各向异性板的固有特性和激励响应进行了研究。通过实验测试和数值计算,分析了在不同温度下固有频率的变化规律,模态交换或突跳现象,以及激励作用下响应如何受温度的影响。Gupta^[95]等人采用数值方法研究了线性变厚度非均匀正交各向异性梯形板振动的热效应。Yang^[96]等人在重新修正的耦合应力理论的基础上,通过引入两个材料长度尺度参数,并且同时考虑了宏观和微观各向异性,提出了正交各向异性功能梯度微板自由振动和屈曲分析的微观结构相关模型。Yin^[97]等人基于三维线弹性理论,提出了缩放边界有限元法求解功能梯度压电板的位移、电势、临界屈曲载荷和屈曲模式的求解。通过对数值算例与参考解的比较,结果表明该分析具有较好的精度和快速收敛性。Xing^[98]等人提出了一种新的变量分离方法,用于求解具有简单支撑和夹紧边界条件的所有组合的薄正交各向异性矩形板自由振动的精确解,并在数学上证明了精确解的正确性。Fan^[99]等人基于哈密顿量的解析方法获得了位于粘弹性地基上的完全自由正交各向异性矩形纳米板受迫振动的精确解。通过数值算例的对比研究,验证了所提方法的有效性和准确性。Thai^[100]等人基于双变量精化板理论,得到了正交各向异性板自由振动分析的 Levy 型解。Battaglia^[101]等人提出了一种在各种边界条件下基于振动数据识别任意形状正交各向异性板力学参数的新方法。该方法采用方便的 Rayleigh-Ritz 方法和粒子群优化的组合,以直接的方式估计正交各向异性材料的弹性常数,而不需要计算要求高的迭代有限元分析。

上述对正交各向异性板的研究中，学者们依然通过提出各种改进的理论方法来求得正交各向异性板静动态精确解。鉴于求得精确解所需的计算效率与准确性，越来越多的学者以这些方法理论为基础，利用各种数值方法获得数值解，包括有限元法(FEM)、微分求积法(DQM)、插值矩阵法(IMMS)等。

1.3 本文研究的目的、意义和主要内容

1.3.1 研究目的

由前文可知，现阶段各种数值方法在求解板的静动态问题上具有非常明显的优势，本文致力于运用微分求积法来分析FGM矩形板的弯曲与自由振动问题，基于三维线弹性基本理论，采用双三角级数展开将四边简支FGM矩形板三维弹性静动态响应的偏微分方程组转化为求解常微分方程组特征值问题，结合边界条件式采用微分求积法在 FORTRAN 中编译求解得到该常微分方程组特征值。本文微分求积法(DQM)可以准确的计算材料参数沿厚度 z 方向变化的任意幂律模型形式的横观各向同性与正交各向异性FGM矩形板的静动态力学响应，具有处理过程简单清晰、计算结果精度高、计算收敛快的优势。

1.3.2 研究意义

针对功能梯度材料板结构各种静动态响应的力学性能分析，现有文献大多主要采用固有形式的功能梯度材料参数变化形式来研究薄板或中厚板，并且以三维线弹性理论为基本理论的不多。状态空间法需要结合层分的方法，要想得到高精度解需要划分更多的层分与子单元，其计算量较大，所需计算时间成本与计算精度没有达到均衡；插值矩阵法在进行差值或近似时，可能会引入数值误差，并且这些误差可能在计算过程中逐步累积，影响最终结果的准确性，其性能也会受到节点分布的影响，如果节点分布不均匀或者不合适，可能导致插值结果的不稳定。本文提出微分求积法来求解 FGM 矩形板的静力与自由振动问题，由于 DQM 方法对于一些复杂的力学问题自身具有较好的稳定性，其得到的位移应力与固有频率解 精度高，收敛快。此外，DQM 方法可以不断调整步长以更好地适应问题的特性，提高计算效率。

1.3.3 研究内容

围绕现阶段数值方法在力学领域中的研究与应用,采用微分求积法来求解四边简支功能梯度材料矩形板的静动态问题,在前人的研究基础上,从原始的三维弹性力学基本方程出发,将三个主方向上的位移分量作为变量,采用双三角级数展开,得到最后的常微分控制方程组及其边界条件式,得到相应矩形板静动态问题的三维精确解。

全文共分五章,主要研究内容如下:

第一章,简要阐述了各种板理论及其发展,综述了近些年国内外关于功能梯度材料板的研究现状,阐明了本文的研究目的、意义以及主要任务。

第二章,简单介绍了微分求积法的基本原理及应用

第三章,针对四边简支 FGM 矩形板的动态自由振动问题,基于三维弹性力学理论,采用双三角级数展开,给出了最终的控制方程及边界条件式,采用微分求积法,使用 FORTRAN 编译求解得到三维精确解的固有频率;并通过 2 个算例检验了 DQM 方法的准确性与有效性,此外,还根据上述 2 个算例给出了不同变量下的固有频率分布趋势,以供其它方法的参考。

第四章,针对四边简支 FGM 矩形板上表面受均布荷载作用的静态力学问题,基于三维弹性力学理论,采用双三角级数展开,给出了最终的控制方程及边界条件式,基于微分求积法的两点边值,使用 FORTRAN 编译求解得到三维精确解的位移与应力;通过 5 个算例检验了 DQM 方法的准确性与有效性,此外,还根据上述 5 个算例给出了不同参数条件下的 9 个位移应力沿厚度 z 方向的分布规律,可作为其他方法的参考解。

第五章,对 DQM 方法求解四边简支 FGM 矩形板进行总结;针对本文研究内容的不足,对进一步的研究工作做出展望。

第 2 章 微分求积法求解常微分方程组多点边值问题

2.1 引言

微分求积法是一种用于初始或边界问题的数值求解计算技术。它是由 Bellman^[102]等人在 70 年代初开发的,从那时起,该技术已成功应用于工程和物理科学的各类复杂的力学问题,例如对工程结构中各种复杂几何形状和边界条件的梁、板壳体等结构进行应力应变分析、振动分析。该方法同样被用于有限差分法和有限元法等传统数值求解计算方法的潜在替代,在求解工程邻域中所遇到的复杂微分方程组时可提供高精度、灵活性和计算效率。王永亮^[103]探讨了微分求积法应用过程中边界条件处理方法和节点分布对结果的影响规律,通过推导和应用板的非线性问题边缘约束的通用公式,展示了微分求积法所具有的部分半解析法的特点。葛仁余^[104]等提出了一种改进型等比数列布点方式研究轴向功能梯度 Timoshenko 变截面梁的屈曲临界荷载。基于 Timoshenko 梁理论,建立了求解功能梯度材料 Timoshenko 变截面梁屈曲临界荷载的变系数常微分方程,由微分求积法理论将其转化为标准型的广义代数特征值问题。

微分求积法(DQM)具有公式简单、编程方便、计算量少和精度高等优点而广泛应用于工程结构的动力学特性分析研究中,本章进一步研究微分求积法解决常微分方程组的多点边值问题。

2.2 微分求积法的基本公式

一组一般的线性常微分方程组多点边值问题如下:

$$\sum_{k=1}^r \sum_{j=0}^{m_k} g_{ikj}(x) y_k^{(j)}(x) = f_i(x), \quad i=1,2,\dots,r, \quad x \in [a,b] \quad (2-1)$$

相应多点边值条件为:

$$\sum_{k=1}^r \sum_{j=0}^{m_k-1} \alpha_{lkj} y_k^{(j)}(\xi_{lkj}) = \gamma_l, \quad l=1,2,\dots,t, \quad a \leq \xi_{lkj} \leq b \quad (2-2)$$

这里, $g_{ikj}(x)$ 是求解区间 $[a,b]$ 上连续解析函数, $\alpha_{lkj}, \gamma_l, \xi_{lkj}$ 是实常数,

$t = \sum_{k=1}^r m_k$ 。如果 $f_i(x)$ 和 γ_l 等于零或不等于零,微分方程组中式(2-1)和(2-2)构

成了常微分方程组多点边值问题。

本章将求解区间 $[a, b]$ 分划为 n 个离散单元, $n+1$ 个离散节点, 其中, $x_0 = a, x_n = b$ 。微分求积法的最关键问题就是权系数的确定。首先, 将函数 $y_k(x)$ 用离散节点函数值进行拉格朗日(Lagrange)插值来描述, 即

$$y_k(x) = \sum_{j=0}^n L_j(x) y_k(x_j) \quad (2-3)$$

式(2-3)中 $L_j(x)$ 为拉格朗日多项式, 其形式为:

$$L_j(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k} \quad (2-4)$$

由式(2-4)对函数 $y_k(x)$ 求一阶导数, 得到:

$$y_k^{(1)}(x) = \sum_{j=0}^n L_j'(x) y_k(x_j) \quad (2-5)$$

将式(2-5)在 n 段区间 $[a, b]$ 上离散, 从而进一步得到:

$$y_k^{(1)}(x) = \sum_{j=0}^n L_j'(x_j) y_k(x_j) \quad (2-6)$$

将式(2-6)写成向量和矩阵形式, 得:

$$\begin{bmatrix} y_k^{(1)}(x_0) \\ y_k^{(1)}(x_1) \\ \vdots \\ y_k^{(1)}(x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{00}^{(1)} & A_{01}^{(1)} & \cdots & A_{0n}^{(1)} \\ A_{10}^{(1)} & A_{11}^{(1)} & \cdots & A_{1n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n0}^{(1)} & A_{n1}^{(1)} & \cdots & A_{nn}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_k^{(0)}(x_0) \\ y_k^{(0)}(x_1) \\ \vdots \\ y_k^{(0)}(x_n) \end{bmatrix} \quad (2-7)$$

其中, $A_{ij}^{(1)}$ 显示表达式为:

$$A_{ij}^{(1)} = l_j'(x_i) = \begin{cases} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i, j}}^n (x_i - x_k) / \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n (x_j - x_k) & (i \neq j) \\ \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{1}{(x_i - x_k)} & (i = j) \end{cases} \quad (2-8)$$

高阶导数顺次地采用低阶导替换, 逐步递推可得:

$$\begin{Bmatrix} y_k^{(r)}(x_0) \\ y_k^{(r)}(x_1) \\ \vdots \\ y_k^{(r)}(x_n) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{00}^{(r)} & A_{01}^{(r)} & \cdots & A_{0n}^{(r)} \\ A_{10}^{(r)} & A_{11}^{(r)} & \cdots & A_{1n}^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n0}^{(r)} & A_{n1}^{(r)} & \cdots & A_{nn}^{(r)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_k^{(0)}(x_0) \\ y_k^{(0)}(x_1) \\ \vdots \\ y_k^{(0)}(x_n) \end{Bmatrix} \quad (2-9)$$

这里, $A^{(r)} = \begin{bmatrix} A_{00}^{(r)} & A_{01}^{(r)} & \cdots & A_{0n}^{(r)} \\ A_{10}^{(r)} & A_{11}^{(r)} & \cdots & A_{1n}^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n0}^{(r)} & A_{n1}^{(r)} & \cdots & A_{nn}^{(r)} \end{bmatrix}$ 称为权系数矩阵。

其中, 权系数矩阵 $A^{(r)}$ 的各阶导数之间的关系为:

$$A^{(r+1)} = A^{(1)} A^{(r)} = A^{(r)} A^{(1)} \quad (r \geq 1) \quad (2-10)$$

将式(2-7)和(2-9)代入式(2-1), 控制方程写成向量形式, 得:

$$\sum_{k=1}^r \sum_{j=0}^{m_k} G_{ikj}(x) Y_k^{(j)}(x) = f_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (2-11)$$

其中,

$$G_{ikj} = \text{dig}(g_{ikj}(x_0), g_{ikj}(x_1), \dots, g_{ikj}(x_n)) \quad (2-12a)$$

$$Y_k^{(j)}(x) = (y_k^{(j)}(x_0), y_k^{(j)}(x_1), \dots, y_k^{(j)}(x_n)) \quad (2-12b)$$

将式(2-9)代入式(2-11), 得到下列代数等式:

$$\sum_{k=1}^r B_{ik} Y_k^{(0)} = f_i(x) \quad (2-13)$$

其中,

$$B_{ik} = \sum_{j=0}^{m_k} G_{ikj} A^{(j)} \quad (2-14)$$

不妨设式(2-2)中 ξ_{lkj} 在 $[a, b]$ 内的划分点 x_{I_l} ($0 \leq I_l \leq n$) 上, 若是两点边值问题, I_l 是 0 和 n , 则 ξ_{lkj} 的值是 a 和 b 。将式(2-9)代入式(2-2)且 $\gamma_l \neq 0$, 则产生如下边值问题:

$$\sum_{k=1}^r \sum_{j=0}^{m_k-1} \alpha_{lkj} [A^{(j)}]_{I_l} Y_k^{(0)} = f_i(x) \quad (2-15)$$

其中, $[A^{(j)}]_{I_l}$ 为矩阵 $A^{(j)}$ 的第 I_l 行元素。再令:

$$W_{\alpha lk} = \sum_{j=0}^{m_k} \alpha_{lkj} [A^{(j)}]_{I_l} \quad (2-16)$$

将式(2-16)代入式(2-15)，得到下列代数等式：

$$\sum_{k=1}^r W_{\alpha k} Y_k^{(0)} = f_i(x) \quad (2-17)$$

将边界和交界条件式(2-17)代入控制方程式(2-13)，替换相应的 $I_l=0$ 行和 $I_l=n$ 行，可得：

$$\sum_{k=1}^r \hat{B}_{ik} Y_k^{(0)} = f_i(x) \quad (2-18)$$

其中，矩阵 $\hat{B}_{ik}$ 是矩阵 B_{ik} 的第 $I_l=0$ 和 n 行被 $W_{\alpha k}$ 替换后形成的新矩阵。再令：

$$C = [\hat{B}_{ik}]_{r(n+1) \times r(n+1)}, \quad Y = \begin{Bmatrix} Y_1^{(0)} \\ Y_2^{(0)} \\ \vdots \\ Y_r^{(0)} \end{Bmatrix}$$

将式(2-18)装配合并后，可得到下列代数等式：

$$CY = f_i(x) \quad (2-19)$$

至此，式(2-19)为关于 $r(n+1)$ 个未知向量 Y 的一组线性代数方程组，根据高斯消去法求解，可获得未知函数 $y_k(x)$ 及其各阶导函数在各个离散节点的数值解。

2.3 离散节点布点方式的选择

将区间 $[a, b]$ 划分为 n 段，一般在边界条件不变的情况下，由微分求积法导出的代数方程组取决于离散节点步长和权系数矩阵 $\mathbf{A}^{(r)}$ ，而权系数矩阵 $\mathbf{A}^{(r)}$ 又取决于节点的分布方式和节点数。大量的数值实验研究表明，微分求积法求解运动微分方程时，节点分布方式对计算的稳定性和精确性影响很大，均匀节点是最早也是最简单的节点分布形式(2-20a)，但实践表明，采用均匀节点计算时，有时不能得到可靠的结果，而一些非均匀节点往往能得到很好的结果，如基于切比雪夫多项式的根作为离散节点分布形式(2-20b)，以及本章提出的一种改进型等比数列布点方式，即采用式(2-20c)，这种等比数列布点方式既保留了切比雪夫多项式的根布点的几何特征和计算精度，又可通过来调整公比 q 使得离散节点分布形式自动调整，公比 q 则成为了本算法数值精度的最终控制参数。

$$\xi_i = a + \frac{i(b-a)}{n}, \quad (i=0,1,2,\dots,n) \quad (2-20a)$$

$$\xi_i = a + \frac{b-a}{2}(1 - \cos \frac{i\pi}{n}), \quad (i=0,1,2,\dots,n) \quad (2-20b)$$

$$\begin{cases} \xi_i = a + \frac{b-a}{2(q^{\frac{n}{2}}-1)}(q^i - 1), & (i=0,1,2,\dots,\frac{n}{2}) \\ \xi_i = b - \frac{b-a}{2(q^{\frac{n}{2}}-1)}(q^{i-\frac{n}{2}} - 1), & (i=\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}+2, \dots, n) \end{cases} \quad (2-20c)$$

2.4 微分求积法的精度分析

本章用微分求积法求解变系数常微分方程的两点边值问题，以显示本文方法的有效性和准确性。

例 2.1 求两点边值问题：

$$\begin{cases} y''(x) - (1+x^2)y(x) = 0, & (-1 \leq x \leq 1) \\ y(-1) = 1, \quad y(1) = 1 \end{cases} \quad (2-21)$$

将区间 $[-1,1]$ 分段数 $n=12$ ，区间离散节点布点方式按等步长、切比雪夫多项式的根和等比数列三种方式，采用微分求积法计算式(2-21)可得两点边值问题的函数 $y(x)$ 、 $y'(x)$ 和 $y''(x)$ 如表 2-1~2-3 所列。由表 2-1~2-3 计算结果可知，微分求积法计算的函数值 $y(x)$ 、 $y'(x)$ 和 $y''(x)$ 与精确解完全吻合，证明了该法求解微分方程的两点边值问题是有效的。

表 2-1 等比数列布点 $n=12$

$x(I)$	$y(x)$		$y'(x)$		$y''(x)$	
	DQM	解析解	DQM	解析解	DQM	解析解
-1.00000	1.00000	1.00000	2.21781	2.21781	-2.00003	-2.00003
-0.86264	1.28488	1.28488	1.92449	1.92449	-2.24101	-2.24101
-0.72527	1.52770	1.52770	1.60904	1.60904	-2.33131	-2.33131
-0.56044	1.76122	1.76122	1.22479	1.22479	-2.31441	-2.31441
-0.39560	1.93199	1.93199	0.84949	0.84949	-2.23436	-2.23436
-0.19780	2.05700	2.05700	0.41766	0.41766	-2.13748	-2.13748
0.00000	2.09817	2.09817	0.00000	0.00000	-2.09817	-2.09817
0.19780	2.05700	2.05700	-0.41766	-0.41766	-2.13748	-2.13748
0.39560	1.93199	1.93199	-0.84949	-0.84949	-2.23436	-2.23436
0.56044	1.76122	1.76122	-1.22479	-1.22479	-2.31441	-2.31441
0.72527	1.52770	1.52770	-1.60904	-1.60904	-2.33131	-2.33131
0.86264	1.28488	1.28488	-1.92449	-1.92449	-2.24101	-2.24101
1.00000	1.00000	1.00000	-2.21781	-2.21781	-2.00003	-2.00003

表 2-2 切比雪夫布点 $n=12$

$x(I)$	$y(x)$		$y'(x)$		$y''(x)$	
	DQM	解析解	DQM	解析解	DQM	解析解
-1.00000	1.00000	1.00000	2.21781	2.21781	-2.00000	-2.00000
-0.96593	1.07439	1.07439	2.14831	2.14831	-2.07682	-2.07682
-0.86603	1.27834	1.27834	1.93208	1.93208	-2.23710	-2.23710
-0.70711	1.55655	1.55655	1.56665	1.56665	-2.33483	-2.33483
-0.50000	1.83103	1.83103	1.08565	1.08565	-2.28879	-2.28879
-0.25882	2.02752	2.02752	0.54885	0.54885	-2.16334	-2.16334
0.00000	2.09817	2.09817	0.00000	0.00000	-2.09817	-2.09817
0.25882	2.02752	2.02752	-0.54885	-0.54885	-2.16334	-2.16334
0.50000	1.83103	1.83103	-1.08565	-1.08565	-2.28879	-2.28879
0.70711	1.55655	1.55655	-1.56665	-1.56665	-2.33483	-2.33483
0.86603	1.27834	1.27834	-1.93208	-1.93208	-2.23710	-2.23710
0.96593	1.07439	1.07439	-2.14831	-2.14831	-2.07682	-2.07682
1.00000	1.00000	1.00000	-2.21781	-2.21781	-2.00000	-2.00000

表 2-3 均匀等步长布点 $n=12$

$x(I)$	$y(x)$		$y'(x)$		$y''(x)$	
	DQM	解析解	DQM	解析解	DQM	解析解
-1.00000	1.00000	1.00000	2.21781	2.21781	-2.00005	-2.00005
-0.83333	1.34030	1.34030	1.85836	1.85836	-2.27107	-2.27107
-0.66667	1.61800	1.61800	1.47216	1.47216	-2.33711	-2.33711
-0.50000	1.83103	1.83103	1.08565	1.08565	-2.28879	-2.28879
-0.33333	1.98058	1.98058	0.71141	0.71141	-2.20065	-2.20065
-0.16667	2.06897	2.06897	0.35129	0.35129	-2.12644	-2.12644
0.00000	2.09818	2.09818	0.00000	0.00000	-2.09818	-2.09818
0.16667	2.06897	2.06897	-0.35129	-0.35129	-2.12644	-2.12644
0.33333	1.98058	1.98058	-0.71140	-0.71140	-2.20065	-2.20065
0.50000	1.83103	1.83103	-1.08565	-1.08565	-2.28879	-2.28879
0.66667	1.61800	1.61800	-1.47216	-1.47216	-2.33711	-2.33711
0.83333	1.34030	1.34030	-1.85836	-1.85836	-2.27107	-2.27107
1.00000	1.00000	1.00000	-2.21781	-2.21781	-2.00005	-2.00005

例 2.2 求两点边值问题:

$$\begin{cases} 3y''(x) + y'(x) - y(x) = 0 \\ y(0) = 1, \quad y(1) = 1 \end{cases}, \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (2-22)$$

将区间 $[0,1]$ 分段数 $n=12$ ，区间离散节点布点方式按等步长、切比雪夫多项式的根和等比数列三种方式，采用微分求积法计算式(2-22)可得两点边值问题的函数 $y(x)$ 、 $y'(x)$ 和 $y''(x)$ 如表 2-4~2-6 所列。由表 2-4~2-6 计算结果可知，微分求积法计算的函数值 $y(x)$ 、 $y'(x)$ 和 $y''(x)$ 与精确解完全吻合，证明了该法求解微分方程的两点边值问题是有效的。

表 2-4 等比数列布点 $n=12$

$x(I)$	$y(x)$		$y'(x)$		$y''(x)$	
	DQM	解析解	DQM	解析解	DQM	解析解
0.00000	1.00000	1.00000	-0.17109	-0.17109	0.39036	0.39036
0.06868	0.98916	0.98916	-0.14471	-0.14471	0.37796	0.37796
0.13736	0.98010	0.98010	-0.11915	-0.11915	0.36642	0.36642
0.21978	0.97151	0.97151	-0.08949	-0.08949	0.35367	0.35367
0.30220	0.96533	0.96533	-0.06083	-0.06083	0.34205	0.34205
0.40110	0.96096	0.96096	-0.02763	-0.02763	0.32953	0.32953
0.50000	0.95982	0.95982	0.00440	0.00440	0.31847	0.31847
0.59890	0.96180	0.96180	0.03541	0.03541	0.30880	0.30880
0.69780	0.96680	0.96680	0.06553	0.06553	0.30042	0.30042
0.78022	0.97321	0.97321	0.09003	0.09003	0.29439	0.29439
0.86264	0.98163	0.98163	0.11408	0.11408	0.28918	0.28918
0.93132	0.99014	0.99014	0.13381	0.13381	0.28544	0.28544
1.00000	1.00000	1.00000	0.15330	0.15330	0.28223	0.28223

表 2-5 切比雪夫布点 $n=12$

$x(I)$	$y(x)$		$y'(x)$		$y''(x)$	
	DQM	解析解	DQM	解析解	DQM	解析解
0.00000	1.00000	1.00000	-0.17109	-0.17109	0.39036	0.39036
0.01704	0.99714	0.99714	-0.16447	-0.16447	0.38720	0.38720
0.06699	0.98941	0.98941	-0.14535	-0.14535	0.37825	0.37825
0.14645	0.97904	0.97904	-0.11583	-0.11583	0.36496	0.36496
0.25000	0.96897	0.96897	-0.07887	-0.07887	0.34928	0.34928
0.37059	0.96196	0.96196	-0.03774	-0.03774	0.33323	0.33323
0.50000	0.95982	0.95982	0.00440	0.00440	0.31847	0.31847
0.62941	0.96302	0.96302	0.04479	0.04479	0.30608	0.30608
0.75000	0.97063	0.97063	0.08111	0.08111	0.29651	0.29651
0.85355	0.98060	0.98060	0.11145	0.11145	0.28972	0.28972
0.93301	0.99037	0.99037	0.13429	0.13429	0.28536	0.28536
0.98296	0.99743	0.99743	0.14848	0.14848	0.28298	0.28298
1.00000	1.00000	1.00000	0.15330	0.15330	0.28223	0.28223

表 2-6 等步长布点 $n=12$

$x(I)$	$y(x)$		$y'(x)$		$y''(x)$	
	DQM	解析解	DQM	解析解	DQM	解析解
0.00000	1.00000	1.00000	-0.17109	-0.17109	0.39036	0.39036
0.08333	0.98708	0.98708	-0.13919	-0.13919	0.37542	0.37542
0.16667	0.97677	0.97677	-0.10848	-0.10848	0.36175	0.36175
0.25000	0.96897	0.96897	-0.07887	-0.07887	0.34928	0.34928
0.33333	0.96360	0.96360	-0.05024	-0.05024	0.33795	0.33795
0.41667	0.96057	0.96057	-0.02251	-0.02251	0.32769	0.32769
0.50000	0.95982	0.95982	0.00440	0.00440	0.31847	0.31847
0.58333	0.96129	0.96129	0.03059	0.03059	0.31023	0.31023
0.66667	0.96490	0.96490	0.05614	0.05614	0.30292	0.30292
0.75000	0.97063	0.97063	0.08111	0.08111	0.29651	0.29651
0.83333	0.97841	0.97841	0.10558	0.10558	0.29094	0.29094
0.91667	0.98821	0.98821	0.12962	0.12962	0.28620	0.28620
1.00000	1.00000	1.00000	0.15330	0.15330	0.28223	0.28223

2.5 本章小结

本章通过数值实验表明了微分求积法具有如下特点：一是微分求积法是具有最高精度的高阶差分法，是低阶差分法的推广。二是其权系数可以求出显示表达式，容易编制程序。三是相对于有限元等数值方法，微分求积法还具有计算量小等优点。理论上把微分求积法推广到结构动力学偏微分方程的求解，为结构动力学问题的研究提供一种简单有效的计算方法。

本章微分求积法基本理论在后续章节进一步地将其运用到功能梯度矩形板结构的静动态力学问题的求解。用数值算例来阐明微分求积法求解功能梯度矩形板结构的动力学偏微分方程的方法步骤，并将功能梯度板结构的微分求积计算值与精确解进行比较，证明该法的有效性和精确性，为功能梯度矩形板结构的动力学分析提供了一种简单有效的分析方法。

第3章 功能梯度材料矩形板自由振动分析

3.1 引言

功能梯度材料(FGM)是一种先进的复合材料,它由两个或多个组成相组成,从一个表面到另一个表面具有连续变化的材料性能,通过使材料特性呈一定的宏观梯度变化来达到降低甚至消除传统层压复合材料中的应力集中现象^[1-4]。由于功能梯度材料呈梯度变化,相应的参数也随之变化,其最终控制方程为变系数的偏微分方程(组),一般难以取得解析解,仅仅在特殊条件下才能求得解析解。陈伟球^[44]等人采用层合模型近似模拟,结合状态空间法研究了考虑热弹性的 FGM 矩形板力学场等问题。Kumar^[105]等人采用动态刚度法研究了阶跃型功能梯度材料(FGM)板的自由振动响应。Van^[106]等人提出了一种修正的单变量剪切变形板理论,用于矩形功能梯度板的自由振动分析。Hoang^[107]等人针对双向变厚度功能梯度板的自由振动分析,提出了一种新的三角剪切变形板理论。

近几十年来,有许多关于 FGM 板结构动态自由振动力学特性的文献涌现,但大多数研究都集中在特定形式的薄板和中厚板上,采用的理论也各不相同,从三维理论本身出发的较少。本文以三维弹性理论为基础,对沿厚度方向变化的 FGM 矩形板在不同厚宽比下的自由振动问题进行了讨论。

对于四边简支矩形板的情况,本文采用双三角级数展开,将其转化为以三维弹性理论三个主方向上的位移分量为基本变量的变系数常微分方程组。通过这一步骤,FGM 矩形板的自由振动问题被转化为求解变系数常微分方程组的特征值问题,得到相应的控制方程组。为求解方程组,本文将简化后的控制方程组编写成 FORTRAN 程序,结合微分求积法(DQM)进行求解,最终得到了 FGM 矩形板自由振动的固有频率。

3.2 功能梯度材料矩形板自由振动控制方程

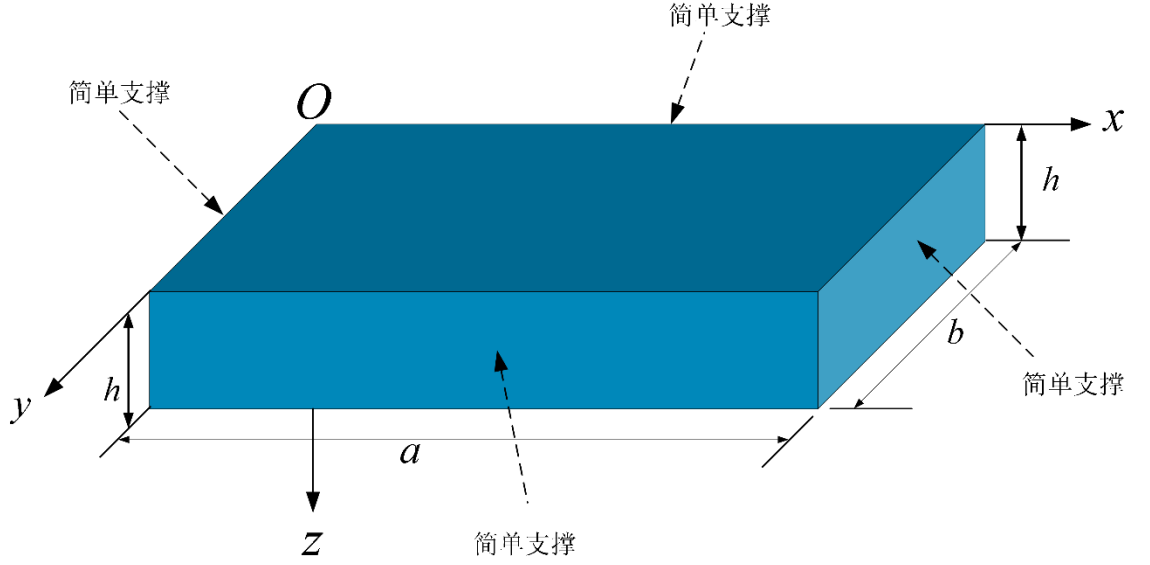


图 3-1 三维弹性矩形板样图

考虑长为 a ，宽为 b ，厚为 h 的 FGM 矩形板，如图 3-1，建立笛卡尔坐标系，使原点位于板的一角， x 轴和 y 轴与平面内正交脊对齐， z 轴与垂直脊重合，三条坐标轴都分别沿弹性主方向。采用三维线弹性理论作为求解该板自由振动问题的基础理论，在单向 FGM 板（Uni-directional (UD) FGM plates）的三种变化情况中，考虑材料参数仅沿厚度 z 方向变化这一种模态。不计外力与阻尼影响，三维线弹性动力学平衡控制方程为：

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_{xx}(x,y,z,t)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}(x,y,z,t)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}(x,y,z,t)}{\partial z} &= \rho(z) \frac{\partial^2 \Gamma_1(x,y,z,t)}{\partial t^2} \\
 \frac{\partial \tau_{xy}(x,y,z,t)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}(x,y,z,t)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}(x,y,z,t)}{\partial z} &= \rho(z) \frac{\partial^2 \Gamma_2(x,y,z,t)}{\partial t^2} \\
 \frac{\partial \tau_{xz}(x,y,z,t)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}(x,y,z,t)}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}(x,y,z,t)}{\partial z} &= \rho(z) \frac{\partial^2 \Gamma_3(x,y,z,t)}{\partial t^2}
 \end{aligned} \quad (3-1)$$

其中 $\sigma_i(x,y,z,t)$ 和 $\tau_{ij}(x,y,z,t)$ 分别为弹性体的正应力和剪应力分量。 $\Gamma_1(x,y,z,t)$ ， $\Gamma_2(x,y,z,t)$ ， $\Gamma_3(x,y,z,t)$ 分别为弹性体沿 x ， y ， z 三个方向的位移函数，时间变量为 t ， $\rho(z)$ 为基于厚度 z 方向变化的 FGM 矩形板的质量密度。引入应力-应变公式后，三维弹性体的本构关系为：

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= c_{11}(x, y, z) \frac{\partial \Gamma_1(x, y, z, t)}{\partial x} + c_{12}(x, y, z) \frac{\partial \Gamma_2(x, y, z, t)}{\partial y} + c_{13}(x, y, z) \frac{\partial \Gamma_3(x, y, z, t)}{\partial z} \\
\sigma_{yy} &= c_{12}(x, y, z) \frac{\partial \Gamma_1(x, y, z, t)}{\partial x} + c_{22}(x, y, z) \frac{\partial \Gamma_2(x, y, z, t)}{\partial y} + c_{23}(x, y, z) \frac{\partial \Gamma_3(x, y, z, t)}{\partial z} \\
\sigma_{zz} &= c_{13}(x, y, z) \frac{\partial \Gamma_1(x, y, z, t)}{\partial x} + c_{23}(x, y, z) \frac{\partial \Gamma_2(x, y, z, t)}{\partial y} + c_{33}(x, y, z) \frac{\partial \Gamma_3(x, y, z, t)}{\partial z} \\
\tau_{yz} &= c_{44}(x, y, z) \left(\frac{\partial \Gamma_2(x, y, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial \Gamma_3(x, y, z, t)}{\partial y} \right) \\
\tau_{xz} &= c_{55}(x, y, z) \left(\frac{\partial \Gamma_1(x, y, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial \Gamma_3(x, y, z, t)}{\partial x} \right) \\
\tau_{xy} &= c_{66}(x, y, z) \left(\frac{\partial \Gamma_1(x, y, z, t)}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma_2(x, y, z, t)}{\partial x} \right)
\end{aligned} \tag{3-2}$$

这里考虑如图 3.1 所示 FGM 矩形板为四边简支，即在 $x=0, x=a$ 和 $y=0, y=b$ 处为简支，则四周侧边的力学边界特性满足：

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \Gamma_2 = \Gamma_3 = 0 & (x=0) \\
\sigma_{xx} &= \Gamma_2 = \Gamma_3 = 0 & (x=a) \\
\sigma_{yy} &= \Gamma_1 = \Gamma_3 = 0 & (y=0) \\
\sigma_{yy} &= \Gamma_1 = \Gamma_3 = 0 & (y=b)
\end{aligned} \tag{3-3}$$

在不计外力和阻尼的 FGM 矩形板自由振动问题中，板的上下表面均为自由界面，不产生剪应力，则上下板表面的力学边界特性满足：

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz} &= \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 & (z=0) \\
\sigma_{zz} &= \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 & (z=h)
\end{aligned} \tag{3-4}$$

式(3-2)中 $c_{ij}(x, y, z) (i, j=1, 2, \dots, 6)$ 为与坐标相关的多向材料弹性刚度系数，在单向 FGM 板仅考虑沿厚度 z 方向变化的情况下满足：

$$c_{ij}(x, y, z) = c_{ij}(z) \tag{3-5}$$

将本构关系式(3-2)代入式(3-1)，便可得到由 $\Gamma_1(x, y, z, t)$ ， $\Gamma_2(x, y, z, t)$ ， $\Gamma_3(x, y, z, t)$ 三个方向位移变量表达的 FGM 矩形板的三维弹性体控制方程：

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{11}(z) \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial x^2} + c_{66}(z) \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial y^2} + c_{55}(z) \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial z^2} + \frac{dc_{55}(z)}{dz} \frac{\partial \Gamma_1}{\partial z} + \\ (c_{12}(z) + c_{66}(z)) \frac{\partial^2 \Gamma_2}{\partial x \partial y} + \frac{dc_{55}(z)}{dz} \frac{\partial \Gamma_3}{\partial x} + (c_{13}(z) + c_{55}(z)) \frac{\partial^2 \Gamma_3}{\partial x \partial z} = \rho(z) \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial t^2} \\ (c_{12}(z) + c_{66}(z)) \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial x \partial y} + c_{66}(z) \frac{\partial^2 \Gamma_2}{\partial x^2} + c_{22}(z) \frac{\partial^2 \Gamma_2}{\partial y^2} + \\ c_{44}(z) \frac{\partial^2 \Gamma_2}{\partial z^2} + \frac{dc_{44}(z)}{dz} \frac{\partial \Gamma_2}{\partial z} + (c_{23}(z) + c_{44}(z)) \frac{\partial^2 \Gamma_3}{\partial y \partial z} + \frac{dc_{44}(z)}{dz} \frac{\partial \Gamma_3}{\partial y} = \rho(z) \frac{\partial^2 \Gamma_2}{\partial t^2} \\ (c_{13}(z) + c_{55}(z)) \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial x \partial z} + \frac{dc_{13}(z)}{dz} \frac{\partial \Gamma_1}{\partial x} + (c_{23}(z) + c_{44}(z)) \frac{\partial^2 \Gamma_2}{\partial y \partial z} + \\ \frac{dc_{23}(z)}{dz} \frac{\partial \Gamma_2}{\partial y} + c_{55}(z) \frac{\partial^2 \Gamma_3}{\partial x^2} + c_{44}(z) \frac{\partial^2 \Gamma_3}{\partial y^2} + c_{33}(z) \frac{\partial^2 \Gamma_3}{\partial z^2} + \frac{dc_{33}(z)}{dz} \frac{\partial \Gamma_3}{\partial z} = \rho(z) \frac{\partial^2 \Gamma_3}{\partial t^2} \end{array} \right. \quad (3-6)$$

为了简化 FGM 矩形板自由振动问题求解本构关系式，根据式(3-3)、(3-4)、(3-5)中的条件和假设，可将三个方向上位移函数 $\Gamma_1(x, y, z, t)$ ， $\Gamma_2(x, y, z, t)$ ， $\Gamma_3(x, y, z, t)$ 沿板平面内展开为以下双三角级数：

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_1(x, y, z, t) \\ \Gamma_2(x, y, z, t) \\ \Gamma_3(x, y, z, t) \end{array} \right\} = \sum_m \sum_n \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{1,mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega_{mn}t} \\ \Gamma_{2,mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) e^{i\omega_{mn}t} \\ \Gamma_{3,mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega_{mn}t} \end{array} \right\} \quad (3-7)$$

其中 $\alpha = m\pi/a$ ， $\beta = n\pi/b$ ，为无量纲坐标， ω_{mn} 为 m, n 所对应板的固有频率， $\Gamma_{1,mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y)$ 、 $\Gamma_{2,mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y)$ ， $\Gamma_{3,mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y)$ 为 x ， y ， z 三个方向上的三个位移分量振型函数， $\Gamma_{1,mn}$ ， $\Gamma_{2,mn}$ ， $\Gamma_{3,mn}$ 为位移分量振型子函数。

将式(3-7)代入式(3-6)中，对于每一对双三角级数 m, n 都有：

$$\begin{cases}
 -(c_{11}(z)\alpha^2 + c_{66}(z)\beta^2)\Gamma_{1,mn} + \frac{dc_{55}(z)}{dz}\frac{d\Gamma_{1,mn}}{dz} + c_{55}(z)\frac{d^2\Gamma_{1,mn}}{dz^2} - \\
 (c_{12}(z) + c_{66}(z))\alpha\beta\Gamma_{2,mn} + \frac{dc_{55}(z)}{dz}\alpha\Gamma_{3,mn} + (c_{13}(z) + c_{55}(z))\beta\frac{d\Gamma_{3,mn}}{dz} = -\rho(z)\omega_{mn}^2\Gamma_{1,mn} \\
 -(c_{12}(z) + c_{66}(z))\alpha\beta\Gamma_{1,mn} - (c_{66}(z)\alpha^2 + c_{22}(z)\beta^2)\Gamma_{2,mn} + \\
 \frac{dc_{44}(z)}{dz}\frac{d\Gamma_{2,mn}}{dz} + c_{44}(z)\frac{d^2\Gamma_{2,mn}}{dz^2} + \frac{dc_{44}(z)}{dz}\beta\Gamma_{3,mn} + (c_{23}(z) + c_{44}(z))\beta\frac{d\Gamma_{3,mn}}{dz} = -\rho(z)\omega_{mn}^2\Gamma_{2,mn} \\
 -\frac{dc_{13}(z)}{dz}\alpha\Gamma_{1,mn} - (c_{13}(z) + c_{55}(z))\alpha\frac{d\Gamma_{1,mn}}{dz} - (c_{23}(z) + c_{44}(z))\beta\frac{d\Gamma_{2,mn}}{dz} - \\
 \frac{dc_{23}(z)}{dz}\beta\Gamma_{2,mn} - (c_{55}(z)\alpha^2 + c_{44}(z)\beta^2)\Gamma_{3,mn} + \frac{dc_{33}(z)}{dz}\frac{d\Gamma_{3,mn}}{dz} + c_{33}(z)\frac{d^2\Gamma_{3,mn}}{dz^2} = -\rho(z)\omega_{mn}^2\Gamma_{3,mn}
 \end{cases}$$

; $m=1,2,\dots,\infty$; $n=1,2,\dots,\infty$; $z\in[0,h]$ (3-8)

进行如下的无量纲参数变换满足:

$$z = hk, \quad z \in [0, h], \quad k \in [0, 1] \quad (3-9)$$

把式(3-9)代入式(3-8), 再将式(3-8)两端都同时乘以 h^2 , 得到

$$\lambda_{mn} = \omega_{mn} h \sqrt{\frac{\rho(0)}{c_{44}(0)}}, \quad \rho(0) \text{ 与 } c_{44}(0) \text{ 分别为 } z=0 \text{ 时的质量密度常数与材料参数, 即}$$

固有频率可表达为:

$$\omega_{mn} = \frac{\lambda_{mn}}{h} \sqrt{\frac{c_{44}(0)}{\rho(0)}} \quad (3-10)$$

引入固有频率的表达式与无量纲参数的变换, 式(3-8)转化为控制方程, 满足:

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^2\Gamma_{1,mn}}{dk^2} + \frac{1}{c_{55}(k)} \frac{dc_{55}(k)}{dk} \frac{d\Gamma_{1,mn}}{dk} - \frac{c_{11}(k)\alpha^2 + c_{66}(k)\beta^2}{c_{55}(k)} h^2 \Gamma_{1,mn} - \frac{c_{12}(k) + c_{66}(k)}{c_{55}(k)} \alpha\beta h^2 \Gamma_{2,mn} \\
 & + \frac{c_{13}(k) + c_{55}(k)}{c_{55}(k)} \alpha h \frac{d\Gamma_{3,mn}}{dk} + \frac{1}{c_{55}(k)} \frac{dc_{55}(k)}{dk} \alpha h \Gamma_{3,mn} + \frac{\rho(k)c_{44}(0)}{\rho(0)c_{55}(k)} \lambda_{mn}^2 \Gamma_{1,mn} = 0
 \end{aligned}$$

; $m=1,2,\dots,\infty$; $n=1,2,\dots,\infty$; $k\in[0,1]$ (3-11a)

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^2\Gamma_{2,mn}}{dk^2} + \frac{1}{c_{44}(k)} \frac{dc_{44}(k)}{dk} \frac{d\Gamma_{2,mn}}{dk} - \frac{c_{66}(k)\alpha^2 + c_{22}(k)\beta^2}{c_{44}(k)} h^2 \Gamma_{2,mn} - \frac{c_{12}(k) + c_{66}(k)}{c_{44}(k)} \alpha\beta h^2 \Gamma_{1,mn} \\
 & + \frac{c_{23}(k) + c_{44}(k)}{c_{44}(k)} \beta h \frac{d\Gamma_{3,mn}}{dk} + \frac{1}{c_{44}(k)} \frac{dc_{44}(k)}{dk} \beta h \Gamma_{3,mn} + \frac{\rho(k)c_{44}(0)}{\rho(0)c_{44}(k)} \lambda_{mn}^2 \Gamma_{2,mn} = 0
 \end{aligned}$$

; $m=1,2,\dots,\infty$; $n=1,2,\dots,\infty$; $k\in[0,1]$ (3-11b)

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \Gamma_{3,mn}}{dk^2} + \frac{1}{c_{33}(k)} \frac{dc_{33}(k)}{dk} \frac{d\Gamma_{3,mn}}{dk} - \frac{c_{55}(k)\alpha^2 + c_{44}(k)\beta^2}{c_{33}(k)} h^2 \Gamma_{3,mn} - \frac{c_{13}(k) + c_{55}(k)}{c_{33}(k)} \alpha h \frac{d\Gamma_{1,mn}}{dk} - \\ & \frac{1}{c_{33}(k)} \frac{dc_{13}(k)}{dk} \alpha h \Gamma_{1,mn} - \frac{c_{23}(k) + c_{44}(k)}{c_{33}(k)} \beta h \frac{d\Gamma_{2,mn}}{dk} - \frac{1}{c_{33}(k)} \frac{dc_{23}(k)}{dk} \beta h \Gamma_{2,mn} + \frac{\rho(k)c_{44}(0)}{\rho(0)c_{33}(k)} \lambda_{mn}^2 \Gamma_{3,mn} = 0 \\ & ; \quad m=1,2,\dots,\infty; \quad n=1,2,\dots,\infty; \quad k \in [0,1] \end{aligned} \quad (3-11c)$$

对于式(3-2)可得到由三个方向位移 $\Gamma_{1,mn}$, $\Gamma_{2,mn}$, $\Gamma_{3,mn}$ 与沿厚度方向材料参数 $c_{ij}(z)$ ($i, j=1,2,\dots,6$) 表示的应力分量表达式, 满足:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}(z) & c_{12}(z) & c_{13}(z) & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}(z) & c_{22}(z) & c_{23}(z) & 0 & 0 & 0 \\ c_{13}(z) & c_{23}(z) & c_{33}(z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}(z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55}(z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \Gamma_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \Gamma_2}{\partial y} \\ \frac{\partial \Gamma_3}{\partial z} \\ \frac{\partial \Gamma_2}{\partial z} + \frac{\partial \Gamma_3}{\partial y} \\ \frac{\partial \Gamma_1}{\partial z} + \frac{\partial \Gamma_3}{\partial x} \\ \frac{\partial \Gamma_1}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma_2}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3-12)$$

将式(3-7)代入式(3-12), 整理简化得到应力分量表达式为:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \sum_m \sum_n \begin{bmatrix} \sigma_{xx,mn}^*(z) \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega_{mn}t} \\ \sigma_{yy,mn}^*(z) \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega_{mn}t} \\ \sigma_{zz,mn}^*(z) \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega_{mn}t} \\ \tau_{yz,mn}^*(z) \sin(\alpha x) \cos(\beta y) e^{i\omega_{mn}t} \\ \tau_{xz,mn}^*(z) \cos(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega_{mn}t} \\ \tau_{xy,mn}^*(z) \cos(\alpha x) \cos(\beta y) e^{i\omega_{mn}t} \end{bmatrix} \quad (3-13)$$

当取 $m=1, n=1$ 时, 式(3-13)中的 $\sigma_{zz,mn}^*(z) \sin(\alpha x) \sin(\beta y)$ 为应力分量 σ_{zz} 的第一阶振型, 这里的 $\sigma_{zz,mn}^*(z)$ 为应力分量 σ_{zz} 第一阶的振型子函数, 其余也类似。式中 $\sigma_{xx,mn}^*$, $\sigma_{yy,mn}^*$, $\sigma_{zz,mn}^*$, $\tau_{yz,mn}^*$, $\tau_{xz,mn}^*$, $\tau_{xy,mn}^*$ 均由 $\Gamma_{1,mn}$, $\Gamma_{2,mn}$, $\Gamma_{3,mn}$ 构成, 满足:

$$\begin{cases} \sigma_{xx,mn}^*(z) = -c_{11}(z)\alpha\Gamma_{1,mn} - c_{12}(z)\beta\Gamma_{2,mn} + c_{13}(z)\frac{d\Gamma_{3,mn}}{dz} \\ \sigma_{yy,mn}^*(z) = -c_{12}(z)\alpha\Gamma_{1,mn} - c_{22}(z)\beta\Gamma_{2,mn} + c_{23}(z)\frac{d\Gamma_{3,mn}}{dz} \\ \sigma_{zz,mn}^*(z) = -c_{13}(z)\alpha\Gamma_{1,mn} - c_{23}(z)\beta\Gamma_{2,mn} + c_{33}(z)\frac{d\Gamma_{3,mn}}{dz} \\ \tau_{yz,mn}^*(z) = c_{44}(z)\left(\frac{d\Gamma_{2,mn}}{dz} + \beta\Gamma_{3,mn}\right) \\ \tau_{xz,mn}^*(z) = c_{55}(z)\left(\frac{d\Gamma_{1,mn}}{dz} + \alpha\Gamma_{3,mn}\right) \\ \tau_{xy,mn}^*(z) = c_{66}(z)(\beta\Gamma_{1,mn} + \alpha\Gamma_{2,mn}) \end{cases} \quad (3-14)$$

将式(3-7)和式(3-13)都代入四边简支 FGM 矩形板的四侧边界条件关系式(3-3), 得到的结果显然满足。再将式(3-13)代入矩形板的上下两表面边界关系式(3-4)中, 由于 x, y 的任意性影响, 对于双三角级数每一对 m, n 都应该满足:

$$\begin{cases} -c_{13}(z)\alpha\Gamma_{1,mn} - c_{23}(z)\beta\Gamma_{2,mn} + c_{33}(z)\frac{d\Gamma_{3,mn}}{dz} = 0 \\ \frac{d\Gamma_{2,mn}}{dz} + \beta\Gamma_{3,mn} = 0 \\ \frac{d\Gamma_{1,mn}}{dz} + \alpha\Gamma_{3,mn} = 0 \end{cases} ; m=1,2,\dots,\infty; n=1,2,\dots,\infty; z=0 \text{ 或 } z=h \quad (3-15)$$

再引入式(3-9)来对式(3-15)进行无量纲化处理, 得到控制方程的边界表达式:

$$\begin{cases} -c_{13}(k)\alpha\Gamma_{1,mn} - c_{23}(k)\beta\Gamma_{2,mn} + \frac{c_{33}(k)}{h}\frac{d\Gamma_{3,mn}}{dk} = 0 \\ \frac{d\Gamma_{2,mn}}{dk} + h\beta\Gamma_{3,mn} = 0 \\ \frac{d\Gamma_{1,mn}}{dk} + h\alpha\Gamma_{3,mn} = 0 \end{cases} ; m=1,2,\dots,\infty; n=1,2,\dots,\infty; k=0 \text{ 或 } k=h \quad (3-16)$$

在未引入其他修正变量的前提下, 基于三维线弹性理论, 通过上述公式的推导与演化, 成功将 FGM 四边简支矩形板的自由振动问题进行了转化为求解以 $\Gamma_{1,mn}$, $\Gamma_{2,mn}$, $\Gamma_{3,mn}$ 作为基本变量的二阶常系数微分方程组特征值问题, 即控制方程关系式(3-11)和相应的边界条件式 (3-16)联合求解。

3.3 算例分析

为检验根据 3.2 节所得三维弹性理论精确解的正确性以及第二章微分求积法的有效性, 本节针对四边简支 FGM 矩形单层板受自由振动作用的情况, 结合 2 个算例进行分析研究。

算例 1 取图 3-1 所示三维弹性矩形板, 长为 a , 宽为 b , 厚为 h 。为了与文献[47]方便比较, 材料参数与文献[47]均一致。材料泊松比 $\nu=0.3$, x, y 方向上材料参数不变, 沿厚度 z 方向呈如下梯度变化:

$$f(z) = (M_{II} - M_I) \left(\frac{z}{h} \right)^\varphi + M_I \quad (3-17)$$

其中 φ 为材料梯度指数, $f(z)$ 代表任一材料参数沿厚度 z 方向的变化规律, 比如材料刚度系数 $C_{ij}(z)$ 、弹性模量 $E(z)$ 以及材料密度 $\rho(z)$ 等。取上表面为材料 M_I 相应的弹性模量为 $E_I=70\text{GPa}$, $\rho_I=2702\text{kg/m}^3$, 取下表面为材料 M_{II} 相应的弹性模量为 $E_{II}=3800\text{GPa}$, $\rho_{II}=3800\text{kg/m}^3$, 根据三维弹性力学的弹性矩阵式可分别求得两种材料的刚度系数 C_{ij} , 最后计算 FGM 矩形板固有频率参数 λ_{mn} 。

本文求解思路, 以三维弹性理论导出的控制方程式(3-11)及其边界条件式(3-16), 采用微分求积法(DQM)进行求解方程。并采用两种不同的布点方法与文献[47]进行对比分析。表 3-1、3-2、3-3 给出了本文微分求积法下等比数列布点与切比雪夫布点两种算法, 基于双三角级数 $m=n=1$ 下 $h/a=0.15$ 单层薄板不同长宽比 a/b 下的固有频率参数 $\lambda_{11,1}$ 所得值, 并与文献[47]插值矩阵法(IMMS)和文献[32]解的结果进行比较。等比数列布点的微分求积法的解与文献[47]插值矩阵法 IMMS 的高划分区间($N=80$)解有很高的契合度, 其计算结果具有 4 位有效数字, 说明本文基于三维弹性理论微分求积法对于分析矩形板自由振动问题是有效的。而基于一阶剪切理论下文献[32]的解在 $\varphi=0$ 和 $\varphi=\infty$ 时有较高的契合度, 其它情况下误差较大。由表中可见, 在 $\varphi \in [1, 5]$ 时, 切比雪夫布点的解收敛更快, 切比雪夫布点下的微分求积法解在长宽比 $a/b=0.5$ 或 1.0 时在 $\varphi \in [0, 1]$ 和 $\varphi=\infty$ 时有较高的契合度, 这可能与其独特的边界密集, 中段相对离散的特殊布点方式有关。

表 3-1 不同梯度下 FGM 矩形板固有频率参数 $\lambda_{11,1}$

$$(m=n=1, h/a=0.15, a/b=0.5)$$

φ	文献[47]IMMS 解			文献[32]	等比布点	切比雪夫
	$N=20$	$N=40$	$N=80$			
0	0.25409	0.25409	0.25409	0.25363	0.25408	0.25409
0.25	0.23084	0.23180	0.23221	0.23189	0.23262	0.23782
1	0.19494	0.19493	0.19493	0.20069	0.19493	0.19994
2	/	/	/	/	0.17661	0.17384
3	/	/	/	/	0.17019	0.16319
4	/	/	/	/	0.16719	0.15863
5	0.16542	0.16542	0.16542	0.17040	0.16538	0.15582
∞	0.12933	0.12933	0.12933	0.12989	0.12933	0.12933

表 3-2 不同梯度下 FGM 矩形板固有频率参数 $\lambda_{11,1}$

$$(m=n=1, h/a=0.15, a/b=1.0)$$

φ	文献[47]IMMS 解			文献[32]	等比布点	切比雪夫
	$N=20$	$N=40$	$N=80$			
0	0.39643	0.39643	0.39643	0.39536	0.39643	0.39643
0.25	0.36059	0.36213	0.36278	0.35969	0.36345	0.37130
1	0.30494	0.30493	0.30493	0.30552	0.30493	0.31259
2	/	/	/	/	0.27578	0.27166
3	/	/	/	/	0.26507	0.25449
4	/	/	/	/	0.25987	0.24685
5	0.25672	0.25672	0.25672	0.25429	0.25667	0.24215
∞	0.20178	0.20178	0.20178	0.20123	0.20178	0.20178

表 3-3 不同梯度下 FGM 矩形板固有频率参数 $\lambda_{11,1}$

$$(m=n=1, h/a=0.15, a/b=2.0)$$

φ	文献[47]IMMS 解			文献[32]	等比布点	切比雪夫
	$N=20$	$N=40$	$N=80$			
0	0.90852	0.90851	0.90851	0.90328	0.90851	0.90851
0.25	0.82958	0.83359	0.83495	0.80957	0.83660	0.85277
1	0.70480	0.70480	0.70480	0.65235	0.70479	0.72115
2	/	/	/	/	0.63417	0.62599
3	/	/	/	/	0.60492	0.58277
4	/	/	/	/	0.58931	0.56165
5	0.57957	0.57957	0.57957	0.51685	0.57950	0.54861
∞	0.46242	0.46242	0.46242	0.47234	0.46242	0.46242

取厚宽比 $h/a=0.4$ ，表 3-4、3-5 给出了基于微分求积法的两种不同布点的方式在不同梯度下四个无量纲固有频率参数 $\lambda_{11,1}, \lambda_{12,1}, \lambda_{21,1}, \lambda_{22,1}$ 的计算结果，另外给出了 $\varphi=0.5, 3, 10, 100$ 梯度下的计算值。从表中可以看出等比布点下的计算结果精度高且比较稳定，当 $\varphi=0.25$ 时，在任一长宽比下文献[47]的 IMMS 解在($N=40$)较多划分区间下收敛较慢，而本文方法仍然有很好收敛速度，可见在 $\varphi \in [0,1]$ 区间内，本文方法的数值计算结果更为稳定。取 $\varphi=0.25, \varphi=100$ 时，可以看到切比雪夫布点下的微分求积法计算结果相较于等比数列布点计算结果更渐近 $\varphi=0, \varphi=\infty$ 时的值，其整体偏向快速收敛两点边界的情况。此外，当 $a/b=1$ 时矩形板变为方板，由于结构对称性，出现 $\lambda_{12,1}=\lambda_{21,1}$ ，固有频率参数出现重根。

表 3-4 不同梯度下 FGM 矩形板固有频率参数 $\lambda_{11,1}, \lambda_{12,1}$ ($h/a=0.4$)

$\frac{a}{b}$	φ	$\lambda_{11,1}$				$\lambda_{12,1}$			
		文献[47]IMMS 解		等比布点	切比雪夫	文献[47]IMMS 解		等比布点	切比雪夫
		$N=20$	$N=40$			$N=20$	$N=40$		
0.5	0	1.4757	1.4757	1.4756	1.4757	2.1393	2.1393	2.1392	2.1393
	0.25	1.3522	1.3586	1.3642	1.3878	1.9668	1.9765	1.9849	2.0156
	0.5	/	/	1.2756	1.3080	/	/	1.8607	1.9029
	1	1.1541	1.1541	1.1540	1.1787	1.6866	1.6866	1.6865	1.7193
	3	/	/	0.9804	0.9469	/	/	1.4203	1.3748
	5	0.9305	0.9305	0.9304	0.8830	1.3364	1.3364	1.3364	1.2705
	10	/	/	0.8884	0.8169	/	/	1.2647	1.1745
	100	/	/	0.8504	0.7514	/	/	1.2076	1.0892
	∞	0.7511	0.7511	0.7511	0.7511	1.0889	1.0889	1.0888	1.0889
1.0	0	2.1393	2.1393	2.1392	2.1393	4.1258	4.1258	4.1258	4.1258
	0.25	1.9668	1.9765	1.9849	2.0156	3.8188	3.8394	3.8571	3.9021
	0.5	/	/	1.8607	1.9029	/	/	3.6352	3.6985
	1	1.6866	1.6866	1.6865	1.7193	3.3114	3.3114	3.3114	3.3631
	3	/	/	1.4203	1.3748	/	/	2.7487	2.6724
	5	1.3364	1.3364	1.3364	1.2705	2.5414	2.5414	2.5416	2.4224
	10	/	/	1.2647	1.1745	/	/	2.3610	2.2294
	100	/	/	1.2076	1.0892	/	/	2.2410	2.1006
	∞	1.0889	1.0889	1.0888	1.0889	2.1000	2.1000	2.0999	2.1000
2.0	0	4.1258	4.1258	4.1258	4.1258	8.7994	8.7994	8.7993	8.7994
	0.25	3.8188	3.8394	3.8571	3.9021	8.1590	8.2243	8.2773	8.3526
	0.5	/	/	3.6352	3.6985	/	/	7.8162	7.9460
	1	3.3114	3.3114	3.3114	3.3631	7.0791	7.0791	7.0791	7.2642
	3	/	/	2.7487	2.6724	/	/	5.6430	5.7097
	5	2.5414	2.5414	2.5416	2.4224	5.1849	5.1849	5.1879	5.0838
	10	/	/	2.3610	2.2294	/	/	4.8383	5.1171
	100	/	/	2.2410	2.1006	/	/	4.5981	4.4799
	∞	2.1000	2.1000	2.0999	2.1000	4.4788	4.4788	4.4787	4.4788

表 3-5 不同梯度下 FGM 矩形板固有频率参数 $\lambda_{21,1}, \lambda_{22,1}$ ($h/a=0.4$)

$\frac{a}{b}$	φ	$\lambda_{21,1}$				$\lambda_{22,1}$			
		文献[47]IMMS 解		等比 布点	切比 雪夫	文献[47]IMMS 解		等比 布点	切比 雪夫
		N=20	N=40			N=20	N=40		
0.5	0	3.6952	3.6952	3.6951	3.6952	4.1258	4.1258	4.1258	4.1258
	0.25	3.4164	3.4345	3.4500	3.4925	3.8188	3.8394	3.8571	3.9021
	0.5	/	/	3.2485	3.3079	/	/	3.6352	3.6985
	1	2.9565	2.9565	2.9564	3.0042	3.3114	3.3114	3.3114	3.3631
	3	/	/	2.4596	2.3890	/	/	2.7487	2.6724
	5	2.2808	2.2808	2.2810	2.1730	2.5414	2.5414	2.5416	2.4224
	10	/	/	2.1257	2.0020	/	/	2.3610	2.2294
	100	/	/	2.0199	1.8813	/	/	2.2410	2.1006
	∞	1.8808	1.8808	1.8808	1.8808	2.1000	2.1000	2.0999	2.1000
1.0	0	4.1258	4.1258	4.1258	4.1258	5.5971	5.5971	5.5970	5.5970
	0.25	3.8188	3.8394	3.8571	3.9021	5.1942	5.2246	5.2502	5.3030
	0.5	/	/	3.6352	3.6985	/	/	4.9600	5.0364
	1	3.3114	3.3114	3.3114	3.3631	4.5272	4.5272	4.5272	4.5955
	3	/	/	2.7487	2.6724	/	/	3.7316	3.6470
	5	2.5414	2.5414	2.5416	2.4224	3.4247	3.4247	3.4255	3.2747
	10	/	/	2.3610	2.2294	/	/	3.1590	3.0030
	100	/	/	2.2410	2.1006	/	/	2.9891	2.8496
	∞	2.1000	2.1000	2.0999	2.1000	2.8488	2.8488	2.8488	2.8488
2.0	0	5.5971	5.5971	5.5970	5.5970	9.6541	9.6541	9.6541	9.6541
	0.25	5.1942	5.2246	5.2502	5.3030	8.9325	9.0137	9.0785	9.1643
	0.5	/	/	4.9600	5.0364	/	/	8.5562	8.7151
	1	4.5272	4.5272	4.5272	4.5955	7.6982	7.6982	7.6982	7.9531
	3	/	/	3.7316	3.6470	/	/	6.0589	6.2004
	5	3.4247	3.4247	3.4255	3.2747	5.5931	5.5931	5.5961	5.5333
	10	/	/	3.1590	3.0030	/	/	5.2652	5.1171
	100	/	/	2.9891	2.8496	/	/	5.0252	4.9150
	∞	2.8488	2.8488	2.8488	2.8488	4.9138	4.9138	4.9138	4.9138

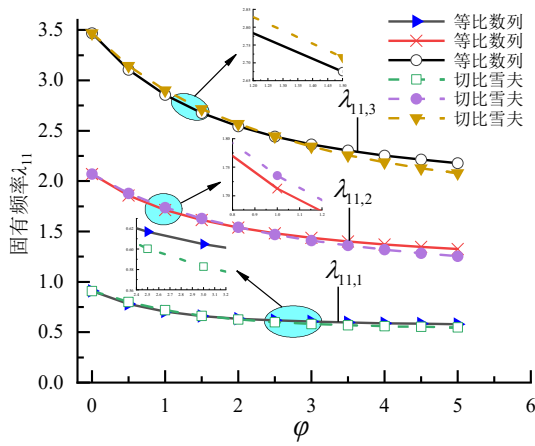
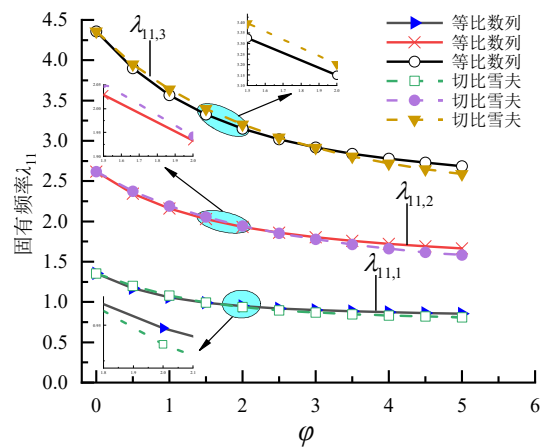
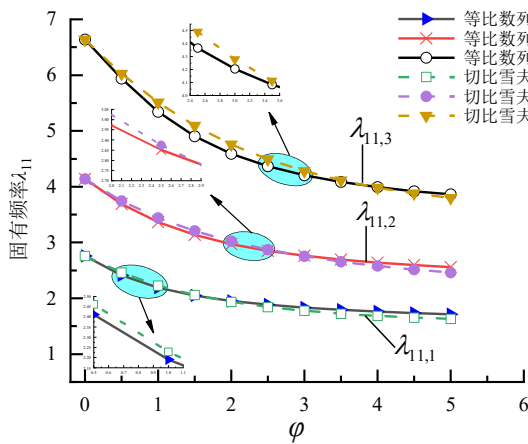
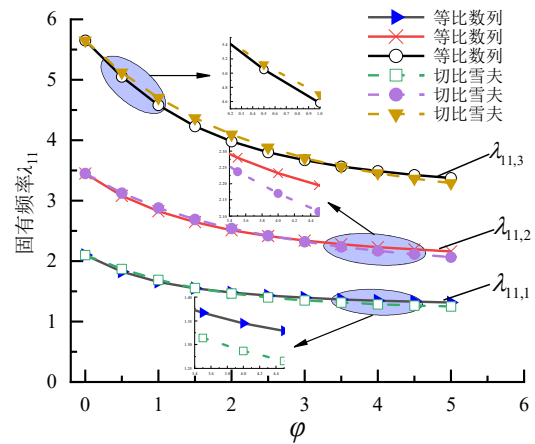
取梯度指数 $\varphi=0.25$ ，长宽比 $a/b=0.5$ ，表 3-6 给出了本文基于微分求积法两种布点与文献[47]插值矩阵法 IMMS($N=40$)的各阶无量纲固有频率参数 $\lambda_{mn,l}$ 的计算值， $\lambda_{mn,l}$ 表示根据双三角级数 m,n 所求解的第 l 个无量纲固有频率参数，按从小到大进行排列。在各对双三角级数 m,n 所求的固有频率 $\lambda_{mn,l}$ 进行从小到大排序得到 λ_{mn} 的前三阶固有频率。表中给出了 $h/a=0.1$ 薄板、 $h/a=0.3$ 中厚板、 $h/a=0.5$ 厚板等三种典型代表板的固有频率排序，可以看到基于三维弹性理论下的微分求积法与文献[47]的固有频率插值矩阵法计算值和排序都有很好的吻合。

表 3-6 不同厚宽比下 FGM 矩形板的固有频率 λ_{mn} 排序($a/b=0.5$, $\varphi=0.25$)

$\lambda_{mn,l}$	方法	h/a				
		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\lambda_{11,1}$	文献[47]	0.10548 ¹	0.39965 ¹	/	1.35864 ¹	/
	等比布点	0.10584 ¹	0.40111 ¹	0.83660 ¹	1.36420 ¹	1.94880 ¹
	切比雪夫	0.10829 ¹	0.40969 ¹	0.85277 ¹	1.38782 ¹	1.97908 ¹
$\lambda_{11,2}$	文献[47]	0.64802	1.29572	/	2.58885 ³	/
	等比布点	0.65072	1.30119	1.95118 ³	2.60041 ³	3.24864 ³
	切比雪夫	0.65554	1.31098	1.96620 ³	2.62110 ³	3.27556 ³
$\lambda_{11,3}$	文献[47]	1.09433	2.18182	/	4.30141	/
	等比布点	1.09890	2.19108	3.26861	4.32079	5.33163
	切比雪夫	1.10704	2.20747	3.29334	4.35351	5.37071
$\lambda_{12,1}$	文献[47]	0.16684 ²	0.61536 ²	/	1.97653 ²	/
	等比布点	0.16742 ²	0.61769 ²	1.25030 ²	1.98493 ²	2.77340 ²
	切比雪夫	0.17122 ²	0.63023 ²	1.27245 ²	2.01557 ²	2.81103 ²
$\lambda_{12,2}$	文献[47]	0.81964	1.63864	/	3.27201	/
	等比布点	0.82307	1.64565	2.46722	3.28727	4.10524
	切比雪夫	0.82919	1.65816	2.48670	3.31458	4.14158
$\lambda_{12,3}$	文献[47]	/	/	/	/	/
	等比布点	1.38918	2.76440	4.10755	5.39013	6.56284
	切比雪夫	1.39949	2.78521	4.13871	5.42949	6.60294
$\lambda_{21,1}$	文献[47]	0.34319 ³	1.18721 ³	/	3.43449	/
	等比布点	0.34444 ³	1.19200 ³	2.27467 ³	3.45003	4.65768
	切比雪夫	0.35191 ³	1.21336 ³	2.30809 ³	3.49249	4.70724
$\lambda_{21,2}$	文献[47]	/	/	/	/	/
	等比布点	1.19969	2.39783	3.59282	4.78294	5.96636
	切比雪夫	1.20868	2.41669	3.62334	4.82793	6.02970
$\lambda_{21,3}$	文献[47]	/	/	/	/	/
	等比布点	2.02134	3.99587	5.84421	7.39945	8.37318
	切比雪夫	2.03643	4.02618	5.88513	7.42961	8.41435
$\lambda_{22,1}$	文献[47]	0.39965	1.35864	/	3.83941	/
	等比布点	0.40111	1.36420	2.56770	3.85706	5.17166
	切比雪夫	0.40969	1.38782	2.60367	3.90207	5.22401
$\lambda_{22,2}$	文献[47]	/	/	/	/	/
	等比布点	1.30119	2.60041	3.89559	5.18450	6.46478
	切比雪夫	1.31098	2.62110	3.92948	5.23522	6.53733
$\lambda_{22,3}$	文献[47]	/	/	/	/	/
	等比布点	2.19108	4.32079	6.27627	7.81822	8.73771
	切比雪夫	2.20747	4.35351	6.31732	7.83861	8.78421

注：0.10548¹为文献[47]厚宽比 h/a 取 0.1 时的第一阶固有频率，余类推。

图 3-2 至图 3-4 给出了中厚板 $h/a = 0.3$ 不同长宽比 a/b 下等比布点和切比雪夫布点的固有频率 λ_{1l} 的前 3 阶计算值。图 3-5 至图 3-7 给出了厚板 $h/a = 0.5$ 不同长宽比 a/b 下等比布点和切比雪夫布点的固有频率 λ_{1l} 的前 3 阶计算值。可以看到随着梯度指数 φ 的增大其固有频率 λ_{1l} ($l=1,2,3$) 值均下降直至收敛于某一值，两种布点方式的计算值具有比较良好的吻合度。以等比数列布点下计算值为基准，切比雪夫布点由于其独特的边界密集、中间相对离散的布点方式，它的计算值在靠近两点边界时偏向快速收敛，在中间区间内其误差也都在合理的范围内，最终和等比布点下的计算值收敛于同一值。

图 3-2 $h/a = 0.3, a/b = 0.5$ 图 3-3 $h/a = 0.3, a/b = 1.0$ 图 3-4 $h/a = 0.3, a/b = 2.0$ 图 3-5 $h/a = 0.5, a/b = 0.5$

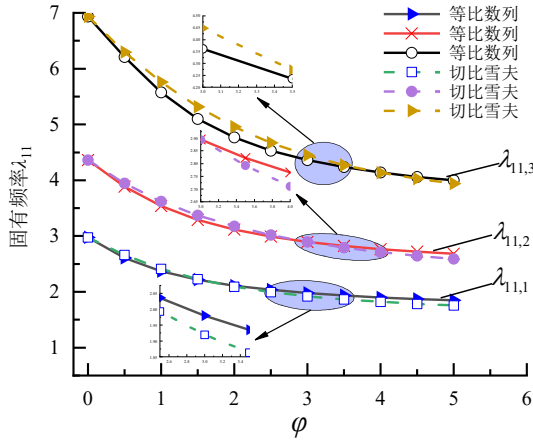
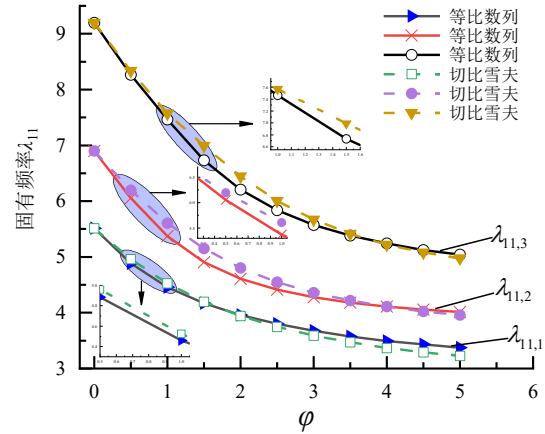
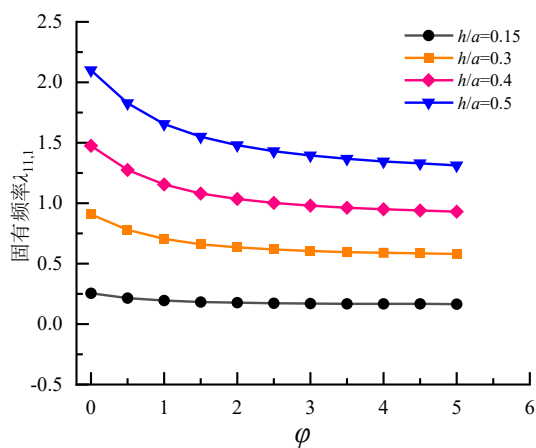
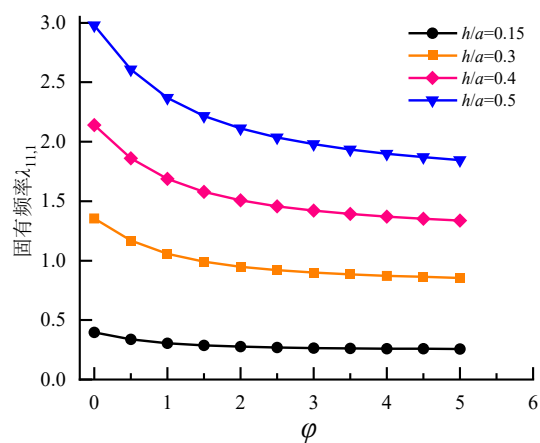
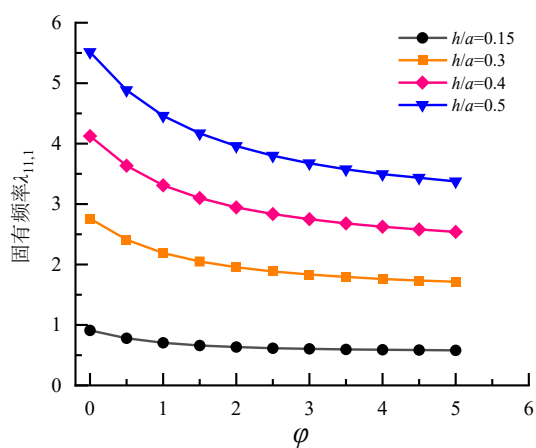
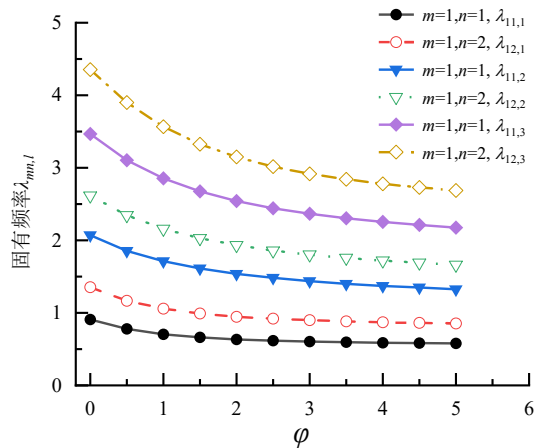
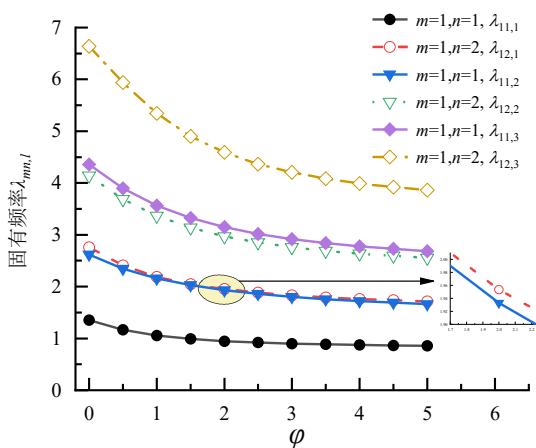
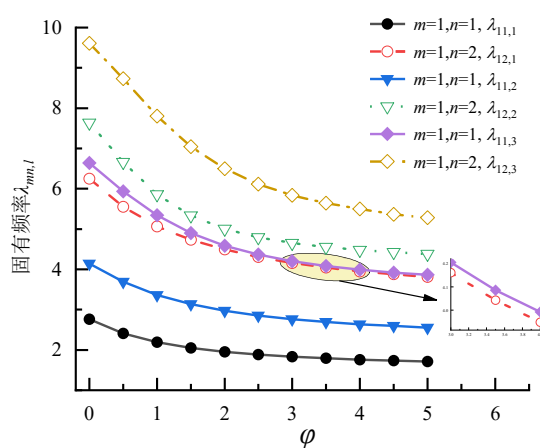
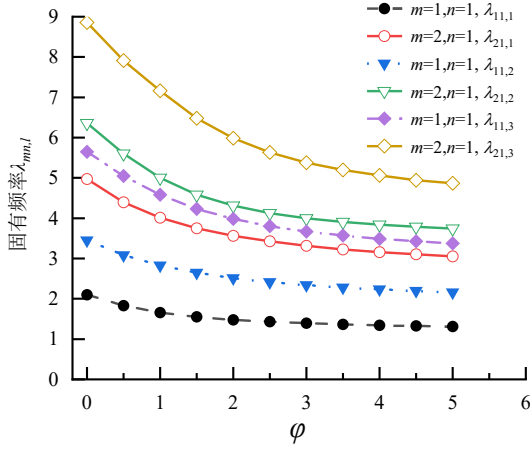
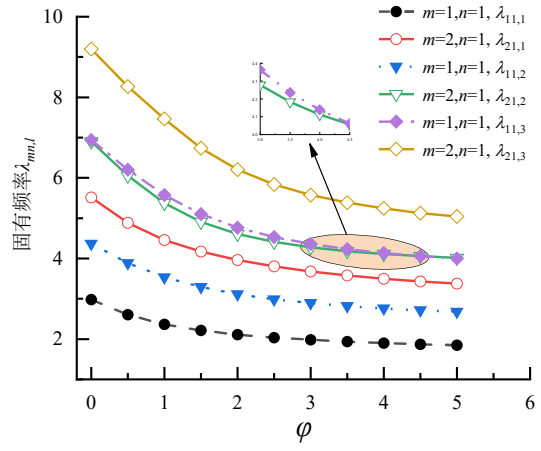
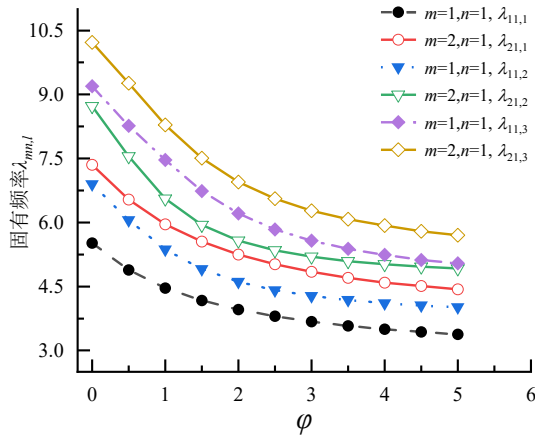
图 3-6 $h/a=0.5, a/b=1.0$ 图 3-7 $h/a=0.5, a/b=2.0$

图 3-8 至图 3-10 给出了薄板、中厚板、厚板下不同长宽比的微分求积法等比布点下固有频率 $\lambda_{1,1}$ 的计算值。可以看到在同一长宽比中，厚宽比越大 $\lambda_{1,1}$ 越大，另外随着梯度指数 φ 的增大，厚宽比越大的矩形板其固有频率 $\lambda_{1,1}$ 值下降的趋势越快，反之厚宽比越小则下降越平缓最终都收敛于某一值。而在同一厚宽比下的板， $\lambda_{1,1}$ 随着长宽比的增大也随之增大。

图 3-11 至图 3-13 给出了 $h/a=0.3$ (中厚板) 不同长宽比微分求积法等比布点下 m 为定值 n 增大时 $\lambda_{mn,l}$ ($m=1, n=1$ 或 $2, l=1, 2, 3$) 的计算值。可以看到，长宽比一定时， $\lambda_{mn,l}$ 值随 n 增大而增大，同一对双三角级数 m, n 下 $\lambda_{mn,l}$ 的值随长宽比增大而增大。另外，随着梯度指数 φ 的增大 $\lambda_{mn,l}$ 的值都逐渐收敛。不同长宽比下 $\lambda_{mn,l}$ 的值的收敛速度都不相同，同一对双三角级数 m, n 下 $\lambda_{mn,l}$ 的值随着长宽比的减小其收敛速度更快。

图 3-14 至图 3-16 给出了 $h/a=0.5$ (厚板) 不同长宽比微分求积法等比布点下 n 为定值 m 增大时 $\lambda_{mn,l}$ ($m=1$ 或 $2, n=1, l=1, 2, 3$) 的计算值。可以看到，长宽比一定时， $\lambda_{mn,l}$ 值随 m 增大而增大，同一对双三角级数 m, n 下 $\lambda_{mn,l}$ 的值随长宽比增大而增大。此外，随着梯度指数 φ 的增大 $\lambda_{mn,l}$ 的值都逐渐收敛。不同长宽比下 $\lambda_{mn,l}$ 的值的收敛速度都不相同，同一对双三角级数 m, n 下 $\lambda_{mn,l}$ 的值随着长宽比的减小其收敛速度加快。


 图 3-8 $\lambda_{11,1}(a/b=0.5)$

 图 3-9 $\lambda_{11,1}(a/b=1.0)$

 图 3-10 $\lambda_{11,1}(a/b=2.0)$

 图 3-11 $m=1, n=1$ 或 $2, a/b=0.5$

 图 3-12 $m=1, n=1$ 或 $2, a/b=1.0$

 图 3-13 $m=1, n=1$ 或 $2, a/b=2.0$


 图 3-14 $m=1$ 或 $2, n=1$, $a/b=0.5$

 图 3-15 $m=1$ 或 $2, n=1$, $a/b=1.0$

 图 3-16 $m=1$ 或 $2, n=1$, $a/b=2.0$

算例 2 取图 3-1 所示三维弹性矩形板，长宽高分别为 a, b, h 。为了与文献[47]方便比较，材料参数与文献[47]均一致。材料常数沿厚度 z 方向满足如下分布变化：

$$f(z) = (M_I - M_{II})\left(1 - \frac{z}{h}\right)^\varphi + M_{II} \quad (3-18)$$

其中 φ 为材料梯度指数， $f(z)$ 代表任一材料参数沿厚度 z 方向的变化规律。

当 $\varphi = 0$ 时，取材料 M_I ；当 $\varphi = \infty$ 时，取材料 M_{II} ，根据三维弹性力学的弹性矩阵式可分别求得两种材料的刚度系数 C_{ij} ，最后计算 FGM 矩形板固有频率参数 λ_{mn} 。

表 3-7 四边简支 FGM 矩形板固有频率参数 $\lambda_{mn,l}(h/a=0.1, a/b=2, \varphi=10)$

(m,n)	文献[47]IMMS 解			文献[44]	本文解		
	$N=20$	$N=40$	$N=80$	状态空间法	DQM	DQM	DQM
	$l=1$	$l=1$	$l=1$	$l=1$	$l=1$	$l=2$	$l=3$
(1,1)	0.14502	0.14500	0.14499	0.14511	0.14510	0.40854	0.78125
(1,2)	0.41933	0.41942	0.41941	0.41975	0.42009	0.75299	1.42261
(1,3)	/	/	/	/	0.77427	1.11006	2.04126
(2,1)	0.22141	0.22139	0.22138	0.22157	0.22195	0.51672	0.98536
(2,2)	0.47769	0.47779	0.47778	0.47817	0.47825	0.81664	1.53755
(2,3)	/	/	/	/	0.81892	1.15406	2.11166
(3,1)	/	/	/	/	0.34268	0.65857	1.24961
(3,2)	/	/	/	/	0.57836	0.91287	1.70810
(3,3)	/	/	/	/	0.89022	1.22383	2.17608

表 3-7 给出了当 $h/a=0.1, a/b=2, \varphi=10$ 时本文等比数列布点下的微分求积法解、文献[47]与文献[44]解的第一阶固有频率参数比较，都有很高的吻合度。由表 3-7 可见，若文献[47]的 IMMS 插值矩阵法解得到较为精确的结果，需要划分不同的子区间进行对比处理。随着双三角级数 m,n 的增大，需要划分的子区间数 N 越多才能使得解更稳定，如果以较低子区间来求解 (如 $N=20$)，其结果可能产生不稳定的误差。文献[44]主要是采用状态空间法结合层分的解决思路，其假设都为等效均质的材料，需要划分足够多的层数才能得到较为精确的解。本文方法是基于原始精确的三维线弹性理论，采用等比数列布点的方式，考虑了各种材料梯度的变化，并且本文方法仅划分区间参数为 $N=20$ 便可得到稳定的解，随着双三角级数 m,n 的增大依然有着计算结果精度很高的优点，可以说本文方法所计算的 FGM 功能梯度矩形板各阶无量纲固有频率参数的计算结果比文献[47]与文献[44]的更加稳定与精确。此外，表 3-7 也给出了其他双三角级数的计算结果以及后续相应第 2 阶与第 3 阶的解，数值计算结果小数点后都保留 5 位有效数字，可以作为其他方法的参照解。

取长宽比 $a/b=2$ ，梯度指数 $\varphi=10$ ，表 3-8 给出了厚宽比取不同值时四边简支 FGM 的各阶固有频率参数 $\lambda_{mn,l}$ ，并基于不同的厚宽比将 $\lambda_{mn,l}$ 进行前三阶排序。此外，为了说明本文解的有效性，表 3-8 还给出了本文 DQM 解与文献[47]插值矩阵法解($N=40$)的比较。从表中可以清楚地看出，无论是薄板($h/a=0.1, h/a=0.2$)，

还是厚板($h/a=0.4$), 本文 DQM 解与插值矩阵法解都很接近, 相对误差都非常小。表 3-8 中还给出了中厚板($h/a=0.3$)与 $h/a=0.5$ 的厚板(此时板已经属于块体)固有频率参数的计算结果, 其数值计算结果小数点后都保留 5 位有效数字, 可作为其它方法的参考。

表 3-8 不同厚宽比下 FGM 矩形板的固有频率 λ_{mn} 排序($a/b=2, \varphi=10$)

$\lambda_{mn,l}$	方法	h/a				
		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\lambda_{11,1}$	文献[47]	0.14500 ¹	0.47778 ¹	/	1.29589 ¹	/
	DQM	0.14510 ¹	0.48622 ¹	0.89022 ¹	1.31243 ¹	1.73857 ¹
$\lambda_{11,2}$	文献[47]	0.40960 ³	0.81881 ³	/	1.63436 ²	/
	DQM	0.40854 ³	0.81664 ³	1.22383 ²	1.62960 ²	2.03339 ²
$\lambda_{11,3}$	文献[47]	0.78154	1.53727	/	2.44883	/
	DQM	0.78125	1.53755	2.17608	2.42374	2.71029
$\lambda_{12,1}$	文献[47]	0.41941	1.16437	/	2.72552	/
	DQM	0.42009	1.17984	1.96521	2.74865	3.52647
$\lambda_{12,2}$	文献[47]	/	/	/	/	/
	DQM	0.75299	1.50311	2.24709	2.98131	3.70293
$\lambda_{12,3}$	文献[47]	/	/	/	/	/
	DQM	1.42261	2.34167	2.87489	3.49394	4.16648
$\lambda_{21,1}$	文献[47]	0.22139 ²	0.68539 ²	/	1.74428 ³	/
	DQM	0.22195 ²	0.69633 ²	1.22520 ³	1.76400 ³	2.30263 ³
$\lambda_{21,2}$	文献[47]	0.51805	1.03532	/	2.06385	/
	DQM	0.51672	1.03253	1.54645	2.05740	2.56419
$\lambda_{21,3}$	文献[47]	/	/	/	/	/
	DQM	0.98536	1.91337	2.36933	2.72838	3.13293
$\lambda_{22,1}$	文献[47]	0.47778	1.29589	/	2.99001	/
	DQM	0.47825	1.31243	2.16459	3.01275	3.85346
$\lambda_{22,2}$	文献[47]	/	/	/	/	/
	DQM	0.84664	1.62960	2.43462	3.22714	4.00440
$\lambda_{22,3}$	文献[47]	/	/	/	/	/
	DQM	1.53755	2.42374	3.02564	3.71675	4.46264

注: 0.14500¹为文献[47]厚宽比 h/a 取 0.1 时的第一阶固有频率, 余类推。

表 3-9 列出了四边简支功能梯度矩形板厚宽比 $h/a=0.15$ 的单层薄板不同长宽比 a/b 与不同梯度指数 φ 下取不同级数项数的本文 DQM 等比布点固有频率参数 $\lambda_{mn,l}$ 解数值计算结果。表中 $\lambda_{mn,l}$ 表示根据相应的级数项数 m,n 所求解的第 l 个无量纲固有频率参数, 按从小到大排列。由表中可以看出同一长宽比下的固有频率参数 $\lambda_{mn,l}$ 变化随梯度指数 φ 的增加 $\lambda_{mn,l}$ 值并不是增加的态势, 而是呈现局部的增加或减少, 并且 φ 值的增加对 $\lambda_{mn,l}$ 值的影响较小; 同一梯度指数 φ 下的固有频率

参数 $\lambda_{mn,l}$ 变化随长宽比的增大而增大，其增长幅度与级数项数呈正相关，并且 $\lambda_{mn,l}$ 值随长宽比的增加其波动较大。此外，表 3-9 中的数值计算结果小数点后都保留 5 位有效数字，可作为其它方法计算结果的参考。

表 3-9 不同参数下四边简支 FGM 矩形板固有频率 ($h/a=0.15$)

$\frac{a}{b}$	(m,n)	$\varphi=1$		$\varphi=5$		$\varphi=10$	
		$l=1$	$l=2$	$l=1$	$l=2$	$l=1$	$l=2$
0.5	(1,1)	0.08044	0.26964	0.08373	0.29993	0.08654	0.30643
	(9,9)	2.39301	2.99589	2.55349	2.65801	2.48336	2.73350
	(19,19)	4.89157	6.03153	5.39026	5.71615	5.60411	5.61425
	(49,49)	12.01303	13.81393	13.02228	14.52108	13.88221	14.50700
	(99,99)	23.67592	26.02326	25.29423	29.64105	25.46041	29.43845
1.0	(1,1)	0.12646	0.34103	0.13037	0.37934	0.13442	0.38759
	(9,9)	3.00451	3.99679	3.33148	3.35218	3.23982	3.43781
	(19,19)	6.10534	7.37030	6.70669	7.18000	7.02024	7.12188
	(49,49)	15.05383	17.02561	16.21454	18.38186	17.03205	18.35625
	(99,99)	29.75820	32.31429	31.27483	37.41692	33.18604	37.23027
2.0	(1,1)	0.29695	0.53897	0.29689	0.59953	0.30342	0.61268
	(9,9)	4.64814	5.77004	5.12564	5.42293	5.29892	5.33306
	(19,19)	9.42357	11.04037	10.27455	11.27152	10.89175	11.25136
	(49,49)	23.44367	25.78228	25.05363	29.35410	25.18331	29.14530
	(99,99)	46.58036	49.65506	49.75305	55.16640	45.38794	48.90398

图 3-16 至图 3-18 给出了本文微分求积法等比布点下不同厚宽比、不同长宽比随梯度指数 φ 增大 $\lambda_{mn,l}(m=1, n=1,2,3, l=1,2)$ 的变化情况。综合三图可见，梯度指数 φ 对于 $\lambda_{mn,l}$ 的影响较小，从图 3-17 可以看到， $\lambda_{11,1}$ 与 $\lambda_{11,2}$ 的值、 $\lambda_{12,1}$ 与 $\lambda_{12,2}$ 的值、 $\lambda_{13,1}$ 与 $\lambda_{13,2}$ 的值分别在梯度指数 $\varphi=1$ 、 $\varphi=2$ 、 $\varphi=4$ 时很接近，这三对 $\lambda_{mn,l}$ 值在达到这三个梯度指数前较小阶数($l=1$)的 $\lambda_{mn,l}$ 值一直增大，较大阶数($l=2$)的 $\lambda_{mn,l}$ 值一直减小，达到这三个梯度指数之后的增减情况则反之，后续则是三对 $\lambda_{mn,l}$ 值相接近的梯度指数的下一个周期。这一特点在厚宽比不变长宽比增大的图 3-18 中也同样体现出来且有后延的趋势， $\lambda_{11,1}$ 与 $\lambda_{11,2}$ 的值、 $\lambda_{12,1}$ 与 $\lambda_{12,2}$ 的值、 $\lambda_{13,1}$ 与 $\lambda_{13,2}$ 的值分别在 $\varphi=2$ 、 $\varphi=4$ 、 $\varphi=10$ 时很接近。随着结合图 3-16 和图 3-17 两图可以看出，在长宽比不变、同一梯度指数与级数项数的情况下， $\lambda_{mn,l}$ 值随厚宽比增大而增大，这一特征在图 3-17 与图 3-18 的对比中同样可以看到。

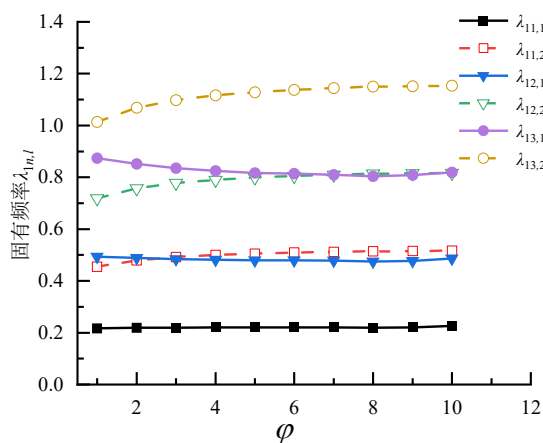
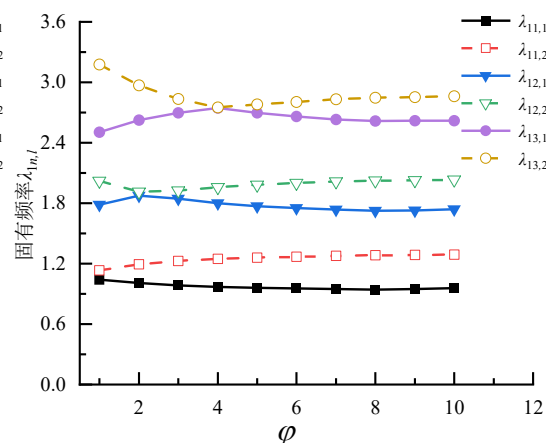
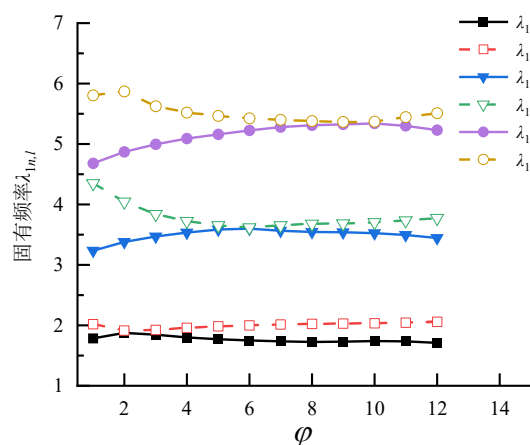
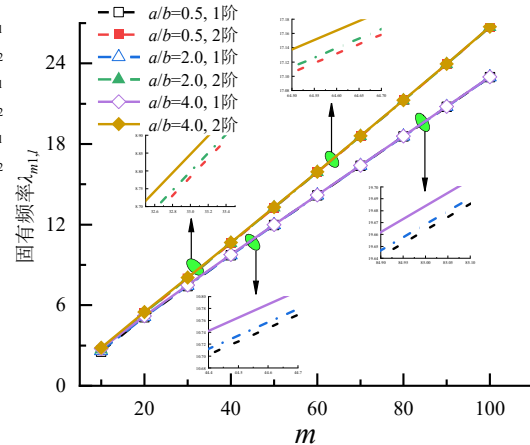
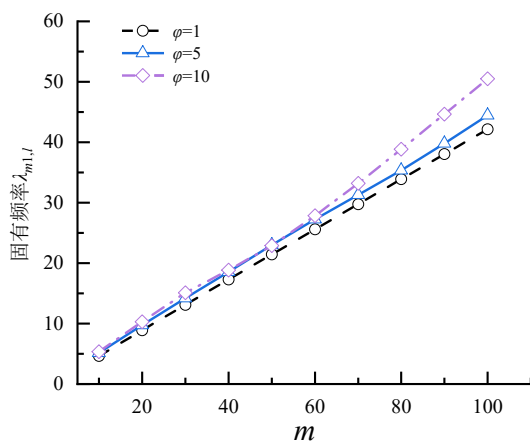
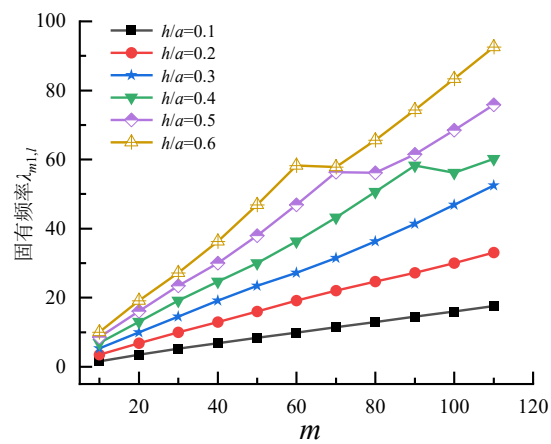
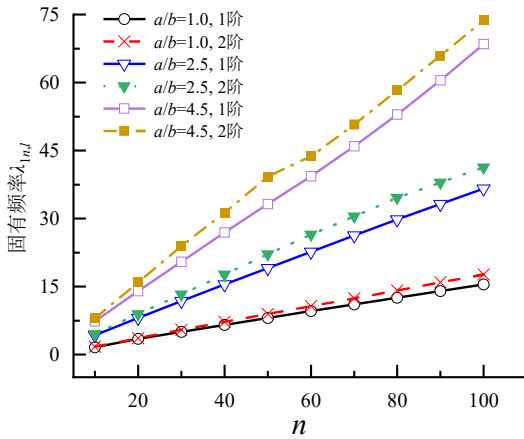
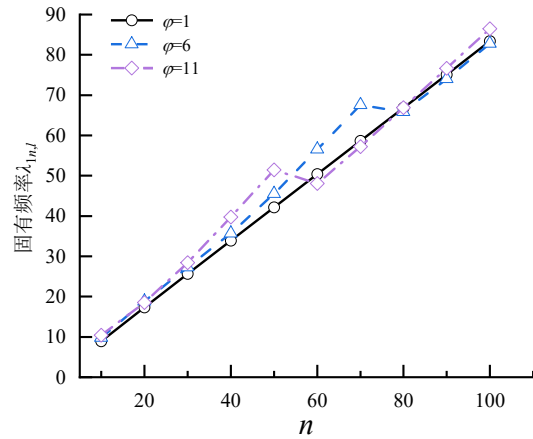
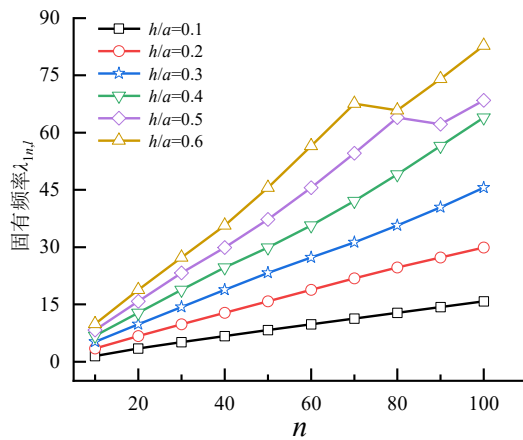

 图 3-16 $h/a=0.2$, $a/b=1.0$

 图 3-17 $h/a=0.5$, $a/b=1.0$

 图 3-18 $h/a=0.5$, $a/b=2.0$

 图 3-19 $h/a=0.15$, $\varphi=5$, $n=1$

 图 3-20 $h/a=0.3$, $a/b=1.5$, $n=1$

 图 3-21 $a/b=1.5$, $\varphi=7$, $n=1$

图 3-19 至图 3-21 给出了本文微分求积法等比布点下基于级数项数 $n=1$ 、给定的厚宽比 h/a 、长宽比 a/b 和梯度指数 φ 随另一级数项数 m 增大 $\lambda_{m,l}$ 的变化情况。图 3-19 给出了梯度指数 $\varphi=5$ ，厚宽比 $h/a=0.15$ 的薄板不同长宽比 a/b 下无量纲固有频率 $\lambda_{m,l}$ ($l=1,2$) 随级数项数 m 增大的变化情况，由图可见， $\lambda_{m,l}$ 值随 m 增大而增大，同一 m 下 $\lambda_{m,l}$ 值 ($l=1$ 或 2) 随长宽比 a/b 的增大仅有极小的增大，但总体还是长宽大的 $\lambda_{m,l}$ 值大 (见局部放大图)。图 3-20 给出了长宽比 $a/b=1.5$ ，厚宽比 $h/a=0.3$ 的中厚板不同梯度指数 φ 下无量纲固有频率 $\lambda_{m,l}$ ($l=1$) 随级数项数 m 增大的变化情况，由图可以看出，当级数项数 $m \in [10,60]$ 时，随着梯度指数 φ 的增大对 $\lambda_{m,l}$ 值仅有微小的增大，但总体还是 φ 值大的 $\lambda_{m,l}$ 值大 (见局部放大图)；当级数项数 $m \in [60,100]$ 时，随着 m 的增大不同梯度指数 φ 下的 $\lambda_{m,l}$ 值开始产生明显的区分度。图 3-21 给出了长宽比 $a/b=1.5$ ，梯度指数 $\varphi=7$ 不同厚宽比 h/a 下无量纲固有频率 $\lambda_{m,l}$ ($l=1$) 随级数项数 m 增大的变化情况，由图可以看出，总体随厚宽比的增大 $\lambda_{m,l}$ 值增大，厚宽比 $h/a=0.4$ ， $m \in [90,100]$ 时 $\lambda_{m,l}$ 出现回落，在随后 m 增大后又恢复增大，这一情况随厚宽比增大回落区间而提前出现， $h/a=0.5$ 回落区间在 $m \in [70,80]$ ， $h/a=0.6$ 回落区间在 $m \in [60,70]$ ，由此也可推断在厚宽比较小的情况下，回落区间出现在更靠后的区间。

图 3-22 至图 3-24 给出了本文微分求积法等比布点下基于级数项数 $m=1$ 、给定的厚宽比 h/a 、长宽比 a/b 和梯度指数 φ 随另一级数项数 n 增大 $\lambda_{1,n,l}$ 的变化情况。图 3-22 给出了梯度指数 $\varphi=4$ ，厚宽比 $h/a=0.1$ 的薄板不同长宽比 a/b 下无量纲固有频率 $\lambda_{1,n,l}$ ($l=1,2$) 随级数项数 n 增大的变化情况，由图可以看出， $\lambda_{1,n,l}$ 值随 n 增大而增大，同一 n 下 $\lambda_{1,n,l}$ 值 ($l=1$ 或 2) 随长宽比 a/b 的增大也有明显的增大。图 3-23 给出了长宽比 $a/b=1.5$ ，厚宽比 $h/a=0.4$ 的厚板不同梯度指数 φ 下无量纲固有频率 $\lambda_{1,n,l}$ ($l=1$) 随级数项数 n 增大的变化情况，由图可以看出， $\lambda_{1,n,l}$ ($l=1$)

总体随 n 增大呈增大态势，梯度指数 $\varphi = 6$ ， $n \in [70, 80]$ 时 $\lambda_{1n,l}$ 出现回落，在随后 n 增大后又恢复增大，这一情况随梯度指数的增大回落区间而提前出现， $\varphi = 11$ 回落区间在 $n \in [50, 60]$ 。图 3-24 给出了长宽比 $a/b = 1.0$ ，梯度指数 $\varphi = 6$ 不同厚宽比 h/a 下无量纲固有频率 $\lambda_{1n,l}$ ($l=1$) 随级数项数 n 增大的变化情况，由图可以看出，总体随厚宽比的增大 $\lambda_{1n,l}$ 值增大，厚宽比 $h/a = 0.5$ ， $n \in [80, 90]$ 时出现回落，在随后 n 增大后又恢复增大，这一情况随厚宽比增大回落区间提前出现， $h/a = 0.6$ 回落区间在 $n \in [70, 80]$ ，由此也可推断在厚宽比较小的情况下，回落区间出现在更靠后的区间。


 图 3-22 $h/a = 0.1$, $\varphi = 4$, $m = 1$

 图 3-23 $h/a = 0.4$, $a/b = 1.5$, $m = 1$

 图 3-24 $a/b = 1.0$, $\varphi = 6$, $m = 1$

3.4 本章小结

本章基于三维线弹性力学理论,运用微分求积法(DQM)对四边简支的FGM矩形单层板进行自由振动问题求解。采用双三角级数项数展开,自由振动问题转化为将三个方向上位移分量作为变量放入状态方程中,组成变系数微分方程组,经过处理得到控制方程及其边界条件式,最后求解得到相关自由振动问题的半解析解。整个求解过程简单清晰,没有引入大量变量,便于理解运用。在 3.3 节中,通过不同算例分析探讨了本文方法,即微分求积法(DQM)的正确性和有效性,并给出了文献以外的计算结果,可供其他方法参考,现总结如下:

第一,本章建立的FGM矩形板的控制方程为二阶变系数微分方程组,经过处理后,仅含三个位移分量变量,求解难度大大降低。

第二,在**算例 1**中,采用本文方法对沿厚度方向以方程式(3-17)变化作用的矩形单层板自由振动问题进行了计算,得到的精确解与文献[47]的插值矩阵法解、文献[32]的解相比都有较高的吻合度,验证了本文方法的正确性。通过进一步分析,表明本文解不受梯度指数与厚宽比的影响,在整个区间内都能保持较高的精度,体现了本文方法对于求解矩形板的有效性。此外,还给出了本文 DQM 的其他梯度指数与厚宽比的各种组合解,小数点后有效数字保留 5 位,可作为其他方法的参照解。

第三,在**算例 2**中,采用本文方法对沿厚度方向以方程式(3-18)变化作用的矩形板自由振动问题进行了计算,得到的精确解与文献[47]的插值矩阵法解、文献[44]的状态空间法解相比都有较高的吻合度,验证了本文方法的正确性。本文 DQM 解(节点数 $N=20$)的半解析解已经和文献[47]IMMS(划分区间 $N=80$)的解精度相仿,也和文献[44]划分多层的状态空间法解的精度相当,并且本文方法在靠近边界时依然能很好的处理板的连续性问题,甚至在某些级数项数与梯度指数下比文献[47]方法收敛更快,充分体现了微分求积法(DQM)求解 FGM 矩形板具有非常明显的优越性。

第四,本文方法是运用微分求积分法来求解控制方程,主要采用 FORTRAN 来编译求解,其处理方程式简便,计算量不大,计算速度快的同时也能保证精度。

第4章 功能梯度材料矩形板静力问题分析

4.1 引言

多层复合材料因其刚度与强度兼具、维护成本低等突出特点而广泛应用于航空航天、机械、土木工程、核能和汽车等领域。由于两种离散材料的结合,传统的层压复合材料在界面处表现出机械性能的不匹配。因此,应力集中通常发生在界面处,这会导致分层、基体开裂和粘合剂分离等形式的损坏^[1-4]。随着现代化大基建工业化的到来,工程应用中一些板壳结构的厚宽比增大,薄板理论无法精准计算 FGM 材料中厚板以及厚板的实际的应力-应变。其他诸如一些常见的 Reissner-Mindlin 板块理论^[11-13]、Sanders 板壳理论^[14]、Reddy 板理论^[15]、Zienkiewicz-Zhu (Z-Z) 理论^[16]等都引入了一些简化变量,只能使得三维线弹性力学等式只能部分被满足,这对于 FGM 矩形厚板的力学分析难免出现误差。

近年来,关于 FGM 材料板的力学分析是诸多学者所关心的焦点,出现了很多新的思想理论与解析方法。杨智勇^[27]等人针对功能梯度材料矩形板问题,基于三维弹性理论,采用插值矩阵法求解,得到了 FGM 矩形板位移、应力场的半解析解。Yadav^[108]等人采用正弦剪切法向变形理论对功能梯度材料(FGM)板进行了弯曲分析。Krysko^[109]等人建立了矩形平面上柔性多孔功能梯度(PFG) Kirchhoff 尺寸相关板的数学模型。并基于变分迭代法(VIM),分析了矩形平面上柔性 Kirchhoff 功能梯度尺寸相关多孔板的应力-应变状态的数值研究,验证了 VIM 方法的有效性和高精度。Asemi^[110]等人提出了一种高精度非线性三维能量有限元弹性力学方法,用于研究任意正交各向异性功能梯度板的屈曲问题。Zenkour^[111]基于广义剪切变形理论给出了承受横向均匀载荷的简支功能梯度矩形板静态响应的平衡方程,研究了不同条件下的影响并与文献中已知的结果进行了验证。

FGM 材料由于其自身材料独特的性质,对其诸多力学特性的分析还不充分,大多研究的都是基于的薄板与中厚板,采用的理论并没有从三维弹性力学理论本身出发。本章以三维弹性理论为基础,对四边简支 FGM 矩形板沿厚度方向变化讨论不同厚宽比下的静力问题。采用双三角级数展开,将其转化为以位移和应力未知量为基本变量的变系数常微分方程组,将 FGM 矩形板静力问题转化为求变系数常微分方程组的特征值问题,得到相应的控制方程。将简化后的控制方程用 Fortran 程序编译并结合微分求积法(DQM)求解,得到 FGM 矩形板的位移与应力。

4.2 四边简支功能梯度矩形板静态控制方程

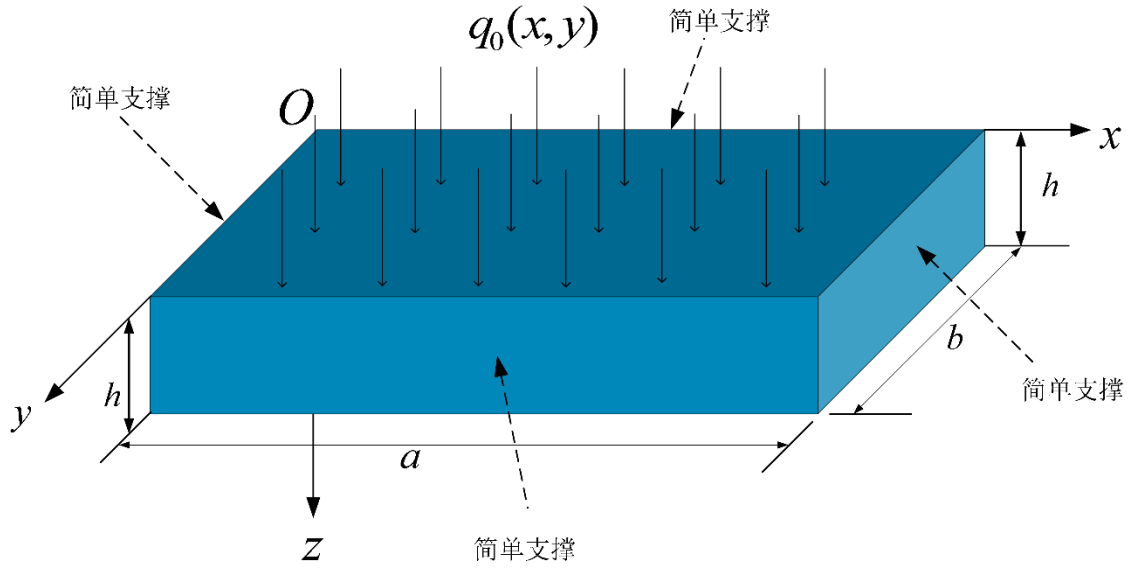


图 4-1 均布荷载作用下 FGM 矩形板

考虑长为 a ，宽为 b ，厚为 h 的 FGM 矩形板，如图 4-1，板的上表面受均布荷载 $q_0(x, y)$ 作用，建立三维直角坐标系，使原点位于板的一角，三条坐标轴都分别沿弹性主方向。在单向 FGM 板的三种变化情况中，考虑材料仅沿厚度 z 方向变化。不计体力，三维弹性力学平衡控制方程为：

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_{xx}(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}(x, y, z)}{\partial z} &= 0 \\
 \frac{\partial \tau_{xy}(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}(x, y, z)}{\partial z} &= 0 \\
 \frac{\partial \tau_{xz}(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}(x, y, z)}{\partial z} &= 0
 \end{aligned} \tag{4-1}$$

式中 $\sigma_{ii}(x, y, z)(i = x, y, z)$ 为正应力分量， $\tau_{ij}(x, y, z)(i, j = x, y, z)$ 为剪应力分量。

根据三维弹性力学，一般的应力-应变关系为：

$$\sigma = c\varepsilon \tag{4-2}$$

对于 FGM 矩形板沿厚度 z 方向变化，弹性系数矩阵 $c_{ij}(i, j = 1, 2, \dots, 6)$ 中的变量与弹性模量 E 、剪切模量 G 、泊松比 ν 的力学关系满足：

$$\begin{aligned}
 c_{11}(z) &= \frac{E_x(z)(1-\nu_{yz}\nu_{zy})}{\psi}, c_{12}(z) = c_{21}(z) = \frac{E_x(z)(\nu_{yx} + \nu_{zx}\nu_{yz})}{\psi} \\
 c_{22}(z) &= \frac{E_y(z)(1-\nu_{xz}\nu_{zx})}{\psi}, c_{13}(z) = c_{31}(z) = \frac{E_x(z)(\nu_{zx} + \nu_{yx}\nu_{zy})}{\psi} \\
 c_{33}(z) &= \frac{E_z(z)(1-\nu_{xy}\nu_{yx})}{\psi}, c_{23}(z) = c_{32}(z) = \frac{E_y(z)(\nu_{zy} + \nu_{xy}\nu_{zx})}{\psi} \\
 c_{44}(z) &= G_{yz}, c_{55}(z) = G_{zx}, c_{66}(z) = G_{xy} \\
 \psi &= 1 - \nu_{xy}\nu_{yx} - \nu_{yz}\nu_{zy} - \nu_{xz}\nu_{zx} - 2\nu_{xy}\nu_{yz}\nu_{zx}
 \end{aligned} \tag{4-3}$$

式(4-2)的整体可写为:

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_{11}(z) & c_{12}(z) & c_{13}(z) & 0 & 0 & 0 \\ C_{21}(z) & c_{22}(z) & c_{23}(z) & 0 & 0 & 0 \\ C_{31}(z) & c_{32}(z) & c_{33}(z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}(z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55}(z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}(z) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Gamma_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \Gamma_2}{\partial y} \\ \frac{\partial \Gamma_3}{\partial z} \\ \frac{\partial \Gamma_2}{\partial z} + \frac{\partial \Gamma_3}{\partial y} \\ \frac{\partial \Gamma_1}{\partial z} + \frac{\partial \Gamma_3}{\partial x} \\ \frac{\partial \Gamma_1}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma_2}{\partial x} \end{Bmatrix} = c\varepsilon \tag{4-4}$$

式中 $\Gamma_1(x, y, z), \Gamma_2(x, y, z), \Gamma_3(x, y, z)$ 代表矩形板沿 x, y, z 三个主方向的位移变量, 由式(4-4)可以得到:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= c_{11}(z) \frac{\partial \Gamma_1}{\partial x} + c_{12}(z) \frac{\partial \Gamma_2}{\partial y} + c_{13}(z) \frac{\partial \Gamma_3}{\partial z} \\
 \sigma_{yy} &= c_{21}(z) \frac{\partial \Gamma_1}{\partial x} + c_{22}(z) \frac{\partial \Gamma_2}{\partial y} + c_{23}(z) \frac{\partial \Gamma_3}{\partial z} \\
 \tau_{xy} &= c_{66}(z) \left(\frac{\partial \Gamma_1}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma_2}{\partial x} \right)
 \end{aligned} \tag{4-5}$$

设 $\Gamma_4(x, y, z) = \tau_{xz}(x, y, z)$, $\Gamma_5(x, y, z) = \tau_{yz}(x, y, z)$, $\Gamma_6(x, y, z) = \sigma_{zz}(x, y, z)$,

将式(4-4)代入式(4-1)中可将沿厚度 z 方向的FGM矩形板静力问题的三维弹性方程转化为如下耦合的变系数微分方程组^[47]:

$$\begin{cases}
\frac{\partial \Gamma_1}{\partial z} = -\frac{\partial \Gamma_3}{\partial x} + \frac{\Gamma_4}{c_{55}(z)} \\
\frac{\partial \Gamma_2}{\partial z} = -\frac{c_{13}(z)}{c_{33}(z)} \frac{\partial \Gamma_1}{\partial x} - \frac{c_{23}(z)}{c_{33}(z)} \frac{\partial \Gamma_2}{\partial y} + \frac{\Gamma_6}{c_{33}(z)} \\
\frac{\partial \Gamma_3}{\partial z} = -\frac{\partial \Gamma_3}{\partial z} + \frac{\Gamma_4}{c_{55}(z)} \\
\frac{\partial \Gamma_4}{\partial z} = \left[\frac{c_{13}^2(z)}{c_{33}(z)} - c_{11}(z) \right] \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial x^2} - c_{66}(z) \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial y^2} + \\
\quad \left[\frac{c_{13}(z)c_{23}(z)}{c_{33}(z)} - c_{12}(z) - c_{66}(z) \right] \frac{\partial^2 \Gamma_2}{\partial x \partial y} - \frac{c_{13}(z)}{c_{33}(z)} \frac{\partial \Gamma_6}{\partial x} \\
\frac{\partial \Gamma_5}{\partial z} = \left[\frac{c_{13}(z)c_{23}(z)}{c_{33}(z)} - c_{12}(z) - c_{66}(z) \right] \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial x \partial y} - \\
\quad c_{66}(z) \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial y^2} + \left[\frac{c_{23}^2(z)}{c_{33}(z)} - c_{22}(z) \right] \frac{\partial^2 \Gamma_2}{\partial y^2} - \frac{c_{23}(z)}{c_{33}(z)} \frac{\partial \Gamma_6}{\partial y} \\
\frac{\partial \Gamma_6}{\partial z} = -\frac{\partial \Gamma_4}{\partial x} - \frac{\partial \Gamma_5}{\partial y}
\end{cases} \quad (4-6)$$

根据图 4-1，四边简支 FGM 矩形板的边界条件为：

$$\begin{cases}
\sigma_{xx} = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 0 & (x=0, x=a) \\
\sigma_{yy} = \Gamma_1 = \Gamma_3 = 0 & (y=0, y=b) \\
\Gamma_4 = \Gamma_5 = 0 & (z=0) \\
\Gamma_6 = -q_0(x, y) & (z=0) \\
\Gamma_4 = \Gamma_5 = \Gamma_6 = 0 & (z=h)
\end{cases} \quad (4-7)$$

为了简化 FGM 矩形板的计算量，现将三个位移分量 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ 与三个应力分量 $\Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6$ 作为基本变量，并将这 6 个分量在板平面内沿 x, y 方向进行双三角级数的展开：

$$\begin{Bmatrix} \Gamma_1(x, y, z) \\ \Gamma_2(x, y, z) \\ \Gamma_3(x, y, z) \\ \Gamma_4(x, y, z) \\ \Gamma_5(x, y, z) \\ \Gamma_6(x, y, z) \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} \Gamma_{1,mn}^*(z) \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ \Gamma_{2,mn}^*(z) \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ \Gamma_{3,mn}^*(z) \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ \Gamma_{4,mn}^*(z) \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ \Gamma_{5,mn}^*(z) \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ \Gamma_{6,mn}^*(z) \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{Bmatrix} \quad (4-8)$$

式中 $\alpha = m\pi/a$, $\beta = n\pi/b$, $\Gamma_{1,mn}^*, \Gamma_{2,mn}^*, \Gamma_{3,mn}^*, \Gamma_{4,mn}^*, \Gamma_{5,mn}^*, \Gamma_{6,mn}^*$ 为所取级数项数的振幅函数, 为厚度 z 方向变化的函数关系。将式(4-8)代入(4-6)中可得到如下矩阵式:

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} \Gamma_{1,mn}^* \\ \Gamma_{2,mn}^* \\ \Gamma_{3,mn}^* \\ \Gamma_{4,mn}^* \\ \Gamma_{5,mn}^* \\ \Gamma_{6,mn}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha & \frac{1}{c_{55}(z)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & 0 & \frac{1}{c_{44}(z)} & 0 \\ \frac{c_{13}(z)}{c_{33}(z)}\alpha & \frac{c_{23}(z)}{c_{33}(z)}\beta & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{c_{33}(z)} \\ A_1 & A_2 & 0 & 0 & 0 & -\frac{c_{13}(z)}{c_{33}(z)}\alpha \\ B_1 & B_2 & 0 & 0 & 0 & -\frac{c_{23}(z)}{c_{33}(z)}\beta \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha & -\beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{1,mn}^* \\ \Gamma_{2,mn}^* \\ \Gamma_{3,mn}^* \\ \Gamma_{4,mn}^* \\ \Gamma_{5,mn}^* \\ \Gamma_{6,mn}^* \end{bmatrix} \quad ; m=1,2,\dots,\infty; n=1,2,\dots,\infty; z \in [0,h] \quad (4-9)$$

其中 A_1, A_2, B_1, B_2 分别为:

$$\begin{aligned} A_1 &= (c_{11}(z) - \frac{c_{13}^2(z)}{c_{33}(z)})\alpha^2 + c_{66}(z)\beta^2 \\ A_2 &= B_1 = (c_{12}(z) + c_{66}(z) - \frac{c_{13}(z)c_{23}(z)}{c_{33}(z)})\alpha\beta \\ B_2 &= c_{66}(z)\alpha^2 + (c_{22}(z) - \frac{c_{23}^2(z)}{c_{33}(z)})\beta^2 \end{aligned} \quad (4-10)$$

同时也可将板上部所受的均布荷载 $q_0(x, y)$ 进行如下双三角级数展开:

$$q_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn}^* \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \quad (4-11)$$

由于三角函数其自身的正交性, 可以反求出 q_{mn}^* 的表达式:

$$q_{mn}^* = \frac{4q_0(1 - \cos m\pi)(1 - \cos n\pi)}{mn\pi^2} \quad (4-12)$$

再将式(4-8)与式(4-11)代入边界条件式(4-7)中显然满足, 其经过展开的每一对级数项数 (m, n) 都应满足:

$$\begin{cases} \Gamma_{4,mn}^* = \Gamma_{5,mn}^* = 0 & (z=0) \\ \Gamma_{6,mn}^* = -q_{mn}^* & (z=0) \\ \Gamma_{4,mn}^* = \Gamma_{5,mn}^* = \Gamma_{6,mn}^* = 0 & (z=h) \end{cases} \quad (4-13)$$

此外, 可将式(4-8)与式(4-9)代入式(4-5)中化简得到以 $\Gamma_{1,mn}^*, \Gamma_{2,mn}^*, \Gamma_{6,mn}^*$ 三个变量的关系式来表达 $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$ 三个应力分量, 关系式满足如下:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(c_{11}(z) - \frac{c_{13}^2(z)}{c_{33}(z)} \right) \alpha \Gamma_{1,mn}^* + \left(c_{12}(z) - \frac{c_{13}(z)c_{23}(z)}{c_{33}(z)} \right) \beta \Gamma_{2,mn}^* - \frac{c_{13}(z)}{c_{33}(z)} \Gamma_{6,mn}^* \right] \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ \sigma_{yy} &= -\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(c_{12}(z) - \frac{c_{13}(z)c_{23}(z)}{c_{33}(z)} \right) \alpha \Gamma_{1,mn}^* + \left(c_{22}(z) - \frac{c_{23}^2(z)}{c_{33}(z)} \right) \beta \Gamma_{2,mn}^* + \frac{c_{23}(z)}{c_{33}(z)} \Gamma_{6,mn}^* \right] \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ \tau_{xy} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{66}(z) [\beta \Gamma_{1,mn}^* + \alpha \Gamma_{2,mn}^*] \cos(\alpha x) \cos(\beta y) \\ &\quad ; m=1,2,\dots,\infty ; n=1,2,\dots,\infty \end{aligned} \quad (4-14)$$

至此通过不断的简化替换, 基于三维弹性力学公式, 将一般性四边简支沿厚度 z 方向变化的 FGM 矩形板的静态基本方程转化为变系数常微分控制矩阵(4-9)在边界条件式(4-13)下求解特征值的问题。该方程可得到 $\Gamma_{1,mn}^*, \Gamma_{2,mn}^*, \Gamma_{3,mn}^*, \Gamma_{4,mn}^*, \Gamma_{5,mn}^*, \Gamma_{6,mn}^*$ 的解, 代入式(4-8)可得到 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6$ 的解, 再代入式(4-5)得到剩下的三个应力分量 $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$ 的解。

4.3 算例分析

为检验根据 4.2 节所得三维弹性理论解的正确性以及第二章微分求积法的有效性, 本节针对四边简支 FGM 矩形单层板受均布荷载作用的情况, 结合 5 个算例进行较为详细的分析研究。本章采用微分求积法(DQM)直接求解, 基于两点边值在 FORTRAN 程序中编译控制方程式(4-9)以及对应的边界条件式(4-13), 获得了四边简支 FGM 矩形板的 9 个应力-应变数值解。为了方便与文献[47]和文献[111]进行比较, 算例中的材料参数均与文献保持一致。

算例 1 取图 4-1 所示四边简支各向同性 FGM 三维弹性矩形板，长宽高分别为 a, b, h ，上表面受均布荷载 $q_0(x, y)$ ， $a = b = 5h = 1$ ，材料泊松比 $\nu_{xy} = \nu_{yz} = \nu_{zx} = 0.25$ ，弹性模量 $E_x = E_y = E_z = 200Gpa$ 为定值。

表 4-1 插值矩阵法(IMMS)与微分求积法(DQM)数值计算结果对比

$(a = b = 1)$					
z/h	$h/a = 0.2$			$h/a = 0.5$	
	文献[47]解		本文解	文献[47]解	本文解
	$m = n = 19$	$m = n = 99$	$m = n = 99$	$m = n = 19$	$m = n = 19$
$UE/(q_0h) (x = 0, y = 0.5)$					
0	9.43784	9.46389	9.46379	0.71146	0.71196
0.2	5.11811	5.11480	5.11482	0.14299	0.14251
0.6	-2.01886	-2.01889	-2.01893	-0.18539	-0.18492
1.0	-9.69059	-9.69059	-9.69076	-0.62770	-0.62795
$WE/(q_0h) (x = 0.5, y = 0.5)$					
0	33.0409	33.0498	33.0514	1.74426	1.74317
0.2	33.4220	33.4240	33.4295	1.65802	1.65859
0.6	33.4553	33.4553	33.4581	1.44088	1.44007
1.0	32.5815	32.5815	32.5793	1.25777	1.25709
$\sigma_{xx}/q_0 (x = 0.5, y = 0.5)$					
0	-7.10979	-7.14714	-7.14687	-1.32870	-1.32809
0.2	-4.21357	-4.21065	-4.21003	-0.73900	-0.73938
0.6	1.30223	1.30232	1.30301	0.15410	0.15457
1.0	7.03170	7.03170	7.03160	1.20977	1.20943
$\tau_{xy}/q_0 (x = 0, y = 0)$					
0	5.53630	6.04839	6.04799	1.50134	1.50114
0.2	2.52382	2.50105	2.50085	0.02243	0.02209
0.6	-1.17386	-1.17401	-1.17451	-0.27029	-0.27032
1.0	-5.28790	-5.28790	-5.28802	-0.81514	-0.81503
$\tau_{xz}/q_0 (x = 0, y = 0.5)$					
0	0	0	0	0	0
0.2	1.75360	1.80230	1.80208	0.83856	0.83797
0.6	2.22189	2.22225	2.22197	0.76072	0.76004
1.0	0	0	0	0	0

表 4-1 给出了本文解、文献[47]插值矩阵法的两对级数项数解的位移与应力结果的比较,可以看出无论是薄板($h/a=0.2$),还是厚板($h/a=0.5$),微分求积法求得的结果与文献具有高度的吻合性,说明了本文 DQM 方法对于求解 FGM 矩形板应力-应变问题的准确性与有效性,部分的应力应变在级数项数较小时已经收敛。其中剪应力分量 τ_{xy}/q_0 由于自身所处于板的角点($x=0, y=0$),其节点的剪应力计算复杂,显得两种方法的计算结果都不太稳定,但随着级数项数(m, n)的增大,最后的结果还是归于波动收敛。挠度位移 W 在薄板时板中心出的位移在厚度 z 方向上变化较小,但随着板厚增加,沿 z 方向出现较大波动。剪应力分量 τ_{xz}/q_0 则随着厚宽比的增加呈现减小的态势。

表 4-2 给出了本文微分求积法(DQM)计算不同厚宽比四边简支 FGM 矩形方板($a=b=1$)在均布荷载下的 9 个应力-应变分量沿厚度 z 方向变化的数值结果,级数项数取 $m=n=19$ 。从表中可以看出正应力分量 σ_{zz}/q_0 在板的上表面($z/h=0$)计算结果保持不变,除下表面外的其余的压应力计算结果随厚宽比增大而增大,而其它的 8 个应力-应变分量计算结果都随厚宽比增大而减小。此外,各个应力分量以及位移 U, V 沿厚度方向变化波动较大,挠度位移 W 计算结果也有可观的变化,厚宽比的增大进一步加大了挠度位移 W 在厚度 z 方向上的变化程度。另外,板角点处使得剪应力分量 τ_{xy}/q_0 方向发生变化的临界点随着厚宽比的增加而逐渐往板上表面靠近。

表 4-3 给出了本文微分求积法(DQM)计算不同厚宽比四边简支 FGM 长方形板($a=1, b=0.5$)在均布荷载下的 9 个应力-应变分量沿厚度 z 方向变化的数值结果,级数项数取 $m=n=19$ 。从表中可以到,随着长宽比(a/b)的增大,表中的各个应力应变分量的计算结果相较于表 4-2 都出现了不同程度的下降,其中三个主方向上的位移 U, V, W 出现明显的减小,挠度位移 W 随着板厚的增加,在 z 方向上的波动开始加剧。只有表 4-3 中正应力分量 σ_{zz}/q_0 在板的上表面($z/h=0$)计算结果比表 4-2 中的高,这可能由于均布荷载下受力面积减少的原因,除下表面外的其余的压应力计算结果随厚宽比增大出现先增大后减小的情况。

表 4-2 均布荷载下四边简支 FGM 方板的位移与应力($a=b=1$)

z/h	$h=0.1$	$h=0.2$	$h=0.3$	$h=0.4$	$h=0.5$
$UE/(q_0h) (x=a/4, y=b/2)$					
0	49.1031	6.07357	1.77067	0.73861	0.38298
0.3	19.2624	2.24020	0.57895	0.19001	0.05757
0.7	-19.6889	-2.45343	-0.72501	-0.30778	-0.16111
1.0	-49.5289	-6.28729	-1.90761	-0.82326	-0.42508
$VE/(q_0h) (x=a/2, y=0)$					
0	75.5495	9.43754	2.84821	1.26534	0.71138
0.3	29.2358	3.23632	0.75135	0.19364	0.01754
0.7	-30.2990	-3.78332	-1.12358	-0.47831	-0.24923
1.0	-76.3616	-9.69029	-2.91412	1.23736	-0.62761
$WE/(q_0h) (x=a/2, y=b/4)$					
0	343.789	24.2291	5.86291	2.44920	1.39676
0.3	345.784	24.5313	5.85149	2.32825	1.22593
0.7	345.596	24.3422	5.65549	2.12576	1.02078
1.0	343.317	23.7566	5.38320	1.96394	0.91144
$\tau_{xz}/q_0 (x=0, y=b/2)$					
0	0	0	0	0	0
0.3	4.16968	2.12703	1.43134	1.08422	0.88403
0.7	4.05528	1.93688	1.22798	0.87243	0.65627
1.0	0	0	0	0	0
$\tau_{yz}/q_0 (x=a/2, y=b/4)$					
0	0	0	0	0	0
0.3	1.71946	0.85776	0.55840	0.40381	0.31722
0.7	1.71879	0.86116	0.58714	0.45564	0.37207
1.0	0	0	0	0	0
$\sigma_{zz}/q_0 (x=a/2, y=b/2)$					
0	-0.93750	-0.93750	-0.93750	-0.93750	-0.93750
0.3	-0.75666	-0.77723	-0.78253	-0.79261	-0.81128
0.7	-0.21246	-0.21584	-0.21671	-0.22707	-0.24499
1.0	0	0	0	0	0
$\sigma_{xx}/q_0 (x=a/4, y=b/2)$					
0	-22.8172	-5.90235	-2.79296	-1.74463	-1.29463
0.3	-9.02020	-2.25950	-1.00058	-0.54566	-0.32312
0.7	8.93941	2.17188	0.92496	0.49481	0.29866
1.0	22.6999	5.78342	2.62917	1.49264	0.94398
$\sigma_{yy}/q_0 (x=a/2, y=b/2)$					
0	-27.8297	-7.10965	-3.27099	-1.93043	-1.32853
0.3	-11.0955	-2.80712	-1.27213	-0.73625	-0.48535
0.7	10.9675	2.68058	1.14528	0.60788	0.36272
1.0	27.7498	7.03156	3.19611	1.85063	1.20969
$\tau_{xy}/q_0 (x=0, y=0)$					
0	20.9324	5.53610	2.79081	1.88566	1.50124
0.3	7.71987	1.51644	0.41391	0.04609	-0.11889
0.7	-8.33939	-2.08466	-0.92776	-0.52413	-0.33870
1.0	-21.0129	-5.28772	-2.34884	-1.30627	-0.81464

表 4-3 均布荷载下四边简支 FGM 长方形板的位移与应力($a=1, b=0.5$)

z/h	$h=0.1$	$h=0.2$	$h=0.3$	$h=0.4$	$h=0.5$
$UE/(q_0h) (x=a/4, y=b/2)$					
0	4.86968	0.59522	0.17222	0.07539	0.04460
0.2	2.84350	0.31810	0.07612	0.02150	0.00372
0.8	2.93305	-0.36283	-0.10528	-0.04260	-0.02029
1.0	-4.95868	-0.64012	-0.19723	-0.08310	-0.03939
$VE/(q_0h) (x=a/2, y=0)$					
0	22.78480	2.90294	0.94248	0.47973	0.31931
0.2	12.95415	1.32958	0.25681	0.03111	-0.03271
0.8	-13.65622	-1.67051	-0.47506	-0.18757	-0.08714
1.0	-23.23792	-2.97591	-0.88787	-0.36032	-0.16570
$WE/(q_0h) (x=a/2, y=b/4)$					
0	30.93931	2.76595	0.94863	0.54973	0.39941
0.2	31.14635	2.69356	0.82814	0.41630	0.26374
0.8	30.85483	2.42783	0.60812	0.23107	0.10461
1.0	30.46964	2.33089	0.56558	0.20773	0.09045
$\tau_{xz}/q_0 (x=0, y=b/2)$					
0	0	0	0	0	0
0.2	1.46900	0.87797	0.67483	0.55222	0.46057
0.8	1.31712	0.57978	0.32695	0.20170	0.12812
1.0	0	0	0	0	0
$\tau_{yz}/q_0 (x=a/2, y=b/4)$					
0	0	0	0	0	0
0.2	1.62613	0.78247	0.55780	0.48518	0.46765
0.8	1.67286	0.84696	0.54556	0.37897	0.26424
1.0	0	0	0	0	0
$\sigma_{zz}/q_0 (x=a/2, y=b/2)$					
0	-1.01152	-1.01152	-1.01152	-1.01152	-1.01152
0.2	-0.88870	-0.90006	-0.90201	-0.88844	-0.86061
0.8	-0.10469	-0.11256	-0.10404	-0.09364	-0.08206
1.0	0	0	0	0	0
$\sigma_{xx}/q_0 (x=a/4, y=b/2)$					
0	-5.00658	-1.53113	-0.92892	-0.75542	-0.69756
0.2	-2.94473	-0.85194	-0.46891	-0.32812	-0.25176
0.8	2.74586	0.64372	0.25374	0.11886	0.05912
1.0	4.73951	1.22806	0.54682	0.28541	0.15567
$\sigma_{yy}/q_0 (x=a/2, y=b/2)$					
0	-11.73143	-3.17958	-1.69223	-1.23918	-1.07811
0.2	-6.83890	-1.68450	-0.72228	-0.37039	-0.19601
0.8	6.82700	1.64405	0.68032	0.34227	0.18601
1.0	11.68393	3.00069	1.33242	0.71643	0.40770
$\tau_{xy}/q_0 (x=0, y=0)$					
0	7.60762	2.29564	1.41813	1.16682	1.08202
0.2	3.87485	0.60138	0.06879	-0.06536	-0.09188
0.8	-4.37672	-1.04416	-0.43147	-0.21828	-0.11851
1.0	-7.51718	-1.87528	-0.80326	-0.41233	-0.22160

表 4-4 不同级数项数下四边简支 FGM 方板特定点的位移与应力

$$(a=b=1, h/a=0.3)$$

级数 项数	$UE/(q_0h)$	$VE/(q_0h)$	$WE/(q_0h)$	τ_{xz}/q_0	τ_{yz}/q_0	σ_{zz}/q_0	σ_{xx}/q_0	σ_{yy}/q_0
	$x=a/4$	$x=a/2$	$x=a/2$	$x=0$	$x=a/2$	$x=a/2$	$x=a/4$	$x=a/2$
(m,n)	$y=b/2$	$y=0$	$y=b/4$	$y=b/2$	$y=b/4$	$y=b/2$	$y=b/2$	$y=b/2$
	$z/h=0$	$z/h=0$	$z/h=0.5$	$z/h=0.5$	$z/h=0.5$	$z/h=0$	$z/h=0$	$z/h=0$
(19,19)	1.77067	2.84821	5.77048	1.50495	0.68281	-0.93750	-2.79296	-3.27099
(19,29)	1.77067	2.85511	5.77048	1.50514	0.68248	-0.98877	-2.82112	-3.32262
(19,39)	1.77067	2.85854	5.77046	1.50479	0.68285	-0.95285	-2.80152	-3.28654
(19,49)	1.77067	2.86059	5.77048	1.50524	0.68404	-0.98057	-2.81659	-3.31435
(19,59)	1.77067	2.86197	5.77049	1.50478	0.68279	-0.95798	-2.80432	-3.29165
(29,19)	1.76989	2.84891	5.77050	1.50609	0.68281	-0.98877	-2.75030	-3.29627
(39,19)	1.77051	2.84866	5.77047	1.51014	0.68281	-0.95285	-2.72751	-3.27846
(49,19)	1.77076	2.84878	5.77050	1.51750	0.68281	-0.98057	-2.74899	-3.29225
(59,19)	1.77054	2.84871	5.77048	1.52710	0.68281	-0.95798	-2.76394	-3.28098
(29,29)	1.76987	2.85599	5.77049	1.50650	0.68244	-1.04284	-2.77681	-3.35000
(39,39)	1.77051	2.85914	5.77045	1.51000	0.68286	-0.96844	-2.73506	-3.29419
(49,49)	1.77077	2.86147	5.77050	1.51878	0.68410	-1.02562	-2.77122	-3.33709

表 4-4 列出了厚宽比为 $h/a=0.3$ (中厚板) 的本文微分求积法(DQM)解取不同级数项数时的 FGM 方板($a=b=1$) 计算结果对比。由表中可以看出, 板上表面($z/h=0$) 的位移 U, V 、应力 σ_{xx}, σ_{yy} ; 板中间($z/h=0.5$) 的挠度位移 W 、应力 τ_{xz}, τ_{yz} 均收敛很快, 当 $m=n=19$ 时本文数值结果已经很稳定了, 与 $m=n=49$ 相比 $U, V, W, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_{xx}$ 相对误差最高 0.91%, 最低 0.0056%。板上表面中心处的应力 σ_{zz} 级数取(19,29)和(29,19)、(19,39) 和(39,19)等其余呈对称形式的项数排列计算结果一样, 随 (m,n) 波动, 但随着两个级数项数同时增大, 其数值结果趋于收敛。

表 4-5 给出了厚宽比为 $h/a=0.1$ (薄板) 的本文微分求积法(DQM)解取不同级数项数时的 FGM 长方形板($a=1, b=0.5$) 计算结果对比。从表中可以看出, 板上表面和中间的各个应力应变分量在级数较小时均收敛的很快, $m=n=19$ 时本文数值结果与 $m=n=49$ 的相比相对误差最高 1.4%, 最低 0.0038%。综合表 4-4、表 4-5 来

看，随着厚宽比的增大想要得到更精确的数值计算结果，就得取相对更大的级数项数进行迭代计算。

表 4-5 不同级数项数下四边简支 FGM 长方形板特定点的位移与应力

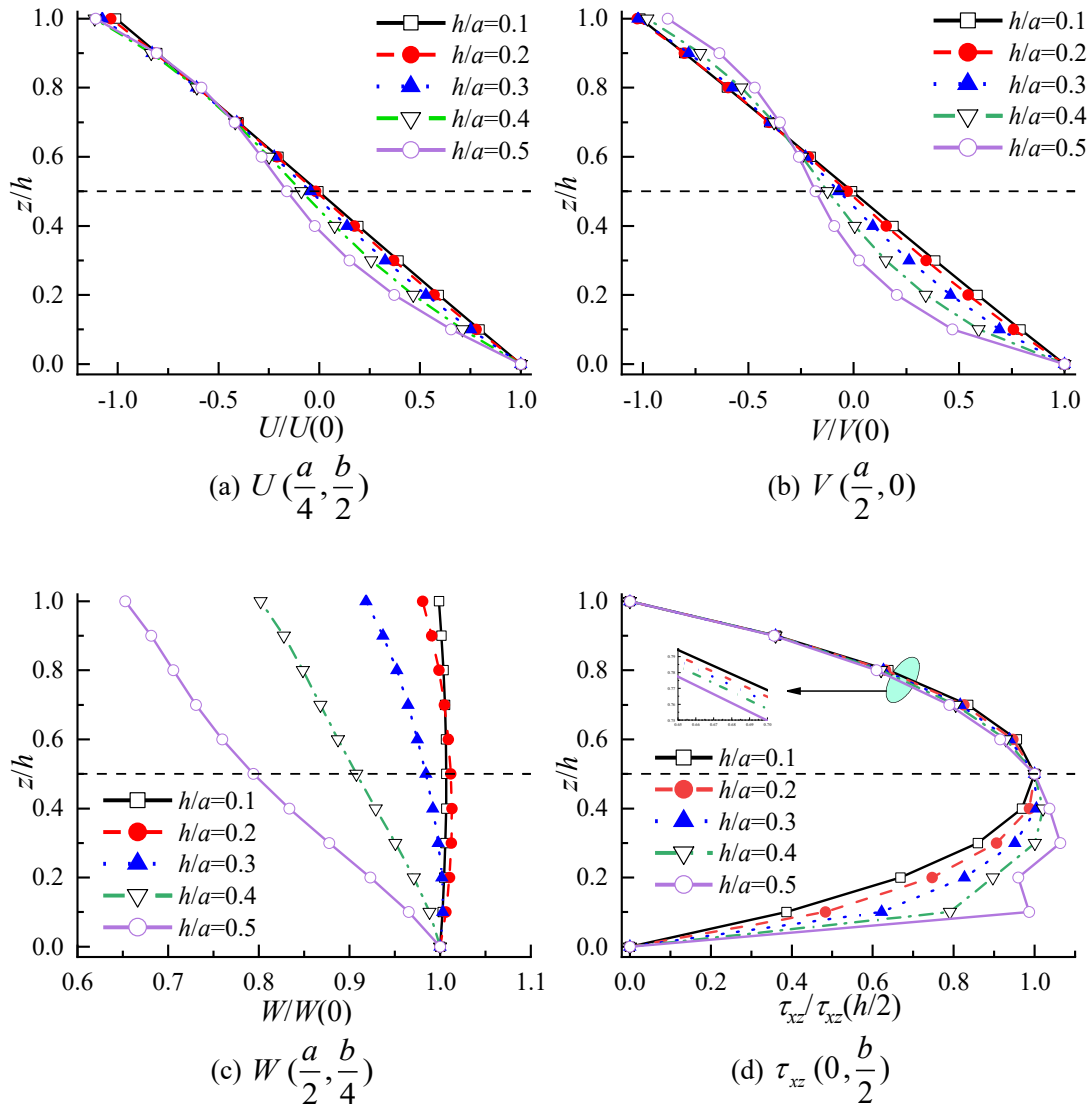
$$(a=1, b=0.5, h/a=0.1)$$

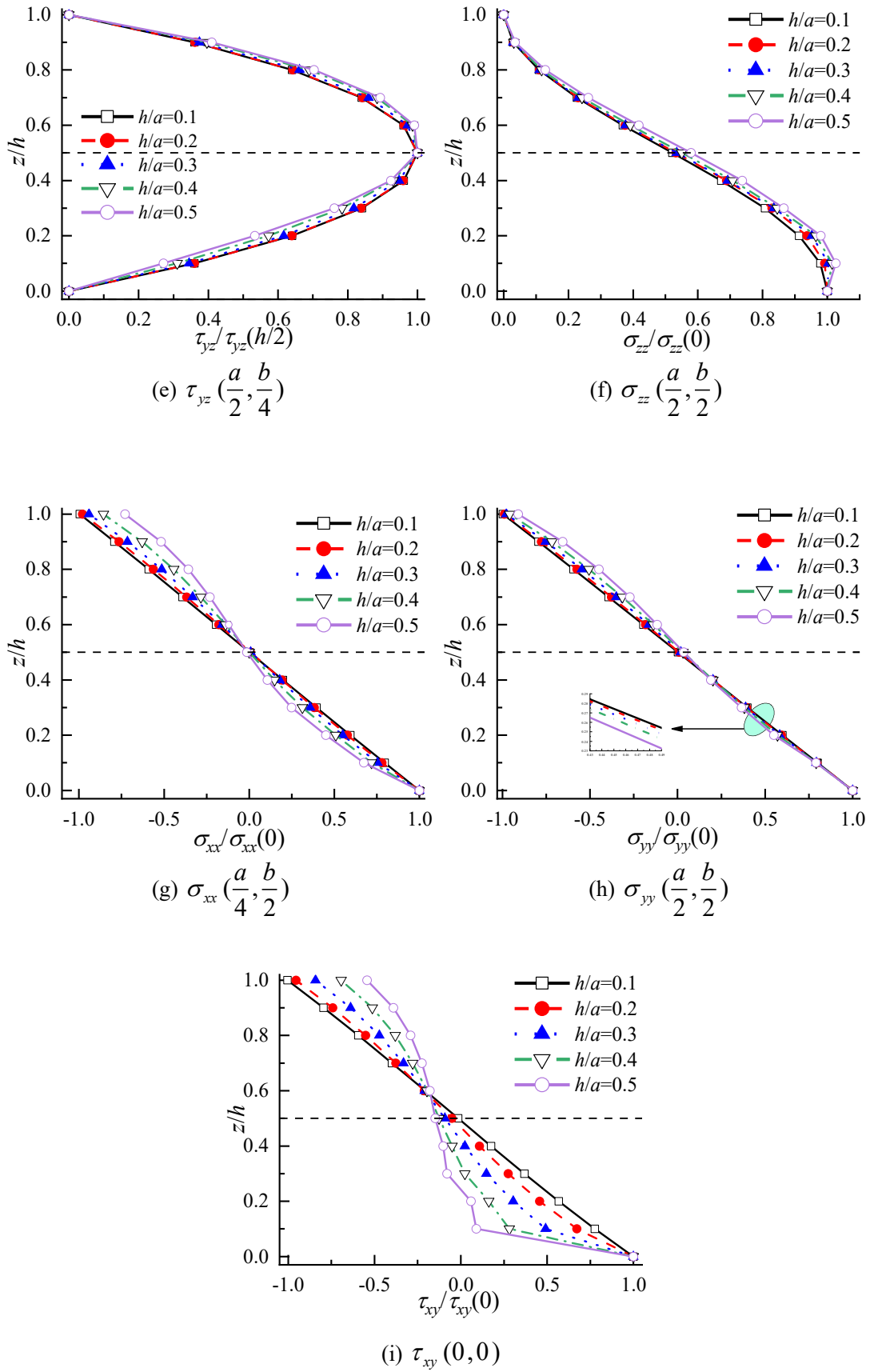
级数 项数	$UE/(q_0h)$	$VE/(q_0h)$	$WE/(q_0h)$	τ_{xz}/q_0	τ_{yz}/q_0	σ_{zz}/q_0	σ_{xx}/q_0	σ_{yy}/q_0
	$x=a/4$	$x=a/2$	$x=a/2$	$x=0$	$x=a/2$	$x=a/2$	$x=a/4$	$x=a/2$
(m,n)	$y=b/2$	$y=0$	$y=b/4$	$y=b/2$	$y=b/4$	$y=b/2$	$y=b/2$	$y=b/2$
	$z/h=0$	$z/h=0$	$z/h=0.5$	$z/h=0.5$	$z/h=0.5$	$z/h=0$	$z/h=0$	$z/h=0$
(19,19)	4.86968	22.7848	31.1488	2.06973	2.57477	-1.01152	-5.00658	-11.7314
(19,29)	4.86968	22.7951	31.1488	2.06962	2.57410	-0.96920	-4.98356	-11.6890
(19,39)	4.86968	22.8002	31.1488	2.06959	2.57408	-0.94649	-4.97128	-11.6662
(19,49)	4.86968	22.8032	31.1488	2.06962	2.57465	-0.96790	-4.98285	-11.6877
(19,59)	4.86968	22.8053	31.1488	2.06968	2.57312	-0.98276	-4.99088	-11.7025
(29,19)	4.86725	22.7878	31.1501	2.09156	2.57496	-1.06684	-4.96168	-11.7600
(39,19)	4.86920	22.7866	31.1500	2.09607	2.57494	-1.02808	-4.93745	-11.7401
(49,19)	4.86999	22.7872	31.1500	2.09707	2.57494	-1.05799	-4.96030	-11.7554
(59,19)	4.86927	22.7869	31.1500	2.09736	2.57494	-1.03361	-4.97623	-11.7430
(29,29)	4.86728	22.7985	31.1502	2.09142	2.57426	-1.02221	-4.93981	-11.7155
(39,39)	4.86920	22.8023	31.1500	2.09586	2.57424	-0.96199	-4.90493	-11.6738
(49,49)	4.86997	22.8063	31.1500	2.09690	2.57484	-1.01236	-4.93778	-11.7099

图 4-2 给出了四边简支 FGM 矩形方板上表面受均布荷载不同宽厚比下 9 个应力应变沿厚度 z 方向的变化趋势，图 4-3 则给出了四边简支 FGM 长方形板的 9 个应力应变分量沿厚度 z 方向的变化情况。由于有些位移与应力数值差异较大，统一将得到的解进行归一化处理。以下将通过分析不同厚宽比下的应力-应变沿厚度 z 方向的分布特点，说明薄板理论不能作为求解中厚板以及厚板静力问题的基本理论。

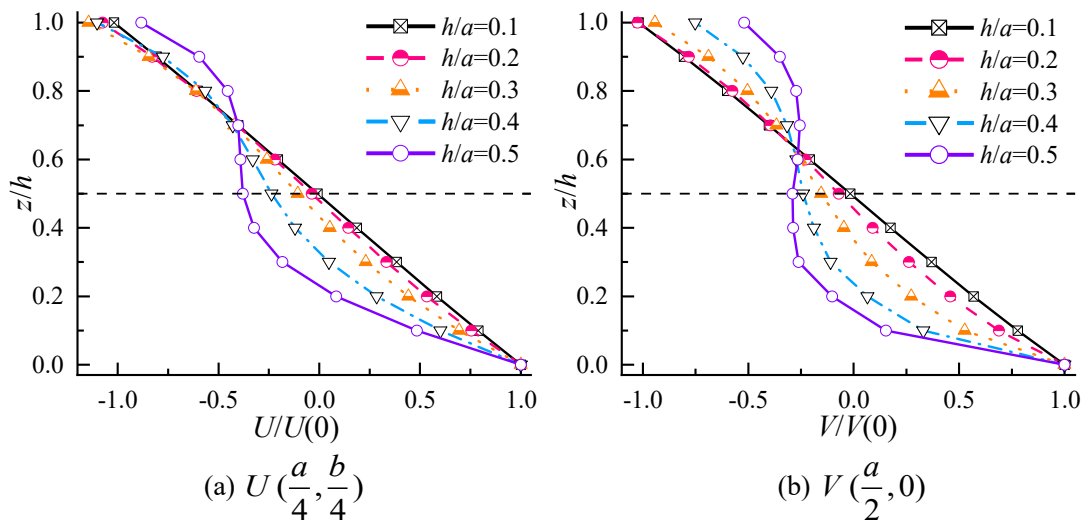
从图 4-2(a)和(b)中可以看出，当板为厚宽比 h/a 较小的薄板时($h/a=0.1,0.2$)，位移 U,V 可近似看作线性分布，随着厚宽比进一步扩大($h/a>0.2$)，其曲线则呈现为非线性分布，这说明经典板块理论中的直法线假设在厚宽比不大的薄板中是基本成立的，随着厚宽比的增大便不再适用。从图 4-2(c)可以看出，在厚宽比不

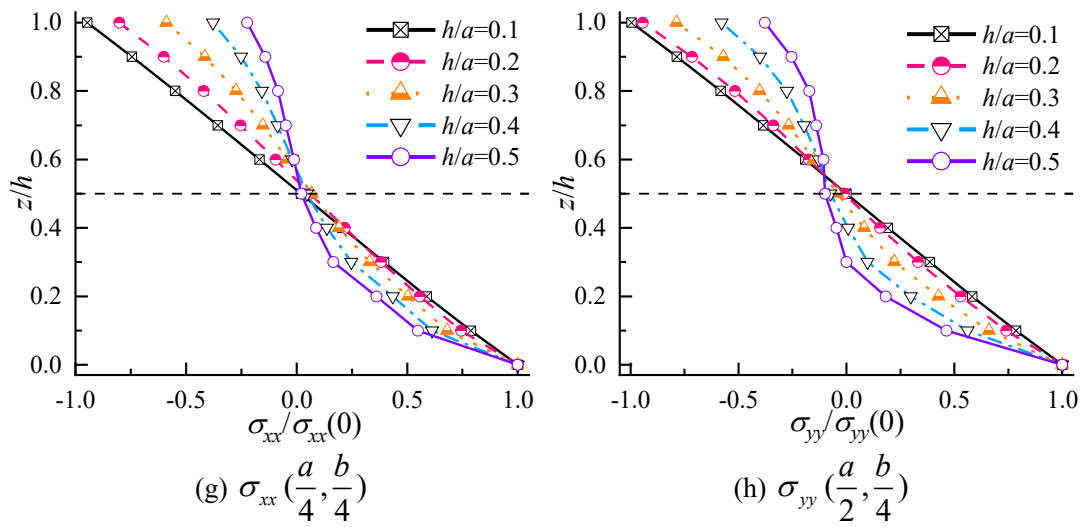
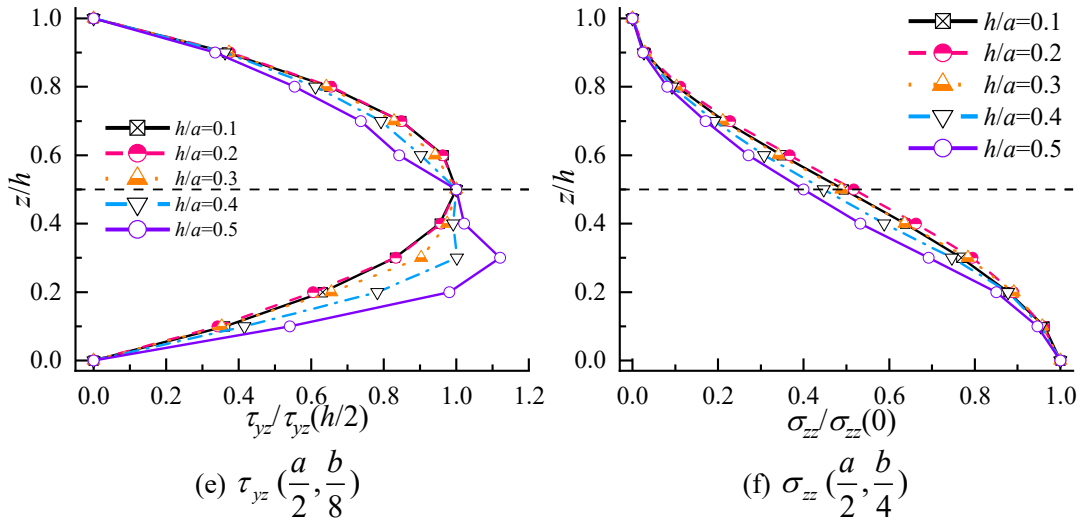
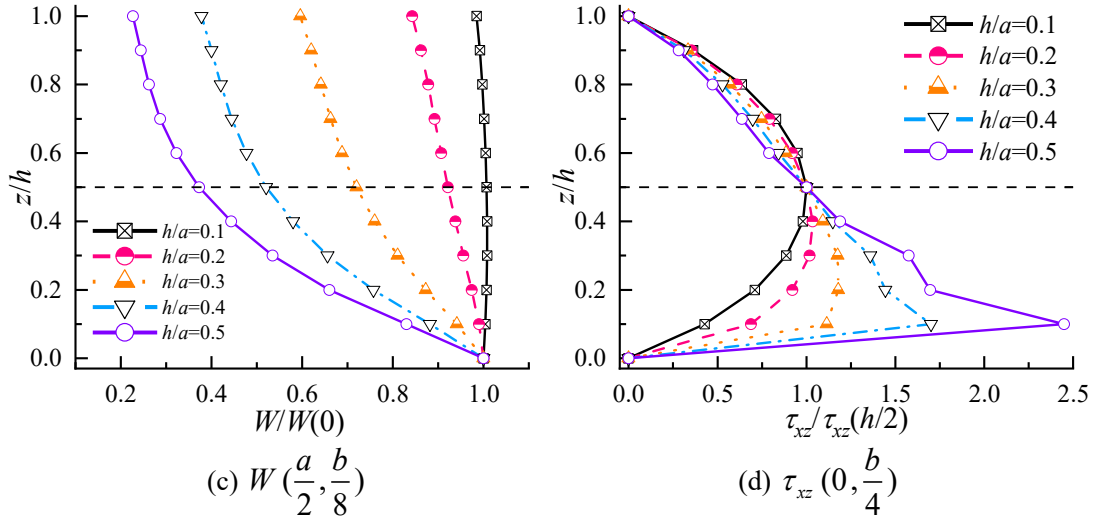
大时，挠度位移 W 沿厚度 z 方向变化不大，随着厚宽比的增大沿厚度 z 方向的挠度位移数值的差距开始拉大，这说明忽略横向剪切变形的薄板理论不再适用于中厚板和厚板静力问题的求解。图 4-2(d)、(e)和(i)表明剪应力 τ_{xy} 仅在厚宽比较小的薄板情况下呈线性分布，而其余两个剪应力 τ_{xz}, τ_{yz} 同样不是线性分布。由图 4-2(f)可以看出，任一厚宽比板中心处的正应力 σ_{zz} 函数分布也并不是线性从 q_0 到 0 的，这是薄板理论所无法解释的。从图 4-2(g)和(h)可以看到，薄板($h/a=0.1, 0.2$)的正应力 σ_{xx}, σ_{yy} 沿厚度 z 方向近似为线性的分布，而中厚板以及厚板则是非线性曲线分布，再次说明经典薄板理论的假设对于中厚板以及厚板不成立。

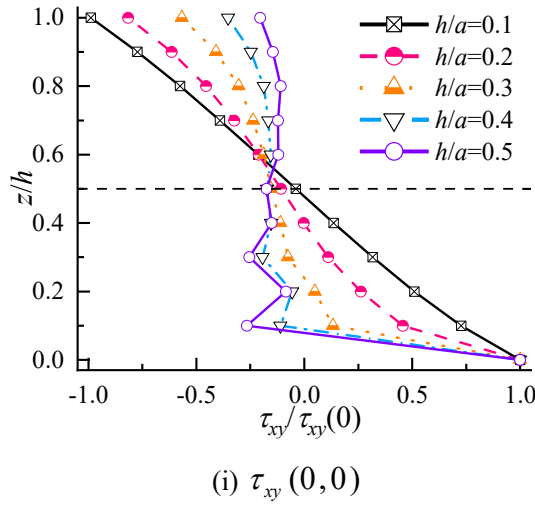



 图 4-2 四边简支 FGM 方板位移与应力随 z 的分布($a=b=1$)

取 $a=1, b=0.5$ ，即长宽比为 2 的 FGM 矩形板，选取与图 4-2 相同的应力应变位置，作出图 4-3(a)-(i)。由图 4-3(a)和(b)中可以看出，随着长宽比的增大与图 4-2(a)和(b)相比，仅有薄板($h/a=0.1$)位移 U, V 可近似看作线性分布，随着厚宽比扩大($h/a>0.1$)，其不同厚宽比的非线性分布曲线呈现了较大的分离度，这说明经典板块理论对于薄板是基本成立的，但随着厚宽比的增大便不再适用，此外随着长宽比的增大，薄板理论所适用的薄板厚度范围将进一步缩小。从图 4-3(c)可得到，仅有厚宽比 $h/a=0.1$ 时，挠度位移 W 沿厚度 z 方向无太大波动，此后随着厚宽比的增大挠度位移数值差距增大，这说明薄板理论忽略剪切变形的假设不再适用于厚板位移与应力问题的求解。从图 4-3(d)、(e)和(i)可见剪应力 $\tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{xy}$ 已经不是简单的线性分布。随着厚宽比的增大其曲线变化的幅度相较于低长宽比的图 4-2(d)、(e)和(i)有着更加明显的区分度。这说明长宽比也是一个影响薄板理论适用板范围的因素。由图 4-3(f)可以看出，不同厚宽比板中心处的正应力 σ_{zz} 数值分布都不是简单的线性降为 0，这是经典板块理论无法给出的。由图 4-3(g)和(h)可见，仅当($h/a=0.1$)薄板的正应力 σ_{xx}, σ_{yy} 呈线性分布，不同厚宽比的非线性比变化曲线的数值结果相较于低长宽比的图 4-2 (g)和(h)产生更加清晰的辨析度。也再次说明了经典薄板理论的假设对于长宽比更大的厚板很难成立，对于长宽比更大的薄板成立的厚度范围要求更高。






 图 4-3 四边简支 FGM 长方形板位移与应力随 z 的分布($a=1, b=0.5$)

算例 2 取图 4-1 所示四边简支正交各向异性 FGM 矩形板，长为 a 、宽为 b 、高为 h 、，上表面受均布荷载 $q_0(x,y)$ ，长度 a 与宽度 b 相等， $a=b=5h=1$ ，三个方向材料的泊松比关系为 $\nu_{xy}=\nu_{yz}=\nu_{zx}=0.25$ ，三个方向上的弹性模量关系为 $E_x=10E_y=10E_z$ ， $G_{xy}=G_{xz}=0.6E_z$ ， $G_{yz}=0.5E_z$ 。

表 4-6 中给出了四边简支方板($a=b=1$)厚宽比 $h/a=0.2$ 时沿厚度方向无量纲应力应变的本文 DQM 解与文献[47]的计算结果比较，本文解级数项数取 $m=n=19$ 和 99。由表可以看出，本文解与文献[47]插值矩阵法的两种级数项数计算值吻合度都很高，验证了本文微分求积法(DQM)在计算正交各向异性板静力问题的有效性与准确性。上述两种计算方法都是随级数项数的增大而趋于波动收敛，其中简支边中点($x=0, y=0.5$)切应力分量 τ_{xy}/q_0 与板角点($x=0, y=0$)切应力分量 τ_{xz}/q_0 分别由于选取的级数项数较小和处于板的剪应力复杂的角点原因，显得两种方法的计算结果都不太稳定，但随着级数项数(m,n)的增大，两者结果都趋于收敛。

表 4-6 均布荷载下四边简支 FGM 方板的位移与应力变化情况
($a=b=1, h/a=0.2$)

面内位置 ($x/a, y/b$)	力学量	z/h	文献[47]IMMS 解		本文 DQM 解	
			$m=n=19$	$m=n=99$	$m=n=19$	$m=n=99$
板中点 (0.5,0.5)	$\frac{WE_z}{q_0 h}$	0.0	13.7081	13.7159	13.7074	13.7152
		0.2	13.6859	13.6873	13.6854	13.6866
		0.4	13.6096	13.6098	13.6090	13.6091
		0.6	13.5116	13.5116	13.5109	13.5109
		0.8	13.3932	13.3932	13.3926	13.3926
		1.0	13.2274	13.2274	13.2267	13.2268
	$\frac{\sigma_{xx}}{q_0}$	0.0	-17.0106	-17.0990	-17.0093	-17.0885
		0.2	-8.89402	-8.88676	-8.87482	-8.87476
		0.4	-2.74322	-2.74075	-2.73744	-2.72807
		0.6	2.68271	2.68356	2.68381	2.69523
		0.8	8.77409	8.77444	8.77359	8.78547
		1.0	16.9642	16.9647	16.9634	16.9840
	$\frac{\sigma_{yy}}{q_0}$	0.0	-2.46821	-2.50130	-2.46809	-2.50092
		0.2	-1.50094	-1.49771	-1.50054	-1.49468
		0.4	-0.52620	-0.52559	-0.52607	-0.52387
		0.6	0.43335	0.43339	0.43334	0.43427
		0.8	1.40554	1.40553	1.40547	1.40609
		1.0	2.41746	2.41747	2.41736	2.41858
简支边 $y=0$ 中间 (0.5,0)	$\frac{VE_z}{q_0 h}$	0.0	4.22890	4.25939	4.22865	4.25914
		0.2	2.16503	2.16183	2.16459	2.16709
		0.4	0.50060	0.50035	0.50058	0.50175
		0.6	-1.04210	-1.04211	-1.04203	-1.04161
		0.8	-2.63048	-2.63048	-2.63027	-2.63011
		1.0	-4.42030	-4.42030	-4.42004	-4.41985
	$\frac{UE_z}{q_0 h}$	0.0	2.89165	2.90342	2.89143	2.90373
		0.2	1.34155	1.34204	1.34313	1.34752
		0.4	0.36582	0.36595	0.36606	0.36877
		0.6	-0.45267	-0.45263	-0.45250	-0.45067
		0.8	-1.39748	-1.39747	-1.39710	-1.39565
		1.0	-2.80011	-2.80009	-2.79986	-2.79753
简支边 $x=0$ 中间 (0,0.5)	$\frac{\tau_{xz}}{q_0}$	0.0	0	0	0	0
		0.2	2.53212	2.49097	2.48970	2.25330
		0.4	3.17440	3.15910	3.16665	3.00329
		0.6	3.04428	3.03959	3.04268	2.95529
		0.8	2.12294	2.12169	2.12284	2.09207
		1.0	0	0	0	0
	$\frac{\tau_{xy}}{q_0}$	0.0	3.56926	4.20966	3.56905	4.22702
		0.2	1.26743	1.26394	1.27766	1.49178
板角点 (0,0)	$\frac{\tau_{xy}}{q_0}$	0.4	0.19448	0.19671	0.19642	0.30997
		0.6	-0.70954	-0.70863	-0.70906	-0.64215
		0.8	-1.71134	-1.71102	-1.71093	-1.66034
		1.0	-3.07432	-3.07390	-3.07404	-2.99512

表 4-7 不同厚宽比下四边简支 FGM 方板的位移与应力($a=b=1$)

z/h	$h=0.1$	$h=0.2$	$h=0.3$	$h=0.4$	$h=0.5$
$UE/(q_0h) (x=0, y=b/2)$					
0	22.2034	2.89143	0.94185	0.46599	0.29496
0.3	8.18898	0.81391	0.15169	0.01892	-0.01612
0.5	-0.07183	-0.04516	-0.03620	-0.03113	-0.02685
0.7	-8.31871	-0.89104	-0.21164	-0.07029	-0.02947
1.0	-22.1817	-2.79986	-0.82705	-0.34033	-0.16474
$VE/(q_0h) (x=a/2, y=b/4)$					
0	15.2513	2.36643	0.86413	0.43294	0.25912
0.3	5.92598	0.85205	0.27369	0.10628	0.03578
0.5	-0.21205	-0.10555	-0.07399	-0.06367	-0.05952
0.7	-6.35009	-1.06361	-0.41762	-0.22124	-0.13545
1.0	-15.6751	-2.58080	-1.00308	-0.51787	-0.29948
$WE/(q_0h) (x=a/2, y=b/2)$					
0	157.423	13.7074	4.06415	1.96919	1.23734
0.3	157.905	13.6511	3.90227	1.76600	1.01276
0.5	157.920	13.5619	3.79135	1.64450	0.88448
0.7	157.714	13.4553	3.70214	1.55888	0.79901
1.0	156.952	13.2267	3.57560	1.46975	0.72872
$\tau_{xz}/q_0 (x=0, y=b/2)$					
0	0	0	0	0	0
0.3	6.05173	2.97808	1.94573	1.45084	1.18116
0.7	5.84073	2.69680	1.62767	1.09307	0.77550
1.0	0	0	0	0	0
$\tau_{yz}/q_0 (x=a/2, y=0)$					
0	0	0	0	0	0
0.3	2.27584	1.27526	0.94531	0.78125	0.68322
0.7	2.14923	1.06847	0.72425	0.54912	0.43525
1.0	0	0	0	0	0
$\sigma_{zz}/q_0 (x=a/2, y=b/2)$					
0	-0.93750	-0.93750	-0.93750	-0.93750	-0.93750
0.3	-0.76209	-0.78121	-0.79058	-0.80169	-0.81081
0.7	-0.21361	-0.21803	-0.22613	-0.24099	-0.25368
1.0	0	0	0	0	0
$\sigma_{xx}/q_0 (x=a/2, y=b/4)$					
0	-50.9481	-12.7925	-5.91682	-3.68228	-2.77441
0.3	-19.5057	-4.26812	-1.52551	-0.60844	-0.21003
0.7	19.3734	4.14786	1.44886	0.60737	0.28233
1.0	50.8989	12.6949	5.64150	3.13687	1.94241
$\sigma_{yy}/q_0 (x=a/2, y=b/2)$					
0	-7.59105	-2.46809	-1.43628	-1.01512	-0.79755
0.3	-3.06503	-1.00999	-0.59174	-0.41805	-0.31596
0.7	2.97001	0.91608	0.49479	0.31730	0.22126
1.0	7.54047	2.41736	1.38603	0.95852	0.70264
$\tau_{xy}/q_0 (x=0, y=0)$					
0	11.0762	3.56905	2.22416	1.77151	1.57434
0.3	3.74370	0.68260	0.12648	-0.07168	-0.17052
0.7	-6.37287	-1.18388	-0.58648	-0.36523	-0.25730
1.0	-10.9528	-3.07404	-1.51100	-0.90324	-0.58489

表 4-7 给出了均布荷载下不同厚宽比四边简支 FGM 方板($a=b=1$)9 个位移应力分量的 DQM 解, 级数项数取 $m=n=19$ 。从表中可以看出, 板上下表面的正应力分量值 σ_{zz}/q_0 无变化, 其余压应力数值结果随厚宽比增大而增大, 其余 8 个位移应力分量计算值都随厚宽比增大而减小。此外, 各个位移应力分量沿厚度 z 方向变化程度随着厚宽比的增加波动的幅度愈发强烈, 例如挠度位移 W 在薄板时(如 $h/a=0.1$)沿厚度方向变化不大, 在厚板时(如 $h/a=0.5$)沿厚度方向挠度位移 W 有了明显的差距, 这说明挤压变形对于厚板而言不能忽视, 经典薄板理论将不能适用厚板。

表 4-8 给出了均布荷载下不同厚宽比四边简支 FGM 长方形板($a=1, b=1/3$)9 个位移应力分量的 DQM 解, 级数项数取 $m=n=19$ 。由表 4-8 可见, 随着矩形板长宽比的增大, 表中的各个分量同一厚度的计算结果相较表 4-7 都出现了不同程度的减小, 板中心挠度位移 W 在位移方面下降最多, 正应力 σ_{xx}/q_0 在应力方面下降最多。仅有表中的板上表面正应力分量 σ_{zz} 比表 4-7 中的大, 这可能由于均布荷载受力面积减少的原因, 其余沿厚度方向的压应力数值随厚宽比增大而减小。

表 4-9 列出了 FGM 方形薄板($a=b=1, h/a=0.1$)取不同级数项数时特定点本文 DQM 解的对比。从表中可以得到, 薄板各个位移应力均收敛很快, 级数取 $m=n=19$ 的本文数值结果已经很稳定了, 与 $m=69, n=79$ 相比相对误差最高为切应力 τ_{xz}/q_0 的 0.577%, 最低为挠度位移 W 的 0.01%。考虑到计算成本与准确性, 可以选取 $m=n=19$ 作为薄板的解。

表 4-10 给出了 FGM 长方形中厚板($a=1, b=1/3, h/a=0.3$)取不同级数项数时特定点本文 DQM 解的对比。从表中可以看出, 随着长宽比与厚宽比的双重增大, 部分位移应力分量仍然收敛的很快, 例如 V, W, σ_{zz} 当 m 和 n 取较小时就很稳定; 其余位移应力分量处于波动收敛, 例如 $U, \sigma_{xx}, \sigma_{yy}$ 随着 m 和 n 的增加在某个区间内起伏不定且最终归于收敛。结合表 4-9 与表 4-10 分析, 针对高长宽比的矩形厚板, 要得到精确的数值解, 需要进行更多的迭代计算选取更大的级数项数。

表 4-8 不同厚宽比下四边简支 FGM 矩形板的位移与应力($a=1, b=1/3$)

z/h	$h=0.1$	$h=0.2$	$h=0.3$	$h=0.4$	$h=0.5$
$UE/(q_0h) (x=0, y=b/6)$					
0	1.51115	0.24129	0.11809	0.08315	0.06588
0.3	0.42918	0.00630	-0.01447	-0.01373	-0.01125
0.5	-0.03575	-0.01904	-0.01218	-0.00789	-0.00507
0.7	-0.48978	-0.04038	-0.00873	-0.00323	-0.00167
1.0	-1.42132	-0.14343	-0.03022	-0.00720	-0.00113
$VE/(q_0h) (x=a/2, y=b/12)$					
0	7.53993	1.03068	0.40507	0.25800	0.19912
0.3	2.66335	0.17644	-0.03352	-0.06471	-0.06258
0.5	-0.21043	-0.12910	-0.09783	-0.07327	-0.05077
0.7	-3.04992	-0.39890	-0.12827	-0.05778	-0.02862
1.0	-7.76758	-0.99436	-0.27068	-0.08740	-0.02846
$WE/(q_0h) (x=a/2, y=b/6)$					
0	10.0532	1.20263	0.55678	0.38605	0.30456
0.3	10.0136	0.99796	0.33734	0.17492	0.10719
0.5	9.92153	0.89308	0.24928	0.10247	0.04932
0.7	9.80340	0.82657	0.20092	0.06579	0.02356
1.0	9.54687	0.75583	0.16692	0.04663	0.01298
$\tau_{xz}/q_0 (x=0, y=b/6)$					
0	0	0	0	0	0
0.3	1.40310	0.67382	0.44538	0.35494	0.31592
0.7	1.15512	0.38220	0.17062	0.08866	0.05490
1.0	0	0	0	0	0
$\tau_{yz}/q_0 (x=a/2, y=0)$					
0	0	0	0	0	0
0.3	2.03634	1.05526	0.77497	0.67084	0.61835
0.7	1.82389	0.81463	0.47489	0.29128	0.18000
1.0	0	0	0	0	0
$\sigma_{zz}/q_0 (x=a/2, y=b/6)$					
0	-1.00297	-1.00297	-1.00297	-1.00297	-1.00297
0.3	-0.80005	-0.70972	-0.57799	-0.46340	-0.36989
0.7	-0.22519	-0.16006	-0.12497	-0.09665	-0.06558
1.0	0	0	0	0	0
$\sigma_{xx}/q_0 (x=a/2, y=b/12)$					
0	-2.27717	-0.74863	-0.53134	-0.48793	-0.47670
0.3	-0.92075	-0.22588	-0.10369	-0.06442	-0.04974
0.7	0.75229	0.13077	0.03283	0.00256	-0.01528
1.0	2.02745	0.42884	0.15800	0.07744	0.05931
$\sigma_{yy}/q_0 (x=a/2, y=b/6)$					
0	-4.38024	-1.55021	-1.12646	-1.03483	-1.01725
0.3	-1.54194	-0.24714	-0.00825	0.05972	0.08091
0.7	1.59628	0.38373	0.16365	0.09483	0.06518
1.0	4.16173	1.00880	0.40412	0.16928	0.05560
$\tau_{xy}/q_0 (x=0, y=0)$					
0	4.15591	1.68851	1.34859	1.28570	1.27933
0.3	0.98659	-0.04765	-0.22391	-0.28281	-0.31025
0.7	-1.43080	-0.26250	-0.15565	-0.09872	-0.08234
1.0	-3.71619	-0.87523	-0.31004	-0.09865	0.00553

表 4-9 不同级数项数下四边简支 FGM 方板特定点的位移与应力
($a=b=1, h/a=0.1$)

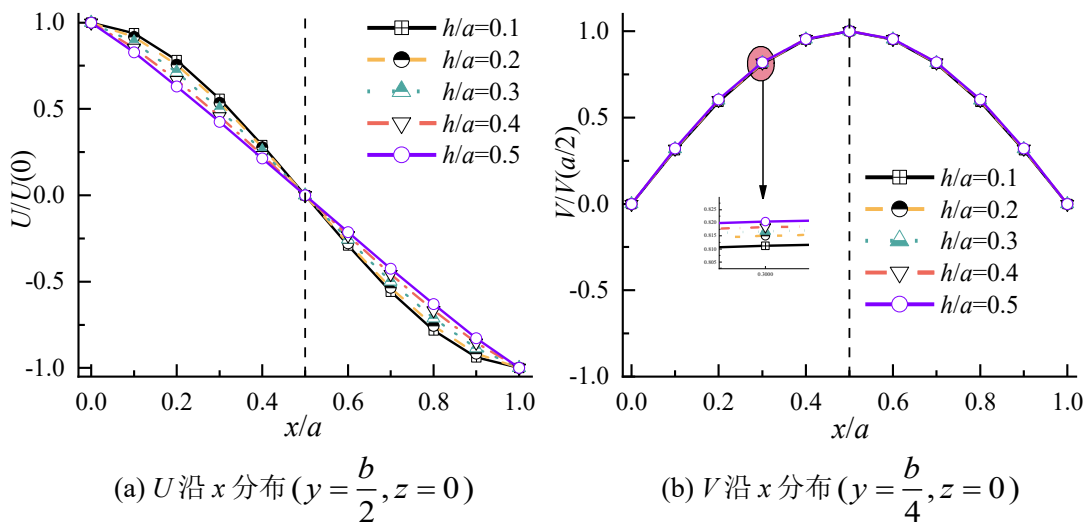
级数 项数	$UE/(q_0h)$	$VE/(q_0h)$	$WE/(q_0h)$	τ_{xz}/q_0	τ_{yz}/q_0	σ_{zz}/q_0	σ_{xx}/q_0	σ_{yy}/q_0
	$x=0$	$x=a/2$	$x=a/2$	$x=0$	$x=a/2$	$x=a/2$	$x=a/2$	$x=a/2$
(m,n)	$y=b/2$	$y=b/4$	$y=b/2$	$y=b/2$	$y=0$	$y=b/2$	$y=b/4$	$y=b/2$
	$z=0$	$z=0$	$z=0$	$z=h/2$	$z=h/2$	$z=h/2$	$z=h$	$z=0$
(19,19)	22.2034	15.2513	157.423	6.93005	2.59451	-0.49215	-50.9481	7.54047
(19,29)	22.2053	15.2485	157.436	6.93179	2.61442	-0.49734	-50.9295	7.54115
(29,29)	22.2147	15.2485	157.447	6.94569	2.61631	-0.50140	-51.0923	7.54121
(29,39)	22.2137	15.2507	157.440	6.94546	2.61950	-0.50068	-51.0795	7.54121
(39,39)	22.2183	15.2507	157.435	6.95082	2.61912	-0.49973	-50.9674	7.54122
(39,49)	22.2189	15.2516	157.439	6.95095	2.61957	-0.49981	-50.9776	7.54122
(49,49)	22.2217	15.2517	157.442	6.95645	2.61969	-0.50025	-51.0655	7.54119
(49,59)	22.2213	15.2508	157.439	6.95625	2.61978	-0.50024	-51.0736	7.54119
(59,59)	22.2231	15.2508	157.438	6.96293	2.61969	-0.49985	-51.0011	7.54125
(59,69)	22.2234	15.2504	157.439	6.96323	2.61970	-0.49985	-50.9941	7.54125
(69,69)	22.2247	15.2504	157.441	6.97119	2.61981	-0.50030	-51.0548	7.54115
(69,79)	22.2245	15.2508	157.439	6.97078	2.61993	-0.50026	-51.0488	7.54115

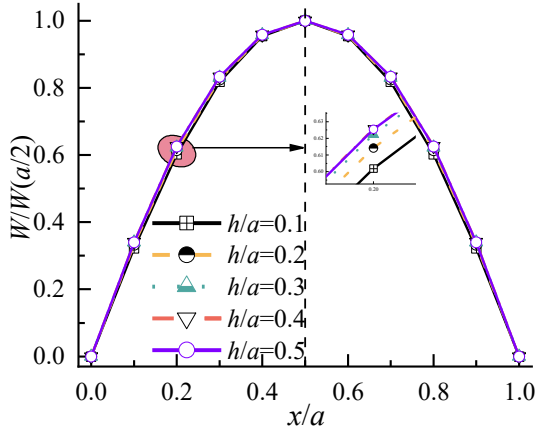
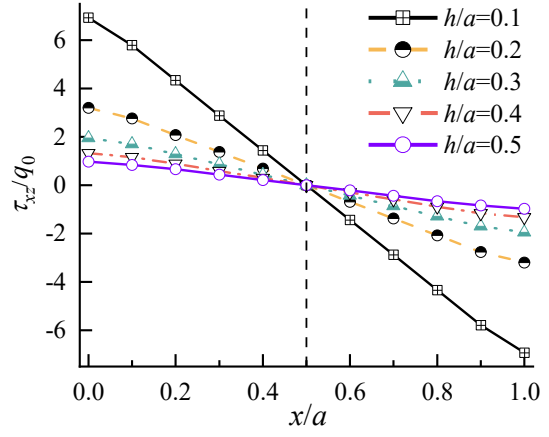
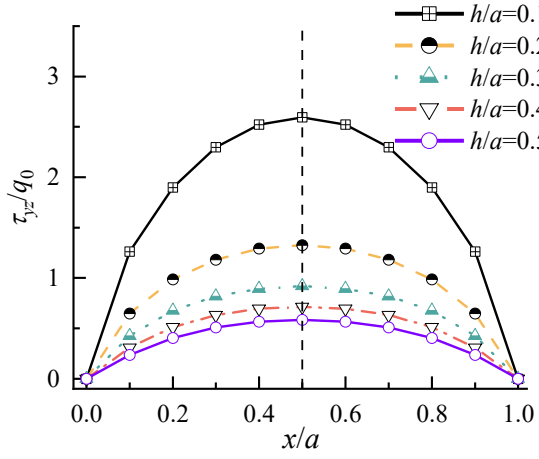
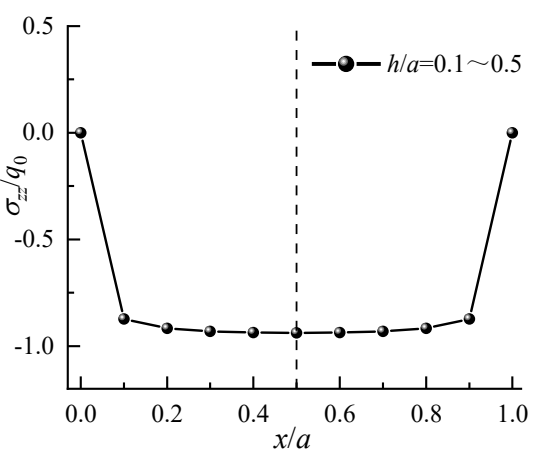
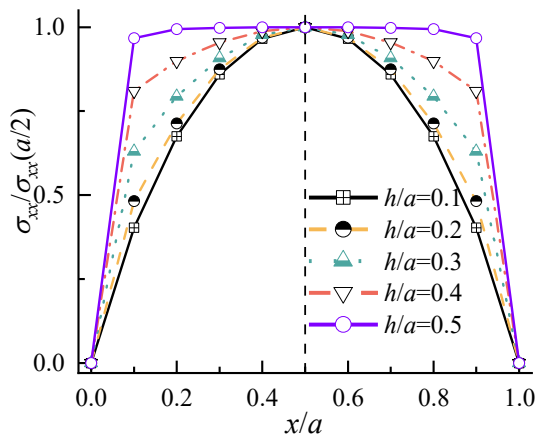
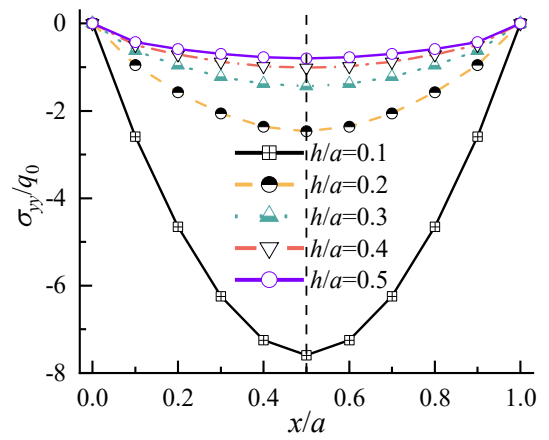
表 4-10 不同级数项数下四边简支 FGM 长方形板特定点的位移与应力
($a=1, b=1/3, h/a=0.3$)

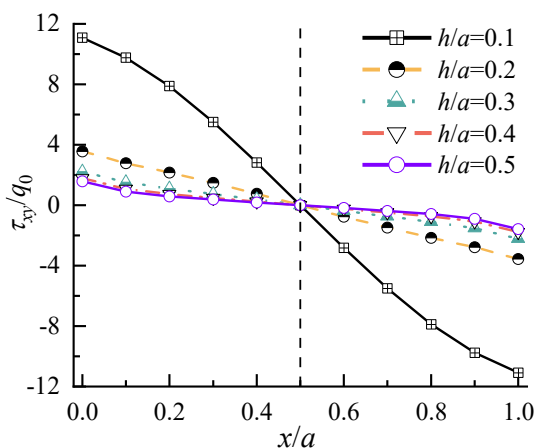
级数 项数	$UE/(q_0h)$	$VE/(q_0h)$	$WE/(q_0h)$	$WE/(q_0h)$	σ_{zz}/q_0	σ_{zz}/q_0	σ_{xx}/q_0	σ_{yy}/q_0
	$x=0$	$x=a/2$	$x=a/2$	$x=a/4$	$x=a/4$	$x=a/2$	$x=a/2$	$x=a/2$
(m,n)	$y=b/6$	$y=b/12$	$y=b/6$	$y=b/6$	$y=b/6$	$y=b/6$	$y=b/12$	$y=b/6$
	$z=0$	$z=0$	$z=0$	$z=0$	$z=0$	$z=h/2$	$z=0$	$z=h$
(19,19)	0.11809	0.40507	0.55678	0.52658	-1.08216	-0.30945	-0.53134	0.40412
(19,29)	0.11805	0.40713	0.55645	0.52623	-1.08870	-0.31189	-0.54738	0.38919
(29,29)	0.12117	0.40730	0.55999	0.52292	-1.04316	-0.31363	-0.70513	0.38785
(29,39)	0.12111	0.40610	0.55929	0.52224	-1.01567	-0.31057	-0.72851	0.38943
(39,39)	0.12273	0.40610	0.55759	0.52126	-0.99187	-0.30869	-0.60853	0.39078
(39,49)	0.12269	0.40677	0.55711	0.52079	-0.96438	-0.30487	-0.56387	0.42032
(49,49)	0.12373	0.40678	0.55812	0.52163	-0.98619	-0.30677	-0.66041	0.41967
(49,59)	0.12372	0.40655	0.55802	0.52153	-0.97847	-0.30556	-0.72363	0.44540
(59,59)	0.12450	0.40655	0.55734	0.52195	-0.99350	-0.30365	-0.63105	0.44577
(59,69)	0.12453	0.40632	0.55754	0.52215	-1.00617	-0.30542	-0.57151	0.42982
(69,69)	0.12518	0.40632	0.55804	0.52176	-0.99149	-0.30732	-0.65630	0.42877
(69,79)	0.12523	0.40694	0.55829	0.52201	-1.00843	-0.30986	-0.70544	0.37676

图 4-4 列出了均布荷载下不同厚宽比四边简支 FGM 方板($a=b=1$)沿 x 方向变化的位移应力变化, 图 4-5 则给出了均布荷载下不同厚宽比四边简支 FGM 长方形板($a=3b=1$)沿 x 方向位移应力变化情况。由于部分位移与应力分量在不同厚宽比下的数值差异较大(图 4-4a、4-4b、4-4c、4-4g、4-5a、4-5c), 将这部分数值结果进行归一化处理, 其余部分相差不大的分量则按照原数据处理。此外, 因为 x 方向两边的边界条件相同, 图 4-4 与图 4-5 中的各个位移应力分量图都呈现正对称或反对称形式。以下针对不同厚宽比下沿 x 方向的 9 个应力应变分量变化规律进行分析总结。

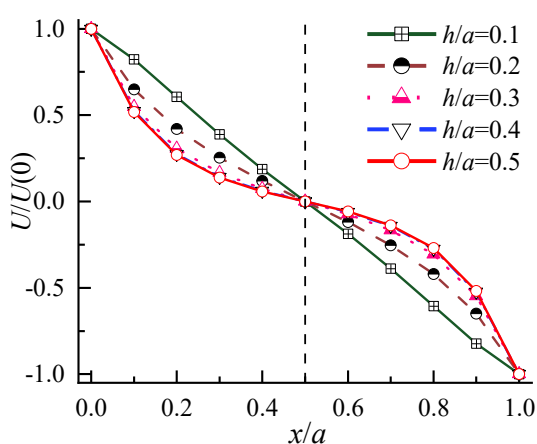
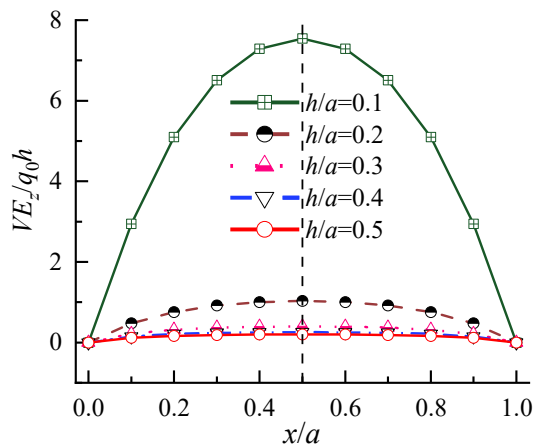
由图 4-4(a)可见, 位移分量 U , 任一厚宽比方板上表面的中心处均无位移, 并且随着厚宽比的增大近似变为线性分布, 其变化为反对称。由图 4-4(b)和(c)可见, 进行归一化处理后的位移 V, W 不同厚宽比下的数值几乎重合(实际值相差较大), 说明它们在任一厚宽比下沿 x 方向变化幅度都相当。从图 4-4(d)与图 4-4(i)可知, 切应力分量 τ_{xz}, τ_{xy} 在 x 方向上随着厚宽比的增大而减小, 呈反对称分布, 且不是简单的幂函数或线性分布。由图 4-4(e)与图 4-4(h)可知, 切应力 τ_{yz} 与正应力分量 σ_{yy} 都在 x 方向上的中间达到应力峰值, 呈正对称分布。从图 4-4(f)可以得到, 板上表面的正应力 σ_{zz} 不随厚宽比的变化而影响。图 4-4(g)表明, 进行归一化处理后的正应力 σ_{xx} 依然有着明显的分离度, 当为薄板时, x 方向上各点应力有着差距, 但随着厚宽比的增大 x 方向上的应力变化快速趋于平稳。

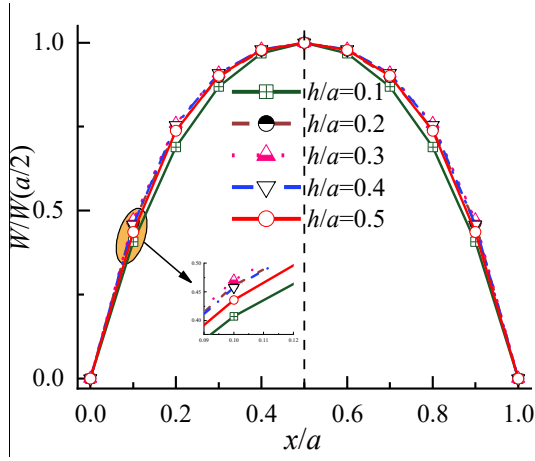
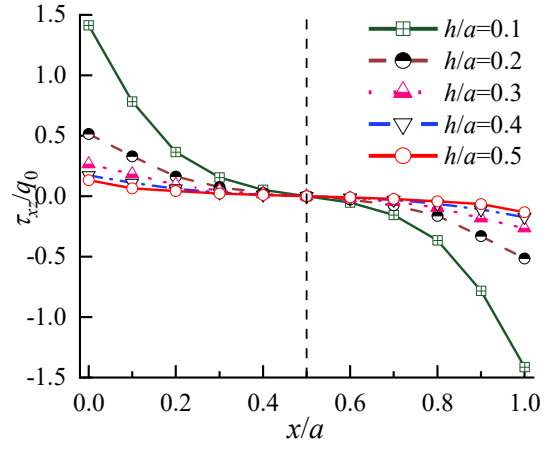
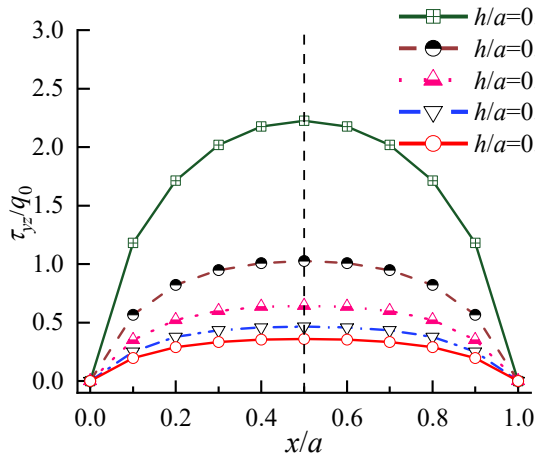
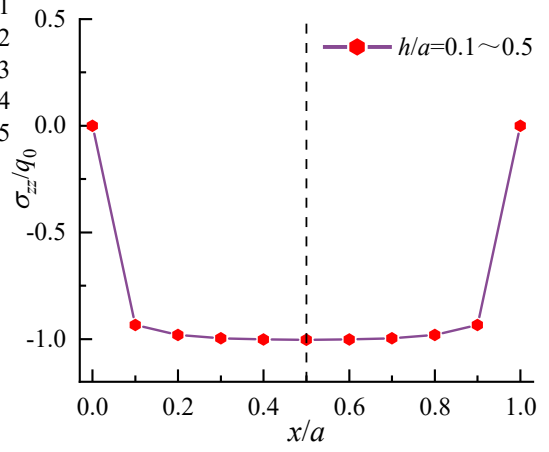
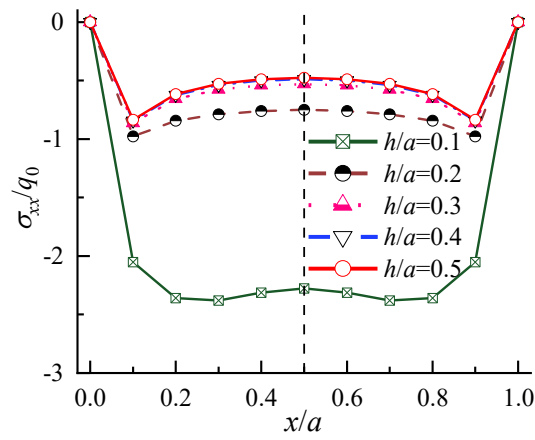
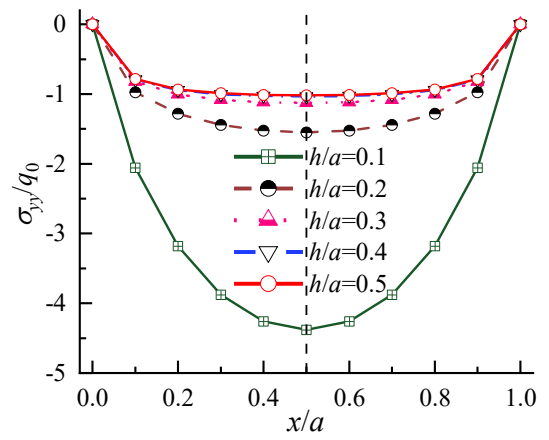


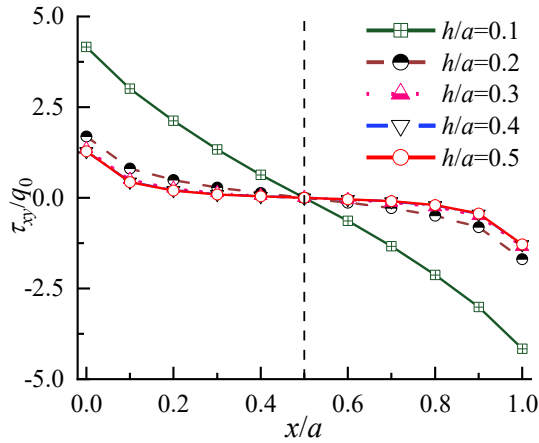

 (c) W 沿 x 分布 ($y = \frac{b}{2}, z = \frac{h}{2}$)

 (d) τ_{xz} 沿 x 分布 ($y = \frac{b}{2}, z = \frac{h}{2}$)

 (e) τ_{yz} 沿 x 分布 ($y = 0, z = \frac{h}{2}$)

 (f) σ_{zz} 沿 x 分布 ($y = \frac{b}{2}, z = 0$)

 (g) σ_{xx} 沿 x 分布 ($y = \frac{b}{4}, z = 0$)

 (h) σ_{yy} 沿 x 分布 ($y = \frac{b}{2}, z = 0$)

(i) τ_{xy} 沿 x 分布 ($y=0, z=0$)图 4-4 四边简支 FGM 方板位移与应力沿 x 方向分布($a=b=1$)

由图 4-5(a)可见, 位移分量 U 为反对称变化, 但其变化趋势与图 4-4(a)相反, 在厚宽比较小时呈线性分布, 随着厚宽比的增大变为非线性分布。由图 4-5(b)和(c)可见, 位移分量 V, W 为正对称变化, 随着厚宽比增大两个分量都减小。从图 4-5(d)与图 4-5(i)可知, 与图 4-4(d)和(i)相比, 仍然呈现为反对称分布, 在 x 方向上随着厚宽比的增大而减小, 但同一宽厚比下 τ_{xz}, τ_{xy} 在 x 方向上随长宽比的增加两个分量的计算值降低。由图 4-5(e)、(g)和(h)可知, 三者都呈正对称分布, 应力分量 τ_{yz}, σ_{yy} 在 x 方向上的中间点达到应力峰值, 而 σ_{xx} 则是在 x 方向上先增大后减小 ($0 \leq x/a \leq 0.5$)。图 4-5(f)与图 4-4(f)相比, 随着长宽比的增大, 其对应的正应力分量 σ_{zz} 也随之增大, 不受厚宽比的变化而影响。

(a) U 沿 x 分布 ($y = \frac{b}{6}, z=0$)(b) V 沿 x 分布 ($y = \frac{b}{12}, z=0$)


 (c) W 沿 x 分布 ($y = \frac{b}{6}, z = \frac{h}{2}$)

 (d) τ_{xz} 沿 x 分布 ($y = \frac{b}{6}, z = \frac{h}{2}$)

 (e) τ_{yz} 沿 x 分布 ($y = 0, z = \frac{h}{2}$)

 (f) σ_{zz} 沿 x 分布 ($y = \frac{b}{6}, z = 0$)

 (g) σ_{xx} 沿 x 分布 ($y = \frac{b}{12}, z = 0$)

 (h) σ_{yy} 沿 x 分布 ($y = \frac{b}{6}, z = 0$)

(i) τ_{xy} 沿 x 分布 ($y=0, z=0$)图 4-5 四边简支 FGM 方板位移与应力沿 x 方向分布($a=1, b=1/3$)

由图 4-5(a)可见, 位移分量 U 仍为反对称变化, 但其变化趋势与图 4-4(a)相反, 在厚宽比较小时近似呈线性分布, 随着厚宽比的增大变为非线性分布。由图 4-5(b)和(c)可见, 位移分量 V, W 为正对称变化, 随着厚宽比增大两个分量都减小, 而归一化处理后的位移分量 W 的变化幅度则呈现波动。从图 4-5(d)与图 4-5(i)可知, 与图 4-4(d)和(i)相比, 仍然呈现为反对称分布, 在 x 方向上随着厚宽比的增大而减小, 但同一宽厚比下 τ_{xz}, τ_{xy} 在 x 方向上随长宽比的增加两个分量的计算值降低。

由图 4-5(e)、(g)和(h)可知, 三者都呈正对称分布, 应力分量 τ_{yz}, σ_{yy} 在 x 方向上的中间点达到应力峰值, 而 σ_{xx} 则是在 x 方向上先增大后减小 ($0 \leq x/a \leq 0.5$), 其峰值不在 $x/a=0.5$ 处。图 4-5(f)与图 4-4(f)相比, 随着长宽比的增大, 其对应的正应力分量 σ_{zz} 也随之增大, 不受厚宽比的变化而影响。

算例 3 取图 4-1 所示四边简支横观各向同性 FGM 矩形板上表面受均布荷载 $q_0(x, y)$, 取长为 a , 宽为 b , 高为 h , 满足 $a=b=1, h=0.15$, 材料泊松比 $\nu_{xy} = \nu_{yz} = \nu_{zx} = 0.3$, 弹性模量沿厚度 z 方向幂律模型呈指数变化变化为 $E(z) = 100e^{\lambda z/a}$, λ 为材料的梯度指数。

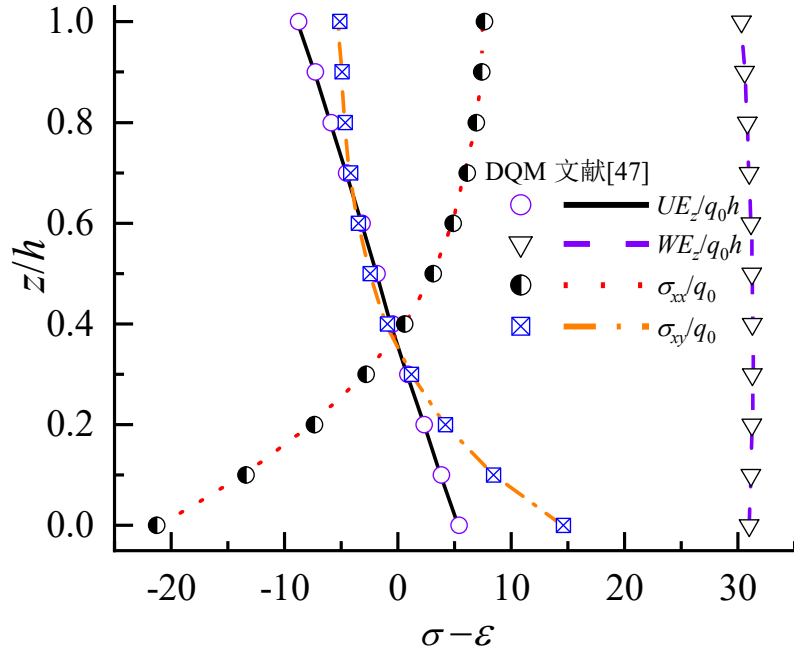


图 4-6 均布荷载下四边简支 FGM 方板应力应变随 z 分布
($a=b=1, h/a=0.15, \lambda=-10$)

针对算例 3 中，厚宽比为 $h/a=0.15$ 的 FGM 方板受均布荷载作用的情况，图 4-6 给出了本文 DQM 解与文献[47]IMMS 解的部分位移与应力沿厚度 z 方向的分布情况。由图可见，本文解与文献 [47]解非常吻合，能够给出位移与应力分量沿厚度方向的准确的分布趋势，说明本文 DQM 方法对于处理 FGM 矩形板静力问题有着足够的准确性与有效性。

表 4-11 给出了均布荷载下不同厚宽比 FGM 方板($a=b=1$)不同位置的 9 种应力应变计算结果，其中梯度指数取 $\lambda=-7$ ，级数项数取 $m=n=19$ 。表 4-12 给出了均布荷载下不同厚宽比 FGM 长方形板($a=1, b=0.5$)不同位置的 9 种应力应变计算结果，其中梯度指数取 $\lambda=3$ ，级数项数取 $m=n=19$ 。由两表都可以看出，随着厚宽比的增大，各个位置的位移与应力总体都是呈减小的态势，板上下表面的正应力 σ_{zz} 无变化，随着长宽比的增大与梯度指数的由负转正，相对应位置的应力应变都下降明显。此外，部分位移与应力分量，例如挠度位移 W ，在薄板时 ($h/a \leq 0.2$)沿厚度方向变化不大，在较厚板时($h/a \geq 0.3$)沿厚度方向不同高度的挠度位移 W 开始有了明显的差距，这说明挤压变形对于中厚板乃至厚板而言不能忽视，薄板理论不再适用厚板。

表 4-11 均布荷载下四边简支 FGM 方板的应力应变计算结果

$$(a=b=1, \lambda=-7)$$

面内位置 ($x/a, y/b$)	应力 应变	z/h	$h/a=0.1$	$h/a=0.2$	$h/a=0.3$	$h/a=0.4$	$h/a=0.5$
板中点 (0.5,0.5)	$\frac{WE_z}{q_0 h}$	0.0	65.7534	13.2895	6.75479	4.96307	4.33068
		0.1	65.9378	13.3919	6.82763	5.02019	4.37802
		0.5	66.1842	13.4342	6.73171	4.77410	3.95110
		0.9	65.6674	12.9653	6.18666	4.09178	3.09041
		1.0	65.4175	12.7664	5.98097	3.86273	2.83557
	$\frac{\sigma_{zz}}{q_0}$	0.0	-0.93750	-0.93750	-0.93750	-0.93750	-0.93750
		0.1	-0.91191	-0.91765	-0.92004	-0.91901	-0.91334
		0.9	-0.02248	-0.01840	-0.01472	-0.01185	-0.00908
		1.0	0	0	0	0	0
简支边 $x=0$ 中间 (0,0.5)	$\frac{UE_z}{q_0 h}$	0.0	9.25192	2.95431	1.73593	1.32727	1.16262
		0.1	7.05988	2.04462	1.02147	0.61961	0.39825
		0.5	-1.30941	-0.98635	-0.96752	-1.03049	-1.11868
		0.9	-9.59745	-3.81375	-2.58554	-2.09866	-1.81591
		1.0	-11.7573	-4.63264	-3.12785	-2.52816	-2.17265
	$\frac{\tau_{xz}}{q_0}$	0.0	0	0	0	0	0
		0.1	2.25009	1.56373	1.42345	1.40073	1.41600
		0.9	1.44273	0.55784	0.27741	0.14833	0.07996
		1.0	0	0	0	0	0
简支边 $y=0$ 中间 (0.5,0)	$\frac{\tau_{yz}}{q_0}$	0.0	0	0	0	0	0
		0.1	2.25009	1.56373	1.42345	1.40073	1.41600
		0.9	1.44273	0.55784	0.27741	0.14833	0.07996
		1.0	0	0	0	0	0
板平面 (0.5,0.25)	$\frac{VE_z}{q_0 h}$	0.0	6.01162	1.89792	1.08745	0.81000	0.69789
		0.1	4.61300	1.35340	0.69176	0.43787	0.30346
		0.5	-0.82724	-0.60909	-0.59430	-0.64204	-0.71346
		0.9	-6.24001	-2.49516	-1.71600	-1.41762	-1.24556
		1.0	-7.63105	-3.01868	-2.06681	-1.70238	-1.48787
	$\frac{\sigma_{xx}}{q_0}$	0.0	-27.2908	-8.90459	-5.28493	-4.04557	-3.54523
		0.1	-19.6472	-5.68263	-2.92744	-1.89427	-1.36278
		0.9	14.8445	3.15532	1.15176	0.50498	0.23545
		1.0	16.9375	3.32706	1.13063	0.46270	0.20108
	$\frac{\sigma_{yy}}{q_0}$	0.0	-29.7816	-9.72763	-5.81836	-4.51108	-3.99108
		0.1	-21.3518	-6.09451	-3.09239	-1.96700	-1.38033
		0.9	16.2112	3.44151	1.24580	0.53684	0.24571
		1.0	18.5118	3.63864	1.22809	0.49360	0.21017
板角点 (0,0)	$\frac{\tau_{xy}}{q_0}$	0.0	24.6164	8.19393	5.07550	4.02485	3.57379
		0.1	17.1574	4.41849	1.85848	0.86945	0.35163
		0.5	-2.62105	-1.40353	-0.95038	-0.69299	-0.51621
		0.9	-13.4668	-2.81062	-0.99633	-0.42328	-0.19253
		1.0	-15.4296	-2.98205	-0.98097	-0.38634	-0.16242

表 4-12 均布荷载下四边简支 FGM 长方板的应力应变计算结果

$$(a=1, b=0.5, \lambda=3)$$

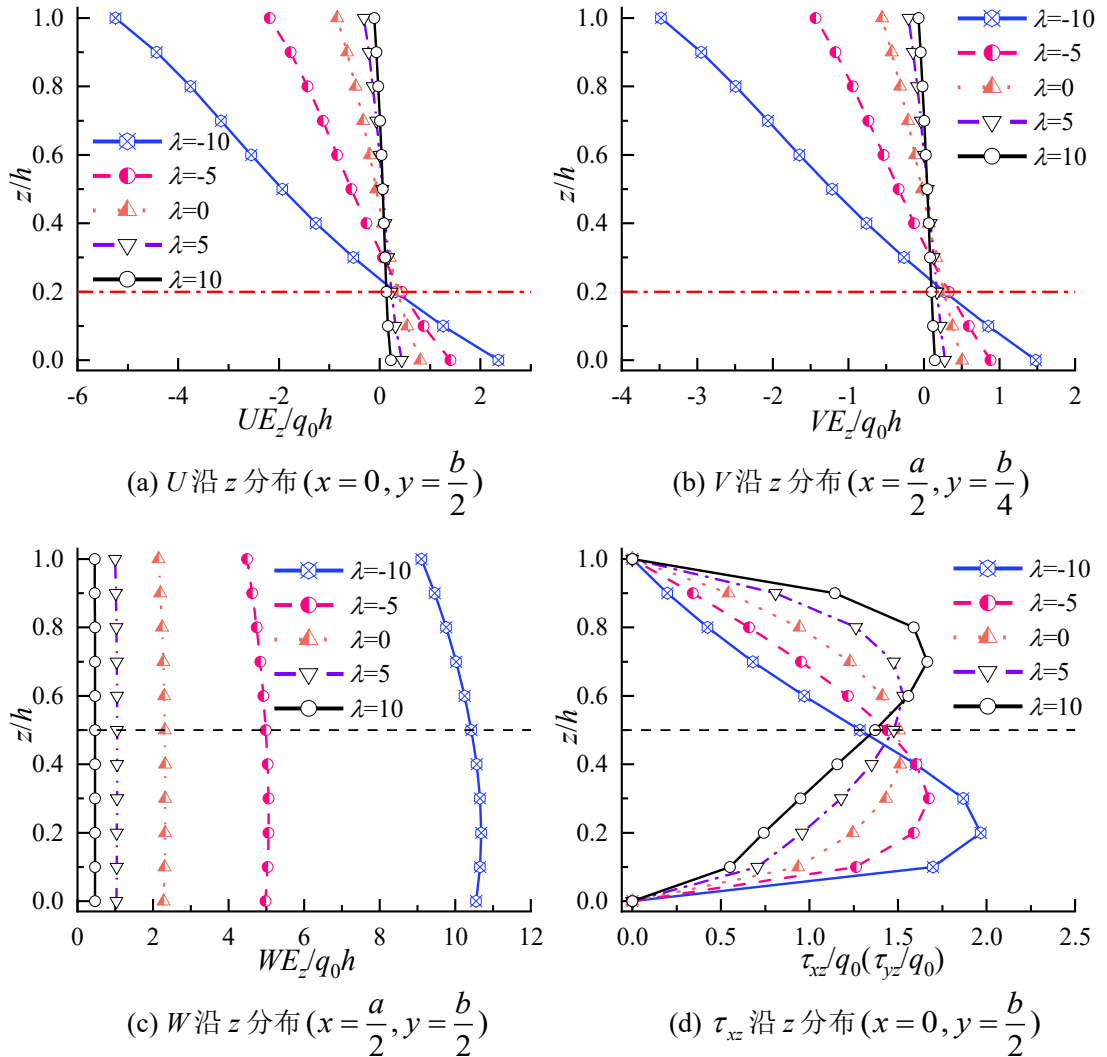
面内位置 ($x/a, y/b$)	应力 应变	z/h	$h/a=0.1$	$h/a=0.2$	$h/a=0.3$	$h/a=0.4$	$h/a=0.5$
板中点 (0.5, 0.5)	$\frac{WE_z}{q_0 h}$	0.0	6.48923	0.90430	0.35995	0.23816	0.20306
		0.3	6.59489	0.91770	0.32920	0.17726	0.11936
		0.5	6.61275	0.91231	0.30981	0.14715	0.08220
		0.7	6.59033	0.89790	0.29440	0.12933	0.06325
		1.0	6.47671	0.85027	0.26684	0.11115	0.05070
	$\frac{\sigma_{zz}}{q_0}$	0.0	-0.93750	-0.93750	-0.93750	-0.93750	-0.93750
		0.3	-0.77932	-0.81023	-0.84953	-0.88222	-0.89158
		0.7	-0.22742	-0.24967	-0.29035	-0.31873	-0.31774
		1.0	0	0	0	0	0
简支边 $x=0$ 中间 (0, 0.5)	$\frac{UE_z}{q_0 h}$	0.0	1.18902	0.26039	0.11092	0.07036	0.05798
		0.3	0.45889	0.06667	-0.00010	-0.01904	-0.02432
		0.5	0.02541	-0.00582	-0.01414	-0.01580	-0.01454
		0.7	-0.40802	-0.07817	-0.02811	-0.01372	-0.00793
		1.0	-1.12416	-0.23668	-0.08564	-0.03688	-0.01685
	$\frac{\tau_{xz}}{q_0}$	0.0	0	0	0	0	0
		0.3	2.15957	1.08381	0.72648	0.56486	0.48278
		0.7	2.21936	1.05779	0.65329	0.43597	0.29860
		1.0	0	0	0	0	0
简支边 $y=0$ 中间 (0.5, 0)	$\frac{\tau_{yz}}{q_0}$	0.0	0	0	0	0	0
		0.3	2.81267	1.37871	0.92086	0.72099	0.63142
		0.7	2.85167	1.38303	0.89036	0.63821	0.47681
		1.0	0	0	0	0	0
板平面 (0.5, 0.25)	$\frac{VE_z}{q_0 h}$	0.0	1.34440	0.28177	0.10137	0.04873	0.03109
		0.3	0.54816	0.10346	0.02287	-0.00411	-0.01485
		0.5	0.04628	0.00946	-0.00413	-0.01053	-0.01264
		0.7	-0.45742	-0.08548	-0.02960	-0.01433	-0.00861
		1.0	-1.25940	-0.26822	-0.10070	-0.04546	-0.02166
	$\frac{\sigma_{xx}}{q_0}$	0.0	-4.99468	-1.39363	-0.78535	-0.60193	-0.53794
		0.3	-2.38456	-0.77259	-0.45354	-0.32681	-0.25618
		0.7	1.81879	0.33461	0.07686	-0.00067	-0.02309
		1.0	5.78134	1.64871	0.82827	0.51187	0.33619
	$\frac{\sigma_{yy}}{q_0}$	0.0	-10.68267	-2.61077	-1.27751	-0.89420	-0.76909
		0.3	-4.85049	-1.21039	-0.48324	-0.20653	-0.07176
		0.7	4.21437	0.90160	0.32802	0.15108	0.09037
		1.0	13.02830	3.72078	1.84476	1.10800	0.70292
板角点 (0, 0)	$\frac{\tau_{xy}}{q_0}$	0.0	6.25027	1.60862	0.89134	0.71350	0.67915
		0.3	2.32103	0.23904	-0.11946	-0.23973	-0.29828
		0.5	0.00769	-0.12043	-0.15377	-0.17226	-0.18586
		0.7	-2.60332	-0.61940	-0.27215	-0.16364	-0.12386
		1.0	-7.76870	-2.15814	-1.03269	-0.59177	-0.35425

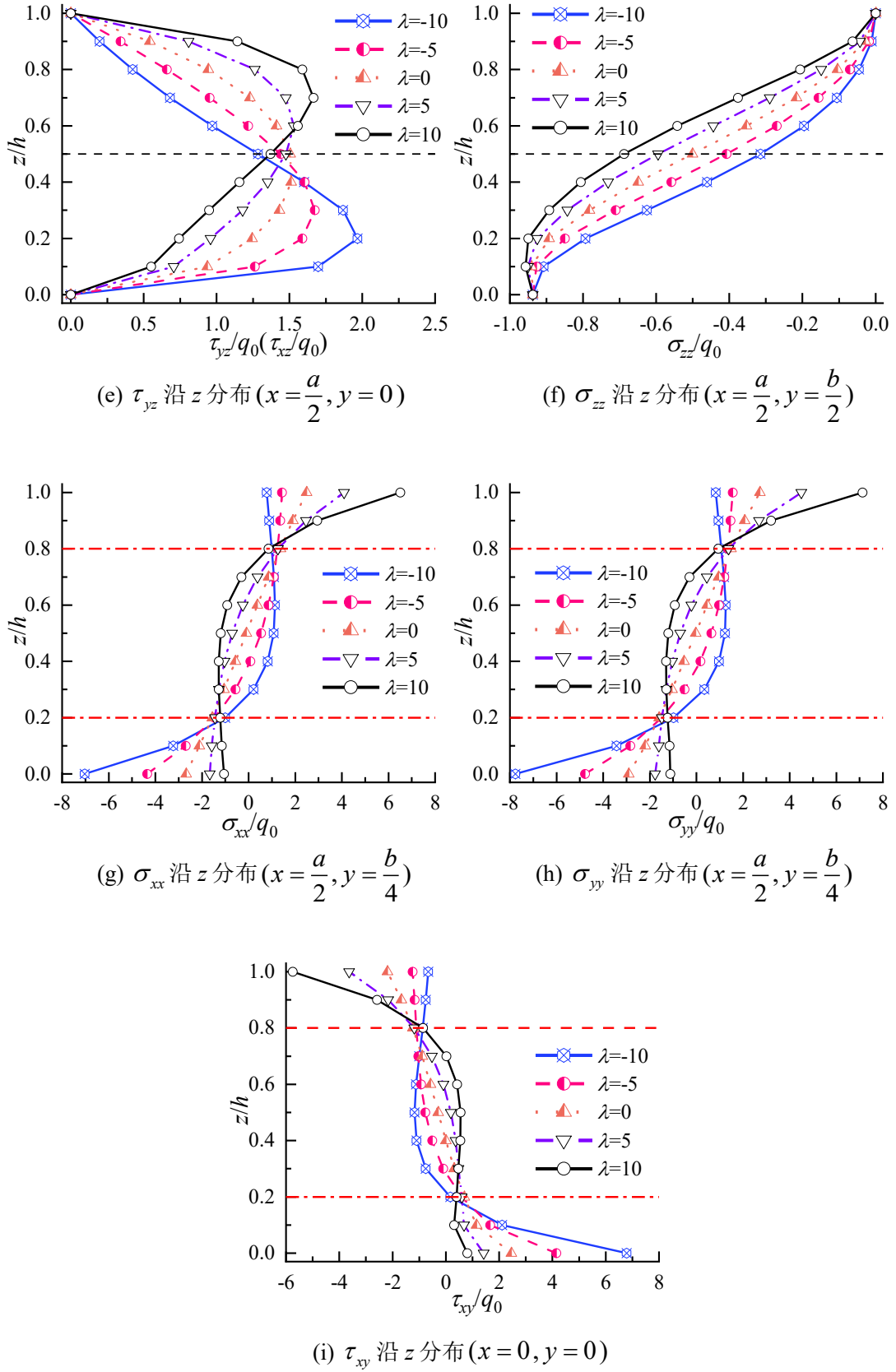
在 FGM 单层方板($a=b=1$)上表面受均布荷载作用的前提下, 图 4-7 给出了不同梯度指数下 9 个位移与应力在板各个位置沿厚度 z 方向的本文 DQM 计算结果, 板的厚宽比取 $h/a=0.3$, 计算的级数项数取 $m=n=19$ 。图 4-8 则给出了均布荷载下梯度指数取 $\lambda=-10$ 的 9 个位移与应力沿 3 个主方向的分布趋势, 级数项数仍取 $m=n=19$ 。以下对图 4-7 和图 4-8 的各力学分量分布规律进行具体的分析。

由图 4-7(a)和(b)可见, 随着梯度指数 λ 的增大, 在厚度方向上各个位置的位移 U 和 V 差距逐渐减小, 此外, 在 $z/h=0.2$ 附近, 各个梯度指数下的 U 和 V 计算值都很接近于 0。由图 4-7(c)可见, 随着梯度指数 λ 的增大位移 W 减小, 并且各个厚度位置的位移差距也开始缩小。从图 4-7(d)和(e)可见, 由于是方板并且取得点为简支边的中点, 使得剪应力分量 $\tau_{xz} = \tau_{yz}$, 随着梯度指数的增大, 最大剪应力由板的上板部慢慢转移到板的下半部。由图 4-7(f)可见, 板中心处的正应力分量 σ_{zz} 随着梯度指数的增大, 压应力也增大, 在沿厚度 z 方向上的变化不是简单的线性变化。由图 4-7(g)和(h)可见, 由于板的长宽相同, 同一位置的正应力分量 σ_{xx} 和 σ_{yy} 的计算值比较接近, 并且不同梯指数下的应力值在 $z/h=0.2, 0.8$ 附近聚集, 随着梯度指数的增大, 板底部的正应力值越大。此外, 当梯度指数取 $\lambda=0$ 的弹性均质板时, 正应力分量 σ_{xx} 和 σ_{yy} 在 $z/h=0.5$ 附近在沿厚度 z 方向由压应力变为拉应力, 整体近似呈线性分布。由图 4-7(i)可见, 板原点处的剪应力同样在 $z/h=0.2, 0.8$ 附近很接近, $z/h=0.5$ 附近为弹性均质板($\lambda=0$)剪应力 τ_{xy} 沿厚度 z 方向由正转负的分界点, 随着梯度指数增大(减小), 分界点位置上升(下降)。

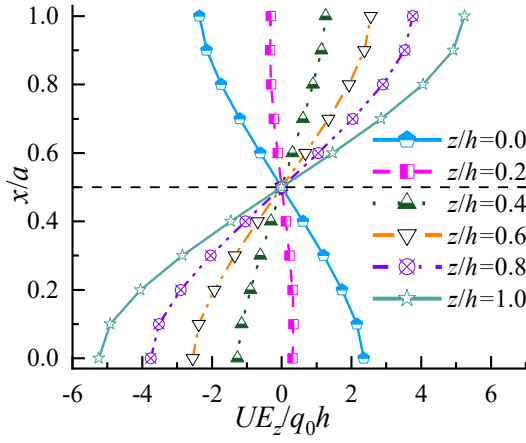
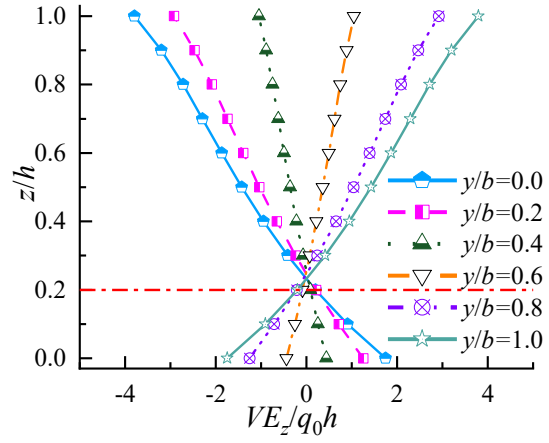
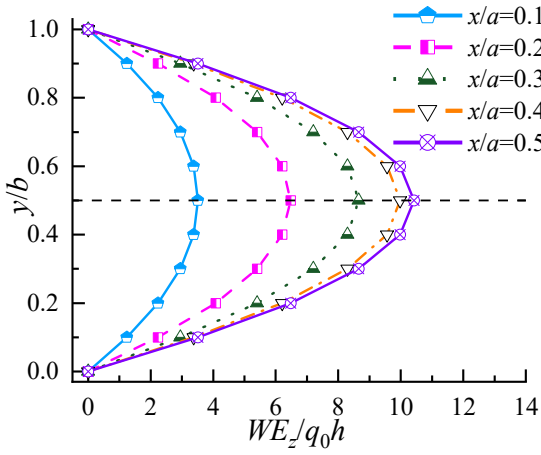
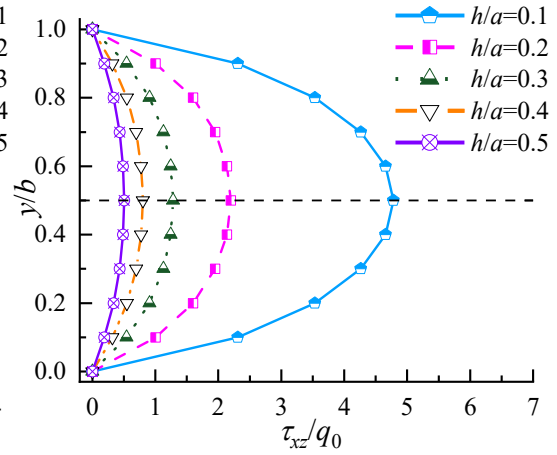
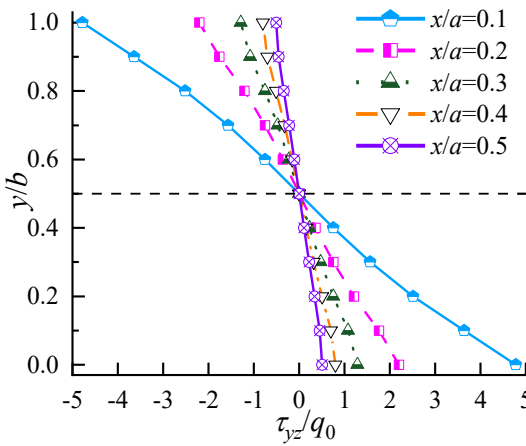
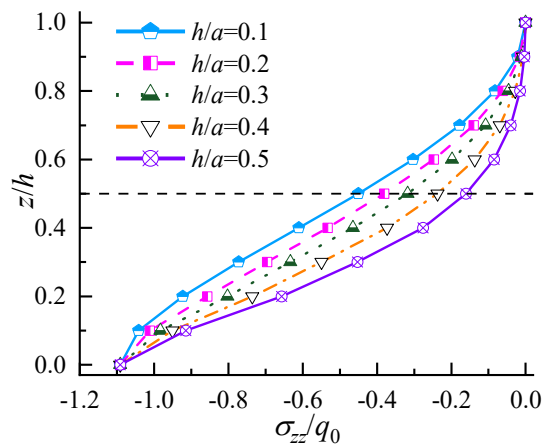
图 4-8(a)给出了厚宽比 $h/a=0.3$ 时不同厚度位置的位移 U 沿 x 方向的变化趋势, 由于是四边简支的方板, 边界条件相同, 可以看到以 $x/a=0.5$ 为分界点, 任一厚度的位移 U 都呈对称的形式。图 4-8(b)给出了厚宽比 $h/a=0.3$ 时不同 y 方向上位移 V 沿厚度 z 方向的变化, 同样由于边界条件相同, 以 $y/b=0.5$ 为分界线 $y/b=0.0, 0.2, 0.4$ 分别与 $y/b=1.0, 0.8, 0.6$ 下的结果互为相反数。图 4-8(c) 和(d)可见, 位移 W 和切应力 τ_{xz} 在 y 方向上呈对称分布, 板中层的位移 W 值越靠近中心位置越大, 同样是板中层的切应力则是随着厚宽比的增大而减小, 但仍不可忽略。

由图 4-8(e)可见, $y/b=0.5$ 为切应力 τ_{yz} 方向变化的临界线, 随着厚宽比的增大 y 方向上不同位置的切应力 τ_{yz} 绝对值差值减小。由图 4-8(f)可见, 正应力 σ_{zz} 在厚度 z 方向上的值随着厚宽比的增大而减小。图 4-8(g)和(h)分别给出了厚宽比取 $h/a=0.2$ 和 $h/a=0.5$ 时正应力 σ_{xx} 与 σ_{yy} 沿厚度 z 方向的变化, 在 $z/h=0.2$ 附近时, 不同 y/b 的正应力值相近, 正应力 σ_{yy} 方向发生变化, 由负转正, 并在 $z/h=0.4$ 附近拉应力达到最大值; 在 $z/h=0.35$ 附近时, 不同 x/a 的正应力值出现重合, 正应力 σ_{xx} 方向发生变化, 由负转正, 在 $z/h=0.9$ 附近拉应力达到最大值。图 4-8(i) 给出了厚宽比 $h/a=0.3$ 切应力 τ_{xy} 沿厚度 z 方向的变化, 在 $z/h=0.2$ 附近时, 不同 x/a 的切应力值相近, 切应力 τ_{xy} 方向发生变化, 由正转负, 并在 $z/h=0.5$ 附近应力达到最大值。




 图 4-7 不同梯度指数下四边简支 FGM 方板应力应变随 z 分布

$$(a = b = 1, h/a = 0.3)$$


 (a) U 沿 x 分布 ($y = \frac{b}{2}, h/a = 0.3$)

 (b) V 沿 y 分布 ($x = \frac{a}{4}, h/a = 0.3$)

 (c) W 沿 y 分布 ($z = \frac{h}{2}, h/a = 0.3$)

 (d) τ_{xz} 沿 y 分布 ($x = 0, z = \frac{h}{2}$)

 (e) τ_{yz} 沿 y 分布 ($x = \frac{a}{2}, z = \frac{h}{2}$)

 (f) σ_{zz} 沿 z 分布 ($x = \frac{a}{4}, y = \frac{b}{4}$)

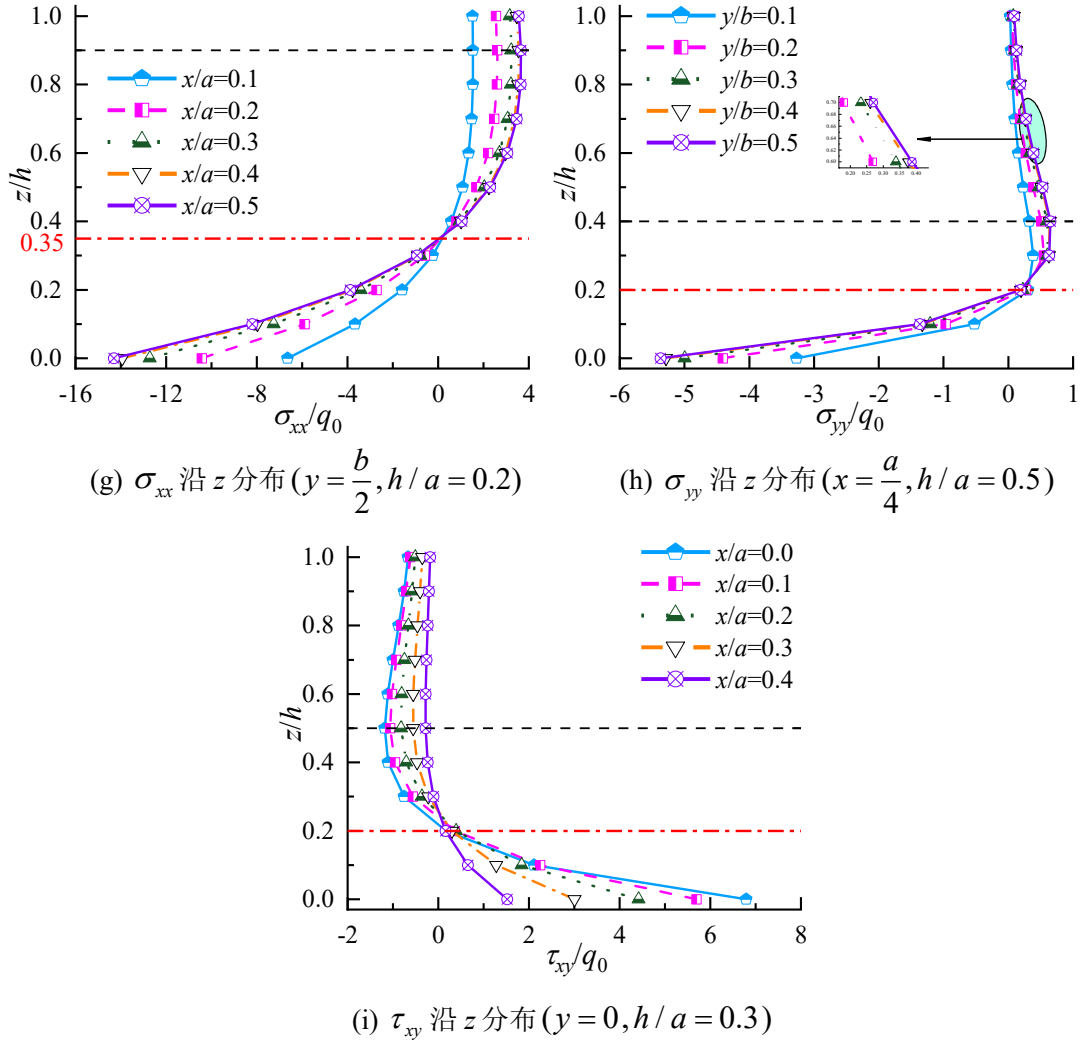


图 4-8 均布荷载下四边简支 FGM 方板位移和应力分布

$$(a = b = 1, \lambda = -10)$$

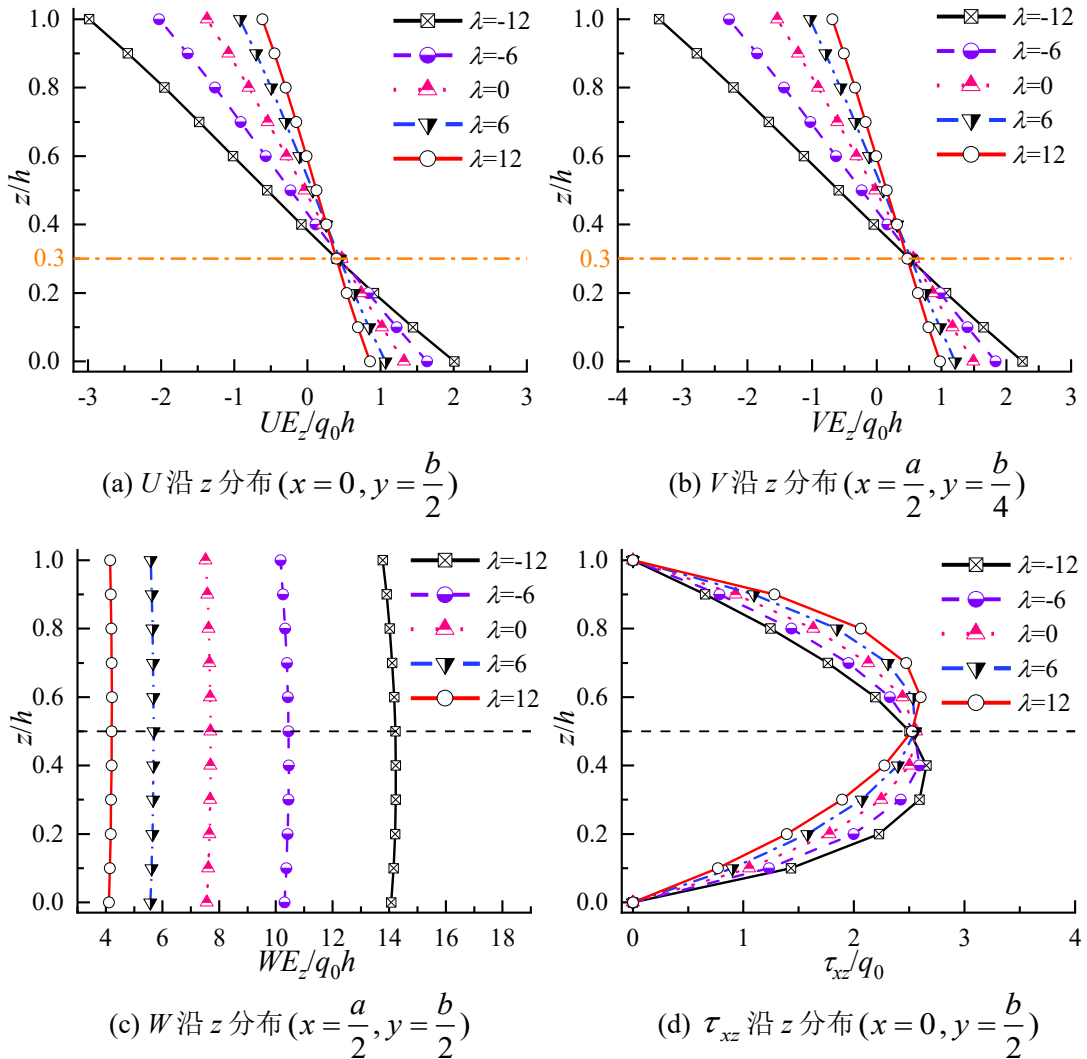
在 FGM 矩形板($a = 1, b = 0.5$)上表面承载均布荷载作用的背景条件下, 图 4-9 给出了不同梯度指数下各个应力应变沿厚度 z 方向的基于本文 DQM 方法的数值解, 板的厚宽比取 $h/a = 0.1$, 级数项数仍取 $m = n = 19$ 。图 4-10 则给出了梯度指数取 $\lambda = -10$ 不同变量下的应力应变沿 3 个主方向的变化态势, 级数项数取 $m = n = 19$ 。以下对图 4-9 和图 4-10 的各力学分量长宽比增大后的分布规律进行具体的对比分析。

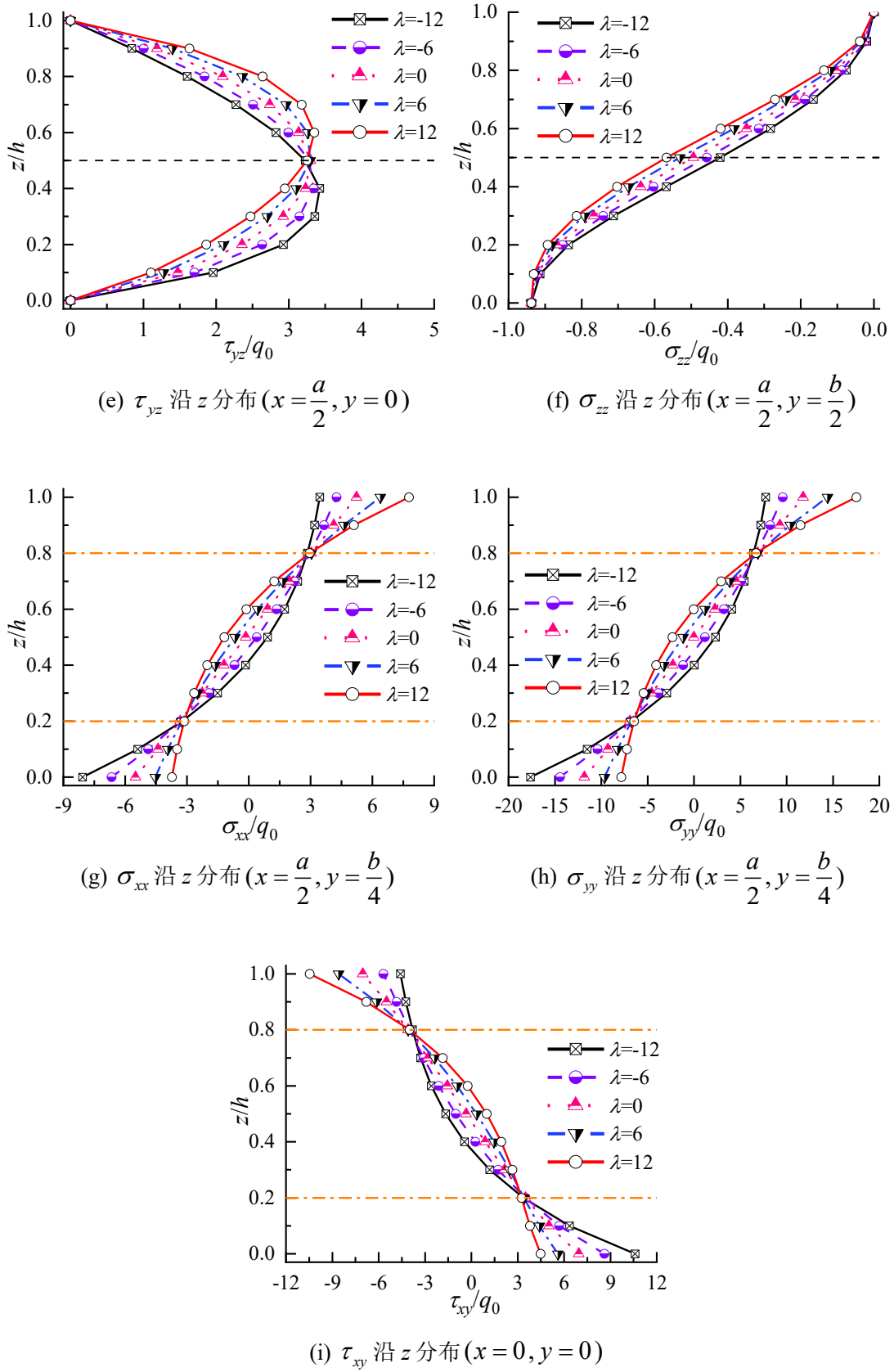
由图 4-9(a)和(b)可见, 随着梯度指数 λ 的增大, 厚度 z 方向上各位置的位移 U 和 V 差值缩小。在 $z/h = 0.3$ 附近, 不同梯度指数下的位移 U 和 V 很接近, 与低长宽比高厚宽比的图 4-7(a)和(b)相比, 这一临界点有所增长。由图 4-9(c)可见, 随着梯度指数 λ 的增大板中心的挠度位移 W 减小, 并且由于长宽比较大, 各个梯度指

数下沿厚度方向的各个位置的挠度位移 W 都比较接近。从图 4-9(d)和(e)可见, 由于长宽比的增大, 长宽不等, 两个剪应力分量 τ_{xz}, τ_{yz} 所取一个长筒支边的中点一个短筒支边的中点, 使得两个分量不再相等, 长不变宽减小使得 τ_{yz} 稍大于 τ_{xz} 。随着梯度指数的增大, 以弹性均质板($\lambda=0$)为界线, 剪应力峰值由板的上板部转移到板的下半部。由图 4-9(f)可见, 长宽比的增大对于应力分量 σ_{zz} 值影响不大, 板中心处的正应力分量 σ_{zz} 随着梯度指数的增大, 沿厚度 z 方向上的各个位置压应力也增大。由图 4-9(g)和(h)可见, 由于长不变宽减小, 与图 4-7(g)和(h)相比正应力分量 σ_{yy} 相较于 σ_{xx} 出现了更加明显的应力增大现象, 不同梯度指数下两个正应力分量 σ_{xx}, σ_{yy} 的计算值依然在 $z/h=0.2, 0.8$ 附近相近, 取 $\lambda=0$ 的弹性均质板时, 正应力分量 σ_{xx} 和 σ_{yy} 在 $z/h=0.5$ 附近在沿厚度 z 方向应力方向由负转正, 整体近似呈线性分布。由图 4-9(i)可见, 随着长宽比的增大切应力 τ_{xy} 也相应增大, 板原点处的剪应力同样在 $z/h=0.2, 0.8$ 附近很接近, 梯度指数 $\lambda=0$ 的弹性均质板的剪应力 τ_{xy} 在 $z/h=0.5$ 附近方向发生变化, 由正转负, 这一变化不受长宽比的影响, 与图 4-7(i)一样, 随着梯度指数增大(减小), 分界点位置上升(下降)。

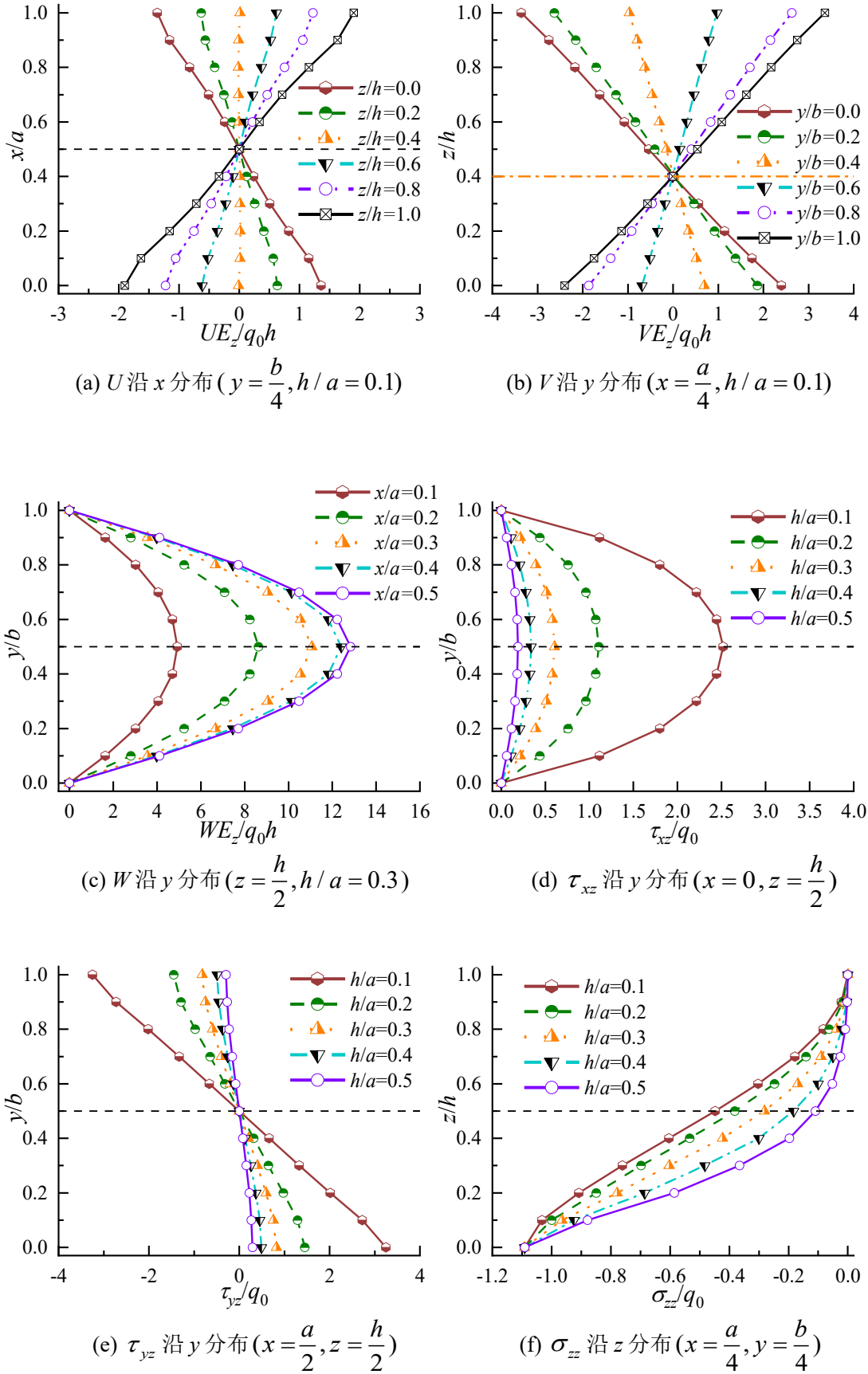
图 4-10(a)给出了厚宽比 $h/a=0.1$ 时位移 U 沿 x 方向的分布规律, 由于 x 方向上的两端边界条件一样, 以 $x/a=0.5$ 为分界点, 任一 z/h 位置的位移 U 都是对称形式。图 4-10(b)给出了厚宽比 $h/a=0.1$ 时位移 V 沿厚度 z 方向的变化, 同样由于 y 方向上两端的边界条件相同, 以 $y/b=0.5$ 为分界线 $y/b=0.0, 0.2, 0.4$ 分别与 $y/b=1.0, 0.8, 0.6$ 下的位移 V 计算值大小相等方向相反。由图 4-10(c) 和(d)可见, 随着长宽比的增大, 与图 4-8(c)和(d)相比同一条件下的位移 W 增大而切应力 τ_{xz} 则减小, 两者在 y 方向上对称分布的形式不变。由图 4-10(e)可见, 切应力分量 τ_{yz} 以 $y/b=0.5$ 为界线呈反对称形式分布, 并且随着厚宽比的增大不同 y 位置上的切应力 τ_{yz} 差距减小。由图 4-10(f)可见, 正应力 σ_{zz} 在厚度 z 方向上的值随着厚宽比的增大而减小, 且与图 4-8(f)相比正应力 σ_{zz} 值波动很小, 说明长宽比的增减对于应

力分量 σ_{zz} 的影响不大。图 4-10(g)和(h)分别给出了厚宽比取 $h/a=0.2$ 和 $h/a=0.3$ 时正应力 σ_{xx} 与 σ_{yy} 沿厚度 z 方向的变化, 随着长宽比的增大, 不同 y/b 的正应力 σ_{yy} 值相近的界线提高到 $z/h=0.3$ 附近, 此时正应力 σ_{yy} 方向由负转正, 并在 $z/h=0.5$ 附近拉应力达到最大值; 在 $z/h=0.36$ 附近时, 不同 x/a 的正应力 σ_{xx} 方向发生变化, 由负转正, 在 $z/h=0.45$ 附近时不同 x/a 的拉应力 σ_{xx} 值相近, 部分拉应力在 $z/h=0.9$ 附近达到峰值($x/a=0.3, 0.4, 0.5$), 另一部分拉应力则是在 $z/h=1.0$ 达到最大值($x/a=0.1, 0.2$)。图 4-10(i) 给出了厚宽比 $h/a=0.3$ 切应力 τ_{xy} 沿厚度 z 方向的变化, 随着长宽比的增大, 不同 x/a 的切应力值相近的界线降低至 $z/h=0.15$ 附近, 此时切应力 τ_{xy} 值由正转负, 在 $z/h=0.4$ 附近应力达到峰值。




 图 4-9 不同梯度指数下四边简支 FGM 长方形板应力应变随 z 分布

($a = 1, b = 0.5, h/a = 0.1$)



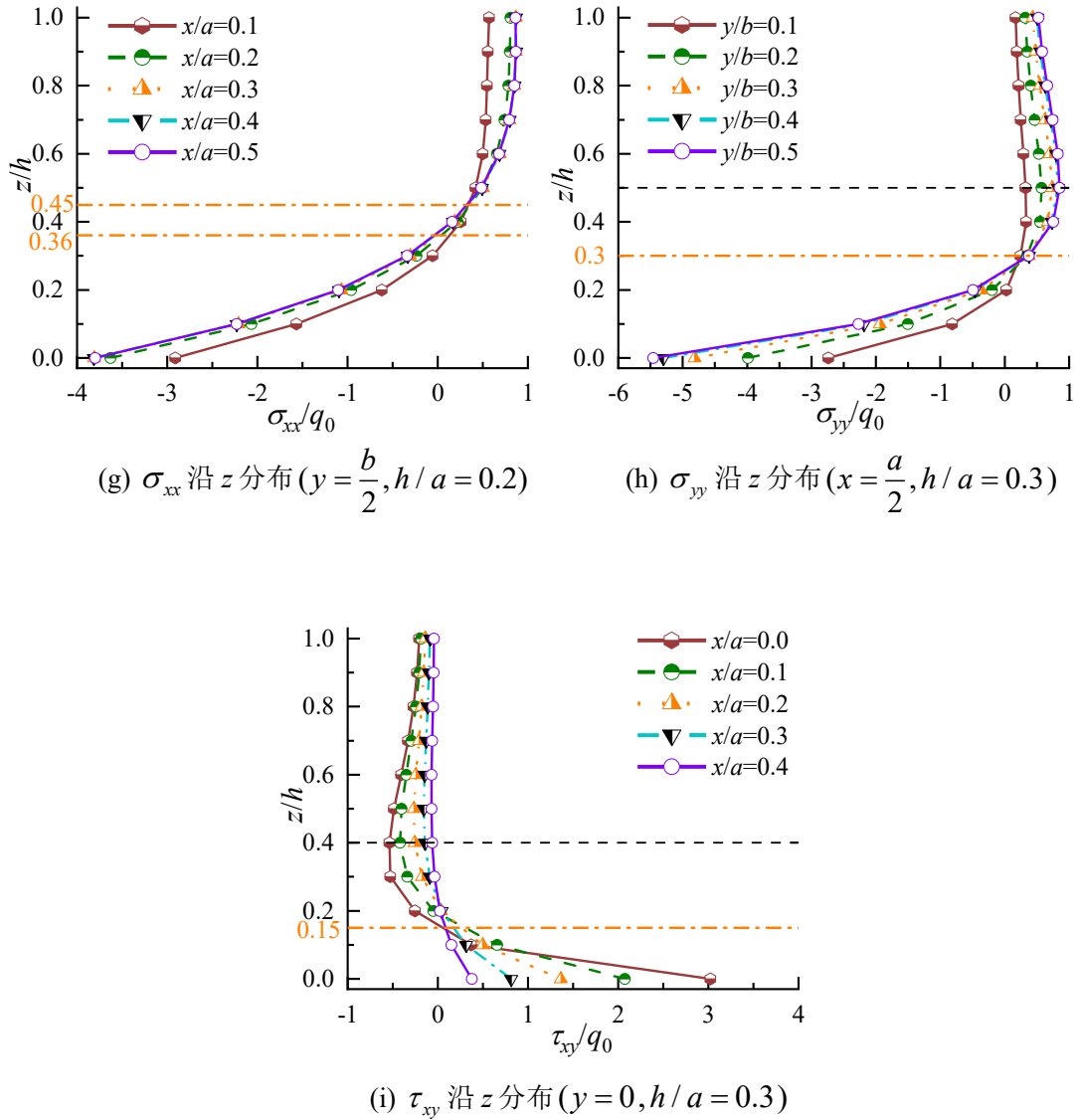


图 4-10 均布荷载下四边简支 FGM 长方形板位移和应力分布

$$(a = 1, b = 0.5, \lambda = -10)$$

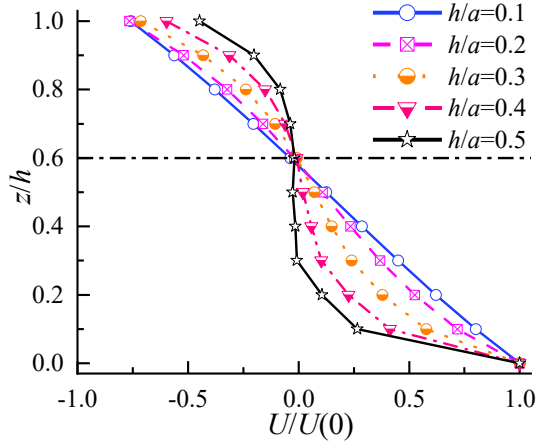
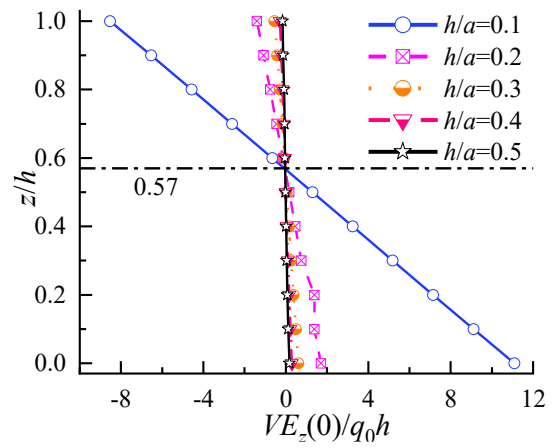
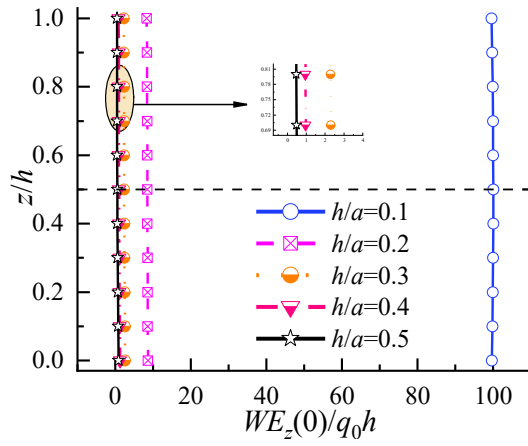
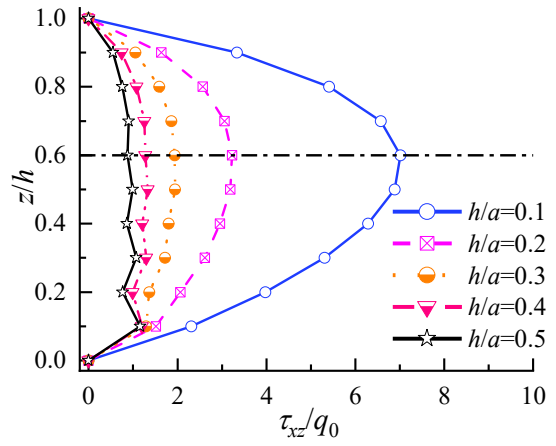
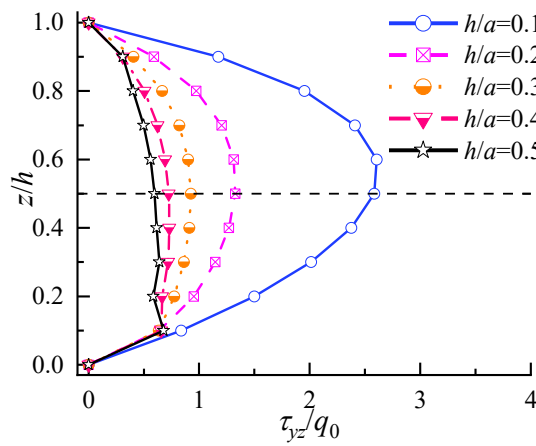
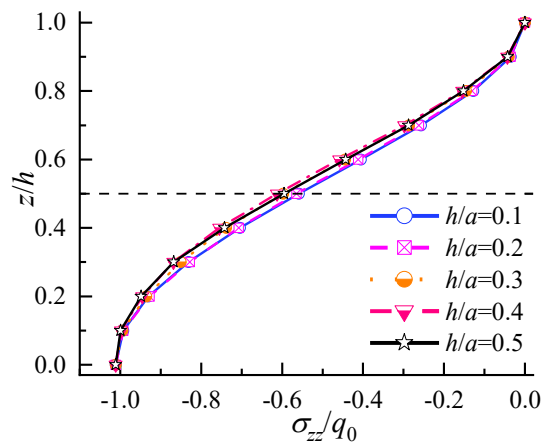
算例 4 取图 4-1 所示四边简支正交各向异性 FGM 矩形板上表面受均布荷载 $q_0(x, y)$ ，板的长宽高分别为 a, b, h ， $a = b = 1, h = 0.1$ 。材料的泊松比为 $\nu_{xy} = \nu_{xz} = \nu_{yz} = 0.25$ ，材料的三个主方向的弹性模量与剪切模量的关系为 $E_x(z) = 10E_y(z) = 10E_z(z)$ ， $G_{xy}(z) = G_{xz}(z) = 0.6E_z(z)$ ， $G_{yz}(z) = 0.5E_z(z)$ ，其中板弹性模量 $E_z(z)$ 在厚度方向上以幂函数形式变化 $E_z(z) = E_z(0)(1 + \alpha z/h)^\lambda$ ，板上表面的弹性模量 $E_z(0) = 100\text{GPa}$ ， α 和 λ 为两个材料指数。

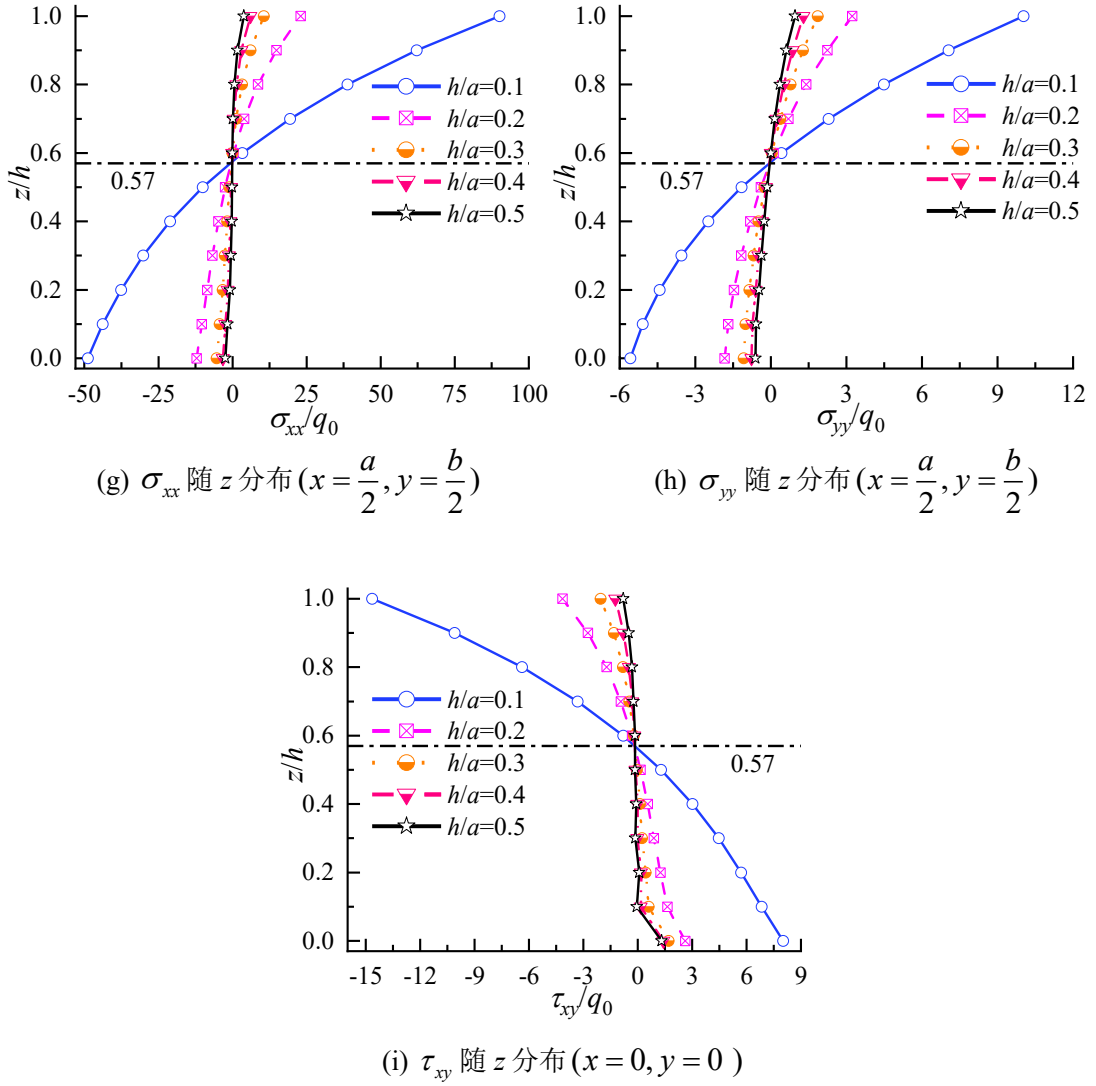
表 4-13 均布荷载下正交各向异性 FGM 矩形板的位移与应力

$$(a=b=1, h/a=0.1, \alpha=0.5, \lambda=3)$$

板位置 ($x/a, y/b$)	力学量	z/h	$m=n=19$		$m=n=99$	
			文献[47]	DQM 解	文献[47]	DQM 解
板中点 (0.5, 0.5)	$\frac{WE_z(0)}{q_0 h}$	0.0	83.4028	83.3978	83.4155	83.4105
		0.2	/	83.6170	/	83.6221
		0.5	83.7623	83.7572	83.7631	83.7581
		0.8	/	83.6543	/	83.6545
		1.0	83.4261	83.4211	83.4262	83.4212
	$\frac{\sigma_{xx}}{q_0}$	0.0	-42.7178	-42.7132	-42.7896	-42.7823
		0.2	/	-36.9316	/	-36.9221
		0.5	-13.6778	-13.6786	-13.6762	-13.6844
		0.8	/	38.5968	/	38.6026
		1.0	99.0385	99.0275	99.0423	99.0396
简支边 $y=0$ 中间 (0.5, 0)	$\frac{VE_z(0)}{q_0 h}$	0.0	17.5330	17.4528	17.5051	17.5066
		0.2	/	11.3140	/	11.3045
		0.5	2.60250	2.60255	2.60041	2.60044
		0.8	/	-6.14825	/	-6.14849
		1.0	-12.2520	-12.2241	-12.2253	-12.2242
板角点 (0, 0)	$\frac{\tau_{xy}}{q_0}$	0.0	6.99763	7.00062	7.58115	7.63454
		0.2	/	5.59142	/	5.60091
		0.5	1.85483	1.85503	1.83859	1.81694
		0.8	/	-6.34318	/	-6.33618
		1.0	-16.0685	-16.0660	-16.0703	-16.0527

本例中的 3 个主方向的弹性模量与剪切模量都是沿厚度 z 方向的幂函数形式，本文基于三维弹性理论使用微分求积法(DQM)进行位移与应力的计算，表 4-13 给出了不同级数项数下本文 DQM 解与文献[47]IMMS 解的部分位移应力比较。由表可见，本文解与文献[47]的计算结果具有很高的吻合度，除板角点处切应力 τ_{xy} 的不同级数计算结果有一定差距外，其他板位置的位移应力结果都很接近，说明本文方法对于均布荷载下四边简支正交各向异性 FGM 矩形板的静力问题计算是有效的。其实，均布荷载不同级数项数在板角点处切应力 τ_{xy} 没能得到快速收敛的结果，是因为此处的应力分布复杂，计算结果呈波动收敛的态势，在实际计算中，无论是本文 DQM 解，还是文献[47]IMMS 解，随着级数项数的增大，切应力 τ_{xy} 值最后会归于收敛。


 (a) U 随 z 分布 ($x=0, y=\frac{b}{2}$)

 (b) V 随 z 分布 ($x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{4}$)

 (c) W 随 z 分布 ($x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}$)

 (d) τ_{xz} 随 z 分布 ($x=0, y=\frac{b}{2}$)

 (e) τ_{yz} 随 z 分布 ($x=\frac{a}{2}, y=0$)

 (f) σ_{zz} 随 z 分布 ($x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{4}$)

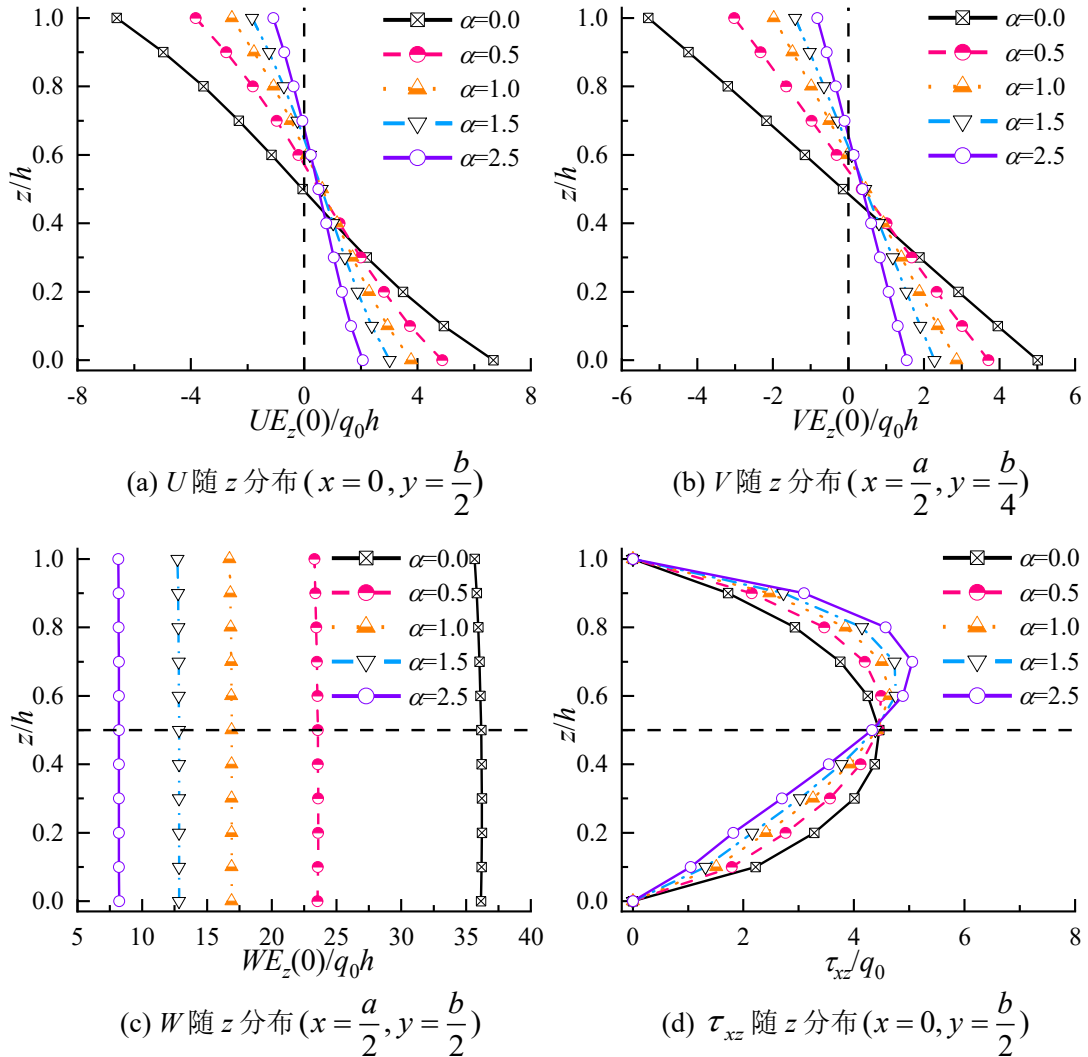

 图 4-11 不同厚宽比下四边简支 FGM 方板应力应变随 z 分布情况

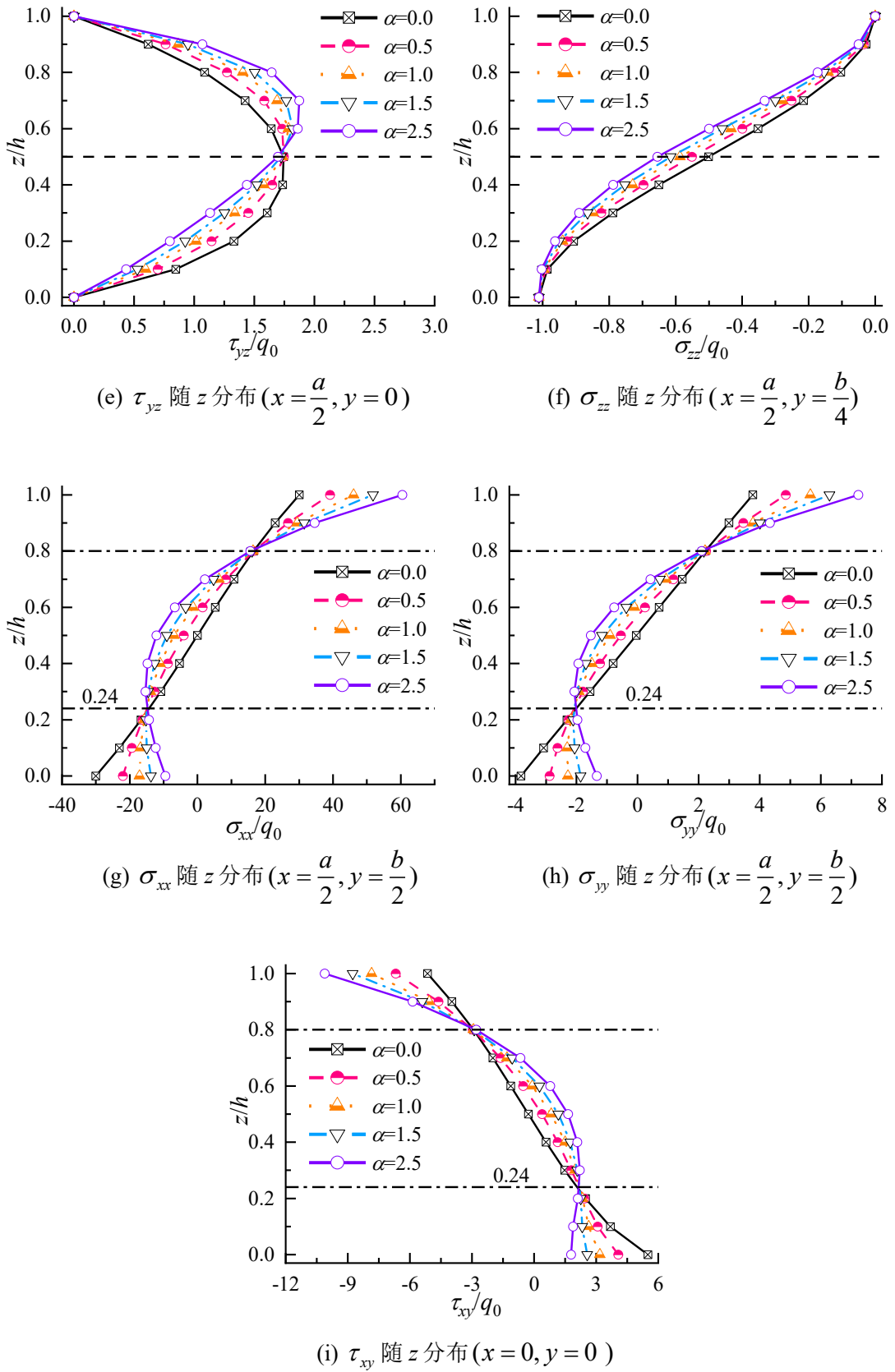
$$(a = b = 1, \alpha = 0.25, \lambda = 4)$$

针对受均布荷载作用材料指数取 $\alpha = 0.25, \lambda = 4$ 的正交各向异性 FGM 矩形方板, 采用本文 DQM 解, 级数项数取 $m = n = 19$, 图 4-11 给出了不同厚宽比下 9 个位移应力在各自位置沿厚度 z 方向的变化情况。以下对各个力学量取不同厚宽比 h/a 的分布变化进行具体分析。

由图 4-11(a)可见, 进行归一化处理后的位移 U 取薄板($h/a = 0.1$)时, 近似呈线性变化, 满足薄板理论的原理, 但随着厚宽比的增大呈现出非线性变化, 这说明经典薄板理论对于中厚板乃至厚板的失效。此外, 在板厚度 $z/h = 0.6$ 附近, 位移 U 的方向发现变化。由图 4-11(b)可见, 与薄板位移 U 相似, 位移 V 在薄板(取 $h/a = 0.1$)时同样近似呈线性变化, 但其位移方向发生变化的板厚度界线略微降

至 $z/h=0.57$ 附近。由图 4-11(c)可见, 板中心处的各个厚宽比下不同厚度位置的挠度位移 W 差距很小。由图 4-11(d)与(e)可见, y 方向上简支边中点处切应力 τ_{xz} 和 x 方向上简支边中点处切应力 τ_{yz} 都随着厚宽比的增大而减小, 在厚度 z 方向上都呈先增大后减小的态势, τ_{xz} 在 $z/h=0.6$ 附近各个厚宽比下的切应力 τ_{xz} 值达到最大后降低, 而 τ_{yz} 达到峰值的界线比较复杂, $z/h=0.4, 0.5, 0.6$ 都存在。由图 4-11(f)可见, 不同厚宽比下的正应力分量 σ_{zz} 极为接近, 说明厚宽比的变化对于 σ_{zz} 没有太大影响。由图 4-11(g)和(h)可见, 由于四边简支矩形板的两端条件相同, 但 $E_x(z)=10E_y(z)$, 出现了图相似, 计算结果相去甚远, 随着厚宽比的增大, 正应力 σ_{xx}, σ_{yy} 都减小至 0。由图 4-11(i)可见, 随着厚宽比的增大, 切应力 τ_{xy} 都减小至 0, 此外, 各个厚宽比的切应力值在板厚 $z/h=0.57$ 附近相近。




 图 4-12 不同 α 指数下四边简支 FGM 方板位移应力随 z 分布情况

$$(a = b = 1, h/a = 0.15, \lambda = 2)$$

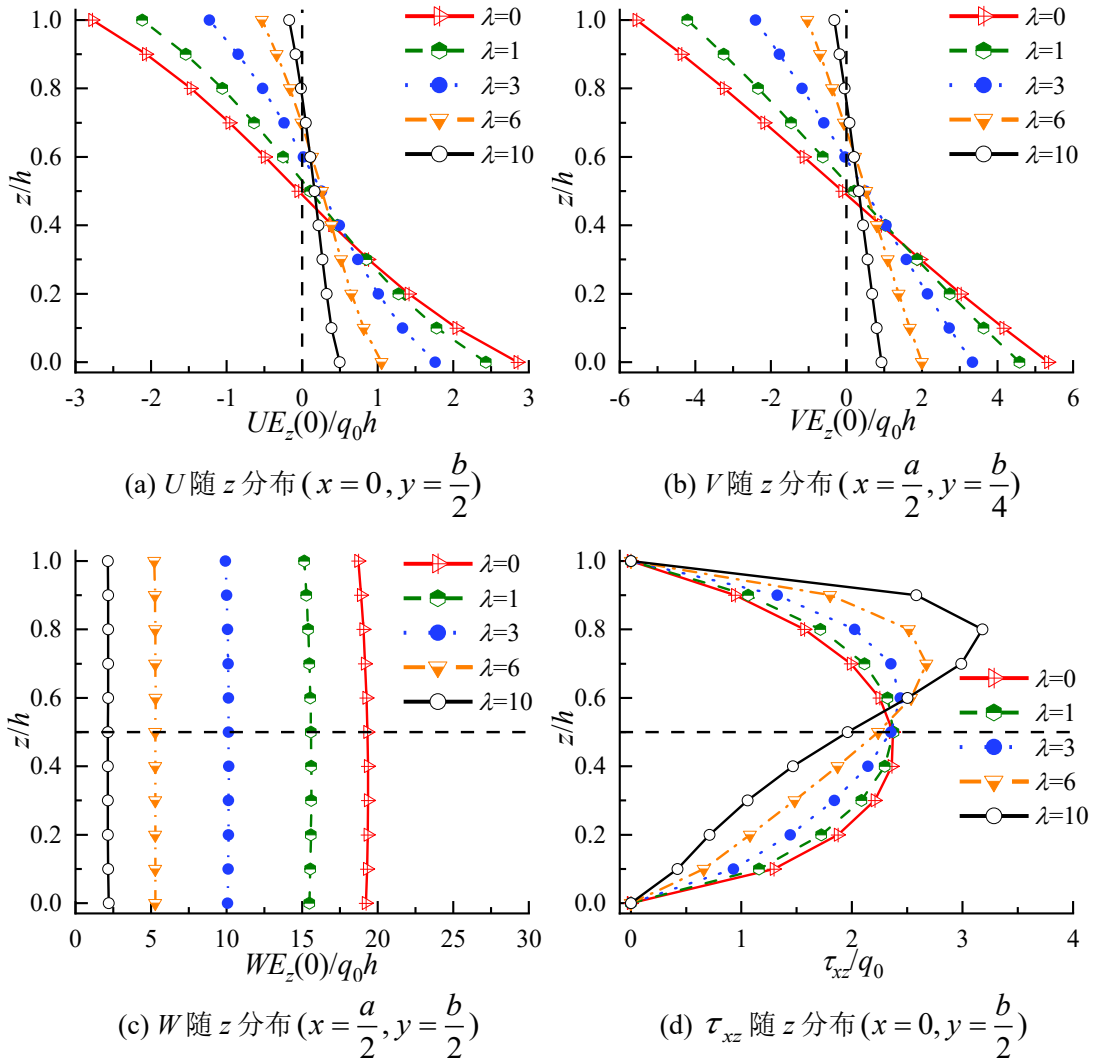
对于均布荷载下材料指数取 $\lambda=2$ ，厚宽比取 $h/a=0.15$ 的正交各向异性 FGM 矩形方板，采用 DQM 解，级数项数取 $m=n=19$ ，图 4-12 给出了不同 α 指数下各个位移应力在各自位置沿厚度 z 方向的变化情况。以下对 9 个力学量取 α 指数的分布变化进行分析总结。

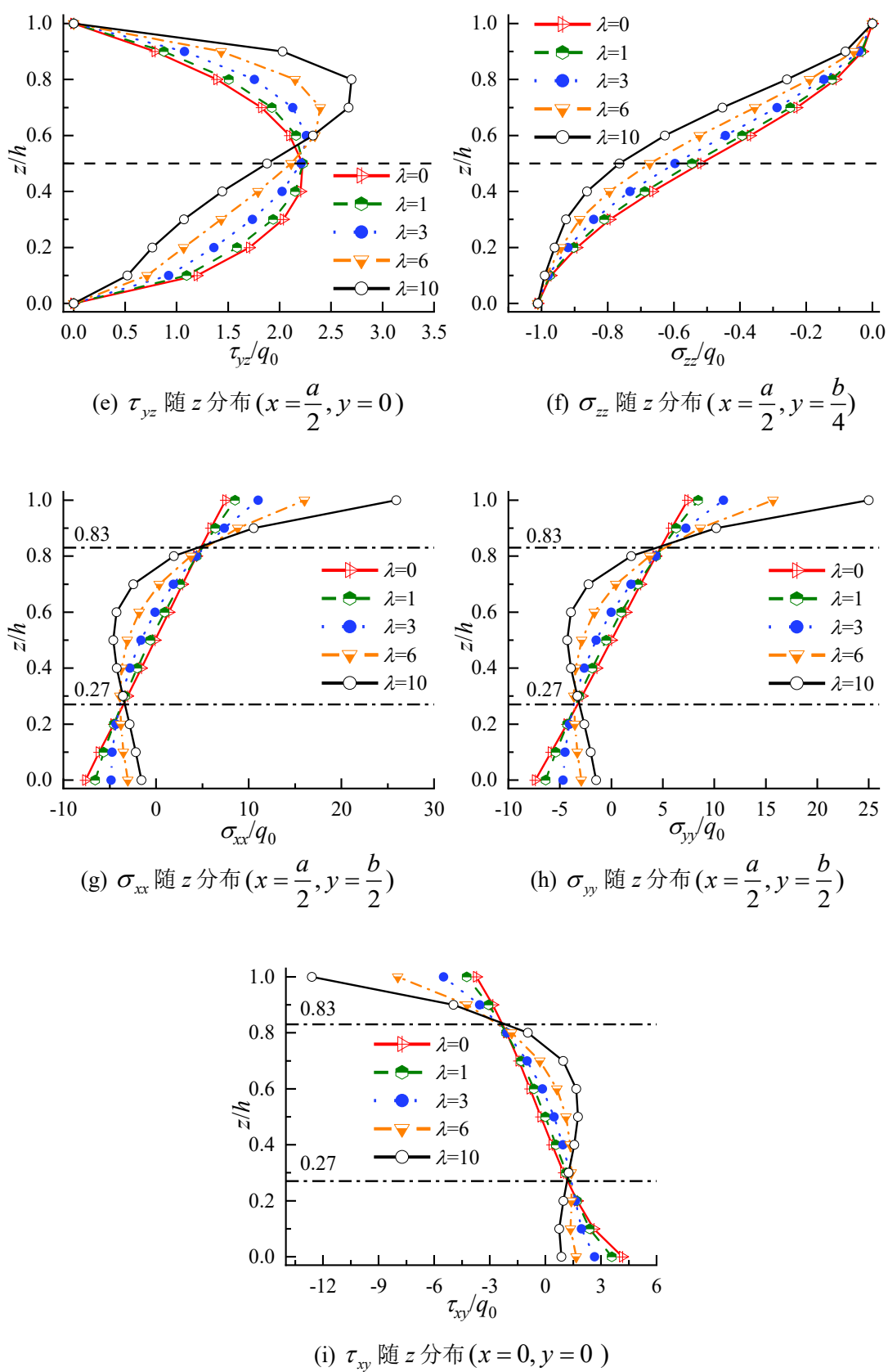
从图 4-12(a)和(b)可以看出，随着 α 指数的增加，各个厚度位置的位移量 U 和 V 都有不同程度的减小， $\alpha=0$ 的均质板的位移 U 和 V 方向发生变化的板厚度位置在 $z/h=0.5$ 附近，随着 α 指数的增加这一位置也在增大。由图 4-12(c)可见，随着 α 指数的增大位移 W 减小，板中心处各个 α 指数下不同厚度位置的挠度位移 W 都很接近。由图 4-12(d)与(e)可见， y 方向上简支边中点处切应力 τ_{xz} 峰值和 x 方向上简支边中点处切应力 τ_{yz} 峰值都随着指数 α 的增大而慢慢转移至板的下半部分，在厚度 z 方向上都呈先增大后减小的态势。由图 4-12(f)可知，正应力分量 σ_{zz} 随着 α 指数的增大而增大，其波动的幅度比图 4-11(f)更大，说明 α 指数变化对 σ_{zz} 值的影响比厚宽比大。从图 4-12(g)和(h)可见，由于四边简支矩形板的两端边界条件相同，但 $E_x(z)=10E_y(z)$ ，出现了图相似， σ_{xx}, σ_{yy} 应力值相差较大。取 $\alpha=0$ 的弹性均质板时，应力 σ_{xx}, σ_{yy} 都呈近似线性变化，正应力 σ_{xx}, σ_{yy} 的大小在厚度区间 $[0, 0.24]$ 、 $[0.8, 1]$ 随着 α 的增大而增大，在厚度区间 $[0.24, 0.8]$ 随着 α 的增大而减小。从图 4-11(i)可得到，切应力 τ_{xy} 的大小在厚度区间 $[0, 0.24]$ 、 $[0.8, 1]$ 随着 α 的增大而减小，在厚度区间 $[0.24, 0.8]$ 随着 α 的增大而增大。

针对均布荷载下材料指数取 $\lambda=0.5$ ，厚宽比为 $h/a=0.1$ 的正交各向异性 FGM 长方形板，采用本文 DQM 解，级数项数取 $m=n=19$ ，图 4-13 给出了不同 λ 指数下 9 个应力应变在各自位置沿厚度 z 方向的变化情况。以下对各个力学量在增大长宽比后取不同 λ 指数的分布规律进行具体的分析研究。

由图 4-13(a)和(b)可知，随着 λ 指数的增加，各个厚度位置的位移量 U 和 V 都有不同程度的减小， $\lambda=0$ 的均质板的位移 U 和 V 方向发生变化的板厚度位置在 $z/h=0.5$ 附近，随着 λ 指数的增加这一位置也在增大， $\lambda=10$ 时则在 $z/h=0.8$ 附近。由图 4-13(c)可见，各个 λ 指数下的板中心处不同厚度位置的挠度位移 W 差距依然不大，说明均布荷载下四边简支 FGM 矩形板中心处的各个厚度位置的挠度位

移 W 都极为相近, 不受梯度指数、板的厚宽比与长宽比影响。由图 4-13(d)与(e)可见, y 方向上与 x 方向上简支边中点处切应力 τ_{xz}, τ_{yz} 峰值都随着指数 λ 的增大而往板的下半部转移, 在厚度 z 方向上都是先增大后减小的趋势。由图 4-13(f)可知, 正应力分量 σ_{zz} 随着 α 指数的增大而增大, 其波动的幅度与 α 指数相仿, 但对 σ_{zz} 的影响比厚宽比的大。从图 4-13(g)和(h)可见, 由于两端边界条件相同, 但 $E_x(z) = 10E_y(z)$, $a = 3b = 1$, 出现了图相似的同时两个应力分量值仍然相近。取 $\lambda = 0$ 的均质板时, 正应力 σ_{xx}, σ_{yy} 都呈近似线性变化, 两个正应力的大小在区间 $z/h \in [0, 0.27]$ 、 $[0.83, 1]$ 随着 λ 指数的增大而增大, 在区间 $z/h \in [0.27, 0.83]$ 随着 λ 指数的增大而减小。从图 4-13(i)可得到, 切应力 τ_{xy} 的大小在区间 $z/h \in [0, 0.27]$ 、 $[0.83, 1]$ 随着 λ 的增大而减小, 在区间 $z/h \in [0.27, 0.83]$ 随着 λ 的增大而增大。




 图 4-13 不同 λ 指数下四边简支 FGM 长方形板位移应力随 z 的分布

$$(a=1, b=1/3, h/a=0.1, \alpha=0.5)$$

算例 5 取如图 4-14 所示四边简支正交各向异性 FGM 矩形板的长宽高分别为 a, b, h ，引入笛卡尔坐标系，以 $z=0$ 为板的中间表面， z 向下为正，上表面 $z=-h/2$ 处受均布荷载 $q_0(x, y)$ 。板在厚度 z 方向的变化满足幂律模型公式：

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^k \quad (k \geq 0) \quad (4-15)$$

其中 E_c 和 E_m 分别代表陶瓷与金属的弹性模量， k 为幂律指数，其值大于或等于 0， $k=0$ 表示为全陶瓷板，板的上表面($z=-h/2$)陶瓷体积分数较高，板的下表面($z=h/2$)金属体积分数较高。

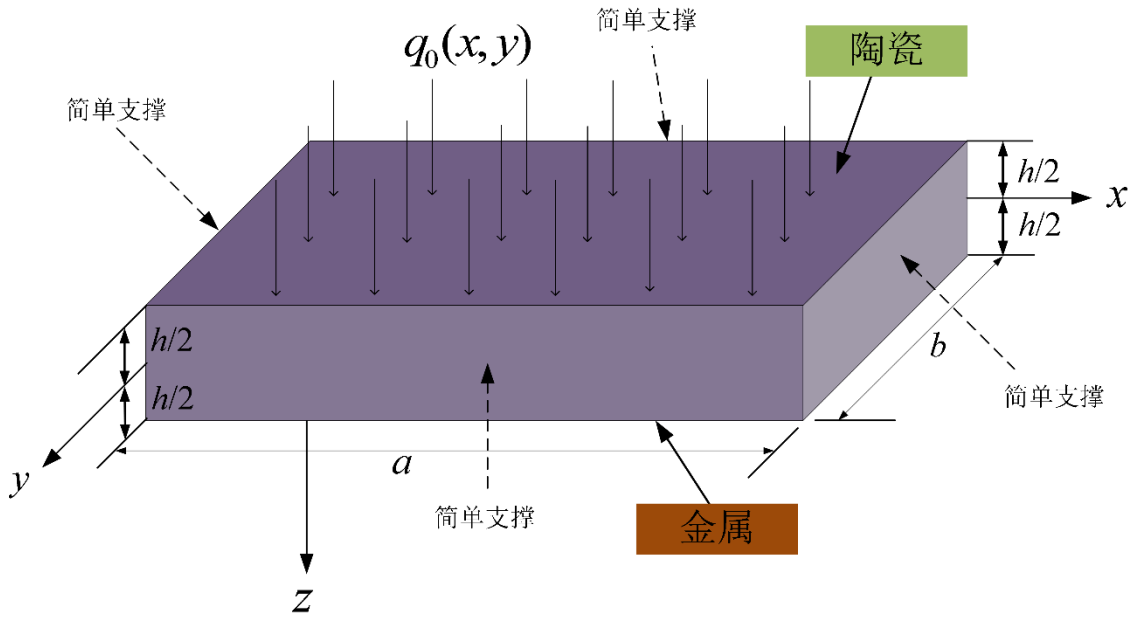


图 4-14 四边简支三维弹性 FGM 矩形板

为检验本文微分求积法(DQM)对于求解 FGM 矩形板静力问题的有效性，以下将给出本文 DQM 解与文献[111]解的部分位移与应力计算结果对比，此外，还基于本文 DQM 解给出了其它不同参数变化下的位移应力图表以供参考。算例 5 中用于对比研究的两组固定数据为：

(1) $a=b=1$ ， $h/a=0.01, 0.1$ ，各个方向泊松比均取 $\nu=0.3$ ，幂律指数 $k=0$ ， $E(z)=E_c=1$ ，均布荷载 $q_0=1$ 。

(2) $a=b=1$ ， $h/a=0.1$ ，各个方向泊松比均取 $\nu=0.3$ ， $E_m=70$ ， $E_c=380$
 $E(z) = E_m + (E_c - E_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^k$ ，均布荷载 $q_0=1$ 。

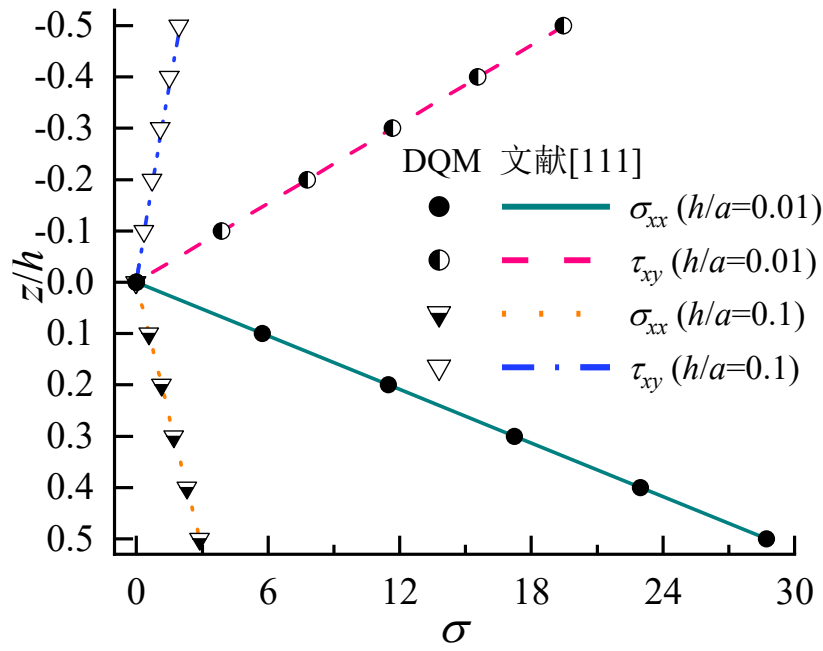


图 4-15 各向同性均质 FGM 方板厚度 z 方向上的应力分布
($a=b=1, k=0$)

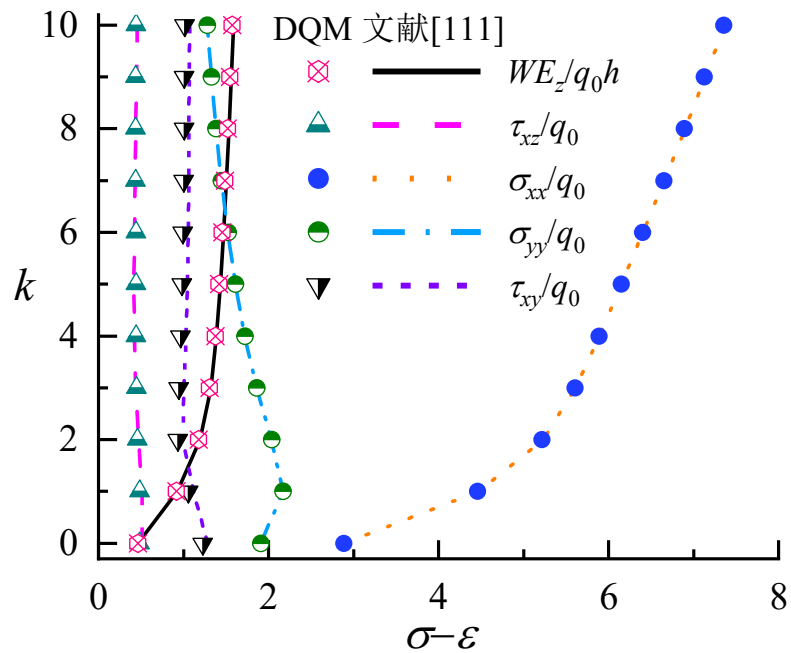


图 4-16 不同幂律指数下 FGM 方板的部分位移应力随 z 分布
($a=b=1, h/a=0.1$)

表 4-14 不同厚宽比下四边简支 FGM 方板的位移与应力($a=b=1, k=5$)

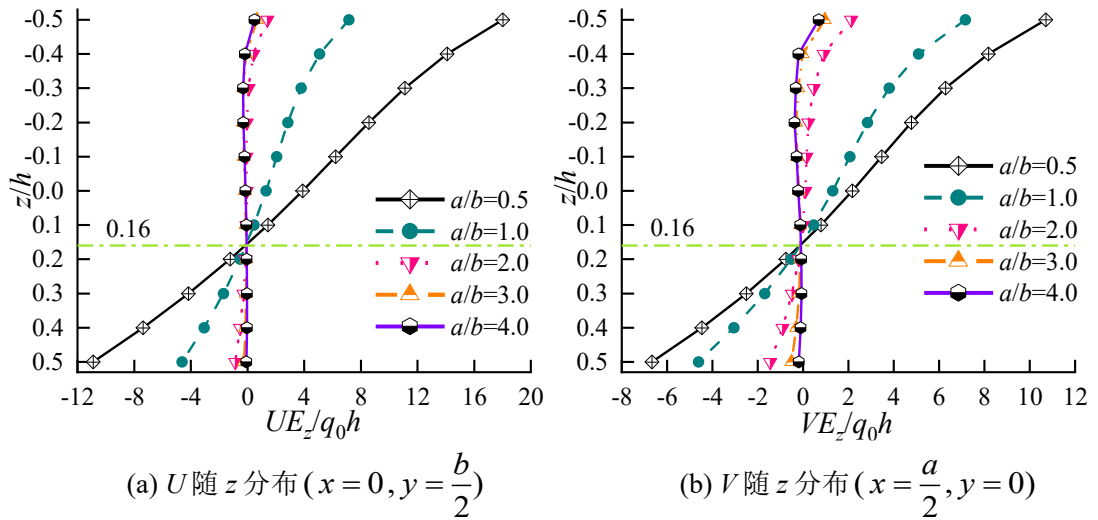
z/h	$h=0.1$	$h=0.2$	$h=0.3$	$h=0.4$	$h=0.5$
$UE/(q_0h) (x=0, y=b/4)$					
-0.5	2.08269	3.99987	5.89052	8.17434	11.4694
-0.3	1.40968	2.43355	2.72975	2.01257	0.05020
0.0	0.47358	0.78806	0.73809	0.11306	-1.27033
0.3	-0.47597	-0.91855	-1.31620	-1.67391	-2.00618
0.5	-1.15642	-2.40533	-3.75593	-5.14822	-6.48186
$VE/(q_0h) (x=a/2, y=0)$					
-0.5	2.85731	5.47887	7.93592	10.6431	14.3490
-0.3	1.94105	3.41338	3.99193	3.31601	1.08655
0.0	0.65287	1.12202	1.16791	0.48970	-1.23832
0.3	-0.65273	-1.26245	-1.80896	-2.29780	-2.75620
0.5	-1.58081	-3.28353	-5.14537	-7.10779	-9.02209
$WE/(q_0h) (x=a/2, y=b/2)$					
-0.5	1.39912	1.57779	1.95121	2.64317	3.85486
-0.3	1.40974	1.60881	1.97746	2.58055	3.54178
0.0	1.41814	1.62890	1.97170	2.43579	3.01650
0.3	1.41790	1.62409	1.94659	2.34826	2.76623
0.5	1.41267	1.60283	1.89731	2.25688	2.61682
$\tau_{xz}/q_0 (x=0, y=b/4)$					
-0.5	0	0	0	0	0
-0.3	0.20985	0.23554	0.25874	0.27773	0.29228
0.3	0.35408	0.34008	0.32251	0.30106	0.27779
0.5	0	0	0	0	0
$\tau_{yz}/q_0 (x=a/2, y=0)$					
-0.5	0	0	0	0	0
-0.3	0.25015	0.27595	0.29794	0.31298	0.32400
0.3	0.42775	0.41405	0.39976	0.38462	0.36626
0.5	0	0	0	0	0
$\sigma_{zz}/q_0 (x=a/2, y=b/2)$					
-0.5	-0.09375	-0.18750	-0.28125	-0.37500	-0.46875
-0.3	-0.08045	-0.16524	-0.27531	-0.37336	-0.47688
0.3	-0.01612	-0.03275	-0.04936	-0.07181	-0.10251
0.5	0	0	0	0	0
$\sigma_{xx}/q_0 (x=a/2, y=b/4)$					
-0.5	-1.57896	-0.81838	-0.57996	-0.47889	-0.44379
-0.3	-0.86395	-0.56635	-0.39862	-0.32250	-0.28340
0.3	0.85226	0.40361	0.24319	0.15668	0.10346
0.5	4.56987	2.36445	1.65924	1.31477	1.09243
$\sigma_{yy}/q_0 (x=a/2, y=b/4)$					
-0.5	-1.71738	-0.88019	-0.62051	-0.52364	-0.50341
-0.3	-1.18369	-0.59481	-0.40431	-0.31525	-0.26534
0.3	0.92949	0.43817	0.26465	0.17395	0.11789
0.5	5.00369	2.60870	1.83495	1.43093	1.15979
$\tau_{xy}/q_0 (x=0, y=0)$					
-0.5	1.39295	0.71369	0.53147	0.48269	0.49270
-0.3	0.91026	0.35275	0.14132	0.02833	-0.03846
0.3	-0.77422	-0.37179	-0.23592	-0.16802	-0.12790
0.5	-4.20159	-2.16800	-1.48450	-1.12975	-0.90092

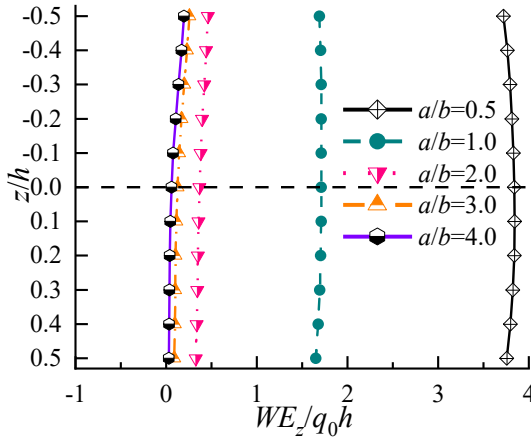
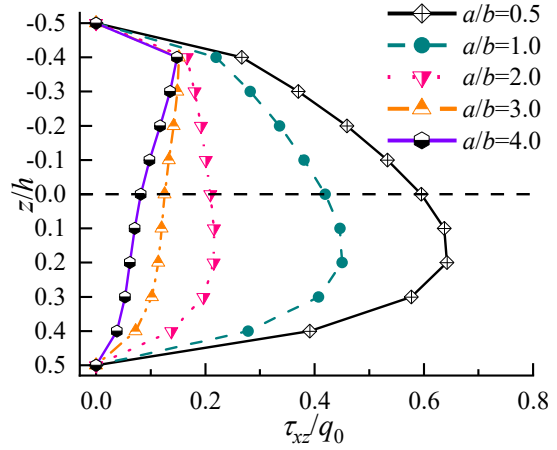
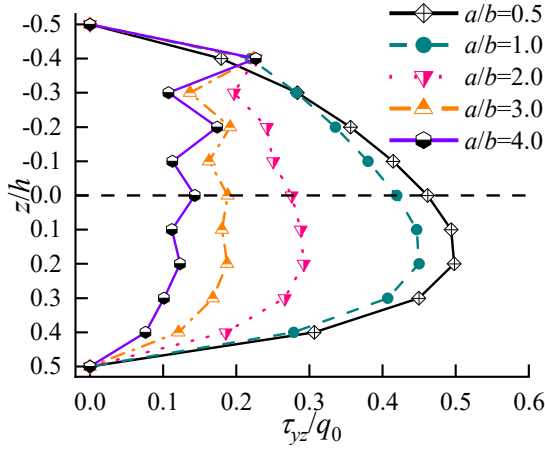
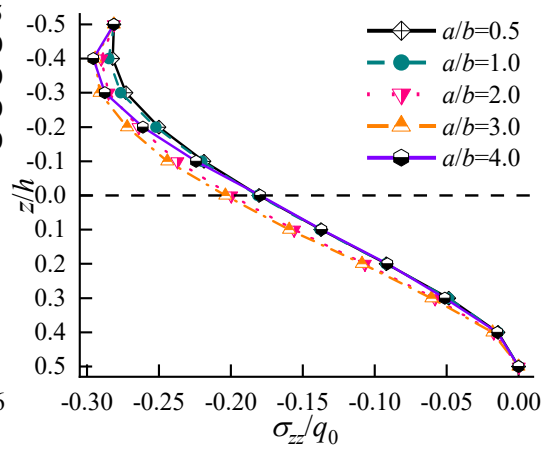
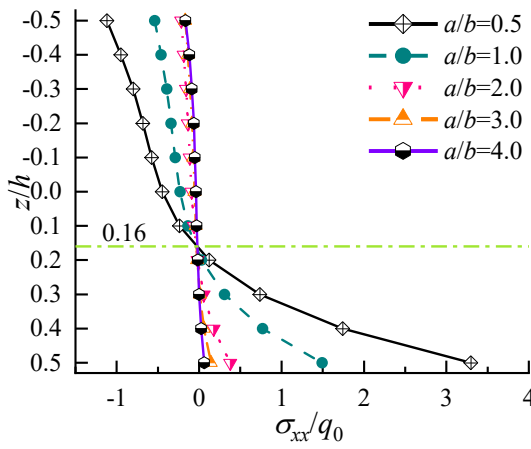
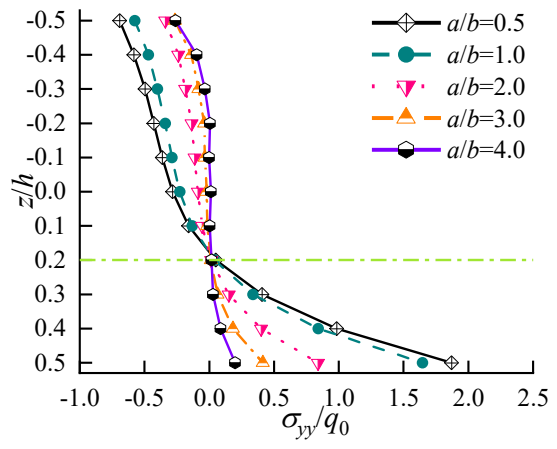
基于本例中第一组固定数据, 图 4-15 给出了不同厚宽比下各向同性均质薄板 ($k=0$) 本文 DQM 解与文献[111]解的部分应力在厚度方向上分布情况。基于本例第二组固定数据, 图 4-16 给出了不同幂律指数下 FGM 方形薄板本文 DQM 解与文献[111]解的部分位移和应力沿厚度方向的分布情况。本文计算的级数项数取 $m=n=19$, 选取文献[111]中同一位置处的位移应力用于比较, 可以看到本文 DQM 解与文献[111]的计算结果具有很高的吻合度, 有力说明了本文的微分求积法对于求解横观各向同性板和正交各向异性梯度板的静力问题的准确性与有效性。

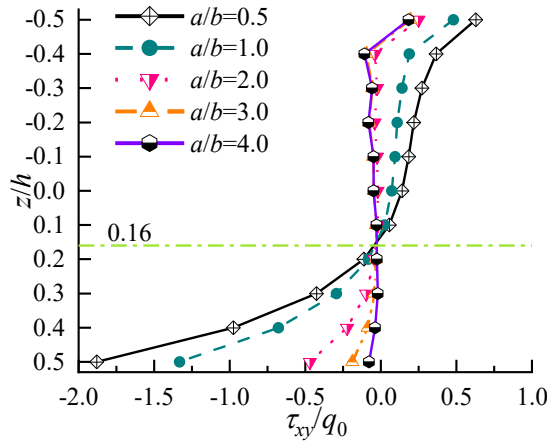
基于本例第二组中幂律模型和泊松比数据, 表 4-14 列出了幂律指数取 $k=5$ 时, 不同厚宽比下 FGM 方板本文 DQM 解 9 个位移应力在厚度方向上的变化情况, 计算结果小数点后保留 5 位有效数字, 可作为其他方法的参考解。从表中可以看出, 位移 U, V, W 在板的上下表面均是随着厚宽比的增大而增大, 位移 U, V 在板的上半部分 ($z/h \in (-0.5, 0]$) 随着厚宽比的增大处于先增大后减小的态势, 而在板的下半部分则是随着厚宽比的增大而增大, 这可能与板上下部分陶瓷与金属的体积分数不同有关。板中心处位移 W 在板较薄时沿厚度方向变化不大, 随着板逐渐变厚, z 方向上的各个位置位移值开始出现了明显的差值, 这说明厚板的挤压变形是必须要考虑的。两个剪应力 τ_{xz}, τ_{yz} 在厚度方向上均表现出同样的分布规律, 在板上半部分随厚宽比增大而增大, 在板下半部分随厚宽比增大而减小。板中心处的压应力 σ_{zz} 则是随着厚宽比增大而增大, 同一位置的正应力 σ_{xx}, σ_{yy} 则是总体在板的上半部表现为压应力, 板下半部为拉应力, 而 σ_{xx}, σ_{yy} 的拉压应力都随着厚宽比的增大同步减小。坐标原点处的剪应力 τ_{xy} 方向发生变化的板平面随着厚宽比的增大在不断往板的上半部靠近, 其值随着板厚的增大而减小。

取本例中第二组中幂律模型和泊松比数据, 针对幂律指数 $k=3$, 厚宽比取 $h/a=0.3$ 的单层中厚板上表面 ($z=-\frac{h}{2}$) 受均布荷载作用的情况, 图 4-17 给出了不同长宽比下本文 DQM 解的 9 个位移应力随 z 的分布, 计算的级数项数取 $m=n=19$ 。图 4-18 则给出了不同幂律指数下厚宽比取 $h/a=0.5$, 长宽比取 $a/b=2$ 的各个应力应变沿 z 方向的分布趋势, 级数项数仍取 $m=n=19$ 。以下对图 4-17 和图 4-18 的各力学分量分布规律进行具体的分析。

由图 4-17(a)和(b)可见, 不同长宽比下的位移 U, V 均在 $z/h=0.16$ 附近产生聚集, 此外, 随着长宽比的增大, 位移 U, V 在厚度方向上各个位置的位移均接近于 0。由图 4-17(c)可见, 板中心处的各个厚度的挠度位移 W 随着长宽比的增大而减小, 但各个厚度的位移差值没有产生很大波动。从图 4-17(d)和(e)可以看出, 两个简支边中点处的剪应力 τ_{xz}, τ_{yz} 值都有随着长宽比的增大而减小的特质, 剪应力 τ_{yz} 随着长宽比的增大在厚度方向上表现出来回波动的态势, 而剪应力 τ_{xz} 曲线则较为平滑, 这说明长宽比的增大对于剪应力 τ_{yz} 的影响更大。从图 4-17(f)可以看出, 各个长宽比下的正应力 σ_{zz} 值很接近, 可见长宽比的变化对于 σ_{zz} 的影响不大。从图 4-17(g)和(h)可以看出, 正应力 σ_{xx} 以 $z/h=0.16$ 附近为界线, 方向发生变化, 随着长宽比的增大各个厚度位置上的 σ_{xx} 减小直至 0; 正应力 σ_{yy} 则以 $z/h=0.2$ 附近为界线, 方向发生变化, 在区间 $z/h \in [0.5, 0.2]$ 内随着长宽比的增大各个厚度上的拉应力减小到 0 附近, 在区间 $z/h \in [0.2, -0.5]$ 内随着长宽比的增大各个厚度位置上的压应力减小到 0 附近。由图 4-17(i)可见, 各个长宽比的剪应力 τ_{xy} 值在 $z/h=0.16$ 附近产生聚集, 同样随着长宽比的增大而逐渐减小至 0 左右。

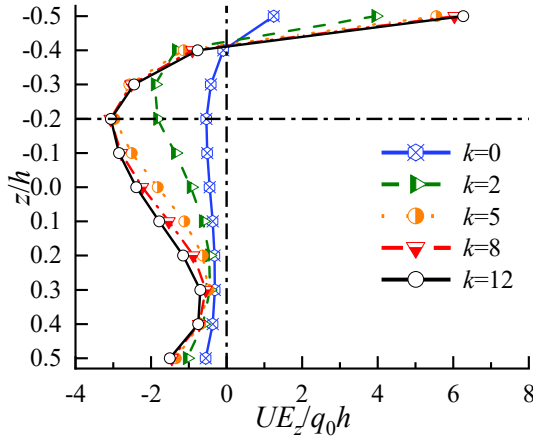
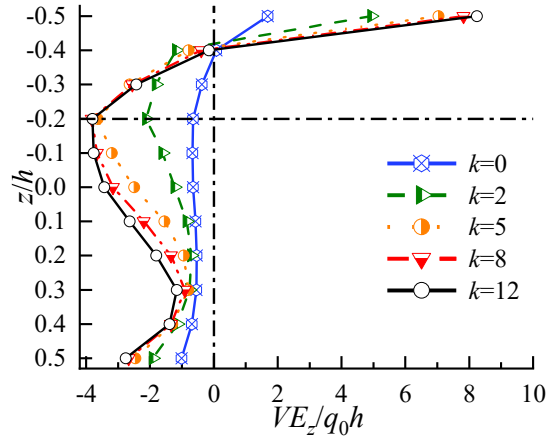
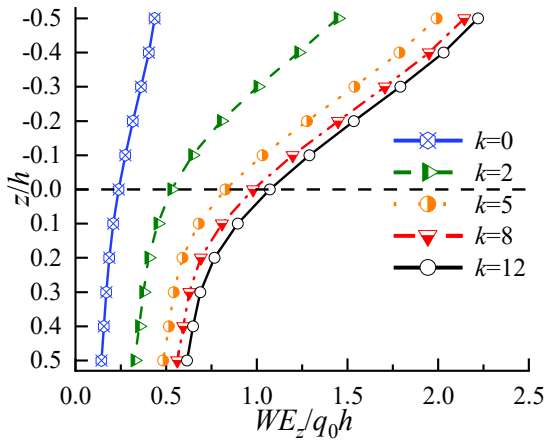
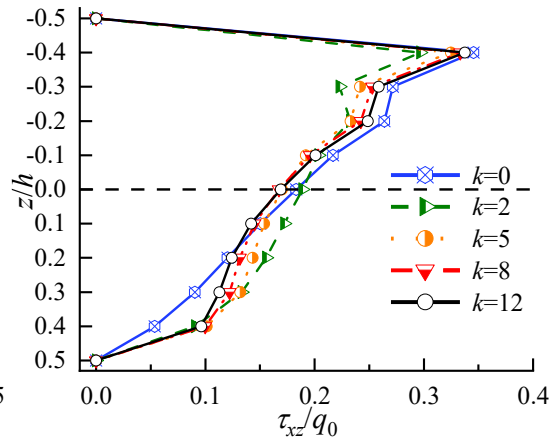
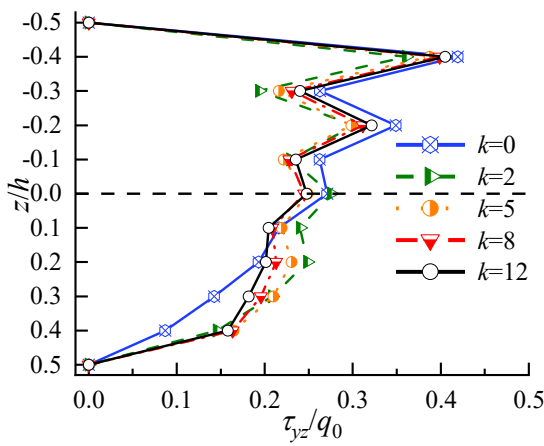
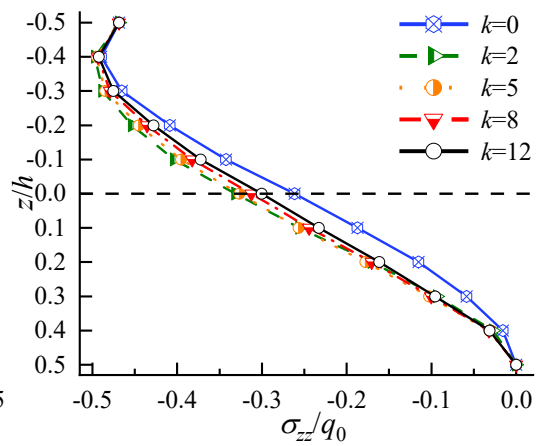



 (c) W 随 z 分布 ($x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}$)

 (d) τ_{xz} 随 z 分布 ($x = 0, y = \frac{b}{2}$)

 (e) τ_{yz} 随 z 分布 ($x = \frac{a}{2}, y = 0$)

 (f) σ_{zz} 随 z 分布 ($x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}$)

 (g) σ_{xx} 随 z 分布 ($x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{4}$)

 (h) σ_{yy} 随 z 分布 ($x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{4}$)

(i) τ_{xy} 随 z 分布 ($x=0, y=0$)图 4-17 不同长宽比下四边简支 FGM 中厚板位移和应力随 z 的分布

$$(h/a = 0.3, k = 3)$$

由图 4-18(a)和(b)可见, 不同幂律指数下的位移 U, V 均在 $z/h = -0.2$ 附近达到峰值, 在 $z/h = -0.4$ 附近位移方向发生变化。此外, 在整个厚度区间内随着 k 的增大, 位移 U, V 在厚度方向上各个对应位置的位移均增大。由图 4-18(c)可见, 板中心处厚度方向上的挠度位移 W 随着幂律指数的增大而增大, 厚度位置上的位移差值也同样随之增大, 并且板的上半部分的位移 W 近似呈线性变化, 各个厚度位置之间的差距明显大于板下半部分。从图 4-18(d)和(e)可以看出, 两个简支边中点处的剪应力 τ_{xz}, τ_{yz} 值在不同幂律指数下都很小, 各个 k 值下的剪应力 τ_{yz} 在厚度方向上都表现出强烈的波动起伏的现象, 相比之下剪应力 τ_{xz} 曲线则起伏较小, 这可能与取的四边简支板为 $a/b=2$ 的高长宽比有关。从图 4-18(f)可以看出, 不同幂律指数 k 的正应力 σ_{zz} 值依然变化不大, 可见长宽比与 k 值的变化都对 σ_{zz} 分量的影响很小。从图 4-18(g)和(h)可以看出, 随着幂律指数 k 的增大, 正应力 σ_{xx}, σ_{yy} 方向发生变化的界线在往板的下半部靠近, 此外, 不同 k 值下的两个正应力在各自厚度位置上分别都很相近。从图 4-18(i)可以看到, 相较于不同长宽比下的图 4-17(i), 不同幂律指数 k 的剪应力 τ_{xy} 值均表现的很接近, 由此可见, 长宽比变化对剪应力 τ_{xy} 值的影响比幂律指数大。


 (a) U 随 z 分布 ($x=0, y=\frac{b}{2}$)

 (b) V 随 z 分布 ($x=\frac{a}{2}, y=0$)

 (c) W 随 z 分布 ($x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}$)

 (d) τ_{xz} 随 z 分布 ($x=0, y=\frac{b}{2}$)

 (e) τ_{yz} 随 z 分布 ($x=\frac{a}{2}, y=0$)

 (f) σ_{zz} 随 z 分布 ($x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}$)

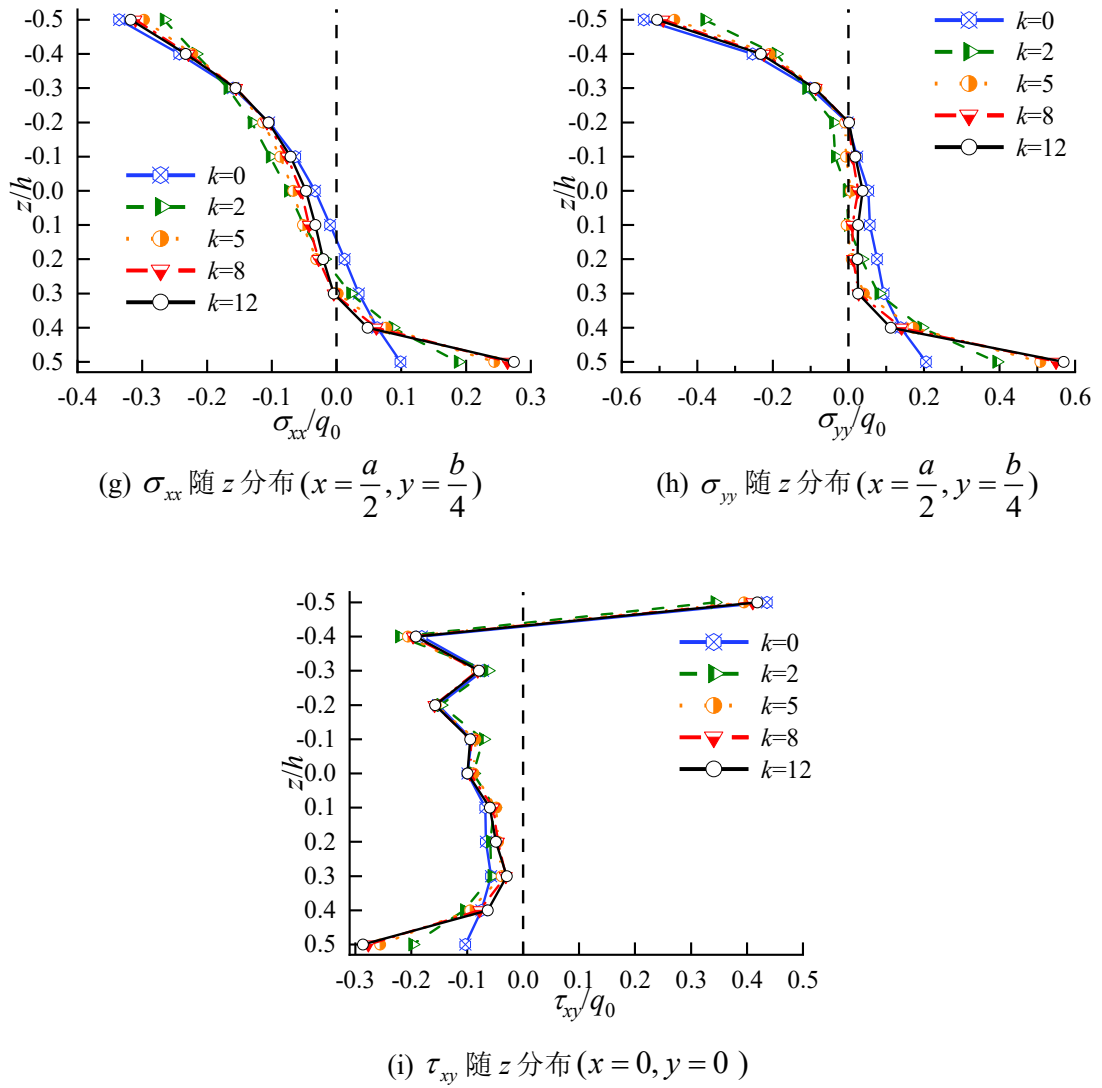


图 4-18 不同体积分数指数下四边简支 FGM 厚板位移和应力随 z 的分布
($h/a = 0.5, a/b = 2$)

4.4 本章小结

基于三维线弹性理论，本章使用微分求积法 (DQM) 来解决均匀载荷下四边简支各向同性和正交各向异性板的静态问题。利用双三角级数来展开相关位移和应力分量，将板的静力问题转化为求解具有变系数的常微分控制方程组特征值问题，得到了 9 个位移与应力的三维精确解。整个处理求解的过程简单明了，没有引入大量其它变量，便于理解运用。在 4.3 节中，通过 5 个算例对本文 DQM 方法的准确性和有效性进行了全面分析。此外，本章还给出了不同参数变化下的各个分量的变化趋势，可作为其它方法的参考。现总结如下：

第一，在**算例 1 和算例 2**中，采用 DQM 方法分别对各向同性板与正交异性板上表面受均布荷载作用的各个力学量进行了计算，得到的解与文献[47]的插值矩阵法解相比都有很高的吻合度，验证了方法的正确性。通过进一步分析，本文解在级数项数较小时已具备相当高的精度，随着级数项数的增大收敛的很快，体现了论文方法对于求解 FGM 矩形板的收敛性与有效性。此外，还给出了其他参数变化时的各个力学量解，为其他方法提供了有价值的参考。

第二，在**算例 3 至 5**中，本文解分别给出了不同幂律模型下各向同性板与正交异性板上表面受均布荷载作用的各个力学量计算结果，将其与文献[47]和文献[111]的解相比都能很好的吻合，验证了 DQM 方法的有效性与正确性。另外，还给出了不同参数变化时的各个力学量计算结果，可作为其他方法的参考。

第三，在**算例 1 至 5**中，本文给出了均布载荷下四边简支 FGM 矩形板的上表面位移和应力分布提供了明确的解决方案。探讨了各个位移应力分量取不同长宽比、长宽比和幂律指数时的分布规律。分析揭示了厚板力学分量分布的独特模式，凸显了经典薄板理论随着板厚度增加的自身局限性。论文 DQM 解是根据三维弹性理论的基本方程严格推导出来的，是三维精确的解。有效地解决了具有不同材料梯度和大厚宽比 FGM 矩形板的静态问题，充分体现了微分求积法求解均布荷载下四边简支 FGM 矩形板静力问题的显著优势。

第四，采用微分求积法来计算控制方程组的特征值，方程及其边界条件处理简洁，使用 FORTRAN 编译计算。通过在级数展开中选择适当的项数，在计算效率和准确性之间取得平衡，从而兼具精确与高效的优点。

第 5 章 结论与展望

5.1 总结

本文探讨了由功能梯度材料 (FGM) 制成的四边简支矩形板在均匀分布载荷下的静态和自由振动分析。基于三维线弹性理论, 采用微分求积法(DQM)来导出正交各向异性板与横观各向同性均质板的静态和自由振动问题的三维精确解, 四边简支矩形板的材料属性表现出仅沿着厚度方向变化。论文方法简单清晰直接高效, 最大限度地减少引入无关变量, 提高了可理解性和实际应用。建立一组变系数常微分控制方程组, 利用微分求积法(DQM)基本原理求解, 从而得到功能梯度材料 (FGM)四边简支矩形板静态和动态问题的精确解, 并通过算例验证了本文解的准确性与有效性。全文主要研究结论如下:

第一, 基于三维弹性力学基本理论和双三角级数展开技术, 论文建立了以 3 个位移分量为基本变量的功能梯度材料(FGM)四边简支矩形厚板的自由振动变系数常微分方程组, 无需像状态空间法将四边简支板的控制微分方程组转换为一阶状态变量微分方程组。文中采用微分求积法(DQM)直接求解变系数常微分特征方程组获得了功能梯度材料(FGM)四边简支矩形厚板的固有振动频率和振型函数, 从而建立了一个适用于任意厚度且材料参数可沿厚度方向呈任意函数形式变化的功能梯度材料(FGM)四边简支矩形自由振动的半解析法。

第二, 论文建立了双三角级数展开的状态空间方程和微分求积法(DQM)相结合的半解析法途径用来求解功能梯度材料四边简支矩形厚板的弯曲问题。该法由于避开了状态空间法对状态转移矩阵求解的过程, 以采用更多级数展开项的位移和应力结果作为对照解, 在取得同样的级数项情况下, 本文计算结果比状态空间法结果更准确, 从而表明了微分求积法(DQM)的优越性。

5.2 创新点

(1) 开展微分求积法(DQM)求解常微分方程组的多点边值问题。论文基于微分求积法基本理论, 将变系数常微分方程组多点边值问题转化为一组标准型广义代数方程组问题, 利用高斯消去法中的三角分解方法求解可获得待求的未知函数在所有离散节点上的近似解。建立了求解多个高阶边值问题的微分求积法(DQM)及程序, 并将该算法用于结构动力学工程实际领域, 研究微分求积法(DQM)的收敛

性, 数值计算的稳定性和精确性。同时, 将微分求积法(DQM)作为一个通用方法, 推广到求解线性混合阶常微分方程组边值问题。

(2) 针对功能梯度材料四边简支矩形厚板的自由振动问题, 基于弹性力学三维弹性理论, 建立了以矩形板位移分量为基本变量的一组变系数常微分特征方程组, 在数学上面临求解的困难。论文采用微分求积法(DQM)将变系数常微分方程组特征值问题转化为一组标准型广义代数方程组特征值问题, 最后由正交三角分解法(QR)求解之, 可一次性地获得功能梯度材料四边简支矩形厚板的横向自由振动前若干阶固有频率及其相对应的模态函数, 论文方法避免了迭代方法计算超越方程的困难和繁杂。

(3) 针对功能梯度材料四边简支矩形厚板的弯曲问题, 基于三维弹性理论, 论文创立了双三角级数展开的状态空间方程和微分求积法(DQM)相结合的半解析法新途径。获得了任意厚度、材料参数沿厚度方向连续变化的功能梯度材料四边简支矩形厚板三维弹性问题位移和应力场的半解析解。在采用相同的级数项数情况下, 微分求积法(DQM)计算值相对于状态空间法的分析解更精确, 相对于插值矩阵法的离散单元数更少。

5.3 展望

考虑到作者个人研究水平、研究时间等多方面因素, 本论文工作尚未达到完善, 仅对问题进行了较浅层次的研究。为了更深入地探讨该方向上的问题, 作者认为可以在以下几个方面进行拓展延伸:

第一, 本文对于 FGM 矩形板静动态研究仅仅停留在板的边界为四边简支这一情况, 可尝试在板的四个边中加入自由边与固支边。

第二, 本文只是利用 DQM 方法研究了 FGM 矩形单层板的静动态分析, 可尝试拓展至 FGM 矩形叠层板的静动态研究。

第三, 本文只是考虑了材料仅沿厚度 z 方向上单向梯度变化的幂律模型, 可进一步扩展至研究三个主方向上材料梯度同时变化的双向甚至三向梯度变化的静动态问题。

第四, 可以利用有限元软件进行 FGM 矩形板静动态的模拟计算, 同时也可以进行实际的 FGM 矩形板相关静动态应力应变实验。将两者得到的数据与本文 DQM 数值解进行对比, 可以更全面地验证和分析结果。

参考文献

- [1] Boggarapu V, Gujjala R, Ojha S, et al. State of the art in functionally graded materials[J]. Composite Structures, 2021, 262: 113596.
- [2] Reddy J N. Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis[M]. CRC press, 2003.
- [3] Koizumi M. FGM activities in Japan[J]. Composites part b: engineering, 1997, 28(1-2): 1-4.
- [4] 沈惠申. 功能梯度复合材料板壳结构的弯曲, 屈曲和振动[J]. 力学进展, 2004, 34(1): 53-60.
- [5] 铁摩辛柯, 古地尔著. 弹性理论(第三版)[M]. 徐芝纶译. 高等教育出版社, 2013
- [6] Levinson M. An accurate, simple theory of the statics and dynamics of elastic plates[J]. Mechanics Research Communications, 1980, 7(6):343-350.
- [7] Levinson M. A new rectangular beam theory[J]. Journal of Sound and vibration, 1981, 74(1): 81-87.
- [8] Evans, S. R. G. The generalized laminated plate theory[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 1966, 181(1): 771-778.
- [9] Evans, S. R. G. The vibration of rectangular sandwich plates[J]. Journal of Sound and Vibration, 1967, 6(1): 76-83.
- [10] Kirchhoff G R. Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe[J]. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1850, 40: 51-88.
- [11] Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates[J]. 1945, 67: A69-A77.
- [12] Reissner E. On bending of elastic plates[J]. Quarterly of applied mathematics, 1947, 5(1): 55-68.
- [13] Mindlin R D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates[J]. 1951, 3: 31-38.
- [14] Sanders, J. L. Vibration of Orthotropic Rectangular Plates[J]. Journal of Applied Mechanics, 1964, 31(3): 496-502.
- [15] Reddy J N. A simple higher-order theory for laminated composite plates[J]. 1984.

- [16] Zienkiewicz O C, Zhu J Z. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: The recovery technique[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1992, 33(7): 1331-1364.
- [17] Akavci S S, Tanrikulu A H. Static and free vibration analysis of functionally graded plates based on a new quasi-3D and 2D shear deformation theories[J]. Composites Part B: Engineering, 2015, 83: 203-215.
- [18] Zhang P, Qi C, Fang H, et al. Three dimensional mechanical behaviors of in-plane functionally graded plates[J]. Composite Structures, 2020, 241: 112124.
- [19] Kulkarni K, Singh B N, Maiti D K. Analytical solution for bending and buckling analysis of functionally graded plates using inverse trigonometric shear deformation theory[J]. Composite Structures, 2015, 134: 147-157.
- [20] Pradhan K K, Chakraverty S. Static analysis of functionally graded thin rectangular plates with various boundary supports[J]. Archives of Civil and Mechanical Engineering, 2015, 15(3): 721-734.
- [21] Thai H T, Kim S E. A simple quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates[J]. Composite Structures, 2013, 99: 172-180.
- [22] Li M, Soares C G, Yan R. A novel shear deformation theory for static analysis of functionally graded plates[J]. Composite Structures, 2020, 250: 112559.
- [23] Latifi M, Farhatnia F, Kadkhodaei M. Buckling analysis of rectangular functionally graded plates under various edge conditions using Fourier series expansion[J]. European Journal of Mechanics-A/Solids, 2013, 41: 16-27.
- [24] Magouh N, Azrar L, Alnefaie K. Semi-analytical solutions of static and dynamic degenerate, nondegenerate and functionally graded electro-elastic multilayered plates[J]. Applied Mathematical Modelling, 2023, 114: 722-744.
- [25] 李尧臣, 亓峰, 仲政. 功能梯度矩形板的近似理论与解析解[J]. 力学学报, 2010, 42(04): 670-681.
- [26] 刘涛, 李朝东, 汪超, 蒋雅芬, 刘庆运. 基于三阶剪切变形理论的压电功能梯度板静力学等几何分析[J]. 振动与冲击, 2021, 40(01): 73-85.
- [27] 杨智勇, 牛忠荣, 程长征, 伍章健. 功能梯度矩形板问题三维理论的半解析解[J]. 应用力学学报, 2013, 30(04): 581-586+649.

- [28] Li X, Wu P, Fang H, et al. 3D viscoelastic solutions for bending creep of layered rectangular plates under time-varying load[J]. *Composite Structures*, 2023: 117590.
- [29] Alinaghizadeh F, Shariati M. Geometrically non-linear bending analysis of thick two-directional functionally graded annular sector and rectangular plates with variable thickness resting on non-linear elastic foundation[J]. *Composites Part B: Engineering*, 2016, 86: 61-83.
- [30] Vafakhah Z, Neya B N. An exact three dimensional solution for bending of thick rectangular FGM plate[J]. *Composites Part B: Engineering*, 2019, 156: 72-87.
- [31] Vaghefi R. Three-dimensional temperature-dependent thermo-elastoplastic bending analysis of functionally graded skew plates using a novel meshless approach[J]. *Aerospace Science and Technology*, 2020, 104: 105916.
- [32] Hosseini-Hashemi S, Taher H R D, Akhavan H, et al. Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2010, 34(5): 1276-1291.
- [33] Zaoui F Z, Ouinas D, Tounsi A. New 2D and quasi-3D shear deformation theories for free vibration of functionally graded plates on elastic foundations[J]. *Composites Part B: Engineering*, 2019, 159: 231-247.
- [34] Talha M, Singh B N. Stochastic vibration characteristics of finite element modelled functionally gradient plates[J]. *Composite Structures*, 2015, 130: 95-106.
- [35] Zhong S, Jin G, Ye T, et al. Isogeometric vibration analysis of multi-directional functionally gradient circular, elliptical and sector plates with variable thickness[J]. *Composite Structures*, 2020, 250: 112470.
- [36] Jin G, Su Z, Shi S, et al. Three-dimensional exact solution for the free vibration of an arbitrarily thick functionally graded rectangular plates with general boundary conditions[J]. *Composite Structures*, 2014, 108: 565-577.
- [37] Jha D K, Kant T, Singh R K. Free vibration response of functionally graded thick plates with shear and normal deformations effects[J]. *Composite Structures*, 2013, 96: 799-823.
- [38] Mishra M, Srivastav C K, Kumar S. Free vibration analysis using dynamic stiffness method and first-order shear deformation theory for a functionally graded material plate

- late[J]. Materials Today: Proceedings, 2023.
- [39]Chen X, Chen L, Huang S, et al. Nonlinear forced vibration of in-plane bi-directional functionally graded materials rectangular plate with global and localized geometrical imperfections[J]. Applied Mathematical Modelling, 2021, 93: 443-466.
- [40]胡宇达,张小广,张志强.功能梯度矩形板的强非线性共振分析[J].工程力学, 2012, 29(03): 16-20+40.
- [41]赵凤群,王忠民.随从力作用下功能梯度矩形板的非线性振动[J].振动与冲击, 2011, 30(03): 53-59.
- [42]Singh A, Kumari P. Three-Dimensional free vibration analysis of composite FGM rectangular plates with in-plane heterogeneity: An EKM solution[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2020, 180: 105711.
- [43]LomtePatil Y T, Kant T, Desai Y M. Comparison of three dimensional elasticity solutions for functionally graded plates[J]. Composite Structures, 2018, 202: 424-435.
- [44]陈伟球, 叶贵如, 蔡金标, 等. 球面各向同性功能梯度球壳的自由振动[J]. 力学学报, 2001, 33(6): 768-775.
- [45]Zhang B, He Y, Liu D, et al. An efficient size-dependent plate theory for bending, buckling and free vibration analyses of functionally graded microplates resting on elastic foundation[J]. Applied Mathematical Modelling, 2015, 39(13): 3814-3845.
- [46]Thai H T, Choi D H. Finite element formulation of various four unknown shear deformation theories for functionally graded plates[J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2013, 75: 50-61.
- [47]杨智勇. 功能梯度叠层板与弹塑性切口应力奇异性的半解析法研究[D].合肥工业大学, 2016.
- [48]Van Vinh P, Avcar M, Belarbi M O, et al. A new higher-order mixed four-node quadrilateral finite element for static bending analysis of functionally graded plates[C]//Structures. Elsevier, 2023, 47: 1595-1612.
- [49]Maknun I J, Natarajan S, Katili I. Application of discrete shear quadrilateral element for static bending, free vibration and buckling analysis of functionally graded material plate[J]. Composite Structures, 2022, 284: 115130.
- [50]Zhou S, Zhang R, Li A, et al. Analysis of transversely isotropic piezoelectric bilayer

- p ed rectangular micro-plate based on couple stress piezoelectric theory[J]. European Journal of Mechanics-A/Solids, 2022, 96: 104707.
- [51] Tash F Y, Neya B N. An analytical solution for bending of transversely isotropic thick rectangular plates with variable thickness[J]. Applied Mathematical Modelling, 2020, 77: 1582-1602.
- [52] Woodward B, Kashtalyan M. Three-dimensional elasticity solution for bending of transversely isotropic functionally graded plates[J]. European Journal of Mechanics-A/Solids, 2011, 30(5): 705-718.
- [53] He W, Dong H. The estimation of the electromagnetic coupling effect for the transverse isotropic laminated multi-ferroic rectangular plates[J]. Composite Structures, 2022, 282: 115066.
- [54] Li X Y, Wu J, Ding H J, et al. 3D analytical solution for a functionally graded transversely isotropic piezoelectric circular plate under tension and bending[J]. International Journal of Engineering Science, 2011, 49(7): 664-676.
- [55] Yang B, Mei J, Chen D, et al. 3D thermo-mechanical solution of transversely isotropic and functionally graded graphene reinforced elliptical plates[J]. Composite Structures, 2018, 184: 1040-1048.
- [56] 杨博. 横观各向同性功能梯度板弯曲问题的弹性力学解[D]. 浙江大学, 2012.
- [57] 崔暘, 陈鼎, 杨博, 等. 横观各向同性功能梯度板的热弹性 Navier 解[J]. 强度与环境, 2020, 47(4): 33-40.
- [58] Doumia B, Nguyen Q H, Woaf P. Exact mathematical model for the behavior of a two-layer isotropic plate with partial interaction[J]. Mechanics Research Communications, 2023, 131: 104160.
- [59] Pagani A, Daneshkhah E, Xu X, et al. Evaluation of geometrically nonlinear terms in the large-deflection and post-buckling analysis of isotropic rectangular plates[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2020, 121: 103461.
- [60] Hou P F, Chen J Y. A refined analysis for the transversely isotropic plate under tangential loads by the 3D Green's function[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2018, 93: 10-20.
- [61] 李翔宇. 横观各向同性功能梯度圆板和环板的轴对称问题[D]. 浙江大学, 2007.

- [62] Abali B E, Völlmecke C, Woodward B, et al. Three-dimensional elastic deformation of functionally graded isotropic plates under point loading[J]. *Composite Structures*, 2014, 118: 367-376.
- [63] Gandhe G R, Salve S B, Pankade P M, et al. Trigonometric shear deformation theory for thermal flexural analysis of isotropic plate[J]. *Procedia Manufacturing*, 2018, 20: 499-504.
- [64] Moslemi A, Neya B N, Amiri J V. Benchmark solution for buckling of thick rectangular transversely isotropic plates under biaxial load[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2017, 131: 356-367.
- [65] Mahi A, Tounsi A. A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates[J]. *Applied mathematical modelling*, 2015, 39(9): 2489-2508.
- [66] Yang B, Li Y, Fu K. In-plane impact-induced elastic buckling behaviour of rectangular transversally isotropic stiffened plates with all edges elastically restrained against rotation[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2020, 174: 105478.
- [67] Pradhan K K, Chakraverty S. Transverse vibration of isotropic thick rectangular plates based on new inverse trigonometric shear deformation theories[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2015, 94: 211-231.
- [68] Park M, Choi D H. A two-variable first-order shear deformation theory considering in-plane rotation for bending, buckling and free vibration analyses of isotropic plates[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2018, 61: 49-71.
- [69] Thai C H, Ferreira A J M, Nguyen-Xuan H. Isogeometric analysis of size-dependent isotropic and sandwich functionally graded microplates based on modified strain gradient elasticity theory[J]. *Composite Structures*, 2018, 192: 274-288.
- [70] Motamedi A R, Noormohammadi N, Boroomand B. A novel Trefftz-based meshfree method for free vibration and buckling analysis of thin arbitrarily shaped laminated composite and isotropic plates[J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 2023, 145: 318-340.
- [71] Gupta A, Jain N K, Salhotra R, et al. Effect of crack location on vibration analysis of partially cracked isotropic and FGM micro-plate with non-uniform thickness: An a

- nalytical approach[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2018, 145: 410-429.
- [72] Thai C H, Kulasegaram S, Tran L V, et al. Generalized shear deformation theory for functionally graded isotropic and sandwich plates based on isogeometric approach [J]. Computers & Structures, 2014, 141: 94-112.
- [73] 陈伟球, 叶贵如, 蔡金标, 等. 横观各向同性功能梯度材料矩形板的自由振动[J]. 振动工程学报, 2001, 14(3): 263-267.
- [74] Neves A M A, Ferreira A J M, Carrera E, et al. Static, free vibration and buckling analysis of isotropic and sandwich functionally graded plates using a quasi-3D higher-order shear deformation theory and a meshless technique[J]. Composites Part B: Engineering, 2013, 44(1): 657-674.
- [75] Nguyen V H, Nguyen T K, Thai H T, et al. A new inverse trigonometric shear deformation theory for isotropic and functionally graded sandwich plates[J]. Composites Part B: Engineering, 2014, 66: 233-246.
- [76] Lü C F, Lim C W, Chen W Q. Semi-analytical analysis for multi-directional functionally graded plates: 3-D elasticity solutions[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2009, 79(1): 25-44.
- [77] He Y, Duan M, Su J. Bending of rectangular orthotropic plates with rotationally restrained and free edges: Generalized integral transform solutions[J]. Engineering Structures, 2021, 247: 113129.
- [78] Lopatin A V, Morozov E V. Buckling of compressed rectangular orthotropic plate resting on elastic foundation with nonlinear change of transverse displacement over the thickness[J]. Composite Structures, 2021, 261: 113535.
- [79] Li H, Zhu X, Mei Z, et al. Bending of orthotropic sandwich plates with a functionally graded core subjected to distributed loadings[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2013, 26(3): 292-301.
- [80] Chinnaboon B, Panyatong M, Chucheepsakul S. Orthotropic plates resting on viscoelastic foundations with a fractional derivative Kelvin-Voigt model[J]. Composite Structures, 2023, 322: 117400.
- [81] Belardi V G, Fanelli P, Vivio F. Application of the Ritz method for the bending and

- stress analysis of thin rectilinear orthotropic composite sector plates[J]. *Thin-Walled Structures*, 2023, 183: 110374.
- [82] Mohammadi M, Farajpour A, Moradi A, et al. Shear buckling of orthotropic rectangular graphene sheet embedded in an elastic medium in thermal environment[J]. *Composites Part B: Engineering*, 2014, 56: 629-637.
- [83] Mansouri M H, Shariyat M. Differential quadrature thermal buckling analysis of general quadrilateral orthotropic auxetic FGM plates on elastic foundations[J]. *Thin-Walled Structures*, 2017, 112: 194-207.
- [84] Naderi A, Saidi A R. An accurate approach for finding the critical buckling stress of thick orthotropic plates[J]. *Composite Structures*, 2013, 96: 411-418.
- [85] Belardi V G, Fanelli P, Vivio F. First-order shear deformation analysis of rectilinear orthotropic composite circular plates undergoing transversal loads[J]. *Composites Part B: Engineering*, 2019, 174: 107015.
- [86] Alam M, Mishra S K. Thermo-mechanical post-critical analysis of nonlocal orthotropic plates[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2020, 79: 106-125.
- [87] Gao K, Gao W, Wu D, et al. Nonlinear dynamic characteristics and stability of composite orthotropic plate on elastic foundation under thermal environment[J]. *Composite Structures*, 2017, 168: 619-632.
- [88] Huang Y, Zhao Y, Cao D. Bending and free vibration analysis of orthotropic in-plane functionally graded plates using a Chebyshev spectral approach[J]. *Composite Structures*, 2021, 255: 112938.
- [89] Singh A, Naskar S, Kumari P, et al. Viscoelastic free vibration analysis of in-plane functionally graded orthotropic plates integrated with piezoelectric sensors: Time-dependent 3D analytical solutions[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2023, 184: 109636.
- [90] Joshi P V, Jain N K, Ramtekkar G D. Analytical modeling for vibration analysis of thin rectangular orthotropic/functionally graded plates with an internal crack[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2015, 344: 377-398.
- [91] 胡宇达, 张晓宇. 轴向运动正交各向异性板的超谐波共振及稳定性[J]. *应用力学学报*, 2020, 37(02): 674-681+935.

- [92]Haciyev V C, Sofiyev A H, Kuruoglu N. Free bending vibration analysis of thin bidirectionally exponentially graded orthotropic rectangular plates resting on two-parameter elastic foundations[J]. Composite Structures, 2018, 184: 372-377.
- [93]Zhang J, Ullah S, Zhong Y. New analytical free vibration solutions of orthotropic rectangular thin plates using generalized integral transformation[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2020, 367: 112439.
- [94]胡君逸,李跃明,李海波等.考虑热应力、热变形正交各向异性板的动特性及响应规律[J].工程力学, 2018, 35(08): 218-229.
- [95]Gupta A K, Sharma S. Effect of thermal gradient on vibration of non-homogeneous orthotropic trapezoidal plate of linearly varying thickness[J]. Ain Shams Engineering Journal, 2013, 4(3): 523-530.
- [96]Yang Z, He D. Vibration and buckling of orthotropic functionally graded micro-plates on the basis of a re-modified couple stress theory[J]. Results in physics, 2017, 7: 3778-3787.
- [97]Yin Z, Zhang J, Yang F, et al. An efficient scaled boundary finite element approach in bending and buckling analysis of functionally graded piezoelectric plates[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2021, 132: 168-181.
- [98]Xing Y F, Liu B. New exact solutions for free vibrations of thin orthotropic rectangular plates[J]. Composite structures, 2009, 89(4): 567-574.
- [99]Fan J, Rong D, Zhou Z, et al. Exact solutions for forced vibration of completely free orthotropic rectangular nanoplates resting on viscoelastic foundation[J]. European Journal of Mechanics-A/Solids, 2019, 73: 22-33.
- [100]Thai H T, Kim S E. Levy-type solution for free vibration analysis of orthotropic plates based on two variable refined plate theory[J]. Applied Mathematical Modelling, 2012, 36(8): 3870-3882.
- [101]Battaglia G, Di Matteo A, Micale G, et al. Vibration-based identification of mechanical properties of orthotropic arbitrarily shaped plates: Numerical and experimental assessment[J]. Composites Part B: Engineering, 2018, 150: 212-225.
- [102]Bellman R, Casti J. Differential quadrature and long-term integration[J]. Journal of mathematical analysis and Applications, 1971, 34(2): 235-238.

- [103]王永亮. 微分求积法和微分求积单元法——原理与应用[D]. 南京航空航天大学, 2001.
- [104]葛仁余, 张佳宸, 刘凡, 等. 微分求积法在计算功能梯度 Timoshenko 梁临界荷载中的应用研究[J]. 应用力学学报, 2022, 37(6): 2634-2641.
- [105]Kumar S, Jana P. Accurate solution for free vibration behaviour of stepped FGM plates implementing the dynamic stiffness method[C]//Structures. Elsevier, 2022, 45: 1971-1989.
- [106]Van Vinh P, Dung N T, Tho N C. Modified single variable shear deformation plate theory for free vibration analysis of rectangular FGM plates[C]//Structures. Elsevier, 2021, 29: 1435-1444.
- [107]Hoang V N V, Thanh P T. A new trigonometric shear deformation plate theory for free vibration analysis of FGM plates with two-directional variable thickness[J]. Thin-Walled Structures, 2024, 194: 111310.
- [108]Yadav S S, Sangle K K, Shinde S A, et al. Bending analysis of FGM plates using sinusoidal shear and normal deformation theory[J]. Forces in Mechanics, 2023, 11: 100185.
- [109]Krysko A V, Kalutsky L A, Krysko V A. Stress-strain state of a porous flexible rectangular FGM size-dependent plate subjected to different types of transverse loading: Analysis and numerical solution using several alternative methods[J]. Thin-Walled Structures, 2023: 111512.
- [110]Asemi K, Shariyat M. Highly accurate nonlinear three-dimensional finite element elasticity approach for biaxial buckling of rectangular anisotropic FGM plates with general orthotropy directions[J]. Composite Structures, 2013, 106: 235-249.
- [111]Zenkour A M. Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates[J]. Applied Mathematical Modelling, 2006, 30(1): 67-84.

攻读硕士学位期间发表的期刊论文

- [1] Ge R, Liu F, Wang C, et al. Calculation of critical load of axially functionally graded and variable cross-section timoshenko beams by using interpolating matrix method[J]. Mathematics, 2022, 10(13): 2350.

攻读硕士学位期间获奖情况

- [1] 获得 2022 年研究生国家奖学金
- [2] 获得美国大学生建模比赛 S 奖(B 类三等奖)

致 谢

十九载漫漫求学之路将止，花有重开日，人无再少年。

从六岁小学到如今二十五硕士毕业，学生时代有过太多太多的美好回忆，当然，遗憾亦不可避免。在这漫长的十九年的时间刻度上，有幸遇到诸多良师，结识挚友几位，他们是我求学生涯中的最大幸运。

良师之恩若山河，感激之情胜千言。导师葛仁余教授无论是在生活还是科研上给了我极大的关怀与鼓励。在论文的前期选题、中期攻坚、后期写作定稿，导师始终如父母般的悉心关怀，给予我精心的指导与坚实的支持。成就之果，皆源于恩师的辛勤耕耘与无私奉献。恩师三年来以其严谨的科研精神和对卓越的执着追求，激励着我不断向前，受益终身。桃雨一霁，师恩再忆，愿葛老师桃李满园，教泽永长。

一程山水，一缘相遇。三载时光如风，有幸能与老师同学、师兄师姐以及师弟师妹在工作室一起学习。借此感谢他们在平时日常生活和科研中的支持和帮助。非常感激卢港伟师兄、夏雨师兄、张佳辰师兄对我论文的帮助；感谢解明明师兄生活上的帮助和鼓励；感谢室友徐文智、杨在贺、朱龙飞三年来对我的包容与关怀，感谢同学何雨、汪冰师姐、张阿祥师兄对我的帮助；感谢师弟李思燃、钱华山、马亮亮以及师妹曹玖银、高乐、蔡露露在平时的帮助；感谢汪超老师、廖斌老师、卜洋老师对我的教导与帮助。有你们的陪伴，原本单调的三年求学生涯充满了美好的回忆。愿前路相知已，再相逢时依旧如故。

草木参天，高楼万丈，根与桩皆深深植于大地。感谢我的家人，过去二十多年来对我的爱与支持。感谢我的父母在背后无条件关怀着我，愿你们平安一生；感谢我的挚友在我低落时支撑着我，愿你们鹏程万里。

此生归路愈茫然，无数青山水拍天。感恩所遇，前路漫漫似画卷，聚散离合只因缘，有人聚在一起，也有人散往远方，我会将每一次的相逢离别化为心灵的丰盈，在风云变幻中，依然不忘初心，勇往直前。

刘锋于芜湖

2024年1月