

分类号: O343.4

单位代码: 10363

密 级: 公开

学 号: 2221410106

题 目 基于微分求积法的板切口应力奇性研究

题 目 Stress Singularity Analysis At Plate Notches Using The
Differential Quadrature Method

学生姓名: 李思燃

指导教师: 葛仁余 (教授)

专 业: 应用力学与工程结构

研究方向: 计算固体力学

论文答辩日期: 2025 年 5 月 14 日

安徽工程大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：我恪守学术道德，崇尚严谨学风。所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已明确注明和引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品及成果的内容。论文为本人亲自撰写，我对所写的内容负责，并完全意识到本声明的法律后果由本人承担。



学位论文作者签名：

日期：2025 年 5 月 16 日

安徽工程大学学位论文版权使用授权书

学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅或借阅。本人授权安徽工程大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保密 ☐，在 _____ 年解密后适用本版权书。

本学位论文属于

不保密 ☒。

学位论文作者签名：



指导教师签名：



日期：2025 年 5 月 16 日

日期：2025 年 5 月 16 日

基于微分求积法的板切口应力奇性研究

摘 要

本研究采用线弹性断裂力学 (LEFM) 原理, 对 V 形切口尖端附近的应力奇异性问题进行系统性研究。在切口尖端区域, 应力场呈现显著的集中现象, 其数学本质表现为具有渐近级数展开形式的应力奇异性。针对该奇异特征的表征问题, 本研究建立了基于奇异指数和特征角函数的完整描述体系: 首先基于位移场渐近展开构建切口尖端邻域力学平衡方程, 随后将其转换为关于奇性指数的特征微分方程组。通过引入变量代换技术, 实现了非线性特征微分方程组的线性化重构, 进而应用微分求积法将常微分方程特征值问题转换为标准型广义代数特征方程求解, 再将 QR 法思想编入 DQM 相关程序, 由 QR 法解出各阶应力奇性指数。相较于传统方法, 本方法在计算精度、计算效率和求解完备性方面展现出显著优势。论文主要由以下四部分组成:

(1) 本文首先通过建立微分求积法(DQM)的理论框架, 将变系数微分方程组的特征值问题映射为标准型广义代数方程组的求解, 利用高斯消去法中的三角分解法(QR 法)求解可获得待求特征值的近似解, 建立了求解高阶特征值问题的微分求积法 FORTRAN 程序, 将该算法用于结构动力学工程实际领域, 与现有文献相比较, DQM 表现出了极高的计算精度与效率, 证明了本文方法在解特征微分方程问题的有效性, 为后文计算板切口的应力奇异性分析提供了一种简单有效的分析方法。

(2) 针对各向同性 Reissner 板切口的奇异性问题, 计算了四种不同

边界条件下单相/双相各向同性 Reissner 板切口的各阶应力奇性指数，同时还求出了若干项高阶非奇异指数，填补了目前对各向同性 Reissner 板切口研究的空缺。针对双材料板，量化了弹性模量比值对奇性指数的影响，发现材料刚度差异显著改变奇异性强度。此外，针对双材料板不同的几何构型，如半平板、全平板和粘合锥形接头等复杂模型，阐明了不同边界条件下奇性指数的振荡特性及其与界面裂纹扩展的关联机制。数值算例表明：DQM 在各向同性板切口奇性指数中与文献结果高度吻合，且相较于传统数值方法，离散单元更少，计算效率更高。

(3) 针对功能梯度(FGM)中厚板切口尖端应力奇异性问题，将功能梯度中厚板的材料属性按照沿板的厚度呈幂律分布，并将其弹性模量、抗弯刚度、剪切模量的定积分计算采用复合梯形公式进行求解，其次将切口尖端位移的渐近展开式引入 Reissner 板平衡方程，将微分方程组离散为广义代数特征方程，通过 QR 算法同步求解各阶奇性指数。研究结果表明：DQM 法在单/双相材料功能梯度中厚板奇性指数计算中与文献结果高度吻合，且相较于传统插值矩阵法和有限元法，离散单元数减少 50%时仍保持同等精度，计算效率提升 35%。针对功能梯度与纯金属/纯陶瓷混合板，发现材料刚度差异显著影响奇性指数分布——当切口夹角 $\gamma < 290^\circ$ 时，混合板一阶奇性指数较单材料板降低(降幅达 15%)，而 $\gamma > 300^\circ$ 时则上升(升幅达 12%)。此外，在夹支边界条件下，奇性指数随 γ 角增大呈现非线性振荡特性，揭示了界面裂纹与应力奇异性的关联机制。

(4) 针对正交各向异性复合材料板切口应力奇异性问题，建立了单相及双相正交各向异性复合材料板的数学模型，推导了柱坐标系下的本构关系与边界条件，并通过变分原理将问题转化为线性特征值问题，再利用 DQM 法将变系数微分方程组问题转化为广义线性代数方程组

问题，数值算例表明，该方法能精确计算不同材料参数和切口张角下的奇性指数。此外，本文首次系统探究了不同材料域的正交各向异性材料主轴系与笛卡尔坐标系的夹角对于应力奇性指数的影响规律，计算结果能提供减小切口尖端应力奇性程度的材料铺设配置方案，具有较高的工程应用价值。

关键词：奇性指数，V 形切口，各向同性材料，功能梯度材料，正交各向异性材料，微分求积法

STRESS SINGULARITY ANALYSIS AT PLATE NOTCHES USING THE DIFFERENTIAL QUADRATURE METHOD

ABSTRACT

This investigation employs linear elastic fracture mechanics (LEFM) principles to systematically examine singular stress fields near V-notch tips. In the notch tip region, the stress field exhibits significant concentration, mathematically manifested as stress singularity with asymptotic series expansion. This singularity can be comprehensively characterized by singularity indices and corresponding eigenangular functions. For the characterization of this singular feature, this study establishes a comprehensive description system based on singularity exponents and characteristic angular functions. The methodology initiates with the construction of mechanical equilibrium equations in the vicinity of the notch tip through asymptotic expansion of displacement fields. Subsequently, these governing equations are transformed into characteristic differential equations governing the singularity exponents. Through the introduction of variable substitution techniques, the original nonlinear characteristic differential equations undergo linearization reconstruction. Finally, the differential quadrature method is employed to convert the eigenvalue problem of ordinary differential equations into a canonically formulated generalized algebraic eigenvalue equation. The QR algorithm is integrated into the DQM program to solve singularity indices. Compared with

traditional methods, this approach demonstrates significant advantages in computational accuracy, efficiency, and completeness. The paper consists of four main parts:

(1) This study establishes a theoretical framework for the Differential Quadrature Method (DQM), enabling the transformation of eigenvalue problems in variable-coefficient differential equation systems into solutions of canonical-form generalized algebraic equation systems. The triangular decomposition method (QR method) from Gaussian elimination is employed to approximate eigenvalues. A FORTRAN program based on DQM is developed for solving high-order eigenvalue problems in structural dynamics. Validation against existing literature demonstrates exceptional accuracy and efficiency, confirming the method's effectiveness in solving characteristic differential equations and providing a simple analytical tool for subsequent notch stress singularity analysis.

(2) For singularity analysis of isotropic Reissner plate notches, singularity indices under four boundary conditions are calculated for both single-phase and bi-phase plates. Higher-order non-singular indices are also obtained, filling research gaps in isotropic Reissner plate notches. For bimaterial plates, the influence of elastic modulus ratios on singularity indices is quantified, revealing that material stiffness differences significantly alter singularity intensity. Complex geometric configurations (e.g., half-plane plates, full-plane plates, and bonded conical joints) are

investigated, elucidating oscillatory characteristics of singularity indices under different boundary conditions and their correlation with interfacial crack propagation. Numerical examples show that DQM results closely match literature data with fewer discrete elements and higher efficiency compared to traditional methods.

(3) Addressing stress singularity at functionally graded material (FGM) mid-thick plate notches, material properties are assumed to follow power-law distribution along the thickness direction. The composite trapezoidal formula is employed for calculating definite integrals of elastic and shear moduli. By introducing asymptotic displacement expansions into Reissner plate equilibrium equations, the differential equations are discretized into generalized algebraic eigenvalue equations. Results demonstrate that DQM achieves excellent agreement with literature data for both single-phase and bi-phase FGMs, maintaining equivalent accuracy with 50% fewer discrete elements and 35% higher efficiency than traditional interpolation matrix methods (IMMM) and FEM. For FGM/metal/ceramic hybrid plates, material stiffness differences significantly influence singularity index distributions: When notch angles $< 290^\circ$, hybrid plates show 15% reduction in first-order singularity indices compared to single-material plates, while angles $> 300^\circ$ exhibit 12% increase. Under clamped boundaries, nonlinear oscillatory behavior of singularity indices with angle variation reveals mechanisms linking interfacial cracks and stress singularities.

(4) For orthotropic composite plate notches, mathematical models of single-phase and bi-phase orthotropic plates are established. Constitutive relations and boundary conditions in cylindrical coordinates are derived, transforming the problem into linear eigenvalue equations through variational principles. DQM converts variable-coefficient differential equations into generalized linear algebraic systems. Numerical examples verify the method's precision in calculating singularity indices across various material parameters and notch angles. This work systematically investigates, for the first time, the influence of angular misalignment between orthotropic material principal axes and Cartesian coordinates on stress singularity indices. The computational results provide material configuration schemes for reducing stress singularity intensity at plate notch tips, demonstrating significant engineering application value.

KEY WORDS: Stress Singularity Index, V-notch, Isotropic Material, Functionally Graded Material, Orthotropic Material, Differential Quadrature Method

目 录

第 1 章 绪论.....	1
1.1 引言	1
1.2 板材切口研究概况	3
1.2.1 各向同性材料板切口	3
1.2.2 功能梯度材料板切口	4
1.2.3 正交各向异性材料板切口	5
1.3 微分求积法研究进展	6
1.4 本文研究的主要内容	8
第 2 章 微分求积法求解常微分方程特征值问题.....	11
2.1 微分求积法的基本公式	11
2.2 离散节点布点方式的选择	14
2.3 微分求积法的精度分析	15
2.3.1 简支梁固有频率计算	15
2.4 本章小结	16
第 3 章 各向同性板切口应力奇异性.....	18
3.1 Reissner 板 V 形切口应力奇异性分析	18
3.1.1 控制方程	18
3.1.2 特征模型	20
3.2 微分求积法的应用	22
3.3 数值算例分析	24
3.3.1 各向同性单材料 Reissner 板切口应力奇性指数计算.....	24
3.3.2 各向同性双材料 Reissner 板切口应力奇性指数计算.....	25
3.3.3 各向同性锥形粘合接头双材料 Reissner 板切口应力奇性指数计 算	27
3.4 本章小结	32
第 4 章 功能梯度材料中厚度板切口应力奇异性	33
4.1 材料属性	33
4.2 切口奇性方程组的建立	34

4.3 双材料功能梯度中厚度板切口应力奇异性分析	37
4.4 微分求积法的应用	40
4.5 数值算例分析	41
4.5.1 双材料功能梯度中厚板切口应力奇性分析	41
4.5.2 功能梯度与纯金属/纯陶瓷混合中厚板应力奇性分析	44
4.6 本章小结	46
第 5 章 正交各向异性板切口应力奇异性.....	47
5.1 单相正交各向异性板切口特征方程的建立	47
5.2 双相正交各向异性粘结板切口特征方程的建立	57
5.3 微分求积法的应用	59
5.4 数值算例	61
5.4.1 切口张角 α 对 λ_k 的影响	61
5.4.2 材料主轴系与笛卡尔坐标系的夹角 θ_0 对 λ_k 的影响	62
5.5 本章小结	64
第 6 章 结论与展望.....	66
6.1 结论	66
6.2 主要创新点	67
6.3 不足与展望	67
参考文献	68
攻读硕士学位期间发表的期刊论文	75

第 1 章 绪论

1.1 研究背景及意义

在工程实际中，V 形切口广泛存在于各类结构中，从微电子器件的互连焊点到航空航天复合材料接头^[1]，再到大型土木结构的焊接节点^[2]。与尖锐裂纹不同，V 形切口因几何构型(如角度，深度)的多样性，其尖端应力场呈现独特的奇异性特征。研究表明，含 V 形切口的结构破坏往往起源于切口尖端区域的高应力集中，其失效模式与奇异性阶数密切相关^[3]。二十世纪上半叶，全球范围内频发的脆性断裂事故引发了工程界对材料失效机理的深刻反思。典型案例如：第二次世界大战期间，美国批量建造的 4694 艘"自由轮"货船在服役期间共发生 1000 余起脆性断裂事故，其中 238 艘因结构完全失效导致全损；1938-1942 年间，欧洲大陆相继有 40 座钢结构桥梁发生灾难性垮塌；1954 年英国海外航空公司两架"彗星"客机因金属疲劳引发的机身解体，更成为航空史上标志性空难。此外，压力容器失效问题长期困扰工业领域，多个国家曾发生高压锅炉及核电站压力容器爆炸等重大安全事故。直至 1950 年代，美国"北极星"潜射弹道导弹的固体火箭发动机壳体在试车时发生灾难性断裂，这一系列事故才引起人们对切口件的重视。因此，针对 V 形切口板的断裂预估与剩余强度计算具有重要工程价值，而切口尖端应力奇异性分析则是实现其安全性评价的核心问题。

应力集中效应在切口区域的显现引发局部应力重分布，促使断裂机制发生转变。基于此现象，我们可以构建切口试样模拟体系，为结构强度理论及失效判据研究提供有效载体。断裂演化过程始于切口尖端微小裂纹形核，经过裂纹的扩展后形成宏观断裂，其力学本质可以归为裂纹体断裂问题，需采用线弹性断裂力学(LEFM)或弹塑性断裂力学(EPFM)理论框架进行解析。值得注意的是，切口尖端断裂机理需要重点关注微小裂纹形成阶段，该区域材料损伤累积是裂纹起始的物理根源。因此，构建切口尖端裂纹形成的力学模型需耦合材料断裂本构方程与连续介质力学方法^[4]。

在断裂力学研究中，裂纹尖端的应力场奇异性及其表征参数是评估材料断裂行为的关键。1957 年，Irwin^[5]提出的应力强度因子 (Stress Intensity Factor,

SIF) 为线弹性断裂力学 (LEFM) 奠定了基础, 其通过 K_I 、 K_{II} 、 K_{III} 分别量化 I 型、II 型、III 型裂纹尖端的应力场幅值。应力强度因子的直接关联性使其成为预测裂纹扩展临界条件的重要参数^[6]。线弹性断裂力学 (LEFM) 的建立标志着结构完整性评估范式的革新。该理论通过能量释放率与应力强度因子的双参数体系, 系统解耦裂纹体力学响应机制。实验表征表明, 材料断裂韧性作为抗裂纹扩展本征属性, 具有显著的材料依赖性。LEFM 准则的提出不仅突破了传统强度理论局限, 更实现了含缺陷结构承载性能的定量预测: 既能评估裂纹体临界承载状态, 又可解析疲劳载荷下的裂纹扩展动力学, 进而建立从裂纹萌生至临界尺寸的疲劳寿命预测模型。这种理论突破深化了对裂纹演化机制的理解, 包括准静态载荷下的失稳扩展与循环载荷下的渐进损伤累积过程。

然而, 经典线弹性断裂力学假设裂纹尖端应力奇异性阶数为 $r^{-1/2}$ (r 为距裂纹尖端的距离), 这一假设仅适用于理想线弹性材料和小范围屈服条件^[7]。随着现代化技术的不断发展, 衍生出了许多非线性材料(如弹塑性体)或复合结构材料(如功能梯度材料), 裂纹尖端应力场的奇异性指数 λ (定义为 $\sigma \propto r^\lambda$) 可能偏离经典值^[8]。例如, Williams^[9]通过特征展开法证明, 界面裂纹的奇性指数与材料弹性常数相关, 表现为复数形式, 导致应力振荡性。此类现象促使学者将应力强度因子的概念扩展至更普遍的奇异性分析中, 如 Hutchinson-Rice-Rosengren (HRR) 场理论^[10-11]中弹塑性裂纹尖端的 $r^{-1/(n+1)}$ 奇性(n 为硬化指数)。因此, 必须要用到弹塑性断裂力学进行研究。

在非线性材料断裂分析中, 需重点考虑非弹性效应对裂纹尖端场的影响。Wells^[12]于 1963 年建立的裂纹张开位移准则(COD), 创新地将裂纹面分离量作为表征裂纹扩展的核心参数。该准则构建了兼容线弹性和弹塑性条件的统一框架。基于裂纹尖端张开位移(CTOD)的定量表征, 不仅能有效评估塑性区演化特征, 还可通过临界 CTOD 值确定材料的抗断裂能力。这一理论的突破迅速引发学术界的高度关注, 并形成工程化应用体系。1968 年 Rice 等学者^[13-15]提出的 J 积分理论, 基于全量塑性理论构建了与路径无关的断裂参量, 实现了裂纹尖端应力应变场的能力表征。COD 准则与 J 积分理论共同构建了弹塑性断裂力学的理论基石, 推动核压力容器等关键结构的断裂安全评估技术发展, 典型案例如美国 EPRI 建立的双基数(COD/J)的承压设备完整性评价体系。

1.2 板材切口的国内外研究现状

含裂纹/切口结构作为工程构件普遍存在于微机电系统至大型建筑等多种结构体系中。裂纹尖缘区域的高应力集中效应可能引发局部失效并导致结构整体失稳，这使得开展切口尖端应力奇异性解析具有重要工程价值：既为结构损伤容限设计提供理论支撑，又能指导关键部位的寿命评估与安全预警^[16]。

1.2.1 各向同性材料板切口研究概况

各向同性材料板是指由各向同性材料制成的板状结构，在各个方向上的弹性模量、泊松比等力学性质完全相同，这使得其在受力时不会因方向的不同而产生差异。在建筑领域可用于制造楼板、墙板等建筑结构，其均匀的力学性质保证了结构的稳定性和安全性。在机械领域可用于制造机械零件，如轴承座、齿轮等。其均匀的力学性质使得这些零件在受力时能够均匀变形，延长使用寿命。在航空航天装备制造领域，这类材料在飞行器承力部件如蒙皮结构、运载火箭燃料舱段等关键部位也具有重要应用价值。其优异的比强度与刚度特性可显著提升有效载荷占比并保障极端工况下的结构完整性，这一特性完美契合航空航天装备对结构材料“轻量化-高可靠”的协同设计要求。钟正华^[17]提到，各向同性板由于其材料性质的均匀性，在力学分析中具有独特的优势，在材料科学和工程力学领域是一个重要的研究对象。

传统裂纹板弯曲分析多基于 Kirchhoff 薄板假设^[18-19]，但其在断裂力学应用中存在本质性缺陷。由于未计入剪切变形的影响，该模型导致Ⅲ型应力强度因子丧失独立表征能力，难以精确描述裂纹尖端邻域的应力奇异性特征。采用 Reissner 板理论重构弯曲断裂分析模型^[20-21]，通过引入横向剪切变形机制，有效修正了经典理论偏差，能够显著提升裂纹尖端应力场的解析精度。

因此对于 Reissner 板切口尖端的应力奇异性分析，引发了广大学者的关注。在弯曲荷载作用下，Zucchini^[22]基于三维有限元方法对比分析了薄板在弯曲、剪切及扭转载荷下的裂纹尖端场分布特性，研究得出 Kirchhoff 理论在远场区域与 Reissner 板理论在近场区域分别能有效表征三维应力场。Berto^[23]基于三维数值分析方法研究了 V 形切口板结构在反对称平面载荷下的离面奇异特性。Li^[24]基于 Hellinger-Reissner 变分原理与哈密顿体系构建数值分析模型，研究了多材

料各向异性板弯曲/剪切载荷下切口尖端奇异性问题。Treifi^[25]利用分形有限元方法(FFEM)结合全局插值函数构建裂纹/切口板多工况模型,研究了面内剪切和弯曲荷载下应力强度因子计算问题。Liang, Chen 等^[26]建立了研究各向异性板裂纹尖端奇性场的杂交应力模型,并结合 Hellinger-Reissner 变分原理导出杂交元方程,建立了杂交元计算模型,并计算了应力强度因子。Penado^[27]依据混合数值-弹性解耦方法研究了复合材料粘接头双材料各向异性界面奇异性问题。Sih 等^[28-29]最先应用 Poisson-Kirchhoff 理论分析了双材料板裂纹问题。Huang^[30]依据 Mindlin 板理论研究了双材料楔体以及各向异性板粘接界面应力奇异性问题。该理论虽构建了奇性指数求解的特征方程体系,但其超越方程形式导致传统解析法存在求解瓶颈。值得注意的是,该方法对弯矩奇异性 and 剪力奇异性的求解是分开的。基于 Reissner 板理论, Wang^[31]通过引入切口尖端位移场渐近展开式构建线弹性力学平衡方程,推导出应力奇性指数特征微分方程组,并借助插值矩阵法建立多边界耦合分析模型,实现四类典型工况下板切口全阶奇性指数与特征角函数的同步求解,该方法通过统一表征剪力与弯矩奇异性,有效规避了超越方程的求解瓶颈。但是,在求解高阶微分方程时,计算较为繁琐。

1.2.2 功能梯度材料板切口研究概况

层状复合材料结构由不同材料制成,相较于单一材料,其性能得到了改善,包括比刚度、比强度的提升、较低自重和出色的疲劳强度。正因如此,这类结构在航空航天、民用、军事和海军等应用领域日益受到关注。然而,由于层状结构使得对这些结构的研究变得困难,并且若相邻层之间的界面处的材料特性存在较大变化,分析会更加复杂^[32],这可能会导致层压复合材料结构出现分层问题。为克服这难题,一种新型复合材料——功能梯度材料(Functionally Graded Material,FGM)应运而生。功能梯度材料(FGM)由具有良好韧性的金属和耐热性强的陶瓷这两种不同的材料组成^[33],其组成结构和性能在材料厚度或长度方向呈现渐变特性。沈等^[34]观察到了FGM克服了上述缺点,原因在于陶瓷可承受高温环境,而金属成分能够提供强大的机械性能。板、壳和梁仍然是功能梯度材料结构的主要形式。在功能梯度材料构件工程实践中,制造装配工艺过程形成的几何不连续特征(特别是切口型缺陷)会引发显著的力学响应异常。这类缺陷尖端区域存在的应力奇异性不仅诱发多尺度损伤演化,更会显著降低

结构的承载性能与服役可靠性^[35]。

Saidi 等^[36]基于一阶剪切变形板理论研究了中厚功能梯度扇形板顶点应力奇异性及边界层效应,揭示了凸角和凹角扇形板在剪力、弯矩及边界层函数的奇异性演化规律。Barati 等人^[37]基于多准则评估方法(MS/PS/ASED)研究了功能梯度 *Al-SiC* 复合材料 U 型缺口板弯曲工况下缺口深度对 J 积分及临界载荷的影响机制,验证了功能梯度材料在抗断裂设计中的工程优越性;Ciavarella^[38]提出了使用强度-模量指数比,通过保持渐进应力始终等于强度来消除切口或裂纹对功能梯度材料的应力奇异的影响;Singh 等^[39]基于逆双曲剪切变形理论,研究了孔隙率分布、孔隙率参数、芯层分布、跨厚比、幂律指数和加载条件等各种参数对功能梯度板静响应的影响;Huang^[40-42]基于本征展开法构建了功能梯度板薄板、高阶剪切变形板以及三阶板理论框架下应力奇异性指数与特征角函数的数学表征关联关系,建立了不同板理论模型对切口尖端奇异性参数的量化影响规律;陈建等^[43]采用基于滑动最小二乘近视的位移插值形式(无单元法)计算了功能梯度材料板的应力强度因子。黄干云等^[44]通过 Fourier 积分技术和传递矩阵方法,求解了面内加载下功能梯度材料界面层和涂层中的界面裂纹问题。李聪等^[45]通过弹塑性理论基本方程引入 V 形切口尖端应力场和位移场的渐近级数展开,采用插值矩阵法研究了幂硬化材料反平面 V 形切口的应力奇异性指数;程长征等^[46]运用插值矩阵法分析了功能梯度中厚板切口的应力奇异性指数,并获得相应的特征角函数。

1.2.3 正交各向异性材料板切口研究概况

各向异性同样也属于复合材料的特性,正交各向异性材料板因其独特的力学性能(如方向依赖性刚度、抗剪特性等),在航空航天、桥梁工程、复合材料结构等领域应用广泛,因此,深入探究其切口应力奇异性对于保障结构在服役过程中的可靠性和安全性具有至关重要的意义。Ang 和 Williams^[47]最早利用积分方程和 Reissner 弯曲理论研究了无限大正交各向异性材料板中含有限裂纹尖端的弯曲-拉伸耦合问题,重点分析了裂纹尖端应力奇异性问题。Chen 和 Sih^[48]基于断裂力学理论,更为系统地探讨了各向异性复合材料板中裂纹的扩展行为及应力奇异性。童子靖等^[49]基于边界元法推导了平面弹性正交各向异性问题的控制方程,构建离散单元解析系数表达式,并系统求解了含缺陷板的应力强度

因子。Delale F^[50]通过解析法研究了双材料粘接正交各向异性界面自由边缘应力奇异性问题，揭示了奇异性强度与材料弹性参数的耦合关系。Chen^[51]运用复变方程研究了由于几何和材料不连续性而导致的各向异性多材料楔形和结中应力奇异性的一般问题，此外还研究了受各向异性材料的几何构型和材料属性影响的应力奇异性。Li J^[52]基于变分原理与柱坐标系本构建模，通过双变量向量构建多材料界面切口控制方程，并采用 Müller 迭代算法实现了应力奇异性特征值的精确求解。Pageau 等^[53]通过有限元法研究了正交各向异性材料界面几何/材料突变诱发的切口奇异应力场分布特性。平学成等^[54]基于非协调元特征分析法构建了非奇异变换位移场模型，并结合非协调单元离散策略实现了各向异性复合材料复杂尖劈/接头奇异性指数的全域解系。Shin^[55]通过特征值渐近应力场分析与路径独立线积分方法，研究了复合材料-钢共固化接头界面角应力奇异性问题，揭示了界面奇异性强度与异质材料弹性参数的耦合规律，并通过路径无关性验证了奇异性参量提取方法的鲁棒性。Ungamornrat^[56]提出弱奇异对称伽辽金边界元法(SGBEM)，实现了三维各向异性裂纹尖端奇异场的高效表征及混合型应力强度因子的同步解析。Ma 等^[57]计算了无限各向异性体多重裂纹问题下的非奇异项和有界项。Chue 等^[58]利用 Lekhnitskii 复函数方法建立出各向异性楔形体的特征方程，并对其切口应力奇异指数进行求解，随后绘制了所有纤维取向和特定楔角的奇异点指数轮廓，确定出对应于最小应力奇异性指数的纤维方向，但是这种方法退化成裂纹问题和各向同性问题将会失效。针对变厚度扁球壳大挠度非线性问题，Niu^[59]通过方程拟线性降维处理与插值矩阵法，成功解析复杂几何壳体应力-变形耦合机制。Ge^[60]创新性地通过位移场渐近展开与 Reissner 方程特征化数值建模，将正交各向异性材料板切口应力奇异性计算问题转化为常微分特征方程组的数值求解问题，并利用插值矩阵法实现奇异性特征值的高效提取。

1.3 微分求积法研究进展

在工程问题数学建模中，微分方程求解作为核心技术手段面临两大挑战：解析解的不可获得性与数值解的精确保真性。现行主流数值解法主要包含四类典型方法：有限差分法，试射法，配点法和插值矩阵法。

有限差分法作为经典数值解法，其核心在于构造多维差分格式。该方法通

过离散化处理将微分方程转化为代数方程组，其中中心差分格式因具有二阶收敛特性($O(h^2)$)和窄带对称系数矩阵特征而被广泛应用。特别在两点边值问题求解中展现出良好的数值敏感性，但存在显著局限性：(1)算法实现需依赖定制化编程，在遇到不同的问题时需要重新编程；(2)离散点数量预估缺乏普适性准则。

试射法作为改进型数值策略，通过初值问题重构技术有效克服单点法数值发散缺陷。该方法的优势体现在：(1)继承初值问题收敛阶可量化特性，便于步长优化选择；(2)融合有限差分思想提升算法鲁棒性。但存在两个关键瓶颈：(1)全局误差估计缺乏有效数学工具；(2)初值敏感性导致数值震荡现象频发，严重影响计算稳定性。

配点法作为高效数值求解策略，其优势特征体现在：(1)采用最优节点配置策略（如 Gauss-Lobatto 节点），可实现指数级收敛速度，相较有限差分法精度提升 30%-50%；(2)天然适应复杂几何域问题，通过基函数灵活构造精确满足边界约束条件。但存在两个固有局限：(1)病态系数矩阵问题导致数值稳定性对节点分布敏感度较高；(2)在处理非线性微分方程时易出现伪振荡现象，需引入人工耗散项进行修正。

牛忠荣团队^[59]在积分矩阵法理论框架^[61]上发展出插值矩阵法，其算法创新性体现在：原方法受限于拉格朗日插值原理，将求解域离散为不超过七个子区间，而新型插值矩阵法突破传统约束，采用多项式插值技术实现求解域的任意等分数值离散，显著提升计算精度（相对误差降低约 15%）。该数值策略的工程适用性表现在：(1)有效求解两点边值和特征值问题；(2)成功拓展至切口断裂力学分析等复杂工程场景。但需注意，在处理高阶微分方程时存在计算复杂度骤增的现象，计算时间相对提高。

1971 年，Bellman 和 Casti^[62]提出了微分求积法(DQM)基本理论，在求解微分方程特征值和边值问题时，由于该理论不依赖于变分原理，具有公式简单、编程方便、高效、精度高等特点，是一种很有效的直接求解微分方程的数值计算方法，并且能以较少的网格点求得微分方程的高精度数值解，所以其在振动工程领域得到了广泛应用，主要用来求解工程结构的自由振动和强迫振动问题。王鑫伟^[63]将 DQM 运用到结构力学的计算问题中。聂国隽^[64]采用 DQM 法进行梁的弹塑性平面弯曲分析，分析了微分求积法的高稳定性和高收敛性。王忠民^[65]

通过微分求积法离散圆转圆板的横向振动运动微分方程，研究了三种不同边界条件下旋转圆板的前两阶复频率随角速度的变化，进而得到了其失稳类型及临界速度。M.Shariyat^[66]利用时域微分求积法对粘弹性功能梯度材料板在低速冲击作用下展开研究，分析了各种几何构型，运动学和材料参数对横向挠度、压痕和接触力的时间历程影响。Maziyar^[67]在三维弹性理论框架内，利用 DQM 法分析了功能梯度夹层板在电热机械载荷下的弯曲行为。Shen 等^[68]通过有限元法与微分求积法结合(DQHFEM)结合多种高阶板理论系统分析了多孔石墨烯片增强的嵌入式纳米版在 Kelvin-Voigt 粘弹性介质中的力学行为。Lei 等^[69]基于修正偶应力理论与 Mori-Tanaka 细观力学方法，构建了温度相关属性功能梯度正弦微梁热-力耦合分析模型，结合 Navier 解析法和微分求积法研究了功能梯度微梁在高热梯度环境中的力学特性。Morteza 等^[70]基于 Gurtin-Murdoch 表面弹性理论与修正板理论，采用 DQM 法分析了正交各向异性纳米板异/同相位振动-屈曲模式的竞争机制。Wang 等^[71]基于 Euler-Bernoulli 梁理论，运用 DQM 法研究了工程中常用的细长梁在大变形下的力学行为。Vaghefi^[72]在 DQM 方法的基础上进行了创新与优化，提出了一种既高效又精确的新方法——增量微分求积法 (IDQM)，并成功将其应用于非线性二维 Burger's 方程的分析中。微分求积法对于工程实际的研究意义重大，它不仅能够提高计算效率与精度，解决特定工程问题，还能优化工程设计与分析，推动工程技术创新。在工程实践中，微分求积法已经成为一种不可或缺的重要工具。

1.4 本文研究的主要内容

本论文基于微分求积法(Differential Quadrature Method,DQM)理论的研究和应用。本研究将微分求积法应用于工程断裂力学领域，针对复杂工程结构中常见的 V 型切口应力奇异性问题开展系统性研究，主要涵盖以下三个维度：

(1) 各向同性材料板切口应力奇异性

针对各向同性板切口应力奇异性问题，分别建立单相与双相材料板切口分析模型，首先基于 Reissner 板弯曲理论，将切口尖端邻域的位移场级数按 Williams 渐进展开，结合材料界面连续条件与各向同性板切口平衡方程建立板切口平衡微分方程组，通过引入不同的边界约束条件，将复杂的应力奇异性分

析转化为关于应力奇性指数 λ 的常微分方程特征值问题。其次, 运用微分求积法(DQM)离散化处理特征方程, 通过等节点分布形式配置策略将微分算子转化为代数矩阵形式, 形成标准型广义代数特征方程组。自主开发 FORTRAN 计算程序, 采用 QR 算法进行特征值提取, 实现单相/双相材料组合下应力奇异性指数的精确求解。最后, 计算了双相各向同性板不同常见工程几何构型的应力奇性指数, 阐明了不同几何构型对应力奇性指数振荡特性的影响机制。

(2) 功能梯度材料中厚度板切口应力奇异性

本研究构建了功能梯度中厚板切口奇异性分析的梯度自适应数值求解体系: 基于柱坐标系三维弹性本构关系与渐近位移场分解技术, 推导出关于奇性指数 λ 的变系数本征微分方程组, 通过引入界面位移-应力连续条件, 建立包含梯度特性的径向边界条件数学表征, 将物理约束转换为特征角函数与应力奇性指数的耦合特征微分方程组。在此基础上, 采用等节点分布离散技术, 将特征微分方程转换为标准型广义代数特征方程组。经过自主研发的 FORTRAN 计算程序解出相应边界条件下双材料功能梯度中厚板切口尖端处应力奇性指数。通过算例验证了该文 DQM 计算双材料功能梯度中厚板切口尖端处应力奇性指数的结果是有效的, 并计算了功能梯度与纯陶瓷/纯金属混合板的切口奇性指数。

(3) 正交各向异性板切口应力奇异性

基于 Mindlin-Reissner 板理论和 Hellinger-Reissner 变分原理, 本文建立了正交各向异性板切口/裂纹应力奇异性特征分析地一个新途径, 由 Williams 渐近展开出发将正交各向异性板切口/裂纹尖端附近区域地位移场表达为关于奇性指数和位移角函数的组合形式, 将典型模态项嵌入修正 Reissner 控制方程。将奇异性指数求解转化为特征微分方程组问题, 再通过微分求积法 (DQM) 基本理论, 将微分算子转化为高精度代数矩阵, 建立关于应力奇性指数 λ 的标准广义代数特征方程, 从而实现切口尖端应力奇异性指数的精确求解。本文还特别研究了双相正交各向异性板切口应力奇性指数与材料主轴系方向的关系, 进一步验证了正交各向异性材料的方向依赖性特征。该方法规避了传统迭代法求解超越方程的收敛难题, 且实现了平面应力与反平面应力奇性模态的并行求解。同等精度下, DQM 法的离散单元相对较少, 不仅提高了求解的效率而且对于高阶导数的微分方程的求解同样保持高精度。

1.5 本文研究技术路线

综上所述，本研究以微分求积法(DQM)为核心工具，运用一套系统性解决板切口应力奇性问题的技术路线，技术路线图如图 1-1 所示。

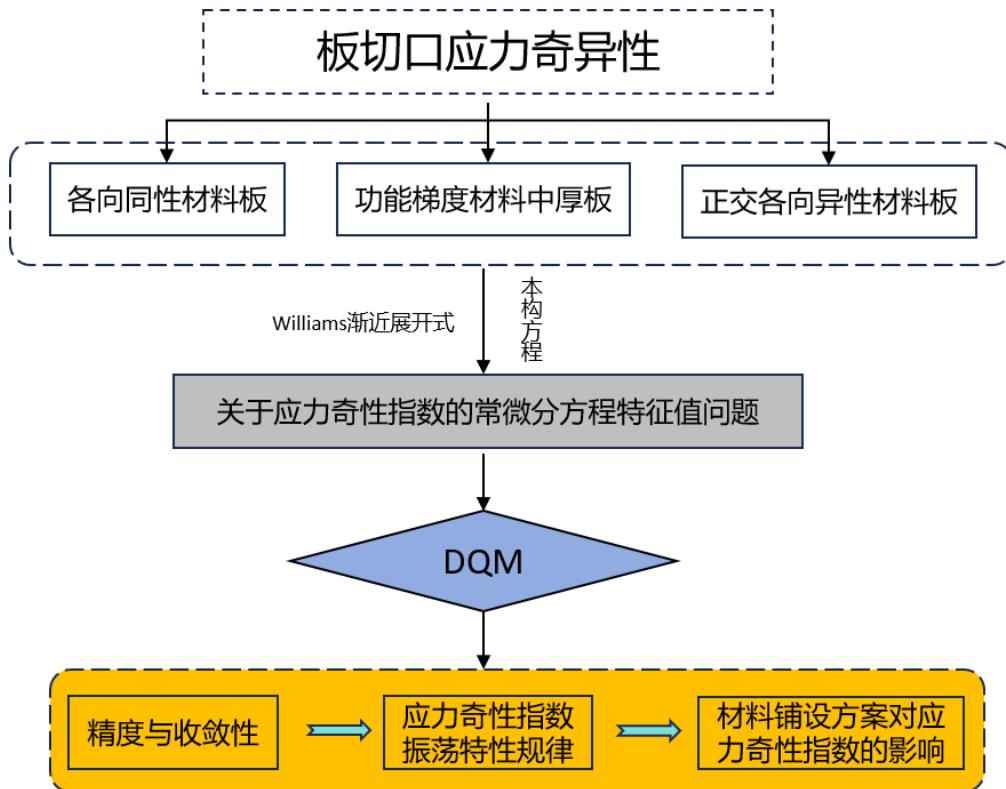


图 1-1 技术路线图

第2章 微分求积法求解常微分方程特征值问题

微分求积法(DQM)是 Bellman 和 Casti 于 1971 年提出的基本理论, 由于快速计算机及仿真技术的发展而引起了广大学者们的广泛关注。该方法通过创新型微分算子离散策略, 采用非均匀节点配置方案将连续域微分方程转化为高精度代数方程组, 其核心优势体现在: (1)离散格式具有数学简洁性, 便于构建程序化求解流程; (2)计算效率优势显著, 特别适合高阶参数的复杂力学问题; (3)收敛特性优异, 可通过节点优化实现误差衰减。这些特点使其在结构动力学、多物理场耦合等复杂结构力学响应分析中展现出独特优势。本章进一步研究微分求积法解决常微分方程组的特征值问题。

2.1 微分求积法的基本公式

一组一般的线性常微分方程组多点边值问题如下:

$$\sum_{k=1}^r \sum_{j=0}^{m_k} g_{ikj}(x) y_k^{(j)}(x) - \lambda \sum_{k=1}^r \sum_{j=0}^{m_k} q_{ikj}(x) y_k^{(j)}(x) = f_i(x), \quad i=1, 2, \dots, r, \quad x \in [a, b] \quad (2-1)$$

相应多点边值条件为:

$$\sum_{k=1}^r \sum_{j=0}^{m_k-1} \alpha_{lkj} y_k^{(j)}(\xi_{lkj}) - \lambda \sum_{k=1}^r \sum_{j=0}^{m_k-1} \beta_{lkj} y_k^{(j)}(\xi_{lkj}) = \gamma_l, \quad l=1, 2, \dots, t, \quad a \leq \xi_{lkj} \leq b \quad (2-2)$$

这里, $g_{ikj}(x)$ 是求解区间 $[a, b]$ 上连续解析函数, λ 是特征值, $\alpha_{lki}, \beta_{lki}, \xi_{lki}$ 是实常数, $t = \sum_{k=1}^r m_k$ 。如果 $f_i(x)$ 和 γ_l 等于零, 等式(2-1)和(2-2)构成了常微分方程组特征值问题。

本章将求解区间 $[a, b]$ 分划为 n 个离散单元, $n+1$ 个离散节点, 其中, $x_0 = a, x_n = b$ 。微分求积法的核心问题在于权系数矩阵的构造方法。首先, 将函数 $y_k(x)$ 用离散节点函数值进行拉格朗日(Lagrange)插值来描述, 即

$$y_k^{(0)}(x) = \sum_{j=0}^n L_j(x) y_k^{(0)}(x_j) \quad (2-3)$$

式(2-3)中 $L_j(x)$ 为拉格朗日多项式, 其形式为:

$$L_j(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k} \quad (2-4)$$

由式(2-4)对函数 $y_k(x)$ 求一阶导数，得到：

$$y_k^{(1)}(x) = \sum_{j=0}^n L_j'(x) y_k^{(0)}(x_j) \quad (2-5)$$

将式(2-5)在 n 段区间 $[a, b]$ 上离散，从而进一步得到：

$$y_k^{(1)}(x) = \sum_{j=0}^n L_j'(x_j) y_k^{(0)}(x_j) \quad (2-6)$$

将式(2-6)写成向量和矩阵形式，得：

$$\begin{Bmatrix} y_k^{(1)}(x_0) \\ y_k^{(1)}(x_1) \\ \vdots \\ y_k^{(1)}(x_n) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{00}^{(1)} & A_{01}^{(1)} & \cdots & A_{0n}^{(1)} \\ A_{10}^{(1)} & A_{11}^{(1)} & \cdots & A_{1n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n0}^{(1)} & A_{n1}^{(1)} & \cdots & A_{nn}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_k^{(0)}(x_0) \\ y_k^{(0)}(x_1) \\ \vdots \\ y_k^{(0)}(x_n) \end{Bmatrix} \quad (2-7)$$

其中， $A_{ij}^{(1)}$ 显示表达式为：

$$A_{ij}^{(1)} = l_j'(x_i) = \begin{cases} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i, j}}^N (x_i - x_k) / \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^N (x_j - x_k) & (i \neq j) \\ \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^N \frac{1}{(x_i - x_k)} & (i = j) \end{cases} \quad (2-8)$$

高阶导数顺次地采用低阶导替换，逐步递推可得：

$$\begin{Bmatrix} y_k^{(r)}(x_0) \\ y_k^{(r)}(x_1) \\ \vdots \\ y_k^{(r)}(x_n) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{00}^{(r)} & A_{01}^{(r)} & \cdots & A_{0n}^{(r)} \\ A_{10}^{(r)} & A_{11}^{(r)} & \cdots & A_{1n}^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n0}^{(r)} & A_{n1}^{(r)} & \cdots & A_{nn}^{(r)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_k^{(0)}(x_0) \\ y_k^{(0)}(x_1) \\ \vdots \\ y_k^{(0)}(x_n) \end{Bmatrix} \quad (2-9)$$

这里， $\mathbf{A}^{(r)} = \begin{bmatrix} A_{00}^{(r)} & A_{01}^{(r)} & \cdots & A_{0n}^{(r)} \\ A_{10}^{(r)} & A_{11}^{(r)} & \cdots & A_{1n}^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n0}^{(r)} & A_{n1}^{(r)} & \cdots & A_{nn}^{(r)} \end{bmatrix}$ 称为权系数矩阵。

其中，权系数矩阵 $\mathbf{A}^{(r)}$ 的各阶导数之间的关系为：

$$\mathbf{A}^{(r+1)} = \mathbf{A}^{(1)} \mathbf{A}^{(r)} = \mathbf{A}^{(r)} \mathbf{A}^{(1)} \quad (r \geq 1) \quad (2-10)$$

将式(2-7)和(2-9)代入式(2-1)，控制方程写成向量形式，得：

$$\sum_{k=1}^r \sum_{j=0}^{m_k} \mathbf{G}_{ikj}(\mathbf{x}) \mathbf{Y}_k^{(j)}(\mathbf{x}) - \lambda \sum_{k=1}^r \sum_{j=0}^{m_k} \mathbf{Q}_{ikj}(\mathbf{x}) \mathbf{Y}_k^{(j)}(\mathbf{x}) = 0, \quad i=1, 2, \dots, r \quad (2-11)$$

其中,

$$\mathbf{G}_{ikj} = \text{dig}(g_{ikj}(x_0), g_{ikj}(x_1), \dots, g_{ikj}(x_n)) \quad (2-12a)$$

$$\mathbf{Q}_{ikj} = \text{dig}(q_{ikj}(x_0), q_{ikj}(x_1), \dots, q_{ikj}(x_n)) \quad (2-12b)$$

$$\mathbf{Y}_k^{(j)}(\mathbf{x}) = (y_k^{(j)}(x_0), y_k^{(j)}(x_1), \dots, y_k^{(j)}(x_n)) \quad (2-12c)$$

将式(2-9)代入式(2-11), 得到下列代数等式:

$$\sum_{k=1}^r \mathbf{B}_{ik} \mathbf{Y}_k^{(0)} - \lambda \sum_{k=1}^r \mathbf{B}_{\lambda ik} \mathbf{Y}_k^{(0)} = 0 \quad (2-13)$$

其中,

$$\mathbf{B}_{ik} = \sum_{j=0}^{m_k} \mathbf{G}_{ikj} \mathbf{A}^{(j)} \quad (2-14a)$$

$$\mathbf{B}_{\lambda ik} = \sum_{j=0}^{m_k} \mathbf{Q}_{ikj} \mathbf{A}^{(j)} \quad (2-14b)$$

不妨设式(2-2)中 ξ_{ikj} 在 $[a, b]$ 内的划分点 x_{I_l} ($0 \leq I_l \leq n$) 上。将式(2-9)代入式(2-2)且 $\gamma_l = 0$, 则产生如下特征值问题:

$$\sum_{k=1}^r \sum_{j=0}^{m_k-1} \alpha_{lkj} [\mathbf{A}^{(j)}]_{I_l} \mathbf{Y}_k^{(0)} - \lambda \sum_{k=1}^r \sum_{j=0}^{m_k-1} \beta_{lkj} [\mathbf{A}^{(j)}]_{I_l} \mathbf{Y}_k^{(0)} = 0 \quad (2-15)$$

其中, $[\mathbf{A}^{(j)}]_{I_l}$ 为矩阵 $\mathbf{A}^{(j)}$ 的第 I_l 行元素。再令:

$$\mathbf{W}_{\alpha lk} = \sum_{j=0}^{m_k} \alpha_{lkj} [\mathbf{A}^{(j)}]_{I_l} \quad (2-16a)$$

$$\mathbf{W}_{\beta lk} = \sum_{j=0}^{m_k} \beta_{lkj} [\mathbf{A}^{(j)}]_{I_l} \quad (2-16b)$$

将式(2-16)代入式(2-15), 得到下列代数等式:

$$\sum_{k=1}^r \mathbf{W}_{\alpha lk} \mathbf{Y}_k^{(0)} - \lambda \sum_{k=1}^r \mathbf{W}_{\beta lk} \mathbf{Y}_k^{(0)} = 0 \quad (2-17)$$

将边界和交界条件式(2-17)代入控制方程式(2-13), 替换相应的 $I_l=0$ 行和 $I_l=n$ 行, 可得:

$$\sum_{k=1}^r \hat{\mathbf{B}}_{ik} \mathbf{Y}_k^{(0)} - \lambda \sum_{k=1}^r \hat{\mathbf{B}}_{\lambda ik} \mathbf{Y}_k^{(0)} = 0 \quad (2-18)$$

其中, 矩阵 $\hat{\mathbf{B}}_{ik}$ 、 $\hat{\mathbf{B}}_{\lambda ik}$ 是矩阵 $\mathbf{B}_{ik}$ 、 $\mathbf{B}_{\lambda ik}$ 的第 $I_l=0$ 和 n 行分别被边界和交界条件式 $\mathbf{W}_{\alpha lk}$ 、 $\mathbf{W}_{\beta lk}$ 替换后形成的新矩阵。再令:

$$\mathbf{C} = [\hat{\mathbf{B}}_{ik}]_{r(n+1) \times r(n+1)}, \quad \mathbf{D} = [\hat{\mathbf{B}}_{\lambda ik}]_{r(n+1) \times r(n+1)}, \quad \mathbf{Y} = \begin{Bmatrix} \mathbf{Y}_1^{(0)} \\ \mathbf{Y}_2^{(0)} \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_r^{(0)} \end{Bmatrix}$$

将式(2-18)装配合并后, 可得到下列代数等式:

$$\mathbf{CY} - \lambda \mathbf{DY} = 0 \quad (2-19)$$

式(2-19)构建的广义代数方程体系可表征为矩阵维度为 $r(n+1) \times r(n+1)$ 的线性方程组。这里采用 QR 法实现特征值 λ 及其相应特征向量 $\mathbf{Y}$ 的同步解析。

2.2 离散节点布点方式的选择

在微分求积法的计算过程中, 区间离散化处理的核心在于节点配置策略的选择。理论研究表明, 当边界条件固定时, 通过该方法建立的代数方程组不仅与离散节点间距相关, 更关键的取决于权系数矩阵 $\mathbf{A}^{(r)}$ 的构造特性。值得注意的是, $\mathbf{A}^{(r)}$ 矩阵的构成同时受节点配置方案及数量双重影响。近年来大量实证分析表明, 节点分布模式的选取对运动微分方程求解过程的稳定性和结果精度具有显著影响。将区间 $[a, b]$ 划分成 n 段, 尽管均匀节点分布形式(2-21a)作为基础配置方案具有实施简便的优势, 但在实际计算中常常出现数值发散或精度不足的现象。相比之下, 基于特定数学原理的非均匀节点配置展现出更优越的计算性能。

以切比雪夫多项式零点为基础的节点配置如式(2-21b)已被证实能有效提升计算稳定性。在此基础上进一步扩展出改进型等比数列配置策略如式(2-21c), 该方案在保持切比雪夫节点几何特性和计算精度的同时, 引入可调节公比参数 q 实现节点分布的动态优化。通过调整公比 q 的数值, 既可继承原有配置方案的精度优势, 又能根据具体计算需求对节点密度进行自适应调整。这种参数化设

计使得公比 q 成为调控算法数值精度的关键调节参数，为微分求积法的工程应用提供了更灵活的控制维度。

$$\xi_i = a + \frac{i(b-a)}{n}, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (2-21a)$$

$$\xi_i = a + \frac{b-a}{2} (1 - \cos \frac{i\pi}{n}), \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (2-21b)$$

$$\begin{cases} \xi_i = a + \frac{b-a}{2(q^{\frac{n}{2}}-1)} (q^i - 1), & (i = 0, 1, 2, \dots, \frac{n}{2}) \\ \xi_i = b - \frac{b-a}{2(q^{\frac{n}{2}}-1)} (q^{i-\frac{n}{2}} - 1), & (i = \frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}+2, \dots, n) \end{cases} \quad (2-21c)$$

2.3 微分求积法的精度分析

本章通过微分求积法对变系数常微分方程特征值问题进行求解，采用典型算例验证本文构建的数值计算方案，旨在论证该方法的计算精度与效能。

简支梁固有频率计算

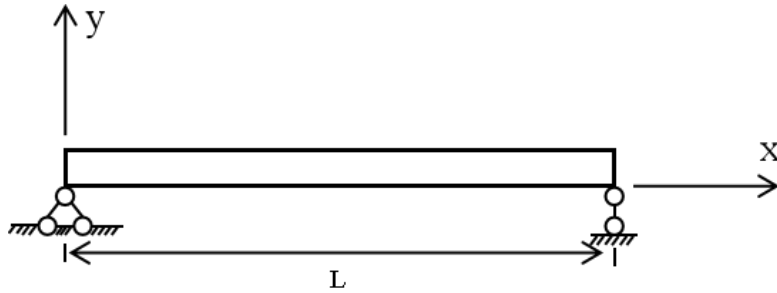


图 2-1 简支梁模型

如图 2-1 所示，简支梁的自由振动控制方程为：

$$\frac{d^4 y(x)}{dx^4} - \beta^4 y(x) = 0, \beta^4 = \frac{\omega^2 m}{EI}, (0 \leq x \leq L) \quad (2-22)$$

其中， $y(x)$ 表示位移模态函数， ω 为系统固有频率， L ， EI 和 m 分别表征梁结构的几何长度、弯曲刚度及质量线密度参数，两端的边界条件是：

$$y(0) = 0, y''(0) = 0, y(L) = 0, y''(L) = 0 \quad (2-23)$$

求解式(2-22)和(2-23)可得固有频率的解析解：

$$\omega_i = (i\pi)^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}}, (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (2-24)$$

将区间 $[0,L]$ 分段数 $n=20$ ，区间离散节点布点方式按等步长、切比雪夫多项式的根和等比数列三种方式，采用微分求积法计算式(2-22)和(2-23)可得简支梁前 7 阶固有频率如表 2-1 所列。由表 2-1 计算结果可知，微分求积法计算简支梁固有频率与精确解完全吻合，证明了该法求解微分方程的特征值问题式有效的。

表 2-1 微分求积法计算的简支梁固有频率与精确解的对比

振型阶次	精确解 ω_i	微分求积法(DQM)		
		等步长	切比雪夫	等比数列
1st	$\pi^2 = 9.8696$	9.87155550	9.87155430	9.87155413
2nd	$4\pi^2 = 39.4784$	39.5096360	39.5096139	39.5096138
3rd	$9\pi^2 = 88.8264$	88.9842996	88.9841773	88.9841780
4th	$16\pi^2 = 157.9137$	158.405309	158.410508	158.409674
5th	$25\pi^2 = 246.7401$	247.774278	247.944851	247.919326
6th	$36\pi^2 = 355.3058$	357.103421	357.803423	359.48681
7th	$49\pi^2 = 483.6106$	488.225414	488.375515	489.365414

2.4 本章小结

本研究通过系统的数值实验揭示了微分求积法在结构动力学分析中的三个显著特征：首先，该方法作为高阶差分格式的典型代表，在保持低阶差分法稳定性的同时，通过引入高阶展开项实现了计算精度的显著提升，其收敛阶数在同类方法中具有显著优势。其次，独特的权系数确定机制使得各离散节点的权重系数能够通过解析表达式精确表征，这种显式表达特性不仅保证了计算过程的不确定性，更有利于构建标准化计算流程。更为重要的是，相较于有限元法等需要复杂网格剖分的数值方法，微分求积法仅需在离散节点处进行函数值采样即可完成全域近似，这一特性使得其计算复杂度与数据存储需求均降低一个数量级。理论分析表明，该方法可有效拓展至结构动力学偏微分方程组的求解领域，其"高精度-低消耗"的计算特性为复杂结构动力响应分析提供了一种兼具理论严谨性与工程实用性的新型数值模拟工具。

本章微分求积法基本理论在后续章节进一步地将其运用到板切口应力奇性指数的微分方程特征值求解问题中。用数值算例来阐明微分求积法求解板切口控制微分方程的方法步骤，并将应力奇性指数的微分求积计算值与文献解进行比较，证明该法的有效性和精确性，为板切口的应力奇异性分析提供了一种简

单有效的分析方法。

第 3 章 各向同性板切口应力奇异性

基于 Reissner 板理论，本章将各向同性板切口尖端邻域的位移场渐近展开并分解成奇异性指数与位移角函数本征模态的耦合形式，通过典型模态项代入板控制方程，成功将奇性指数求解转化为常微分特征值问题。再应用微分求积法 (DQM) 基本理论，将该常微分特征方程组转化为广义代数特征方程组。随后将 QR 法思想编入 DQM 相关程序实现特征值的全谱解析，并实现四类边界条件组合下各向同性单/双材料板切口尖端处应力奇异性指数的并行求解。

3.1 Reissner 板 V 形切口应力奇异性分析

3.1.1 控制方程

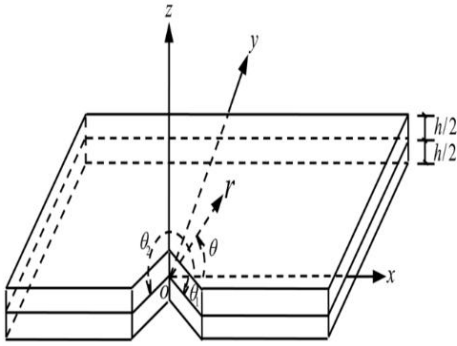


图 3-1 坐标系下含切口的板

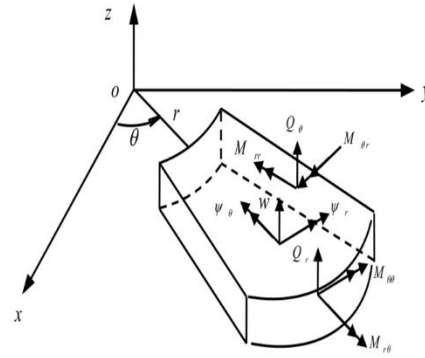


图 3-2 内力和位移的组合

图 3-1 展示的是 V 形切口板体结构在笛卡尔-柱双坐标系体系中的几何构型参数，图 3-2 则给出柱坐标系下的力学参量分布特征。其中弯矩分量由 $\{M_r, M_\theta, M_{r\theta}\}$ 表征，广义位移由 $\{w, \psi_r, \psi_\theta\}$ 定义，横向剪力则对应 $\{Q_r, Q_\theta\}$ 。

无横向荷载作用下并不计体力时，Reissner 板以内力表示平衡方程为：

$$\frac{M_r - M_\theta}{r} + \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{\partial M_{r\theta}}{r \partial \theta} - Q_r = 0 \quad (3-1a)$$

$$\frac{\partial M_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2M_{r\theta}}{r} - Q_\theta = 0 \quad (3-1b)$$

$$\frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(Q_r + \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (3-1c)$$

板的内力与位移关系：

$$M_r = -D \left[\frac{\partial \psi_r}{\partial r} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\psi_r}{r} \right) \right] \quad (3-2a)$$

$$M_\theta = -D \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\psi_r}{r} + \nu \frac{\partial \psi_r}{\partial r} \right] \quad (3-2b)$$

$$M_{r\theta} = -D \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial r} - \frac{\psi_\theta}{r} \right) \quad (3-2c)$$

$$Q_r = C \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} - \psi_r \right) \quad (3-2d)$$

$$Q_\theta = C \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} - \psi_\theta \right) \quad (3-2e)$$

在本构参数体系中，Reissner 板理论的关键变量与材料参数可作如下数学表征： ψ_θ 和 ψ_r 分别表征中性面的轴向与径向弯曲曲率张量分量。 ω 表示中性面横向位移场函数。材料刚度参数包括：抗弯刚度 $D = Eh^3 / [12(1-\nu^2)]$ ，其中 E 为弹性模量， ν 为泊松比。几何参数 h 代表板厚， G 代表剪切模量，横向剪切修正系数 $\kappa^2=5/6$ ，用于修正剪切变形效应，其与抗弯刚度 $\kappa^2 Gh$ 共同构成剪切变形能项。

将方程组(3-2)代入到(3-1)中，得到以三个广义位移表示 Reissner 板的基本方程为：

$$D \left[\frac{\partial^2 \psi_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_r}{\partial r} - \frac{\psi_r}{r^2} + \frac{1-\nu}{2r^2} \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial r \partial \theta} - \frac{3-\nu}{2r^2} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} \right] \quad (3-3a)$$

$$+ C \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} - \psi_r \right) = 0$$

$$D \left[\frac{1+\nu}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial r \partial \theta} + \frac{3-\nu}{2r^2} \frac{\partial \psi_r}{\partial \theta} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial r^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{1-\nu}{2} \frac{\psi_\theta}{r^2} \right]$$

$$+ C \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} - \psi_\theta \right) = 0 \quad (3-3b)$$

$$C \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} - \left(\frac{\partial \psi_r}{\partial r} + \frac{\psi_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} \right) \right] = 0 \quad (3-3c)$$

在 V 形切口顶点的应力奇异性，仅沿顶点的径向边界条件确定。四种类型

的沿径向边缘的边界条件:

(1) 固支边界条件:

$$\omega(r, \theta)|_{\theta=\theta_1, \theta_2} = \psi_r(r, \theta)|_{\theta=\theta_1, \theta_2} = \psi_\theta(r, \theta)|_{\theta=\theta_1, \theta_2} = 0 \quad (3-4a)$$

(2) 自由边界条件:

$$M_\theta(r, \theta)|_{\theta=\theta_1, \theta_2} = M_{r\theta}(r, \theta)|_{\theta=\theta_1, \theta_2} = Q_\theta(r, \theta)|_{\theta=\theta_1, \theta_2} = 0 \quad (3-4b)$$

(3) I型简支边界条件:

$$\omega(r, \theta)|_{\theta=\theta_1, \theta_2} = \psi_r(r, \theta)|_{\theta=\theta_1, \theta_2} = M_\theta(r, \theta)|_{\theta=\theta_1, \theta_2} = 0 \quad (3-4c)$$

(4) II型简支边界条件:

$$\omega(r, \theta)|_{\theta=\theta_1, \theta_2} = M_\theta(r, \theta)|_{\theta=\theta_1, \theta_2} = M_{r\theta}(r, \theta)|_{\theta=\theta_1, \theta_2} = 0 \quad (3-4d)$$

3.1.2 特征模型

基于 Williams 渐近展开理论^[68], 将切口尖端的位移场按如下级数渐进假设展开:

$$\psi_r = \sum_{k=1}^N A_k r^{\lambda_k} \tilde{\psi}_r(\theta, \lambda_k), \quad \psi_\theta = \sum_{k=1}^N A_k r^{\lambda_k} \tilde{\psi}_\theta(\theta, \lambda_k), \quad \omega = \sum_{k=1}^N A_k r^{\lambda_k} \tilde{\omega}(\theta, \lambda_k) \quad (3-5)$$

式中: λ_k 代表奇性指数, $\tilde{\psi}_r(\theta, \lambda_k)$, $\tilde{\psi}_\theta(\theta, \lambda_k)$ 和 $\tilde{\omega}(\theta, \lambda_k)$ 是相应的特征角函数, N 代表截取的级数项数, 代入式(2-3)得到如下的关于切口奇性指数的常微分方程组特征值问题:

$$\frac{1-\nu}{2} \tilde{\psi}_r'' - \frac{3-\nu}{2} \tilde{\psi}_\theta' - \tilde{\psi}_r + \lambda \frac{1+\nu}{2} \tilde{\psi}_\theta' + \lambda^2 \tilde{\psi}_r = 0 \quad (3-6a)$$

$$\tilde{\psi}_\theta'' + \frac{3-\nu}{2} \tilde{\psi}_r' - \frac{1-\nu}{2} \tilde{\psi}_\theta + \lambda \frac{1+\nu}{2} \tilde{\psi}_r' + \lambda^2 \frac{1-\nu}{2} \tilde{\psi}_\theta = 0 \quad (3-6b)$$

$$\tilde{\omega}'' + \lambda^2 \tilde{\omega} = 0 \quad (3-6c)$$

为简便起见, 将 λ_k , $\tilde{\psi}_r(\theta, \lambda_k)$, $\tilde{\psi}_\theta(\theta, \lambda_k)$ 和 $\tilde{\omega}(\theta, \lambda_k)$ 简写为 λ , $\tilde{\psi}_r$, $\tilde{\psi}_\theta$ 和 $\tilde{\omega}$ 。引入如下的三个新变量:

$$\tilde{g}_r = \lambda \tilde{\psi}_r \quad (3-7a)$$

$$\tilde{g}_\theta = \lambda \tilde{\psi}_\theta \quad (3-7b)$$

$$\tilde{g}_\omega = \lambda \tilde{\omega} \quad (3-7c)$$

将非线性特征值问题转化为线性问题。这样方程组(3-6)可以重新写为：

$$\frac{1-\nu}{2}\tilde{\psi}_r'' - \frac{3-\nu}{2}\tilde{\psi}_\theta' - \tilde{\psi}_r + \lambda\frac{1+\nu}{2}\tilde{\psi}_\theta' + \lambda\tilde{g}_r = 0 \quad (3-8a)$$

$$\tilde{\psi}_\theta'' + \frac{3-\nu}{2}\tilde{\psi}_r' - \frac{1-\nu}{2}\tilde{\psi}_\theta + \lambda\frac{1+\nu}{2}\tilde{\psi}_r' + \lambda\frac{1-\nu}{2}\tilde{g}_\theta = 0 \quad (3-8b)$$

$$\tilde{\omega}'' + \lambda\tilde{\omega} = 0 \quad (3-8c)$$

将位移场渐进展开式(2-5)代入边界条件式(2-4)得：

(1) 固支边界条件：

$$\tilde{\omega}\Big|_{\theta=\theta_1,\theta_2} = 0 \quad (3-9a)$$

$$\tilde{\psi}_r\Big|_{\theta=\theta_1,\theta_2} = 0 \quad (3-9b)$$

$$\tilde{\psi}_\theta\Big|_{\theta=\theta_1,\theta_2} = 0 \quad (3-9c)$$

(2) 自由边界条件：

$$(\tilde{\psi}_\theta' + \tilde{\psi}_r + \lambda\nu\tilde{\psi}_r)\Big|_{\theta=\theta_1,\theta_2} = 0 \quad (3-9d)$$

$$(\tilde{\psi}_r' - \tilde{\psi}_\theta + \lambda\tilde{\psi}_\theta)\Big|_{\theta=\theta_1,\theta_2} = 0 \quad (3-9e)$$

$$\tilde{\omega}'\Big|_{\theta=\theta_1,\theta_2} = 0 \quad (3-9f)$$

(3) I 型简支边界条件：

$$\tilde{\omega}\Big|_{\theta=\theta_1,\theta_2} = 0 \quad (3-9g)$$

$$\tilde{\psi}_r\Big|_{\theta=\theta_1,\theta_2} = 0 \quad (3-9h)$$

$$(\tilde{\psi}_\theta' + \tilde{\psi}_r + \lambda\nu\tilde{\psi}_r)\Big|_{\theta=\theta_1,\theta_2} = 0 \quad (3-9i)$$

(4) II 型简支边界条件：

$$\tilde{\omega}\Big|_{\theta=\theta_1,\theta_2} = 0 \quad (3-9j)$$

$$(\tilde{\psi}_\theta' + \tilde{\psi}_r + \lambda\nu\tilde{\psi}_r)\Big|_{\theta=\theta_1,\theta_2} = 0 \quad (3-9k)$$

$$(\tilde{\psi}_r' - \tilde{\psi}_\theta + \lambda\tilde{\psi}_\theta)\Big|_{\theta=\theta_1,\theta_2} = 0 \quad (3-9l)$$

这样，Reissner 板切口奇性指数的求解问题就转化为在边界条件(3-9)下计算常微分方程组式(3-8)的线性特征值问题。再采用微分求积法，可以将式(3-8)转化为标准型广义特征方程组，求解出 Reissner 板 V 形切口的奇性指数 λ ，与

此同时，相应的特征角函数 ω, ψ_r 和 ψ_θ 也可以求出。

3.2 微分求积法的应用

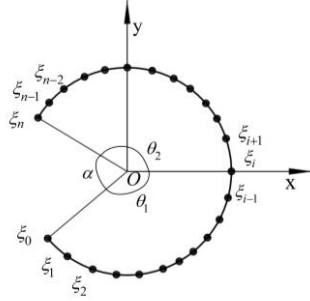


图 3-3 Reissner 板 V 形切口的微分求积法计算模型

运用 DQM 法计算各向同性单材料 Reissner 板切口的应力奇性指数。图 3-3 对应的楔形圆弧区间 $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ 的离散单元总数为 N ，离散节点总数为 $N+1$ ，即 $\xi_j (0 \leq j \leq N)$ ，其中 $\xi_0 = 0, \xi_N = 1$ 。离散节点分布方式采用等步长均匀网格模式，即：

$$\xi_j = \frac{j}{N}, \quad (j = 0, 1, 2, \dots, N) \quad (3-10)$$

DQM 法的基本思想是将归一化的位移特征函数 $\psi_r(\xi)$ 、 $\psi_\theta(\xi)$ 和 $\omega(\xi)$ ($0 \leq \xi \leq 1$) 及其 r 阶导数在其求解域中任意离散节点上的近似值表示为所有离散节点上值的线性加权和。即：

$$\frac{\partial^r \psi_r(\xi)}{\partial \xi^r} = \sum_{j=0}^N A_{ij}^{(r)} \psi_r(\xi_j) \quad (3-11a)$$

$$\frac{\partial^r \psi_\theta(\xi)}{\partial \xi^r} = \sum_{j=0}^N A_{ij}^{(r)} \psi_\theta(\xi_j) \quad (3-11b)$$

$$\frac{\partial^r \omega(\xi)}{\partial \xi^r} = \sum_{j=0}^N A_{ij}^{(r)} \omega(\xi_j) \quad (3-11c)$$

式(3-11)中的 $A_{ij}^{(r)}$ 是 r 阶导数加权系数矩阵 ($i, j = 0, 1, 2, \dots, N, r = 1, 2, \dots, N-1$)。

加权系数矩阵 $A_{ij}^{(r)}$ 可用一组递推公式计算获得，当 $i \neq j$ 时有：

$$A_{ij}^{(r)} = r \left(A_{ii}^{(r-1)} A_{ij}^{(1)} - \frac{A_{ij}^{(r-1)}}{\xi_i - \xi_j} \right) \quad (i, j=0, 1, 2, \dots, N; r=2, \dots, N-1) \quad (3-12)$$

当 $i = j$ 时, 有:

$$A_{ij}^{(r)} = - \sum_{j=0, j \neq i}^N A_{ij}^{(r)} \quad (i, j=0, 1, 2, \dots, N; r=1, 2, \dots, N-1) \quad (3-13)$$

其中一阶导数的加权系数矩阵 $A_{ij}^{(r)}$ 为以下表达式:

$$A_{ij}^{(1)} = \frac{R^{(1)}(\xi_i)}{(\xi_i - \xi_j) R^{(1)}(\xi_j)} \quad (i, j=0, 1, 2, \dots, N) \quad (3-14)$$

式(3-14)中, $R^{(1)}$ 由下式表示:

$$R^{(1)}(\xi_k) = \prod_{j=0, j \neq k}^N (\xi_k - \xi_j) \quad (3-15)$$

将式(3-11)式中表示的 DQM 规则应用于式(3-6), 从而得到各向同性单材料 Reissner 板切口应力奇性指数 λ 为特征值的一组代数方程组:

$$\mathbf{C}\mathbf{Y} - \lambda \mathbf{D}\mathbf{Y} = \mathbf{0} \quad (3-15)$$

$$\text{其中 } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & & & & & & \\ & \mathbf{I} & & & & & \\ & & \mathbf{I} & & & & \\ & & & \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} & & \\ & & & \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} & & \\ & & & & & & \mathbf{H}_{33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} & & & \mathbf{I} & & & \\ & & & & \mathbf{I} & & \\ & & & & & \mathbf{I} & \\ \mathbf{G}_{11} & & & & & & \\ & \mathbf{G}_{22} & & & & & \\ & & \mathbf{G}_{33} & & & & \\ & & & \mathbf{G}_{24} & & & \\ & & & & \mathbf{G}_{15} & & \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_r \\ \mathbf{g}_\theta \\ \mathbf{g}_\omega \\ \Psi_r \\ \Psi_\theta \\ \omega \end{bmatrix}$$

设 I 为 $(N+1) \times (N+1)$ 阶单位矩阵, 其中,

$$\mathbf{H}_{11} = \frac{1-\nu}{2} \mathbf{A}_{ij}^{(2)} - \Delta \theta^2 \cdot \mathbf{I}, \quad \mathbf{H}_{12} = \frac{\nu-3}{2} \Delta \theta \cdot \mathbf{A}_{ij}^{(1)}, \quad \mathbf{G}_{11} = -\Delta \theta^2 \cdot \mathbf{I},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{15} &= \frac{-1-\nu}{2} \Delta\theta \cdot \mathbf{A}_{ij}^{(1)}, \quad \mathbf{H}_{21} = \frac{3-\nu}{2} \Delta\theta \cdot \mathbf{A}_{ij}^{(1)}, \quad \mathbf{H}_{22} = \mathbf{A}_{ij}^{(2)} - \frac{(1-\nu)}{2} \Delta\theta^2 \cdot \mathbf{I}, \\ \mathbf{G}_{22} &= \frac{\nu-1}{2} \Delta\theta^2 \cdot \mathbf{I}, \quad \mathbf{G}_{24} = \frac{-1-\nu}{2} \Delta\theta \cdot \mathbf{A}_{ij}^{(1)}, \quad \mathbf{H}_{33} = \mathbf{A}_{ij}^{(2)}, \quad \mathbf{G}_{33} = -\Delta\theta^2 \cdot \mathbf{I} \end{aligned}$$

上述式中($\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$)。最后再将边界条件(3-9)中的系数表达式替换式(3-15)矩阵 $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ 中相应的首行和末行, 根据以上公式, 笔者用 FORTRAN 语言编写了通用程序 DQMEI 用于 DQM 计算各向同性单材料 Reissner 板切口奇性指数 λ 及其相应的位移特征角函数 $\psi_r(\theta), \psi_\theta(\theta)$ 和 $\omega(\theta)$ 。

3.3 数值算例分析

3.3.1 单材料板切口应力奇性指数计算

在边界条件建模中, 通过系统组合文中提出的四类基本边界模式(I型简支、II型简支、固支、自由), 可建立十类典型边界约束体系组合, 本章仅讨论在双侧I型简支边界条件下各向同性单材料板切口的应力奇异性。

基于等间距均匀网格离散模式, 离散单元总数取 $N=16$, 采用微分求积法(DQM)对控制方程式(3-15)及边界约束式(3-9)进行数值求解, 可获得 Reissner 板V形切口处应力奇异性指数在双侧I型简支边界条件下的数值解, 如表(3-1)所示其随张角 α 的变化规律。

根据位移场正则性判据, 式(3-5)要求特征值 λ 必须满足 $\lambda > 0$ 的约束条件, 而式(3-2)揭示了应力奇异性存在的阈值特性: 仅当 λ 值处于(0,1)区间时, 切口尖端处才会表现出应力奇异性。当 $\lambda > 1$ 时, 应力场的奇异性将消失。文献^[31]中只列出了在(0,1)区间范围内的奇性指数。本文可列出若干高阶项非奇异指数, 目前对各向同性 Reissner 板切口尚缺乏这些解。

表 3-1 双侧I型简支边界条件下应力奇性指数

α	λ_1		λ_2	
	本文	文献 ^[31]	本文	文献 ^[31]
360°	0.000052	0.000052	0.499999	0.499999
340°	0.058824	0.058824	0.470588	0.470588
320°	0.125001	0.125001	0.437500	0.437500
300°	0.200001	0.200001	0.400001	0.400001
280°	0.285715	0.285715	0.357143	0.357143
260°	0.307692	0.307692	0.384616	0.384616
240°	0.250001	0.250001	0.500001	0.500001
220°	0.181818	0.181818	0.636364	0.636364

表 3-1(续) 双侧I型简支边界条件下应力奇性指数

α	λ_1		λ_2	
	本文	文献 ^[31]	本文	文献 ^[31]
200°	0.099999	0.099999	0.800000	0.800000
180°	0.000018	0.000018	0.999999	/
160°	0.125000	0.125000	/	/
140°	0.285714	0.285714	/	/
120°	0.500000	0.500000	/	/
100°	0.800000	0.800000	/	/
90°	/	/	/	/

表 3-1 双侧I型简支边界条件下应力奇性指数(续)

α	λ_3		λ_4	
	本文	文献 ^[31]	本文	文献 ^[31]
360°	0.500000	0.500000	0.500000	0.500000
340°	0.529411	0.529411	0.588240	0.588240
320°	0.562500	0.562500	0.687505	0.687505
300°	0.600000	0.600000	0.800000	0.800000
280°	0.642858	0.642858	0.928577	0.928577
260°	0.692308	0.692308	1.000000	/
240°	0.750000	0.750000	1.000000	/
220°	0.818182	0.818182	1.000000	/
200°	0.900000	0.900000	1.000000	/
180°	1.000000	/	1.000000	/

表 3-1 双侧I型简支边界条件下应力奇性指数(续)

α	λ_5	λ_6	λ_7
340°	1.000000	1.058824	1.117651
320°	0.999999	1.125000	1.249970
300°	1.000000	1.200000	1.399999
280°	1.000000	1.285714	1.571429
260°	1.076924	1.384615	1.692306
240°	1.250001	1.500000	1.749995
220°	1.454539	1.636364	1.818187
200°	1.700000	1.800000	1.899921
180°	2.000000	2.000000	3.000000

3.3.2 双材料板切口应力奇性指数计算

基于 $N=20$ 离散单元配置的 DQM 数值试验(见表 3-2), 本研究针对双侧I型简支边界条件开展了多尺度弹性梯度效应分析: 通过构建弹性模量梯度比 ($E_1/E_2=1 \rightarrow 100$)的参数化模型, 系统揭示了切口奇性指数的梯度响应机制。计算数据表明: (1)在等刚度工况($E_1/E_2=1$)下, 所得奇性指数与各向同性 Reissner 单材料板解^[31]完全吻合; (2)当材料刚度梯度增强至($E_1/E_2=100$)时, 奇性指数呈现显著强化现象, 这源于界面约束效应引发的应力场重分布机制。

表 3-2 双材料双侧I型简支边界条件下应力奇性指数

λ	E_1/E_2	$\theta_1=180^\circ$ $\theta_3=180^\circ$	文献 ^[31]	$\theta_1=170^\circ$ $\theta_3=170^\circ$	文献 ^[31]	$\theta_1=160^\circ$ $\theta_3=160^\circ$	文献 ^[31]
λ_1	1	0.000001	0.000052	0.058852	0.058824	0.125169	0.125000
	10	0.000818	0.000013	0.033845	0.034517	0.068472	0.069634
	100	0.001365	0.000001	0.011742	0.012000	0.023132	0.023736
λ_2	1	0.499965	0.500000	0.470588	0.470588	0.437656	0.437500
	10	0.500000	0.500000	0.494433	0.495583	0.491362	0.493741
	100	0.499992	0.500000	0.509192	0.512160	0.521160	0.527219
λ_3	1	0.500000	0.500000	0.529412	0.529412	0.562450	0.563000
	10	0.500001	0.500000	0.529412	0.529412	0.562450	0.562500
	100	0.500000	0.500001	0.529412	0.529412	0.562480	0.562500
λ_4	1	0.500000	0.500004	0.588241	0.588239	0.687275	0.687505
	10	0.500001	0.500003	0.574210	0.575027	0.660614	0.662189
	100	0.500001	0.500003	0.563905	0.564153	0.641545	0.642010

表 3-2 双材料双侧I型简支边界条件下应力奇性指数(续)

λ	E_1/E_2	$\theta_1=150^\circ$ $\theta_3=150^\circ$	文献 ^[31]	$\theta_1=140^\circ$ $\theta_3=140^\circ$	文献 ^[31]
λ_1	1	0.199992	0.200000	0.285713	0.285715
	10	0.100163	0.101677	0.123866	0.125308
	100	0.033058	0.033891	0.040337	0.041126
λ_2	1	0.399998	0.400000	0.357143	0.357143
	10	0.495136	0.498863	0.512130	0.517239
	100	0.538594	0.547664	0.564722	0.576447
λ_3	1	0.600000	0.600000	0.642857	0.642857
	10	0.600000	0.600000	0.642857	0.642857
	100	0.600000	0.600000	0.642857	0.642857
λ_4	1	0.800011	0.800000	0.928572	0.928577
	10	0.761232	0.763511	0.879556	0.882042
	100	0.735283	0.735892	0.848393	0.849092

上述算例分析了对称各向同性双材料板切口的应力奇异性，与文献高度一致，证明了微分求积法的准确性。下面着重分析不同切口角度情况下，各向同性双材料板切口的应力奇异性。图 3-4 到图 3-5 表示在自由-自由边界条件且泊松比相同的情况下，不同的切口角度对应不同的弹性模量比值的应力奇异性指数分析。

图 3-4 显示了由两种不同材料($\alpha_1 + \alpha_2 = \pi$)组成的半平板界面角处的应力奇异性强度。由图可知，当 α_1 角度在 $20^\circ \sim 40^\circ$ 之间时，应力奇异性指数会有一个最小值，特殊的是，当弹性模量比值达到最大时($E_1: E_2 = 10000$)，此时的应力奇异性指数会随着 α_1 的角度单调递增。值得提起的是，当 α_1 的角度达到 120° 时，应力出现非奇异性。

断裂力学的研究人员经常对有裂纹张角为 2π 的楔块进行研究。图 3-5 绘制

了两种不同材料($\alpha_1 + \alpha_2 = 2\pi$)组成的全平板界面角处的应力奇异指数变化。在 α_1 角度大于 π 的区域,应力奇异性指数随着弹性模量比值的增大而增大,而在其他区域,这种趋势却是相反的。此外,对于 α_1 角度大于 330° 时,应力奇异性指数对于弹性模量的比值几乎不敏感。在 α_1 角度在 210° 至 240° 之间的区域,会有一个应力奇异性指数最大值。

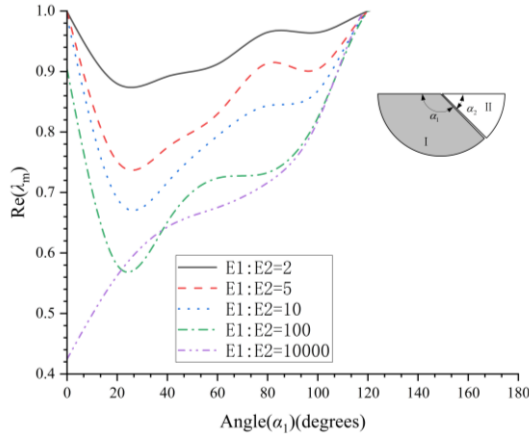


图 3-4 半平板切口($\alpha_1 + \alpha_2 = \pi$)下不同弹性模量比的应力奇异性

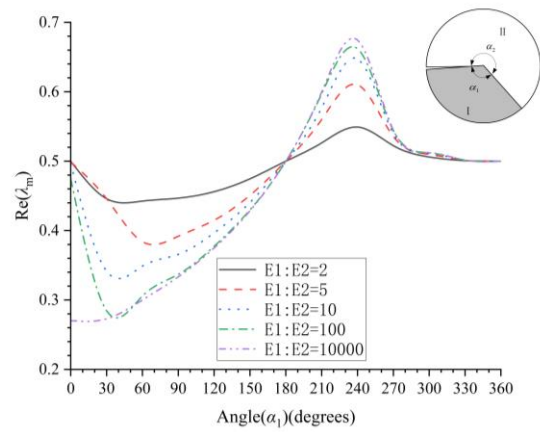


图 3-5 全平板切口($\alpha_1 + \alpha_2 = 2\pi$)下不同弹性模量比的应力奇异性

3.3.3 锥形粘合接头双材料板切口应力奇性指数计算

图 3-6 显示了粘合锥形接头的示意图,该接头比传统接头更可取,因为使用这些接头能够减轻重量,因此研究粘合锥形接头的应力奇异性很有必要。极坐标系(r, θ)便于描述双材料饼形楔块的变形行为,该楔块在 O 点形成(由于锥形粘附),示意图如下图所示。材料 2 始终被视为半空间,材料 1 的 O 点处的楔形孔径角的变化以表示锥形粘附物的各种接触角。

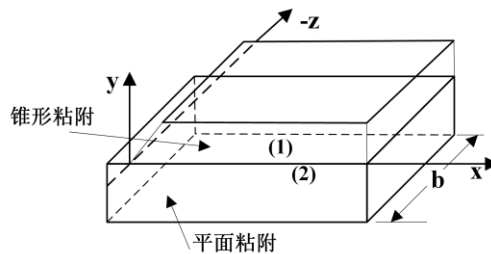


图 3-6 粘合锥形接头示意图

计算出的前两阶奇性指数 λ_1, λ_2 相对于弹性模量比的变化($k = E_1/E_2$),对

于各种 θ_1 如下图所示。在每个图中，如前所述，材料 2 在 O 点处的楔形孔径角固定在值 π ，而材料 1 的相应角度为 θ_1 ，变化以表示锥形粘附物的各种接触角，其中 $0 \leq \theta_1 \leq \pi/2$ 。在下图中，左半部分(即 $k < 1$)说明了锥形黏附材料比扁平对应物更软的情况，而右半部分(即 $k > 1$)则描绘了相反的情况。

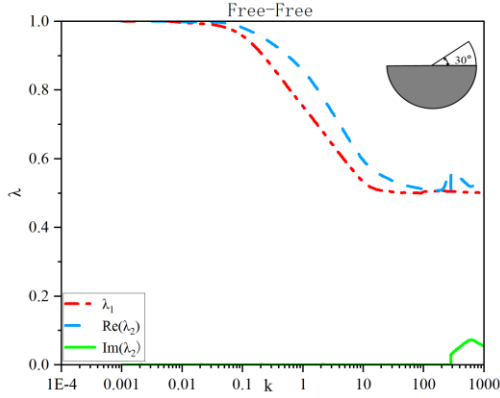


图 3-7a 30°自由-自由边界

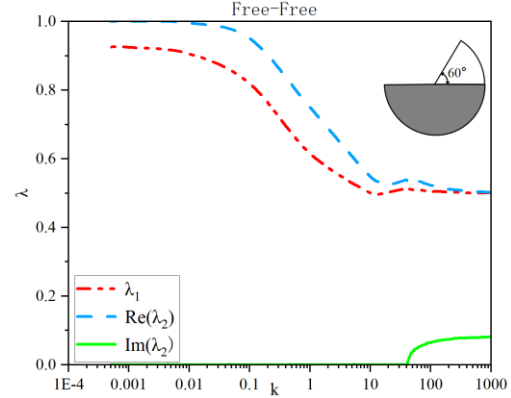


图 3-7b 60°自由-自由边界

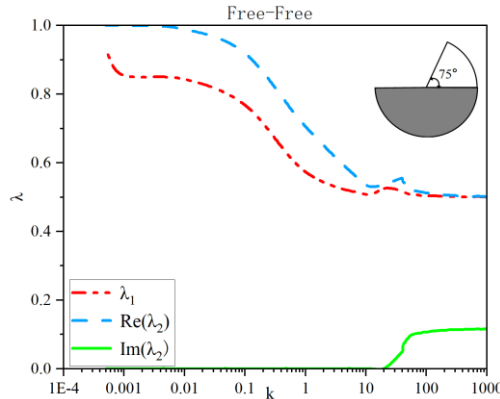


图 3-7c 75°自由-自由边界

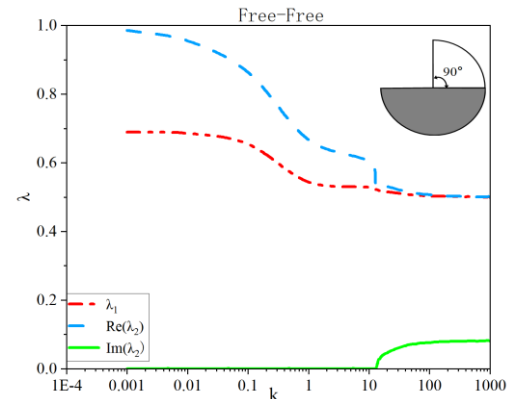


图 3-7d 90°自由-自由边界

图 3-7a 显示对于切口(自由边界-自由边界情况)和 $\theta_1 = 30^\circ$ ，计算出的前两阶特征值 λ_1 , λ_2 单调减小。对于第一阶应力奇性指数 λ_1 ，在 $k=k_{\text{基材裂纹}}=90$ (近似值)时， $\lambda_1 \approx 0.5$ ，这表明裂纹在缺口前沿开始，然后在适当的远端载荷水平下传播到下面的扁平粘附物中。此后 λ_1 会出现小幅增加，再而重新减小到 0.5，此时 λ_1 达到 0.5 的 k 值称为 $k_{\text{界面裂纹}}$ 。($k_{\text{界面裂纹}}=2900$ 时， $\lambda_1 \approx 0.5$)这种情况表明，裂纹在缺口前沿开始，然后在适当的远端载荷水平下沿着锥形节理界面扩展；对于第二阶应力奇性指数 λ_2 ，在 $k=284$ 之前， λ_2 为实数，在 $k=284$ 之后， λ_2 变为

复数。这种情况表明，随着 k 值超越临界阈值，应力奇性指数发生实-复模态相变，引发 V 形切口尖端邻域内奇异性指数的周期性振荡现象。该演化机制源于复奇性指数虚部导致的应力场相位调制效应。对于图 3-7b、图 3-7c、图 3-7d 所示的 $\theta_1 = 60^\circ$ 、 $\theta_1 = 75^\circ$ 和 $\theta_1 = 90^\circ$ 的情况也有类似的规律。有趣的是， $\theta_1 = 60^\circ$ 时， λ_2 的应力振荡点为 $k=45$ ， $\theta_1 = 90^\circ$ 时， λ_2 的应力振荡点为 $k=14$ ，由此可知应力振荡点随着 θ_1 的增加而逐渐减小。

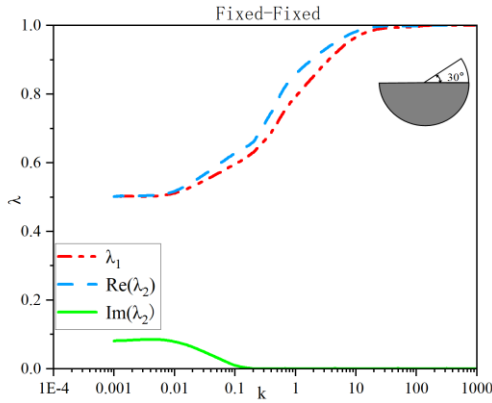


图 3-8a 30°固定-固定边界

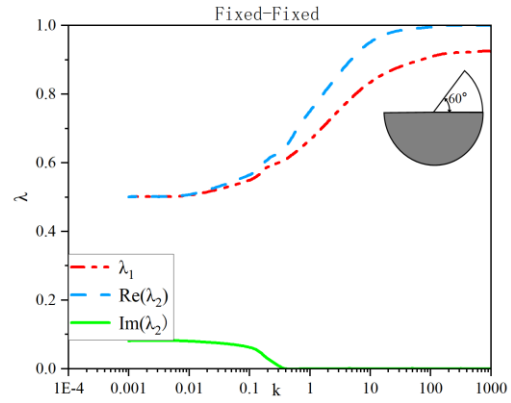


图 3-8b 60°固定-固定边界

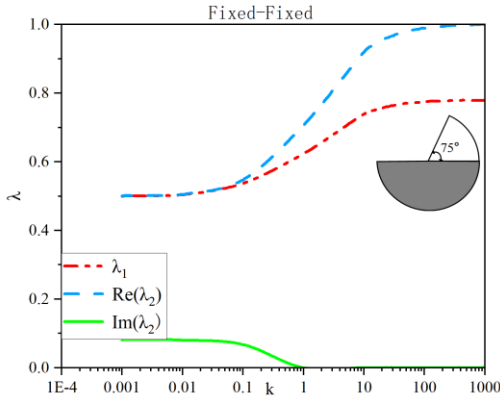


图 3-8c 75°固定-固定边界

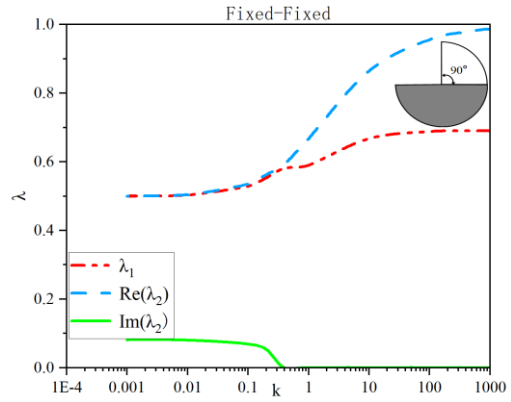


图 3-8d 90°固定-固定边界

图 3-8a, 3-8b, 3-8c, 3-8d 分别显示对应 $\theta_1 = 30^\circ$ 、 $\theta_1 = 60^\circ$ 、 $\theta_1 = 75^\circ$ 、 $\theta_1 = 90^\circ$ 的反切口(固定边界-固定边界情况)，计算出的前两阶特征值 λ_1 、 λ_2 单调增加。对于第一阶应力奇性指数 λ_1 ，最小值均为 0.5，但随着 θ_1 的增加，最大值会从 $\lambda_1 = 1.0$ 逐渐减小到 $\lambda_1 = 0.69$ 。对于第二阶应力奇性指数 λ_2 ，最小值均为 0.5，最大值均为 1.0。但值得注意的是， $\theta_1 = 30^\circ$ 时， λ_2 的应力振荡点为 $k=0.1$ ， $\theta_1 = 60^\circ$ 时， λ_2 的应力振荡点为 $k=0.2$ ， $\theta_1 = 90^\circ$ 时， λ_2 的应力振荡点为 $k=0.3$ ，

由此可知应力振荡点随着 θ_1 的增加而逐渐增加。

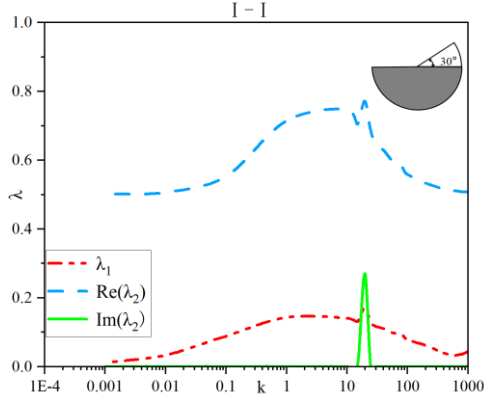


图 3-9a 30°I型简支-I型简支边界

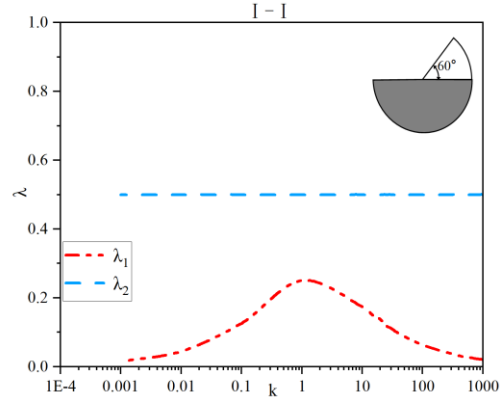


图 3-9b 60°I型简支-I型简支边界

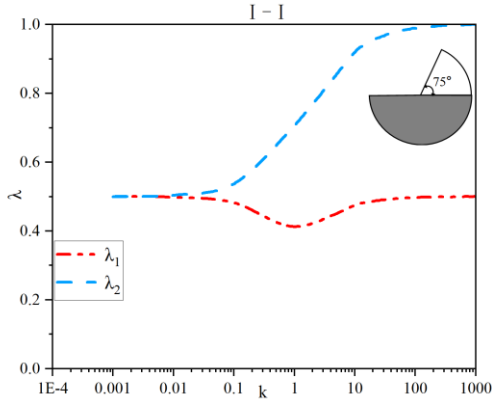


图 3-9c 75°I型简支-I型简支边界

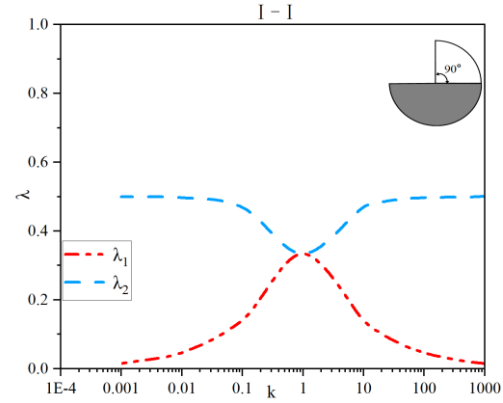


图 3-9d 90°I型简支-I型简支边界

图 3-9a, 3-9b, 3-9c, 3-9d 分别显示对应 $\theta_1 = 30^\circ$ 、 $\theta_1 = 60^\circ$ 、 $\theta_1 = 75^\circ$ 、 $\theta_1 = 90^\circ$ 的切口(I型简支边界-I型简支边界情况)。对于第一阶应力奇性指数 λ_1 ，三种情况的 λ_1 都呈现先单调递增后单调递减的趋势(因此会出现最大值的尖点)，其中在 $\theta_1 = 30^\circ$ 的情况，尖点为 $k=20$ ， $\theta_1 = 60^\circ$ 和 $\theta_1 = 90^\circ$ 的尖点都是 $k=1$ 。对于第二阶应力奇性指数 λ_2 ，在 $\theta_1 = 30^\circ$ 的时候， λ_2 有且仅有一个应力振荡点($k=20$ 处)，即该点 λ_2 为复数，其他情况均为实数。在 $\theta_1 = 60^\circ$ 的时候， λ_2 为实数，且值稳定为 0.5。在 $\theta_1 = 90^\circ$ 的时候， λ_2 为实数，呈现先单调递减后单调增加的趋势(出现最小值的尖点)， λ_2 的尖点值与 λ_1 的尖点值几乎重合。

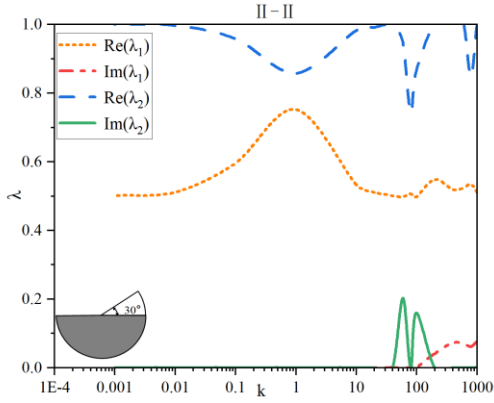


图 3-10a 30°II型简支-II型简支边界

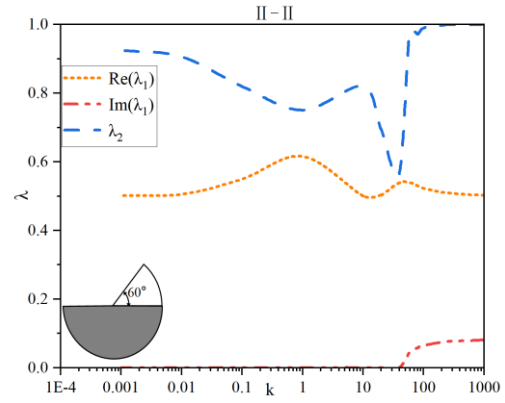


图 3-10b 60°II型简支-II型简支边界

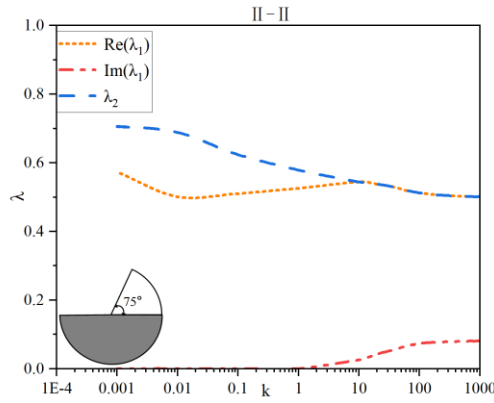


图 3-10c 75°II型简支-II型简支边界

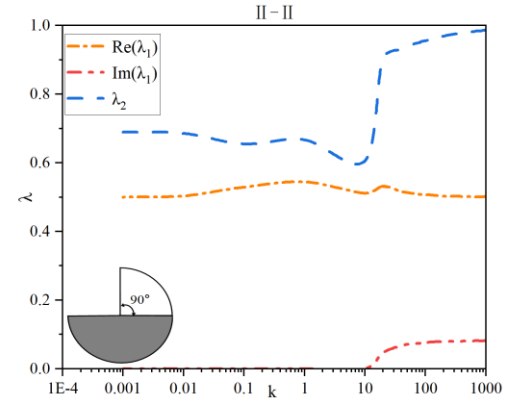


图 3-10d 90°II型简支-II型简支边界

图 3-10a, 3-10b, 3-10c, 3-10d 分别显示对应 $\theta_1 = 30^\circ$ 、 $\theta_1 = 60^\circ$ 、 $\theta_1 = 75^\circ$ 、 $\theta_1 = 90^\circ$ 的切口(II型简支边界-II型简支边界情况)。对于第一阶应力奇性指数 λ_1 ，三种情况的 λ_1 都在 $k=1$ 的时候有最大值，且最大值随 θ_1 的增加而减小。同时，三种情况的 λ_1 都出现应力振荡点，在应力振荡点之前， λ_1 为实数，在应力振荡点之后， λ_1 为复数。在 $\theta_1 = 30^\circ$ 的时候，应力振荡点为 $k=200$ ，在 $\theta_1 = 60^\circ$ 的时候，应力振荡点为 $k=60$ ，在 $\theta_1 = 90^\circ$ 的时候，应力振荡点为 $k=20$ 。由此可知，随着 θ_1 的增加，应力振荡点减小。对于第二阶应力奇性指数 λ_2 ，在 $\theta_1 = 30^\circ$ 的时候， λ_2 有两个应力振荡点，分别为 $k=100$ 和 $k=60$ 处，此时 λ_2 为复数。在其他情况， λ_2 均稳定为实数。同时，在 $k=1000$ 之后，三种情况的 λ_2 的值均趋向于 1.0。

3.4 本章小结

本文建立了 Reissner 板切口尖端奇性指数的特征微分方程，利用微分求积法来求解微分方程从而求得奇性指数。本文提供了三个数值算例，通过数值算例的求解，我们可以得出以下结论：

(1)通过典型算例的数值验证，基于 $N=20$ 离散单元的 DQM 求解方案在单相/双相各向同性板切口应力奇性指数问题中展现出优越性能，在离散单元数显著降低的同时，计算出的结果还与文献高度吻合。并且在单材料 Reissner 板切口的应力奇性指数计算中，本文可列出若干高阶项非奇异指数，目前对各向同性 Reissner 板切口尚缺乏这些解。

(2)对于自由径向边界条件的各向同性双材料 Reissner 板切口，不同形状的板对应不同的弹性模量比值的应力奇性指数都不尽相同，本文均给出了具体数值解。

(3)对于各向同性锥形粘合接头双材料 Reissner 板切口,不同边界条件对应不同切口角度的奇性指数都不尽相同，在自由径向边界条件、固定径向边界条件下，第 2 阶奇性指数 λ_2 会产生振荡效应，即由实数转化为复数。I型-I型简支条件下，基本趋于平稳，仅仅在锥形黏结材料为 30° 时， λ_2 有且仅有一个应力振荡点($k=20$ 处)，即该点 λ_2 为复数，其他情况均为实数。II型-II型简支条件下， λ_1 都有应力振荡点，而 λ_2 仅仅在黏结材料为 30° 时有应力振荡点，其他情况均为实数。

第4章 功能梯度材料中厚度板切口应力奇异性

本章构建了功能梯度中厚板切口奇异性分析的梯度自适应数值求解体系：基于柱坐标系三维弹性本构关系与渐近位移场分解技术，推导出关于奇性指数 λ 的变系数本征微分方程组，通过引入界面位移-应力连续条件，建立包含梯度特性的径向边界条件数学表征，将物理约束转换为特征角函数与应力奇性指数的耦合特征微分方程组。在此基础上，采用等节点分布离散技术，将特征微分方程转换为标准型广义代数特征方程组。经过自主研发的 FORTRAN 计算程序解出相应边界条件下双材料功能梯度中厚板切口尖端处应力奇性指数。

4.1 材料属性

功能梯度中厚板的材料特性可通过组分材料属性与体积分数的函数关系进行数学表征，本研究按照沿板的厚度呈幂律分布^[74]。沿板厚 z 方向的材料属性 $P(z)$ 表示为：

$$P(z) = P_c V_c + P_m (1 - V_c) \quad (4-1)$$

功能梯度材料幂律分布的陶瓷体积分数为：

$$V_c = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p \quad (4-2)$$

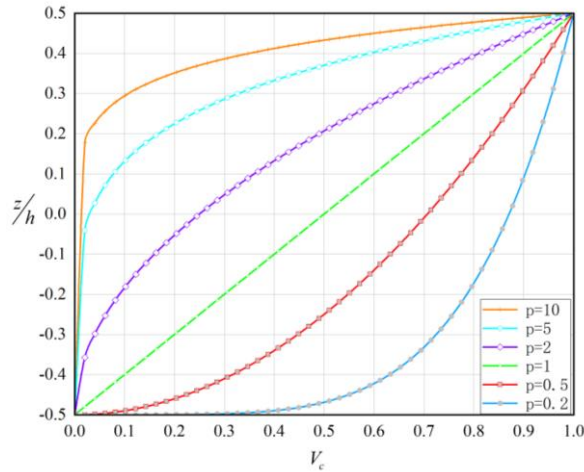


图 4-1 基于幂律分布的陶瓷相体积分数随厚度方向变化曲线

式中 $p \in [0, +\infty)$ 为梯度控制参数。根据该模型，功能梯度板上下表面呈现明确的材料组分特征：(1)顶面($z=h/2$)为纯陶瓷相($V_c=1$)；(2)底面($z=-h/2$)为纯金属相($V_c=0$)。梯度系数 p 对材料参数分布形态具有决定性影响，如图 4-1 直观展示

了梯度参数 p 对材料梯度形态的调控规律，数值分析表明：当 $p \rightarrow 0$ 时，结构整体转化为各向同性陶瓷板；当 $p \rightarrow \infty$ 时，材料体系退化为纯金属板；而在 $p=1$ 的典型工况下，体积分数呈现线性梯度分布特征。

本研究对象为含有具有 V 形切口特征的等厚度功能梯度扇形板，几何构型如图 4-2 所示，柱坐标系中的 ρ - θ 平面应严格与板的结构中性面对齐。该板的弹性模量沿厚度变化呈幂律梯度分布，为数学表征式(4-3)的连续梯度函数：

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p \quad (4-3)$$

在本构参数体系中，功能梯度材料的等效弹性模量由金属相 E_m 和陶瓷相 E_c 及梯度指数 p 共同决定。梯度指数 p 决定了弹性模量沿厚度的分布。设定泊松比为定值 $\nu = 0.3$ 。

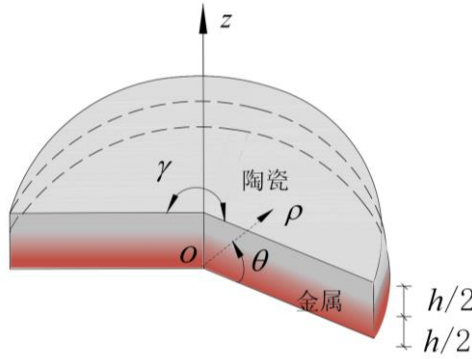


图 4-2 含 V 形切口的功能梯度板扇形板

4.2 切口奇性方程组的建立

基于 Reissner 中厚板理论框架，板结构变形场由三个独立广义位移参数表征：中面法向挠度 ω 、以及变形前正交于中面的直线段在 $o\rho z$ 和 $o\theta z$ 平面内的转角分量 u_ρ 、 u_θ 。该理论体系下，板体内部位移场分布呈现如下特征：横向挠度 $\bar{\omega}$ 沿厚度方向保持恒定，而面内位移分量 $\bar{u}_\rho$ 、 $\bar{u}_\theta$ 随厚度坐标呈线性变化，其数学表达式可以表征为：

$$\bar{u}_\rho = zu_\rho, \bar{u}_\theta = zu_\theta, \bar{\omega} = \omega \quad (4-4)$$

柱坐标系下的几何方程为：

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_\rho \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{\rho\theta} \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{\rho z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial \bar{u}_\rho / \partial \rho \\ \bar{u}_\rho / \rho + \partial \bar{u}_\theta / \rho \partial \theta \\ \partial \bar{\omega} / \partial z \\ \partial \bar{u}_\rho / \rho \partial \theta + \partial \bar{u}_\theta / \partial \rho - \bar{u}_\theta / \rho \\ \partial \bar{\omega} / \rho \partial \theta + \partial \bar{u}_\theta / \partial z \\ \partial \bar{u}_\rho / \partial z + \partial \bar{\omega} / \partial \rho \end{Bmatrix} \quad (4-5)$$

将(4-4)式代入(4-5)式可得：

$$\begin{aligned} \varepsilon_\rho &= z \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}, \varepsilon_\theta = \frac{z}{\rho} u_\rho + \frac{z}{\rho} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}, \varepsilon_z = 0, \\ \gamma_{\rho\theta} &= \frac{z}{\rho} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + z \frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} - \frac{z}{\rho} u_\theta, \\ \gamma_{\theta z} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} + u_\theta, \gamma_{\rho z} = u_\rho + \frac{\partial \omega}{\partial \rho} \end{aligned} \quad (4-6)$$

平面应力问题的本构方程为：

$$\begin{cases} \sigma_{\rho\rho} = E(\varepsilon_\rho + \mu\varepsilon_\theta) / (1 - \mu^2), \\ \sigma_{\theta\theta} = E(\varepsilon_\theta + \mu\varepsilon_\rho) / (1 - \mu^2), \\ \sigma_{\rho\theta} = E\gamma_{\rho\theta} / [2(1 + \mu)] \end{cases} \quad (4-7)$$

将应变分量(4-6)式代入(4-7)式中，可得板面内应力分量的表达式为：

$$\begin{cases} \sigma_{\rho\rho} = \frac{E(z)}{1 - \mu^2} (z \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \mu \frac{z}{\rho} u_\rho + \mu \frac{z}{\rho} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}), \\ \sigma_{\theta\theta} = \frac{E(z)}{1 - \mu^2} (\frac{z}{\rho} u_\rho + \frac{z}{\rho} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \mu z \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}), \\ \sigma_{\rho\theta} = \frac{E(z)}{2(1 + \mu)} (\frac{z}{\rho} \frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} + z \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} - \frac{z}{\rho} u_\theta) \end{cases} \quad (4-8)$$

按能量等效原则可得板的横向切应力 $\sigma_{\rho z}$ 、 $\sigma_{\theta z}$ 分别为：

$$\begin{cases} \sigma_{\rho z} = G(z)(u_\rho + \frac{\partial \omega}{\partial \rho}), \\ \sigma_{\theta z} = G(z)(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} + u_\theta) \end{cases} \quad (4-9)$$

其中， $G(z)$ 为剪切模量。

板内的弯矩、剪力与应力之间的关系为：

$$(M_\rho, M_\theta, M_{\rho\theta}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z(\sigma_{\rho\rho}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{\rho\theta}) dz \quad (4-10a)$$

$$(Q_\rho, Q_\theta) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{\rho z}, \sigma_{\theta z}) dz \quad (4-10b)$$

其中， h 为板厚。

记：

$$\bar{E}_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z)}{1-\mu^2} z^i dz \quad (4-11a)$$

$$\bar{D}_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\mu E(z)}{1-\mu^2} z^i dz \quad (4-11b)$$

$$\bar{G}_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G(z) z^i dz \quad (4-11c)$$

这里 $\bar{E}_i, \bar{D}_i, \bar{G}_i$ 的定积分计算采用复合梯形公式^[75]进行求解。将(4-8)式、(4-9)式代入(4-10)式，板内弯矩和剪力的表达式为：

$$\begin{cases} M_\rho = \bar{E}_2 \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \bar{D}_2 \frac{u_\rho}{\rho} + \frac{\bar{D}_2}{\rho} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}, \\ M_\theta = \bar{E}_2 \frac{u_\rho}{\rho} + \frac{\bar{E}_2}{\rho} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \bar{D}_2 \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}, \\ M_{\rho\theta} = \bar{G}_2 \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} - \frac{u_\theta}{\rho} \right), \\ Q_\rho = \bar{G}_0 \left(u_\rho + \frac{\partial \omega}{\partial \rho} \right), \\ Q_\theta = \bar{G}_0 \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} + u_\theta \right) \end{cases} \quad (4-12)$$

不计体力时，板的平衡微分方程为：

$$\begin{cases} M_{\rho, \rho} + M_{\rho\theta, \theta} / \rho + (M_\rho - M_\theta) / \rho - Q_\rho = 0, \\ M_{\rho\theta, \rho} + M_{\theta, \theta} / \rho + 2M_{\rho\theta} / \rho - Q_\theta = 0, \\ Q_{\rho, \rho} + Q_\rho / \rho + Q_{\theta, \theta} / \rho = 0 \end{cases} \quad (4-13)$$

将切口尖端的位移场取如下的级数渐近展开，即：

$$\begin{cases} u_\rho = \sum_{k=1}^N A_k \rho^{\lambda_k} \tilde{u}_{\rho k}(\lambda_k, \theta), \\ u_\theta = \sum_{k=1}^N A_k \rho^{\lambda_k} \tilde{u}_{\theta k}(\lambda_k, \theta), \\ \omega = \sum_{k=1}^N A_k \rho^{\lambda_k} \tilde{\omega}_k(\lambda_k, \theta) \end{cases} \quad (4-14)$$

取(4-14)式3个子式的典型项 $A_k \rho^{\lambda_k} \tilde{u}_{\rho k}(\lambda_k, \theta)$ 、 $A_k \rho^{\lambda_k} \tilde{u}_{\theta k}(\lambda_k, \theta)$ 、 $A_k \rho^{\lambda_k} \tilde{\omega}_k(\lambda_k, \theta)$

简写为 $A \rho^\lambda \tilde{u}_\rho$ 、 $A \rho^\lambda \tilde{u}_\theta$ 、 $A \rho^\lambda \tilde{\omega}$ ，将其联同(4-12)式代入(4-13)式中，化简后可得：

$$\begin{cases} \bar{G}_2 \tilde{u}_\rho'' - (\bar{E}_2 + \bar{G}_2) \tilde{u}_\theta' - \bar{E}_2 \tilde{u}_\rho + \lambda(\bar{D}_2 + \bar{G}_2) \tilde{u}_\theta' + \lambda^2 \bar{E}_2 \tilde{u}_\rho = 0, \\ \bar{E}_2 \tilde{u}_\theta'' + (\bar{E}_2 + \bar{G}_2) \tilde{u}_\rho' - \bar{G}_2 \tilde{u}_\theta + \lambda(\bar{D}_2 + \bar{G}_2) \tilde{u}_\rho' + \lambda^2 \bar{G}_2 \tilde{u}_\theta = 0, \\ \tilde{\omega}'' + \lambda^2 \tilde{\omega} = 0 \end{cases} \quad (4-15)$$

由(4-11)式可得：

$$\bar{D}_i = \mu \bar{E}_i, \bar{G}_i = \frac{1-\mu}{2} \bar{E}_i \quad (4-16)$$

其中， $i=0,1,2$ 。

因此，(4-15)式可转化为单材料功能梯度中厚板切口奇性特征方程组：

$$\begin{cases} (1-\mu) \tilde{u}_\rho'' / 2 - (3-\mu) \tilde{u}_\theta' / 2 - \tilde{u}_\rho + \lambda(1+\mu) \tilde{u}_\theta' / 2 + \lambda^2 \tilde{u}_\rho = 0, \\ \tilde{u}_\theta'' + (3-\mu) \tilde{u}_\rho' / 2 - (1-\mu) \tilde{u}_\theta / 2 + \lambda(1+\mu) \tilde{u}_\rho' / 2 + \lambda^2 (1-\mu) \tilde{u}_\theta / 2 = 0, \\ \tilde{\omega}'' + \lambda^2 \tilde{\omega} = 0 \end{cases} \quad (4-17)$$

4.3 双材料功能梯度中厚度板切口应力奇异性分析

可以将上述方法推广到双材料功能梯度中厚板切口应力奇性指数分析，如图 4-3 所示，双材料功能梯度中厚板切口由 Ω_1 和 Ω_2 两种不同的功能梯度材料组成。

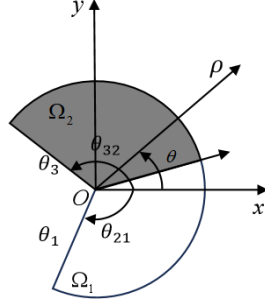


图 4-3 功能梯度双材料中厚度板切口

在交界面 $\theta = \theta_2$ 的连续条件可以表示为：

$$\begin{aligned} u_{\rho}^{(1)} &= u_{\rho}^{(2)}, u_{\theta}^{(1)} = u_{\theta}^{(2)}, \omega^{(1)} = \omega^{(2)}, \\ M_{\theta}^{(1)} &= M_{\theta}^{(2)}, M_{\rho\theta}^{(1)} = M_{\rho\theta}^{(2)}, Q_{\theta}^{(1)} = Q_{\theta}^{(2)} \end{aligned} \quad (4-18)$$

式中右上角的(1)和(2)代表的是材料域 Ω_1 和材料域 Ω_2 。根据线弹性理论内力与位移的关系代入到(4-18)式可以得到以下连续条件的表达式：

$$\begin{cases} u_{\rho}^{(1)} - u_{\rho}^{(2)} = 0, \\ u_{\theta}^{(1)} - u_{\theta}^{(2)} = 0, \\ \omega^{(1)} - \omega^{(2)} = 0, \\ \bar{E}_2^{(1)} u_{\rho}^{(1)} + \bar{E}_2^{(1)} u_{\theta}^{(1)'} - \bar{E}_2^{(2)} u_{\rho}^{(2)} - \bar{E}_2^{(2)} u_{\theta}^{(2)'} - \lambda(-\bar{D}_2^{(1)} u_{\rho}^{(1)} + \bar{D}_2^{(2)} u_{\rho}^{(2)}) = 0, \\ \bar{G}_2^{(1)} u_{\rho}^{(1)'} - \bar{G}_2^{(1)} u_{\theta}^{(1)} - \bar{G}_2^{(2)} u_{\rho}^{(2)'} + \bar{G}_2^{(2)} u_{\theta}^{(2)} - \lambda(-\bar{G}_2^{(1)} u_{\theta}^{(1)} + \bar{G}_2^{(2)} u_{\theta}^{(2)}) = 0, \\ \bar{G}_0^{(1)} \omega^{(1)'} - \bar{G}_0^{(2)} \omega^{(2)'} = 0 \end{cases} \quad (4-19)$$

假设切口的两径向边界($\theta = \theta_1$ 和 $\theta = \theta_3$)上面力自由，则可得自由边界条件为：

$$\begin{cases} \tilde{u}_{\theta}^{(1)'} + \tilde{u}_{\rho}^{(1)} + \lambda\mu^{(1)}\tilde{u}_{\rho}^{(1)} = 0, \\ \tilde{u}_{\rho}^{(1)'} - \tilde{u}_{\theta}^{(1)} + \lambda\tilde{u}_{\theta}^{(1)} = 0, \\ \tilde{\omega}^{(1)'} = 0, \\ \tilde{u}_{\theta}^{(2)'} + \tilde{u}_{\rho}^{(2)} + \lambda\mu^{(2)}\tilde{u}_{\rho}^{(2)} = 0, \\ \tilde{u}_{\rho}^{(2)'} - \tilde{u}_{\theta}^{(2)} + \lambda\tilde{u}_{\theta}^{(2)} = 0, \\ \tilde{\omega}^{(2)'} = 0 \end{cases} \quad (4-20)$$

假设切口的两径向边界($\theta = \theta_1$ 和 $\theta = \theta_3$)为夹支，则可得夹支边界条件为：

$$\begin{cases} \tilde{u}_\rho^{(1)} = 0, \\ \tilde{u}_\theta^{(1)} = 0, \\ \tilde{\omega}^{(1)} = 0, \\ \tilde{u}_\rho^{(2)} = 0, \\ \tilde{u}_\theta^{(2)} = 0, \\ \tilde{\omega}^{(2)} = 0 \end{cases} \quad (4-21)$$

假设切口的两径向边界($\theta = \theta_1$ 和 $\theta = \theta_3$)为简支, 则可得简支边界条件为:

$$\begin{cases} \tilde{u}_\rho^{(1)} = 0, \\ \tilde{u}_\theta^{(1)'} + \tilde{u}_\rho^{(1)} + \lambda\mu^{(1)}\tilde{u}_\rho^{(1)} = 0, \\ \tilde{\omega}^{(1)} = 0, \\ \tilde{u}_\rho^{(2)} = 0, \\ \tilde{u}_\theta^{(2)'} + \tilde{u}_\rho^{(2)} + \lambda\mu^{(2)}\tilde{u}_\rho^{(2)} = 0, \\ \tilde{\omega}^{(2)} = 0 \end{cases} \quad (4-22)$$

双材料功能梯度中厚板切口奇性指数特征微分方程如下:

$$\begin{cases} (1-\mu^{(1)})\tilde{u}_\rho^{(1)''} / 2 - (3-\mu^{(1)})\tilde{u}_\theta^{(1)'} / 2 - \tilde{u}_\rho^{(1)} + \lambda(1+\mu^{(1)})\tilde{u}_\theta^{(1)'} / 2 + \lambda^2\tilde{u}_\rho^{(1)} = 0, \\ \tilde{u}_\theta^{(1)''} + (3-\mu^{(1)})\tilde{u}_\rho^{(1)'} / 2 - (1-\mu^{(1)})\tilde{u}_\theta^{(1)} / 2 + \lambda(1+\mu^{(1)})\tilde{u}_\rho^{(1)'} / 2 + \lambda^2(1-\mu^{(1)})\tilde{u}_\theta^{(1)} / 2 = 0, \\ \tilde{\omega}^{(1)''} + \lambda^2\tilde{\omega}^{(1)} = 0, \\ (1-\mu^{(2)})\tilde{u}_\rho^{(2)''} / 2 - (3-\mu^{(2)})\tilde{u}_\theta^{(2)'} / 2 - \tilde{u}_\rho^{(2)} + \lambda(1+\mu^{(2)})\tilde{u}_\theta^{(2)'} / 2 + \lambda^2\tilde{u}_\rho^{(2)} = 0, \\ \tilde{u}_\theta^{(2)''} + (3-\mu^{(2)})\tilde{u}_\rho^{(2)'} / 2 - (1-\mu^{(2)})\tilde{u}_\theta^{(2)} / 2 + \lambda(1+\mu^{(2)})\tilde{u}_\rho^{(2)'} / 2 + \lambda^2(1-\mu^{(2)})\tilde{u}_\theta^{(2)} / 2 = 0, \\ \tilde{\omega}^{(2)''} + \lambda^2\tilde{\omega}^{(2)} = 0 \end{cases} \quad (4-23)$$

由于切口奇性特征微分方程组(4-23)式中含有 λ^2 项, 是一个非线性特征值问题, 直接求解需要采用迭代算法。现引入:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_\rho^{(1)} &= \lambda\tilde{u}_\rho^{(1)}, \tilde{g}_\theta^{(1)} = \lambda\tilde{u}_\theta^{(1)}, \tilde{g}_\omega^{(1)} = \lambda\tilde{\omega}^{(1)}, \\ \tilde{g}_\rho^{(2)} &= \lambda\tilde{u}_\rho^{(2)}, \tilde{g}_\theta^{(2)} = \lambda\tilde{u}_\theta^{(2)}, \tilde{g}_\omega^{(2)} = \lambda\tilde{\omega}^{(2)} \end{aligned} \quad (4-24)$$

可将(4-23)式的非线性特征方程组转化为线性方程组:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}_{11} &= \frac{1-\mu^{(1)}}{2\theta_{21}^2} \mathbf{A}_{ij}^{(2)} - \mathbf{I}, \mathbf{H}_{12} = \frac{\mu^{(1)}-3}{2\theta_{21}} \mathbf{A}_{ij}^{(1)}, \mathbf{G}_{11} = -\mathbf{I}, \mathbf{G}_{18} = \frac{-1-\mu^{(1)}}{2\theta_{21}} \mathbf{A}_{ij}^{(1)}, \\
 \mathbf{H}_{21} &= \frac{3-\mu^{(1)}}{2\theta_{21}} \mathbf{A}_{ij}^{(1)}, \mathbf{H}_{22} = \frac{\mathbf{A}_{ij}^{(2)}}{\theta_{21}} - \frac{1-\mu^{(1)}}{2} \cdot \mathbf{I}, \mathbf{G}_{22} = \frac{(\mu^{(1)}-1)}{2} \cdot \mathbf{I}, \mathbf{G}_{27} = \frac{-1-\mu^{(1)}}{2\theta_{21}} \mathbf{A}_{ij}^{(1)}, \\
 \mathbf{H}_{33} &= \frac{\mathbf{A}_{ij}^{(2)}}{\theta_{21}^2}, \mathbf{G}_{33} = -\mathbf{I}, \\
 \mathbf{H}_{44} &= \frac{1-\mu^{(2)}}{2\theta_{32}^2} \mathbf{A}_{ij}^{(2)} - \mathbf{I}, \mathbf{H}_{45} = \frac{\mu^{(2)}-3}{2\theta_{32}} \mathbf{A}_{ij}^{(1)}, \mathbf{G}_{44} = -\mathbf{I}, \mathbf{G}_{401} = \frac{-1-\mu^{(2)}}{2\theta_{32}} \mathbf{A}_{ij}^{(1)}, \\
 \mathbf{H}_{54} &= \frac{3-\mu^{(2)}}{2\theta_{32}} \mathbf{A}_{ij}^{(1)}, \mathbf{H}_{55} = \frac{\mathbf{A}_{ij}^{(2)}}{\theta_{32}} - \frac{1-\mu^{(2)}}{2} \cdot \mathbf{I}, \mathbf{G}_{55} = \frac{(\mu^{(2)}-1)}{2} \cdot \mathbf{I}, \\
 \mathbf{G}_{50} &= \frac{-1-\mu^{(2)}}{2\theta_{32}} \mathbf{A}_{ij}^{(1)}, \mathbf{H}_{66} = \frac{\mathbf{A}_{ij}^{(2)}}{\theta_{32}^2}, \mathbf{G}_{66} = -\mathbf{I}
 \end{aligned}$$

上述式中($\theta_{21} = \theta_2 - \theta_1$, $\theta_{32} = \theta_3 - \theta_2$)。最后再将边界条件式(4-20)-式(4-22)和连续交界条件式(4-19)的系数表达式替换式(4-27)中的首行与末行, 根据以上公式, 笔者用 FORTRAN 语言编写了通用程序 DQMEI 用于 DQM 计算, 该程序可一次性计算处双材料功能梯度中厚板切口所有的应力奇性指数 λ 。

4.5 数值算例分析

4.5.1 双材料功能梯度中厚板切口应力奇性分析

令 Ω_1 与 Ω_2 的材料域完全相等, 两个区间 $[-\alpha, 0^\circ]$ 和 $[0^\circ, \alpha]$ ($2\alpha = \gamma$) 上离散单元总数取 $N=12$ 时采用 DQM 法计算出的自由-自由边界条件下切口的应力奇性指数见表 4-1 所列。从表 4-1 中可知, 本文方法与文献^[46]的计算结果基本吻合, 验证了本文方法计算双材料功能梯度中厚板切口应力奇性指数的有效性。

表 4-1 双侧自由边界条件下的切口应力奇性指数

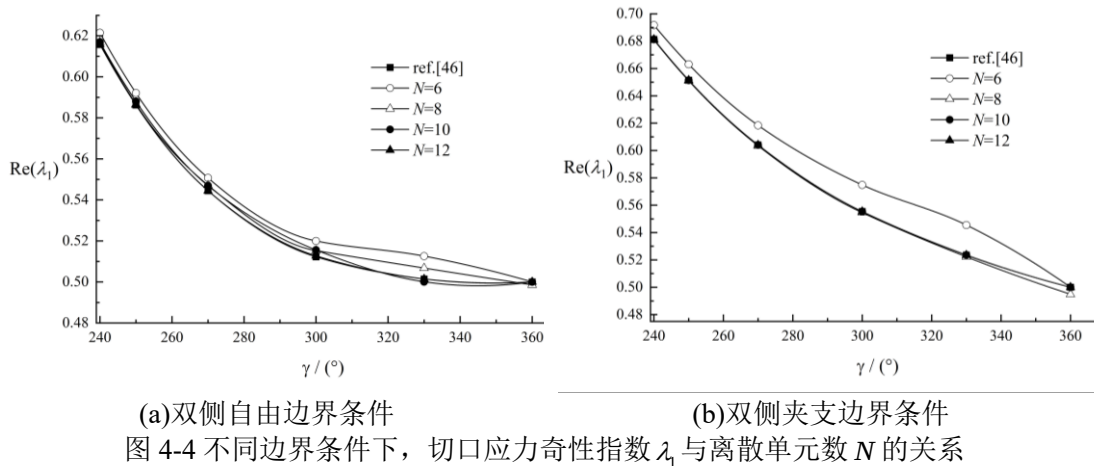
$\gamma/(\circ)$	λ_1		λ_2		λ_3	
	本文方法	文献 ^[46]	本文方法	文献 ^[46]	本文方法	文献 ^[46]
360	0.499996	0.500000	0.499996	0.500000	0.499999	0.500000
330	0.501438	0.501453	0.545454	0.545454	0.598155	0.598191
300	0.512722	0.512221	0.599999	0.600000	0.730264	0.730900
270	0.544465	0.544484	0.666666	0.666666	0.908261	0.908529
250	0.586284	0.586279	0.719999	0.720000	1.000001	1.000000

表 4-1(续) 双侧自由边界条件下的切口应力奇性指数

$\gamma / (^{\circ})$	λ_1		λ_2		λ_3	
	本文方法	文献 ^[46]	本文方法	文献 ^[46]	本文方法	文献 ^[46]
240	0.615787	0.615731	0.7499999	0.750000	/	/
210	0.751991	0.751974	0.857142	0.857142	/	/
200	0.818636	0.818696	0.899999	0.900000	/	/
190	0.900098	0.900044	0.947368	0.947368	/	/
180	/	/	/	/	/	/

在通用程序 DQMEI 中, 通过减小离散单元数来反映离散点数量 N 对其精度的影响, 验证 DQM 法的收敛性。当梯度系数 $p=10.0$ 时, 统一采用均匀布点的方式, 设置离散单元数 $N=6, 8, 10, 12$, 张角 γ 从 240° 变化至 360° , 分别在自由-自由边界条件、夹支-夹支边界条件下, 利用本文方法计算单材料功能梯度中厚板的切口应力奇性指数 λ_1 , 得到结果如图 4-4 所示。

从图中可以观察到, 双侧自由边界条件下, 当离散单元数 $N=6, 8$ 时, 计算值与文献值之间的误差较大。双侧夹支边界条件下, 当离散单元数 $N=6$ 误差很大, 出现失真现象。随着区间单元划分段数的增加, DQM 法计算结果的收敛速度加快, 当离散单元数 $N=12$ 时, 本研究的计算结果与文献^[46]中的计算结果趋于一致。这表明, 离散单元数 N 的不同取值对计算精度有着较大影响。



为了便于数值比较, 在计算单材料功能梯度中厚板的切口应力奇性指数时, 将 DQM 法的计算结果与文献^[46]中插值矩阵法的数值列于表 4-2。可以看出, DQM 法的计算精度高, 并且相对于插值矩阵法, 其对求解区域的离散单元数要少得多, 因此计算效率更高。

表 4-2 给定不同边界条件和不同离散单元数 N 时的切口应力奇性指数

边界条件	λ_1		λ_2		λ_3	
	$N=12$	$N=40^{[46]}$	$N=12$	$N=40^{[46]}$	$N=12$	$N=40^{[46]}$
双侧自由	0.512722	0.512722	0.599999	0.599999	0.730264	0.730264
双侧夹支	0.555367	0.555367	0.599999	0.599999	0.652638	0.652638
双侧简支	0.400000	0.400000	0.600000	0.600000	0.800000	0.800000

表 4-3 FGM 板的材料属性

材料属性	金属		陶瓷	
	Ti	Al	SiC	Al ₂ O ₃
杨氏模量 $E(\text{GPa})$	110	70	290	380
泊松比 μ	0.3	0.3	0.3	0.3

表 4-4 双材料功能梯度板在双侧自由边界条件下的切口应力奇性指数

$\gamma/(^{\circ})$	λ_1		λ_2		λ_3	
	双材料	单材料 ^[46]	双材料	单材料 ^[46]	双材料	单材料 ^[46]
360	0.499980	0.500000	0.499980	0.500000	0.499999	0.500000
330	0.507192	0.501453	0.545454	0.545454	0.592299	0.598191
300	0.515571	0.512221	0.599999	0.600000	0.726888	0.730900
270	0.546979	0.544484	0.666666	0.666666	0.903624	0.908529
250	0.588040	0.586279	0.719999	0.720000	1.000000	1.000000
240	0.616945	0.615731	0.749999	0.750000	0.999900	/
210	0.750629	0.751974	0.857142	0.857142	0.999972	/
200	0.815914	0.818696	0.899999	0.900000	0.999972	/
190	0.895010	0.900044	0.947368	0.947368	/	/
180	0.992171	/	0.999804	/	/	/

表 4-5 双材料功能梯度板在双侧夹支和双侧简支边界条件下的切口应力奇性指数

边界条件	$\gamma/(^{\circ})$	λ_1		λ_2		λ_3	
		双材料	单材料 ^[46]	双材料	单材料 ^[46]	双材料	单材料 ^[46]
夹支-夹支	360	0.499999	0.499999	0.499999	0.499999	0.499999	0.499999
	330	0.538790	0.523515	0.545454	0.545454	0.554112	0.569327
	300	0.560687	0.555368	0.599999	0.600000	0.647693	0.652638
	270	0.606790	0.604045	0.666666	0.666666	0.742978	0.744462
	240	0.680941	0.681239	0.749999	0.750000	0.838111	0.834887
	210	0.795638	0.803999	0.857142	0.857142	0.931255	0.917938
	200	0.844277	0.859324	0.899999	0.900000	0.965408	0.944752
	190	0.896430	0.924049	0.947368	0.947368	/	0.971899
	180	0.947900	/	/	/	/	/
	360	0.499999	0.500000	0.500000	0.500000	0.500007	0.500000
简支-简支	330	0.456182	0.454545	0.545454	0.545454	0.635669	0.636368
	300	0.405273	0.400000	0.599999	0.600000	0.798681	0.800000
	270	0.295285	0.333333	0.371629	0.333333	0.666666	0.666666
	240	0.243594	0.250000	0.506631	0.500000	0.749999	0.750000
	210	0.140400	0.142857	0.716795	0.714286	0.857142	0.857142
	200	0.098415	0.099999	0.801697	0.800000	0.899999	0.900000
	190	0.051848	0.052633	0.895510	0.894737	0.947368	0.947369
	180	0.999993	/	0.999999	/	/	/

对于双材料功能梯度板的研究，考虑了以下两种类型的功能梯度材料：

Ti / Al_2O_3 和 Al / SiC 。FGM 板的材料属性如表 4-3 所示。取梯度系数 $p=10.0$ ，设置不同的边界条件，张角 γ 从 180° 变化至 360° ，两个区间 $[-\alpha, 0^\circ]$ 和 $[0^\circ, \alpha]$ ($2\alpha = \gamma$) 上离散单元总数取 $N=12$ 时，由 DQM 计算出的以上双材料功能梯度中厚板切口应力奇性指数如表 4-4、4-5 所示。经计算发现，在双侧自由边界条件下时双材料功能梯度中厚板切口应力奇性指数有所变化，由单材料的 $\gamma > 250^\circ$ 时才存在三个奇性指数变为 $\gamma > 200^\circ$ 时就存在三个奇性指数且在 $\gamma = 180^\circ$ 时存在两个奇性指数；在双侧夹支边界条件下时，在 $\gamma = 190^\circ$ 处只存在两个奇性指数且在 $\gamma = 180^\circ$ 处存在一个奇性指数；在双侧简支边界条件下时，在 $\gamma = 180^\circ$ 存在两个奇性指数。

4.5.2 功能梯度与纯金属/纯陶瓷混合中厚板应力奇性分析

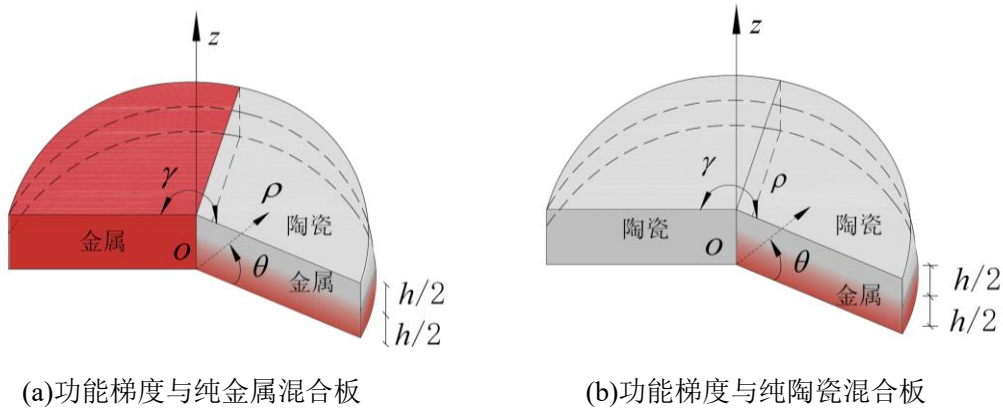


图 4-5 功能梯度双材料中厚度板切口

设板的交界面一侧为功能梯度材料(金属材料为 Ti ，弹性模量为 $110Gpa$ ；陶瓷材料为 Al_2O_3 ，弹性模量为 $380Gpa$)，另一侧为纯金属(Ti)或纯陶瓷材料(Al_2O_3)。材料泊松比为 $\mu_1 = \mu_2 = 0.3$ ；两径向边界都为简支条件；张角 γ 从 180° 变化至 360° 。两个区间 $[-\alpha, 0^\circ]$ 和 $[0^\circ, \alpha]$ ($2\alpha = \gamma$) 上离散单元总数取 $N=12$ 时，由 DQM 计算结果如图 4-6 所示，获得以下结论：(1)当 γ 角度在 $180^\circ \sim 290^\circ$ 时，功能梯度与纯金属/纯陶瓷混合板的一阶应力奇性指数 λ_1 相比于单材料功能梯度板会下降，且功能梯度与纯陶瓷混合板下降的幅度更大。在 γ 角度在 $300^\circ \sim 360^\circ$ 时，功能梯度与纯金属/纯陶瓷混合板的一阶应力奇性指数 λ_1 相比于单材料功能

梯度板会上升，且功能梯度与纯陶瓷混合板上升的幅度更大。(2)随着 γ 角度的增大，功能梯度与纯金属/纯陶瓷混合板的二阶应力奇性指数 λ_2 一直在上升，且功能梯度与纯陶瓷混合板上升的幅度更大，直到 $\gamma=300^\circ$ 时趋于稳定，此后功能梯度与纯金属/纯陶瓷混合板的 λ_2 与单材料功能梯度板并无两异。(3)采用功能梯度与纯金属/纯陶瓷混合板不会改变三阶应力奇性指数 λ_3 ，故未作图形描述。

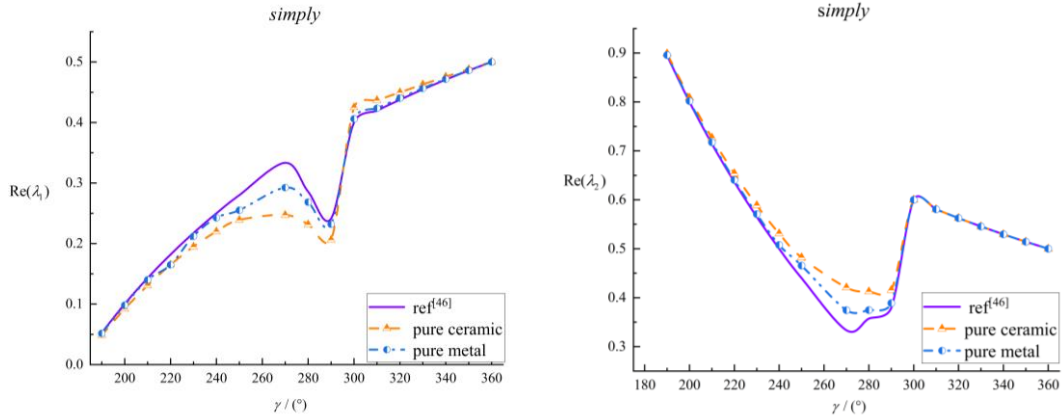


图 4-6 功能梯度与纯金属/纯陶瓷混合板在简支-简支条件下的切口应力奇性指数

当两径向边界都为夹支条件时，经 DQM 法的计算结果如图 4-7 所示。同样可得到如下三个结论：(1)当 γ 角度在 $180^\circ\sim 240^\circ$ 时，功能梯度与纯金属/纯陶瓷混合板的一阶应力奇性指数 λ_1 相比于单材料功能梯度板会下降，且功能梯度与纯陶瓷混合板下降的幅度更大。当 γ 角度在 $240^\circ\sim 330^\circ$ 时，功能梯度与纯金属/纯陶瓷混合板的一阶应力奇性指数 λ_1 相比于单材料功能梯度板会上升，且功能梯度与纯陶瓷混合板上升的幅度更大。值得注意的是，超过 330° 时，陶瓷板与金属板对其影响一致；(2)当 γ 角度在 $180^\circ\sim 260^\circ$ 时，功能梯度与纯金属/纯陶瓷混合板的三阶应力奇性指数 λ_3 相比于单材料功能梯度板会上升，且功能梯度与纯陶瓷混合板上升的幅度更大。当 γ 角度在 $260^\circ\sim 330^\circ$ 时，功能梯度与纯金属/纯陶瓷混合板的三阶应力奇性指数 λ_3 相比于单材料功能梯度板会下降，且功能梯度与纯陶瓷混合板下降的幅度更大，并且超过 330° 时，陶瓷板与金属板对其影响一致。(3)采用功能梯度与纯金属/纯陶瓷混合板不会改变二阶应力奇性指数 λ_2 ，故未作图形描述。

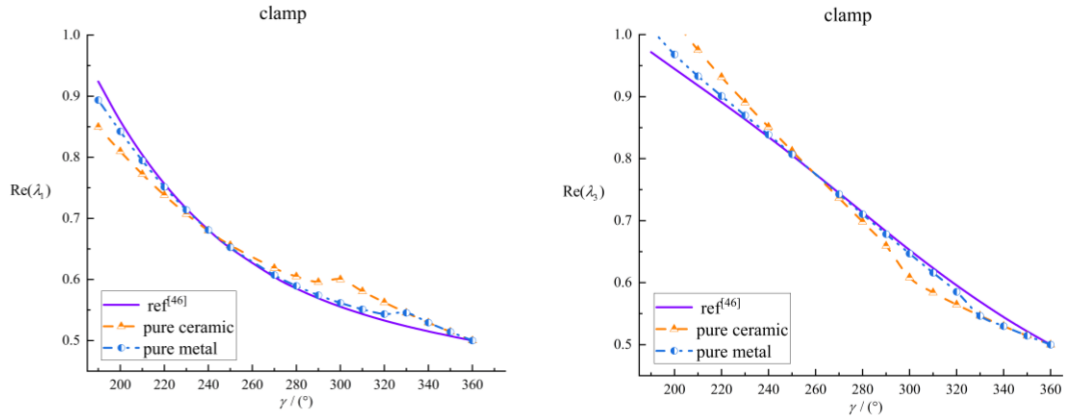


图 4-7 功能梯度与纯金属/纯陶瓷混合板在夹支-夹支条件下的切口应力奇性指数

4.6 本章小结

基于线弹性理论及双相材料功能梯度中厚板切口尖端附近区域位移场的渐进展开，给出了研究双相材料 功能梯度中厚板切口应力奇性指数的一种数值计算方法，并且通过该方法获得了双相材料功能梯度中厚板切口应力奇性指数在不同边界条件下，随切口夹角以及不同材料与功能梯度板混合的变化规律。本文方法具体有以下优势：

(1) 可实现双相功能梯度中厚板结构切口多阶奇异性指数的同步高效求解，其计算值与插值矩阵法相比具有同等精度，且收敛结果较快，证明了求解双相功能梯度中厚板切口应力奇性指数时，DQM 法是一种有效且准确的方法。

(2) 相对于插值矩阵法，DQM 法对求解区域的离散单元数要少得多，计算效率更高。

(3) 分析了在不同切口夹角以及不同材料与功能梯度板混合时，切口应力奇性指数的变化规律，计算结果能提供减小功能梯度与纯金属/纯陶瓷混合板切口应力奇性程度的材料铺设的配置方案。

(4) 依托本研究获得的数值解，在双相材料切口/裂纹区域外围建立有限元/边界元耦合离散模型，可实现切口尖端全应力场的渐进式重构，完整表征切口/裂纹区域应力分布特征。为评价含切口结构的安全性提供依据，具有较高的工程应用价值。

第 5 章 正交各向异性板切口应力奇异性

基于 Mindlin-Reissner 板理论和 Hellinger-Reissner 变分原理，本章建立了正交各向异性板切口/裂纹应力奇异性特征分析地一个新途径，由 Williams 渐近展开出发将正交各向异性板切口/裂纹尖端附近区域地位移场表达为关于奇异性指数和位移角函数的组合形式，将典型模态项嵌入修正 Reissner 控制方程。将奇异性指数求解转化为特征微分方程组问题，再通过微分求积法（DQM）基本理论，将微分算子转化为高精度代数矩阵，建立关于应力奇异性指数 λ 的标准广义代数特征方程，从而实现切口尖端应力奇异性指数的精确求解。

5.1 单相正交各向异性板切口特征方程的建立

图 5-1 给出 V 形切口板体结构在笛卡尔-柱 $(\rho, \theta, z | x, y, z)$ 双坐标体系中的几何构型示意图，该结构中性面分别与 $\rho-\theta$ 和 $x-y$ 坐标平面重合，且各向异性材料主轴系 1, 2, 3 和笛卡尔坐标系的夹角为 θ_0 。

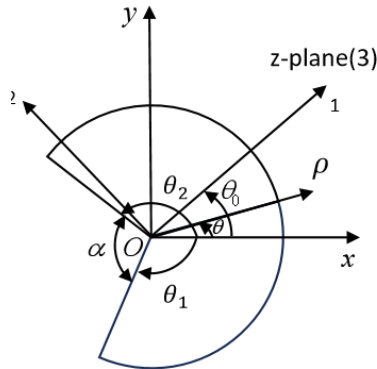


图 5-1 单相正交各向异性板切口的坐标系示意图

在笛卡尔坐标系中，Reissner 板理论具有一个弹性对称平面的材料本构关系：

$$\varepsilon_{xyz} = S_{xyz} \sigma_{xyz} \quad (5-1)$$

S_{xyz} 是材料在笛卡尔坐标系下的柔度矩阵，即：

$$S_{xyz} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & s_{16} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & s_{26} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & 0 & 0 & s_{36} \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & s_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{45} & s_{55} & 0 \\ s_{16} & s_{26} & s_{36} & 0 & 0 & s_{66} \end{bmatrix} \quad (5-2)$$

$S_{ij}(i, j=1,6)$ 是笛卡尔坐标系下材料的弹性柔度系数；在圆柱坐标系 (ρ, θ, z) 下的应力和应变与笛卡尔坐标系 $(x=\rho \cos \theta, y=\rho \sin \theta, z)$ 下的应力和应变坐标变换关系为：

$$\sigma_{xyz} = T_{\sigma} \sigma_{\rho\theta z} \quad (5-3a)$$

$$\varepsilon_{\rho\theta z} = T_{\varepsilon}^{-1} \varepsilon_{xyz} \quad (5-3b)$$

由式(5-1)和式(5-3)可得，在圆柱坐标系 (ρ, θ, z) 下的应变和应力关系为：

$$\varepsilon_{\rho\theta z} = T \sigma_{\rho\theta z} \quad (5-4)$$

其中， $T = T_{\varepsilon}^{-1} S_{xyz} T_{\sigma}$

$$T_{\varepsilon}^{-1} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & sc \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & -sc \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ -2sc & 2sc & 0 & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (5-5)$$

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & -2sc \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & 2sc \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ sc & -sc & 0 & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (5-6)$$

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & 0 & 0 & T_{16} \\ T_{12} & T_{22} & T_{23} & 0 & 0 & T_{26} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} & 0 & 0 & T_{36} \\ 0 & 0 & 0 & T_{44} & T_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_{45} & T_{55} & 0 \\ T_{16} & T_{26} & T_{36} & 0 & 0 & T_{66} \end{bmatrix} \quad (5-7)$$

所以，式(5-4)可以表达为：

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_\rho \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{\theta z} \\ \varepsilon_{\rho z} \\ \varepsilon_{\rho\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & 0 & 0 & T_{16} \\ T_{12} & T_{22} & T_{23} & 0 & 0 & T_{26} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} & 0 & 0 & T_{36} \\ 0 & 0 & 0 & T_{44} & T_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_{45} & T_{55} & 0 \\ T_{16} & T_{26} & T_{36} & 0 & 0 & T_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_\rho \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{\rho z} \\ \sigma_{\rho\theta} \end{bmatrix} \quad (5-8)$$

其中， $T_{ij} (i, j=1,6)$ 为柱坐标系中弹性柔度系数矩阵，矩阵系数 T_{ij} 是 s_{ij} 与关于 $(\theta-\theta_0)$ 的三角函数的乘积。

$$T_{11} = c^4 s_{11} + 2c^2 s^2 s_{12} + 2sc^3 s_{16} + s^4 s_{22} + 2s^3 cs_{26} + s^2 c^2 s_{66} \quad (5-9a)$$

$$T_{12} = s^2 c^2 s_{11} + (s^4 + c^4) s_{12} + (s^3 c - sc^3) s_{16} + s^2 c^2 s_{22} + (sc^3 - s^3 c) s_{26} - s^2 c^2 s_{66} \quad (5-9b)$$

$$T_{13} = c^2 s_{13} + s^2 s_{23} + scs_{36} \quad (5-9c)$$

$$\begin{aligned} T_{16} = & -2sc^3 s_{11} + (2sc^3 - 2s^3 c) s_{12} + (c^4 - 3s^2 c^2) s_{16} \\ & + 2s^3 cs_{22} + (3s^2 c^2 - s^4) s_{26} + (c^2 - s^2) scs_{66} \end{aligned} \quad (5-9d)$$

$$T_{22} = s^4 s_{11} + 2c^2 s^2 s_{12} - 2s^3 cs_{16} + c^4 s_{22} - 2sc^3 s_{26} + s^2 c^2 s_{66} \quad (5-9e)$$

$$T_{23} = s^2 s_{13} + c^2 s_{23} - scs_{36} \quad (5-9f)$$

$$\begin{aligned} T_{26} = & -2s^3 cs_{11} + (2s^3 c - 2sc^3) s_{12} + (3s^2 c^2 - s^4) s_{16} \\ & + 2sc^3 s_{22} + (c^4 - 3s^2 c^2) s_{26} - (c^2 - s^2) scs_{66} \end{aligned} \quad (5-9g)$$

$$T_{33} = s_{33} \quad (5-9h)$$

$$T_{36} = -2scs_{13} + 2scs_{23} + (c^2 - s^2) s_{36} \quad (5-9i)$$

$$T_{44} = c^2 s_{44} - 2css_{45} + s^2 s_{55} \quad (5-9j)$$

$$T_{45} = css_{44} + (c^2 - s^2) s_{45} - scs_{55} \quad (5-9k)$$

$$T_{55} = s^2 s_{44} + 2css_{45} + c^2 s_{55} \quad (5-9l)$$

$$\begin{aligned} T_{66} = & 4s^2 c^2 s_{11} - 8s^2 c^2 s_{12} - 4sc(c^2 - s^2) s_{16} + 4s^2 c^2 s_{22} \\ & + 4sc(c^2 - s^2) s_{26} + (c^2 - s^2)^2 s_{66} \end{aligned} \quad (5-9m)$$

图 5-2 是在直角坐标和圆柱坐标系统的一个 V 形切口板的几何示意图，在其圆柱坐标系描述一个板的内力的物理量。

图中，广义位移： $\{\omega, u_\rho, u_\theta\}$ ，弯矩： $\{M_\rho, M_\theta, M_{\rho\theta}\}$ ，剪切力： $\{Q_\rho, Q_\theta\}$ 。

板的边界条件为：

$$\begin{aligned} \sigma_z = -q, \sigma_{\rho z} = \sigma_{\theta z} = 0, \text{ on } z = h/2 \\ \sigma_z = 0, \sigma_{\rho z} = \sigma_{\theta z} = 0, \text{ on } z = -h/2 \end{aligned} \quad (5-10)$$

其中， q 代表作用于板体表面的法向分布载荷(N/m²)， h 是板结构厚度参数。

基于 Reissner 中厚板理论框架，表面载荷与广义内力分量间满足以下本构方程：

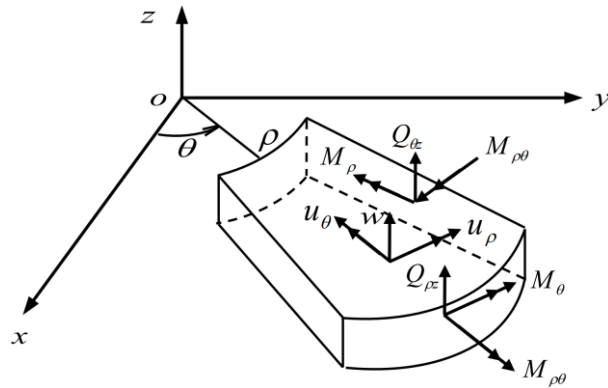


图 5-2 板在柱坐标下的内力与位移分量

$$\sigma_\rho = \frac{12z}{h^3} M_\rho, \sigma_\theta = \frac{12z}{h^3} M_\theta, \sigma_{\rho\theta} = \frac{12z}{h^3} M_{\rho\theta} \quad (5-11a)$$

$$\sigma_{\rho z} = \frac{3}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) Q_{\rho z}, \sigma_{\theta z} = \frac{3}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) Q_{\theta z}, \sigma_{zz} = -\frac{3}{4} q \left(2 \frac{z}{h} - \frac{8}{3} \frac{z^3}{h^3} + \frac{2}{3} \right) \quad (5-11b)$$

将在极坐标系下的应变、应力关系式(5-8)带入余能函数公式：

$$\begin{aligned}
 B(\sigma_{ij}) &= \frac{1}{2}(\varepsilon_\rho \sigma_\rho + \varepsilon_\theta \sigma_\theta + \varepsilon_z \sigma_z + \varepsilon_{\theta z} \sigma_{\theta z} + \varepsilon_{\rho z} \sigma_{\rho z} + \varepsilon_{\rho\theta} \sigma_{\rho\theta}) \\
 &= \frac{1}{2}[T_{11}\sigma_\rho^2 + T_{22}\sigma_\theta^2 + T_{66}\sigma_{\rho\theta}^2 + 2(T_{12}\sigma_\rho\sigma_\theta + T_{16}\sigma_\rho\sigma_{\rho\theta} + T_{26}\sigma_\theta\sigma_{\rho\theta}) \\
 &\quad + 2(T_{13}\sigma_\rho + T_{23}\sigma_\theta + T_{36}\sigma_{\rho\theta})\sigma_z + (T_{44}\sigma_{\theta z}^2 + 2T_{45}\sigma_{\rho z}\sigma_{\theta z} + T_{55}\sigma_{\rho z}^2) + T_{33}\sigma_z^2]
 \end{aligned} \quad (5-12)$$

再将式(5-11)带入式(5-12)，并做如下积分有：(下式中 $k=5/6$)

$$\begin{aligned}
 \int_V B(\sigma_{ij})dV &= \int_{S_m} \left\{ \frac{6}{h^3} [T_{11}M_\rho^2 + T_{22}M_\theta^2 + T_{66}M_{\rho\theta}^2 + 2(T_{12}M_\rho M_\theta + T_{16}M_\rho M_{\rho\theta} + T_{26}M_\theta M_{\rho\theta}) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{qh^2}{5}(T_{13}M_\rho + T_{23}M_\theta + T_{36}M_{\rho\theta}) \right] + \frac{1}{2kh} (T_{44}Q_{\theta z}^2 + 2T_{45}Q_{\rho z}Q_{\theta z} + T_{55}Q_{\rho z}^2) + T_{33}\frac{13h}{70}q^2 \Big\} \rho d\rho d\theta
 \end{aligned} \quad (5-13)$$

这里 S_m 是板的中面。若不考虑体积力(即 $F_i=0$)，则有：

$$\begin{aligned}
 \int_V (\sigma_{ij,j} + F_i)u_i dV &= \int_V \sigma_{ij,j}u_i dV \\
 &= \int_V \left[\left(\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\theta\rho}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{z\rho}}{\partial z} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} \right) u_\rho + \left(\frac{\partial \sigma_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\partial \sigma_{\rho\theta}}{\rho} \right) u_\theta \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{\partial \sigma_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\sigma_{\rho z}}{\rho} \right) w \right] dV \\
 &= \int_V \left\{ \left[\frac{12z}{h^3} \frac{\partial M_\rho}{\partial \rho} + \frac{12z}{h^3} \frac{1}{\rho} \frac{\partial M_{\rho\theta}}{\partial \theta} - \frac{12z}{h^3} Q_{\rho z} + \frac{12z}{h^3} \frac{1}{\rho} (M_\rho - M_\theta) \right] u_\rho \right. \\
 &\quad \left. + \left[\frac{12z}{h^3} \frac{\partial M_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{12z}{h^3} \frac{1}{\rho} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - \frac{12z}{h^3} Q_\theta + \frac{12z}{h^3} \frac{2}{\rho} M_{\rho\theta} \right] u_\theta \right. \\
 &\quad \left. + \left[\frac{3}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) \frac{\partial Q_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{3}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) \frac{1}{\rho} \frac{\partial Q_{\theta z}}{\partial \theta} + \left(-\frac{3q}{2h} + \frac{6qz^2}{h^3} \right) + \frac{3}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) \frac{1}{\rho} Q_{\rho z} \right] w \right\} dV
 \end{aligned} \quad (5-14)$$

根据 Mindlin-Reissner 理论，平面内位移 u_ρ, u_θ 随厚度线性变化， w 随厚度无关。

$$u_\rho = z\tilde{u}_\rho, u_\theta = z\tilde{u}_\theta, w = \tilde{w} \quad (5-15)$$

其中， $\tilde{u}_\rho$ 和 $\tilde{u}_\theta$ 是变形前垂直于中面的直线段在变形后的转角，其中 $\tilde{u}_\rho$ 是 ρz 面内的转角，以从 ρ 轴转向 z 轴的方向为正， $\tilde{u}_\theta$ 为 θz 平面内的转角，以从 θ 方向转向 z 轴的方向为正， $\tilde{w}$ 为挠度。将式(5-15)代入式(5-14)经一系列数学推

导得：

$$\int_V (\sigma_{ij,j} + F_i) u_i dV = \int_{S_m} \left[\left(\frac{\partial M_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial M_{\rho\theta}}{\partial \theta} - Q_{\rho z} + \frac{M_\rho - M_\theta}{\rho} \right) \tilde{u}_\rho + \left(\frac{\partial M_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{2M_{\rho\theta}}{\rho} - Q_{\theta z} \right) \tilde{u}_\theta + \left(\frac{\partial Q_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial Q_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} Q_{\rho z} - q \right) \tilde{w} \right] \rho d\rho d\theta \quad (5-16)$$

这里 S_m 是板的中面，根据 Hellinger-Reissner 变分原理得基本函数定义，并考虑到板的中面 S_m 边界条件，将式(5-13)与式(5-16)相加记为 $-\pi_0$ ，并对其变分并经一系列推导可得：

$$\begin{aligned} -\delta\pi_0 = & \int_{S_m} \left\{ \left[\frac{6}{h^3} (2T_{11}M_\rho + 2T_{12}M_\theta + 2T_{16}M_{\rho\theta}) - \frac{\partial \tilde{u}_\rho}{\partial \rho} - \frac{h^2}{5} qT_{13} \right] \delta M_\rho \right. \\ & + \left[\frac{6}{h^3} (2T_{22}M_\theta + 2T_{12}M_\rho + 2T_{26}M_{\rho\theta}) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \theta} - \frac{\tilde{u}_\rho}{\rho} - \frac{h^2}{5} qT_{23} \right] \delta M_\theta \\ & + \left[\frac{6}{h^3} (2T_{66}M_{\rho\theta} + 2T_{16}M_\rho + 2T_{26}M_\theta) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{u}_\rho}{\partial \theta} - \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \rho} + \frac{\tilde{u}_\theta}{\rho} - \frac{h^2}{5} qT_{36} \right] \delta M_{\rho\theta} \\ & + \left[\frac{1}{2kh} (2T_{45}Q_{\rho z} + 2T_{55}Q_{\rho z}) - \tilde{u}_\rho - \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \rho} \right] \delta Q_{\rho z} \\ & + \left[\frac{1}{2kh} (2T_{44}Q_{\theta z} + 2T_{45}Q_{\rho z}) - \tilde{u}_\theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} \right] \delta Q_{\theta z} \\ & + \left(\frac{\partial M_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial M_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{M_\rho - M_\theta}{\rho} - Q_{\rho z} \right) \delta \tilde{u}_\rho \\ & + \left(\frac{\partial M_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{2M_{\rho\theta}}{\rho} - Q_{\theta z} \right) \delta \tilde{u}_\theta \\ & \left. + \left(\frac{\partial Q_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial Q_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} Q_{\rho z} - q \right) \delta \tilde{w} \right\} \rho d\rho d\theta \quad (5-17) \end{aligned}$$

令 $\delta M_\rho, \delta M_\theta, \delta M_{\rho\theta}, \delta \tilde{u}_\rho, \delta \tilde{u}_\theta, \delta \tilde{w}$ 对应的系数分别为 0，可以得到如下方程组：

$$\frac{\partial M_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial M_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{M_\rho - M_\theta}{\rho} - Q_{\rho z} = 0 \quad (5-18a)$$

$$\frac{\partial M_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{2M_{\rho\theta}}{\rho} - Q_{\rho z} = 0 \quad (5-18b)$$

$$\frac{\partial Q_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial Q_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} Q_{\rho z} - q = 0 \quad (5-18c)$$

$$\frac{12}{h^3}(T_{11}M_{\rho} + T_{12}M_{\theta} + T_{16}M_{\rho\theta}) - \frac{\partial \tilde{u}_{\rho}}{\partial \rho} - \frac{h^2}{5}qT_{13} = 0 \quad (5-18d)$$

$$\frac{12}{h^3}(T_{22}M_{\theta} + T_{12}M_{\rho} + T_{26}M_{\rho\theta}) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{u}_{\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tilde{u}_{\rho}}{\rho} - \frac{h^2}{5}qT_{23} = 0 \quad (5-18e)$$

$$\frac{12}{h^3}(T_{66}M_{\rho\theta} + T_{16}M_{\rho} + T_{26}M_{\theta}) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{u}_{\rho}}{\partial \theta} - \frac{\partial \tilde{u}_{\theta}}{\partial \rho} + \frac{\tilde{u}_{\theta}}{\rho} - \frac{h^2}{5}qT_{36} = 0 \quad (5-18f)$$

$$\frac{1}{kh}(T_{45}Q_{\theta z} + T_{55}Q_{\rho z}) - \tilde{u}_{\rho} - \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \rho} = 0 \quad (5-18g)$$

$$\frac{1}{kh}(T_{44}Q_{\theta z} + T_{45}Q_{\rho z}) - \tilde{u}_{\theta} - \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} = 0 \quad (5-18h)$$

由式(5-18d)(5-18e)(5-18f)解出 M_{ρ} 、 M_{θ} 、 $M_{\rho\theta}$ ，它们的表达式为(这里令 $q=0$)，并将其写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{16} \\ T_{12} & T_{22} & T_{26} \\ T_{16} & T_{26} & T_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{\rho} \\ M_{\theta} \\ M_{\rho\theta} \end{bmatrix} = \frac{h^3}{12} \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{u}_{\rho}}{\partial \rho} \\ \frac{\tilde{u}_{\rho}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{u}_{\theta}}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \tilde{u}_{\theta}}{\partial \rho} - \frac{\tilde{u}_{\theta}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{u}_{\rho}}{\partial \theta} \end{bmatrix} \quad (5-19)$$

由式(5-19)可得：

$$\begin{bmatrix} M_{\rho} \\ M_{\theta} \\ M_{\rho\theta} \end{bmatrix} = \frac{h^3}{12} \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{16} \\ H_{12} & H_{22} & H_{26} \\ H_{16} & H_{26} & H_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{u}_{\rho}}{\partial \rho} \\ \frac{\tilde{u}_{\rho}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{u}_{\theta}}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \tilde{u}_{\theta}}{\partial \rho} - \frac{\tilde{u}_{\theta}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{u}_{\rho}}{\partial \theta} \end{bmatrix} \quad (5-20)$$

这里，

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{16} \\ H_{12} & H_{22} & H_{26} \\ H_{16} & H_{26} & H_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{16} \\ T_{12} & T_{22} & T_{26} \\ T_{16} & T_{26} & T_{66} \end{bmatrix}^{-1} \quad (5-21)$$

设行列式的值为：

$$X = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{16} \\ T_{12} & T_{22} & T_{26} \\ T_{16} & T_{26} & T_{66} \end{vmatrix} = T_{11}T_{22}T_{66} + 2T_{12}T_{26}T_{16} - T_{11}T_{26}^2 - T_{12}^2T_{66} - T_{16}^2T_{22} \quad (5-22)$$

所以，记：

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{16} \\ H_{12} & H_{22} & H_{26} \\ H_{16} & H_{26} & H_{66} \end{bmatrix} = \frac{1}{X} \begin{bmatrix} T_{22}T_{66} - T_{26}^2 & -T_{12}T_{66} + T_{16}T_{26} & T_{12}T_{26} - T_{16}T_{22} \\ -T_{12}T_{66} + T_{16}T_{26} & T_{11}T_{66} - T_{16}^2 & -T_{11}T_{26} + T_{12}T_{16} \\ T_{12}T_{26} - T_{16}T_{22} & -T_{11}T_{26} + T_{12}T_{16} & T_{11}T_{22} - T_{12}^2 \end{bmatrix} \quad (5-23)$$

将式(5-20)展开得：

$$M_\rho = \frac{h^3}{12} \left(H_{11} \frac{\partial \tilde{u}_\rho}{\partial \rho} + H_{16} \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \rho} + H_{12} \frac{\tilde{u}_\rho}{\rho} - H_{16} \frac{\tilde{u}_\theta}{\rho} + H_{12} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \theta} + H_{16} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{u}_\rho}{\partial \theta} \right) \quad (5-24a)$$

$$M_\theta = \frac{h^3}{12} \left(H_{12} \frac{\partial \tilde{u}_\rho}{\partial \rho} + H_{26} \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \rho} + H_{22} \frac{\tilde{u}_\rho}{\rho} - H_{26} \frac{\tilde{u}_\theta}{\rho} + H_{22} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \theta} + H_{26} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{u}_\rho}{\partial \theta} \right) \quad (5-24b)$$

$$M_{\rho\theta} = \frac{h^3}{12} \left(H_{16} \frac{\partial \tilde{u}_\rho}{\partial \rho} + H_{66} \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \rho} + H_{26} \frac{\tilde{u}_\rho}{\rho} - H_{66} \frac{\tilde{u}_\theta}{\rho} + H_{26} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \theta} + H_{66} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{u}_\rho}{\partial \theta} \right) \quad (5-24c)$$

同理，再将式(5-18g)(5-18h)写成矩阵的形式，解出 $Q_{\rho z}$ 和 $Q_{\theta z}$ ：

$$\begin{bmatrix} T_{55} & T_{45} \\ T_{45} & T_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{\rho z} \\ Q_{\theta z} \end{bmatrix} = kh \begin{bmatrix} \tilde{u}_\rho + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \rho} \\ \tilde{u}_\theta + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} \end{bmatrix} \quad (5-25)$$

则：

$$\begin{bmatrix} Q_{\rho z} \\ Q_{\theta z} \end{bmatrix} = kh \begin{bmatrix} H_{55} & H_{45} \\ H_{45} & H_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_\rho + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \rho} \\ \tilde{u}_\theta + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} \end{bmatrix} \quad (5-26)$$

将式(5-26)展开可得：

$$Q_{\rho z} = kh \left(H_{55} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \rho} + H_{55} \tilde{u}_\rho + H_{45} \tilde{u}_\theta + H_{45} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} \right) \quad (5-27a)$$

$$Q_{\theta z} = kh \left(H_{45} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \rho} + H_{45} \tilde{u}_\rho + H_{44} \tilde{u}_\theta + H_{44} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} \right) \quad (5-27b)$$

其中，广义弯矩分量由 M_ρ 、 M_θ 、 $M_{\rho\theta}$ 表征，横向剪力对应 $Q_{\rho z}$ 、 $Q_{\theta z}$ 。位移

场参数包含法向挠度 $\tilde{w}$ 及广义转角位移分量 $\tilde{u}_\rho$ 和 $\tilde{u}_\theta$ 。其中 $\tilde{u}_\rho$ 定义为 $\rho-z$ 平面内绕周向坐标轴的正向旋转量， $\tilde{u}_\theta$ 表征 $\theta-z$ 平面内绕径向轴的正向转动量。结构厚度参数记为 h ，剪切修正因子取 $k=5/6$ 。本构矩阵元素 H_{ij} 由材料柔度矩阵 S_{ij} 与关于 $(\theta-\theta_0)$ 的三角函数组合构成。

Reissner 型板裂纹尖端处的广义位移 $\tilde{u}_\rho$ 、 $\tilde{u}_\theta$ 和 $\tilde{w}$ 可展开成如下的渐近展开形式：

$$\tilde{u}_\rho = \sum_{k=1}^N A_k \rho^{\lambda_k} \bar{u}_\rho(\theta, \lambda_k), \tilde{u}_\theta = \sum_{k=1}^N A_k \rho^{\lambda_k} \bar{u}_\theta(\theta, \lambda_k), \tilde{w} = \sum_{k=1}^N A_k \rho^{\lambda_k} \bar{w}(\theta, \lambda_k) \quad (5-28)$$

式中 A_k 为组合幅值系数， λ_k 为切口奇性指数， N 表示截取的级数项数， $\bar{u}_\rho(\theta, \lambda_k)$ 、 $\bar{u}_\theta(\theta, \lambda_k)$ 、 $\bar{w}(\theta, \lambda_k)$ 为位移特征角函数，项数越多，则式(5-28)表达的位移场越准确。其中板裂纹尖端广义内力场及奇异应力场的数学表征需通过位移场渐近表达式(5-28)的微分运算构建，基于线弹性力学理论框架，当 $\lambda_k < 1$ 时对应的渐近解项为应力奇异项，其应力分量随尖端处极径 $\rho \rightarrow 0$ 时趋于无限大，呈现应力奇异性。

将式(5-25)、(5-28)代入式(5-18a)、(5-18b)、(5-18c)，并联立式(5-28)中渐近展开形式的典型项，整理后得到以位移表示的微分方程组，(以下将 $\bar{u}_\rho(\theta, \lambda_k)$ 、 $\bar{u}_\theta(\theta, \lambda_k)$ 、 $\bar{w}(\theta, \lambda_k)$ 、 λ_k 分别简写为 $\bar{u}_\rho$ 、 $\bar{u}_\theta$ 、 $\bar{w}$ 、 λ)：

$$\begin{aligned} & H_{66} \bar{u}_\rho'' + H_{26} \bar{u}_\theta'' + H_{66}' \bar{u}_\rho' + (H_{26}' - H_{22} - H_{66}') \bar{u}_\theta' + (H_{26}' - H_{22}) \bar{u}_\rho \\ & + (H_{26} - H_{66}') \bar{u}_\theta + \lambda \cdot 2H_{16} \bar{u}_\rho' + \lambda (H_{12} + H_{66}) \bar{u}_\theta' + \lambda^2 H_{11} \bar{u}_\rho \\ & + \lambda^2 H_{16} \bar{u}_\theta + \lambda H_{16}' \bar{u}_\rho - \lambda (H_{16} + H_{26} - H_{66}') \bar{u}_\theta = 0 \end{aligned} \quad (5-29a)$$

$$\begin{aligned} & H_{26} \bar{u}_\rho'' + H_{22} \bar{u}_\theta'' + (H_{22} + H_{66} + H_{26}') \bar{u}_\rho' + H_{22}' \bar{u}_\theta' + (H_{26} + H_{22}') \bar{u}_\rho \\ & - (H_{66} + H_{26}') \bar{u}_\theta + \lambda \cdot 2H_{26} \bar{u}_\rho' + \lambda (H_{12} + H_{66}) \bar{u}_\theta' + \lambda^2 H_{16} \bar{u}_\rho \\ & + \lambda^2 H_{66} \bar{u}_\theta + \lambda H_{26}' \bar{u}_\theta + \lambda (H_{16} + H_{26} + H_{12}') \bar{u}_\rho = 0 \end{aligned} \quad (5-29b)$$

$$H_{44} \bar{w}'' + H_{44}' \bar{w}' + \lambda \cdot 2H_{45} \bar{w}' + \lambda^2 H_{55} \bar{w} + \lambda H_{45}' \bar{w} = 0 \quad (5-29c)$$

上式中, $(\dots)'$ 表示对坐标 θ 的一阶导数, $(\dots)''$ 表示对坐标 θ 的二阶导数。

由于方程式(5-29)中含 λ^2 项, 为非线性特征值问题, 特引入如下变换关系式:

$$g_\rho = \lambda \bar{u}_\rho \quad (5-30a)$$

$$g_\theta = \lambda \bar{u}_\theta \quad (5-30b)$$

$$g_w = \lambda \bar{w} \quad (5-30c)$$

由此可将方程式(5-29)转换为线性特征值问题:

$$\begin{aligned} & H_{66} \bar{u}_\rho'' + H_{26} \bar{u}_\theta'' + H_{66}' \bar{u}_\rho' + (H_{26}' - H_{22} - H_{66}) \bar{u}_\theta' + (H_{26}' - H_{22}) \bar{u}_\rho \\ & + (H_{26} - H_{66}') \bar{u}_\theta + \lambda \cdot 2H_{16} \bar{u}_\rho' + \lambda (H_{12} + H_{66}) \bar{u}_\theta' + \lambda H_{11} g_\rho \\ & + \lambda H_{16} g_\theta + \lambda H_{16}' \bar{u}_\rho - \lambda (H_{16} + H_{26} - H_{66}') \bar{u}_\theta = 0 \end{aligned} \quad (5-31a)$$

$$\begin{aligned} & H_{26} \bar{u}_\rho'' + H_{22} \bar{u}_\theta'' + (H_{22} + H_{66} + H_{26}') \bar{u}_\rho' + H_{22}' \bar{u}_\theta' + (H_{26} + H_{22}') \bar{u}_\rho \\ & - (H_{66} + H_{26}') \bar{u}_\theta + \lambda \cdot 2H_{26} \bar{u}_\theta' + \lambda (H_{12} + H_{66}) \bar{u}_\rho' + \lambda H_{16} g_\rho \\ & + \lambda H_{66} g_\theta + \lambda H_{26}' \bar{u}_\theta + \lambda (H_{16} + H_{26} + H_{12}') \bar{u}_\rho = 0 \end{aligned} \quad (5-31b)$$

$$H_{44} \bar{w}'' + H_{44}' \bar{w}' + \lambda \cdot 2H_{45} \bar{w}' + \lambda H_{55} g_w + \lambda H_{45}' \bar{w} = 0 \quad (5-31c)$$

假设切口边界 $\theta = \theta_1$ 和 $\theta = \theta_2$ 上面力自由, 即 $M_{\rho\theta} = M_\theta = Q_{\theta z} = 0$ 。

当 $M_{\rho\theta} = 0$ 时, 根据式(5-24c)可得:

$$H_{66} \bar{u}_\rho' + H_{26} \bar{u}_\theta' + H_{26} \bar{u}_\rho - H_{66} \bar{u}_\theta + \lambda H_{16} \bar{u}_\rho + \lambda H_{66} \bar{u}_\theta = 0 \quad (\theta = \theta_1, \theta_2) \quad (5-32a)$$

当 $M_\theta = 0$ 时, 根据式(5-24b)可得:

$$H_{26} \bar{u}_\rho' + H_{22} \bar{u}_\theta' + H_{22} \bar{u}_\rho - H_{26} \bar{u}_\theta + \lambda H_{12} \bar{u}_\rho + \lambda H_{26} \bar{u}_\theta = 0 \quad (\theta = \theta_1, \theta_2) \quad (5-32b)$$

当 $Q_{\theta z} = 0$ 时, 根据式(5-27b)可得:

$$H_{44} \bar{w}' + \lambda H_{45} \bar{w} = 0 \quad (\theta = \theta_1, \theta_2) \quad (5-32c)$$

从而, 单相正交各向异性复合材料板切口奇性指数分析变成了求解在边界条件式(5-32)下线性常微分方程组(5-31)的特征值问题。

5.2 双相正交各向异性粘结板切口特征方程的建立

针对图 5-3 所示的双相正交各向异性复合材料板界面切口模型，假设两个板粘结界面与 x 的夹角为 θ_2 。 Ω_1 和 Ω_2 分别代表两种不同的材料。参考式(5-31)，可在第 1 种和第 2 种材料域内分别建立微分方程式(5-33)(以下公式种的上标(1)、(2)均表示属于第 1 种材料和第 2 种材料)。

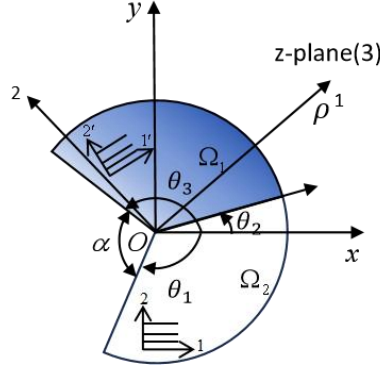


图 5-3 双相正交各向异性材料粘结板切口

$$g_{1\rho} = \lambda \bar{u}_{1\rho} \quad (5-33a)$$

$$g_{1\theta} = \lambda \bar{u}_{1\theta} \quad (5-33b)$$

$$g_{1w} = \lambda \bar{w}_1 \quad (5-33c)$$

$$\begin{aligned} & H_{66}^{(1)} \bar{u}_{1\rho}'' + H_{26}^{(1)} \bar{u}_{1\theta}'' + H_{66}^{(1)} \bar{u}_{1\rho}' + \left(H_{26}^{(1)} - H_{22}^{(1)} - H_{66}^{(1)} \right) \bar{u}_{1\theta}' + \left(H_{26}^{(1)} - H_{22}^{(1)} \right) \bar{u}_{1\rho} \\ & + \left(H_{26}^{(1)} - H_{66}^{(1)} \right) \bar{u}_{1\theta} + 2\lambda H_{16}^{(1)} \bar{u}_{1\rho}' + \lambda \left(H_{12}^{(1)} + H_{66}^{(1)} \right) \bar{u}_{1\theta}' + \lambda H_{11}^{(1)} g_{1\rho} \\ & + \lambda H_{16}^{(1)} g_{1\theta} + \lambda H_{16}^{(1)} \bar{u}_{1\rho} - \lambda \left(H_{16}^{(1)} + H_{26}^{(1)} - H_{66}^{(1)} \right) \bar{u}_{1\theta} = 0 \end{aligned} \quad (5-33d)$$

$$\begin{aligned} & H_{26}^{(1)} \bar{u}_{1\rho}'' + H_{22}^{(1)} \bar{u}_{1\theta}'' + H_{22}^{(1)} \bar{u}_{1\theta}' + \left(H_{22}^{(1)} + H_{26}^{(1)} + H_{66}^{(1)} \right) \bar{u}_{1\rho}' + \left(H_{22}^{(1)} + H_{26}^{(1)} \right) \bar{u}_{1\rho} \\ & - \left(H_{66}^{(1)} + H_{26}^{(1)} \right) \bar{u}_{1\theta} + 2\lambda H_{16}^{(1)} \bar{u}_{1\theta}' + \lambda \left(H_{12}^{(1)} + H_{66}^{(1)} \right) \bar{u}_{1\rho}' + \lambda H_{16}^{(1)} g_{1\rho} \\ & + \lambda H_{66}^{(1)} g_{1\theta} + \lambda H_{26}^{(1)} \bar{u}_{1\theta} + \lambda \left(H_{16}^{(1)} + H_{26}^{(1)} + H_{12}^{(1)} \right) \bar{u}_{1\rho} = 0 \end{aligned} \quad (5-33e)$$

$$H_{44}^{(1)} \bar{w}_1'' + H_{44}^{(1)} \bar{w}_1' + \lambda \cdot 2H_{45}^{(1)} \bar{w}_1' + \lambda H_{55}^{(1)} g_{1w} + \lambda H_{45}^{(1)} \bar{w}_1 = 0 \quad (5-33f)$$

$$g_{2\rho} = \lambda \bar{u}_{2\rho} \quad (5-33g)$$

$$g_{2\theta} = \lambda \bar{u}_{2\theta} \quad (5-33h)$$

$$g_{2w} = \lambda \bar{w}_2 \quad (5-33i)$$

$$\begin{aligned}
 & H_{66}^{(2)} \bar{u}_{2\rho}'' + H_{26}^{(2)} \bar{u}_{2\theta}'' + H_{66}^{(2)} \bar{u}_{2\rho}' + \left(H_{26}^{(2)} - H_{22}^{(2)} - H_{66}^{(2)} \right) \bar{u}_{2\theta}' + \left(H_{26}^{(2)} - H_{22}^{(2)} \right) \bar{u}_{2\rho} \\
 & + \left(H_{26}^{(2)} - H_{66}^{(2)} \right) \bar{u}_{2\theta} + 2\lambda H_{16}^{(2)} \bar{u}_{2\rho}' + \lambda \left(H_{12}^{(2)} + H_{66}^{(2)} \right) \bar{u}_{2\theta}' + \lambda H_{11}^{(2)} g_{2\rho} \quad (5-33j)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \lambda H_{16}^{(2)} g_{2\theta} + \lambda H_{16}^{(2)} \bar{u}_{2\rho}' - \lambda \left(H_{16}^{(2)} + H_{26}^{(2)} - H_{66}^{(2)} \right) \bar{u}_{2\theta}' = 0 \\
 & H_{26}^{(2)} \bar{u}_{2\rho}'' + H_{22}^{(2)} \bar{u}_{2\theta}'' + H_{22}^{(2)} \bar{u}_{2\rho}' + \left(H_{22}^{(2)} + H_{26}^{(2)} + H_{66}^{(2)} \right) \bar{u}_{2\theta}' + \left(H_{22}^{(2)} + H_{26}^{(2)} \right) \bar{u}_{2\rho} \\
 & - \left(H_{66}^{(2)} + H_{26}^{(2)} \right) \bar{u}_{2\theta} + 2\lambda H_{16}^{(2)} \bar{u}_{2\theta}' + \lambda \left(H_{12}^{(2)} + H_{66}^{(2)} \right) \bar{u}_{2\rho}' + \lambda H_{16}^{(2)} g_{2\rho} \quad (5-33k)
 \end{aligned}$$

$$+ \lambda H_{66}^{(2)} g_{2\theta} + \lambda H_{26}^{(2)} \bar{u}_{2\theta}' + \lambda \left(H_{16}^{(2)} + H_{26}^{(2)} + H_{12}^{(2)} \right) \bar{u}_{2\rho}' = 0$$

$$H_{44}^{(2)} \bar{w}_2'' + H_{44}^{(2)} \bar{w}_2' + \lambda \cdot 2H_{45}^{(2)} \bar{w}_2' + \lambda H_{55}^{(2)} g_{2w} + \lambda H_{45}^{(2)} \bar{w}_2 = 0 \quad (5-33l)$$

在边界 $\theta = \theta_1$ 和 $\theta = \theta_3$ 上, 面力自由的边界条件可写为:

$$H_{66}^{(1)} \bar{u}_{1\rho}' + H_{26}^{(1)} \bar{u}_{1\theta}' + H_{26}^{(1)} \bar{u}_{1\rho} - H_{66}^{(1)} \bar{u}_{1\theta} + \lambda H_{16}^{(1)} \bar{u}_{1\rho} + \lambda H_{66}^{(1)} \bar{u}_{1\theta} = 0 \quad (\theta = \theta_1) \quad (5-34a)$$

$$H_{26}^{(1)} \bar{u}_{1\rho}' + H_{22}^{(1)} \bar{u}_{1\theta}' + H_{22}^{(1)} \bar{u}_{1\rho} - H_{26}^{(1)} \bar{u}_{1\theta} + \lambda H_{12}^{(1)} \bar{u}_{1\rho} + \lambda H_{26}^{(1)} \bar{u}_{1\theta} = 0 \quad (\theta = \theta_1) \quad (5-34b)$$

$$H_{44}^{(1)} \bar{w}_1' + \lambda H_{45}^{(1)} \bar{w}_1 = 0 \quad (\theta = \theta_1) \quad (5-34c)$$

$$H_{66}^{(2)} \bar{u}_{2\rho}' + H_{26}^{(2)} \bar{u}_{2\theta}' + H_{26}^{(2)} \bar{u}_{2\rho} - H_{66}^{(2)} \bar{u}_{2\theta} + \lambda H_{16}^{(2)} \bar{u}_{2\rho} + \lambda H_{66}^{(2)} \bar{u}_{2\theta} = 0 \quad (\theta = \theta_3) \quad (5-34d)$$

$$H_{26}^{(2)} \bar{u}_{2\rho}' + H_{22}^{(2)} \bar{u}_{2\theta}' + H_{22}^{(2)} \bar{u}_{2\rho} - H_{26}^{(2)} \bar{u}_{2\theta} + \lambda H_{12}^{(2)} \bar{u}_{2\rho} + \lambda H_{26}^{(2)} \bar{u}_{2\theta} = 0 \quad (\theta = \theta_3) \quad (5-34e)$$

$$H_{44}^{(2)} \bar{w}_2' + \lambda H_{45}^{(2)} \bar{w}_2 = 0 \quad (\theta = \theta_3) \quad (5-34f)$$

假设在双相材料的粘结部位满足理想交界条件, 即:

$$\tilde{u}_{\rho}^{(1)}(\theta_2) = \tilde{u}_{\rho}^{(2)}(\theta_2), \tilde{u}_{\theta}^{(1)}(\theta_2) = \tilde{u}_{\theta}^{(2)}(\theta_2), \tilde{w}^{(1)}(\theta_2) = \tilde{w}^{(2)}(\theta_2) \quad (5-35a)$$

$$M_{\rho\theta}^{(1)}(\theta_2) = M_{\rho\theta}^{(2)}(\theta_2), M_{\theta}^{(1)}(\theta_2) = M_{\theta}^{(2)}(\theta_2), Q_{\theta z}^{(1)}(\theta_2) = Q_{\theta z}^{(2)}(\theta_2) \quad (5-35b)$$

由式(5-24b)、(5-24c)、(5-27b)和式(5-28)可得:

$$\bar{u}_{1\rho} - \bar{u}_{2\rho} = 0 \quad (\theta = \theta_2) \quad (5-36a)$$

$$\bar{u}_{1\theta} - \bar{u}_{2\theta} = 0 \quad (\theta = \theta_2) \quad (5-36b)$$

$$\bar{w}_1 - \bar{w}_2 = 0 \quad (\theta = \theta_2) \quad (5-36c)$$

$$\begin{aligned}
 & H_{66}^{(1)} \bar{u}_{1\rho}' + H_{26}^{(1)} \bar{u}_{1\theta}' - H_{26}^{(2)} \bar{u}_{2\theta}' - H_{66}^{(2)} \bar{u}_{2\rho}' + H_{26}^{(1)} \bar{u}_{1\rho} - H_{66}^{(1)} \bar{u}_{1\theta} - H_{26}^{(2)} \bar{u}_{2\rho} \\
 & + H_{66}^{(2)} \bar{u}_{2\theta} + \lambda H_{16}^{(1)} \bar{u}_{1\rho} + \lambda H_{66}^{(1)} \bar{u}_{1\theta} - \lambda H_{16}^{(2)} \bar{u}_{2\rho} - \lambda H_{66}^{(2)} \bar{u}_{2\theta} = 0 \quad (\theta = \theta_2) \quad (5-36d)
 \end{aligned}$$

$$H_{26}^{(1)}\bar{u}_{1\rho}' + H_{22}^{(1)}\bar{u}_{1\theta}' - H_{26}^{(2)}\bar{u}_{2\rho}' - H_{22}^{(2)}\bar{u}_{2\theta}' + H_{22}^{(1)}\bar{u}_{1\rho} - H_{26}^{(1)}\bar{u}_{1\theta} - H_{22}^{(2)}\bar{u}_{2\rho} + H_{26}^{(2)}\bar{u}_{2\theta} + \lambda H_{12}^{(1)}\bar{u}_{1\rho} + \lambda H_{26}^{(1)}\bar{u}_{1\theta} - \lambda H_{12}^{(2)}\bar{u}_{2\rho} - \lambda H_{26}^{(2)}\bar{u}_{2\theta} = 0 \quad (\theta = \theta_2) \quad (5-36e)$$

$$H_{44}^{(1)}\bar{w}_1' - H_{44}^{(2)}\bar{w}_2' + \lambda H_{45}^{(1)}\bar{w}_1 - \lambda H_{45}^{(2)}\bar{w}_2 = 0 \quad (\theta = \theta_2) \quad (5-36f)$$

从而，双相正交各向异性复合材料板切口奇性指数的计算，变成了求解满足边界条件式(5-34)和界面协调条件式(5-36)时常微分方程组(5-33)特征值的求解。一般需要数值方法求解这类问题，这里采用微分求积法计算。

5.3 微分求积法的应用

这里，运用DQM计算单相正交各向异性材料板切口的应力奇性指数，图5-1，整个材料域对应区间 $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ ，其离散单元总数均为 N ，离散节点总数均为 $N+1$ ，即 $\xi_j (0 \leq j \leq N)$ ，其中 $\xi_0 = 0, \xi_N = 1$ 。离散节点分布方式采用等步长均匀网格模式，即：

$$\xi_j = \frac{j}{N}, \quad (j = 0, 1, 2, \dots, N) \quad (5-37)$$

根据上文的DQM规则得到的关于单材料正交各向异性板切口应力奇性指数 λ 为特征值的一组代数方程组：

$$\mathbf{CY} - \lambda \mathbf{DY} = \mathbf{0} \quad (5-38)$$

其中

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & & & & & & \\ & \mathbf{I} & & & & & \\ & & \mathbf{I} & & & & \\ & & & \mathbf{J}_{11} & \mathbf{J}_{12} & & \\ & & & \mathbf{J}_{21} & \mathbf{J}_{22} & & \\ & & & & & & \mathbf{J}_{33} \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} & & & \mathbf{I} & & & \\ & & & & \mathbf{I} & & \\ & & & & & & \mathbf{I} \\ \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} & & \mathbf{G}_{14} & \mathbf{G}_{15} & & \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} & & \mathbf{G}_{24} & \mathbf{G}_{25} & & \\ & & \mathbf{G}_{33} & & & & \mathbf{G}_{36} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{g}_p \quad \mathbf{g}_0 \quad \mathbf{g}_w \quad \mathbf{u}_p \quad \mathbf{u}_0 \quad \mathbf{w}]^T$$

设 $\mathbf{I}$ 为 $(N+1) \times (N+1)$ 阶单位矩阵，其中，

$$\mathbf{J}_{11} = \frac{H_{66}\mathbf{A}_{ij}^{(2)}}{\theta^2} + \frac{H_{66}'\mathbf{A}_{ij}^{(1)}}{\theta} + (H_{26}' - H_{22}) \cdot \mathbf{I},$$

$$\mathbf{J}_{12} = \frac{H_{26}\mathbf{A}_{ij}^{(2)}}{\theta^2} + \frac{(H_{26}' - H_{22} - H_{66})\mathbf{A}_{ij}^{(1)}}{\theta} + (H_{26} - H_{66}') \cdot \mathbf{I},$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{G}_{11} &= -H_{11} \cdot \mathbf{I}, \mathbf{G}_{12} = -H_{16} \cdot \mathbf{I}, \\
 \mathbf{G}_{14} &= \frac{-2H_{16} \cdot \mathbf{A}_{ij}^{(1)}}{\theta} - H'_{16} \cdot \mathbf{I}, \\
 \mathbf{G}_{15} &= \frac{(-H_{12} - H_{66}) \cdot \mathbf{A}_{ij}^{(1)}}{\theta} + (H_{16} + H_{26} - H'_{66}) \cdot \mathbf{I}, \\
 \mathbf{J}_{21} &= \frac{H_{26} \mathbf{A}_{ij}^{(2)}}{\theta^2} + \frac{(H_{22} + H_{66} + H'_{26}) \mathbf{A}_{ij}^{(1)}}{\theta} + (H'_{22} + H_{26}) \cdot \mathbf{I}, \\
 \mathbf{J}_{22} &= \frac{H_{22} \mathbf{A}_{ij}^{(2)}}{\theta^2} + \frac{H'_{22} \mathbf{A}_{ij}^{(1)}}{\theta} - (H_{66} + H'_{26}) \cdot \mathbf{I}, \\
 \mathbf{G}_{21} &= -H_{16} \cdot \mathbf{I}, \mathbf{G}_{22} = -H_{66} \cdot \mathbf{I}, \\
 \mathbf{G}_{24} &= \frac{(-H_{16} - H_{66}) \cdot \mathbf{A}_{ij}^{(1)}}{\theta} - (H_{16} + H_{26} + H'_{12}) \cdot \mathbf{I}, \\
 \mathbf{G}_{25} &= \frac{-2H_{26} \cdot \mathbf{A}_{ij}^{(1)}}{\theta} - H'_{26} \cdot \mathbf{I}, \\
 \mathbf{J}_{33} &= \frac{H_{44} \mathbf{A}_{ij}^{(2)}}{\theta^2} + \frac{H'_{44} \mathbf{A}_{ij}^{(1)}}{\theta}, \\
 \mathbf{G}_{33} &= -H_{55} \cdot \mathbf{I}, \\
 \mathbf{G}_{36} &= \frac{-2H_{45} \cdot \mathbf{A}_{ij}^{(1)}}{\theta} - H'_{45} \cdot \mathbf{I}
 \end{aligned}$$

再将边界条件式(5-34)和界面协调式(5-36)中相应的第 0 行和第 n 行替换式(5-38)矩阵 $\mathbf{J}_{ij}$ 和 $\mathbf{G}_{ij}$ 中相应的首行和末行得到矩阵 $\hat{\mathbf{J}}_{ij}$ 和 $\hat{\mathbf{G}}_{ij}$ 。

最后，将式(5-38)转化为：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & & & & & \\ & \mathbf{I} & & & & \\ & & \mathbf{I} & & & \\ & & & \hat{\mathbf{J}}_{11} & \hat{\mathbf{J}}_{12} & \\ & & & \hat{\mathbf{J}}_{21} & \hat{\mathbf{J}}_{22} & \\ & & & & & \hat{\mathbf{J}}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_p \\ \mathbf{g}_0 \\ \mathbf{g}_w \\ \mathbf{u}_p \\ \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} - \lambda_k \begin{bmatrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ \hat{\mathbf{G}}_{11} & \hat{\mathbf{G}}_{12} & & \hat{\mathbf{G}}_{14} & \hat{\mathbf{G}}_{15} & \\ \hat{\mathbf{G}}_{21} & \hat{\mathbf{G}}_{22} & & \hat{\mathbf{G}}_{24} & \hat{\mathbf{G}}_{25} & \\ & & \hat{\mathbf{G}}_{33} & & & \\ & & & & & \hat{\mathbf{G}}_{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_p \\ \mathbf{g}_0 \\ \mathbf{g}_w \\ \mathbf{u}_p \\ \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-39)$$

综上所述，本章采用 FORTRAN 语言编写了通用程序 DQMEI 求解式(5-39)，获得单相正交各向异性材料板切口应力奇性指数 λ_k 。双相正交各向异性材料板切口应力奇性指数的解法同理可得。

5.4 数值算例

5.4.1 切口张角 α 对 λ_k 的影响

针对图 5-4 所示的双相正交各向异性复合材料板切口模型，其几何特征表现为：两相材料的主轴系均与全局坐标系 x - y 保持共轴对齐，材料 1 的柔度矩阵 $s_1 = s$ ，材料 2 的柔度矩阵 $s_2 = 2s$ ，具体参数由式(5-40)确定。本研究采用微分求积法(DQM)对该层合结构切口奇异性指数进行参数化分析，通过参数化离散单元数($N=8,12,16$)开展收敛性分析，计算结果如表 5-1 所示。数值实验表明：(1)算法收敛特性优异，与文献^[24]基准解的最大相对误差小于 0.5%；(2)切口奇异性指数随张角 α 呈现单调递减规律，当 $\alpha=180^\circ$ 时仍存在微弱应力奇异性。这一现象揭示了正交各向异性复合材料界面切口力学行为的特殊规律，计算结果具有重要工程参考价值。

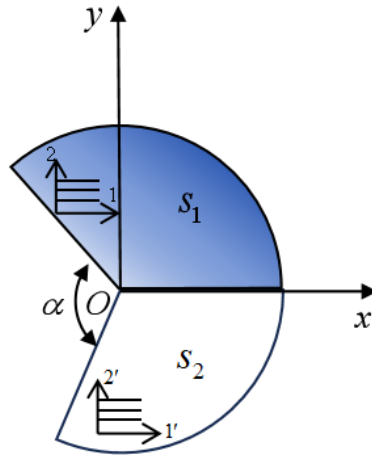


图 5-4 双相正交各向异性板切口(材料主轴系均与 x - y 重合)

$$s = \begin{bmatrix} 1/39 & -0.0451/6.4 & -0.3507/30.6 & 0 & 0 & 0 \\ & 1/6.4 & -0.275/30.6 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1/30.6 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1/4.5 & 0 & 0 \\ & \text{Sym} & & & 1/19.7 & 0 \\ & & & & & 1/4.5 \end{bmatrix} \quad (5-40)$$

在奇异性分析算法设计方面，本研究构建的数值求解框架不仅能准确提取前三阶主奇异性指数，还可系统推导高阶非奇异性项指数。数值结果揭示了前五阶奇异性指数的分布规律（详见表 5-1）：当奇异性指数达到四阶及以上时，对应的应

力分量不再具有奇异性特征($\lambda_k \geq 1$)。值得注意的是, 这些高阶非奇性项虽不主导切口尖端核心区的应力集中, 但作为构建完整应力场分布的关键组成要素^[76], 其物理意义体现在: 随着与尖端距离 r 的增大, 高阶非奇异项对位移场和应力场的贡献度呈渐进增强趋势, 这在复合材料界面力学分析中具有特殊重要性。

表 5-1 双相正交各向异性材料板切口应力奇异性指数

$\alpha / (^\circ)$	数值方法	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
0	文献 ^[24]	0.5+ 0.0412294i	0.5- 0.0412294i	0.5	/	/
	$N=8$	0.4999017+ 0.0411825i	0.49990177- 0.0411825i	0.500042	1.0	1.0000031
	$N=12$	0.5000214+ 0.0412282i	0.5000214- 0.0412282i	0.500014	1.0	1.0000002
	$N=16$	0.5000050+ 0.0412288i	0.5000050+ 0.0412288i	0.5000025	1.0	0.9999999
	文献 ^[24]	0.5450832	0.8646145	0.6943453	/	/
60	$N=8$	0.5450656	0.8646573	0.6943111	1.0	1.3886965
	$N=12$	0.5450754	0.8646188	0.6943430	1.0	1.3886914
	$N=16$	0.5450828	0.8646149	0.6943448	1.0	1.3886908
	文献 ^[24]	0.6812632	1.0	0.8536774	/	/
120	$N=8$	0.6812473	1.0	0.8536735	1.2759623	1.7073800
	$N=12$	0.6812616	1.0	0.8536773	1.2758287	1.7073568
	$N=16$	0.6812634	1.0	0.8536774	1.2758192	1.7073552
	文献 ^[24]	0.9886141	1.0	1.0	/	/
180	$N=8$	0.9886333	1.0	1.0	1.8750750+ 0.1782269i	1.8750750- 0.1782269i
	$N=12$	0.9886218	1.0	1.0	1.8750380+ 0.1781958i	1.8750380- 0.1781958i
	$N=16$	0.9886210	1.0	1.0	1.8750355+ 0.1781936i	1.8750355- 0.1781936i
	文献 ^[24]	1.0	1.792550	1.2068588	/	/
240	$N=8$	1.0	1.792671	1.2068590	2.2640834+ 0.3117400i	2.2640834- 0.3117400i
	$N=12$	1.0	1.792635	1.2068587	2.2640711+ 0.3117944i	2.2640711- 0.3117944i
	$N=16$	1.0	1.792633	1.2068587	2.2640703+ 0.3117979i	2.2640703- 0.3117979i
	文献 ^[24]	1.0	1.792550	1.2068588	/	/

5.4.2 材料主轴系与笛卡尔坐标系的夹角 θ_0 对 λ_k 的影响

在实际工程结构中，双相正交各向异性复合材料板的每个材料域的材料主轴系1-2都与笛卡尔坐标系 $x-y$ 成不同的夹角 θ_0 。在复合材料层合板中常常通过调整各层纤维方向(如 $0^\circ/45^\circ/90^\circ$ 铺层)来优化结构的整体刚度和稳定性；在硅晶体的制造工艺中需要考虑晶格方向对器件性能的影响。因此，研究正交各向异性材料主轴系的铺设方向具有重要工程价值。

当材料主轴方向与笛卡尔坐标系不一致时，需通过坐标变换(旋转矩阵)将本构关系转换到全局坐标系中，见式(5-41)。其中 $T_{\rho\theta z}$ 为全局坐标系下的弹性柔度矩阵， S_{xyz} 为笛卡尔坐标系下的弹性柔度矩阵， $R(\theta-\theta_0)$ 为关于 $\theta-\theta_0$ 的旋转矩阵。

$$T_{\rho\theta z} = R^T(\theta-\theta_0) \cdot S_{xyz} \cdot R(\theta-\theta_0) \quad (5-41)$$

如图 5-5 所示为两对称材料域材料主轴系与笛卡尔坐标系 $x-y$ 成 45° 时(以绕 z 轴逆时针旋转为正)的板切口示意图。在本算例中将讨论不同的材料主轴系与笛卡尔坐标系所成的夹角 θ_0 对其应力奇性指数的影响规律。

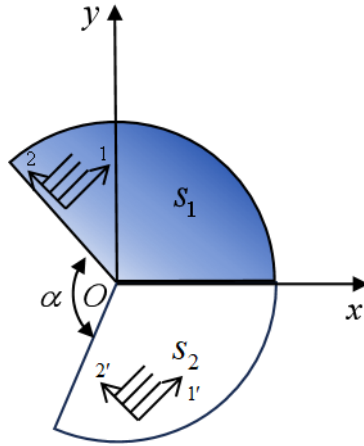
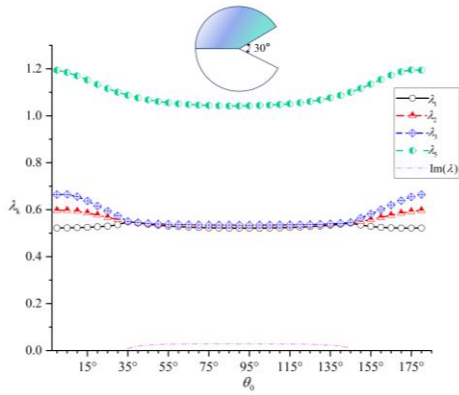
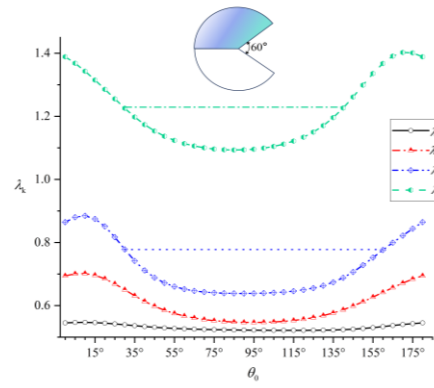
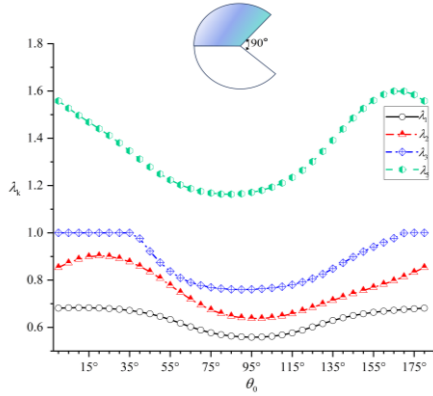
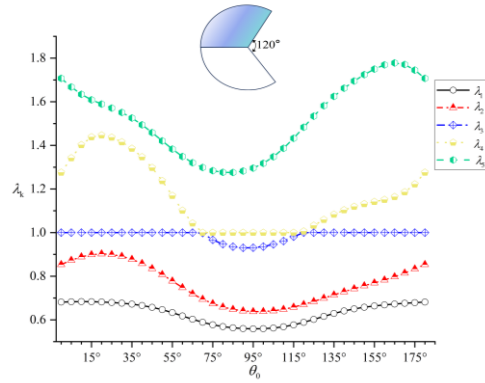


图 5-5 $\theta_0 = 45^\circ$ 时双相正交各向异性材料板切口示意图

采用微分求积法求解获得双相正交各向异性板切口应力奇性指数与材料主轴系方向的关系曲线如图 5-6a~图 5-6d 所示，可获得如下结论：(1)随着切口张角 α 的增大，应力奇性指数由复数向实数转化，即垂直于界面的 V 形切口端部扇形区域内的振荡应力奇异性现象逐渐消失^[77]。(2)双相正交各向异性材料的应力奇性指数显著依赖于材料主轴系与切口方向的相对夹角，随着张角的增大，

材料主方向与切口几何的非对称性增强，导致奇性指数对方向变化的响应更为显著，进一步验证了正交各向异性材料的方向依赖性特征。(3)双相正交各向异性材料板切口的各阶奇性指数都会在 $\theta_0 = 90^\circ$ 附近出现最小值，可见材料主轴系与笛卡尔坐标系垂直的时候，板切口应力奇异性最强。(4)正交各向异性材料主轴系的方向对低阶奇性指数的影响较小，然而，对高阶奇性指数的影响更为显著。这一现象与材料主轴系方向对高阶奇性模态的抑制作用有关。(5)特别是，张角为 120° 时，第四阶奇性指数 λ_4 出现波动，而张角在 30° 、 60° 、 90° 时， λ_4 的值都稳定为 1.0 不变。


 图 5-6a 不同 θ_0 张角为 30° 的应力奇性指数

 图 5-6b 不同 θ_0 张角为 60° 的应力奇性指数

 图 5-6c 不同 θ_0 张角为 90° 的应力奇性指数

 图 5-6d 不同 θ_0 张角为 120° 的应力奇性指数

5.5 本章小结

本章针对正交各向异性复合材料板切口奇异性问题，提出一种高效求解方法：通过将切口尖端奇异性计算转化为常微分方程组特征值问题，并采用微分求积法进行数值求解，成功获取了切口尖端附近的奇异性特征指数。本方法相

较于传统解法具有以下显著优势：

经与文献数据对比验证，本方法在保证数值精度的前提下，计算效率提升显著。系统探究了不同材料域的正交各向异性材料主轴系与笛卡尔坐标系的夹角对于应力奇性指数的影响规律，研究表明不同区域材料主轴系的铺设方向同样值得关注。

通过将本解系作为奇异基函数引入有限元或边界元计算框架，可有效提升切口应力强度因子的计算精度，为工程结构的断裂力学评估提供新的解决方案。

第 6 章 结论与展望

6.1 结论

在线弹性理论框架和 Reissner 板理论分析框架下，本研究发展了一种切口奇性解析的数值模型构建方法：基于 Williams 位移场渐近展开，将渐近位移场表达式嵌入弹性力学平衡方程体系，由此推导出关于奇性指数的特征微分控制方程组。在此理论模型中，切口径向边界条件被严格转化为奇性指数与特征角函数的耦合约束关系，从而将复杂的奇异性分析问题重构为特征微分方程组的数学求解命题。进一步采用微分求积法进行数值离散，将复杂的特征微分方程组问题转化成标准型广义代数方程组特征值问题，实现了各阶奇性指数的高效解析。全文的研究结论如下：

(1)本研究分析了 Reissner 各向同性板切口应力奇性指数，参考文献中只存在奇性指数在 0 和 1 的值，本文列出高阶非奇性指数项。基于微分求积法拓展建立了双/多材料切口应力奇性求解体系，阐明弹性模量比对双材料奇异性影响规律。系统探究了半平面板、全平面板和锥形接头板等典型工程构型的奇性指数演变规律，为工程结构完整性评估提供了理论依据。

(2)本研究建立了功能梯度中厚板 V 形切口应力奇性指数分析模型，运用微分求积法，实现了单/双相材料梯度板多边界条件下多阶奇性指数的同步高效求解，该方法避免了需要将矩奇异和剪切奇异分开计算的繁琐步骤。进一步拓展研究功能梯度与纯金属/陶瓷混合板的奇性问题，揭示了通过梯度-均质材料优化配置降低切口应力奇性程度的规律，为复合梯度板结构设计提供理论依据与工程优化方案。

(3)本研究建立了正交各向异性材料板 V 形切口应力奇性指数计算体系。针对正交各向异性材料本构关系复杂导致的非线性变系数控制方程难题，基于微分求积法(DQM)的求解框架：通过拟线性化处理变系数非线性方程组，将微分方程特征值问题转化为广义代数特征值问题，配合 QR 算法实现求解。在同等精度情况下，本文离散单元比插值矩阵法更少。

6.2 主要创新点

(1)本研究基于 Williams 渐近展开法,构建了 V 形切口尖端多阶应力场理论框架,实现应力奇性指数与高阶非奇异项(T 应力项)的同步求解。突破传统单奇异项分析局限,证实了高阶非奇异项对三维应力分布及断裂评估精度具有显著调控作用,为建立高精度切口结构失效判据奠定理论基础。

(2)本研究将 DQM 引入断裂力学领域,构建了各向同性板、功能梯度中厚板及正交各向异性复合材料板的切口应力奇异性分析模型。算例验证表明:DQM 所得奇性指数与经典解最大误差 $\leq 1\%$,且在同等精度下相较于传统方法离散单元数更少。

(3)本研究系统揭示了各向同性板几何构型、功能梯度-均质材料界面分布及正交各向异性材料主轴取向对切口应力奇性的调控机制。通过多元不同参数分析,构建了材料/几何优化配置与奇性强度衰减的映射关系,为工程结构切口应力集中控制提供优化设计准则。

6.3 不足与展望

(1)本文只计算了应力奇性指数,并未定量表征应力奇性强弱的关键参数(如应力强度因子)提供理论依据。基于本研究的分析成果,可尝试运用多尺度混合计算方法:在 V 形切口尖端奇异主导区域采用解析-半解析方法进行特征场分析,而在远离尖端的常规应力区域则结合有限元法、边界元法等数值方法构建全域解。

(2)本研究虽建立功能梯度中厚板切口奇性分析体系,可尝试拓展至功能梯度薄板领域研究中。

(3)本研究尚未涉及压电材料切口力-电耦合奇异场的定量表征问题,未来需突破三大核心挑战:其一,建立力-电多物理场耦合的变系数微分方程模型;其二,发展三维奇异场降维理论与多场边界约束的数学表征方法,解决位移/电势特征角函数与奇性指数的非线性关联难题;其三,构建基于微分求积法(DQM)的混合离散算法,实现广义代数特征值问题的求解。

参考文献

- [1] Hu K X, Yeh C P. Stress singularities in microelectronic solder joints with V-notches[J]. IEEE Transactions on Components and Packaging Technologies, 2002, 25(2): 256-263.
- [2] Carpinteri A. Stress singularity at sharp angular corners in plates[J]. Engineering Fracture Mechanics, 1987, 28(1): 51-58.
- [3] Seweryn A. Brittle fracture criterion for structures with sharp notches[J]. International Journal of Fracture, 1994, 65(1): 61-71.
- [4] 酆正能, 张纪奎. 工程断裂力学 [M]. 北京:北京航空航天大学出版社, 2012.
- [5] Irwin G R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate[J]. Journal of Applied Mechanics, 1957, 24: 361-364.
- [6] Anderson T L. Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications. 4th ed. CRC Press, 2017.
- [7] Rice J R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks[J]. Journal of Applied Mechanics, 1968, 35: 379-386.
- [8] Bogy D B. Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading[J]. Journal of Applied Mechanics, 1968, 35: 460-466.
- [9] Williams M L. The stresses around a fault or crack in dissimilar media[J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 1959, 49(2): 199-204.
- [10] Hutchinson J W. Singular behavior at the end of a tensile crack in a hardening material[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1968, 16(1): 13-31.
- [11] Rice J R, Rosengren G F. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1968, 16(1): 1-12.
- [12] Wells A A. Application of Fracture Mechanics of and Beyond General Yielding [J]. British Welding, 1963, (10): 563~570.
- [13] Rice J R. A Path Independent Integral and the Approximate analysis of Strain

- Concentrations by Notches and Cracks[J]. *Applied Mechanics*, 1968, 35: 379~286.
- [14] Hutchinson J W. Singular Behavior at the End of a Tensile Crack in a Hardening Material[J]. *the Mechanics and Physics of Solids*, 1968, 16: 13~31.
- [15] Rice J R, Rosengren G F. Plane Strain Deformation Near crack Tip in a Power-Law Hardening Material[J]. *Mechanics and Physics of Solids*, 1968, 16: 1~12.
- [16] LI Y T, Song M. Method to calculate stress intensity factor of V-notch in bi-materials[J]. *Acta Mechanica, Solida Sinica*, 2008, 21(4): 337-346.
- [17] Zhong Zheng-hua, Luo Jian-hui. Theory and Refined Theory of Elasticity for Transversely Isotropic Plates and a New Theory for Thick Plates[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1988, 9(4): 341-354.
- [18] Williams M L. Surface stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates under bending[C]//*Proceedings of the First US National Congress of Applied Mechanics*. Chicago, 1951: 325-329.
- [19] Sih G C, Paris P C, Erdogan F. Crack-tip, stress-intensity factors for plane extension and plate bending problems[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1962, 29(2): 306-312.
- [20] Knowles J K, Wang N M. On the bending of an elastic plate containing a crack[J]. *Journal of Mathematics and Physics*, 1960, 39(5): 223-236.
- [21] LIU Chun-tu. Stresses and deformations near the crack tip for bending plate[J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 1983, 9(3): 441-448.
- [22] Zucchini A, Hui CY, Zehnder AT. Crack tip stress fields for thin, cracked plates in bending, shear and twisting: A comparison of plate theory and three-dimensional elasticity theory solutions[J]. *International Journal of Fracture*, 2000, 104: 387~407.
- [23] Berto F, Lazzarin P, Kotousov A, Harding S. Out-of-plane singular stress fields in V-notched plates and welded lap joints induced by in-plane shear load conditions[J]. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 2011, 34(4): 291~304.

-
- [24] Li J. Singularity analysis of near-tip fields for notches formed from several anisotropic plates under bending[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2002, 39: 5767~5785.
 - [25] Treifi M, Oyadiji SO, Tsang DKL. Computations of modes I and II stress intensity factors of sharp notched plates under in-plane shear and bending loading by the fractal-like finite element method[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2008, 45: 6468~6484.
 - [26] 梁平英, 陈梦成. 一种新的计算各向异性材料裂纹尖端应力强度因子杂交元法[J]. *计算力学学报*, 2007(02): 209-214.
 - [27] Penado FE. Singular intensity factors at bimaterial anisotropic interfaces[J]. *Compos Struct*, 2001, 52(3): 323~333.
 - [28] Sih G C, Rice J R. The bending of plates of dissimilar materials with cracks[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1964, 31(3): 477-482.
 - [29] Sih G C. Flexural problems of cracks in mixed media[C]//*Proceedings of the First International Conference on Fracture*. Sendai, 1965, 1: 391-409.
 - [30] Huang CS. Corner singularities in bi-material Mindlin plates[J]. *Composite Structures*, 2002, 56: 315~327.
 - [31] 王大鹏. 工程结构 V 形切口奇性特征分析[D]. 合肥工业大学, 2015.
 - [32] Aman Garg HD, Chalak. A review on analysis of laminated composite and sandwich structures under hygrothermal conditions[J]. *Thin-Walled Structures*, 2019, 142: 205-226.
 - [33] Ichiro Shiota, Yoshinari Miyamoto. Functionally Graded Materials 1996[C]//*Proceedings of the 4th International Symposium on Functionally Graded Materials*. AIST Tsukuba Research Center. Tsukuba, Japan, 1996: 21-24.
 - [34] Shen H S. Functionally Graded Materials Nonlinear Analysis of Plates and Shells[M]. Boca Raton: CRC Press, 2009.
 - [35] 王强. 含 V 形切口结构强度与疲劳寿命研究[D]. 合肥工业大学, 2013.
 - [36] Saidi AR, Hejripour F, Jomehzadeh E. On the stress singularities and boundary layer in moderately thick functionally graded sectorial plates[J]. *Applied Mathematics*

- atical Modelling, 2010, 34: 3478-3492.
- [37] Barati E, Mohandesi JA, Alizadeh Y. The effect of notch depth on J-integral and critical fracture load in plates made of functionally graded aluminum–silicon carbide composite with U-notches under bending[J]. Materials & Design 2010, 31 (10): 4686-4692.
- [38] Ciavarella M, Cancelling the effect of sharp notches or cracks with graded elastic modulus materials[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 2024, 192: 105809.
- [39] Singh H, Bhardwaj G, Grover N. Modeling and static analysis of porous functionally graded and FG-sandwich plates[J]. Structures 2024, 68: 107034.
- [40] Huang CS, Chang MJ. Corner stress singularities in an FGM thin plate[J]. International Journal of Solids and Structures 2007, 44(9): 2802-2819.
- [41] Huang CS. Corner stress singularities in a high-order plate theory[J]. Computers & Structures 2004, 82(20-21): 1657-1669.
- [42] Huang CS, Chang MJ. Geometrically Induced Stress Singularities of a Thick FGM Plate Based on the Third-Order Shear Deformation Theory[J]. Mechanics of Advanced Materials and Structures 2009, 16(2): 83-97.
- [43] 陈建, 吴林志, 杜善义. 采用无单元法计算含边沿裂纹功能梯度材料板的应力强度因子[J]. 工程力学, 2000, (05): 139-144.
- [44] 黄干云, 汪越胜, 余寿文. 功能梯度材料的平面断裂力学分析[J]. 力学学报, 2005, (01): 1-8.
- [45] 李聪, 胡斌, 牛忠荣. 反平面塑性 V 形切口尖端应力和位移渐近解[J]. 应用力学和数学, 2021, 42(12): 1258-1275.
- [46] 程长征, 丁昊, 周伟. 功能梯度中厚板切口奇性分析[J]. 合肥工业大学学报(自然科学版), 2015, 38(07): 938-943.
- [47] Ang D D, Williams M L. Combined stresses in an orthotropic plate having a finite crack[J]. Journal of Applied Mechanics, 1961, 28(3): 372-378.
- [48] Sih G C, Chen E P. Cracks in Composite Materials[M]. Mechanics of Fracture. 6. Hague, Boston, London: Martinus Nijhoff Publishers, 1981: 76-87.

-
- [49] 童予靖, 王元淳. 正交各向异性平面问题应力强度因子的边界元分析[J]. 上海力学, 1995(03): 250-254.
 - [50] Delale F. Stress singularities in bonded anisotropic materials[J]. Int. J. Solids Structures, 1984, 20: 31~40.
 - [51] Chen H P. Stress singularities in anisotropic multi-material wedges and junctions [J]. Int.J. Solids Structures, 1998, 11: 1057~ 1073.
 - [52] Li J. Singularity analysis of near-tip fields for notches formed from several anisotropic plates under bending[J]. International Journal of Solids and Structures, 2002, 39(23): 5767-5785.
 - [53] Pageau S S, Jr S B B. A finite element approach to three-dimensional singular stress states in anisotropic multi-material wedges and junctions[J]. Int. J. Solids Structures, 1996, 33: 33~47.
 - [54] 平学成, 陈梦成, 谢基龙. 各向异性复合材料尖劈和接头的奇性应力指数研究 [J]. 应用力学学报, 2004, 21(3): 27~32.
 - [55] Shin KC, Liu H, Lee JJ, Choi ST. Interfacial crack tip field in anisotropic/isotropic biomaterials[J]. Composite Structures, 2004, 66: 673~676.
 - [56] Ungamornrat J. Analysis of 3D cracks in anisotropic multi-material domain with weakly singular SGBEM[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2006, 30: 834~846.
 - [57] Ma H, Zhao LG, Chen YH. Non-singular terms for multiple cracks in anisotropic elastic solids[J]. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 1997, 27: 129~134.
 - [58] Chue CH, Liu CI. A general solution on stress singularities in an anisotropic wedge[J]. Solids Structures, 2001, 38: 6889~6906.
 - [59] 牛忠荣. 轴对称变厚度扁球壳的非线性弯曲问题[J]. 应用数学和力学, 1993, 14(11): 971-978.
 - [60] 葛仁余, 程长征, 杨智勇, 等. 插值矩阵法分析正交各向异性板切口应力奇异性[J]. 应用数学和力学, 2014, 35(04): 459-470.
 - [61] 斯米尔诺夫. 结构的振动和稳定性[M]. 楼志文译, 科学出版社, 1963.

-
- [62] Bellman R, Casti J. Differential quadrature and long-term integration[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1971, 34(2): 235-238.
 - [63] 王鑫伟. 微分求积法在结构力学中的应用[J]. 力学进展, 1995, (02): 232-240.
 - [64] 聂国隽, 仲政. 用微分求积法求解梁的弹塑性问题[J]. 工程力学, 2005, (01): 59-62+27.
 - [65] 王忠民, 王昭, 张荣, 等. 基于微分求积法分析旋转圆板的横向振动[J]. 振动与冲击, 2014, 33(01): 125-129.
 - [66] M. Shariyat, F. Farzan Nasab. Low-velocity impact analysis of the hierarchical viscoelastic FGM plates, using an explicit shear-bending decomposition theory and the new DQ method[J]. Composite Structures, 2014, (113): 63-73.
 - [67] Feri, M., Krommer, M., & Alibeigloo, A. Elasticity solution of functionally graded viscoelastic sandwich plates with piezoelectric layers under electrothermomechanical loading using DQM[J]. Journal of Thermal Stresses, 2025, 48(1): 82-111.
 - [68] Al-Furjan, M. S. H., Shan, L., Shen, X., Kolahchi, R., & Rajak, D. K. Combination of FEM-DQM for nonlinear mechanics of porous GPL-reinforced sandwich nanoplates based on various theories[J]. Thin-Walled Structures, 2022, 178.
 - [69] Lei, J., He, Y., Guo, S., Li, Z., & Liu, D. Thermal buckling and vibration of functionally graded sinusoidal microbeams incorporating nonlinear temperature distribution using DQM[J]. Journal of Thermal Stresses, 2017, 40(6): 665-689.
 - [70] Karimi, M., Mirdamadi, H.R. & Shahidi, A.R. Shear vibration and buckling of double-layer orthotropic nanoplates based on RPT resting on elastic foundations by DQM including surface effects[J]. Microsyst Technol, 2017, 23: 765–797.
 - [71] Zhang, Q., Du, Y.-F., & Zhu, Q.-K. Study on large deformation mechanical behavior of Euler-Bernoulli beam using DQM[J]. Engineering Mechanics, 2014, 31: 1-4+10.
 - [72] Vaghefi M, Rahideh H, Boveiri S, etc. Numerical Study of Two-Dimensional Burger's Equation: The Phenomenon of the Fall of Sediment Particles Using Incremental Differential Quadrature Method[J]. Iranian Journal of Science and Technology - Transactions of Civil Engineering, 2021, 45(4).

- [73] Williams M L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension[J]. Journal of Applied Mechanics, 1952, 19(4): 526-528.
- [74] Farzam A, Hassani B, Isogeometric analysis of in-plane functionally graded porous microplates using modified couple stress theory[J]. Aerospace Science and Technology, 2019, 91: 508-524.
- [75] 穆耶赛尔·艾合买提,阿布都热西提·阿布都外力. 改进复合梯形求积公式[J]. 首都师范大学学报(自然科学版), 2016, 37(06): 1-4.
- [76] Cheng, C.Z., Niu, Z.R. & Recho, N. Effect of non-singular stress on the brittle fracture of V-notched structure[J]. Int J Fract, 2012, 174(2): 127–138.
- [77] 许金泉. 界面力学[M]. 北京: 科学出版社, 2006.

攻读硕士学位期间发表的期刊论文

- [1]曹玖银, 李思燃, 葛仁余. DQM 法研究双相功能梯度材料中厚度扇形板 V 形切口的应力奇性[J]. 应用数学和力学, 1-17 (北大核心见刊)
- [2]李思燃, 葛仁余. 微分求积法研究各向同性板切口应力奇性[J]. 安徽工程大学学报.(已录用)
- [3]刘世君, 曹玖银, 李思燃, 葛仁余. FGM 圆柱管自由振动的微分求积法研究[J]. 计算力学学报, 1-8.(CSCD 核心)

致 谢

行文至此，意味着我的硕士学位论文即将完成。回首这段充满挑战与成长的学术旅程，心中感慨万千。在此，我谨向所有在论文研究和写作过程中给予我支持、指导和帮助的人致以最诚挚的感谢。

首先，我要衷心感谢我的导师葛仁余教授。感谢您从论文选题、框架设计到研究推进过程中的悉心指导。您严谨的治学态度、渊博的学术造诣和对科研创新的敏锐洞察力，让我深刻理解了学术研究的真谛。在论文修改的关键阶段，您逐字逐句的批注和建设性意见更是让我受益匪浅。能师从于您，是我学术生涯的幸运。

感谢建工学院的汪超、廖斌、曹兵、陈善群等老师，在课程学习和学术交流中给予我的启发与帮助。同时，感谢实验室的同门张龙飞，杜旭泽，马亮亮，钱华山，姚乐，曹玖银同学，感谢你们在实验协作、数据分析和日常讨论中的支持。这段共同奋斗的时光将成为我珍贵的回忆。

感谢我的父母和家人。你们始终无条件地支持我的选择，在我遇到挫折时给予温暖的鼓励，在我专注学业时默默分担生活的压力。你们的爱与包容是我不断前行的动力。此外，还要感谢我的爱人王思童，你的陪伴与开解让我在枯燥的科研生活中始终保持积极心态并勇于面对困难。

最后，谨向参与本论文评审和答辩的各位专家、学者致以崇高的敬意，感谢你们在百忙之中抽出时间提出宝贵意见。因个人能力所限，论文难免存在不足之处，恳请各位批评指正。

学术之路漫漫，我将以此为起点，继续探索未知、追求真理。

李思燃于芜湖

2025年3月