

分类号: O34; TP18

单位代码: 10363

密 级: 公开

学 号: 2221410103

题 目 基于等几何分析与飞蛾火焰算法的压电双向功能梯度板优化设计研究

题 目 Optimized design study of piezoelectric bi-directional functionally graded plate based on isogeometric analysis and moth flame algorithm

学生姓名: 马亮亮

指导教师: 汪超 (副教授)

专 业: 应用力学与工程结构

研究方向: 计算力学与结构优化

论文答辩日期: 2025 年 5 月 14 日

安徽工程大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：我恪守学术道德，崇尚严谨学风。所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已明确注明和引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品及成果的内容。论文为本人亲自撰写，我对所写的内容负责，并完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

学位论文作者签名：马亮亮

日期：2025年5月16日

安徽工程大学学位论文版权使用授权书

学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅或借阅。本人授权安徽工程大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保密 ☐，在 _____ 年解密后适用本版权书。

本学位论文属于

不保密 ☒。

学位论文作者签名：马亮亮

日期：2025年5月16日

指导教师签名：陈超

日期：2025年5月16日

基于等几何分析与飞蛾火焰算法的压电双向功能梯度板 优化设计研究

摘 要

等几何分析基于有限元的等参单元思想，它将 CAD 中用于描述几何模型的样条基函数直接作为形函数，从而实现了 CAD 与 CAE 的无缝集成。与传统有限元法相比，IGA 具有几何精确性高、计算精度优越、高阶连续性良好、鲁棒性强以及无需传统网格划分过程等显著优势。相对于传统的梯度优化算法，飞蛾火焰算法无需复杂的灵敏度信息推导，算法结构简单，易于集成化，且对初始值的依赖性较低。本文基于等几何分析和飞蛾火焰算法研究压电双向功能梯度板的力学行为，主要内容如下：

（1）基于无标度网络机制和自适应权重策略开发了改进的飞蛾火焰算法，有效增强了算法在大规模全局优化问题中的探索与开发能力。进一步基于非支配排序法和参考点策略，将算法扩展为多目标优化版本，并通过标准测试函数和工程实例验证了算法的有效性与实用性。

（2）基于三阶剪切变形理论和单目标飞蛾火焰算法，建立压电双向功能梯度板的等几何材料优化模型。二维 B 样条基函数被用来表示陶瓷体积分数的分布，沿平面控制点的体积分数和施加电压被设定为设计变量。压电双向功能梯度板材料优化更具有设计自由度，相关算例表明了所提出优化模型的可行性和优越性。

（3）基于准三维剪切变形理论，建立四变量压电双向功能梯度

板的等几何分析模型，分析压电双向功能梯度板的自由振动和弯曲问题。准三维板理论考虑了剪切变形和厚度拉伸效应，不需要剪切修正因子，且只有四个未知量。非均匀有理 B 样条曲线（NURBS）的高阶连续性满足了准三维理论的 C^1 连续性要求。详细讨论板尺寸效应、材料分布、电压以及不同荷载等对压电双向功能梯度板力学性能的影响。

（4）基于准三维剪切变形理论和改进的多目标飞蛾火焰算法，建立压电双向功能梯度板的等几何形状控制优化模型。在优化设计问题中，在最小静态形状误差和最大一阶固有频率的条件下，同时优化了压电双向功能梯度板的材料布局、压电层的控制电压和厚度。通过分析方形、斜形和复杂形状压电双向功能梯度板的各种数值示例，验证了所提出方法的有效性和适用性。

关键词：压电双向功能梯度板；等几何分析；飞蛾火焰算法；形状优化；材料分布优化

OPTIMIZATION DESIGN STUDY OF PIEZOELECTRIC BI-DIRECTIONAL FUNCTIONALLY GRADED PLATES BASED ON ISOGEOMETRIC ANALYSIS AND MOTH FLAME ALGORITHM

ABSTRACT

Isogeometric analysis (IGA) is based on the concept of the equipotential unit of finite elements, utilizing the spline basis functions from CAD to directly represent the geometric model as shape functions. This approach enables the seamless integration of CAD and CAE. In comparison to the traditional finite element method, IGA offers several advantages, including high geometric accuracy, superior computational precision, better higher-order continuity, enhanced robustness, and the elimination of the need for traditional meshing. In comparison to traditional gradient-based optimization algorithms, the moth flame optimization algorithm simplifies the process by removing the need for complex sensitivity derivations. Its structure is straightforward, easy to integrate, and less reliant on initial values. This paper investigates the mechanical behavior of a piezoelectric bi-directional functionally graded plate using isogeometric analysis and the moth flame optimization algorithm. The main contributions are as follows:

(1) The improved moth flame optimization algorithm is developed based on a scale-free network mechanism and an adaptive weighting strategy,

significantly enhancing the algorithm's ability to explore and exploit large-scale global optimization problems. Additionally, the algorithm is extended to a multi-objective optimization version using the non-dominated sorting method and reference point strategy. The effectiveness and practicality of the algorithm are verified through standard test functions and engineering examples.

(2) An isogeometric material optimization model for piezoelectric bi-directional functionally graded plates is developed using the third-order shear deformation theory and an improved single-objective moth flame optimization algorithm. Two-dimensional B-spline basis functions are employed to represent the distribution of ceramic volume fractions, with the volume fractions and applied voltages at control points along the plate set as design variables. Optimizing material configurations in piezoelectric bi-directional functionally graded plates provides enhanced design flexibility, relevant numerical examples demonstrate the effectiveness and distinct advantages of the proposed optimization framework.

(3) An isogeometric analytical model for a four-variable piezoelectric bi-directional functionally graded plate is developed using the quasi-three-dimensional shear deformation theory to analyze its free vibration and bending behavior. The quasi-3D plate theory accounts for shear deformation and thickness stretching effects, eliminates the need for shear correction factors, and involves only four unknown quantities. The higher-order

continuity of nonuniform rational B-spline curves (NURBS) meets the C1 continuity requirement of the quasi-3D theory. The effects of plate size, material distribution, voltage, and various loads on the mechanical properties of piezoelectric bi-directional functionally graded plates are discussed in detail.

(4) An isogeometric shape control optimization model for piezoelectric bi-directional functionally graded plates is developed based on the quasi-3D shear deformation theory and the improved multi-objective moth flame optimization algorithm. In the optimization design problem, the material layout of the piezoelectric bi-directional functionally graded plate, as well as the control voltage and thickness of the piezoelectric layer, are simultaneously optimized under the conditions of minimum static shape error and maximum first-order intrinsic frequency. The effectiveness and applicability of the improved multi-objective moth flame optimization algorithm are verified through various numerical examples of square, skew, and complex-shaped piezoelectric bi-directional functionally graded plates.

Keywords: Piezoelectric bi-directional functionally graded plate; isogeometric analysis; moth flame algorithm; shape optimization; material distribution optimization

目录

第 1 章 绪论.....	1
1.1 研究背景与意义	1
1.2 基于等几何分析的压电板结构研究进展	2
1.2.1 压电功能梯度板概述	2
1.2.2 等几何分析的理论研究	2
1.2.3 基于等几何分析的板结构应用	3
1.2.4 基于等几何分析的压电板结构应用	4
1.3 飞蛾火焰算法的研究进展	5
1.3.1 智能优化算法	6
1.3.2 飞蛾火焰算法	6
1.3.3 压电板结构优化的研究进展	8
1.4 本文研究的主要内容	8
第 2 章 基于混合无标度网络的飞蛾火焰算法.....	10
2.1 飞蛾火焰算法的基本原理	10
2.2 改进方法	10
2.2.1 混合无标度网络	11
2.2.2 改进算法的复杂度分析	12
2.3 仿真实验	13
2.3.1 高维度 CEC'2010 基准函数测试	13
2.3.2 高维度 CEC'2013 基准函数测试	17
2.3.3 单目标优化工程算例	19
2.4 改进的多目标飞蛾火焰算法	27
2.4.1 多目标问题描述	27
2.4.2 改进机制	28
2.4.3 算法有效性验证研究	29
2.4.4 多目标优化工程算例	33
2.5 本章小结	37
第 3 章 压电双向功能梯度板材料优化设计.....	38

3.1 压电双向功能梯度板	38
3.2 三阶剪切变形理论	39
3.3 等几何分析的基本原理	42
3.4 基于 TSDT 的 IGA 控制方程	44
3.5 优化设计目标	45
3.6 收敛性与准确性研究	46
3.6.1 压电 2D-FGP 的自由振动分析	46
3.6.2 悬臂式压电 FGP 的弯曲分析	48
3.7 数值算例	50
3.7.1 方形压电 2D-FGP	50
3.7.2 斜形压电 2D-FGP	53
3.7.3 飞镖形压电 2D-FGP	56
3.8 本章小结	60
第 4 章 基于准三维理论的压电双向功能梯度板静力学分析	61
4.1 准三维板理论	61
4.2 基于 quasi-3D 的 IGA 控制方程	62
4.3 数值算例	66
4.3.1 网格收敛性验证	66
4.3.2 自由振动验证	68
4.3.3 弯曲验证	70
4.3.4 自由振动分析	70
4.3.5 静态弯曲分析	75
4.4 本章小结	79
第 5 章 变厚度压电双向功能梯度板的形状控制优化	80
5.1 优化设计目标	80
5.2 数值算例	错误!未定义书签。
5.2.1 变厚度方形压电 2D-FGP	错误!未定义书签。
5.2.2 变厚度斜形压电 2D-FGP	84
5.2.3 变厚度复杂形状压电 2D-FGP	86
5.3 本章小结	89

第 6 章 结论与展望.....	90
6.1 结论	90
6.2 主要创新点	91
6.3 不足与展望	91
参考文献	93
硕士研究生期间取得的工作成果	108
致谢	109

第 1 章 绪论

1.1 研究背景与意义

压电功能梯度板作为典型的薄壁结构构件，目前已广泛应用于航空航天^[1]，机器人^[2]，建筑^[3]和医学^[4]等工程领域。在面向各类压电功能梯度板型结构的工程需求中，如应变能最少、局部应力最小、质量最轻、自振频率最大等性能指标优化时，设计者需根据压电板的本构关系、几何非线性、边界条件等特性，建立对应的数学模型。通过参数化设计方法改变结构的几何尺寸、拓扑构型和材料分布，并结合数值计算方法，在满足强度、刚度、稳定性等约束条件下，采用人工智能优化算法，实现板结构在给定设计域内的最优化设计，以获得理想的力学性能和结构效率。与单向压电功能梯度板相比，双向压电功能梯度板在两个方向上实现材料性能的梯度分布，能够更高效地分散应力，缓解局部应力集中，显著提升结构的稳定性与力学性能，尤其适用于复杂荷载工况下的工程设计需求。力学分析是结构设计的基石，而数值计算方法是复杂形状和多相变材料板的最有效分析工具之一。有限单元法在处理复杂形状问题时，容易造成网格自由度剧增及畸变等现象；无网格法^[5]在处理高阶精度问题和自适应性上更优，但由于缺乏统一的数学表达式和参数确定性，难以形成通用的集成化程序。为此，美国 Hughes 教授提出了等几何分析（Isogeometric Analysis, IGA）^[6]。IGA 具有几何精确、精度高、高阶连续、鲁棒性好、无需传统的网格划分过程等优点^[7]。

传统的结构优化方法一般采用基于梯度的优化算法，如梯度下降法，牛顿法和共轭梯度法等。这类算法收敛速度快，优化结果稳定，但需要对象连续可微，并且灵敏度的推导过程需要人工干预。与梯度算法相比，作为群智能算法的飞蛾火焰算法（Moth flame optimization, MFO）^[8]具有以下优势：①无需偏导数信息，有效避开了复杂结构灵敏度的繁琐推导；②根据适应度函数形成自反馈闭环系统的智能优化算法，其优化结果对初始值的依赖性较低；③算法结构简单，易于集成化。本文将等几何分析作为板力学分析的工具，以飞蛾火焰算法作为板优化方法，研究压电双向功能梯度板的形状和材料分布优化。

1.2 基于等几何分析的压电板结构研究进展

1.2.1 压电功能梯度板概述

作为复合材料的先驱，功能梯度材料（Functionally Graded Material, FGM）^[9]的概念最初由日本学者为解决航天器发动机的热防护问题而提出的。FGM 是一种特殊的复合材料，其主要特点是在材料内部实现组分性质的渐变分布。这种设计使不同的物理和化学性能得以平滑过渡。与常规均匀材料相比，FGM 不仅保留了各组成成分的优异特性，还能通过精确控制成分比例和分布，获得传统材料无法实现的复合性能^[10]。在制备过程中，工程师根据实际需求选择具有显著性能差异的两种或多种材料，并采用先进的复合工艺，使材料组成呈现渐变特征，有效避免了传统材料中常见的明显界面过渡问题，形成具有独特力学或热学性能的复合结构。

压电材料^[11]是一种先进的智能材料。这些材料具有压电效应，即在受力作用下会产生电位差（正压电效应），或者在电场作用下产生机械应力（正压电效应）。由于压电材料具有优异的性能，它们在各类工程系统和部件中得到了广泛应用。例如，智能系统中的感知与执行组件、振动抑制与噪声减少技术，以及结构形变的动态调节等^[12-14]。在实际应用中，压电材料通常被粘贴在基体结构的上下表面，作为传感器或驱动装置。通过这种设计，可以有效控制结构的振动和形变。然而，这种方法也存在一些显著的局限性。当粘接压电片的结构遭受冲击负荷时，粘接区域会产生严重的应力集中；而在高温或低温环境下，压电片和基体之间可能会出现裂纹，甚至导致剥离现象^[15]。这些问题可能会导致压电智能结构的使用寿命缩短，并降低其可靠性。为此，研究人员提出了压电功能梯度材料（Functionally Graded Piezoelectric Material, PFGMs）^[16]，各组分（包括压电材料）的物理特性在一个方向或多个方向上呈连续梯度变化。这种材料的优势在于其组成和性能的空间连续变化，使得压电性能、介电性能等关键参数能够得到合理分布，从而避免了明显的内部界面。通过这种设计，可以有效减小应力集中现象，降低应力峰值，并且提高位移响应。FGPMs 作为一种全新的材料设计理念，其应用前景十分广阔。

1.2.2 等几何分析的理论研究

在工业领域，计算机辅助设计（Computer Aided Design, CAD）和计算机辅助工程（Computer Aided Engineering, CAE）是两项至关重要的技术。工业设计通常通过 CAD 工具来创建初步的设计模型，接着将这些模型转换为适合进行有限元分析的几何形式和网格，然后将其导入到有限元分析软件中，以进行热学、力学和电磁等仿真计算。这个转换过程往往耗时且复杂，尤其是在处理大型或复杂的工程设计时，转换效率成为一个重要的挑战。为了将 CAD 和 CAE 无缝集成到一个统一的框架，Hughes 等提出了等几何分析（Isogeometric analysis, IGA）的概念，该方法的核心思想是使用 NURBS（Non-Uniform Rational B-Splines）基函数直接作为形函数进行结构分析，从而实现设计与分析之间的无缝连接。相较于传统的有限元分析，等几何分析具有许多优势，例如能够保持几何模型的高精度、实现单元间的高阶连续性，并在网格细分过程中依然保留原有的参数化特性。

NURBS 样条因其高阶连续性和在单元边界处保持光滑且非零的特性，在使用常规高斯积分时往往面临效率较低和收敛性不佳的问题。Hughes 等^[17]提出，常规高斯积分法需要的积分点数至少为基函数阶次加一，并采用半点积分规则，通过减少积分点数量提高计算效率。Wang 等^[18]提出了一种基于 NURBS 的等几何分析的改进公式，通过应用转换方法来强制实施基本边界条件，从而克服了直接对 NURBS 控制点施加边界条件时产生的误差，显著提高了收敛速率和解的准确性。A. Karatarakis 等^[19]提出了一种 GPU 加速计算等几何分析刚度矩阵的方法。Yu 等^[20]提出了一种基于几何无关场近似的等几何方法，该方法能够充分发挥局部细化的潜力，同时保持原始几何形状的精确性，无需重新参数化。徐等^[21]采用了基函数分类重用的积分策略来提高计算精度。

1.2.3 基于等几何分析的板结构应用

不同的板结构应采用适合其结构的不同板壳理论加以分析。在等效单层板理论中，首先提出了基于 Kirchhoff-Love 假设的经典板理论^[22]（Classical plate theory, CPT）。由于忽略了横向剪切变形，因此仅适用于薄板问题的分析。Reissner^[23]和 Mindlin^[24]提出了考虑剪切效应的一阶剪切变形理论（First-order shear deformation theory, FSDT）。在 FSDT 模型中，由于采用了沿板厚方向的线性位移假设，得到的剪切应变和应力分布并不准确，且无法满足板表面无牵引力的边界条件。因此，需要通过引入剪切修正因子（Shear Correction Factors, SCF）来校正不真实的剪切

应变能部分。SCF 的值在许多问题中相当分散，可能难以确定^[25]。为了克服 FSDT 的局限性，学者们提出了多种高阶剪切变形理论^[26]（Higher-order shear deformation theory, HSDT），其中包括位移近似中的高阶项，如三阶剪切变形理论^[27-28]（TSDT）、三角剪切变形理论^[29-30]、指数剪切变形理论^[31-32]（ESDT）和精炼板理论^[33-34]（RPT）等。

在板壳问题方面，由于 NURBS 基函数固有的高阶连续性，能够满足板壳理论对基函数连续性的要求。Yu 等^[35]提出了一种基于 IGA 的一阶剪切变形理论，用于功能梯度板的几何非线性分析。随机 IGA 方法结合扰动技术，应用于考虑材料随机性的功能梯度板自由振动分析^[36]。Huang 等^[37]提出了一种等几何无网格配位方法来分析层压复合板的力学性能，既降低了计算成本，又提高了收敛速度与精度。Guo 等^[38]提出了抑制剪切锁定的非线性功能分级板分析模型，结合了高阶剪切变形理论与 IGA 方法。Yin 等^[39]基于高阶剪切变形理论与 IGA 对双向功能梯板的振动与屈曲问题进行了分析。Lieu 等^[40]基于三阶剪切变形理论与等几何模型，分析了热机械载荷下功能梯度板的力学行为。Nguyen 等^[41]基于 IGA 和准三维板理论对复杂开孔 FGM 板进行自由振动分析，详细研究了陶瓷体积分数、板长厚比和边界条件对振动行为的影响。

在结构优化方面，NURBS 可以实现高效的几何控制和平滑的边界。Fußeder 等^[42]提出了一个基于优化的等几何分析形状优化理论框架，其复杂形状的状态和控制都通过 B 样条或 NURBS 离散化。Wall 等^[43]将 NURBS 离散化将用于解决二维线弹性结构的最优化问题。Tsipitsis 等^[44]基于等几何分析对承受垂直和水平载荷的桁架和框架塔进行尺寸、形状优化。Nørtoft^[45]将等几何形状优化应用于流体力学，采用 B 样条作为设计优化与流动分析的基础，实现了几何模型与分析模型的统一，同时推动了复杂几何的紧凑表示与流场的平滑近似。Weeger 等^[46]采用等几何优化弯曲、自由形状、非线性三维梁的形状。

1.2.4 基于等几何分析的压电板结构应用

等几何分析凭借其精确的几何描述能力与高阶连续性优势，近年来在压电板结构力学行为研究中展现出独特的应用潜力。针对压电板的多场耦合非线性问题，研究者通过深度融合 IGA 与先进力学理论框架，系统突破了传统有限元方法在几何参数化、场变量连续性及计算效率等方面的局限。具体而言，其方法论创新可

归纳为三个维度：在静力学层面，通过结合广义/高阶剪切变形理论实现了复杂载荷下机电耦合响应的精细化建模；在动力学领域，依托 NURBS 基函数的高阶光滑性有效提升了振动控制与瞬态分析的计算精度；而对于不确定性量化问题，则通过随机有限元与蒙特卡罗方法的集成拓展了 IGA 的工程适用性。这些研究进展共同构建了从确定性分析到随机模拟、从线性响应到非线性行为、从静态变形到动态控制的全工况求解体系，为智能压电板结构的设计与优化提供了系统的数值分析工具。

Phung-Van 等^[47]结合 IGA 和广义剪切变形理论对智能压电功能梯度材料板进行非线性瞬态分析。刘等^[48-49]提出了一种基于四变量一阶剪切变形理论的等几何分析（IGA）方法系统研究了热环境下表面粘结压电功能梯度板的静态弯曲与振动控制问题，深入分析了压电功能梯度板在热环境中的非线性力学行为，并揭示了温度分布对其在热-电-机械载荷耦合作用下几何非线性响应的影响。Hasim 等^[50-51]通过系统构建基于高阶 NURBS 函数的几何/运动变量离散化框架，在压电层压复合板分析中实现了方法学的统一：针对静态弯曲问题，其利用 NURBS 基函数的高阶连续性确保了应变场平滑性，通过算例对比验证了计算效率优势；而在动态分析领域，进一步结合分层离散策略与机电耦合变分原理，将同一 NURBS 参数化体系扩展至自由/受迫振动及位移控制场景，二者共同揭示了该框架在降低网格敏感性、提升场变量收敛速率方面的普适性特征，形成了从静态到动态的全工况高精度求解能力。徐等^[52]提出了一种基于蒙特卡罗模拟的等几何随机有限元法，用于量化压电材料板振动分析中的不确定性。在该方法中，通过 IGA 获得耦合特征值问题的固有频率。

1.3 飞蛾火焰算法的研究进展

传统梯度优化算法通常依赖于目标函数的解析特性（如导数、可微性）和约束空间的几何结构（如凸性），在规则明确、线性或低维度问题上表现优异，但面对非线性、多约束或高维度的复杂场景时效果受限。而智能优化算法则通过模拟自然界的自组织行为、社会协作机制或物理演化规律，摆脱了对目标函数解析性质的依赖，采用随机搜索与自适应机制，具备更强的全局搜索能力，能够在复杂的优化空间中寻找近似最优解。

1.3.1 智能优化算法

近年来,智能优化算法一直是学术界研究的热点。一般来说,它们可以大致分为三类:生物启发,基于物理或化学和人类启发^[53]。在基于生物启发算法中,遗传算法^[54]是一种基于达尔文进化原理的元启发式计算模型,通过模拟适者生存的进化过程来获得问题的最优解。受蚂蚁觅食行为的启发,蚁群优化^[55]算法是一种用于在复杂路径问题中识别最优解的概率方法。人工蜂群算法^[56]是一种模拟蜜蜂觅食行为的智能优化方法。粒子群优化(Particle swarm optimization, PSO)^[57]是一种基于观察鸟类觅食信息的群体智能算法。萤火虫算法^[58]是 Yang 基于萤火虫的光敏性提出的种群智能优化算法。在基于物理或化学的算法中, Kirkpatrick 等在研究了金属退火过程与组合优化问题的相似性后,提出了一种模拟退火算法^[59]。基于人类的算法受到人类或社会行为的启发。其中,文化算法^[60]便是对人类社会多方面进化过程的模拟与反映。同样,和谐搜索算法^[61]、重力搜索算法^[62]、布谷鸟搜索算法^[63]、蝙蝠搜索算法^[64]、狩猎搜索算法^[65]、水循环算法^[66]、帝企鹅群体优化算法^[67]、蜻蜓算法^[68]、海洋捕食者算法^[69]也相继被提出。这些智能优化算法展现出显著的可扩展性,能够在不过度增加算法计算负担的前提下扩展种群规模,从而更高效地解决优化问题^[70]。

1.3.2 飞蛾火焰算法

飞蛾火焰算法是一种参数少、可扩展性强且鲁棒性强的群体智能算法,在很多实际的工程优化问题中如电气工程、风能、PID 控制、电力调度、图像处理、机器学习彰显出优秀的优化性能。图 1-1 给出了 MFO 在 Web of Science 近七年的论文发表量,可以看出, MFO 自 2018 年以来持续成为研究热点。

为提高其全局优化性能,近年来,学者们对 MFO 的基本机制进行了多项改进。Kaur 等^[71]通过引入柯西分布函数增强了探索能力,并利用最佳火焰的影响提升了 MFO 的开发性能。Xu 等^[72]将高斯变异、柯西变异和 Lévy 变异引入 MFO 算法,提出了一系列新的 MFO 变体,显著提升了 MFO 在复杂优化任务中的探索和开发能力。王等^[73]采用混沌映射进行种群初始化,通过维数学习生成优质火焰以提升算法搜索效率,并引入二次插值方法更新飞蛾位置,进一步增强算法的局部搜索能力。Xu 等^[74]在 MFO 中加入了文化学习机制与高斯突变算子,进一步优化了算法性能。此外, Li 等^[75]在火焰优化中引入 Lévy 飞行与逐维评估策略,以增

强全局搜索能力。从种群多样性角度出发,有研究引入了用于多样性反馈控制的惯性权重机制^[76]。针对 MFO 算法搜索形式的单一性问题,许多研究提出了改进方案。Sharma^[77]采用费马螺线替代对数螺旋线,以增强飞蛾运动的多样性。Taher^[78]则引入双曲螺旋线来优化位置更新过程。此外, Singh^[79]提出了一种混合搜索机制,结合螺旋搜索和直线搜索,以提升算法在不同距离情况下的搜索性能。这些改进有效丰富了 MFO 算法的搜索策略,提高了其适应性和优化效率。除了上述方面, MFO 算法还在高维问题^[80]和二进制编码^[81]等领域得到了进一步的研究和应用。

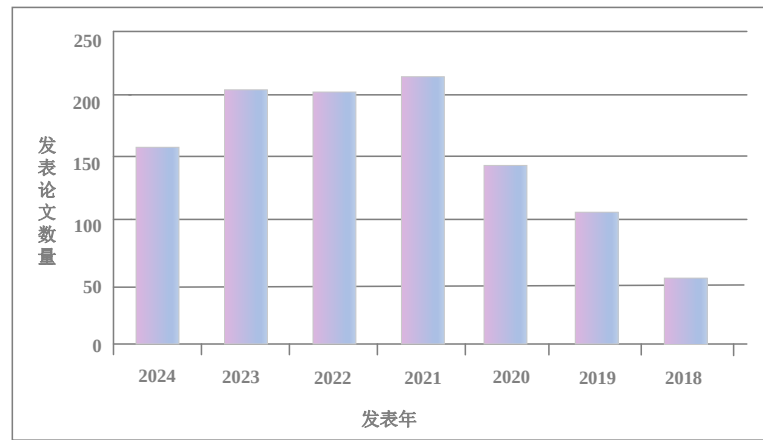


图 1-1 Web of Science 关于 MFO 主题的论文发表统计图

多目标优化在解决复杂工程问题时具有重要意义,能够同时平衡多个冲突目标,为决策者提供多样化的解决方案。Savsani 等^[82]基于拥挤距离法和精英非支配排序法提出了一种求解多目标问题的非支配飞蛾火焰算法。Sapre 等^[83]提出了一种基于模拟机制的多目标飞蛾火焰算法,其中飞蛾的位置根据每一代飞蛾之间的成对竞争进行更新。Zhang 等^[84]将 R 支配排序方法引入多目标飞蛾火焰算法,有效解决了高维目标空间中因帕累托解之间难以相互支配而导致的优先级缺失问题。目前,多目标优化算法已成功应用于实际工程优化问题。Taher^[85]提出了一种改进的多目标飞蛾火焰算法,有效解决了最优潮流问题。Wang 等^[86]使用多目标离散 MFO 识别社交网络中影响力最大化的群体。Khan 等^[87]结合多目标飞蛾火焰算法与全局-局部搜索机制,解决了阀点负荷效应与随机风效应对经济负荷调度问题的优化需求。Alazab 等^[88]将 MFO 用作搜索算法,结合决策树作为评估算法,为入侵检测系统生成高效的特征子集,从而提高了分类性能。

1.3.3 压电板结构优化的研究进展

结构优化集几何建模、结构分析和优化算法于一体，在航空航天^[89]、能源^[90]、机械^[91]和土木工程^[92]等领域有着广泛的应用。结构优化的目的是通过优化压电材料的外部参数，如电压、位置和大小形状等来提高结构的性能，从而达到减少应力集中、减轻重量和提高刚度的目的。通常，记忆合金和压电材料等智能材料被集成到结构表面，以优化或控制其形状。

智能优化算法对初始配置和噪声的稳健性及其与压电板结构优化的无缝集成引起了广泛的研究兴趣。Nguyen 等人^[93-94]开发了一种新颖的进化算法，用于解决带有主动压电致动器的智能复合板结构的各种结构形状控制问题。Xu 等^[95]通过奇异值分解与遗传算法协同优化压电板结构拓扑、作动器布局及控制参数，实现了轻量化设计与振动控制性能提升。Liew 等^[96-97]分别采用遗传算法与计算智能方法，结合有限元法(FEM)开展了功能梯度板压电贴片的形状控制研究。文献^[98-99]进一步将改进型遗传算法应用于压电复合材料板形状优化设计领域。Kang 团队^[100]创新性地将压电基底离散为多栅格区域，通过拓扑优化方法对栅格阵列的压电片电液开关模式进行优化设计，建立了基于单通道电压调控的静态形状控制新范式。汪等^[101]基于三阶剪切变形理论建立了一种压电功能梯度板静力学行为的等几何分析模型，在最小静态形状误差和最大一阶固有频率的条件下，同时优化了压电功能梯度板的材料布局和压电层的控制电压。Zhang 等^[102]利用高阶剪切理论对带有压电贴片的功能梯度复合板进行形状控制优化，采用遗传算法优化压电致动器参数，并揭示了材料分布与结构参数对控制效果的影响。李等^[103]基于 Hamilton 原理和 Rayleigh-Ritz 法推导了 FGPM 板的运动方程，采用速度反馈控制方法揭示功能梯度压电材料板中材料梯度分布、体积分数及外电压位置等参数对主动振动控制效果的影响规律。然而，以上关于压电功能梯度板的研究主要集中于材料沿厚度方向的单一梯度分布，而在工程实践中，常需实现材料特性的二维或多向梯度分布。为此，本文基于等几何分析和智能优化算法，建立双向压电功能梯度板的等几何优化模型。

1.4 本文研究的主要内容

IGA 直接采用 CAD 系统中的 NURBS 作为力学分析的离散基函数。这种方法

的优势体现在两方面：第一，几何模型与计算模型使用相同数学模型，省去了传统有限元法的网格重构过程，显著提升了计算效率；第二，NURBS 的高阶连续性可以精确描述复杂曲面边界，避免了传统离散方法导致的几何信息丢失。在优化算法上，MFO 属于典型的无梯度优化范式，其算法结构简单、收敛速度快、解释容易理解等特点。本文研究以 IGA 方法为基础，结合飞蛾火焰算法对压电双向功能梯度板结构优化设计研究，其主要研究为：

- （1）基于无标度网络机制和自适应权重策略开发了改进的飞蛾火焰算法，并基于非支配排序法和参考点策略，将算法扩展为多目标优化版本。
- （2）基于三阶剪切变形理论和飞蛾火焰算法，建立压电双向功能梯度板的等几何材料优化模型。通过相关算例来证明其有效性。
- （3）基于准三维剪切变形理论，建立四变量压电双向功能梯度板的等几何分析模型，分析压电双向功能梯度板的自由振动和弯曲问题，讨论材料特征长度参数、板尺寸、材料分布、电压以及不同荷载等对压电双向功能梯度板力学性能的影响。
- （4）基于准三维剪切变形理论和改进的多目标飞蛾火焰算法，建立压电双向功能梯度板的等几何形状控制优化模型，并与基本飞蛾火焰算法及其他优化方法进行分析对比。

结合上述研究内容，本研究的相关技术路线如图 1-2 所示。

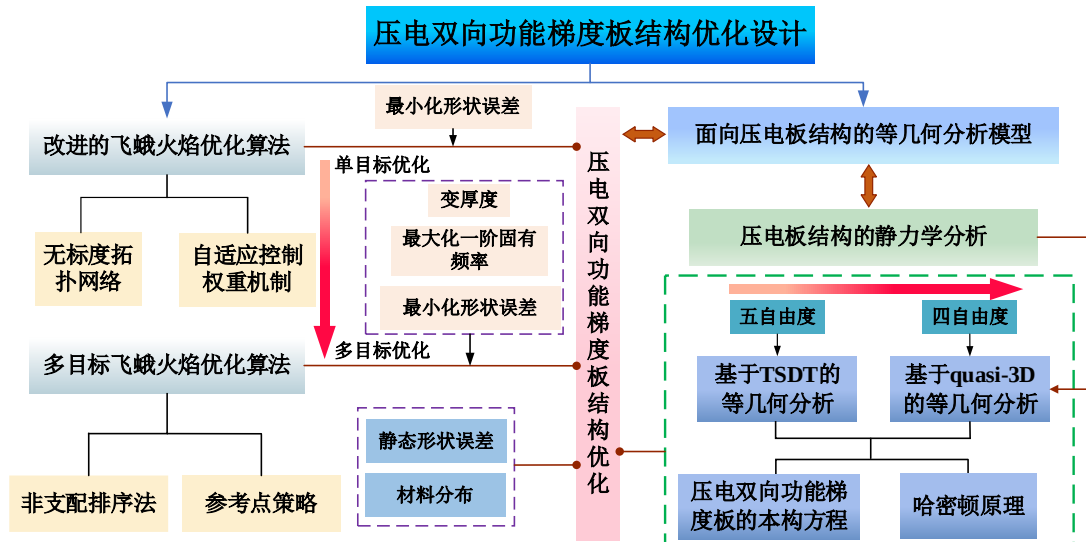


图 1-2 技术路线

第 2 章 基于混合无标度网络的飞蛾火焰算法

本章提出了一种基于混合无标度飞蛾火焰算法的方法，以解决工程设计中常面临的大规模全局优化挑战。该算法采用基于无标度拓扑的飞蛾模仿机制，显著增强了局部寻优能力，使其能有效利用解空间中的优势区域。此外，通过集成小概率突变机制和自适应权重策略，算法可协同预防局部停滞并促进解空间的持续探索。

2.1 飞蛾火焰算法的基本原理

飞蛾火焰算法（MFO）借鉴了自然界飞蛾的横向定位导航机制。飞蛾在夜间飞行时，以远处的月亮为参照物，由于月光可视为平行光，飞蛾通过调整自身与光线的角度来确定飞行方向。当飞蛾接近火焰时，它会与火焰保持一定角度飞行，如图 2-1 所示。由于飞蛾与火焰之间的距离不断变化，飞蛾最终形成一条近似螺旋状的飞行轨迹。基于这一行为特征，MFO 算法的机制被构建如下：

$$M_i = D_{ij} e^{bt} \cos(2\pi t) + F_j \quad (2-1)$$

式中， M_i 是第 i 个飞蛾的位置， F_j 是第 j 个火焰的位置。第 i 只飞蛾绕着离它最近的第 j 个火焰飞。常数 b 定义为对数螺旋的形状， t 是 0 到 1 之间的随机数。

D_{ij} 表示 M_i 到 F_j 的距离，其表述如下：

$$D_{ij} = |F_j - M_i| \quad (2-2)$$

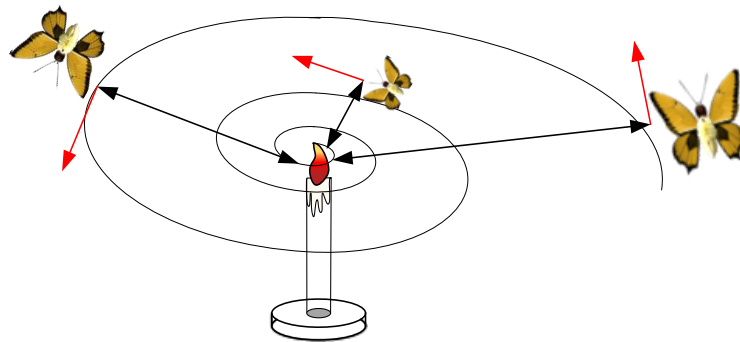


图 2-1 环绕近光源的螺旋飞行路径

2.2 改进方法

MFO 因其设计简单、收敛速度快、解释容易理解等特点，被广泛认为是一种

常用的优化算法，经常用于解决实际问题。但是，将该算法应用于解决大规模全局优化（Large-scale global optimization, LSGO）问题时，在挖掘能力方面可能会遇到困难。这可能会导致飞蛾陷入局部最优状态，导致收敛速度变慢，并增加算法性能的不确定性。为此，对飞蛾位置更新机制提出改进措施，以提高算法的性能。

2.2.1 混合无标度网络

在MFO机制中，每个飞蛾根据上一代的适应度（火焰的亮度）调整自己的位置。每个飞蛾都有一个预定义的数字，并根据其相应火焰的亮度进行排序，以调整其飞行姿势。然而，这种一对一的映射机制并没有给排名较低的飞蛾更多的最佳飞蛾来指导它们的飞行。这种算法机制很少能让这些飞蛾找到最佳的食物来源。为此，本章提出了基于无标度拓扑^[104]的引导飞蛾改进机制。每个飞蛾的适应度 F_{fit} 与目标空间中无标度网络的度数 k_d 相关联，即 $F_{fit} \propto k_d$ 。

$$\arg \min \text{dis}(\mathbf{M}_{\text{nest}}^j) = \{ \mathbf{M}_{\text{nest}}^j \mid \forall \mathbf{M}^j : \text{dis}(\mathbf{M}_{\text{nest}}^j) \leq \text{dis}(\mathbf{M}^j) \} \quad (2-4)$$

式中， $\text{dis}(\mathbf{M}_{\text{nest}}^j)$ 表示 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{F}_j$ 之间的欧几里得距离。

从包括 $\mathbf{M}^j$ 本身及其在拓扑网络中所有邻居的种群 $\mathbf{M}^j$ 中获取引导蛾 $\mathbf{M}^j$ ，其中选择机制采用轮盘赌选择方式执行，如下所示

$$P(\mathcal{M}_j^k) = \frac{e^{\text{fit}(\mathcal{M}_j^k)}}{\sum_{i=1}^{ns} e^{\text{fit}(\mathcal{M}_j^i)}} \quad (2-5)$$

式中， ns 为种群总数，适应度函数 $\text{fit}(\mathcal{M}_j^k)$ 表示为

$$\text{fit}(\mathcal{M}_m) = \frac{\max \{y(\mathcal{M})\} - y(\mathcal{M}_j^k)}{\max \{y(\mathcal{M})\} - \min \{y(\mathcal{M})\}} \quad (2-6)$$

相关的机制如图 2-2 所示，变量空间为 x_1Ox_2 平面，目标空间为 y 轴。飞蛾之间的连线表示它们在适应度方面的拓扑关系。可以看出，离 *Flame#1* 最近的飞蛾是 *Moth#1*，通过每个飞蛾的高度找到无标度网络中 *Moth#1* 的所有邻居。然后通过轮盘赌选择，根据式 2-5 得到 *Moth#1*。

考虑到群体在决策空间上的稀疏性，自适应权重策略^[105]被纳入式（2-1）中，即

$$M_i = \omega D_{i, nest} e^{bt} \cos(2\pi t) + F_j \quad (2-7)$$

$$D_{i, nest} = |F_j - M_j| \quad F_j \neq M_j, \quad \omega = e^{-\varrho} \left(1 - \frac{t}{T_{max}} \right) \quad (2-8)$$

$$\varrho = \frac{\sum_{i=1}^N \sqrt{\sum_{j=1}^{dim} (M_{i,j} - \bar{M}_{,j})^2}}{N \sqrt{\sum_{j=1}^{dim} (ub_j - lb_j)^2}} \quad (2-9)$$

式中, dim 表示优化变量的数量。在第 j 个维度中, $M_{i,j}$ 是第 i 个飞蛾的值, 而 $\bar{M}_{,j}$ 是所有飞蛾的平均值。根据式 (2-8), 在 F_j 和 $M_{i,j}$ 处于同一位置的条件下, 飞蛾 M_i 的更新机制有一定的局限性。因此, 突变行为的小概率嵌入为

$$M_{i,j} = rand() \times (ub_j - lb_j) + lb_j \quad \text{if} \quad data \leq 0.3 \quad (2-10)$$

此外, 为了进一步提高飞蛾火焰算法的探索能力, 还引入了一定的随机突变概率, 并将该突变触发器设置为小于 0.1 的随机数。

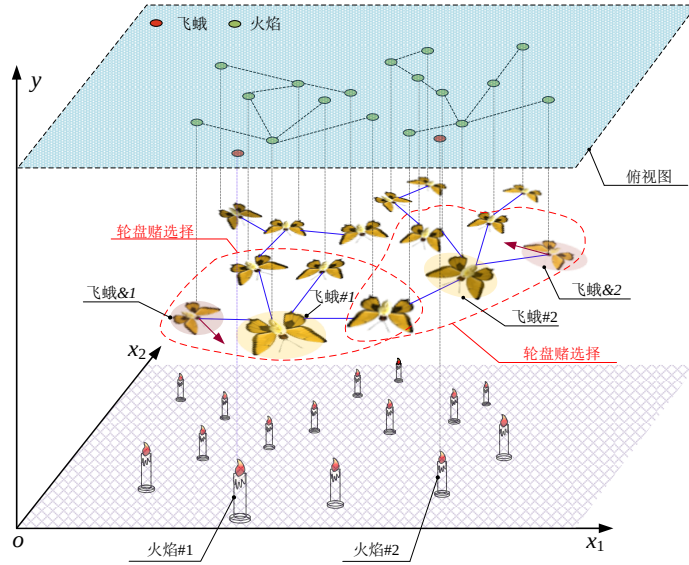


图 2-2 改进的飞蛾火焰算法示意图

2.2.2 改进算法的复杂度分析

基于上述机制, 改进的飞蛾火焰算法 (Improved Moth Flame Algorithm, IMFO) 兼顾了探索能力和开发能力的提高。无标度网络的拓扑机制可以使飞蛾在火焰捕获行为阶段更有效地模仿适应性更好的个体, 加快收敛速度; 而突变机制则增加了种群的多样性, 使飞蛾更容易跳出局部最优。

算法的计算复杂度是评估其效率和性能的重要指标，也是衡量其运行时间的关键因素。IMFO 的时间计算复杂度主要取决于最大迭代次数 (M_{iter})、飞蛾数量 (ns)、变量数 (dim)、初始化、排序、无标度拓扑机制、自适应权重策略和突变机制。IMFO 的计算复杂度可表示为：

$$\begin{aligned}
 (IMFO) &= O(\text{初始化}) + O(\text{快速排序}) + O(\text{无标度拓扑机制}) \\
 &+ O(\text{多样性权重}) + O(\text{变异机制}) = \\
 &= O(ns \times dim) + O(M_{iter} \times ns^2) + O(M_{iter} \times ns) + O(M_{iter} \times ns \times dim) + O(M_{iter} \times ns) \quad (2-11) \\
 &= O(M_{iter}(ns^2 + ns \times dim))
 \end{aligned}$$

2.3 仿真实验

本节使用 CEC'2010 和 CEC'2013 系列函数中的大规模测试集进行了仿真实验。此外，还利用四个大型工程优化问题进行测试。为了评估所提算法的效率，将其与 MFO、混沌变异飞蛾算法 (CMFO) [106] 和基于 Lévy 飞行的飞蛾算法 (LMFO) [107]、粒子群算法 (PSO) [108]、差分进化算法 (DE) [109]、灰狼优化器 (GWO) [110] 和算术优化算法 (AOA) [111] 进行了比较。为确保算法之间的公平性，在同一环境中对所有算法进行了测试。MATLAB 软件在 Windows 7 系统上使用，该系统配备运行频率为 3.2 GHz 的英特尔酷睿处理器。最大适合度评估数 (maxFES) 和种群规模分别设置为 3×10^6 和 50。每种算法在测试集函数上独立模拟 30 次。平均值和标准偏差等数学统计数据用于评估这些优化算法的性能。此外，还引入了 t 值和 Wilcoxon 符号秩检验，可以在样本有限的情况下评估两种算法的优劣。相应的符号 “+”、“-” 和 “ $\approx$ ” 分别表示所提算法优于、等于和劣于其他算法。此外，“gm” 表示 “+” 和 “-” 之间的差值。

2.3.1 高维度 CEC'2010 基准函数测试

在 CEC'2010 中，在 20 个 1000 维的测试函数上用 IMFO 评估了七种算法，以展示 IMFO 在 LSGO 问题上的性能。在进行了 30 次独立运行后，以表格形式给出了平均实验结果，包括均值、方差、 t 值和 Wilcoxon 符号秩检验。图 2-3 描述了 IMFO 和其他算法的收敛曲线。

从表 2-1 可以看出，与其他七种算法相比，IMFO 在一半以上的 CEC'2010 函数集上显示出显著效果。对于第一类（可分离函数 F1-F3），统计结果显示本文的算法明显优于 DE、PSO、GWO、AOA 和 MFO。对于第二类（部分可分离函数

F4-F18), IMFO 在函数 F4、F5、F7、F8、F9、F12、F13、F14 和 F18 上获得了比其他比较算法更好的适配值。对于函数 F6、F10、F11、F15、F16 和 F17, IMFO 的结果优于 PSO、GWO、AOA、MFO 和 CMFO。表 2-1 显示, IMFO 为一半以上的部分可分离函数提供了最佳解决方案。图 2-3 显示, 得益于更好的开发能力, IMFO 具有持续收敛的能力, 收敛速度明显快于其他方法。对于第三类(不可分离函数 F19-F20), IMFO 在函数 F20 上的表现优于其他算法。

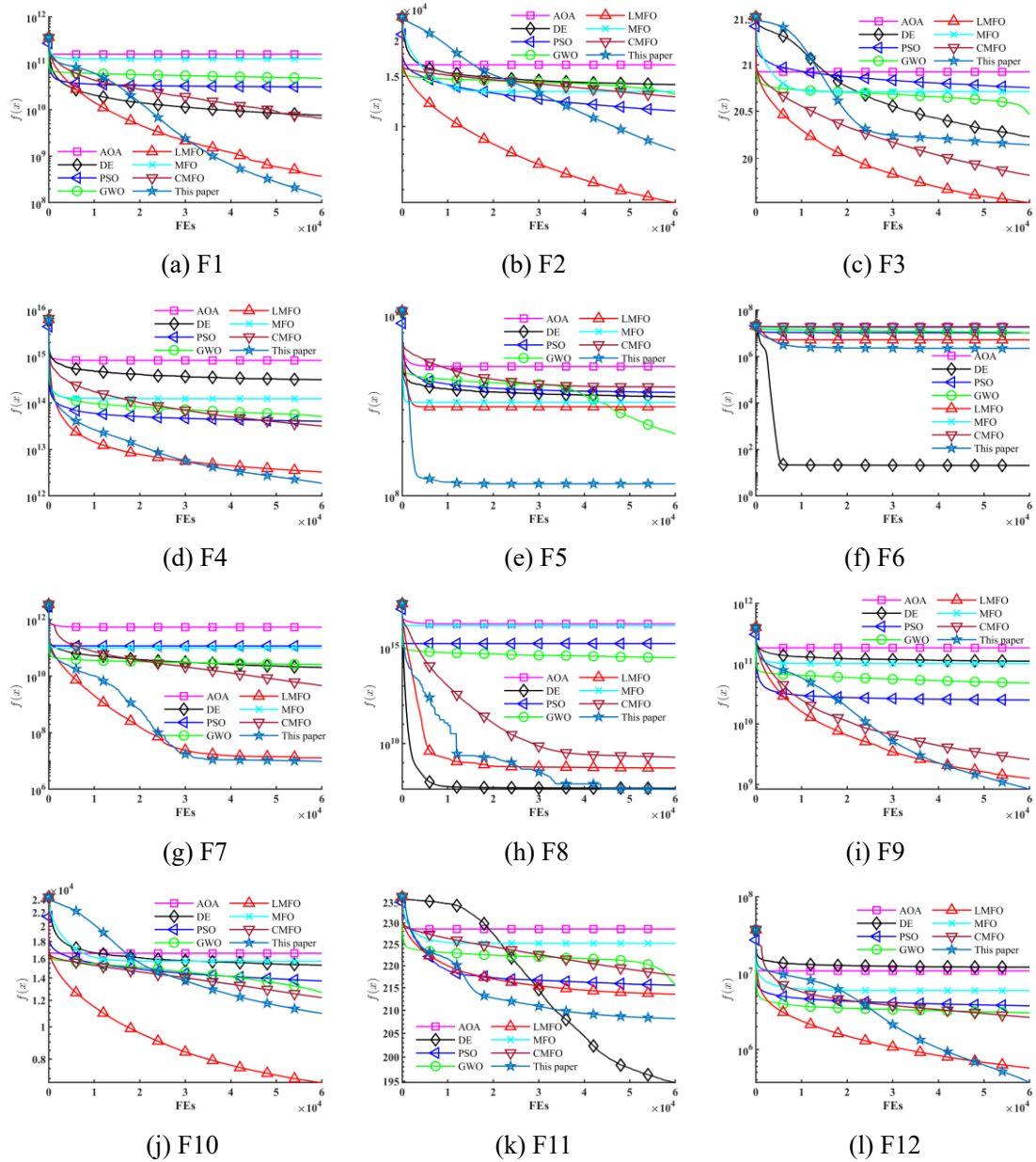


图 2-3 CEC' 2010 测试函数收敛图

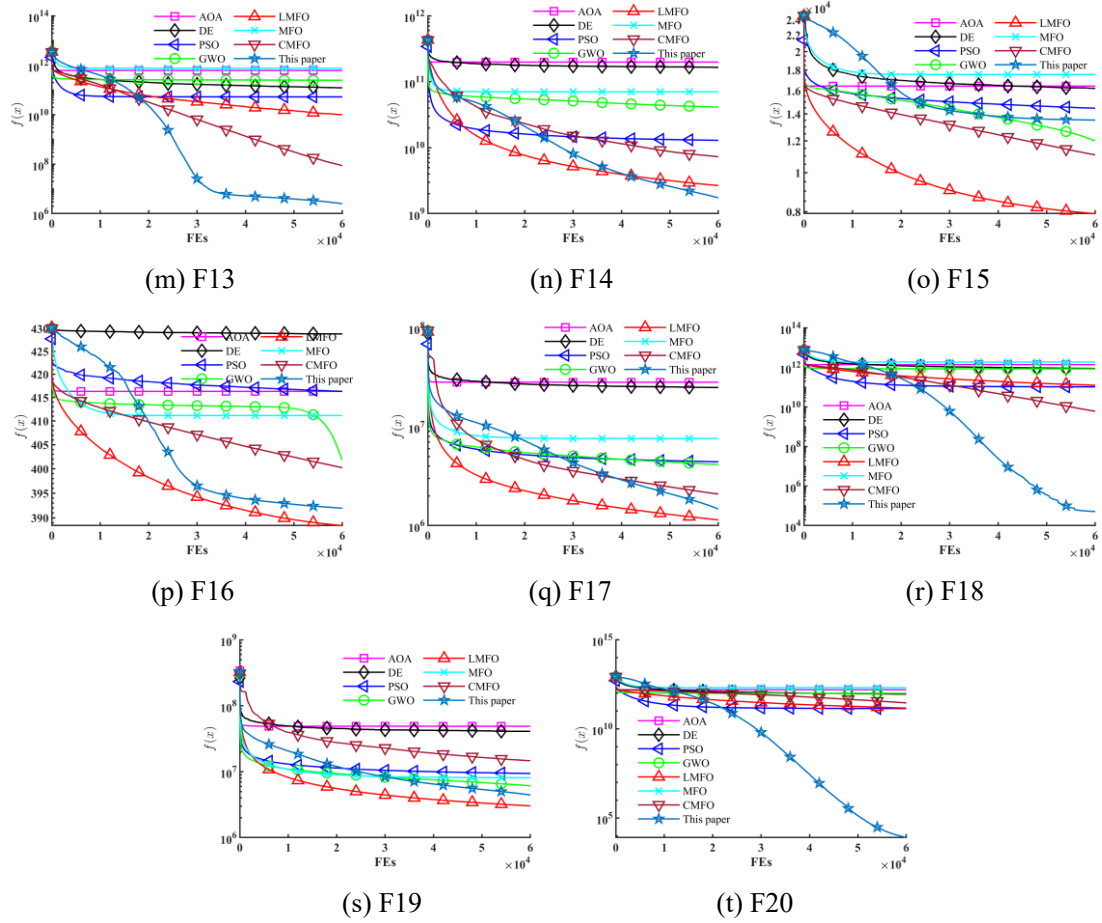


图 2-3 (续图) CEC' 2010 测试函数收敛图

表 2-1 CEC'2010 测试函数结果

函数		DE	PSO	GWO	AOA	MFO	CMFO	LMFO	本章 算法
F1	平均值	7.60E+09	3.10E+10	4.73E+10	1.56E+11	1.24E+11	6.59E+09	3.72E+08	1.34E+08
	方差	2.24E+08	8.36E+09	5.01E+09	7.17E+09	2.58E+10	2.49E+09	2.07E+08	1.72E+07
	t 值	7.13E-46	1.22E-18	4.40E-30	1.34E-40	8.11E-22	1.39E-14	6.28E-07	NAN
	wilcoxon	+	+	+	+	+	+	=	
F2	平均值	1.40E+04	1.13E+04	1.30E+04	1.65E+04	1.33E+04	1.27E+04	5.40E+03	8.24E+03
	方差	9.01E+01	2.96E+02	2.61E+02	6.88E+01	4.15E+02	1.92E+02	2.05E+02	3.35E+02
	t 值	2.19E-37	4.65E-25	2.69E-32	4.02E-42	3.10E-32	2.77E-33	3.07E-25	NAN
	wilcoxon	+	+	+	+	+	+	=	
F3	平均值	2.02E+01	2.08E+01	2.05E+01	2.09E+01	2.07E+01	1.98E+01	1.95E+01	2.01E+01
	方差	3.95E-02	2.90E-02	4.56E-02	7.53E-03	2.54E-02	5.53E-02	1.28E-01	5.04E-02
	t 值	4.40E-08	7.17E-31	1.00E-23	3.26E-36	8.55E-32	5.72E-19	3.96E-21	NAN
	wilcoxon	=	=	=	=	=	=	=	
F4	平均值	3.19E+14	4.07E+13	5.14E+13	8.26E+14	1.24E+14	3.22E+13	3.30E+12	1.89E+12
	方差	4.00E+13	2.75E+13	2.69E+13	2.48E+14	1.42E+14	7.09E+12	7.40E+11	7.40E+11
	t 值	6.44E-28	1.70E-08	5.60E-11	2.06E-17	5.27E-05	9.06E-21	1.03E-07	NAN
	wilcoxon	+	+	+	+	+	+	=	

表 2-1 (续表) CEC'2010 测试函数结果

函数		DE	PSO	GWO	AOA	MFO	CMFO	LMFO	本章 算法
F5	平均值	3.55E+08	3.75E+08	2.21E+08	5.21E+08	3.30E+08	4.02E+08	3.12E+08	1.17E+08
	方差	1.39E+07	5.12E+07	7.44E+07	4.11E+07	5.08E+07	3.99E+07	7.17E+07	2.39E+07
	<i>t</i> 值	1.24E-27	1.45E-19	1.24E-07	2.24E-28	2.28E-19	3.01E-26	1.44E-14	NAN
	wilcoxon	=	=	=	=	=	=	=	
F6	平均值	2.07E+01	1.05E+07	1.02E+07	1.95E+07	1.78E+07	1.87E+07	5.21E+06	2.27E+06
	方差	4.27E-02	2.42E+06	1.75E+06	2.71E+05	9.32E+05	4.84E+05	2.42E+06	1.49E+06
	<i>t</i> 值	3.28E-09	1.31E-16	2.45E-17	1.54E-31	2.68E-29	2.37E-31	6.15E-08	NAN
	wilcoxon	-	+	+	+	+	+	=	
F7	平均值	2.05E+10	1.17E+11	2.57E+10	5.44E+11	9.96E+10	4.65E+09	1.31E+07	9.78E+06
	方差	3.15E+09	6.01E+10	7.47E+09	2.38E+11	3.04E+10	2.98E+09	3.73E+06	5.09E+05
	<i>t</i> 值	1.56E-25	1.43E-11	8.03E-18	3.16E-13	2.98E-17	2.22E-09	4.67E-05	NAN
	wilcoxon	+	+	+	+	+	+	+	
F8	平均值	4.58E+07	1.67E+15	3.03E+14	1.78E+16	1.42E+16	1.93E+09	5.25E+08	4.01E+07
	方差	2.68E+06	2.05E+15	2.74E+14	3.49E+15	1.10E+16	2.96E+09	1.96E+09	4.06E+07
	<i>t</i> 值	4.39E-01	1.18E-04	1.35E-06	1.69E-22	8.41E-08	1.58E-03	1.87E-01	NAN
	wilcoxon	=	+	+	+	+	+	+	
F9	平均值	1.10E+11	2.50E+10	4.78E+10	1.83E+11	1.00E+11	2.60E+09	1.26E+09	8.28E+08
	方差	3.74E+09	5.43E+09	4.46E+09	6.17E+09	2.10E+10	2.08E+08	1.67E+08	7.11E+07
	<i>t</i> 值	2.98E-44	7.42E-21	1.74E-31	2.31E-44	1.26E-21	2.64E-28	2.81E-13	NAN
	wilcoxon	+	+	+	+	+	+	+	
F10	平均值	1.53E+04	1.37E+04	1.27E+04	1.66E+04	1.57E+04	1.22E+04	6.80E+03	1.10E+04
	方差	1.45E+02	7.17E+02	3.62E+02	9.90E+01	3.81E+02	1.94E+02	1.85E+02	3.45E+02
	<i>t</i> 值	2.83E-32	1.25E-18	1.47E-16	1.26E-37	5.38E-28	5.89E-17	3.05E-31	NAN
	wilcoxon	=	=	=	=	=	=	-	
F11	平均值	1.95E+02	2.16E+02	2.16E+02	2.29E+02	2.25E+02	2.18E+02	2.14E+02	2.08E+02
	方差	6.06E+00	5.63E+00	2.56E+00	3.06E-01	5.37E-01	5.97E-01	4.39E-01	1.76E+00
	<i>t</i> 值	4.07E-12	9.28E-08	2.67E-14	2.89E-33	4.87E-30	6.55E-22	4.49E-17	NAN
	wilcoxon	=	=	=	=	=	=	=	
F12	平均值	1.19E+07	3.73E+06	3.01E+06	1.07E+07	5.89E+06	2.63E+06	5.71E+05	3.67E+05
	方差	3.49E+05	5.77E+05	1.59E+05	7.79E+05	1.13E+06	1.16E+05	2.76E+04	3.00E+04
	<i>t</i> 值	1.61E-45	2.79E-24	7.99E-37	2.79E-34	4.75E-22	9.76E-39	2.70E-22	NAN
	wilcoxon	+	+	+	+	+	+	=	
F13	平均值	1.23E+11	5.28E+10	2.49E+11	6.19E+11	7.59E+11	8.71E+07	1.00E+10	2.51E+06
	方差	8.32E+09	3.66E+10	1.80E+10	1.17E+10	1.39E+11	1.71E+07	4.95E+09	1.54E+05
	<i>t</i> 值	1.00E-35	1.02E-08	6.48E-35	1.00E-51	2.54E-23	3.95E-22	6.37E-12	NAN
	wilcoxon	+	+	+	+	+	+	+	
F14	平均值	1.66E+11	1.30E+10	4.14E+10	1.99E+11	7.05E+10	7.30E+09	2.67E+09	1.74E+09
	方差	4.74E+09	1.32E+09	3.11E+09	8.84E+09	2.55E+10	4.04E+08	2.18E+08	1.26E+08
	<i>t</i> 值	2.00E-46	1.37E-28	8.31E-34	6.65E-41	5.15E-15	5.04E-34	5.13E-19	NAN
	wilcoxon	+	+	+	+	+	=	=	

表 2-1 (续表) CEC'2010 测试函数结果

函数		DE	PSO	GWO	AOA	MFO	CMFO	LMFO	本章 算法
F15	平均值	1.62E+04	1.45E+04	1.20E+04	1.64E+04	1.75E+04	1.11E+04	7.91E+03	1.35E+04
	方差	1.48E+02	7.76E+02	4.91E+02	1.56E+02	4.33E+02	2.02E+02	9.43E+01	7.16E+02
	t 值	1.90E-18	2.64E-05	2.99E-10	1.21E-19	5.69E-21	7.21E-18	2.61E-27	NAN
	wilcoxon	=	=	=	=	=	=	-	
F16	平均值	4.29E+02	4.16E+02	4.02E+02	4.16E+02	4.11E+02	4.00E+02	3.88E+02	3.92E+02
	方差	3.99E-01	1.54E+00	2.50E+00	2.70E-01	5.35E-01	1.12E+00	3.89E-01	4.32E+00
	t 值	2.01E-28	1.86E-24	8.74E-11	1.20E-23	1.62E-20	2.16E-10	9.39E-05	NAN
	wilcoxon	=	=	=	=	=	=	=	
F17	平均值	2.49E+07	4.42E+06	4.16E+06	2.82E+07	7.62E+06	2.09E+06	1.14E+06	1.47E+06
	方差	6.39E+05	5.76E+05	2.92E+05	2.59E+06	1.69E+06	8.42E+04	4.53E+04	5.69E+04
	t 值	7.30E-47	1.21E-22	1.45E-29	3.34E-31	2.12E-18	2.31E-23	6.44E-21	NAN
	wilcoxon	+	=	=	+	=	=	=	
F18	平均值	8.83E+11	1.04E+11	8.38E+11	1.38E+12	1.87E+12	6.06E+09	1.25E+11	5.19E+04
	方差	3.78E+10	4.28E+10	2.28E+10	1.43E+10	2.38E+11	7.67E+08	2.50E+10	2.50E+04
	t 值	1.73E-41	6.75E-14	3.35E-47	2.12E-59	7.81E-28	6.54E-28	3.07E-22	NAN
	wilcoxon	+	+	+	+	+	+	+	
F19	平均值	4.10E+07	9.41E+06	6.14E+06	4.90E+07	8.10E+06	1.47E+07	3.03E+06	4.43E+06
	方差	2.26E+06	2.05E+06	6.50E+05	8.34E+06	1.62E+06	1.39E+06	1.59E+05	1.75E+05
	t 值	1.01E-36	4.56E-14	2.01E-13	4.14E-23	1.02E-12	9.76E-27	2.31E-24	NAN
	wilcoxon	+	=	=	+	=	+	=	
F20	平均值	8.84E+11	1.38E+11	9.79E+11	1.56E+12	2.05E+12	2.85E+11	1.46E+11	7.90E+03
	方差	3.70E+10	7.68E+10	3.44E+10	1.24E+10	2.96E+11	2.34E+10	3.40E+10	1.73E+03
	t 值	9.66E-42	9.70E-11	5.94E-44	1.27E-62	2.79E-26	2.66E-33	1.90E-20	NAN
	wilcoxon	+	+	+	+	+	+	+	
		+/-/= / gm 80/3/57/77							

2.3.2 高维度 CEC'2013 基准函数测试

为了进一步评估 IMFO 在解决 LSGO 问题上的效率，选择了 CEC'2013 大规模基准集。CEC'2013 引入了一些新特征，如子分量大小不均匀、重叠的子分量以及基础函数的新变换等。因此，CEC'2013 的复杂性超过了 CEC'2010，使得问题更加棘手。

表 2-2 给出了八种算法的比较结果，图 2-4 显示了 IMFO 和其他算法的收敛曲线。根据 CEC'2013 的特性，将算法的性能分为三类进行讨论。在第一类（完全可分离函数 F1-F3）中，IMFO 显示出其优越性，在函数 F1 和 F2 方面明显优于其他几种比较算法。不过，在函数 F3 方面，IMFO 略逊于 LMFO，但与 DE、PSO、

GWO、AOA 和 MFO 相比，IMFO 仍表现出更强的性能。对于第二类函数（部分可分函数 F4-F11），本章算法在一半以上的函数上表现出显著效果。特别是在函数 F5 和 F9 上，本章算法表现出色，收敛速度更快，优化能力更强。实验结果表明，所提出的算法具有很强的稳定性，不易陷入局部解。对于第三类（重叠函数 F12-F14），本章算法比大多数比较算法都能得出更好的结果，这说明了本章算法的优越性和稳定性。对于第四类函数（完全不可分割函数），与所有其他算法对比，本章算法在求解这些复杂函数中占据优势。

表 2-2 CEC'2013 测试函数结果

函数		DE	PSO	GWO	AOA	MFO	CMFO	LMFO	本章 算法
F1	平均值	7.81E+09	3.05E+10	4.67E+10	1.66E+11	1.40E+11	6.49E+09	2.95E+08	1.65E+08
	方差	2.49E+08	6.82E+09	4.46E+09	5.53E+09	2.17E+10	2.70E+09	1.30E+08	2.43E+07
	t 值	3.70E-45	7.52E-21	2.30E-31	1.23E-44	2.42E-25	1.69E-13	5.84E-06	NAN
	wilcoxon	+	+	+	+	+	+	=	
F2	平均值	2.72E+04	2.92E+04	2.96E+04	4.47E+04	4.96E+04	2.64E+04	1.01E+04	1.35E+04
	方差	3.74E+02	1.28E+03	7.04E+02	6.26E+02	3.56E+03	1.12E+03	5.79E+02	6.98E+02
	t 值	7.77E-37	4.25E-33	6.51E-38	1.81E-45	1.57E-30	1.29E-34	6.53E-18	NAN
	wilcoxon	=	=	=	=	=	=	=	
F3	平均值	2.02E+01	2.08E+01	2.05E+01	2.10E+01	2.07E+01	2.01E+01	1.96E+01	2.02E+01
	方差	3.92E-02	4.46E-02	3.68E-02	8.51E-03	5.25E-02	5.71E-02	9.94E-02	6.05E-02
	t 值	1.01E-01	5.74E-32	1.24E-24	1.19E-34	6.30E-26	2.22E-09	4.33E-22	NAN
	wilcoxon	=	=	=	=	=	=	=	
F4	平均值	1.78E+12	6.26E+11	6.47E+11	3.17E+12	1.36E+12	1.38E+11	9.14E+10	3.33E+10
	方差	1.56E+11	2.71E+11	2.65E+11	1.31E+12	6.52E+11	5.53E+10	2.12E+10	1.50E+10
	t 值	2.65E-32	1.28E-12	3.16E-13	9.48E-14	5.73E-12	5.12E-11	2.80E-12	NAN
	wilcoxon	+	+	+	+	+	+	=	
F5	平均值	1.04E+07	1.24E+07	6.47E+11	3.04E+07	2.28E+07	2.71E+07	1.31E+07	4.95E+06
	方差	3.39E+05	1.72E+06	2.65E+11	2.33E+06	3.37E+06	2.55E+06	2.55E+06	7.86E+05
	t 值	2.10E-24	6.58E-20	1.29E-13	1.13E-32	1.05E-22	1.53E-28	9.47E-17	NAN
	wilcoxon	+	+	+	+	+	+	+	
F6	平均值	2.69E+01	6.10E+05	6.86E+05	1.01E+06	9.89E+05	9.49E+05	6.64E+05	4.47E+05
	方差	6.50E-01	9.80E+04	5.98E+04	7.55E+03	6.57E+03	9.46E+03	1.86E+05	7.85E+04
	t 值	7.25E-24	8.37E-07	3.94E-14	1.95E-26	4.69E-26	1.89E-25	1.28E-05	NAN
	wilcoxon	-	=	=	+	=	=	=	
F7	平均值	2.50E+10	8.41E+09	8.70E+09	2.19E+13	1.28E+12	1.08E+09	5.13E+08	5.49E+08
	方差	4.33E+09	1.03E+10	3.97E+09	1.06E+13	1.50E+12	5.25E+08	1.71E+08	1.39E+08
	t 值	7.40E-24	2.53E-04	4.37E-12	3.95E-12	5.93E-05	7.70E-06	4.36E-01	NAN
	wilcoxon	+	+	+	+	+	+	=	

表 2-2 (续表) CEC'2013 测试函数结果

函数		DE	PSO	GWO	AOA	MFO	CMFO	LMFO	本章 算法
F8	平均值	2.32E+16	1.35E+16	8.95E+15	1.02E+17	2.38E+16	3.19E+15	4.08E+14	3.10E+14
	方差	4.74E+15	1.45E+16	6.62E+15	5.92E+16	3.30E+16	1.78E+15	1.77E+14	1.64E+14
	t 值	1.16E-21	2.69E-05	6.16E-08	2.47E-10	5.17E-04	1.22E-09	3.49E-02	NAN
	wilcoxon	+	+	+	+	+	+	=	
F9	平均值	8.89E+08	1.12E+09	6.62E+08	2.39E+09	1.77E+09	1.97E+09	9.71E+08	4.93E+08
	方差	1.99E+07	1.21E+08	6.76E+07	2.78E+08	2.81E+08	2.44E+08	1.56E+08	5.86E+07
	t 值	2.52E-24	1.19E-22	3.97E-10	1.23E-25	3.55E-21	7.72E-25	1.40E-15	NAN
	wilcoxon	+	+	+	+	+	+	=	
F10	平均值	1.15E+03	3.28E+07	2.09E+07	8.57E+07	4.57E+07	7.86E+07	1.06E+07	2.00E+06
	方差	1.68E+01	1.24E+07	1.11E+07	2.66E+06	1.71E+07	7.44E+06	3.78E+06	2.24E+06
	t 值	3.35E-05	5.67E-14	3.32E-10	1.42E-41	1.50E-14	1.06E-29	6.25E-10	NAN
	wilcoxon	-	+	+	+	+	+	+	
F11	平均值	4.31E+13	5.28E+11	2.66E+12	1.07E+15	7.71E+13	1.72E+11	3.24E+10	4.47E+09
	方差	8.84E+12	3.18E+11	9.88E+11	3.88E+14	1.37E+14	8.40E+10	2.58E+10	7.39E+08
	t 值	5.91E-22	9.11E-11	5.98E-13	2.94E-15	4.37E-03	7.92E-12	1.87E-06	NAN
	wilcoxon	+	+	+	+	+	+	+	
F12	平均值	8.84E+11	1.22E+11	1.01E+12	1.60E+12	2.01E+12	2.65E+11	1.49E+11	8.25E+03
	方差	2.99E+10	8.08E+10	3.64E+10	1.94E+10	2.06E+11	4.92E+10	2.23E+10	2.85E+03
	t 值	1.91E-44	4.16E-09	1.25E-43	2.39E-57	1.55E-30	3.57E-23	8.23E-26	NAN
	wilcoxon	+	+	+	+	+	+	+	
F13	平均值	2.10E+13	1.09E+11	7.35E+11	1.80E+15	2.34E+13	1.63E+10	9.91E+09	1.88E+10
	方差	5.32E+12	5.11E+10	4.59E+11	9.12E+14	3.36E+13	4.06E+09	2.33E+09	4.15E+09
	t 值	1.93E-19	1.59E-10	1.93E-09	1.08E-11	6.77E-04	3.13E-02	4.22E-11	NAN
	wilcoxon	+	+	+	+	+	=	-	
F14	平均值	1.00E+14	9.86E+11	2.51E+12	2.08E+15	6.33E+13	2.58E+11	9.24E+10	1.04E+11
	方差	3.10E+13	3.83E+11	6.01E+11	1.03E+15	1.28E+14	1.03E+11	2.85E+10	5.92E+10
	t 值	4.03E-17	2.16E-13	1.74E-19	6.82E-12	1.11E-02	3.53E-07	2.57E-01	NAN
	wilcoxon	+	=	+	+	+	=	-	
F15	平均值	6.14E+08	1.28E+13	5.77E+13	9.64E+14	4.84E+16	2.19E+09	7.41E+07	2.03E+07
	方差	7.98E+07	2.41E+13	1.58E+13	1.17E+14	4.97E+16	7.06E+09	1.14E+08	1.35E+06
	t 值	4.03E-27	7.00E-03	1.67E-18	2.11E-28	9.92E-06	1.02E-01	1.45E-02	NAN
	wilcoxon	+	+	+	+	+	+	=	
加号/减号/等于号/gm					73/4/28/69				

2.3.3 单目标优化工程算例

为了进一步评估 IMFO 的性能，我们在大型工程设计问题上对其进行了测试，并将其与进化算法（DE）、粒子群算法（PSO）、灰狼算法（GWO）、算术优化算法（AOA）、飞蛾火焰算法（MFO）、混沌变异飞蛾算法（CMFO）和基于 Lévy 飞行的飞蛾算法（LMFO）进行了比较。第三个工程优化问题的详情可从以下链

接获取: https://github.com/VrushabhMistry/942_Bar_Truss。

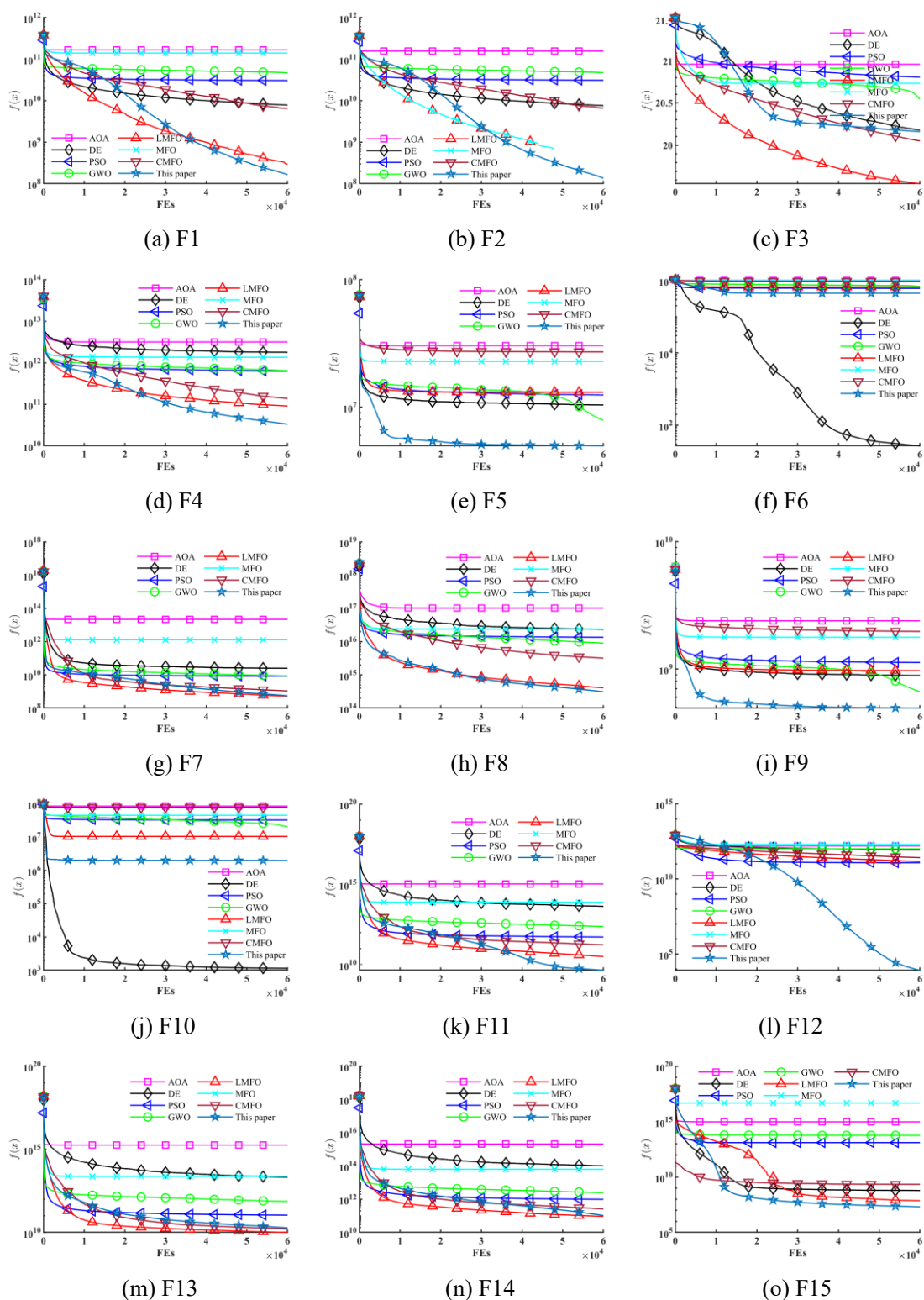


图 2-4 CEC' 2013 测试函数收敛图

(1) 车辆侧面碰撞设计

第一个高维度工程设计问题为汽车侧面碰撞问题^[112], 如图 2-5 所示。该问题的目的是最小化汽车的重量, 包括 B 柱内板 x_1 、B 柱加强板 x_2 、地板侧板厚度 x_3 、

横梁厚度 x_4 、车门梁厚度 x_5 、车门腰线加强板 x_6 、车顶纵梁厚度 x_7 、B 柱内板 x_8 、地板侧板材料 x_9 、障碍高度 x_{10} 和障碍撞击位置 x_{11} 。优化问题模型如下：

最小化目标函数：

$$f(\mathbf{x}) = 1.98 + 4.90x_1 + 6.67x_2 + 6.98x_3 + 4.01x_4 + 1.78x_5 + 2.73x_7 \quad (2-12)$$

约束条件：

$$g_1(\mathbf{x}) = 1.16 - 0.3717x_2x_4 - 0.00931x_2x_{10} - 0.484x_3x_9 + 0.01343x_6x_{10} \leq 0 \quad (2-13a)$$

$$g_2(\mathbf{x}) = 46.36 - 9.9x_2 - 12.9x_1x_8 + 0.1107x_3x_{10} \leq 0 \quad (2-13b)$$

$$g_3(\mathbf{x}) = 33.86 + 2.95x_3 + 0.1792x_{10} - 5.057x_1x_2 - 11x_2x_8 - 0.0215x_5x_{10} - 9.98x_7x_8 + 22x_8x_9 - 32 \leq 0 \quad (2-13c)$$

$$g_4(\mathbf{x}) = 28.98 + 3.818x_3 - 4.2x_1x_2 + 0.0207x_5x_{10} + 6.63x_6x_9 - 7.7x_7x_8 + 0.32x_9x_{10} - 4 \leq 0 \quad (2-13d)$$

$$g_5(\mathbf{x}) = 0.261 - 0.0159x_1x_2 - 0.188x_1x_8 - 0.019x_2x_7 + 0.0144x_3x_5 + 0.00008757x_5x_{10} + 0.08045x_6x_9 + 0.00139x_8x_{11} + 0.00001575x_{10}x_{11} - 0.32 \leq 0 \quad (2-13e)$$

$$g_6(\mathbf{x}) = 0.214 + 0.00817x_5 - 0.131x_1x_8 - 0.0704x_1x_9 + 0.03099x_2x_6 - 0.018x_2x_7 + 0.0208x_3x_8 + 0.121x_3x_9 - 0.00364x_5x_6 + 0.000715x_5x_{10} - 0.0005354x_6x_{10} + 0.00121x_8x_{11} + 0.00184x_9x_{10} - 0.02x_2^2 - 0.32 \leq 0 \quad (2-13f)$$

$$g_7(\mathbf{x}) = 0.74 - 0.61x_2 - 0.163x_3x_8 + 0.001232x_3x_{10} - 0.166x_7x_9 + 0.227x_2^2 - 0.32 \leq 0 \quad (2-13g)$$

$$g_8(\mathbf{x}) = 4.72 - 0.5x_4 - 0.19x_2x_3 - 0.0122x_4x_{10} + 0.009325x_6x_{10} + 0.000191x_{11}^2 - 4 \leq 0 \quad (2-13h)$$

$$g_9(\mathbf{x}) = 10.58 - 0.674x_1x_2 - 1.95x_2x_8 + 0.02054x_3x_{10} - 0.0198x_4x_{10} + 0.028x_6x_{10} - 9.9 \leq 0 \quad (2-13i)$$

$$g_{10}(\mathbf{x}) = 16.45 - 0.489x_3x_7 - 0.843x_5x_6 + 0.0432x_9x_{10} - 0.0556x_9x_{11} - 0.000786x_{11}^2 - 15.7 \leq 0 \quad (2-13j)$$

取值范围：

$$0.5 \leq x_1 \leq 1.5, 0.45 \leq x_2 \leq 1.35, 0.5 \leq x_3 \leq 1.5, 0.5 \leq x_4 \leq 1.50.875 \leq x_5 \leq 2.625,$$

$$0.4 \leq x_6 \leq 1.2, 0.4 \leq x_7 \leq 1.20.192 \leq x_8 \leq 0.345, 0.192 \leq x_9 \leq 0.345,$$

$$0.5 \leq x_{10} \leq 1.5, 0.5 \leq x_{11} \leq 1.5$$

表 2-3 列出了所有方法评估后得到的解决方案。结果表明，获得的最优解为 $f(\mathbf{x}) = 23.5616$ ，优于对比方法。

表 2-3 汽车侧面碰撞问题优化结果

算法	PSO	BBO	GWO	AOA	EO	MFO	CMFO	LMFO	本章 算法
x_1	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
x_2	1.2785	1.2471	1.2292	1.2292	1.2291	1.2286	1.3282	1.2341	1.2341
x_3	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
x_4	1.1939	1.1897	1.1995	1.3555	1.1989	1.2002	1.1815	1.1875	1.1872
x_5	0.8750	0.8750	0.8750	0.8750	0.8750	0.8750	0.8750	0.8750	0.8750
x_6	1.0423	0.8956	0.9512	1.2000	0.8831	0.8811	0.8823	0.8794	0.8935
x_7	0.4000	0.4000	0.4000	0.4000	0.4000	0.4000	0.4000	0.4000	0.4000
x_8	0.3450	0.3221	0.3450	0.3450	0.3450	0.3450	0.1920	0.3450	0.3450
x_9	0.1920	0.3450	0.2317	0.3450	0.3450	0.3450	0.1920	0.1920	0.1920
x_{10}	1.5000	1.1260	0.6152	0.5000	0.6030	0.5051	0.5000	1.5000	1.4999
x_{11}	1.5000	0.8681	0.6696	1.5000	0.5000	0.5000	0.5000	1.5000	0.5023
最优值	23.5664	23.6587	23.5784	24.2038	23.5750	23.5767	24.1667	23.5631	23.5616

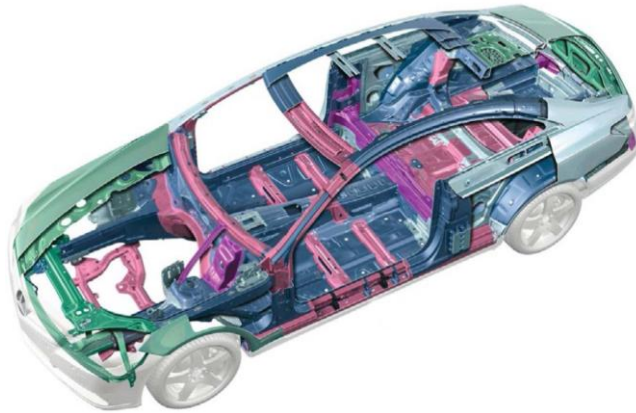


图 2-5 车辆侧面碰撞设计问题示意图^[112]

(2) 减速器设计问题

减速器优化问题如图 2-6 所示，即减速器重量最小化。该问题涉及七个设计变量，包括面宽 $b(x_1)$ 、齿模 $m(x_2)$ 、小齿轮齿数 $z(x_3)$ 、轴承间第一轴长度 $l_1(x_4)$ 、轴承间第二轴长度 $l_2(x_5)$ 、第一轴直径 $d_1(x_6)$ 和第二轴直径 $d_2(x_7)$ 。此外，在这个问题中还必须解决 11 个约束条件，包括 7 个非线性约束条件和 4 个线性约束条件。优化问题模型如下：

最小化目标函数：

$$f(\mathbf{x}) = 0.7854x_1x_2^2(3.3333x_3^2 + 14.9334x_3 - 43.0934) - 1.508x_1(x_6^2 + x_7^2) + 0.7854(x_4x_6^2 + x_5x_7^2) \quad (2-14)$$

约束条件:

$$g_1(\mathbf{x}) = \frac{27}{x_1x_2^2x_3} - 1 \leq 0 \quad (2-15a)$$

$$g_2(\mathbf{x}) = \frac{397.5}{x_1x_2^2x_3^2} - 1 \leq 0 \quad (2-15b)$$

$$g_3(\mathbf{x}) = \frac{1.93z_4^3}{x_2x_6^4x_3^2} - 1 \leq 0 \quad (2-15c)$$

$$g_4(\mathbf{x}) = \frac{1.93z_5^3}{x_2x_7^4x_3} - 1 \leq 0 \quad (2-15d)$$

$$g_5(\mathbf{x}) = \frac{\left[\left(745(x_4 / x_2x_3) \right)^2 + 16.9 \times 10^6 \right]^{1/2}}{110x_6^3} - 1 \leq 0 \quad (2-15e)$$

$$g_6(\mathbf{x}) = \frac{\left[\left(745(x_5 / x_2x_3) \right)^2 + 157.5 \times 10^6 \right]^{1/2}}{85x_7^3} - 1 \leq 0 \quad (2-15f)$$

$$g_7(\mathbf{x}) = \frac{x_2x_3}{40} - 1 \leq 0 \quad (2-15g)$$

$$g_8(\mathbf{x}) = \frac{5x_2}{x_1} - 1 \leq 0 \quad (2-15h)$$

$$g_9(\mathbf{x}) = \frac{x_1}{12x_2} - 1 \leq 0 \quad (2-15i)$$

$$g_{10}(\mathbf{x}) = \frac{1.5x_6 + 1.9}{x_4} - 1 \leq 0 \quad (2-15j)$$

$$g_{11}(\mathbf{x}) = \frac{1.1x_7 + 1.9}{x_5} - 1 \leq 0 \quad (2-15k)$$

取值范围:

$$2.6 \leq x_1 \leq 3.6, 0.7 \leq x_2 \leq 0.8, 17 \leq x_3 \leq 28,$$

$$5.0 \leq x_7 \leq 5.5, 7.3 \leq x_4 \leq 8.3, 7.3 \leq x_5 \leq 8.3, 2.9 \leq x_6 \leq 3.9,$$

各算法设计过程的统计信息如表 2-4 所示。结果表明, IMFO 实现了 $f(x) = 2967.8487$ 的解, 相应的约束值分别为 $g_1(x) = -0.0739$, $g_2(x) = -0.1980$, $g_3(x) = -0.4991$, $g_4(x) = -0.9033$, $g_5(x) = 0$, $g_6(x) = 0$, $g_7(x) = -0.7025$, $g_8(x) = 0$, $g_9(x) = -0.7958$, $g_{10}(x) = -0.0514$, $g_{11}(x) = -0.0003$, 满足本设计问题的约束函数。

表 2-4 减速器设计问题优化结果

算法	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	最优值
PSO	3.6000	0.7000	17.0000	7.3000	7.7597	3.3504	5.2450	3007.9505
GWO	3.5024	0.7000	17.0000	7.8154	7.7714	3.3622	5.2467	2979.0361
CSA	3.5000	0.7000	17.0000	7.3000	7.8000	3.3502	5.2867	2996.3482
AOA	3.6000	0.7000	17.0000	8.3000	8.3000	3.5235	5.2730	3093.9088
GBO	3.4999	0.7000	17.0000	7.3000	7.8000	3.3502	5.2866	2996.3481
MFO	3.5000	0.7000	17.0000	7.3000	7.6704	3.3502	5.2458	2967.7555
CMFO	3.5000	0.7000	17.2051	7.3000	7.6705	3.3501	5.2458	3003.3582
LMFO	3.5000	0.7000	17.0000	7.3000	8.3000	3.3502	5.2460	2981.5016
本章算法	3.5001	0.7000	17.0000	7.3007	7.6724	3.3503	5.2458	2967.8487

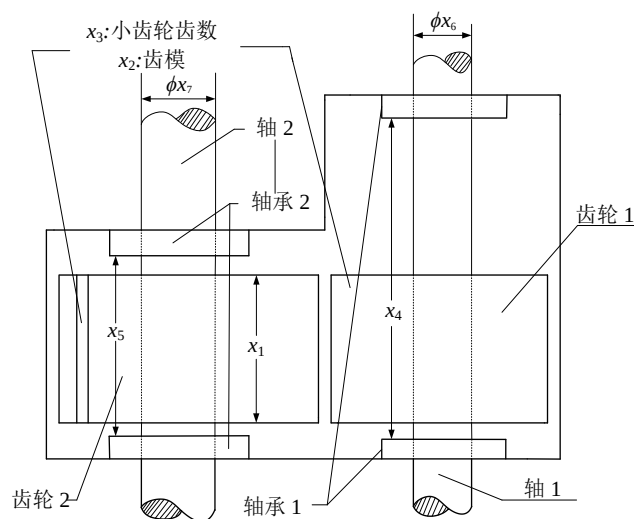


图 2-6 减速器设计问题示意图

(3) 942 杆空间桁架塔的优化设计

如图 2-7 所示, 该问题涉及一座 26 层的空间桁架塔, 由 942 根支柱组成。弹性模量等于 $68947572.93 \text{ kN/m}^2$, 材料密度为 27.144 kN/m^3 。利用结构对称性, 定义了 59 个结构横截面积设计变量。这些变量在 0.000064516 至 0.0129032 m^2 的给定范围内选择。表 2-5 列出了从该问题中获得的结果, 证明 IMFO 能够找到该问题的最优结构, 而且与其他竞争算法相比结构更轻。

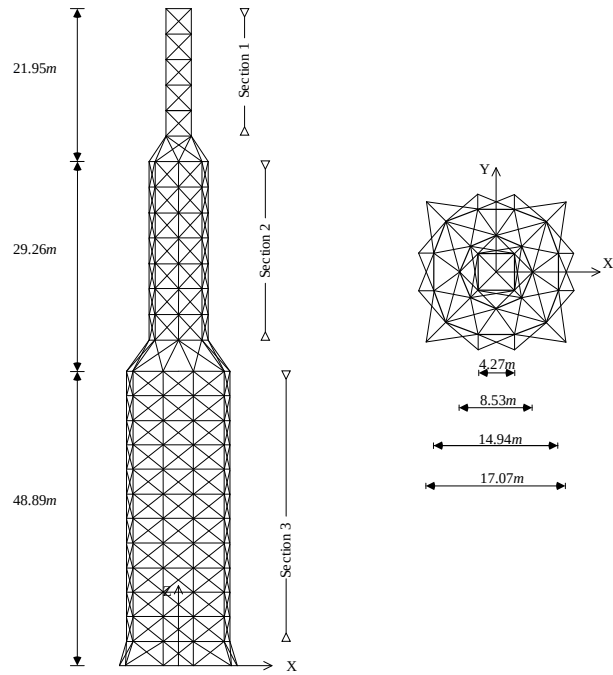


图 2-7 942 杆空间桁架塔示意图

表 2-5 942 杆空间桁架塔优化结果

算法	DE	PSO	GWO	AOA	MFO	CMFO	LMFO	本章 算法
x_1	2.52E-03	1.15E-02	1.00E-04	7.11E-03	6.45E-05	6.48E-04	8.41E-03	6.45E-05
x_2	7.40E-05	1.02E-02	1.00E-04	7.25E-03	6.45E-05	6.45E-05	6.45E-05	6.45E-05
x_3	6.45E-05	1.89E-03	1.00E-04	2.12E-03	1.33E-04	3.41E-03	3.31E-03	6.45E-05
x_4	2.17E-04	6.45E-05	1.00E-04	2.51E-03	6.45E-05	6.45E-05	6.45E-05	6.46E-05
x_5	1.97E-04	6.45E-05	1.00E-04	2.83E-03	6.45E-05	1.10E-04	6.45E-05	6.45E-05
x_6	1.76E-03	6.45E-05	6.00E-04	1.15E-03	6.69E-04	7.68E-04	9.25E-03	5.73E-04
x_7	1.00E-03	3.79E-03	1.00E-04	1.11E-02	1.67E-04	1.96E-04	6.01E-03	1.65E-04
x_8	3.94E-03	7.08E-03	1.00E-04	5.69E-03	4.72E-04	3.78E-04	7.96E-03	6.45E-05
x_9	1.21E-03	2.36E-03	3.00E-04	1.27E-02	5.86E-04	5.59E-04	8.94E-03	1.54E-04
x_{10}	2.41E-03	5.80E-03	8.00E-04	2.00E-03	6.45E-05	1.20E-03	6.36E-03	5.42E-04
x_{11}	1.83E-03	1.29E-02	3.00E-04	1.09E-02	1.29E-02	3.12E-04	3.45E-03	3.47E-04
x_{12}	2.42E-03	6.45E-05	3.00E-04	1.03E-02	9.44E-04	2.22E-04	4.08E-03	3.22E-04
x_{13}	1.37E-04	4.37E-03	7.00E-04	2.61E-03	6.45E-05	7.37E-04	7.78E-03	6.04E-04
x_{14}	1.91E-03	6.43E-04	2.00E-04	6.19E-03	6.88E-04	3.10E-04	1.10E-03	2.20E-04
x_{15}	2.99E-03	6.45E-05	7.00E-04	3.06E-03	6.45E-05	2.81E-04	6.45E-05	1.02E-03
x_{16}	2.87E-03	2.03E-03	1.00E-04	3.28E-04	5.07E-04	2.20E-03	2.61E-03	6.48E-05
x_{17}	1.07E-03	2.28E-03	9.00E-04	9.49E-03	9.11E-04	3.09E-03	6.45E-05	1.05E-03
x_{18}	8.77E-04	2.71E-04	2.00E-04	8.40E-03	2.31E-04	9.37E-04	7.67E-03	2.19E-04

表 2-5 (续表) 942 杆空间桁架塔优化结果

算法	DE	PSO	GWO	AOA	MFO	CMFO	LMFO	本章 算法
x_{19}	3.91E-03	6.45E-05	1.40E-03	1.02E-02	1.45E-03	6.45E-05	6.45E-05	2.05E-03
x_{20}	1.24E-03	8.86E-04	2.00E-04	6.32E-03	6.45E-05	7.86E-04	9.17E-04	1.65E-04
x_{21}	2.38E-03	5.58E-03	1.50E-03	1.19E-03	1.73E-03	9.16E-04	7.12E-03	1.48E-03
x_{22}	4.30E-04	1.20E-03	3.00E-04	2.84E-04	2.80E-04	4.00E-04	5.62E-03	2.78E-04
x_{23}	7.32E-04	1.83E-03	1.90E-03	1.17E-02	1.29E-02	1.70E-03	1.90E-03	1.92E-03
x_{24}	1.17E-03	6.45E-05	2.90E-03	9.76E-03	3.08E-03	1.44E-03	1.48E-03	3.00E-03
x_{25}	3.28E-03	5.88E-04	2.80E-03	3.91E-03	1.29E-02	4.67E-03	7.32E-03	3.22E-03
x_{26}	3.30E-03	6.91E-04	2.30E-03	7.68E-03	2.91E-03	6.45E-05	4.92E-03	2.11E-03
x_{27}	6.45E-05	3.65E-03	2.00E-04	9.97E-03	6.45E-05	1.60E-03	4.17E-03	1.08E-04
x_{28}	4.50E-04	3.48E-03	1.00E-03	1.43E-03	6.45E-05	2.66E-03	2.47E-04	9.13E-04
x_{29}	3.95E-03	5.69E-03	2.80E-03	7.68E-03	3.07E-03	2.75E-03	7.09E-03	2.83E-03
x_{30}	3.31E-03	1.20E-02	3.20E-03	8.45E-03	3.32E-03	3.13E-03	5.96E-03	3.17E-03
x_{31}	7.04E-03	7.64E-03	2.00E-03	2.27E-04	1.53E-03	5.90E-03	1.47E-04	2.13E-03
x_{32}	6.74E-04	6.45E-05	4.00E-04	6.41E-04	4.56E-04	1.21E-03	4.58E-03	4.39E-04
x_{33}	2.17E-03	3.55E-03	1.20E-03	1.12E-02	1.20E-03	1.96E-03	1.06E-03	1.10E-03
x_{34}	1.84E-04	1.08E-03	1.00E-04	6.17E-03	8.81E-05	1.18E-04	6.51E-04	6.61E-05
x_{35}	3.31E-04	6.45E-05	1.00E-04	1.01E-02	1.29E-02	4.98E-04	3.25E-03	7.57E-05
x_{36}	2.76E-04	6.45E-05	1.00E-04	6.11E-03	6.45E-05	1.25E-04	2.06E-03	6.88E-05
x_{37}	3.87E-03	2.69E-03	2.90E-03	3.33E-03	1.72E-03	1.94E-03	2.26E-04	2.96E-03
x_{38}	4.56E-04	6.45E-05	4.00E-04	3.77E-03	3.86E-04	2.64E-04	1.10E-03	3.62E-04
x_{39}	1.54E-03	7.37E-03	2.50E-03	1.20E-03	2.75E-03	1.72E-03	1.11E-03	2.61E-03
x_{40}	4.52E-04	5.18E-04	1.00E-04	3.74E-04	1.27E-04	1.06E-04	1.07E-03	1.36E-04
x_{41}	1.69E-04	2.47E-03	1.00E-04	9.62E-03	6.45E-05	6.45E-05	8.32E-03	6.61E-05
x_{42}	6.11E-04	3.16E-04	2.00E-04	7.46E-03	1.29E-02	1.00E-04	1.38E-03	1.05E-04
x_{43}	2.58E-03	6.45E-05	3.30E-03	1.06E-02	1.64E-03	3.35E-03	6.06E-03	3.31E-03
x_{44}	9.18E-04	3.34E-03	3.00E-04	3.29E-03	4.70E-04	3.99E-04	1.61E-03	3.37E-04
x_{45}	5.66E-03	6.02E-03	3.80E-03	6.31E-03	4.12E-03	3.04E-03	3.63E-03	3.83E-03
x_{46}	3.03E-04	6.45E-05	2.00E-04	1.13E-02	2.01E-04	1.67E-04	4.92E-03	2.41E-04
x_{47}	6.77E-04	6.45E-05	4.00E-04	9.60E-03	9.91E-04	5.65E-04	2.88E-03	3.80E-04
x_{48}	7.11E-04	1.29E-02	1.00E-04	3.48E-03	1.10E-04	2.30E-04	3.27E-03	1.07E-04
x_{49}	3.11E-03	6.45E-05	2.20E-03	1.03E-02	6.45E-05	1.80E-03	1.42E-03	2.02E-03
x_{50}	9.19E-04	6.45E-05	5.00E-04	4.43E-03	5.61E-04	7.65E-04	5.21E-04	5.01E-04
x_{51}	6.98E-03	3.69E-03	5.10E-03	2.81E-03	5.73E-03	5.24E-03	8.27E-03	5.08E-03
x_{52}	9.51E-04	2.19E-03	3.00E-04	2.51E-03	2.85E-04	4.05E-04	3.54E-04	2.77E-04
x_{53}	9.76E-03	1.22E-02	1.15E-02	5.95E-03	1.29E-02	1.23E-02	6.26E-03	1.11E-02
x_{54}	5.16E-03	5.29E-03	3.80E-03	6.13E-03	1.29E-02	4.88E-03	7.11E-03	4.00E-03

表 2-5 (续表) 942 杆空间桁架塔优化结果

算法	DE	PSO	GWO	AOA	MFO	CMFO	LMFO	本章 算法
x_{55}	4.73E-03	2.14E-04	4.00E-03	6.46E-04	5.12E-03	1.91E-03	4.54E-03	3.52E-03
x_{56}	2.15E-03	6.46E-05	1.00E-04	5.36E-04	6.45E-05	5.22E-03	1.08E-03	6.46E-05
x_{57}	1.07E-02	1.29E-02	1.19E-02	8.28E-03	1.29E-02	1.21E-02	9.25E-03	1.29E-02
x_{58}	5.79E-03	7.57E-04	3.30E-03	8.02E-03	3.73E-03	1.47E-03	3.89E-03	3.38E-03
x_{59}	8.65E-03	1.29E-02	1.27E-02	9.09E-03	1.29E-02	1.13E-02	3.82E-03	1.28E-02
最优值	2.42E+02	3.22E+02	1.96E+02	7.11E+02	2.99E+02	2.30E+02	5.05E+02	1.96E+02

2.4 改进的多目标飞蛾火焰算法

2.4.1 多目标问题描述

与单一目标问题注重解决方案的准确性不同，多目标问题往往受约束和互相冲突的问题，不存在唯一的最优解。多目标优化问题将根据以下公式进行建模：

目标函数：

$$F(x) = \{f_1, f_2, \dots, f_m\} \quad (2-16)$$

约束条件：

$$g_i(x) \geq 0, i = 1, 2, \dots, o \quad (2-17a)$$

$$h_j(x) = 0, j = 1, 2, \dots, p \quad (2-17b)$$

$$lb_i \leq x_i \leq ub_i, i = 1, 2, \dots, q \quad (2-17c)$$

式中，如果 m 表示目标函数的数量，则 f_m 是第 m 个目标函数， $g(x)$ 和 $h(x)$ 分别是不平等约束的集合，方程约束的集合 o 和 p 是不平等约束和不平等约束的数量方程约束分别指示变量的数量， lb_i 和 ub_i 是解决方案空间上第 i 个决策变量的边界。

在多目标优化问题中，仅对一个目标进行优化会导致与其他目标的不和谐，从而使常规关系操作员不适合比较多目标解决方案。因此，引入了多目标解决方案的帕累托支配关系算子^[113]。一般来说，多目标方案会产生一系列非优势解，而帕累托支配为这些解提供了合理的评估。从数学上讲，帕累托支配可以描述如下：

$$\forall i \in \{1, \dots, M\}: f_i(x_t) \leq f_i(x_k) \text{ and } \exists j \in \{1, \dots, M\}: f_j(x_t) < f_j(x_k) \quad (2-18)$$

式中， m 是目标函数的数量， x_t 占主导地位 ($x_t < x_k$) 时，上式满足等式。

2.4.2 改进机制

将混合无标度网络的飞蛾火焰算法改造成多目标飞蛾火焰算法。改进机制包括基于非支配排序法和参考点策略。在环境选择中使用了新的排序算子参考点，以取代拥挤距离作为排序算子的参考点。以往的研究表明，参考点方法可以很好地避免解分布的过度拥挤，防止计算复杂度指标在高维空间中突然增加^[114]。算法 1 给出了 IMOMFO 的主要框架。

参考点用于保持解的分布，可以均匀分布在超平面上，也可以根据决策者的偏好构建。本节采用 Das 和 Dennis 方法来构建参考点^[115]，具体方法如下：

$$W = \begin{pmatrix} m+p-1 \\ p \end{pmatrix} \quad (2-19a)$$

$$\alpha_{i,j} \in \left\{ \frac{0}{p}, \frac{1}{p}, \dots, \frac{p}{p} \right\} \quad (2-19b)$$

$$\sum_{m=1}^{i=1} \alpha_{i,j} = 1, j = 1, 2, \dots, N \quad (2-19c)$$

式中， m 是目标数， p 是轴上的线段数， W 是参考点的比例， α 表示第 i 个目标函数的第 j 个参考点。

为将解与参考点联系起来，采用了归一化方法。通过归一化消除解与参考点之间的绝对偏差，从而更好地接近均匀分布的参考点。然后计算垂直距离，建立每个解的最近距离参考点，并将解与参考点关联起来。此外，还引入了 niche，它代表与每个参考点相关联的解的数量，用于评估该区域解的密度。选择具有最小 niche 数的参考点集合，并将与该集合相关的解决方案之一添加到新的种群中。环境选择过程重复进行，直到种群数量足够为止。环境选择流程图如图 2-8 所示。

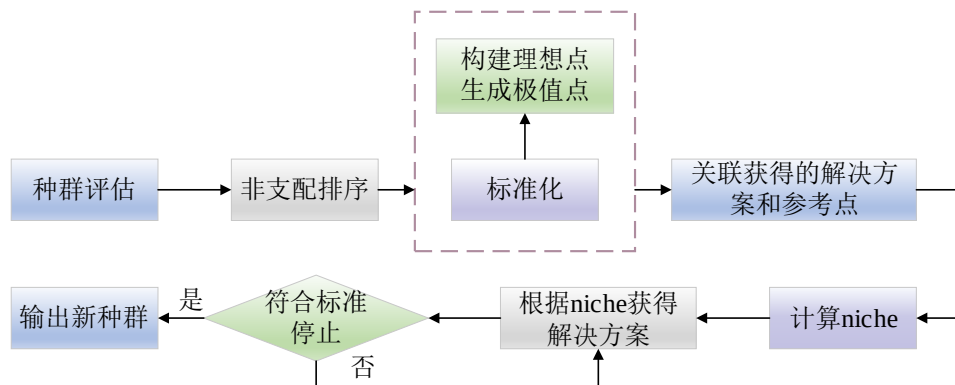


图 2-8 环境选择流程图

算法 1 改进的多目标飞蛾火焰算法

输入：最大迭代次数 T_{max} , 维度 dim , 种群规模 N , 无标度网络的邻接矩阵、变量 ub 和 lb 的边界
 初始化飞蛾 M 的位置矢量
 初始化 $t \leftarrow 0$
 利用公式 2-19 生成参考点
 通过环境选择更新飞蛾位置
 While $t < T_{max}$ do
 利用公式 2-9 计算惯性重量 ω
 利用 $F_{fit} \propto k_d$ 调整每个 M 在无标度网络上的位置
 用公式 2-7 至 2-9 更新 M_j 的位置矢量
 If $rand() \leq 0.1$ do
 用公式 2-10 更新 M_j 的位置矢量
 end if
 利用非支配排序法更新存储库
 修改超出上下限的飞蛾个体
 $t \leftarrow t+1$
 end while
 输出：存储库

2.4.3 算法有效性验证研究

本节使用 4 个 ZDT 基准函数来测试 IMOMFO 的性能。此外，为了验证所提方法的有效性，还采用三种知名算法多目标粒子群优化算法 (MOPSO)^[116]、多目标灰狼优化 (MOGWO)^[117] 和多目标飞蛾火焰 (MOMFO)^[118] 在以上测试平台上的数值实验结果。注意，为了确保比较的公平性，种群规模 50，最大迭代次数设置为 500。所有算法的控制参数均有对应文献一致且在每个数值实例上均独立运行 30 次取平均值。

为了定量比较实验结果，采用代表性指标作为评估标准，其中 HV 指标和 S 指标应用于工程问题。性能评估指标的数学模型如下所述。

(1) 反向世代距离 (IGD)

这是一个多目标性能评估的综合指标。它计算从参考解到最近候选解的欧几里得距离，以有效衡量算法的收敛性和多样性^[119]。IGD 值越低，整体性能越好。

$$IGD = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n_{pf}} (d_i)^2}}{n_{pf}} \quad (2-20)$$

(2) 超容积 (HV) 度量

HV 指标描述了近似 PF 上的点与参考点之间围成的空间立方体的体积，是用

于评估解的收敛性和分布的指标^[120]。HV 的具体形式为：

$$HV = \delta(\cup_{i=1}^{n_o} \theta_i) \quad (2-21)$$

(3) 空间度量指标 (S)

S 是一个集合 O 中两个连续解之间距离的标准差，用于评估非支配解分布的均匀性^[121]。S 的具体形式为：

$$S = \sqrt{\frac{1}{n_o - 1} \sum_{i=1}^{n_o} (d_i - \bar{d})^2} \quad (2-22)$$

(4) 多样性指标 (Δ)。

Δ 用于衡量帕累托解集的扩散程度，从而测量多样性的指标^[122]。 Δ 值越低，表明解决方案分布的多样性越好。

$$\Delta = \frac{d_f + d_e + \sum_{p=1}^{n_o-1} |d_p - \bar{d}|}{d_f + d_e + (n_o - 1)\bar{d}} \quad (2-23)$$

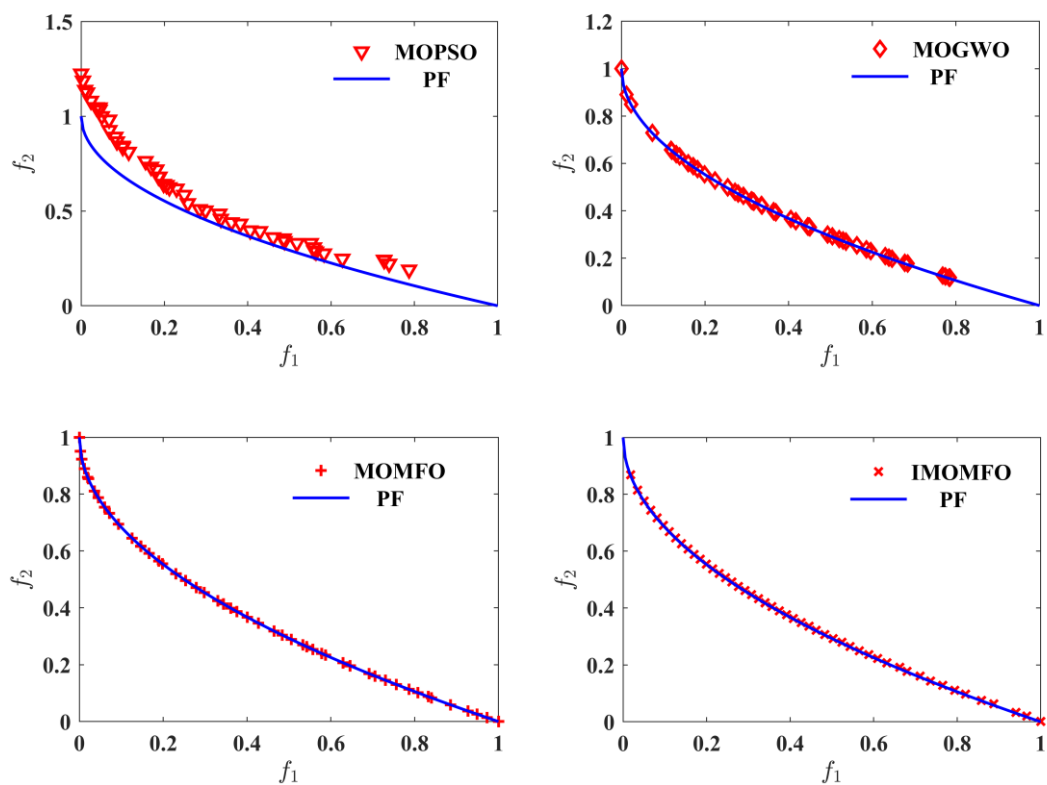
PSP 被用来评估真实帕累托最优解与所得到的解之间的相似性，数学表达如下：

$$PSP = \frac{CR}{IGD} \quad (2-24)$$

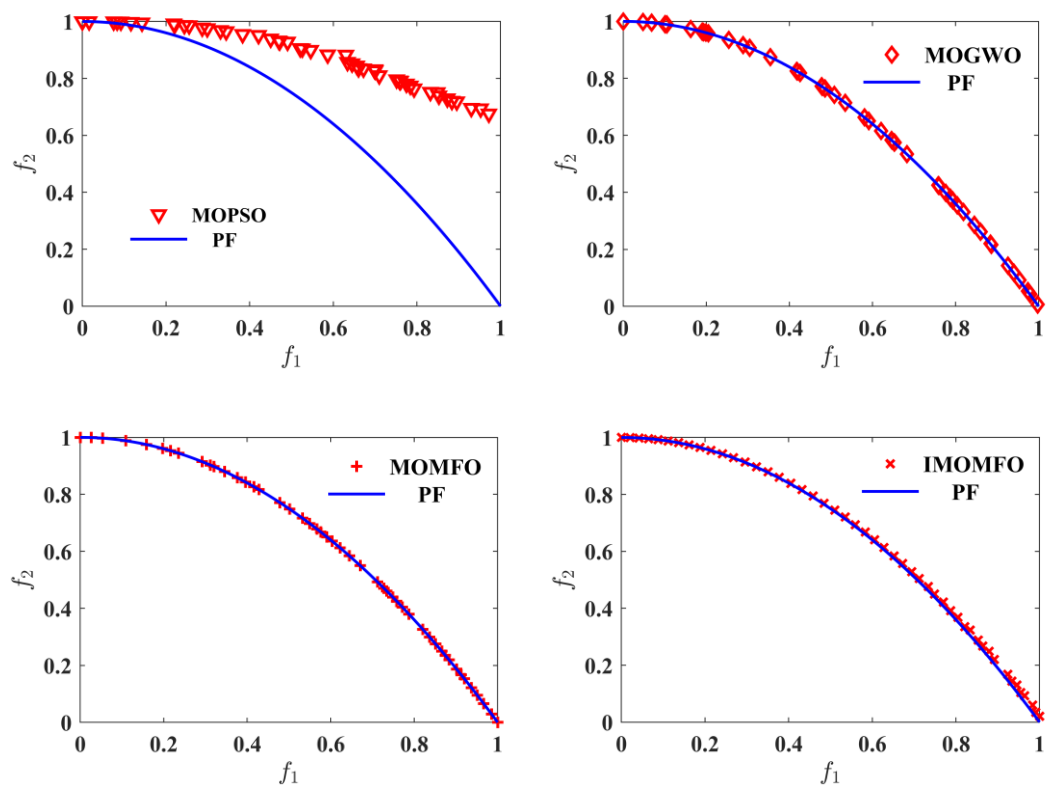
式中，CR 表示决策空间中真实 PS 与得到的 PS 之间的重叠比率。显然，PSP 值越大越好。

表 2-6 ZDT 测试函数

名称	数学公式
ZDT1	$f_1(x) = x_1, f_2(x) = g(x) \left(1 - \sqrt{\frac{f_1(x)}{g(x)}} \right), \text{s.t. } g(x) = 1 + \frac{9}{n-1} \sum_{i=2}^n x_i$
ZDT2	$f_1(x) = x_1, f_2(x) = g(x) \left(1 - \left(\frac{f_1(x)}{g(x)} \right)^2 \right), \text{s.t. } g(x) = 1 + \frac{9}{n-1} \sum_{i=2}^n x_i$
ZDT3	$f_1(x) = x_1, f_2(x) = g(x) \left(1 - \sqrt{\frac{f_1(x)}{g(x)}} - \frac{f_1(x)}{g(x)} \sin(10\pi f_1(x)) \right), g(x) = 1 + \frac{9}{n-1} \sum_{i=2}^n x_i$
ZDT4	$f_1(x) = x_1, f_2(x) = g(x) \left(1 - \sqrt{x_1 / g(x)} \right)$ $\text{s.t. } g(x) = 1 + 10(n-1) + \sum_{i=2}^n (x_i^2 - 10 \cos(4\pi x_i))$

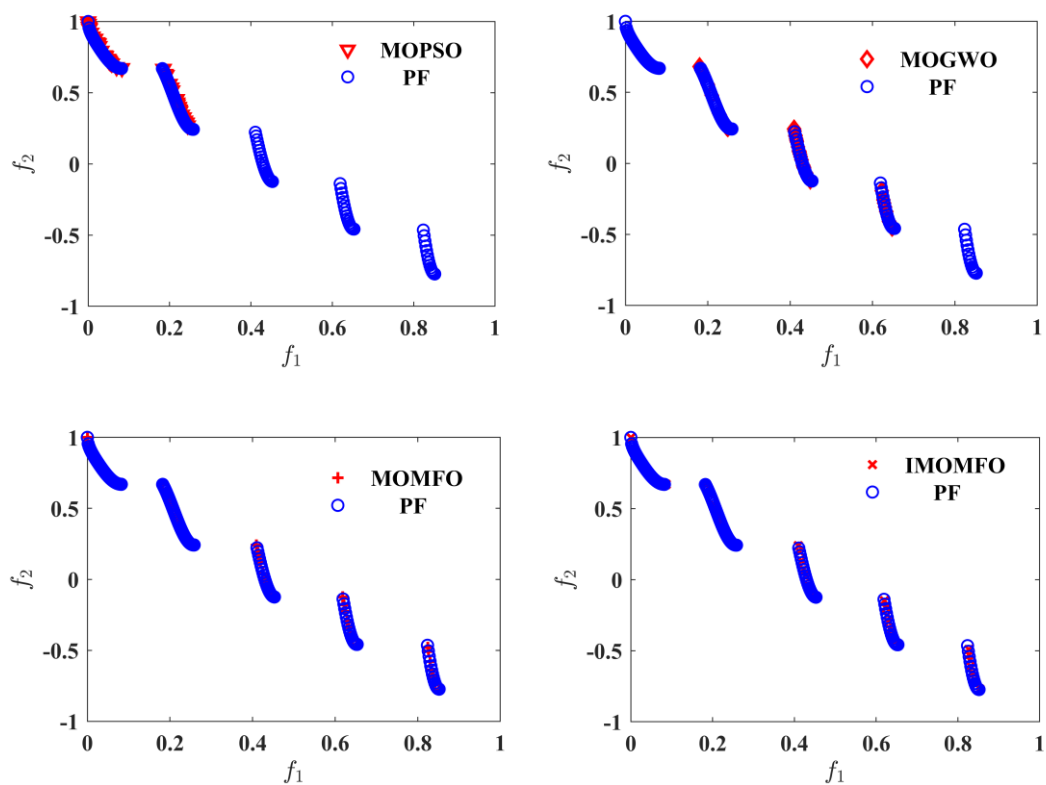


(a) ZDT1

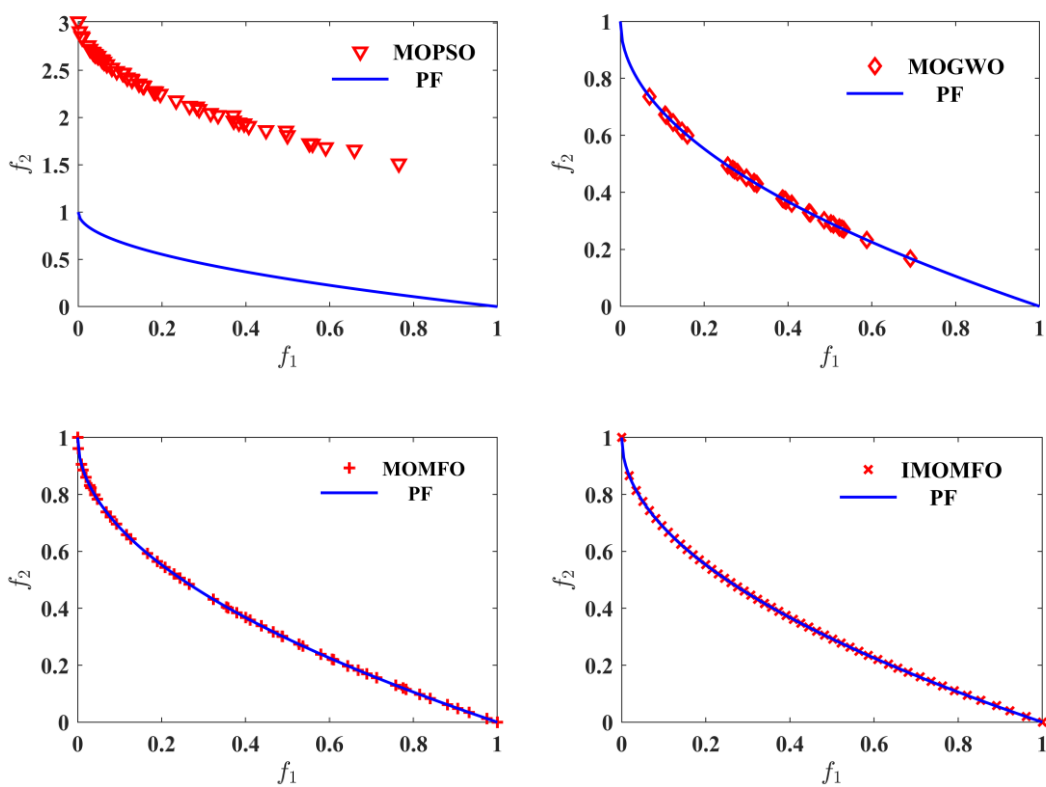


(b) ZDT2

图 2-9 所有算法在 ZDT 测试函数上得到的 PF



(c) ZDT3



(d) ZDT4

图 2-9 (续图) 所有算法在 ZDT 测试函数上得到的 PF

表 2-7 算法在 ZDT 基准函数上不同指标的比较

函数	指标	MOPSO	MOGWO	MOMFO	IMOMFO
ZDT1	IGD	0.4097	0.3670	0.5002	0.0086
		(0.1067)	(0.0554)	(0.0006)	(0.0003)
	HV	0.2748	0.0003	0.3455	0.0024
		(0.1928)	(0.0009)	(0.0012)	(0.0007)
ZDT2	Δ	0.6883	0.9998	0.6975	0.2965
		(0.1057)	(0.0005)	(0.0611)	(0.0086)
	PSP	0.9900	0.0134	0.0025	116.3259
		(0.3606)	(0.0057)	(0.0017)	(4.4990)
ZDT3	IGD	0.4401	0.6075	0.4278	0.0131
		(0.0776)	(0.0046)	(0.0592)	(0.0015)
	HV	0.2110	0.0009	0.0669	0.3017
		(0.0711)	(0.0001)	(0.0023)	(0.0004)
ZDT4	Δ	0.7833	1.0000	0.6963	0.2728
		(0.1170)	(0.0098)	(0.0731)	(0.0484)
	PSP	0.6041	0.0001	1.2874	75.9161
		(0.3991)	(0.0005)	(0.4878)	(9.0220)
ZDT5	IGD	0.5334	0.6690	0.3698	0.0110
		(0.0810)	(0.0321)	(0.0001)	(0.0006)
	HV	0.2256	0.0003	0.0320	0.6378
		(0.1119)	(0.0001)	(0.0035)	(0.0006)
ZDT6	Δ	0.7632	0.9999	0.7493	0.5310
		(0.0727)	(0.0001)	(0.0635)	(0.0357)
	PSP	0.7007	0.0008	0.0395	91.4546
		(0.3005)	(0.0403)	(0.0292)	(4.9263)
ZDT7	IGD	0.4565	0.4745	0.4510	0.3227
		(0.1025)	(0.0032)	(0.1040)	(0.4153)
	HV	1.5031	0.0023	0.0444	2.0609
		(0.3901)	(0.0013)	(0.0055)	(0.0002)
ZDT8	Δ	0.5469	0.9997	0.7614	0.7831
		(0.0371)	(0.0001)	(0.0895)	(0.3519)
	PSP	1.5234	0.0040	0.4382	39.1749
		(0.2580)	(0.0064)	(0.9818)	(3.6464)

2.4.4 多目标优化工程算例

多目标优化算法致力于解决现实工程应用中的复杂问题。为验证 MOIMO 算法的效率与可靠性，本小节选取 3 个具有挑战性的工程设计问题（Engineering design problems, EDPs）作为测试案例。这类问题通常受复杂约束条件限制或存在多局部极值特征，导致算法难以收敛至真实 Pareto 前沿（PF）。由于工程问题难以获取精确解析解，本研究采用反向世代距离(IGD)、多样性指标（ Δ ）和 PSP 作为性能评价指标。

（1）舱口盖设计问题（Hatch Cover Design Problem）^[123]：该问题包含四个约束条件（ g_1 - g_4 ）和两个设计变量（ x_1 - x_2 ），以舱口盖重量（ f_1 ）和约束条件总和（ f_2 ）作为双目标优化函数。其数学模型表述如下：

目标函数：

$$f_1(x) = x_1 + 120x_2 \quad (2-25a)$$

$$f_2(x) = \sum_{i=1}^4 \max\{-g_i(x), 0\} \quad (2-25b)$$

约束条件:

$$g_1(x) = 1 - \frac{\sigma_b}{\sigma_{b,\max}} \quad (2-26a)$$

$$g_2(x) = 1 - \frac{\tau}{\tau_{\max}} \quad (2-26b)$$

$$g_3(x) = 1 - \frac{\delta}{\delta_{\max}} \quad (2-26c)$$

$$g_4(x) = 1 - \frac{\sigma_b}{\sigma_k} \quad (2-26d)$$

式中, $\sigma_{b,\max}=700 \text{ kg/cm}^2$, $\tau_{\max}=450 \text{ kg/cm}^2$, $\delta_{\max}=1.5 \text{ cm}$, $\sigma_k=7e^5 x_1^2/100 \text{ kg/cm}^2$, $\sigma_b=4500/x_1x_2 \text{ kg/cm}^2$, $\tau=1800/x_2 \text{ kg/cm}^2$, $\delta=5.62e^5/(7e^5 x_1 x_2^2) \text{ cm}$, 其中变量范围 $0.5 \leq x_1 \leq 4$, $4 \leq x_2 \leq 50$ 。

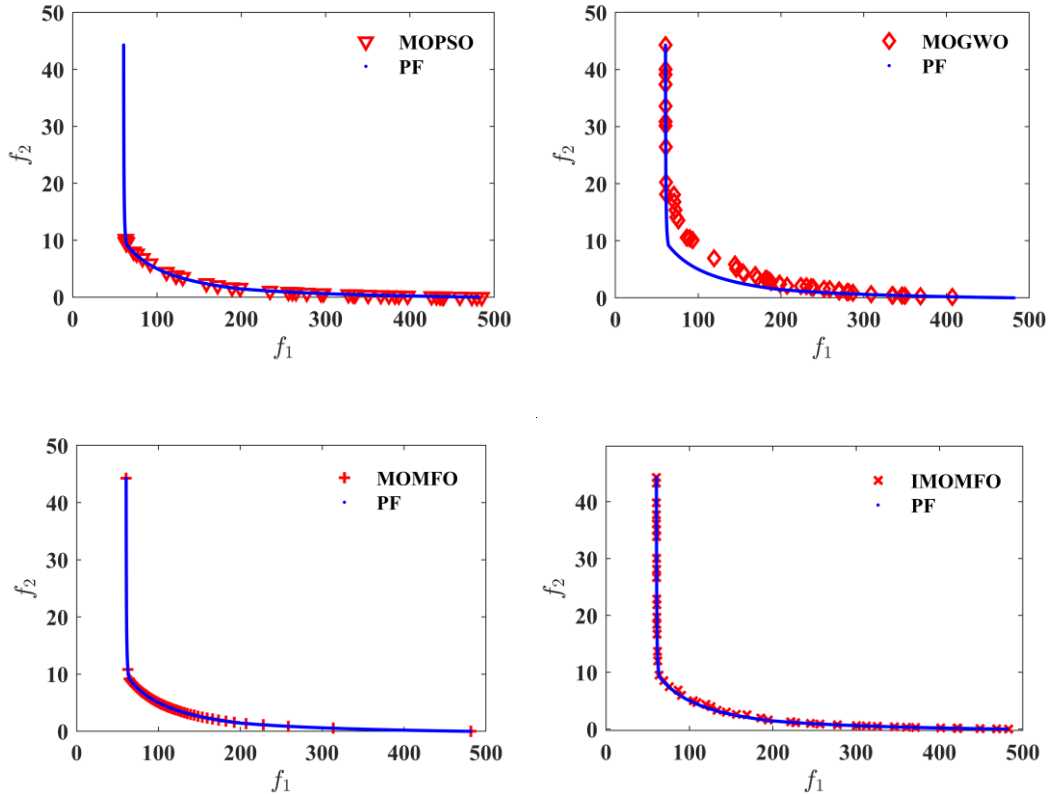


图 2-10 所有算法在舱口盖设计问题上得到的 PF

(2) 焊接梁设计问题 (Welded beam design problem) ^[124]: 该问题通过四个设计变量 (x_1 - x_4) 实现双目标优化, 旨在同时最小化制造成本 (f_1) 与梁挠度

(f_2)。其数学模型包含四个约束条件 (g_1 - g_4)，具体方程如下：

目标函数：

$$f_1(x) = 1.10471x_1^2x_2 + 0.04811x_3x_4(14 + x_2) \quad (2-27a)$$

$$f_2(x) = \frac{4PL^3}{Ex_3^3x_4} \quad (2-27b)$$

约束条件：

$$g_1(x) = -(\delta - \delta_{\max}) \quad (2-28a)$$

$$g_2(x) = -(\theta - \theta_{\max}) \quad (2-28b)$$

$$g_3(x) = -(x_1 - x_4) \quad (2-28c)$$

$$g_4(x) = -(P - w) \quad (2-28d)$$

式中， $w = (4.013E\sqrt{x_3^2x_4^6/36/L^2})(1 - ((x_3/2L)\sqrt{E/4G}))$ ， $\delta = \sqrt{Q_1^2 + Q_1Q_2x_2/R + Q_2^2}$
 $\theta = 6PL/x_4x_3^2$ ， $\sigma = P(L + x_2/2)$ ， $R = \sqrt{(x_2^2/4) + ((x_1 + x_3)/2)^2}$ ， $P = 6000$ lb， $L = 14$
 in， $J = 2 \times (\sqrt{2}x_1x_2((x_2^2/12) + ((x_1 + x_3)/2)^2))$ ， $G = 12 \times 10^6$ psi， $E = 30 \times 10^6$ psi， $\delta_{\max} =$
 13600 psi， $\theta_{\max} = 30000$ psi，其中变量范围 $0.1 \leq x_1, x_4 \leq 2$ ， $0.1 \leq x_2, x_3 \leq 10$ ，其中 $\forall g_i \geq 0$ 。

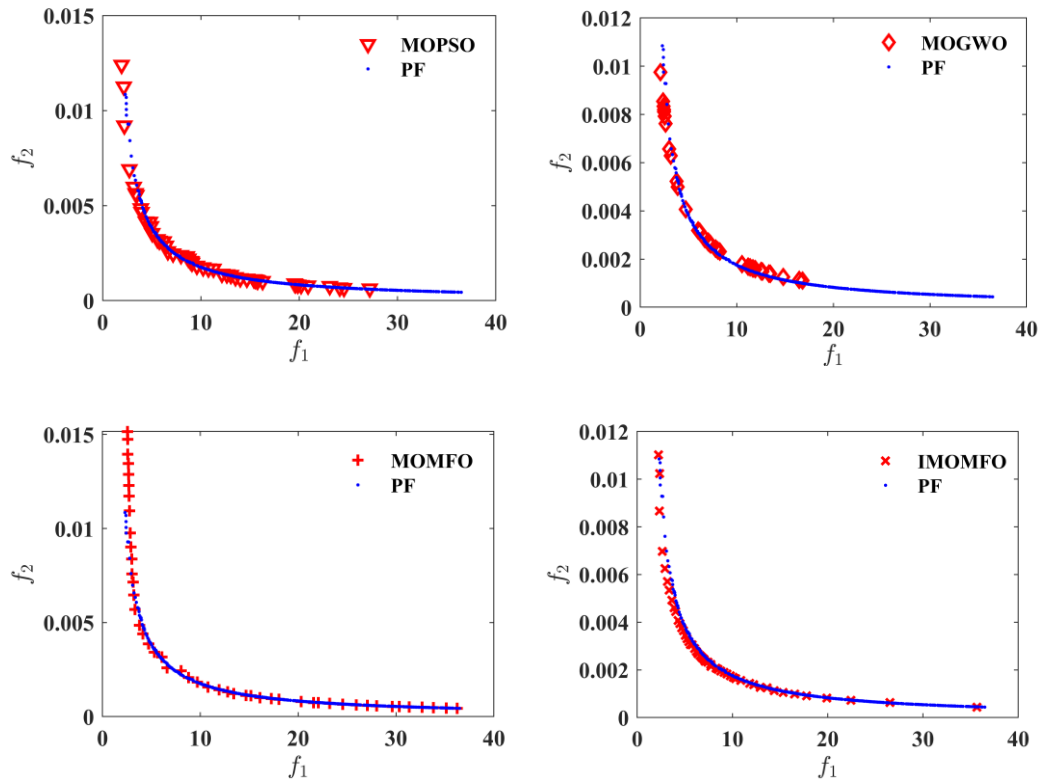


图 2-11 所有算法在焊接梁的设计问题上得到的 PF

(3) 压力容器设计问题 (Pressure vessel design problem) ^[125]: 该问题包含三个约束条件 (g_1 - g_3) 和四个设计变量 (x_1 - x_4), 以使圆柱形压力容器的总成本 (f_1 包括材料成本以及成型和焊接成本) 和约束条件总和 (f_2) 作为双目标优化函数。其数学模型表述如下:

目标函数:

$$f_1(x) = 0.6224x_1x_3x_4 + 1.7781x_2x_3^2 + 3.1661x_1^2x_4 + 19.84x_1^2x_3 \quad (2-29a)$$

$$f_2(x) = \sum_{i=1}^3 \max\{-g_i(x), 0\} \quad (2-29b)$$

约束条件:

$$g_1(x) = x_1 - 0.0193x_3 \geq 0 \quad (2-30a)$$

$$g_2(x) = x_2 - 0.00954x_3 \geq 0 \quad (2-30b)$$

$$g_3(x) = \pi x_3^2x_4 + \frac{4}{3}\pi x_3^3 - 1296000 \geq 0 \quad (2-30c)$$

式中, $x_1, x_2 \in \{1, \dots, 100\}$, $x_3 \in [10, 200]$, $x_4 \in [10, 240]$, x_1 和 x_2 是 0.0625 的整数倍, x_1 、 x_2 、 x_3 和 x_4 表示外壳厚度、压力头厚度、压力容器的封头、内半径和圆柱形截面的长度。

图 2-10 至图 2-12 展示了所有算法在三种工程优化设计问题上得到的 PF 图像。对于舱口盖问题, IMOMFO 提供了均匀分布的设计方案, 并成功收敛到两个目标的边界方案, 其得到的 PF 分布趋势接近真实 PF。对于焊接梁问题, IMOMFO 提供了最具多样性的设计方案。对于压力容器设计, IMOMFO 得到的解集完全覆盖了帕累托最优解的曲线, 构建了层次分明且分布良好的设计方案。表 2-12 展示了工程设计问题的统计结果, 表明 IMOMFO 能够提供多样化的设计方案。

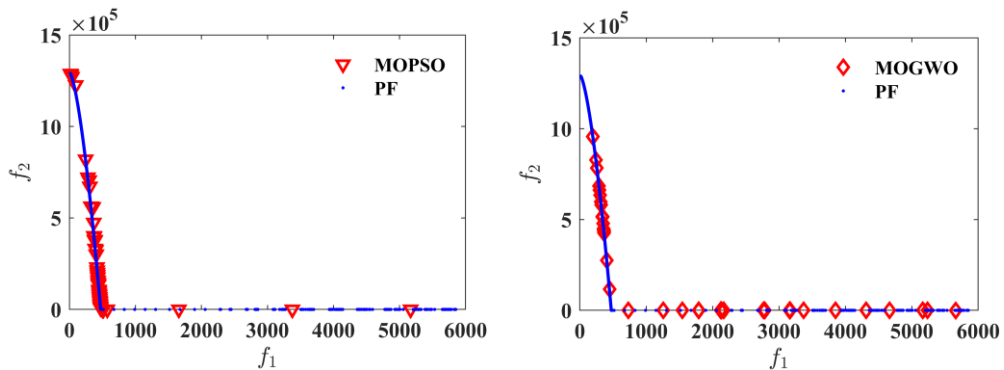


图 2-12 所有算法在压力容器设计问题上得到的 PF

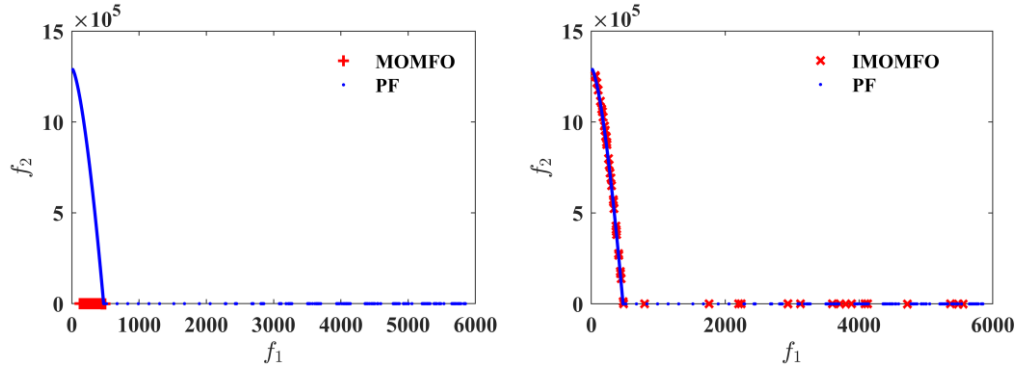


图 2-12 (续图) 所有算法在压力容器设计问题上得到的 PF

表 2-8 工程设计问题的统计结果

算法	IGD		Δ		PSP	
	平均值	方差	平均值	方差	平均值	方差
舱口盖设计问题						
MOPSO	9.4148	1.4214	1.0953	0.0313	0.0508	0.0286
MOGWO	11.9752	6.2579	0.9959	0.0689	0.0861	0.0414
MOMFO	14.1758	0.1299	0.8693	0.0278	0.0705	0.0165
IMOMFO	2.7743	0.1252	0.9123	0.0007	0.3612	0.0006
焊接梁设计问题						
MOPSO	1.1688	0.0030	0.9020	0.0327	0.7230	0.3052
MOGWO	1.9707	1.2226	1.0241	0.0406	0.5592	0.3792
MOMFO	0.6745	0.0196	0.8821	0.0282	1.4908	0.4507
IMOMFO	0.2649	0.1135	0.6897	0.0129	3.4508	0.2495
压力容器设计问题						
MOPSO	1.5673E+04	2.4323E+03	1.0158E+00	5.4428E-02	6.4076E-05	9.4865E-06
MOGWO	2.4170E+04	6.9143E+03	1.0959E+00	4.9207E-02	4.1444E-05	1.2224E-05
MOMFO	1.3167E+04	8.4855E+02	1.0138E+00	3.0238E-02	1.8279E-05	4.8422E-06
IMOMFO	9.9427E+03	1.4026E+03	1.0038E+00	2.6989E-02	7.6246E-05	1.1298E-05

2.5 本章小结

本章提出了一种改进的飞蛾火焰算法（IMFO），用于提升大规模全局优化问题的求解性能。该算法采用无标度网络结构加速全局收敛，并引入小概率突变和自适应权重策略以增强探索能力。通过 20 个 CEC'2010 基准函数、15 个 CEC'2013 基准函数以及 3 个实际工程问题对算法性能进行评估，采用多种指标进行定量分析。与 DE、PSO、GWO 等七种算法相比，IMFO 展现出显著优势。此外，通过非支配排序和参考点策略将 IMFO 扩展为多目标版本（IMOMFO）。在 ZDT 测试函数和 3 个工程设计问题中的实验表明，IMOMFO 具有突出的竞争优势。

第3章 压电双向功能梯度板材料优化设计

针对压电双向功能梯度板（2D-FGP）材料优化设计问题，本章提出一种高效的数值方法。基于三阶剪切变形理论（TSDT），采用非均匀有理 B 样条（NURBS）的等几何分析方法（IGA）实现压电功能梯度板的静力学分析。利用二维 B 样条基函数表示陶瓷体积分数分布，将对应于陶瓷体积分数和外部电压的平面控制点设为设计变量。同时，引入基于混合无标度网络的飞蛾火焰算法，有效平衡算法的探索与开发能力。通过对方形、斜形和飞镖形 2D-FGPs 的多组数值算例分析来验证所提方法的有效性。

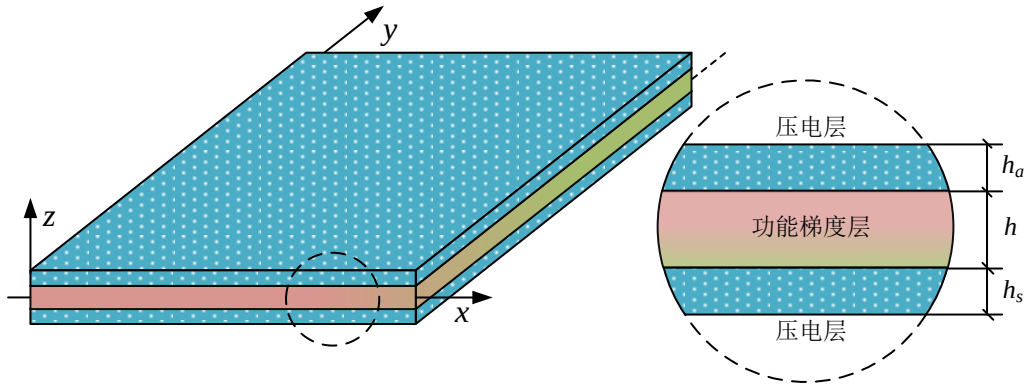
3.1 压电双向功能梯度板

压电双向功能梯度板示意图如图 3-1 所示。板的两个外表面分别是压电致动器层和传感器层，中间的功能梯度层由陶瓷和金属组成。功能梯度层的机械性能取决于两种不同材料的体积分数指数。2D-FGP 的杨氏模量 E 和密度 ρ 分别为：

$$E(x, y) = E_c V_c(x, y) + E_m V_m(x, y) \quad (3-1a)$$

$$\rho(x, y) = \rho_c V_c(x, y) + \rho_m V_m(x, y) \quad (3-1b)$$

式中， $V_c(x, y)$ 和 $V_m(x, y)$ 分别表示陶瓷和金属的体积分数，下标 c 和 m 分别表示陶瓷相和金属相。



3-1 压电双向功能梯度板示意图

描述 2D-FGP 陶瓷金属体积分数分布的常见模型包括双向多项式函数^[126]、双向幂函数^[127]和双向指数函数^[128]。其数学表达形式如下：

$$V_c^1(x, y) = \sum_{i=1}^n \gamma_i \left(\frac{x}{l_x} \right)^i \sum_{j=1}^m \alpha_j \left(\frac{y}{l_y} \right)^j \quad (3-2a)$$

$$V_c^2(x, y) = \left(\frac{x}{l_x} \right)^{k_x} \left(\frac{y}{l_y} \right)^{k_y} \quad (3-2b)$$

$$V_c^3(x, y) = \frac{e^{\alpha x + \beta y}}{e^{\alpha + \beta}} \quad (3-2c)$$

式中， n 和 m 分别为 x 和 y 方向对应的阶数， γ_i 和 α_j 为控制参数， l_x 和 l_y 分别为板在 x 和 y 方向的长度， k_x 、 k_y 、 α 和 β 为对应的材料梯度指数。

3.2 三阶剪切变形理论

三阶剪切变形理论 (Third-order shear deformation theory, TSDT) 能够准确描述横向剪应变和应力的二次变化，无需进行剪切校正^[126]。在 TSDT 理论中，板任意一点的位移定义为

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\beta_x(x, y) + c_1 z^3 \left(\beta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \quad (3-3a)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\beta_y(x, y) + c_1 z^3 \left(\beta_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \quad (3-3b)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (3-3c)$$

式中， u_0 、 v_0 和 w_0 分别是板 ($z=0$) 沿 x 、 y 和 z 方向的几何中平面。 β_x 和 β_y 分别是中平面 y - z 和 x - z 的旋转， $c_1 = -4/(3h^2)$ 。应变计算如下：

$$\tilde{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{bmatrix} \quad (3-4)$$

应变位移关系为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}]^T = \varepsilon_0 + z\boldsymbol{\kappa}_1 + z^3\boldsymbol{\kappa}_2 \quad (3-5a)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_{xz}, \gamma_{yz}]^T = \varepsilon_s + z^2\boldsymbol{\kappa} \quad (3-5b)$$

式中,

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = [u_{0,x}, v_{0,y}, u_{0,y} + v_{0,x}]^T \quad (3-6a)$$

$$\boldsymbol{\kappa}_1 = [\beta_{x,x}, \beta_{y,y}, \beta_{x,y} + \beta_{y,x}]^T \quad (3-6b)$$

$$\boldsymbol{\kappa}_2 = c_1[\beta_{x,x} + w_{0,xx}, \beta_{y,y} + w_{0,yy}, \beta_{x,y} + w_{0,x} + \beta_{y,x} + 2w_{0,xy}]^T \quad (3-6c)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s = [\beta_x + w_{0,x}, \beta_y + w_{0,y}]^T \quad (3-6d)$$

$$\boldsymbol{\kappa}_s = 3c_1[\beta_x + w_{0,x}, \beta_y + w_{0,y}]^T \quad (3-6e)$$

电场和弹性场之间的线性压电紧固由压电和直接反演方程以及构成和势移关系定义。根据广义胡克定律，核心二维-FGM 层的本征应力关系表示为

$$\boldsymbol{\sigma} = D_b \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3-7a)$$

$$\boldsymbol{\tau} = D_s \boldsymbol{\gamma} \quad (3-7b)$$

式中, $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]^T$, $\boldsymbol{\tau} = [\tau_{xz}, \tau_{yz}]^T$,

$$D_b = \frac{E(x, y)}{1 - \nu^2(x, y)} \begin{bmatrix} 1 & \nu(x, y) & 0 \\ \nu(x, y) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu(x, y)}{2} \end{bmatrix} \quad (3-8a)$$

$$D_s = \frac{E(x, y)}{2(1 + \nu(x, y))} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-8b)$$

两个压电层的应力本构关系为

$$\boldsymbol{\sigma} = D_{bp} \boldsymbol{\varepsilon} - e^T E_v \quad (3-9a)$$

$$\boldsymbol{\tau} = D_{sp} \boldsymbol{\gamma} \quad (3-9b)$$

$$D = e(\varepsilon^0 + z\varepsilon^1 + z^3\varepsilon^3) + pE_v \quad (3-9c)$$

式中,

$$D_{bp} = \frac{E_p}{1-v_p^2} \begin{bmatrix} 1 & v_p & 0 \\ v_p & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-v_p}{2} \end{bmatrix} \quad (3-10a)$$

$$D_{sp} = \frac{E_p}{2(1+v_p)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-10b)$$

与 1D-FGP 相比，刚度系数 D_b 和 D_s 在 x 和 y 方向上均有所不同。根据哈密顿原理，2D-FGP 运动方程的变分形式为

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta U - \delta K) dt = 0 \quad (3-11a)$$

式中， δ 是变分符号。 δU 为虚应变能， δK 为虚动能。虚应变能 δU 的计算公式为

$$\delta U = \int_{\Omega} \left[[\delta \epsilon_0, \delta \kappa_1, \delta \kappa_2] \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{E} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{F} \\ \mathbf{E} & \mathbf{F} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_0 \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{bmatrix} + [\delta \epsilon_s, \delta \kappa_s] \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_s \\ \kappa_s \end{bmatrix} \right] dx dy \quad (3-12)$$

式中，

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{D} \\ \mathbf{E} \\ \mathbf{F} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} D_b \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \\ z^3 \\ z^3 \\ z^4 \\ z^6 \end{Bmatrix} dz + \int_{-h_s-h/2}^{-h/2} D_{bp} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \\ z^3 \\ z^4 \\ z^4 \\ z^6 \end{Bmatrix} dz + \int_{h/2}^{h/2+h_a} D_{bp} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \\ z^3 \\ z^3 \\ z^4 \\ z^6 \end{Bmatrix} dz \quad (3-13a)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{S} \\ \mathbf{C} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} D_s \begin{Bmatrix} 1 \\ z^2 \\ z^4 \end{Bmatrix} dz + \int_{-h_s-h/2}^{-h/2} D_{sp} \begin{Bmatrix} 1 \\ z^2 \\ z^4 \end{Bmatrix} dz + \int_{h/2}^{h/2+h_a} D_{sp} \begin{Bmatrix} 1 \\ z^2 \\ z^4 \end{Bmatrix} dz \quad (3-13b)$$

虚拟动能 δK 公式为

$$\delta K = - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{m} \ddot{\mathbf{u}} dx dy \quad (3-14)$$

式中， $\mathbf{u} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]^T$ ， $\mathbf{u}_1 = [u_0, \beta_x, \beta_x + w_{0,x}]$ ， $\mathbf{u}_2 = [v_0, \beta_y, \beta_y + w_{0,y}]$ ， $\mathbf{u}_3 = [w_0, 0, 0]$ ，

惯性质量为

$$I_i = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(x, y) z^i dz, \quad i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 6\} \quad (3-15a)$$

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{m}_0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{m}_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m}_0 = \begin{bmatrix} I_0 & I_1 & c_1 I_3 \\ I_1 & I_2 & c_1 I_4 \\ c_1 I_3 & c_1 I_4 & c_1^2 I_6 \end{bmatrix} \quad (3-15b)$$

将式 (3-12) 和 (3-14) 代入式 (3-11), 弱方程可表示为

$$\int_{\Omega} \left[[\delta \varepsilon_0, \delta \kappa_1, \delta \kappa_2] \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{E} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{F} \\ \mathbf{E} & \mathbf{F} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{bmatrix} + [\delta \varepsilon_s, \delta \kappa_s] \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_s \\ \kappa_s \end{bmatrix} \right] dx dy + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{m} \ddot{\mathbf{u}} dx dy = 0 \quad (3-16)$$

类似地, 板在机械横向载荷 q_0 下的弱形式为

$$\int_{\Omega} \left[[\delta \varepsilon_0, \delta \kappa_1, \delta \kappa_2] \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{E} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{F} \\ \mathbf{E} & \mathbf{F} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{bmatrix} + [\delta \varepsilon_s, \delta \kappa_s] \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_s \\ \kappa_s \end{bmatrix} \right] dx dy - \int_{\Omega} q_0 \delta w dx dy = 0 \quad (3-17)$$

3.3 等几何分析的基本原理

任意一组B样条基函数通常定义在一个非递减序列的标准参数空间 $\xi \in [0, 1]$ 中, 一维参数空间即节点矢量 $\mathbf{k}(\xi) = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}^T$, ξ_i 表示第 i 个节点, $i=1, 2, \dots, n+p+1$; n 和 p 分别为形成B样条所需基函数的数目和基函数阶次。当B样条基函数的阶次 p 确定以后, 节点矢量和B样条基函数组是一一对应的关系。给定节点矢量 $\mathbf{k}(\xi)$ 和 B样条基函数 $N_{i,p}(\xi)$, 根据Cox-de Boor递推表达式定义有:

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad p=0 \quad (3-18a)$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad p \geq 1 \quad (3-18b)$$

式中, 当分母为零时, 规定基函数也取为零。

根据 B 样条基函数定义, 可以发现其具备如下性质: 1) 在整个定义域内, 基函数 $N_{i,p}(\xi) \geq 0$; 2) 具有归一性, 即 $\forall \xi, \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) = 1$; 3) 当节点 ξ_i 重复度为 k 时, p 阶基函数在节点 ξ_i 位置 $p-k$ 次连续可导。4) 在任意给定区间 $[\xi_i, \xi_{i+1})$ 内有

$p+1$ 个基函数不为 0, 即 $N_{i-p,p}, N_{i-p+1,p} \cdots N_{i,p}$; 5) 基函数间线性无关,

$$\sum_{i=1}^n a_i N_{i,p}(\xi) = 0 \Leftrightarrow a_i = 0, \quad i = 1, 2, \cdots n.$$

NURBS 基函数 $R_{i,p}(\xi)$ 可以由 B 样条基函数加权平均得到, 即

$$R_{i,p}(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi) w_i}{\sum_{j=1}^n N_{j,p}(\xi) w_j} \quad (3-19)$$

式中, w_i 为权因子。图 3-2 显示均匀节点向量 $\Xi = [0, 0, 0, 1/4, 2/5, 3/5, 4/5, 1, 1, 1]$ 构建的二次 B 样条基函数示例。

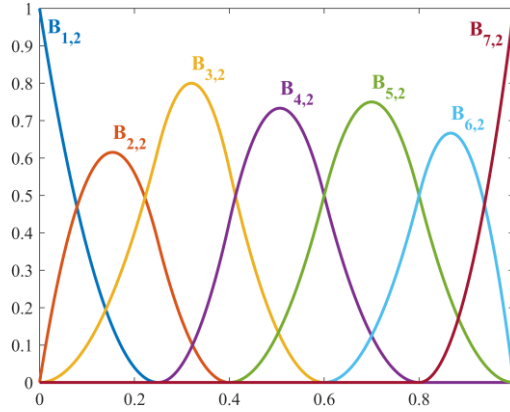


图 3-2 节点向量为 $\Xi = [0, 0, 0, 1/4, 2/5, 3/5, 4/5, 1, 1, 1]$ 的二次 B 样条基函数

类似地, 二维和三维 NURBS 基函数可由一维的 B 样条基函数通过张量乘积的形式组合得到, 即

$$R_{i,j,k}^{p,q}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) w_{i,j}}{\sum_{\hat{i}=1}^n \sum_{\hat{j}=1}^m N_{\hat{i},p}(\xi) M_{\hat{j},q}(\eta) w_{\hat{i},\hat{j}}} \quad (3-20a)$$

$$R_{i,j,k}^{p,q,r}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) L_{k,r}(\zeta) w_{i,j,k}}{\sum_{\hat{i}=1}^n \sum_{\hat{j}=1}^m \sum_{\hat{k}=1}^l N_{\hat{i},p}(\xi) M_{\hat{j},q}(\eta) L_{\hat{k},r}(\zeta) w_{\hat{i},\hat{j},\hat{k}}} \quad (3-20b)$$

式中, $w_{i,j,k}$ 为三维权重, $M_{j,q}(\eta)$ 和 $L_{k,r}(\zeta)$ 分别为 η 和 ζ 向 q 和 r 阶的 B 样条基函数, 也可以由递推式(3.18a)和(3.18b)推导得到, 相应的 η 和 ζ 向节点矢量为 $\mathbf{k}(\eta)$ 和 $\mathbf{k}(\zeta)$ 定义与 $\mathbf{k}(\xi)$ 的定义类似, m 和 l 分别为 η 和 ζ 方向 B 样条基函数的个数。

3.4 基于 TSDT 的 IGA 控制方程

为了构建基于上述弱形式的等几何有限元模型，梯度层的广义位移 $\mathbf{u}$ 表示为 [129]

$$\mathbf{u}(\xi, \eta) = \sum_{I=1}^{m \times n} R_I(\xi, \eta) \mathbf{q}_I \quad (3-21)$$

式中， R_I 是式 (3-20a) 形式的形函数， $\mathbf{q}_I$ 表示第 I 个分析的控制点处的自由度矢量， $m \times n = (p+1)(q+1)$ 是每个元素的控制点数。

$$\{\varepsilon_0, \kappa_1, \kappa_2, \varepsilon_s, \kappa_s\} = \sum_{I=1}^{m \times n} \{\mathbf{B}_I^m, \mathbf{B}_I^{b1}, \mathbf{B}_I^{b2}, \mathbf{B}_I^{S1}, \mathbf{B}_I^{S2}\}^T \mathbf{q}_I \quad (3-22)$$

式中，

$$\mathbf{B}_I^m = \begin{bmatrix} R_{I,x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{I,y} & 0 & 0 & 0 \\ R_{I,y} & R_{I,x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-23a)$$

$$\mathbf{B}_I^{b1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & R_{I,x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{I,y} \\ 0 & 0 & 0 & R_{I,y} & N_{I,x} \end{bmatrix} \quad (3-23b)$$

$$\mathbf{B}_I^{S1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & R_{I,x} & R_I & 0 \\ 0 & 0 & R_{I,y} & 0 & R_I \end{bmatrix} \quad (3-23c)$$

$$\mathbf{B}_I^{S2} = 3c_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & R_{I,x} & N_I & 0 \\ 0 & 0 & R_{I,y} & 0 & R_I \end{bmatrix} \quad (3-23d)$$

$$\mathbf{B}_I^{b2} = c_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & R_{I,xx} & R_{I,x} & 0 \\ 0 & 0 & R_{I,yy} & 0 & R_{I,y} \\ 0 & 0 & 2R_{I,xy} & R_{I,y} & R_{I,x} \end{bmatrix} \quad (3-23e)$$

自由振动问题的公式变为

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{u} = 0 \quad (3-24)$$

式中， $\mathbf{K}$ 是整体刚度矩阵， $\mathbf{M}$ 是质量矩阵，元素 e 和元素 m 定义为

$$\mathbf{k}_e = \int_{\Omega_e} \sum_{I=1}^{N_C} \left\{ \mathbf{B}_I^m, \mathbf{B}_I^{b1}, \mathbf{B}_I^{b2} \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{E} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{F} \\ \mathbf{E} & \mathbf{F} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{B}_I^m \\ \mathbf{B}_I^{b1} \\ \mathbf{B}_I^{b2} \end{Bmatrix} + \left\{ \mathbf{B}_I^{S1}, \mathbf{B}_I^{S2} \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{B}_I^{S1} \\ \mathbf{B}_I^{S2} \\ \mathbf{B}_I^{S2} \end{Bmatrix} \right\} dx dy \quad (3-25a)$$

$$\mathbf{m}_e = \int_{\Omega_e} \sum_{I=1}^{N_c} \mathbf{N}^T \mathbf{m} \mathbf{N} dx dy \quad (3-25b)$$

式中, $\mathbf{N} = \{\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3\}^T$, 具体为

$$\mathbf{N}_1 = \begin{bmatrix} R_I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_I & 0 \\ 0 & 0 & R_{I,x} & R_I & 0 \end{bmatrix} \quad (3-26a)$$

$$\mathbf{N}_2 = \begin{bmatrix} 0 & R_I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_I \\ 0 & 0 & R_{I,y} & 0 & R_I \end{bmatrix} \quad (3-26b)$$

$$\mathbf{N}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & R_I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-26c)$$

2D-FGP 的静态问题可以描述为

$$\mathbf{Kd} = \mathbf{F} \quad (3-27a)$$

$$\mathbf{F} = \int_{\Omega} \sum_{I=1}^{N_c} \{0 \quad 0 \quad R_I \quad 0 \quad 0\} q_0 dx dy \quad (3-27b)$$

式中, $\mathbf{d}$ 是整体位移矢量, $\mathbf{F}$ 是整体外部载荷矢量。

等几何分析方法用于解决功能梯度平面弹性问题^[130]。在这种情况下, 功能梯度板的材料特性由 NURBS 建模。可以使用大量控制点来创建任何复杂的材料分布轮廓^[131]。类似地, 在 2D-FGP 的材料分布中采用基函数, 其具体形式如下:

$$V(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}(\xi, \eta) V_{i,j} \quad (3-28)$$

式中, $V_{i,j}$ 是 (i, j) 索引控制点处陶瓷的体积分。

3.5 优化设计目标

压电双向功能梯度板的形状控制是通过对压电层施加优化电位来实现的, 以实现由主板参考平面中的挠度 w_{di} 定义的期望形状^[132]。期望挠度与计算挠度之间的误差作为目标函数。

最小化目标函数:

$$F(\mathbf{V}_c, \mathbf{U}_v) = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^m (w_i - w_{di})^2}}{m_D E_\alpha} \quad (3-29)$$

约束条件:

$$\sum_{i=1}^{N_u} U_{v,i}^2 - \mathbb{E}_T \leq 0 \quad (3-30a)$$

$$0 \leq V_c^j \leq 1, \quad j \in \{1, 2, \dots, N_p\} \quad (3-30b)$$

$$U_{low} \leq U_{v,i} \leq U_{up}, \quad i \in \{1, 2, \dots, N_u\} \quad (3-30c)$$

$$\omega_k - \omega_1 \geq \omega_\Delta, \quad k = 2, 3 \quad (3-30d)$$

$$\zeta_c - \zeta_{\max} \leq 0 \quad (3-30e)$$

式中, $V_c = \{V_c^1, V_c^2, \dots, V_c^{N_p}\}$ 和 $U_v = \{U_{v,1}, U_{v,2}, \dots, U_{v,N_u}\}$ 为设计变量; N_u 为压电层独立块的数量; w_i 和 w_{di} 分别为第 i 个采样点的计算值和期望值; m_D 为采样点数; E_α 为修正参数, 其值与具体问题有关; $\mathbb{E}_T$ 为输入电压能量的最大值; U_{up} 和 U_{low} 分别为压电层电压的上限和下限。 w_j 为第 j 阶固有频率, w_Δ 为最小频率差; $\zeta_{\max}$ 表示陶瓷体积分数的最大允许值, ζ_c 表示陶瓷体积分数的综合平均值^[133]。图 3-3 展示了压电 2D-FGP 进行 IGA 优化的 IMFO 流程图。

3.6 收敛性与准确性研究

本节主要研究结合 TSDT 的 IGA 方法求解含压电层的 2D-FGP 问题的收敛性和精度。材料参数如表 3-1 所示。

3.6.1 压电 2D-FGP 的自由振动分析

本小节旨在以 $400 \text{ mm} \times 400 \text{ mm}$ 压电功能梯度板为例, 验证所提方法的收敛性和适用性。板的中间层由 Ti-6Al-4V 和氧化铝组成, 每层厚度为 5 mm 。值得注意的是, 当功能梯度指数 $n = 0$ 时, 中间层转变为均质 Ti6Al-4V 材料板。当 $n = 1000$ 时, 中间层由氧化铝组成。两个 PZT-G1195N 压电层, 每层厚度为 0.1 mm , 沿 z 方向极化, 完全覆盖中间层的上下表面。利用所提出的方法计算固有频率, 数值结果如表 3-2 所示。表 3-3 给出了不同边界条件下方形板的前六阶固有频率。

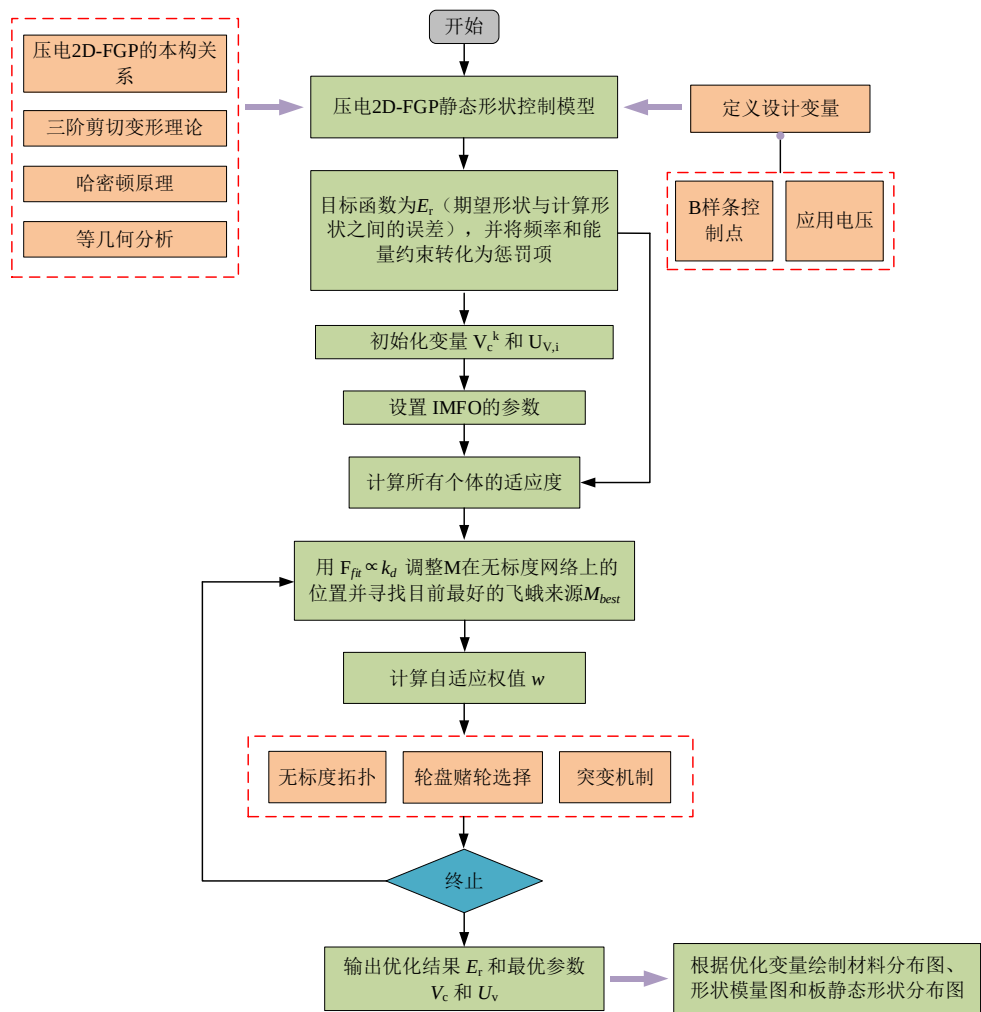


图 3-3 2D-FGP 材料优化设计的 IMFO 流程图

表 3-1 材料属性

属性	压电层		功能梯度层		
	PZT-G1195N	Ti-6Al-4V	Aluminum oxide	Al	Al ₂ O ₃
弹性模量					
E_{11}/GPa	63	105.7	320.24	70	380
E_{22}/GPa	63	105.7	320.24	70	380
E_{33}/GPa	63	105.7	320.24	70	380
G_{12}/GPa	24.2	-	-	-	-
G_{13}/GPa	24.2	-	-	-	-
G_{23}/GPa	24.2	-	-	-	-
泊松比					
ν_{12}	0.3	0.2981	0.26	0.3	0.3
ν_{13}	0.3	0.2981	0.26	0.3	0.3
ν_{23}	0.3	0.2981	0.26	0.3	0.3
密度					
$\rho/(\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})$	7600	4429	3750	2702	3800

表 3-1 (续表) 材料属性

属性	压电层		功能梯度层		
	PZT-G1195N	Ti-6Al-4V	Aluminum oxide	Al	Al ₂ O ₃
压电系数					
$d_{31}/(\text{m}\cdot\text{V}^{-1})$	2.54E-12	-	-	-	-
$d_{32}/(\text{m}\cdot\text{V}^{-1})$	2.54E-12	-	-	-	-
介电常数					
$k_{11}/(\text{F}\cdot\text{m}^{-1})$	1.53E-08	-	-	-	-
$k_{22}/(\text{F}\cdot\text{m}^{-1})$	1.53E-08	-	-	-	-
$k_{33}/(\text{F}\cdot\text{m}^{-1})$	1.53E-08	-	-	-	-

表 3-2 压电 SSSS FGP 的固有频率

Mode	$n = 0$			$n = 1000$		
	本章方法	IGA	解析解	本章方法	IGA	解析解
1	147.868	145.355	145.350	265.594	263.695	265.114
2	369.333	363.064	363.050	663.425	658.684	662.201
4	590.387	580.375	580.350	1060.564	1052.989	1058.589
6	737.607	725.108	725.000	1325.099	1315.640	1322.461
8	957.967	941.948	941.640	1721.071	1708.790	1717.694

表 3-3 不同边界条件下压电 2D-FGM 板的前六阶固有频率

边界条件	Mode	$n = 0$			$n = 1000$		
		本章方法	IGA	FEM ^[4]	本章方法	IGA	FEM ^[4]
CFFF	1	25.928	25.546	25.580	46.803	46.499	46.550
	2	62.814	63.522	62.750	115.955	115.618	116.000
	3	158.218	156.530	157.200	288.051	286.538	287.600
	4	202.729	199.967	200.190	366.958	364.763	365.000
	5	229.091	227.264	228.200	419.822	418.066	419.550
	6	400.750	397.308	397.580	733.613	730.416	730.590
CCCC	1	268.565	264.015	262.530	482.638	479.163	477.140
	2	546.782	537.533	533.830	982.777	975.695	970.640
	3	546.782	537.533	533.830	982.777	975.695	970.640
	4	804.729	791.172	774.200	1446.623	1436.256	1411.850
	5	978.024	961.440	957.320	1758.275	1745.442	1740.150
	6	982.845	966.167	963.040	1766.913	1754.001	1750.090

3.6.2 悬臂式压电 FGP 的弯曲分析

图 3-4 所示为一个尺寸为 $0.4 \times 0.4 \text{ m}$ 的 CFFF 悬臂式压电 FGP，功能梯度层厚

度为 $h = 5.0 \times 10^{-3} \text{ m}$ 。上下板由两层极化方向相反的压电层粘合而成，上下压电层

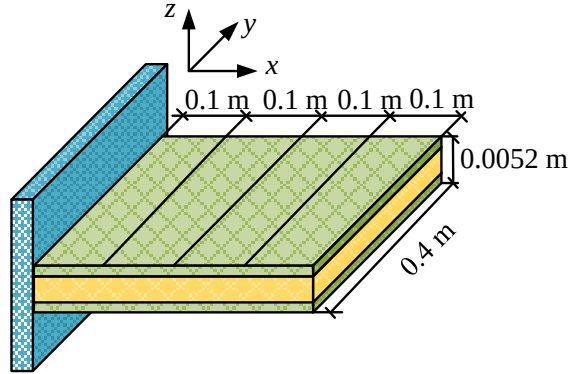


图 3-4 CFFF 悬臂压电 FGP 示意图

表 3-4 悬臂式压电 FGP 在均匀载荷和不同输入电压特性下的偏转

n	x	方法	$q = 100$		
			0V	20V	40V
$n=0$	0.1	文献[134]	-2.7344E-05	-2.1078E-05	-1.4812E-05
		本章方法	-2.6566E-05	-2.0503E-05	-1.4439E-05
	0.2	文献[134]	-9.0702E-05	-6.2375E-05	-3.4047E-05
		本章方法	-8.8058E-05	-6.0773E-05	-3.3488E-05
	0.3	文献[134]	-1.7038E-04	-1.0357E-04	-3.6765E-05
		本章方法	-1.6541E-04	-1.0124E-04	-3.7063E-05
	0.4	文献[134]	-2.5509E-04	-1.3417E-04	-1.3251E-05
		文献[135]	-2.5460E-04	-1.3346E-04	-1.2320E-05
$n=5$	0.1	本章方法	-2.4773E-04	-1.3178E-04	-1.5844E-05
		文献[134]	-1.2052E-05	-9.1555E-06	-6.4145E-06
	0.2	本章方法	-1.1897E-05	-9.1325E-06	-6.4074E-06
		文献[134]	-4.0033E-05	-2.7084E-05	-1.4665E-05
	0.3	本章方法	-3.9502E-05	-2.7135E-05	-1.4588E-05
		文献[134]	-7.5215E-05	-4.4882E-05	-1.5548E-05
	0.4	本章方法	-7.4216E-05	-4.4743E-05	-1.5468E-05
		文献[134]	-1.1284E-04	-5.8490E-05	-4.1400E-06
$n=1000$	0.1	本章方法	-1.1266E-04	-5.8200E-05	-3.7500E-06
		文献[135]	-1.1110E-04	-5.7948E-05	-4.7944E-06
	0.2	本章方法	-9.5938E-06	-2.1078E-05	-1.4812E-05
		文献[134]	-9.4948E-06	-7.3085E-06	-5.1221E-06
	0.3	本章方法	-3.1862E-05	-2.6375E-05	-3.4047E-05
		文献[134]	-3.1524E-05	-2.1589E-05	-1.1654E-05
	0.4	本章方法	-5.9857E-05	-1.0357E-04	-3.6765E-05
		文献[134]	-5.9220E-05	-3.5718E-05	-1.2215E-05
$n=1000$	0.4	本章方法	-8.9581E-05	-1.3417E-04	-1.3251E-05
		文献[135]	-8.9470E-05	-4.6090E-05	-2.7100E-06
	0.4	本章方法	-8.8636E-05	-4.6009E-05	-3.3820E-06
		文献[135]	-8.8636E-05	-4.6009E-05	-3.3820E-06

厚度均为 0.1 mm。芯层由 Ti-6Al-4V 和氧化铝材料组成，压电层由 PZT-G1195N 组成。板的材料特性如表 3-1 所示。表 3-4 给出了悬臂式压电 FGP 在均匀载荷和不同输入电压特性下的挠度。可以看出，本文方法与文献[134-135]的趋势相吻合。

3.7 数值算例

本节通过三个算例验证本文提出的基于 TSDT 的压电层 2D-FGP 的 IGA 优化方法，包括方形 2D-FGP、斜形 2D-FGP 和飞镖形 2D-FGP。PSO1D 和 PSO2D 分别指使用 PSO 作为 1DFGP 和 2D-FGP 的优化器。同样，IMFO1D 和 IMFO2D 指使用本文提出的 IMFO 作为 1D-FGP 和 2D-FGP 的优化器。IMFO 和 PSO 算法的参数设置为 $k_{\max} = 200$ ， $N = 50$ 。NURBS 基函数阶数设置为 $p = q = 1$ ，算例中材料参数如表 3-1。

3.7.1 方形压电 2D-FGP

首先考虑一个带有压电层的方形 2D-FGP，边界条件为 SSSS。板的宽度为 0.4 m，功能梯度层的厚度为 5×10^{-3} m，上下压电层的厚度为 1.5×10^{-3} m，如图 3-5 所示。 $w_{\text{amend}} = 240$ ， $E_{\text{amend}} = 1.0 \times 10^{-6}$ ， $\zeta_{\max} = 0.7$ ，前两阶固有频率之差为 300 Hz，输入电压总能量的极限值为 $E_T = 3 \times 10^5$ J。所需的静态形状描述为 $X = 10^{-4} \sin(\pi x 0.4) \sin(\pi y 0.4)$ 。

图 3-6 所示为 16×16 单元 3 阶 NURBS 设计曲面，用于表示最优材料^[136]。由于方形板的对称性，板左下角四个压电块的电压被作为变量，即 $U_{V,1}$ 、 $U_{V,2}$ 、 $U_{V,5}$ 和 $U_{V,6}$ 。对于独立控制点变量的选择，只需选择板的八分之一，其他七个区域都可以通过区域 A 的中心对称或轴对称变换获得。

图 3-7 为各种优化器对 1D-FGP 和 2D-FGP 的迭代曲线（纵坐标为对数形式下期望形状与计算形状之间的误差 Er ）。用于 2D-FGP 材料优化的 LMFO 和 DMFO^[105]分别称为 LMFO2D 和 DMFO2D。另外，为了进行比较，还采用了文献[127,139]中描述陶瓷体积分数分布的方法来进行比较。IMFO 在 2D-FGP 上获得了最优结果，从方板第 20 代、第 100 代和第 200 代的体积分数分布图可以看出。可以看出，方形 2D-FGP 四个角上明显存在陶瓷特性，而中心部分主要由金属组成。图 3-8 为静态形状图。优化变量和约束如表 3-5 所示。方形压电 2D-FGP 的前六阶振型如图 3-9 所示。

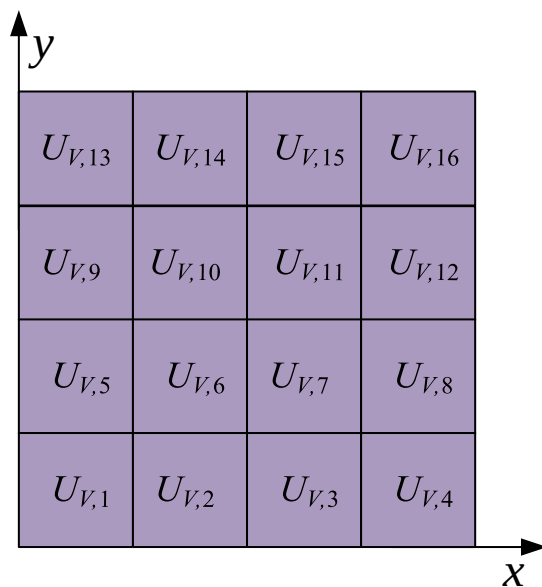


图 3-5 SSSS 压电 2D-FGP 的结构模型

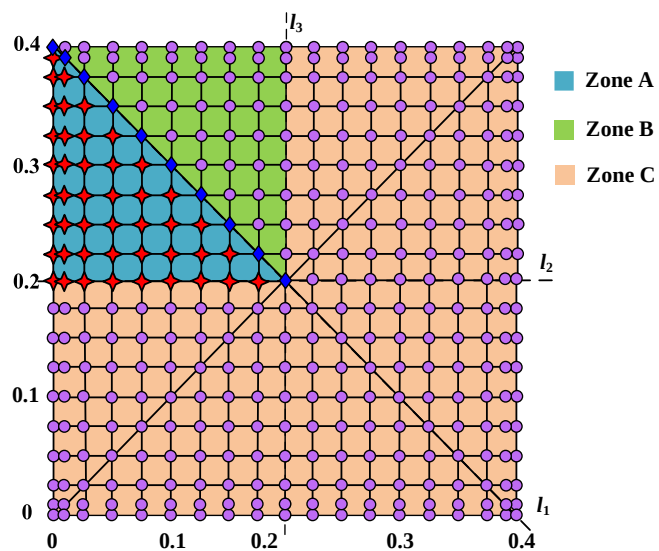


图 3-6 SSSS 压电 2D-FGP 设计模型。◆表示区域内的可变控制点，

◆表示对称线上的可变控制点，●表示联合控制点。

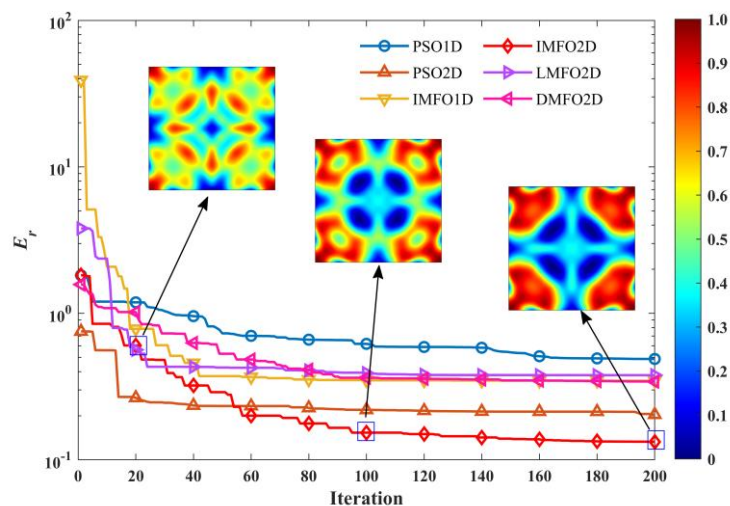


图 3-7 SSSS 压电 2D-FGP 的迭代曲线

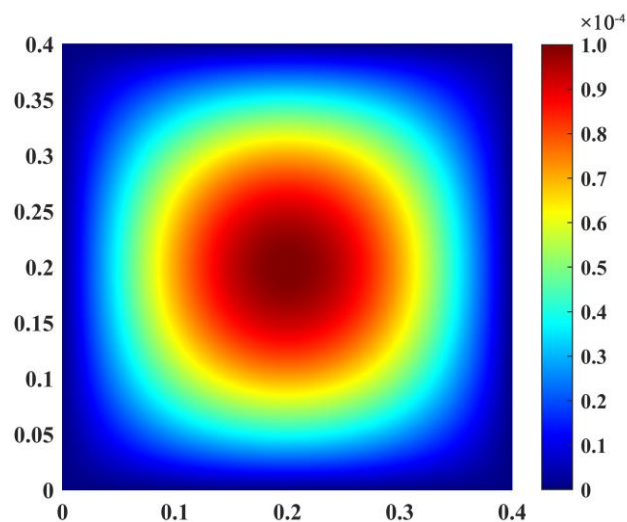


图 3-8 方形 2D-FGP 期望形状图

表 3-5 不同优化方法对 SSSS 压电 2D-FGP 测试结果

	方法					
	PSO1D	IMFO1D	PSO2D	LMFO2D	DMFO2D	IMFO2D
优化目标及约束						
f	0.4880	0.3464	0.2033	0.3781	0.3420	0.1327
ω_{Δ}	359.5129	359.5030	352.0706	359.5030	355.9415	328.7613
ω_1	240.0067	240.0001	240.0070	240.0001	240.0474	240.0099
ζ_{true}	0.6308	0.6307	0.4988	0.6307	0.5281	0.5382
Uv^2	299997.0780	299997.6209	299989.4804	299993.5984	299963.5152	299923.2782

表 3-5 (续表) 不同优化方法对 SSSS 压电 2D-FGP 测试结果

	方法					
	PSO1D	IMFO1D	PSO2D	LMFO2D	DMFO2D	IMFO2D
压电块序号						
1, 4, 13, 16	37.6785	38.0719	27.3742	63.1960	118.9267	35.3166
2, 3, 14, 15	177.7933	97.4592	90.7896	90.0064	110.8611	81.2875
5, 9, 8, 12	71.6105	91.4501	106.7567	128.9619	81.6301	78.8272
6, 7, 10, 11	191.9403	235.9842	233.6841	215.1101	204.6794	246.8039

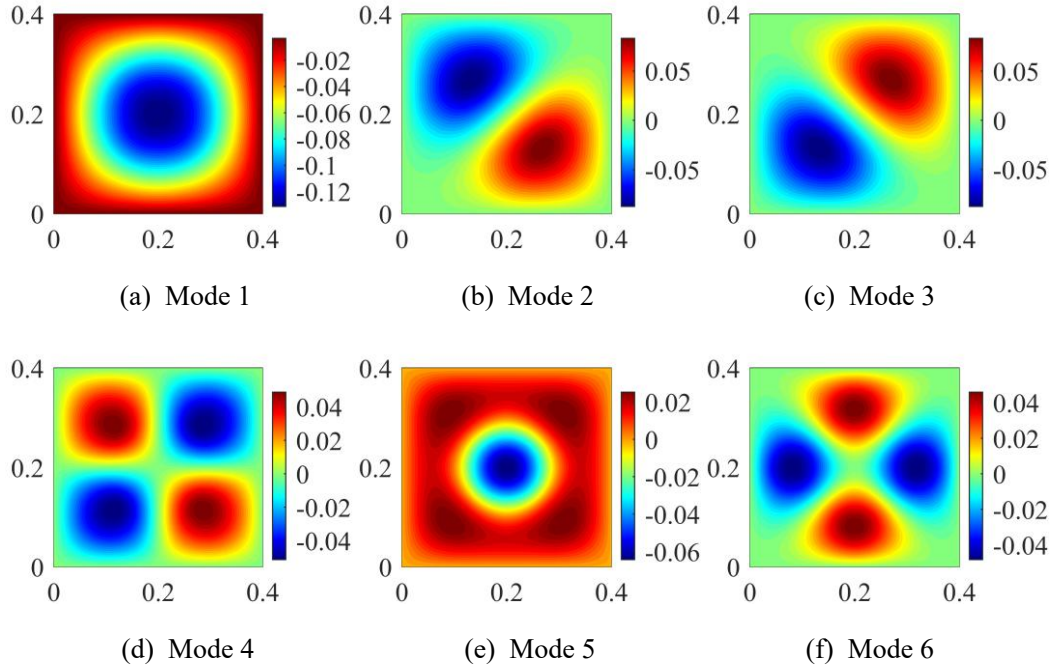


图 3-9 SSSS 方形压电 2D-FGP 的前六阶振型

3.7.2 斜形压电 2D-FGP

算例二研究了 CFFF 斜形压电 2D-FGP 的材料设计。板的尺寸位置和形状如图 3-10 所示。压电层被划分为 14 个边长为 0.02 m 的独立电压区域，对于 $U_{V,i}$ 的电压变化范围为 -300 V 至 300 V，未划分区域不施加电压。 $w_{amend} = 400$ ， $E_{amend} = 8.0 \times 10^{-9}$ ， $\zeta_{max} = 0.70$ 。前两阶固有频率之差为 1000 Hz。输入电压总能量的极限值为 $E_T = 5 \times 10^5$ J，其余参数与上例一致。FG 层的变量设计与上例相同，总变量数为 81 个。期望的静态形状描述为 $X = 10^{-6}(1.562x^2 - 0.849xy)$ 。压电层中每个压电块的电压计算如下^[133]：

$$U_{V,i} = \tilde{U}_i \frac{1}{1 + e^{-9U_{c,i}}} \quad (3-31)$$

式中， $U_{c,i}$ 和 $\tilde{U}_i$ 为设计变量，值为 0 表示压电独立芯片不工作。 $\vartheta = 1.0 \times 10^8$ 为放大参数。

图 3-11 展示了斜板的 19×19 计算网格，图 3-12 显示 PSO 和 IMFO 在具有压电层的 1D-FGP 和 2D-FGP 上的迭代曲线。它还包括第 20、100 和 200 代斜形 2D-FGP 的体积分数分布图。可以看出斜 2D-FGP 在边缘处具有明显的陶瓷特征，金属集中在中间部分。图 3-13 展示了期望静态形状图。优化变量和约束如表 3-6 所示。斜形压电 2D-FGP 的前六阶振型如图 3-14 所示。

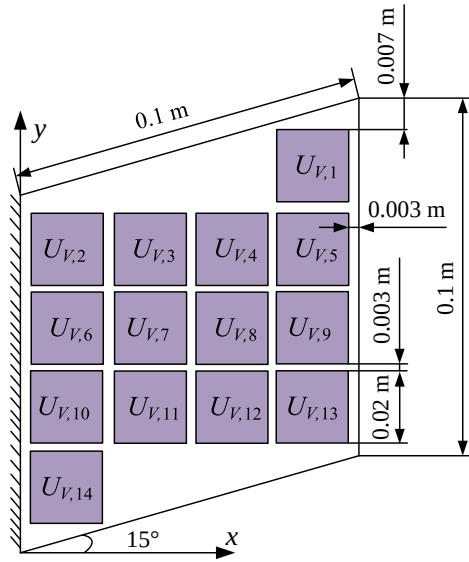


图 3-10 CFFF 斜形压电 2D-FGP 的结构模型

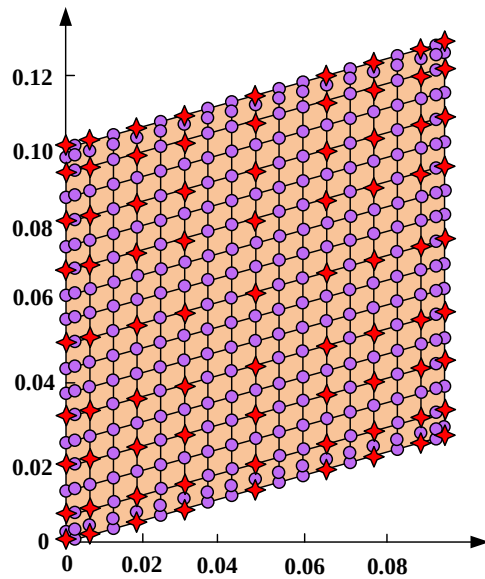


图 3-11 带压电层的 CFFF 斜交 2D-FGP 设计模型。

◆表示区域内可变控制点，●表示联合控制点。

表 3-6 不同优化方法下 CFFF 压电 2D-FGP 测试结果

优化目标及约束	方法			
	PSO1D	SMFO1D	PSO2D	SMFO2D
f	0.6858	0.6588	0.7355	0.4638
ω_{Δ}	943.4881	949.1299	966.5630	773.2758
ω_1	682.4425	686.2299	673.1362	652.2943
ζ_{true}	0.6353	0.6748	0.5244	0.4188
U_V^2	14967.9892	32893.8211	53928.7439	9050.5662
压电块序号				
1	0	0	-102.9817	0
2	0	-77.5148	79.7148	0
3	0	120.4080	-1.6929	0
4	46.1245	0	-14.4356	29.3636
5	-17.0090	0	170.4649	0
6	0	0	0	0
7	0	0	0	0
8	89.2050	0	-50.2945	0
9	0	0	0	0
10	0	71.5030	0	51.7575582 4
11	25.0424	0	-0.1615	42.7932974 6
12	0	3.4633	0	0
13	-62.9806	0	33.41373718	0
14	0	-85.2204	-63.6670	-60.6485

电压和频率的单位分别是 V 和 Hz。

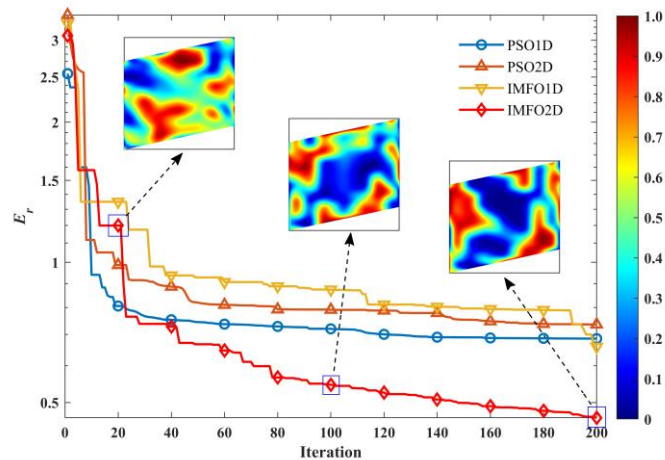


图 3-12 CFFF 压电 2D-FGP 的迭代曲线

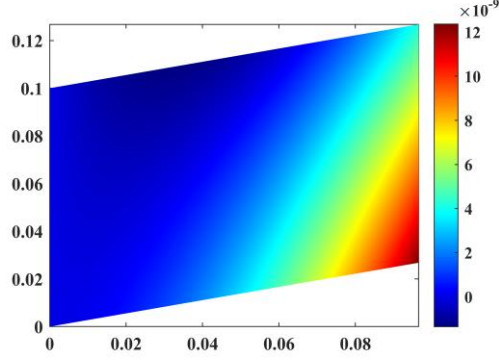


图 3-13 斜形 2D-FGP 期望形状图

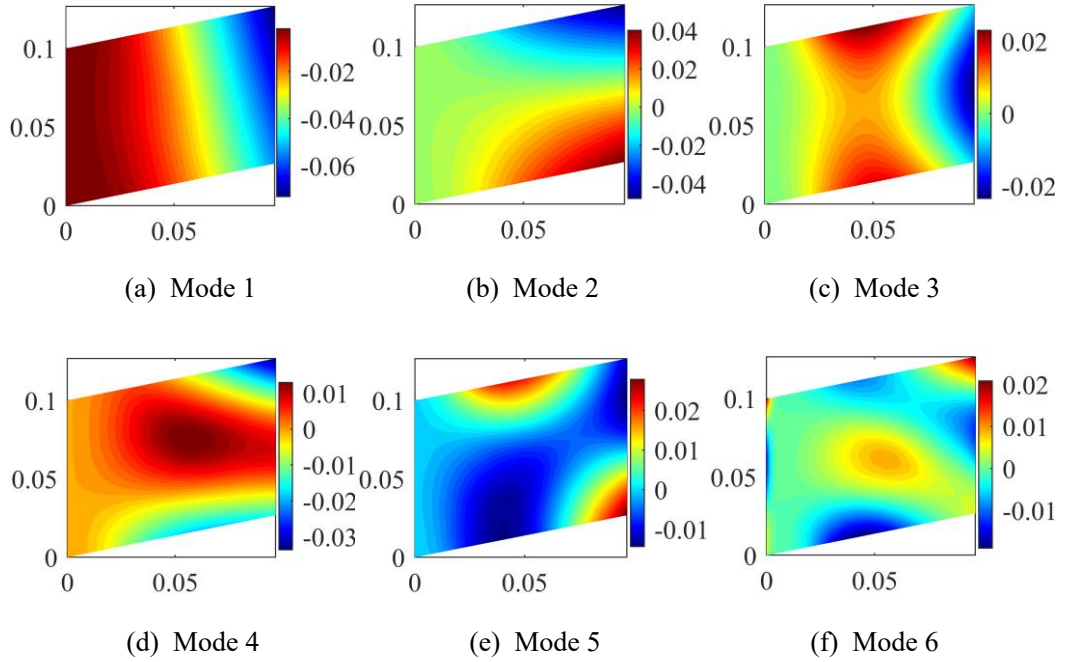


图 3-14 CFFF 斜形压电 2D-FGP 的前六阶振型

3.7.3 飞镖形压电 2D-FGP

第三个算例考虑了具有压电层的 CCCC 镖形 2D-FGP 的材料优化设计。图 3.15 展示了细化之前的 2D-FGP 飞镖形示意图。表 3-7, 3-8 给出了相应的多项式阶数、节点向量、控制点和权重。图 3-16 中显示的 19×19 的 IGA 控制网格, 是通过最粗的 IGA 网格进行 4 阶 h 细化得到的。结构模型如图 3-17 所示。压电层由 16 个 NURBS 元素组成。 $U_{V,i}$ 的电压变化范围为 -300 V 至 300 V 。 $w_{amend} = 240$, $E_{amend} = 1.0 \times 10^{-6}$, $\zeta_{max} = 0.7$ 。前两阶固有频率之差 $\zeta_d = 300 \text{ Hz}$ 。输入电压总能量的极限值为 $E_T = 3 \times 10^5 \text{ J}$, 其他参数与上例一致。板受到均匀压力 $q_0 = 10 \text{ N/m}^2$ 。静态控制所需的板挠度值表示为

$$X = 10^{-5} \times \sin(x^2 + y^2) \times e^{-\frac{x^2 + y^2}{2}} \times \cos(x - y) \quad (3-32)$$

图 3-18 显示了 PSO 和 IMFO 对具有压电层的 1D-FGP 和 2D-FGP 的迭代曲线。显然，陶瓷特性主要集中在飞镖形 2D-FGP 的四个角上。图 3-19 显示了飞镖形 2D-FGP 的形状图。表 3-9 列出了优化变量和约束。飞镖形压电 2D-FGP 的前六阶振型如图 3-20 所示。

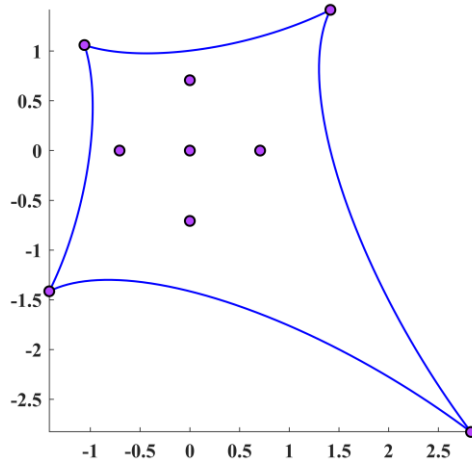


图 3-15 飞镖形 FGP 的未 IGA 细化

表 3-7 飞镖形 FGP 最粗 IGA 细化的多项式阶数和节点向量

方向	阶数	节点矢量
ξ	$p=2$	$\{0,0,0,1,1,1\}$
η	$q=2$	$\{0,0,0,1,1,1\}$

表 3-8 飞镖形 FGP 最粗 IGA 细化的控制点

i	j	$B_{i,j}$	$w_{i,j}$
1	1	$(-\sqrt{2}/10, \sqrt{2}/10)$	1
1	2	$(-\sqrt{2}/20, 0)$	$1/\sqrt{2}$
1	3	$(-\sqrt{2}/5, \sqrt{2}/10)$	1
2	1	$(0, -\sqrt{2}/20)$	$1/\sqrt{2}$
2	2	$(0, 0)$	1
2	3	$(0, \sqrt{2}/20)$	$1/\sqrt{2}$
3	1	$(3\sqrt{2}/40, -3\sqrt{2}/40)$	1
3	2	$(\sqrt{2}/20, 0)$	$1/\sqrt{2}$
4	3	$(\sqrt{2}/10, \sqrt{2}/10)$	1

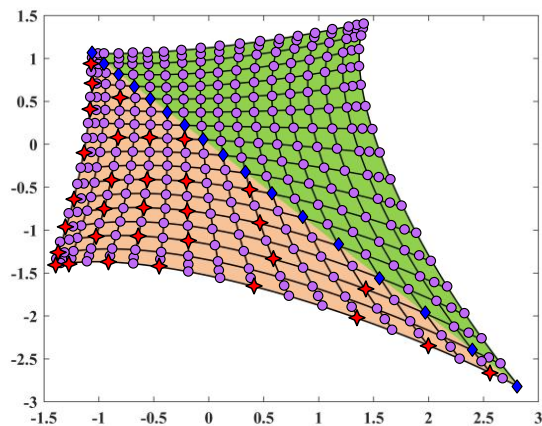


图 3-16 飞镖形 2D-FGP 设计模型。◆表示区域内的可变控制点，
◆表示对称线上的可变控制点，●表示联合控制点。

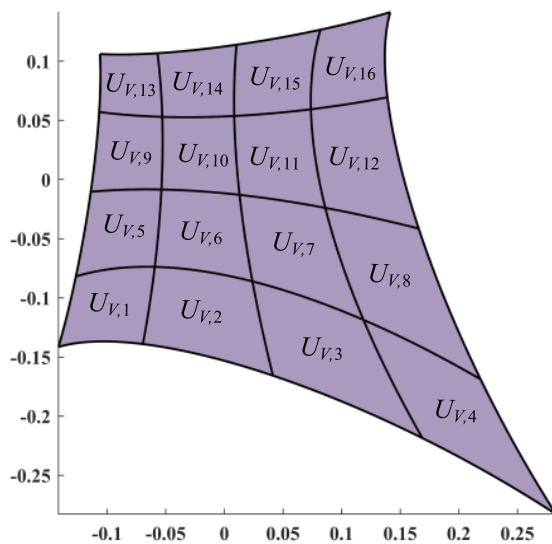


图 3-17 CCCC 飞镖形压电 2D-FGP 结构模型

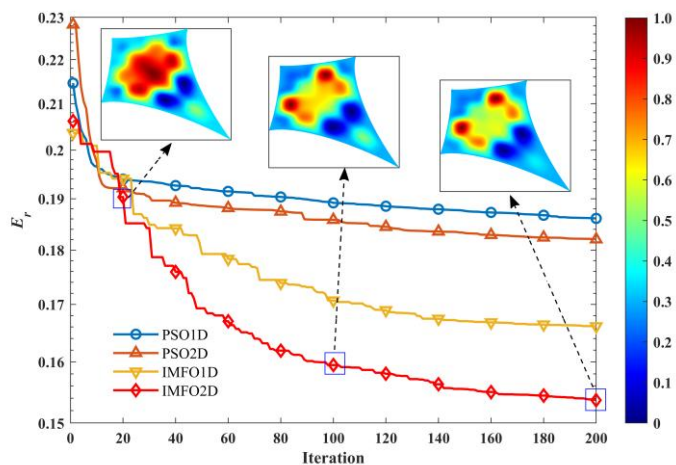


图 3-18 CCCC 飞镖形压电 2D-FGP 的迭代曲线

表 3-9 不同优化方法对 CCCC 压电 2D-FGP 测试结果

	方法			
	PSO1D	SMFO1D	PSO2D	SMFO2D
优化目标及约束				
f	0.19	0.17	0.18	0.15
ω_{Δ}	792.59	685.26	814.14	753.91
ω_1	924.87	801.56	940.49	806.21
ζ_{true}	0.32	0.09	0.52	0.47
U_V^2	402017.19	598093.01	308647.54	513701.63
压电块序号				
1, 16	155.74	298.90	42.99	7.41
2, 12	-69.39	158.97	182.18	195.60
3, 8	-277.52	-107.55	-68.13	-177.24
4	-118.48	-20.64	49.55	-58.09
5, 15	169.24	299.92	248.79	298.97
6, 11	84.48	163.70	142.14	51.40
7	-95.45	105.61	89.28	74.33
9, 14	-14.99	42.03	-60.18	-213.64
10	-68.50	84.41	62.61	1.66
13	-300.00	-299.99	-208.55	-300.00

电压和频率的单位分别是 V 和 Hz。

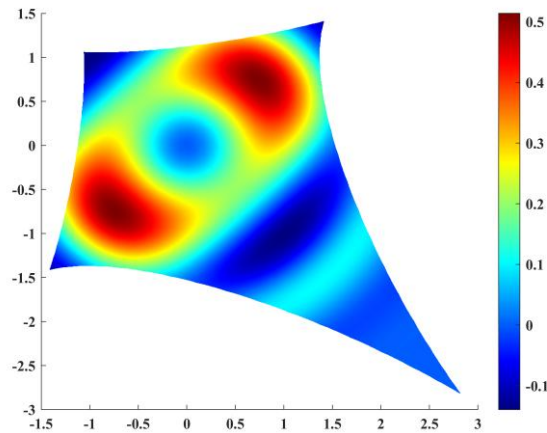


图 3-19 飞镖形 2D-FGP 期望形状图

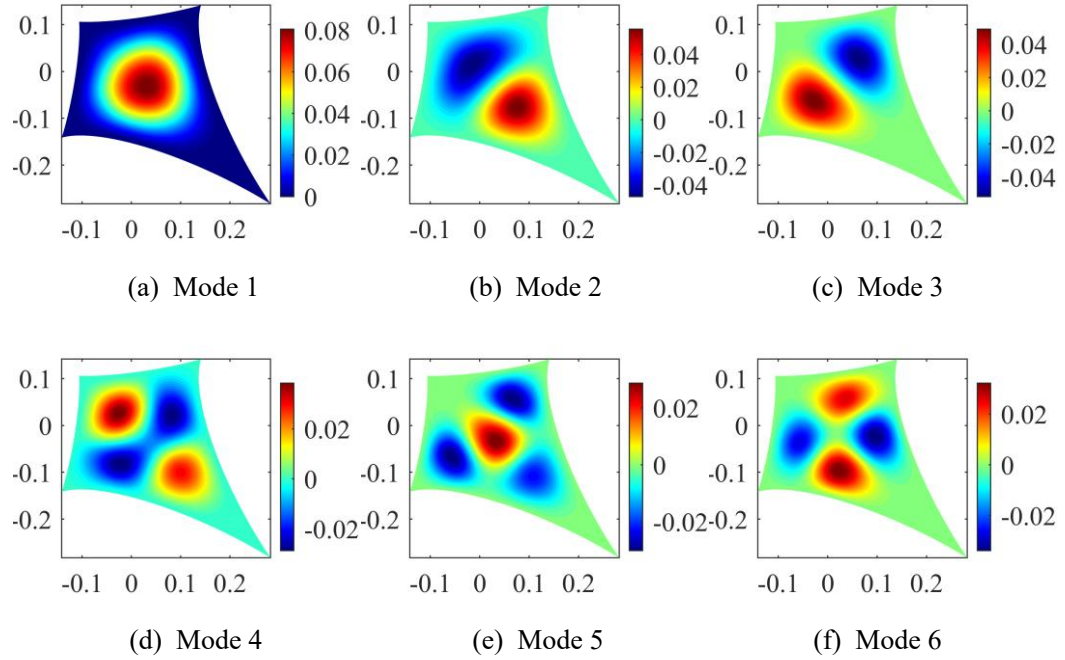


图 3-20 CCCC 飞镖形压电 2D-FGP 的前六阶振型

3.8 本章小结

本章提出了一种有效的压电双向功能梯度板（2D-FGP）静态形状控制方法。采用基于三阶剪切变形理论的等几何分析方法，获得压电双向功能梯度板的力学行为。在优化设计问题中，采用二维 B 样条控制点用于描述具有压电 2D-FGP 的陶瓷体积分数分布和施加的电压被视为设计变量来优化静态形状误差。通过分析方形、斜形和飞镖形压电 2D-FGP 的各种数值示例，验证了所提出模型的有效性和适用性。

第 4 章 基于准三维理论的压电双向功能梯度板静力学分析

本章提出一种基于准三维剪切变形理论的等几何分析方法，用于求解二维压电功能梯度板（2D-FGP）的自由振动与弯曲问题。结合压电材料本构方程和哈密顿变分原理，建立了压电 2D-FGP 的运动控制方程。相较现有准三维理论，所使用的准三维板理论显著减少了未知变量数量。非均匀有理 B 样条（NURBS）的高阶连续性特性满足准三维理论 C^1 连续性要求。通过各种数值算例，系统探究了载荷、边界约束及外加电压对 2D-FGP 板弯曲变形和自由振动特性的影响规律。

4.1 准三维板理论

对于准三维变形剪切理论，剪切变形和厚度拉伸效应通过位移场的高阶项来表征。Senthilnathan 等^[140]在 Reddy 的五变量板理论^[141]的基础上，提出了准三维板块理论，该理论使用的变量较少。板内位移变化的方程表示为

$$u(x, y, z) = u_0 - zw_{b,x} + g(z)w_{s,x} \quad (4-1a)$$

$$v(x, y, z) = v_0 - zw_{b,y} + g(z)w_{s,y} \quad (4-1b)$$

$$w(x, y) = w_b + w_s \quad (4-1c)$$

式中， u_0 ， v_0 ， w_b ， w_s 是板中平面的四个未知位移， $g(z) = -(4z^3/3h^2)$ 。变量数量的减少降低了单元刚度和质量矩阵的维数，与涉及五到六个变量的其他准三维板理论相比，计算时间缩短。特别的是，未知变量的数量减少可以显著降低复杂几何形状和材料分布求解过程的计算成本^[142]。

几何应变 $\tilde{\varepsilon}$ 可以表示为

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \gamma \end{Bmatrix} \quad (4-2)$$

式中，

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^T = \varepsilon_0 + z\varepsilon_1 + g(z)\varepsilon_2 \quad (4-3a)$$

$$\gamma = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} & \gamma_{yz} \end{Bmatrix}^T = f'(z)\varepsilon_s \quad (4-3b)$$

$$\varepsilon_0 = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ 0 \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_1 = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ 0 \\ -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_2 = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ 0 \\ 2\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_s = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ \frac{\partial w_s}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (4-3d)$$

$$f'(z) = g'(z) + 1 \quad (4-3e)$$

应力与应变的本构关系为

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (4-4)$$

$$\text{式中, } Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu(z)^2}, \quad Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu(z)E(z)}{1-\nu(z)^2}, \quad Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu(z))}$$

4.2 基于 quasi-3D 的 IGA 控制方程

根据第二类压电方程^[47], 压电 2D-FGP 的本构方程可表示为

$$\begin{bmatrix} \sigma \\ \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -e^T \\ e & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} \quad (4-5)$$

其中 c 为弹性矩阵, $\sigma = [\varepsilon \ \gamma]^T$, $\bar{\varepsilon} = [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{xz}]^T$ 分别为应力和应变矢量。 $\mathbf{D}$ 为电介质位移, $\mathbf{E}$ 为电场强度矢量, e 为压电应力矩阵, g 为电介质矩阵。

$$e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} p_{11} & 0 & 0 \\ 0 & p_{22} & 0 \\ 0 & 0 & p_{33} \end{bmatrix} \quad (4-6)$$

仅关注沿 z 轴的电场强度, 相应的电场强度矩阵 $\mathbf{E}$ 为

$$\mathbf{E} = -\mathbf{B}_\phi V_\phi \quad (4-7)$$

式中, V_ϕ 是沿压电层厚度方向的电势场, $\mathbf{B}_\phi$ 的具体形式为

$$\mathbf{B}_\phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{h_a} & -\frac{1}{h_s} \end{bmatrix} \quad (4-8)$$

式中, h_a 和 h_s 分别为上、下压电层厚度。根据以上分析, 板的应变能 U_{strain} 为

$$U_{\text{strain}} = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} dV = \frac{1}{2} \int_\Omega \left\{ (\boldsymbol{\varepsilon}_0)^T (\boldsymbol{\varepsilon}_1)^T (\boldsymbol{\varepsilon}_2)^T (\boldsymbol{\varepsilon}_s)^T \right\} \mathbf{c} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_s \end{Bmatrix} d\Omega \quad (4-9)$$

式中

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_m & 0 \\ 0 & \mathbf{D}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{F} & \mathbf{0} \\ \mathbf{E} & \mathbf{F} & \mathbf{H} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_s \end{bmatrix} \quad (4-10)$$

$$A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij} = \int_{-h_f/2}^{h_f/2} (1, z, z^2, g(z), zg(z), g^2(z)) \times Q_{ij} dz \quad (i, j = 1, 2, 6)$$

$$D_{ij}^s = \int_{-h_f/2}^{h_f/2} [f'(z)]^2 Q_{ij} dz \quad (i, j = 4, 5)$$

利用哈密顿变分原理^[143], 板的弱形式可表示为

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (W + U - T) dt = 0 \quad (4-11)$$

式中

$$W = \int_V (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{E}^T \mathbf{D}) dV \quad (4-12a)$$

$$U = \int_{S_p} P_S^T u_0^h dS - \int_{S_E} q_E^T \phi_E dS, q_E = \frac{\xi_0}{h_p} U_V \quad (4-12b)$$

$$T = \int_{V_f} \frac{1}{2} \rho_f \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} dV + \int_{V_a} \frac{1}{2} \rho_a \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} dV + \int_{V_s} \frac{1}{2} \rho_s \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} dV \quad (4-12c)$$

式中, W 、 U 和 T 分别为应变能、外力所作功和动能。 S_P 和 S_E 分别表示表面力 P_S 的作用面积和表面电荷密度 q_E 。 ϕ_E 为压电层表面电位, ξ_0 为介电常数。 U_V 为施加在压电层上的电压。 V_f 、 V_a 和 V_s 分别表示梯度层、上压电层和下压电层的体积。 ρ_a 和 ρ_s 分别表示上、下压电层的密度。 $\mathbf{u}$ 和 $\dot{\mathbf{u}}$ 分别是位移和速度矢量。

采用 NURBS 基函数对板的位移场 $\mathbf{u}$ 进行近似,

$$\mathbf{u}^h(\xi, \eta) = \sum_{I=1}^{m \times n} R_I(\xi, \eta) \mathbf{d}_I \quad (4-13)$$

式中, $\mathbf{d}_I = [u_{0I} v_{0I} w_{bI} w_{sI}]^T$ 是与控制点 I 相关的自由度向量, R_I 是如式 (4-19) 中定义的形状函数。

将式 (4-23) 代入式 (4-5) 至 (4-7) 中, 面内应变和剪应变表示为

$$[\varepsilon_0^T \varepsilon_1^T \varepsilon_0^T \varepsilon_s^T]^T = \sum_{A=1}^{m \times n} [(\mathbf{B}_I^0)^T (\mathbf{B}_I^1)^T (\mathbf{B}_I^2)^T (\mathbf{B}_I^s)^T]^T \mathbf{q}_I \quad (4-14)$$

式中

$$\mathbf{B}_I^0 = \begin{bmatrix} R_{I,x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{I,y} & 0 & 0 \\ R_{I,y} & R_{I,x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-15a)$$

$$\mathbf{B}_I^1 = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & R_{I,xx} & 0 \\ 0 & 0 & R_{I,yy} & 0 \\ 0 & 0 & 2R_{I,xy} & 0 \end{bmatrix} \quad (4-15b)$$

$$\mathbf{B}_I^2 = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & R_{I,xx} \\ 0 & 0 & 0 & R_{I,yy} \\ 0 & 0 & 0 & 2R_{I,xy} \end{bmatrix} \quad (4-15c)$$

$$\mathbf{B}_I^s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & R_{I,x} \\ 0 & 0 & 0 & R_{I,y} \end{bmatrix} \quad (4-15d)$$

将式 (4-10)、(4-12)、(3-19) 代入式 (4-17), 得到压电 2D-FGP 的运动控制方程为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{d}} \\ \ddot{\Phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\phi} \\ \mathbf{K}_{\phi u} & \mathbf{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} \quad (4-16)$$

式中

$$\mathbf{K}_{uu} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_u^T \mathbf{c} \mathbf{B}_u d\Omega = \int_{V_f} \left[\begin{Bmatrix} \mathbf{B}_I^0 \\ \mathbf{B}_I^1 \\ \mathbf{B}_I^2 \end{Bmatrix}^T \mathbf{D}_m \begin{Bmatrix} \mathbf{B}^m \\ \mathbf{B}^{b1} \\ \mathbf{B}^{b2} \end{Bmatrix} + \mathbf{B}_I^{sT} \mathbf{D}_s \mathbf{B}_I^s \right] dV \quad (4-17a)$$

$$\mathbf{K}_{u\phi} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_u^T \mathbf{e}^T \mathbf{B}_{\phi} d\Omega = \int_{V_j} \left[(\mathbf{B}_I^0)^T \mathbf{e}_m^T \mathbf{B}_{\phi} + z (\mathbf{B}_I^1)^T \mathbf{e}_m^T \mathbf{B}_{\phi} + g(z) (\mathbf{B}_I^2)^T \mathbf{e}_m^T \mathbf{B}_{\phi} + (\mathbf{B}_I^s)^T \mathbf{e}_s^T \mathbf{B}_{\phi} \right] dV \quad (4-17b)$$

$$\mathbf{K}_{u\phi} = \mathbf{K}_{\phi u}^T, \mathbf{K}_{\phi\phi} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_{\phi}^T \mathbf{g} \mathbf{B}_{\phi} d\Omega, \quad (4-17c)$$

$$\mathbf{M}_{uu} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{m} \mathbf{N} d\Omega, \mathbf{f} = \int_{\Omega} \bar{q}_0 \bar{\mathbf{R}} d\Omega, \quad (4-17d)$$

$$\mathbf{e}_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_s = \begin{bmatrix} 0 & e_{15} \\ e_{15} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-17e)$$

式中, $\mathbf{M}_{uu}$ 为质量矩阵, $\mathbf{K}_{uu}$ 为压电 2D-FGP 的刚度矩阵, $\mathbf{K}_{\phi\phi}$ 为压电材料的自适应刚度矩阵, $\mathbf{K}_{u\phi}$ 和 $\mathbf{K}_{\phi u}$ 为机电耦合刚度矩阵。 $\mathbf{f}$ 为机械载荷, $\mathbf{q}$ 为压电层表面的电荷面密度节点电荷。

质量矩阵计算如下

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I}_0 \end{bmatrix}, \mathbf{I}_0 = \begin{bmatrix} I_1 & I_2 & I_4 \\ I_2 & I_3 & I_5 \\ I_4 & I_5 & I_6 \end{bmatrix} \quad (4-18)$$

式中

$$(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z)(1, z, z^2, zg(z), zg(z), g^2(z)) dz \quad (4-19a)$$

$$\mathbf{N} = \begin{Bmatrix} \mathbf{N}_I^0 \\ \mathbf{N}_I^1 \\ \mathbf{N}_I^2 \end{Bmatrix}, \mathbf{N}_I^0 = \begin{bmatrix} R_A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_{A,x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{A,x} \end{bmatrix}, \quad (4-19b)$$

$$\mathbf{N}_I^1 = \begin{bmatrix} 0 & R_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_{A,y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{A,y} \end{bmatrix}, \mathbf{N}_I^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & R_A & R_A \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-19c)$$

将 $\mathbf{K}_{u\phi}$ 代入式 (4-5), 并消除电势 ϕ 即可得出。

$$\mathbf{M}_{uu} \ddot{\mathbf{d}} + (\mathbf{K}_{uu} + \mathbf{K}_{u\phi} \mathbf{K}_{\phi\phi}^{-1} \mathbf{K}_{\phi u}) \mathbf{d} = \mathbf{f} + \mathbf{K}_{u\phi} \mathbf{K}_{\phi\phi}^{-1} \mathbf{Q} \Leftrightarrow \mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{F} \quad (4-20)$$

式中

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{uu} \quad (4-21)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{uu} + \mathbf{K}_{u\phi} \mathbf{K}_{\phi\phi}^{-1} \mathbf{K}_{\phi u} \quad (4-22)$$

静力学自由振动问题可以描述为

$$\mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{F} \quad (4-23)$$

$$(\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M})\mathbf{d} = 0 \quad (4-24)$$

式中, ω_n 为第 n 阶固有频率, $\mathbf{K}$ 和 $\mathbf{M}$ 分别为总刚度矩阵和质量矩阵。

4.3 数值算例

本节采用基于四变量准三维剪切变形理论的等几何分析方法, 分析压电双向功能梯度板 (2D-FGP) 的力学行为。边界条件表示为 S (简支)、C (固定) 和 F (自由)。二维 NURBS 基函数阶数设置为 $p = q = 3$ 。

鉴于现有文献中关于压电双向功能梯度板自由振动与弯曲分析的研究较少, 本节通过与相关文献[39,127,144]中的成果进行比较, 证实了该方法的有效性。同时, 通过计算 SSSS 边界条件下的方形压电功能梯度板 (FGP) 固有频率, 进一步验证了该方法的收敛性。

4.3.1 网格收敛性验证

本小节考虑一个尺寸为 $a = b = 400$ mm、 $h_f = 5$ mm 和 $h_p = 0.1$ mm 的方形压电功能梯度板。功能梯度层和压电层的材料分别为 Ti-6Al4V/氧化铝和 PZT-G1195N。相关材料的参数如表 3-1 所示。图 4-1 显示了四种不同控制点数对应的 IGA 计算网格。表 4-1 显示了四种不同控制网格 (9×9 、 13×13 、 19×19 和 21×21) 下简支边界条件 (SSSS) 下的压电 FGP 的固有频率。使用 19×19 控制网格计算的固有频率与文献[145]的解析解具有高度的吻合性。

为了进一步评估准三维板理论与简单板理论在薄板和厚板分析中的准确性, 考虑一个长度为 a 、厚度为 h 的均质方形板, 该板受均匀载荷 $P = 1$ N。所用材料参数为杨氏模量 $E = 1.092 \times 10^6$ N/mm² 和泊松比 $\nu = 0.3$ 。简支和夹紧边界条件均考虑在内。中心挠度通过 $\bar{w} = \frac{100w_c E h^3}{12(1-\nu^2) P a^4}$ 进行归一化^[146]。

如表 4-2 所示, 将基于准三维理论和简单 FSDT 的 IGA 中使用二次和三次 NURBS 基函数计算的归一化中心挠度与解析解^[147]进行了比较。从结果可以看出:

- (i) 当 NURBS 基函数的长厚比 $a/h > 1000$ 时, 基于 FSDT 的 IGA 会出现剪切锁定。
- (ii) 基于准三维板理论的 IGA 完全不受剪切锁定的影响。
- (iii) 与简单的 FSDT 相比, 基于准三维理论的 IGA 可以有效地解决具有不同宽厚比的板问题。

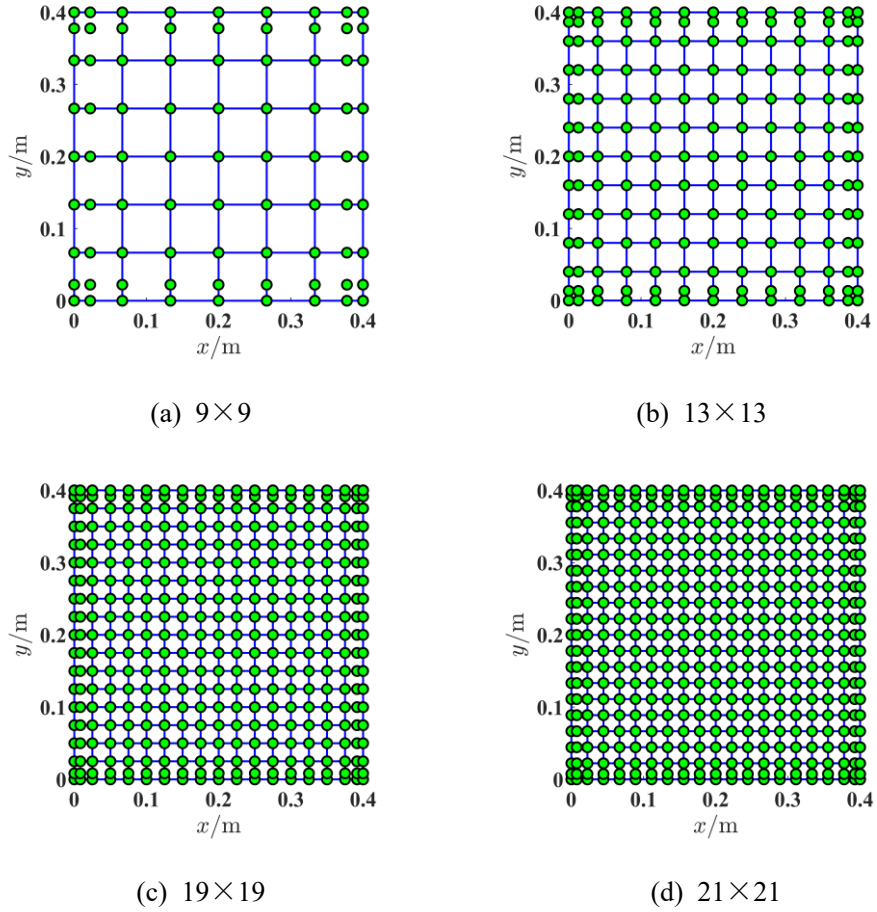


图 4-1 SSSS 压电 FGP 的四种不同控制网格

表 4-1 具有不同控制网格的 SSSS 压电 FGP 的前五阶固有频率 (Hz)

Mode	n	方法				
		IGA(9×9)	IGA(13×13)	IGA(19×19)	IGA(21×21)	文献 [145]
1	0	147.018	147.015	147.014	147.014	145.350
	1000	264.842	264.835	264.835	264.835	265.114
2	0	367.691	367.476	367.452	367.451	363.050
	1000	662.370	661.983	661.940	661.937	662.201
4	0	588.096	587.814	587.784	587.782	580.350
	1000	1059.418	1058.910	1058.856	1058.853	1058.589
6	0	738.408	734.999	734.661	734.641	725.000
	1000	1059.418	1324.059	1323.451	1323.414	1322.461
8	0	957.959	955.082	954.808	954.791	941.640
	1000	1725.717	1720.534	1720.040	1720.010	1717.694

表 4-2 不同方法的标准化中心偏转的比较

a/h	方法	w	误差 (%)	a/h	方法	w	误差 (%)
SSSS							
20	FSDT-quadratic	0.4114	0.1461	100	FSDT-quadratic	0.4048	0.3937
	FSDT-cubic	0.4115	0.1704		FSDT-cubic	0.4064	0
	quasi-3D-quadratic	0.4110	0.0487		quasi-3D-quadratic	0.4061	0.0738
	quasi-3D-cubic	0.4115	0.1704		quasi-3D-cubic	0.4064	0
	Exact	0.4108			Exact	0.4064	
10^3	FSDT-quadratic	0.3654	10.0443	10^4	FSDT-quadratic	0.3552	12.5554
	FSDT-cubic	0.4069	0.1723		FSDT-cubic	0.4056	0.1477
	quasi-3D-quadratic	0.4058	0.0985		quasi-3D-quadratic	0.4058	0.0985
	quasi-3D-cubic	0.4062	0		quasi-3D-cubic	0.4062	0
	Exact	0.4062			Exact	0.4062	
10^5	FSDT-quadratic	0.3551	12.58	10^6	FSDT-quadratic	0.3551	12.58
	FSDT-cubic	0.4056	0.1477		FSDT-cubic	0.3551	12.58
	quasi-3D-quadratic	0.4058	0.0985		quasi-3D-quadratic	0.4058	0.0985
	quasi-3D-cubic	0.4062	0		quasi-3D-cubic	0.4062	0
	Exact	0.4062			Exact	0.4062	
CCCC							
100	FSDT-quadratic	0.1213	4.1107	10^3	FSDT-quadratic	0.0252	80.0791
	FSDT-cubic	0.1268	0.2372		FSDT-cubic	0.1268	0.2372
	quasi-3D-quadratic	0.1246	1.5020		quasi-3D-quadratic	0.1248	1.3439
	quasi-3D-cubic	0.1266	0.0791		quasi-3D-cubic	0.1265	0
	Exact	0.1265			Exact	0.1265	
10^4	FSDT-quadratic	3.1×10^{-4}	99.75	10^5	FSDT-quadratic	3.2×10^{-6}	100
	FSDT-cubic	0.0674	46.7194		FSDT-cubic	0.0014	98.8933
	quasi-3D-quadratic	0.1248	1.3439		quasi-3D-quadratic	0.1248	1.3439
	quasi-3D-cubic	0.1265	0		quasi-3D-cubic	0.1265	0
	Exact	0.1265			Exact	0.1265	

4.3.2 自由振动验证

算例一考虑一个尺寸为 $1 \times 1 \text{m}$ 的方形双向功能梯度板 (2D-FGP)。2D-FGP 由不锈钢 (SUS304) 和氮化硅 (Si_3N_4) 组成。SUS304 的杨氏模量 (E)、泊松比 (ν) 和质量密度 (ρ) 分别为 $E_m = 201.04 \text{ GPa}$ 、 $\nu_m = 0.3262$ 、 $\rho_m = 8166 \text{ kg/m}^3$ 和 Si_3N_4 的 $E_c = 348.43 \text{ GPa}$ 、 $\nu_c = 0.2400$ 、 $\rho_c = 2370 \text{ kg/m}^3$ 。假设每种成分的体积分数在平面方向上连续变化, 符合幂律分布, $V = (x/a)^{k_x} (y/b)^{k_y}$ 。为了便于比较, 无量纲频率定义为 $\bar{\omega} = \omega(a/\pi)^2 \sqrt{\rho_c h_{\max}/D_c}$, 其中 $D_c = E_c h_{\max}/(12(1-\nu_c^2))$, ω 是通过计算得出的固有频率。表 4-3 列出了不同梯度指数 k_x 、边界条件和长厚比的第一个无量纲

频率。

算例二考虑采用 PZT-G1195N 和 Ti-6Al-4V/氧化铝的方形压电 FGP。板的尺寸如下： $a = b = 0.4 \text{ m}$ ， $h_f = 5 \text{ mm}$ ， $h_p = 0.1 \text{ mm}$ 。板的材料参数如表 3-1 所示。表 4-4 列出了使用 19×19 控制网格计算出的 CFFF 和 CCCC 压电 FGP 的前八个无量纲频率。板的无量纲频率随 n 值的增加而增加，结果与文献[148]中的报告结果高度吻合。

表 4-3 不同梯度指数 k_x 、边界条件和长厚比 (a/h) 的一阶无量纲频率比较

边界条件	a/h	方法	$(k_x, k_y=0)$					
			0	0.5	1	2	5	10
SSSS	50	文献[39]	1.9973	1.3958	1.1847	1.0197	0.9008	-
		文献[127]	1.9974	1.3939	1.1848	1.0210	0.9026	0.8672
		本章方法	1.9973	1.3958	1.1847	1.0197	0.9008	0.8652
	100	文献[39]	1.9994	1.3974	1.1861	1.0209	0.9018	-
		文献[127]	1.9993	1.3954	1.1861	1.0221	0.9035	0.8681
		本章方法	1.9993	1.3974	1.1861	1.0208	0.9018	0.8661
	1000	文献[39]	2.0040	1.4014	1.1898	1.0241	0.9043	-
		文献[127]	2.0000	1.3959	1.1865	1.0224	0.9039	0.8684
		本章方法	2.0000	1.3979	1.1865	1.0212	0.9021	0.8665
	50	文献[39]	3.6278	2.5322	2.1425	1.8369	1.6230	-
		文献[127]	3.6311	2.5297	2.1445	1.8408	1.6274	1.5729
		本章方法	3.6333	2.5361	2.1461	1.8399	1.6257	1.5711
CCCC	100	文献[39]	3.6423	2.5432	2.1520	1.8449	1.6300	-
		文献[127]	3.6423	2.5381	2.1518	1.8471	1.6330	1.5783
		本章方法	3.6430	2.5433	2.1523	1.8453	1.6305	1.5758
	1000	文献[39]	3.7131	2.6032	2.2020	1.8832	1.6593	-
		文献[127]	3.6461	2.5409	2.1543	1.8492	1.6348	1.5801
		本章方法	3.6462	2.5457	2.1544	1.8471	1.6321	1.5774

表 4-4 不同边界条件下压电 FGP 的前八阶固有频率

边界条件	Mode	$n = 0$		$n = 1000$	
		FEM [148]	本章方法	FEM [148]	本章方法
CFFF	1	25.58	25.85	46.55	46.73
	2	62.75	63.34	116.00	116.36
	3	157.20	158.49	287.60	288.13
	4	200.19	202.50	365.00	366.85
	5	228.22	230.46	419.55	421.08
	6	397.58	403.32	730.59	736.41
	7	452.26	456.03	821.68	823.25
	8	472.76	477.31	864.00	866.99

表 4-4 (续表) 不同边界条件下压电 FGP 的前八阶固有频率

边界条件	Mode	$n = 0$		$n = 1000$	
		FEM [148]	本章方法	FEM [148]	本章方法
CCCC	1	262.53	268.00	477.14	482.79
	2	533.83	546.47	970.64	984.45
	3	533.83	546.47	970.64	984.45
	4	774.20	805.56	1411.85	1451.19
	5	957.32	979.41	1740.15	1764.38
	6	963.04	984.05	1750.09	1772.76
	7	1172.70	1227.84	2140.36	2211.96
	8	1172.70	1227.84	2140.36	2211.96

4.3.3 弯曲验证

算例三考虑由 SUS304 和 Si3N4 组成的 2D-FGP，尺寸为 $a = b = 1 \text{ m}$ 。材料参数和力学分析网格与上例一致。2D-FGP 承受非均匀载荷， $q = q_0 \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b) \text{ N/m}^2$ ，其中 q_0 设置为 -1 N/m^2 。为了进行定量比较，

将挠度归一化为 $\bar{w} = \frac{E_c h_{\max}^2}{a^3 q_0} w$ 。表 4-5 分别列出了 2D-FGP 中不同 SSSS 和 CCCC

边界条件下 k_x 、 k_y 和 h/a 的解。获得的计算结果与文献[127,144]中报告的结果高度吻合。

算例四采用的功能梯度板 (FGP) 的尺寸和材料与算例二中的相同。边界条件为 CFFF，板承受均匀载荷 $q_0 = 100 \text{ N/m}^2$ 。表 4-6 列出了不同电压和均匀载荷下悬臂方板的端部挠度。观察到悬臂板的尖端节点挠度随着 n 的增加而减小。这些结果与文献[134,135]中的报告结果吻合。

4.3.4 自由振动分析

本小节研究所提出方法对压电 2D-FGP ($a = b = 1 \text{ m}$) 自由振动响应分析。压电 2D-FGP 中间的梯度层材料是 Ti-6Al-4V 和氧化铝，上、下压电层材料为 PZT-G1195N。离散网格和归一化参数均与算例二一致。

表 4-7 至 4-9 分别显示了不同的 h_f/a 、 h_p/h_f 和梯度指数 (k_x 、 k_y) 对 SSSS、CCCC 和 SCSC 压电 2D-FGP 的前六阶无量纲频率的影响。统计结果表明，频率在三个边界条件下均增大。振动频率与板的刚度成正比，与其质量成反比。此外，梯度指数与板的频率呈正相关。原因是梯度指数的增加会导致陶瓷相的贡献减少、板刚度更高以及质量更低。当 h_f/a 和 h_p/h_f 较小时，板的频率会降低。图 4-2 显示

了 SSSS 压电 2D-FGP 的六种振型。

表 4-5 梯度指数 (k_x 和 k_y)、边界条件和长厚比 (a/h) 下的中心挠度比较

边界 条件	a/h	方法	(k_x, k_y)					
			(0, 0)	(0, 0.5)	(0, 2)	(0.5, 0.5)	(0.5, 2)	(2, 2)
SSSS	50	文献[127]	1.4542	1.7083	2.0284	1.9046	2.1429	2.2629
		文献[144]	1.4514	1.7030	2.0259	1.8979	2.1388	2.2594
		本章方法	1.4470	1.6584	1.9770	1.8375	2.0916	2.2289
	100	文献[127]	2.9039	3.4111	4.0498	3.8028	4.2784	4.5180
		文献[144]	2.9033	3.4067	4.0520	3.7964	4.2781	4.5193
		本章方法	2.8951	3.3182	3.9556	3.6766	4.1850	4.4598
CCCC	50	文献[127]	0.5199	0.6124	0.7278	0.6837	0.7673	0.8128
		文献[144]	0.5165	0.6075	0.7233	0.6777	0.7620	0.8075
		本章方法	0.5138	0.5903	0.7041	0.6550	0.7433	0.7938
	100	文献[127]	1.0346	1.2185	1.4476	1.3601	1.5261	1.6165
		文献[144]	1.0328	1.2143	1.4462	1.3544	1.5234	1.6146
		本章方法	1.0286	1.1818	1.4099	1.3115	1.4884	1.5895

表 4-6 CFFF 压电悬臂 FGP 在均匀载荷和不同输入电压下的末端挠度

n	方法	$q = 100$		
		0V	20V	40V
$n=0$	文献[134]	-2.5509E-04	-1.3417E-04	-1.3251E-05
	文献[135]	-2.5460E-04	-1.3346E-04	-1.2320E-05
	本章方法	-2.5433E-04	-1.3323E-04	-1.2117E-05
$n=\infty$	文献[134]	-8.9581E-05	-4.6300E-05	-3.0200E-06
	文献[135]	-8.9470E-05	-4.6090E-05	-2.7100E-06
	本章方法	-8.9387E-05	-4.6020E-05	-2.6526E-06

表 4-7 SSSS 压电 2D-FGP 的梯度指数 (k_x 和 k_y) 的前六阶固有频率 (Hz)

h_i/a	h_p/h_i	Mode	(k_x, k_y)					
			(0, 0)	(0, 0.5)	(0, 2)	(0.5, 0.5)	(0.5, 2)	(2, 2)
0.005	0.1	1	25.1093	30.0756	35.2501	33.3899	36.8999	38.5328
		2	62.7700	74.5932	87.5949	82.2704	90.9920	95.1878
		3	62.7700	75.1932	88.0104	84.1613	93.0928	97.4857
		4	100.4253	120.5634	140.2092	133.7574	146.8698	153.4032
		5	125.5344	147.7687	174.7362	165.7700	183.1455	192.6553
		6	125.5344	150.3390	174.7840	165.9523	184.3924	192.8611
	0.2	1	27.5191	31.3282	35.3605	33.8761	36.6130	37.8752
		2	68.7921	77.9247	88.0078	83.8417	90.6118	93.8278
		3	68.7921	78.3402	88.4085	85.1958	92.1786	95.5746
		4	110.0567	125.5145	140.8071	135.7102	145.9208	150.9841
		5	137.5710	154.9354	175.6947	168.6001	182.0430	189.3965
		6	137.5710	156.6645	176.2014	168.6960	183.1602	189.5457

表 4-7 (续表) SSSS 压电 2D-FGP 的梯度指数 (k_x 和 k_y) 的前六阶固有频率 (Hz)

h_f/a	h_p/h_f	Mode	(k_x, k_y)					
			(0, 0)	(0, 0.5)	(0, 2)	(0.5, 0.5)	(0.5, 2)	(2, 2)
0.1	0.1	1	493.9584	592.0182	694.0262	657.5050	726.6921	758.9279
		2	1206.6216	1435.7016	1687.3321	1584.6400	1753.4573	1834.9602
		3	1206.6216	1447.4974	1695.0749	1621.8689	1794.5221	1879.6384
		4	1402.7884	1778.5200	2057.9424	1983.0294	2177.6354	2290.9647
		5	1402.7884	1780.9227	2132.3115	2088.6867	2321.3829	2455.6215
		6	1889.5509	2273.7350	2647.0539	2525.3588	2774.4860	2898.8743
	0.2	1	581.2049	704.1036	831.5744	786.1849	872.6476	913.0232
		2	1410.4336	1695.3494	2008.2373	1880.8694	2090.7395	2192.4189
		3	1410.4336	1710.4379	2017.2199	1928.0368	2142.3167	2248.2672
		4	1417.9641	1805.3349	2094.3739	2017.0629	2218.6501	2336.2187
		5	1417.9641	1808.2814	2171.2223	2126.0287	2366.9182	2506.0187
		6	2005.3041	2516.6452	3133.5793	2873.5568	3291.5171	3445.3171

表 4-8 CCCC 压电 2D-FGP 的梯度指数 (k_x 和 k_y) 的前六阶固有频率 (Hz)

h_f/a	h_p/h_f	Mode	(k_x, k_y)					
			(0, 0)	(0, 0.5)	(0, 2)	(0.5, 0.5)	(0.5, 2)	(2, 2)
0.005	0.1	1	45.7745	54.7200	63.9649	60.8354	67.1161	70.3324
		2	93.3557	110.6956	129.3566	122.5304	135.1017	141.7539
		3	93.3557	112.0691	131.4437	125.1387	138.5726	145.0490
		4	137.6427	164.9805	192.3558	183.0737	201.4268	210.6097
		5	167.3677	197.3205	232.2808	221.2762	243.8998	257.3966
		6	168.1605	201.4301	234.8357	222.5524	247.4452	258.1803
	0.2	1	50.1668	57.0619	64.2871	61.7564	66.6446	69.1132
		2	102.3099	115.6945	130.2602	124.8377	134.5906	139.6804
		3	102.3099	116.7516	131.9312	126.7149	137.2095	142.1914
		4	150.8394	171.8507	193.1854	185.8218	200.1124	207.2048
		5	183.4102	206.8229	233.9059	224.9805	242.5908	252.9017
		6	184.2779	209.8753	236.4280	226.1928	245.5922	253.7787
0.1	0.1	1	892.9088	1069.6686	1251.7827	1190.7885	1314.6613	1378.3586
		2	1775.2131	2111.3984	2471.6851	2340.8961	2584.6009	2714.1862
		3	1775.2131	2137.5613	2512.4649	2392.3977	2652.2492	2777.8481
		4	2558.8573	3079.9019	3600.4328	3424.8477	3774.1030	3949.0829
		5	2686.3210	3298.5097	3941.6972	3762.3349	4192.0947	4447.2294
		6	2686.3210	3364.2376	3985.8309	3839.0043	4309.4898	4570.5866
	0.2	1	966.2302	1102.6857	1244.6619	1195.8086	1291.9726	1340.9151
		2	1900.8696	2159.8504	2438.5231	2336.3030	2523.9729	2622.8710
		3	1900.8696	2179.6716	2471.8461	2373.7971	2575.2882	2671.2957
		4	2553.0157	3073.9349	3516.1428	3379.5244	3648.0783	3781.7472
		5	2553.0157	3115.1101	3613.8088	3462.6182	3820.4476	4031.4043
		6	2716.9317	3128.8190	3656.0388	3527.9276	3920.6985	4135.6148

表 4-9 SCSC 压电 2D-FGP 的梯度指数 (k_x 和 k_y) 的前六阶固有频率 (Hz)

h_f/a	h_p/h_f	Mode	(k_x, k_y)					
			(0, 0)	(0, 0.5)	(0, 2)	(0.5, 0.5)	(0.5, 2)	(2, 2)
0.005	0.1	1	36.8267	44.2112	50.9311	48.9793	53.6200	56.5137
		2	69.6324	82.9250	97.7571	92.3782	102.3954	106.8439
		3	88.1825	105.9033	121.9052	116.9004	128.2263	135.3208
		4	120.3036	144.2235	167.4531	160.0736	175.6213	183.6992
		5	130.0125	153.7189	182.6635	172.2880	191.9383	200.1448
		6	164.2051	197.1231	227.2384	216.6569	238.5725	251.7065
	0.2	1	40.3608	46.0679	51.3270	49.7095	53.3295	55.5506
		2	76.3126	86.5574	98.1507	93.8077	101.6273	105.0412
		3	96.6409	110.3319	122.8442	118.7781	127.5655	133.0266
		4	131.8396	150.2657	168.3981	162.4972	174.6149	180.8385
		5	142.4781	160.8367	183.5305	174.9297	190.3080	196.5563
		6	179.9445	205.3663	228.8999	220.5109	237.4181	247.5706
0.1	0.1	1	721.2642	867.0106	999.2257	961.4430	1052.8663	1110.1713
		2	1335.4260	1593.0994	1879.9142	1776.7514	1970.5453	2056.8499
		3	1402.7884	1778.5200	2057.9424	2036.1481	2227.0082	2373.4555
		4	1680.2161	2023.2368	2332.4685	2237.1760	2456.7414	2594.4717
		5	2249.4210	2704.9787	3146.6356	3007.1328	3303.0742	3456.8140
		6	2410.2094	2856.9172	3400.3236	3209.5843	3578.3537	3733.1588
	0.2	1	782.3767	894.8809	997.8152	966.9696	1037.9195	1081.9339
		2	1331.1478	1633.6865	1855.6439	1773.5178	1923.2239	1988.9235
		3	1436.4439	1650.8925	1885.3207	1866.6410	2025.3745	2147.6741
		4	1801.0103	2064.9450	2304.4312	2228.8206	2397.5665	2503.2714
		5	2348.3581	2742.7809	3082.7533	2973.9552	3201.0854	3318.1450
		6	2394.9545	2865.2597	3295.7825	3165.0391	3448.4388	3564.2555

为了证明 IGA 在精确建模复杂几何域方面的能力, 使用了夹紧的 Ti-6Al-4V/氧化铝压电 2D-FGP 圆板进行进一步研究。圆板的陶瓷体积分数分布为 $V_c(x, y) = (1 - \frac{x^2 + y^2}{R^2})^{K_R}$, 其中 R 表示圆板的半径, K_R 表示半径方向的梯度折射率^[127]。功能梯度层的厚度为 $h_t = 0.1$ m, 上下压电层的厚度为 $h_p = 0.01$ m。采用 9 个立方 NURBS 元素的网格来表示体积分数的变化。图 4-3 显示了不同梯度折射率下 CCCC 圆形压电 2D-FGP 的陶瓷体积分布。表 4-10 给出了 CCCC 压电圆形 2D-FGP 在不同 R 和 K_R 下的前六阶固有频率的统计数据。

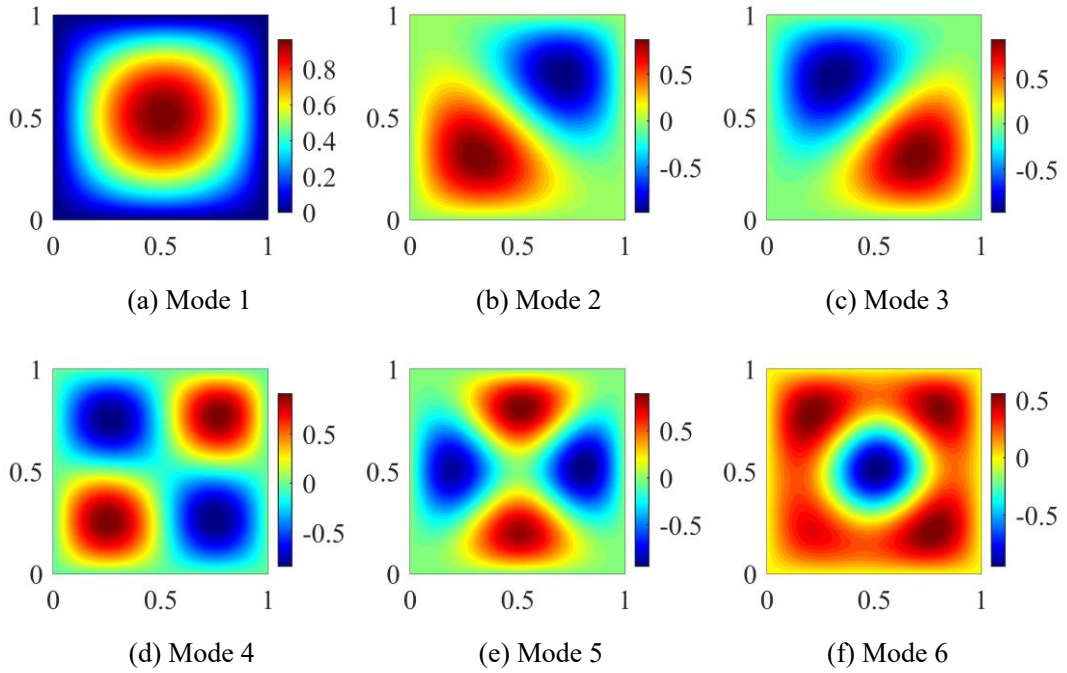


图 4-2 SSSS 压电 2D-FGP 的六种振型

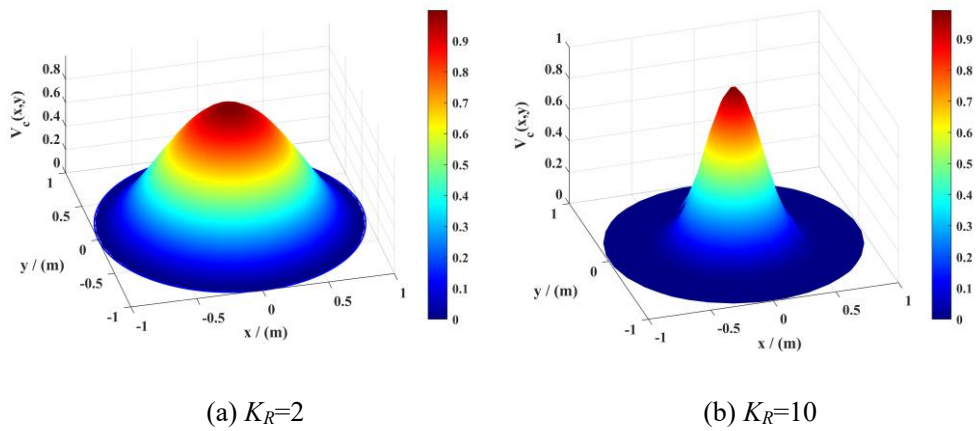


图 4-3 $R = 1\text{m}$ 压电双向功能圆板的陶瓷体积分数分布

表 4-10 梯度指数 K_R 的 CCCC 压电圆形 2D-FGP 的前六阶固有频率 (Hz)

半径	K_R	Mode					
		1	2	3	4	5	6
R=1	0	260.2693	534.9319	537.9951	868.6319	873.9486	989.8864
	1	329.9653	668.9423	670.6625	1096.7876	1098.4136	1202.6601
	5	368.7401	774.8159	776.7379	1281.3090	1284.3364	1375.8148
	10	382.1917	813.9042	815.9599	1332.9492	1336.8424	1433.9074
R=2	0	260.2693	534.9319	537.9951	868.6319	873.9486	989.8864
	1	280.3938	573.4196	575.9409	933.5820	937.4984	1051.3568
	5	323.7985	661.4013	663.3351	1085.8505	1088.1237	1192.6299
	10	347.2949	715.7449	717.5948	1181.2531	1183.4443	1280.7034

表 4-10 (续表) 梯度指数 K_R 的 CCCC 压电圆形 2D-FGP 的前六阶固有频率 (Hz)

半径	K_R	Mode					
		1	2	3	4	5	6
R=5	0	260.2693	534.9319	537.9951	868.6319	873.9486	989.8864
	1	263.6740	541.4357	544.3936	879.5739	884.6279	1000.2996
	5	275.6976	564.5846	567.2259	918.7275	922.9661	1037.3532
	10	287.9905	588.6235	591.0140	959.7360	963.3012	1075.8474

4.3.5 静态弯曲分析

在本小节中, 对压电双向功能梯度方形板进行弯曲分析, 其中 $a = b = 1 \text{ m}$ 、 $h_p = 0.0005 \text{ m}$ 、 $h_f = 0.005 \text{ m}$ 。本小节中使用的材料与第 4.3.3 小节中描述的材料一致, 无量纲中心挠度设置为 $\bar{w} = \frac{E_c h_{\max}^2}{a^3 q_0} w$ 。

图 4-4 显示了功能梯度指数 (k_x, k_y) 对受到正弦载荷 $q_0 \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b)$ 的 CFFF 方板中心线挠度的影响。 $q_0 = -1 \text{ N/m}^2$ 。观察到, 随着功能梯度指数的增加, 悬臂板的中心线挠度减小, 这与文献[134]中的发现一致。图 4-5 显示了在没有任何外部载荷的情况下, 方板上、下压电层受到单位电压时挠度的变化。图 4-6 展示了具有不同梯度指数的悬臂压电 2D-FGP 的偏转三维表面图。这些结果与文献[135]中的报告结果一致。

为了研究压电 2D-FGP 在机电耦合下的挠度变化, 将正弦载荷和变化电压同时施加到悬臂方板上。图 4-7 显示了机电载荷作用下悬臂板中心线的挠度变化。结果表明, 中心线挠度随电压的增加而减小, 与文献[134-135]中报告的趋势一致。表 4-11 至 4-12 显示了在不同输入电压 (U_0) 和梯度指数 (k_x, k_y) 下四种边界条件 (SSSS、CFFF、SCSC 和 SFSF) 下压电 2D-FGP 的无量纲中心线偏转。从数值结果中可以得出以下结论: (i) 随着梯度指数的增加, 挠度减小; (ii) 对于 SSSS、SCSC 和 SFSF 边界条件, 施加的电压越高, 挠度越大; (iii) 对于 CFFF 边界条件, 挠度随着电压和梯度指数的增加而减小。图 4-8 显示了各种边界条件对 $k_x = k_y = 2$ 的压电 2DFGP 挠度变化的影响。值得注意的是, 只有 CFFF 条件在方形板末端表现出正挠度, 而其他条件都导致负挠度。

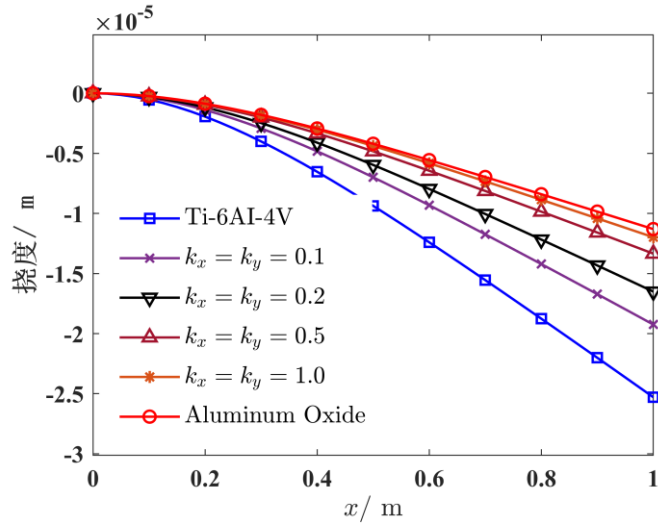


图 4-4 不同梯度指数(k_x, k_y)对正弦载荷下悬臂压电 2D-FGP 中心线偏转的影响

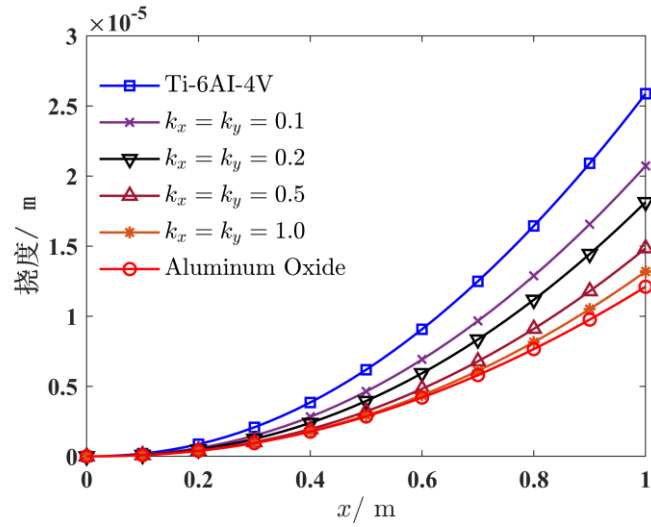


图 4-5 单位电压下具有不同梯度指数(k_x, k_y)的悬臂压电 2D-FGP 的中心线偏转

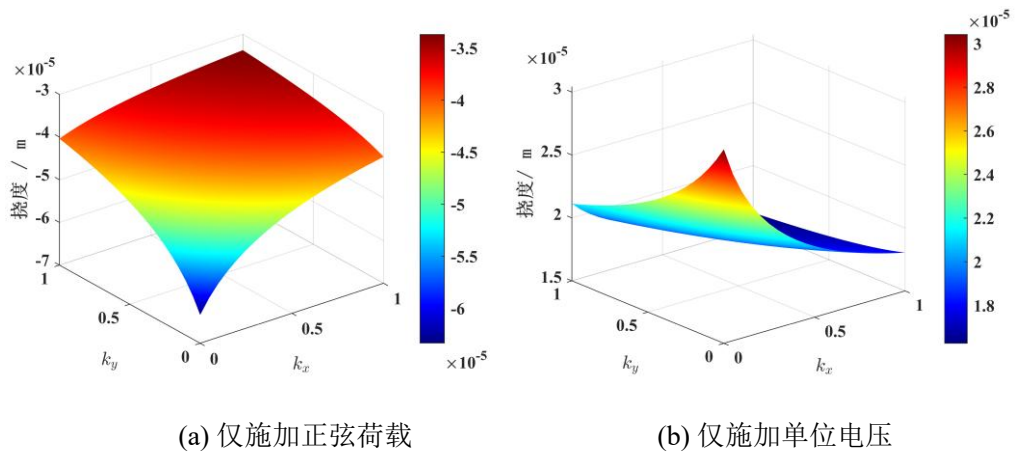


图 4-6 具有不同梯度指数的悬臂压电 2D-FGP 的偏转三维表面图

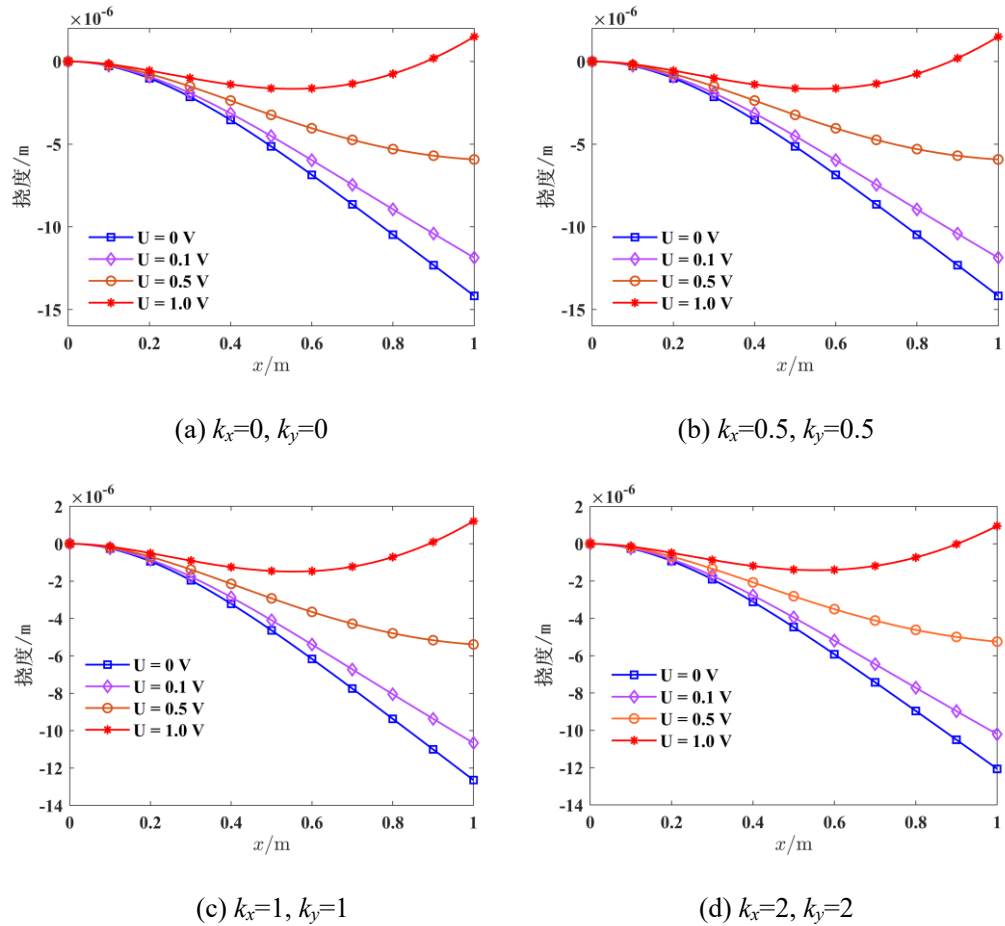


图 4-7 2D-FGP 在机电载荷作用下中心线挠度变化

表 4-11 SSSS 和 CFFF 压电 2D-FGP 在不同输入电压、梯度指数下的无量纲中心偏转

边界条件	U_0	k_x	k_y			
			0	0.5	1	2
SSSS	0	0	3.9125	2.7392	2.3536	2.0429
		0.5	2.7392	2.2595	2.0647	1.8913
		1	2.3536	2.0647	1.9393	1.8233
		2	2.0429	1.8913	1.8233	1.7592
	0.1	0	5.3246	3.7269	3.2106	2.7948
		0.5	3.7269	3.0719	2.8112	2.5800
		1	3.2106	2.8112	2.6420	2.4867
		2	2.7948	2.5800	2.4867	2.3997
	0.2	0	6.7366	4.7147	4.0677	3.5466
		0.5	4.7147	3.8842	3.5576	3.2687
		1	4.0677	3.5576	3.3447	3.1501
		2	3.5466	3.2687	3.1501	3.0402
	1	0	18.0330	12.6167	10.9242	9.5617
		0.5	12.6167	10.3830	9.5291	8.7784
		1	10.9242	9.5291	8.9663	8.4572
		2	9.5617	8.7784	8.4572	8.1641

表 4-11 (续表) SSSS 和 CFFF 压电 2D-FGP 在不同输入电压、梯度指数下的无量纲中心偏转

边界条件	U_0	k_x	k_y			
			0	0.5	1	2
CFFF	0	0	27.9226	19.2630	16.6209	14.5583
		0.5	14.7912	13.5710	13.0488	12.5681
		1	12.8539	13.0488	12.2471	12.0661
		2	11.9972	11.9008	11.8550	11.8102
	0.1	0	23.1222	16.5042	14.3867	12.7007
		0.5	12.9478	11.9240	11.4810	11.0709
		1	11.3466	10.9816	10.8137	10.6528
		2	12.7007	11.0709	10.6528	10.4373
	0.2	0	21.4897	15.3340	13.3538	11.7747
		0.5	12.0361	11.0764	10.6576	10.2687
		1	10.5527	10.2033	10.0404	9.8835
		2	9.8765	9.7810	9.7330	9.6849
	1	0	8.4301	5.9720	5.0904	4.3664
		0.5	4.7425	4.2955	4.0703	3.8509
		1	4.2014	3.9772	3.8539	3.7287
		2	4.3664	3.8509	3.7287	3.6658

表 4-12 SCSC 和 SFSF 压电 2D-FGP 在不同输入电压、梯度指数下的无量纲中心偏转

边界条件	U_0	k_x	k_y			
			0	0.5	1	2
SCSC	0	0	1.9870	1.3821	1.2073	1.0683
		0.5	1.3991	1.1449	1.0557	0.9784
		1	1.1907	1.0423	0.9858	0.9349
		2	1.0209	0.9497	0.9204	0.8931
	0.1	0	1.9884	1.4373	1.2722	1.1386
		0.5	1.4555	1.2115	1.1250	1.0495
		1	1.2590	1.1126	1.0568	1.0065
		2	1.1386	1.0495	1.0065	0.9648
	0.2	0	2.2519	1.6271	1.4415	1.2916
		0.5	1.6483	1.3713	1.2741	1.1895
		1	1.4278	1.2604	1.1974	1.1408
		2	1.2916	1.1895	1.1408	1.0938
	1	0	4.3603	3.1453	2.7963	2.5157
		0.5	3.1908	2.6491	2.4666	2.3094
		1	2.7784	2.4427	2.3220	2.2152
		2	2.5157	2.3094	2.2152	2.1255

表 4-12 (续表) SCSC 和 SFSF 压电 2D-FGP 在不同输入电压、梯度指数下的无量纲中心偏转

边界条件	U_0	k_x	k_y			
			0	0.5	1	2
SFSF	0	0	10.2555	7.1395	6.1647	5.3871
		0.5	7.3127	5.9586	5.4454	4.9990
		1	6.1795	5.3990	5.0782	4.7873
		2	5.3871	4.9990	4.7873	4.5700
	0.1	0	11.0238	7.9686	6.9666	6.1499
		0.5	8.1402	6.7529	6.2138	5.7388
		1	6.9878	6.1693	5.8273	5.5145
		2	5.9943	5.6141	5.4445	5.2839
	0.2	0	13.0105	9.4244	8.2385	7.2718
		0.5	9.6281	7.9969	7.3583	6.7952
		1	8.2810	7.3139	6.9073	6.5352
		2	7.1189	6.6644	6.4609	6.2679
	1	0	28.9039	21.0712	18.4131	16.2474
		0.5	21.5315	17.9490	16.5144	15.2463
		1	18.6269	16.4709	15.5474	14.7005
		2	16.2474	15.2463	14.7005	14.1402

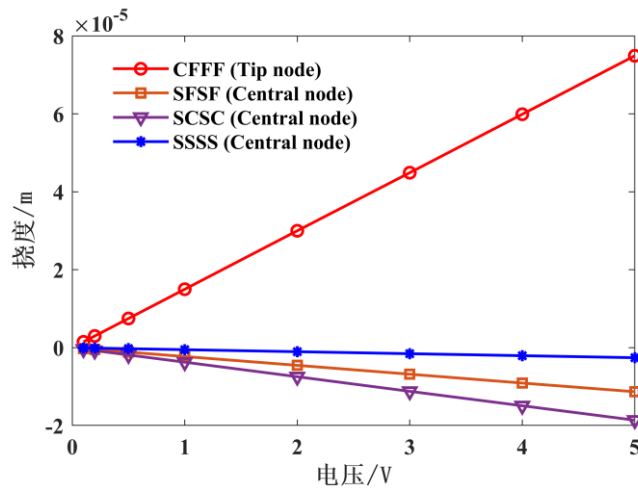


图 4-8 不同电压 ($k_x = k_y = 2$) 下边界条件对压电 2D-FGP 挠度的影响

4.4 本章小结

本章提出了一种新的高精度压电双向功能梯度材料板静态分析数值分析方法。该方法基于准三维剪切变形理论，建立了压电 2D-FGP 的等几何解析模型。非均匀有理 B 样条 (NURBS) 曲面表示沿 x 和 y 平面变化的陶瓷体积分数分布。准三维板理论考虑了剪切变形和厚度拉伸效应，不需要剪切修正因子，且只有四个未知量。数值结果验证了所提方法的有效性。

第 5 章 变厚度压电双向功能梯度板的形状控制优化

为解决上述章节单目标优化设计的局限性与实际工程多目标需求的矛盾，本章基于第二章改进多目标优化算法及第四章准三维理论的等几何优化框架，建立变厚度压电双向功能梯度板的多目标形状控制模型。该模型整合等几何分析方法与多目标飞蛾火焰算法，实现材料梯度分布、压电驱动配置与结构厚度的协同优化。

5.1 优化设计目标

在形状控制优化设计中，通常将期望形状与计算形状之间的误差作为目标函数。在本章中，误差估计如下：

$$E_r = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^m (w_i - w_{di})^2}}{m_D E_\alpha} \quad (5-1)$$

式中， w_i 和 w_{di} 分别是在第 i 个取样点上计算出的和所需的挠度。 m_D 是采样点的数量； E_α 是一个修正参数，其值与特定问题有关。

固有频率是描述结构动态行为的重要参数。将固有频率作为另一个目标函数，归一化频率为

$$\varpi_i = \frac{\omega_i}{\omega_\alpha} \quad (5-2)$$

式中， i 为模态数， ω_α 为修正参数，其值与具体问题相关。

陶瓷体积分数的分布形式如式 3-28 所示。板的厚度变化可使用 B 样条表示，其具体形式如下：

$$h(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}(\xi, \eta) h_{i,j} \quad (5-3)$$

式中， $h_{i,j}$ 是 (i, j) 索引控制点处的板厚， $R_{i,j}(\xi, \eta)$ 是 B 样条基函数。

压电 2D-FGPs 形状控制设计的优化问题可以概括如下：

最小化目标函数：

$$F(\mathbf{V}_c, \mathbf{U}_v) = \left(f_1 = E_r, f_2 = \frac{1}{\varpi_1} \right) \quad (5-4)$$

约束条件：

$$\sum_{i=1}^{N_u} U_{v,i}^2 - \mathbb{E}_T \leq 0 \quad (5-5)$$

$$0 \leq V_c^j \leq 1, \quad j \in \{1, 2, \dots, N_p\} \quad (5-6)$$

$$U_{low} \leq U_{v,i} \leq U_{up}, \quad i \in \{1, 2, \dots, N_u\} \quad (5-7)$$

$$\omega_k - \omega_1 \geq \omega_\Delta, \quad k = 2, 3 \quad (5-8)$$

$$\zeta_c - \zeta_{\max} \leq 0 \quad (5-9)$$

式中， $V_c = \{V_c^1, V_c^2, \dots, V_c^{N_p}\}$ 和 $U_v = \{U_{v,1}, U_{v,2}, \dots, U_{v,N_u}\}$ 为设计变量； N_u 为压电层独立块的数量； $\mathbb{E}_T$ 为输入电压能量的最大值； U_{up} 和 U_{low} 分别为压电层电压的上限和下限。 w_j 为第 j 阶固有频率， w_Δ 为最小频率差， $\zeta_{\max}$ 表示陶瓷体积分数的最大允许值， ζ_c 表示陶瓷体积分数的综合平均值。

5.2 数值算例

本节通过三个算例验证本文提出的基于 quasi-3D 理论的压电 2D-FGP 的 IGA 优化方法，包括方形 2D-FGP、斜形 2D-FGP 和复杂形状 2D-FGP。IMOMFO、MOPSO、MOMFO、MOGWO 的参数设置为 $k_{\max} = 200$ ， $N = 50$ 。NURBS 基函数阶数设置为 $p = q = 3$ 。相关材料属性如表 3-1 所示。

5.2.1 变厚度方形压电 2D-FGP

第一个算例为方形压电 2D-FGP 的静态形状控制，边界条件为 SSSS。板的宽度为 0.4 m，上下压电层厚度均为 1.5×10^{-3} m，功能梯度层厚度 0.8 h_0 至 1.2 h_0 ， $h_0 = 5 \times 10^{-3}$ m。结构设计模型与第三章的方形压电 2D-FGP 一致。参数取值为 $w_\alpha = 240$ ， $E_\alpha = 1.0 \times 10^{-6}$ ， $\zeta_{\max} = 0.7$ 。前两阶固有频率差为 300 Hz，输入电压总能量极限值设定为 $E_T = 5 \times 10^5$ J。目标静态形状由函数 $X = 10^{-4} \sin(\pi x/0.4) \sin(\pi y/0.4)$ 描述。

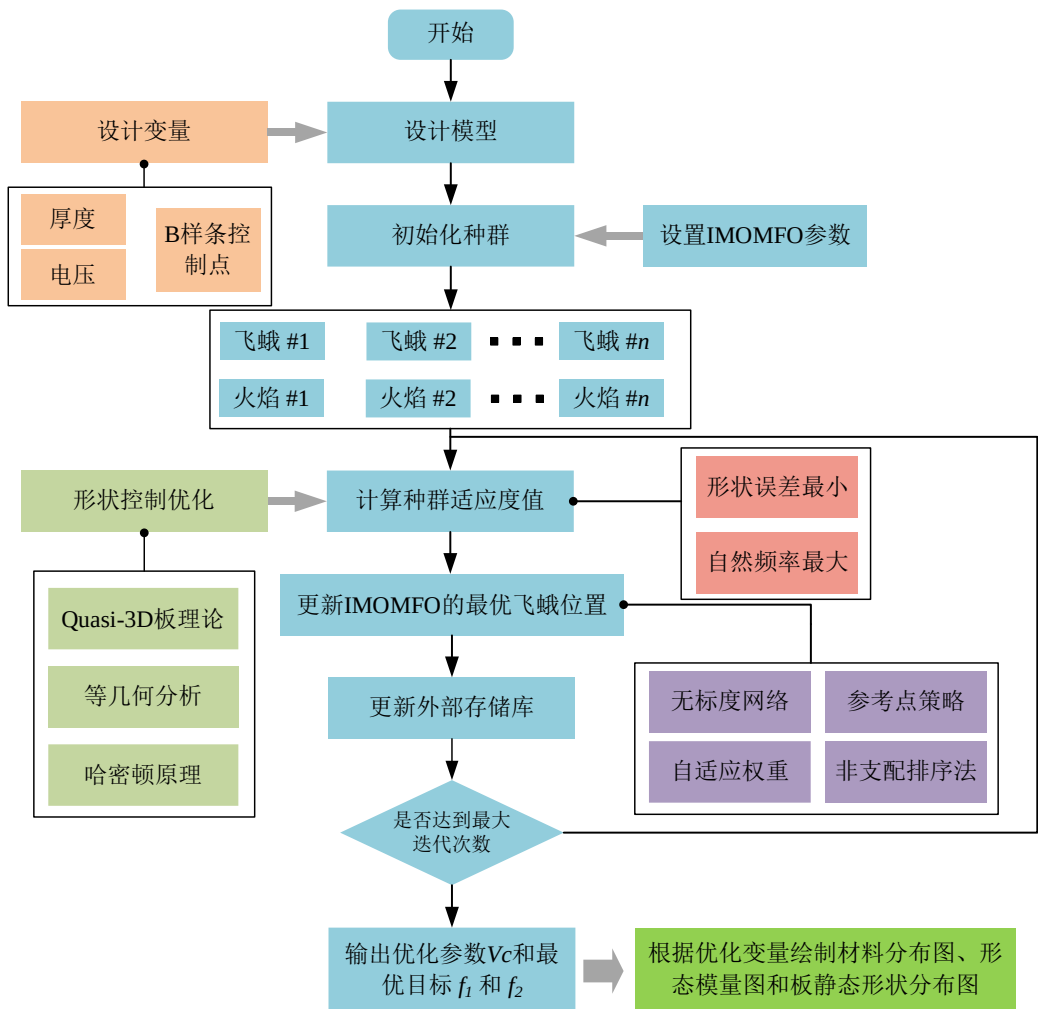


图 5-1 压电 2D-FGP 形状控制优化设计的 IMOMFO 流程图

表 5-1 列出了代表精英解的最优结果。图 5-2 显示了不同方法得到的帕累托前沿，说明了所提出方法的优越性。此外，图 5-3 表示 6 种代表精英解陶瓷材料形状分布，可以看出，方形 2D-FGP 四个角上明显存在陶瓷特性，而中心部分主要由金属组成。图 5-4 给出了 SSSS 偏斜 2D-FGP 在代表性精英上的第一形态模量。

表 5-1 代表精英解的 SSSS 方形压电 2D-FGP 统计结果

目标函数	代表精英解					
	#1	#2	#3	#4	#5	#6
f_1	1.10758	1.27827	1.38143	1.48553	1.72129	2.17445
f_2	1.22293	1.06086	1.01594	0.98163	0.91113	0.84571
约束条件						
ω_Δ	307.32861	302.07986	337.40299	302.10798	305.64185	309.03094
ζ_{true}	0.64925	0.61579	0.63892	0.63173	0.65072	0.61528
U_V^2	499059.57	499426.34	448883.00	494245.50	490672.81	489817.32

表 5-1 (续表) 代表精英解的 SSSS 方形压电 2D-FGP 统计结果

目标 函数	代表精英解					
	#1	#2	#3	#4	#5	#6
压电块 序号						
1, 4, 13, 16	74.15924	71.35265	34.68391	69.51697	70.79804	75.72810
2, 3, 14, 15	97.20916	113.77791	107.03881	109.36021	111.95209	106.25812
5, 9, 8, 12	140.77876	129.74988	97.77765	129.61449	122.97506	124.23545
6, 7, 10, 11	299.99503	299.97490	300.00000	299.94866	299.99951	299.99058

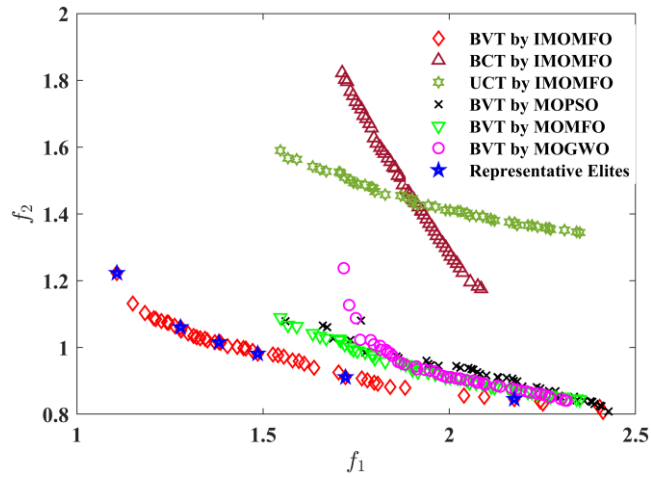


图 5-2 SSSS 压电 2D-FGP 的帕累托前沿

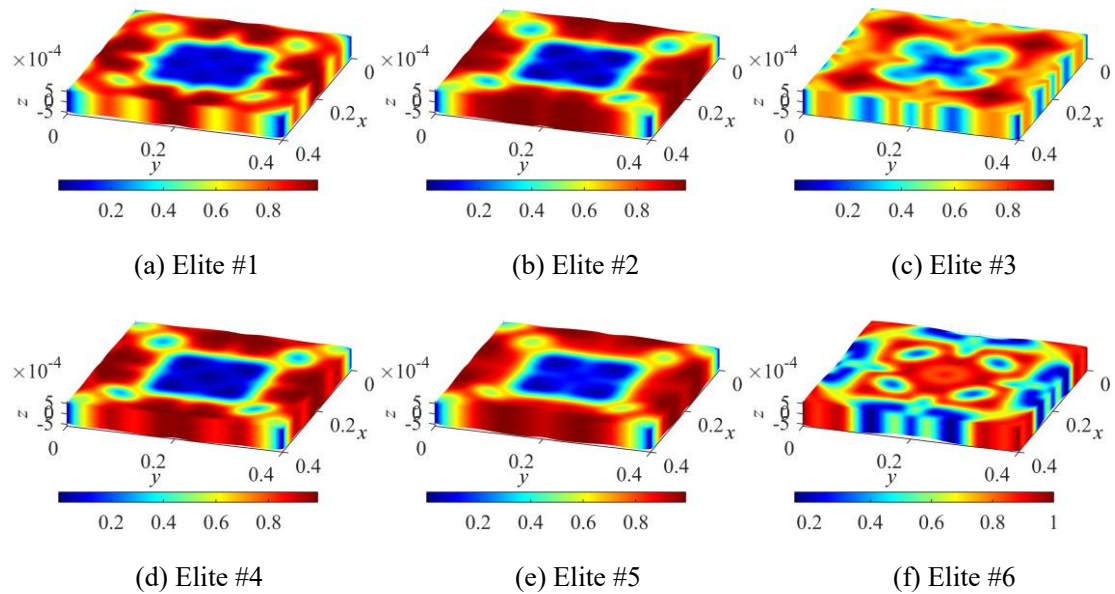


图 5-3 方形压电 2D-FGP 在代表性精英解决方案上的材料分布

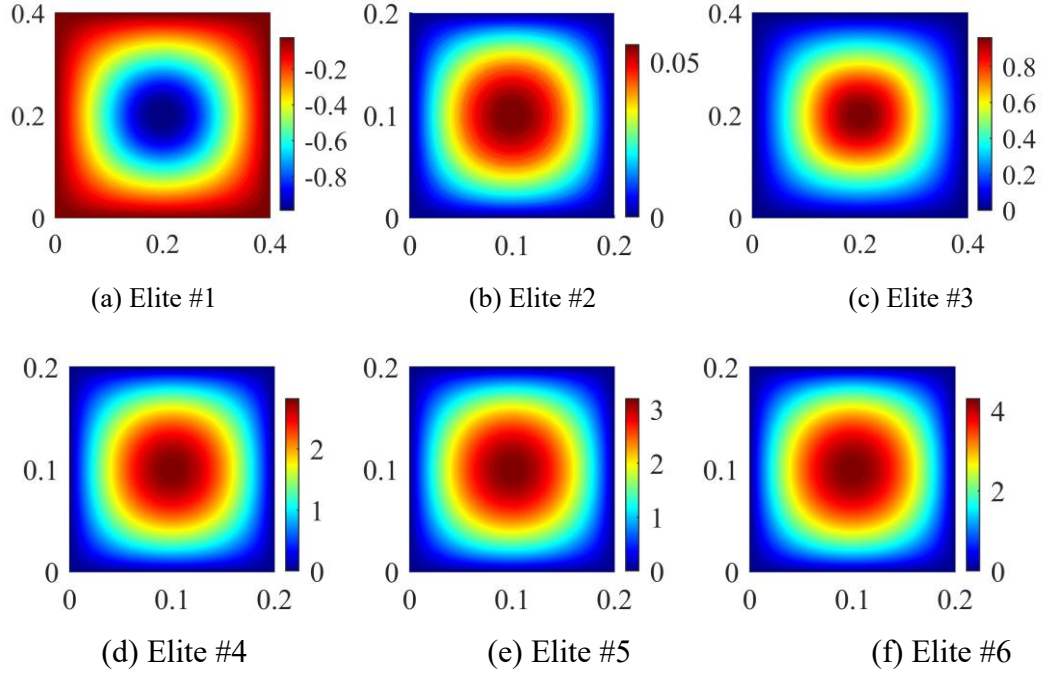


图 5-4 方形压电 2D-FGP 在代表性精英解决方案上第一形态模量

5.2.2 变厚度斜形压电 2D-FGP

第二个算例为斜形压电 2D-FGP 的形状控制优化，边界条件为 CFFF。板的尺寸形状与第三章斜形压电 2D-FGP 参数一致。功能梯度层厚度 $0.8 h_0$ 至 $1.2 h_0$ ， $h_0=5 \times 10^{-3} \text{ m}$ 。压电层被划分为 14 个边长为 0.02 m 的独立电压区域，对于 $U_{V,i}$ 的电压变化范围为 -300 V 至 300 V ，未划分区域不施加电压。 $w_\alpha=400$ ， $E_\alpha=8.0 \times 10^{-9}$ ， $\zeta_{\max}=0.70$ 。前两阶固有频率之差为 1000 Hz 。输入电压总能量的极限值为 $E_T=5 \times 10^5 \text{ J}$ ，其余参数与上例一致。FG 层的变量设计与上例相同，总变量数为 126 个。期望的静态形状描述为 $X=10^{-6}(1.562x^2-0.849xy)$ 。压电层中每个压电块的电压计算如下：

$$U_{V,i} = \tilde{U}_i \frac{1}{1 + e^{-\vartheta U_{c,i}}} \quad (5-10)$$

式中， $U_{c,i}$ 和 $\tilde{U}_i$ 为设计变量，值为 0 表示压电独立芯片不工作。 $\vartheta = 1.0 \times 10^8$ 为放大参数。

表 5-2 列出了代表精英解的最优结果。图 5-5 显示了不同方法得到的帕累托前沿。图 5-6 表示 6 种代表精英解陶瓷材料形状分布，斜形 2D-FGP 在边缘处具有明显的陶瓷特征。图 5-7 给出了 CFFF 斜形压电 2D-FGP 在代表性精英上的第一形态模量。

表 5-2 代表精英解的 CFFF 斜形压电 2D-FGP 统计结果

目标函数	代表精英解					
	#1	#2	#3	#4	#5	#6
f_1	0.10087	0.10096	0.10105	0.10114	0.10125	1.08934
f_2	1.01171	1.01069	1.01027	1.00982	1.00934	0.36797
约束条件						
ω_Δ	552.64156	512.94920	373.71574	480.65560	460.47700	494.62963
ζ_{true}	0.65799	0.66634	0.66676	0.65603	0.69320	0.65893
U_V^2	479342.01	481319.82	446452.42	455480.86	423798.57	484993.99
压电块序号						
1	300	262.07178	89.48885	66.35836	107.95889	300
2	0	124.83269	0	0	0	180.10716
3	289.19663	291.90532	299.14178	297.98037	297.79896	296.72852
4	298.98443	289.01908	269.84681	263.50876	275.67055	298.15231
5	152.78442	189.40717	126.92435	158.27761	125.23015	106.52262
6	0	0	69.02428	300.00000	0	0
7	265.17997	247.35407	292.49661	296.86783	299.94557	299.29609
8	0	0	298.94069	299.31039	299.34139	253.17294
9	0	0	0	0	0	0
10	299.93431	293.89652	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0
12	26.93743	110.19176	197.02519	0	218.02931	-60.36180
13	0	0	0	0	0	0
14	178.79015	180.93576	203.78465	89.01731	68.35933	130.18249

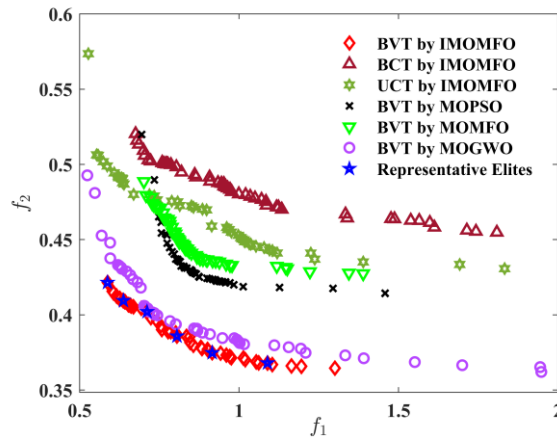


图 5-5 CFFF 斜形压电 2D-FGP 的帕累托前沿

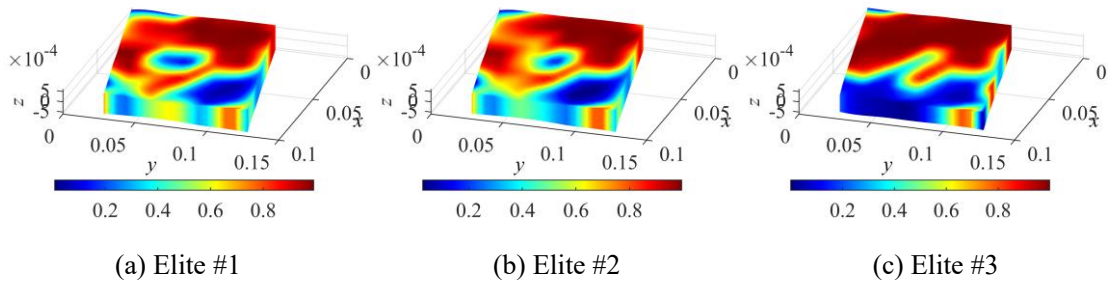


图 5-6 斜形压电 2D-FGP 在代表性精英解决方案上的材料分布

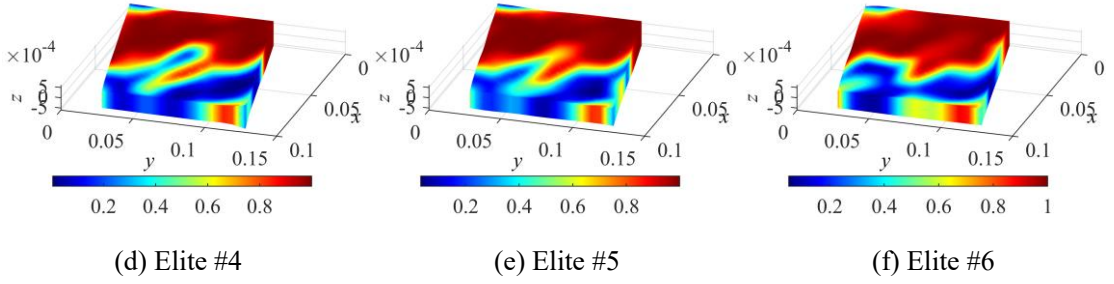


图 5-6 (续图) 斜形压电 2D-FGP 在代表性精英解决方案上的材料分布

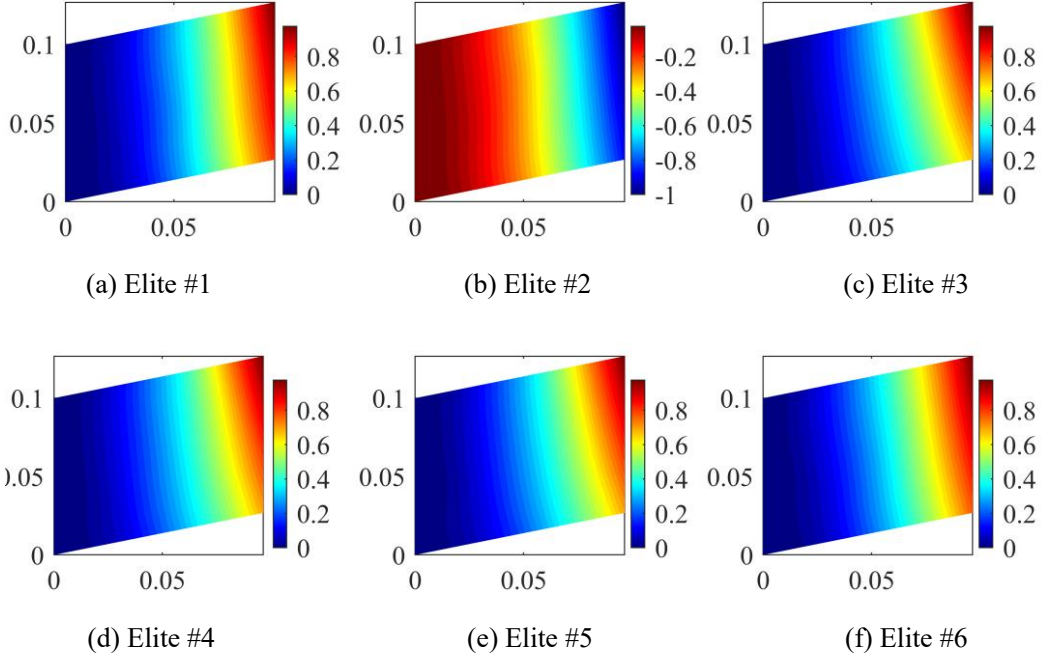


图 5-7 斜形压电 2D-FGP 在代表性精英解决方案上第一形态模量

5.2.3 变厚度复杂形状压电 2D-FGP

最后一个算例验证了所开发方法在复杂形状压电 2D-FGP 形状优化设计中的适用性。如图 5-8 所示, 该压电 2D-FGP 具有 x 轴对称几何构型, 几何参数为: $r_1=0.05$ m, $r_2=0.1$ m, $r_3=0.04$ m, $r_4=(0.14/\sqrt{3}-0.04)$ m, $r_5=(0.07/\sqrt{3}-0.02)$ m, $r_6=0.04$ m。定位参数设定为: $O_1=(0.07\sqrt{3}, 0.07)$ m, $O_2=(0.07/\sqrt{3}+0.07\sqrt{3}, 0)$ m, $O_3=(0.07\sqrt{3}, -0.07)$ m, $\theta=30^\circ$, $\beta=90^\circ$ 。功能梯度层厚度 $0.8 h_0$ 至 $1.2 h_0$, $h_0=5\times 10^{-3}$ m。压电层被划分为 23 个独立电压区域 (标记为 U_{Vi}), 各区域半径为 0.007 m, 电压范围-300 V 至 300 V, 未划分区域无电压输入。电压区域沿 x 轴对称分布, 相关参数为: $\alpha=18^\circ$, $\gamma_1=15^\circ$, $\gamma_2=20^\circ$, $r_7=0.049$ m, $r_8=0.07$ m, $r_9=0.09$ m。在长 $L_1=0.014$ m、宽 $L_2=0.04$ m 的矩形框内, 红色电压区域可进行位置调节。板的直边

采用完全固支约束，表面承受的非均匀压力分布如下所示：

$$q_0 = 500 \sin\left(\frac{x}{0.07\sqrt{3} + 0.07/\sqrt{3}}\right) \cos\left(\frac{y}{0.1}\right) \quad (5-11)$$

式中该压力的单位为 N/m^2 ，期望静态形状描述为

$$\chi = 0.0015 \cos\left(\frac{(x - 0.07\sqrt{3})\pi/2}{0.07\sqrt{3}}\right) \cos\left(\frac{y\pi}{0.2}\right) \quad (5-12)$$

该复杂几何构型的 NURBS 网格采用 B 样条重构法建立，具体参数化流程详见文献[101]。图 5-9 展示了复杂形状压电 2D-FGP 的立方单元计算网格。基于构型与工况的对称性，仅选取压电层上半部独立电压区域（包括 $U_{V,23}$ 沿 x 轴位置变化）作为设计变量，结合功能梯度层变量，共形成 54 个设计变量。约束条件设定为：输入总能量上限 $E_T = 2 \times 10^6 \text{ J}$ ，陶瓷相体积分数阈值 $\zeta_{\max} = 0.7$ ，调整系数 $\omega_\alpha = 500$ 、 $E_\alpha = 3 \times 10^{-2}$ ，前两阶固有频率差 $\Delta\omega = 800 \text{ Hz}$ 。其余参数设置延续前例规范。

表 5-3 列出了代表精英解的最优结果。图 5-10 显示了不同方法得到的帕累托前沿。图 5-11 表示 6 种代表精英解陶瓷材料形状分布，复杂形状压电 2D-FGP 在边缘处具有明显的陶瓷特征。图 5-12 给出了复杂形状压电 2D-FGP 在代表性精英上的第一形态模量。

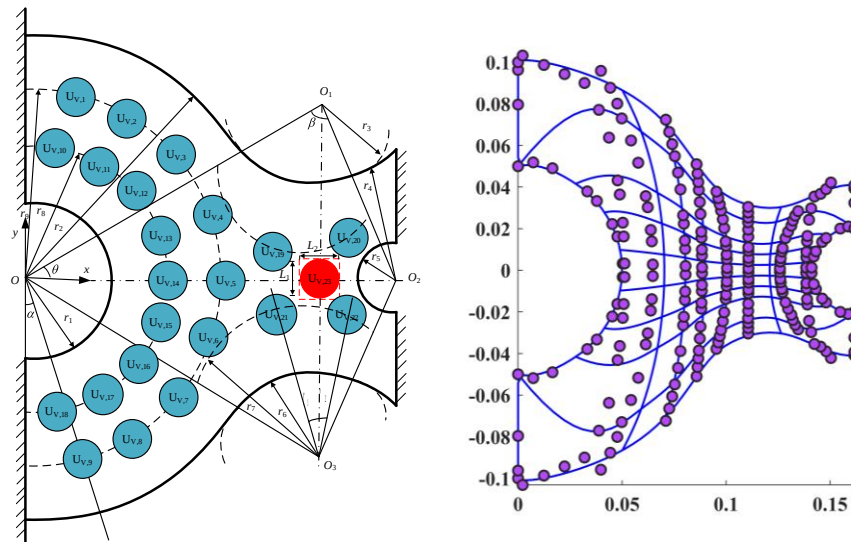


图 5-8 复杂形状压电 2D-FGP 的结构模型 图 5-9 复杂形状压电 2D-FGP 的计算网格

表 5-3 代表精英解的 CCCC 复杂形状压电 2D-FGP 统计结果

目标函数	代表精英解					
	#1	#2	#3	#4	#5	#6
f_1	0.10087	0.10096	0.10105	0.10114	0.10125	1.08934
f_2	1.01171	1.01069	1.01027	1.00982	1.00934	0.36797

表 5-3 (续表) 代表精英解的 CCCC 复杂形状压电 2D-FGP 统计结果

	代表精英解					
	#1	#2	#3	#4	#5	#6
约束条件						
ω_{Δ}	302.84818	303.13553	303.02440	303.09719	302.87082	302.26393
ζ_{true}	0.12677	0.32680	0.32580	0.48753	0.13547	0.15668
U_V^2	1547965.59	1559291.49	1549311.58	1549185.89	1561767.19	1629693.48
压电块号						
1, 9	258.52826	258.74259	258.82975	254.81989	258.57028	267.97283
2, 8	242.89344	246.71360	245.89556	246.31031	244.93662	248.06695
3, 7	289.08215	289.12452	290.13625	291.37722	290.66347	299.55118
4, 6	264.31477	245.56715	242.54870	243.07001	256.38732	240.67868
5	240.20138	241.21025	242.43853	242.81401	249.76291	240.52347
10, 18	272.95841	267.33425	260.06967	265.77513	281.66144	272.13227
11, 17	251.55047	242.15862	243.76485	242.06459	247.29785	283.96875
12, 16	298.13726	298.69544	298.41936	298.03792	298.92211	300.43246
13, 15	246.29768	249.45123	250.38966	249.29112	247.75818	247.44845
14	264.23015	259.50427	262.00145	263.56080	266.25151	247.61851
19, 21	243.84363	277.33158	273.40068	267.30724	247.79320	286.81364
20, 22	290.11853	294.45831	294.82918	267.30724	290.76838	294.15080
23	241.23463	240.41329	242.85639	244.14681	240.23524	240.13428

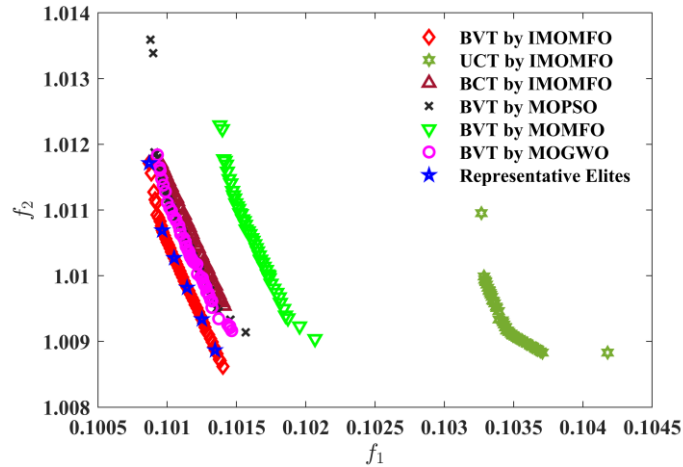


图 5-10 CCCC 复杂形状压电 2D-FGP 的帕累托前沿

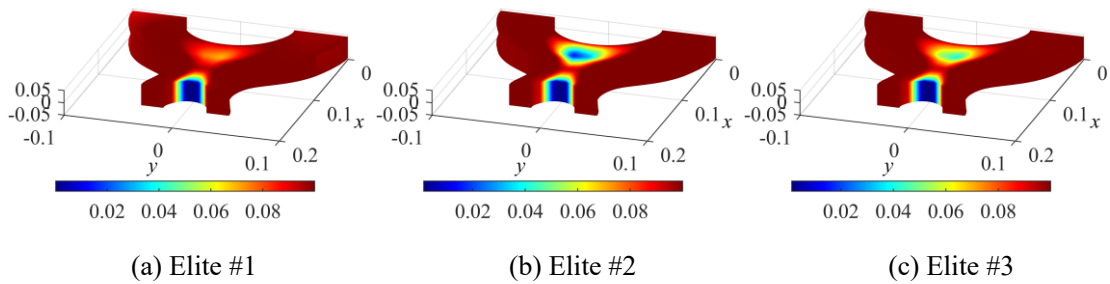


图 5-11 复杂形状压电 2D-FGP 在代表性精英解决方案上的材料分布

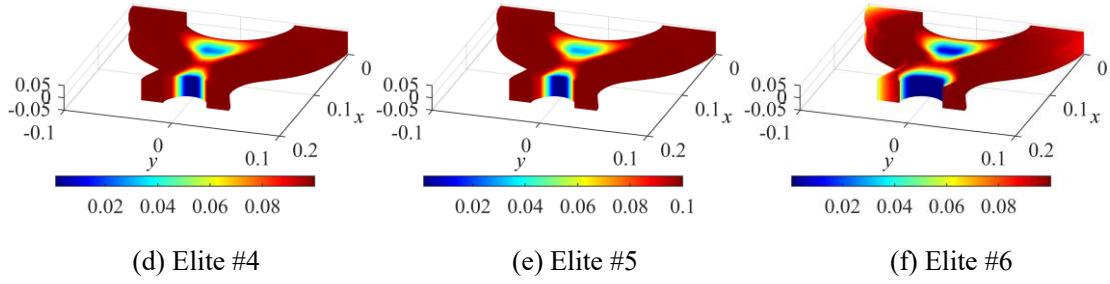


图 5-11 (续图) 复杂形状压电 2D-FGP 在代表性精英解决方案上的材料分布

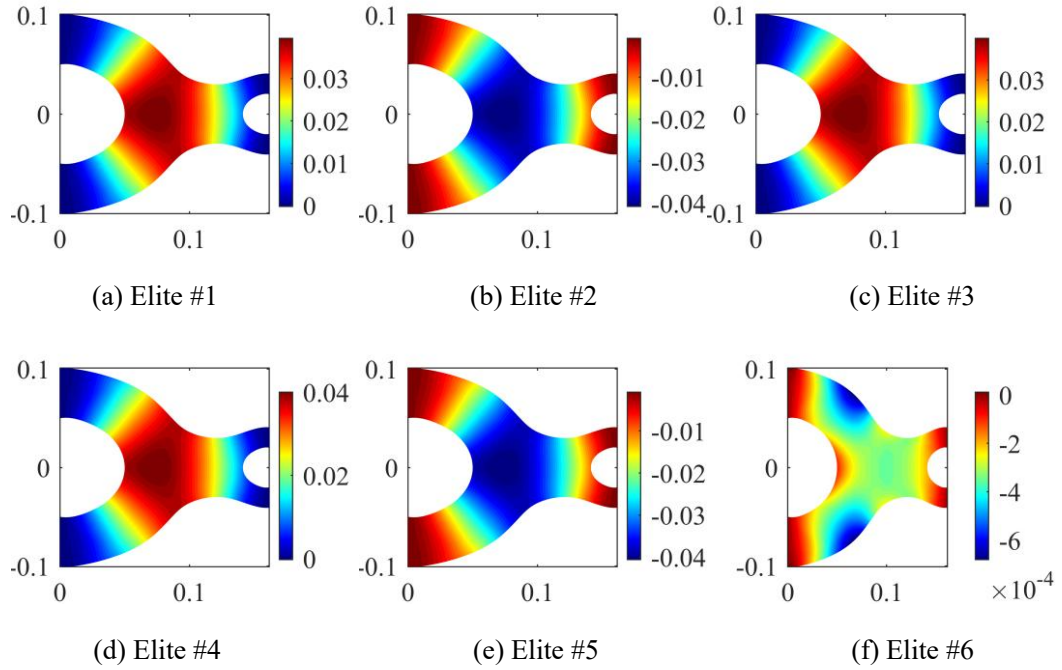


图 5-12 复杂形状压电 2D-FGP 在代表性精英解决方案上第一形态模量

5.3 本章小结

本章通过多目标优化研究了变厚度压电双向功能梯度板的形状控制优化设计。提出了一种集成等几何分析和改进多目标飞蛾火焰算法的方法。二维 B 样条基函数用于精确表示体积分数分布，外加电压、平面控制点的体积分数和厚度方向的控制点被视为设计变量。采用准三维剪切变形理论以及基于非均匀有理基样条曲线 (NURBS) 的 IGA 方案处理压电 2D-FGP 的机械行为。通过分析方形、斜形和复杂形状压电 2D-FGP 的各种数值算例，对其固有频率和形状进行了优化，数值结果显示所提出方法的有效性和优越性。

第 6 章 结论与展望

6.1 结论

等几何分析 (IGA) 通过使用 CAD 样条函数作为 FEA 中的形函数来统一几何描述和有限元近似。由于 IGA 固有的高阶连续性, 可以轻松满足板理论的 C^1 连续性要求, 而无需额外的变量。等几何分析具有几何精确、精度高、高阶连续、鲁棒性好、无需传统的网格划分过程等优点, 非常适合分析板壳结构。优化方法方面, 飞蛾火焰算法作为一种无梯度算法, 无需复杂灵敏度推导, 且算法架构清晰、易于集成。本文采用等几何分析与飞蛾火焰算法相结合的求解范式, 针对压电双向功能梯度板结构开展优化设计研究, 主要研究内容如下:

(1) 基于无标度网络机制和自适应权重策略开发了改进的飞蛾火焰算法 (IMFO), 有效增强了算法在大规模全局优化问题中的探索与开发能力。进一步基于非支配排序法和参考点策略, 将算法扩展为多目标优化版本, 并通过标准测试函数和工程实例验证了算法性能的有效性与实用性。

(2) 基于三阶剪切变形理论和单目标飞蛾火焰算法, 建立压电双向功能梯度板的等几何材料优化模型。二维 B 样条基函数被用来表示陶瓷体积分数的分布, 沿平面控制点的体积分数和施加电压被定为设计变量。相关算例分析表明了所提出优化模型的可行性及优越性。

(3) 基于准三维剪切变形理论, 建立四变量压电双向功能梯度板的等几何分析模型, 分析压电双向功能梯度板的自由振动和弯曲问题。准三维板理论考虑了剪切变形和厚度拉伸效应, 不需要剪切修正因子, 且只有四个未知量。非均匀有理 B 样条曲线 (NURBS) 的高阶连续性满足了准三维理论的 C^1 连续性要求。详细讨论材料特征长度参数、板尺寸、材料分布、电压以及不同荷载等对压电双向功能梯度板力学性能的影响。

(4) 基于准三维剪切变形理论和改进的多目标飞蛾火焰算法, 建立压电双向功能梯度板的等几何形状控制优化模型。在优化设计问题中, 在最小静态形状误差和最大一阶固有频率的条件下, 同时优化了压电双向功能梯度板的材料布局、压电层的控制电压和厚度。通过分析方形、斜形和复杂形状压电双向功能梯度板的各种数值示例, 验证了所提出方法的有效性和适用性。

6.2 主要创新点

本文为压电双向功能梯度板的优化设计提供了一种新的求解模式，其特色在于结合 CAD 与 CAE 统一的高精度数值方法和高效的智能优化算法，其主要创新点为：

（1）本文提出了一种基于无标度拓扑的飞蛾火焰算法，旨在增强算法的开发能力。该机制使算法能够更高效地利用解空间内有潜力的区域。此外，算法还集成了小概率突变机制和自适应权重策略，两者协同工作，防止局部停滞，促进解空间的持续探索。

（2）本文提出了一种有效的数值方法用于压电双向功能梯度板的形状控制。基于三阶剪切变形理论的等几何分析方法被用于压电双向功能梯度板的静态分析。利用二维 B 样条基函数被用来表示陶瓷体积分数的分布，沿平面控制点的体积分数和施加电压被设定为设计变量。此外，还利用改进的飞蛾火焰算法来解决板材料的优化问题。

（3）本文提出了一种基于准三维剪切变形理论的等几何分析方法来分析压电双向功能梯度板的静力学问题。利用压电材料固有的基本方程和哈密顿变分原理，推导出压电双向功能梯度板的运动方程。与现有的准三维理论相比，所采用的板理论减少了未知变量和控制方程的数量。同时在此基础上，还采用改进的多目标飞蛾火焰算法针对变厚度压电双向功能梯度板进行了形状控制设计。

6.3 不足与展望

本文基于等几何分析和飞蛾火焰算法，研究了压电双向功能梯度板的一些力学行为，并取得了一定的成果。然而，由于时间限制和个人能力所限，仍有诸多方面需要改进和深入探索：

（1）本文采用了基于 NURBS 的等几何分析方法。然而，NURBS 样条在网格局部细化方面存在局限性，操作较为繁琐。未来可考虑采用 T 样条或 LR B 样条等技术，这些方法在网格局部细化上更为便捷，能够进一步提升分析效率和精度。

（2）本文研究的结构几何相对简单，而针对复杂结构的等几何优化设计研究更具实际应用价值。对于复杂结构，如何基于 CAD 模型实现计算域的有效参数

化仍是一个关键挑战，值得进一步探讨。

（3）本文仅聚焦于压电功能梯度板结构。然而，在实际工程中，压电结构应用广泛且常见。未来可扩展研究范围，可深入分析压电梁和压电薄膜等结构的力学行为，以拓宽应用场景。

（4）未来的研究可以考虑结合多模态优化算法，以进一步提升飞蛾火焰算法的性能。多模态优化算法通过在解空间中维持解的多样性，有助于增强算法的全局搜索能力，避免陷入局部最优解的困境。

参考文献

- [1] Xiangbing Wu, Zhenyu Wu, Lulu Liang, Jieliang Zhao, Wenzhong Wang and Shaoze Yan. Bio-inspired design and performance evaluation of a novel morphing nose cone for aerospace vehicles[J]. *Aerospace Science and Technology*, 2023, 137: 108274.
- [2] Cortez Ricardo, Chairez-Oria Isaac, Feliu Batll Vicente, N. Lozada-Castillo, V. Feliu-Batlle. Multi-link endoscopic manipulator robot actuated by shape memory alloys spring actuators controlled by a sliding mode[J]. *ISA Transactions*, 2020.
- [3] Shuai Yang, Yang He, Jinsong Leng. Harnessing ultra-high programmability and controllability for smart composite architecture using quadruple shape memory poly (aryl ether ketone) s[J]. *Composites Science and Technology*, 2022, 220: 109246.
- [4] Esmaeilnejad-Ahranjani Parvaneh, Lotfi, Marzieh. Surfactant-assisted combustion synthesis of agglomerated-free, size-and shape-controlled magnetic iron oxide nanoparticles for biomedical applications[J]. *Ceramics International*, 2023, 49(15): 25113-25120.
- [5] 张雄, 刘岩, 马上. 无网格法的理论及应用[J]. *力学进展*, 2009, 39(01):1-36.
- [6] Hughes, Thomas J.R., Cottrell, J. Austin, Bazilevs, Yuri. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, 194(39-41): 4135-4195.
- [7] 罗飞, 郭玉杰, 孙芳斌, 张兴. 基于 Bézier 三角形的曲面网格划分及等几何板壳分析[J]. *计算力学学报*, 1-7.
- [8] Mirjalili, Seyedali Jamal. Moth-flame optimization algorithm: A novel nature-inspired heuristic paradigm[J]. *Knowledge-based Systems*, 2015, 89: 228-249.
- [9] Koizumi, Mitsue J. FGM activities in Japan[J]. *Composites Part B: Engineering*, 1997, 28(1-2): 1-4.
- [10] Shyang Ho Chi, Yen Ling Chung. Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load—Part I: Analysis[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, 43(13): 3657-3674.
- [11] Hossein Amir Rajabi, Jaffe, Michael J, Arinzeh Treena Livingston. Piezoelectric

- materials for tissue regeneration: A review[J]. *Acta Biomaterialia*, 2015, 24: 12-23.
- [12] Jae-Hung Han, In Lee. Optimal placement of piezoelectric sensors and actuators for vibration control of a composite plate using genetic algorithms[J]. *Smart Materials and Structures*, 1999, 8(2):257-267.
- [13] Phuc Phung-Van, Nguyen-Thoi Trung, T Le-Dinh, H. Nguyen-Xuan. Static and free vibration analyses and dynamic control of composite plates integrated with piezoelectric sensors and actuators by the cell-based smoothed discrete shear gap method (CS-FEM-DSG3)[J]. *Smart Materials and Structures*, 2013, 22(9):095026.
- [14] Phuc Phung-Van, Laura De Lorenzis, Chien H.Thai, Magd Abdel Wahab, H. Nguyen-Xuan. Analysis of laminated composite plates integrated with piezoelectric sensors and actuators using higher-order shear deformation theory and isogeometric finite elements[J]. *Computational Materials Science*, 2015, 96:495-505.
- [15] 薛宇. 功能梯度压电材料板的静动态响应及主动控制[D]. 太原理工大学, 2019.
- [16] 马宵. 功能梯度压电材料的 Hermite 无网格法及其应用[D]. 中国石油大学(华东), 2022.
- [17] Thomas JR Hughes, Alessandro Reali, Giancarlo Sangalli. Efficient quadrature for NURBS-based isogeometric analysis[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010, 199:301-313.
- [18] Dongdong Wang, Junchang Xuan. An improved NURBS-based isogeometric analysis with enhanced treatment of essential boundary conditions[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010, 199(37-40): 2425-2436.
- [19] Karatarakis Alexander, Karakitsios, Panagiotis L, Papadrakakis Manolis. GPU accelerated computation of the isogeometric analysis stiffness matrix[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2014, 269: 334-355.
- [20] Dewen Yu, Shun Wang, Yang Yaowen, Jun Hong. Shape sensing for thin-shell spaceborne antennas with adaptive isogeometric analysis and inverse finite element method[J]. *Thin-Walled Structures*, 2023, 192: 111154.
- [21] 徐曼曼, 王书亭, 吴紫俊, 罗年猛. 基于等几何分析基函数重用的积分方法[J]. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2016, 28(9):1436-1442.
- [22] Ebrahimi F. Amir, Rastgo Abbas. An analytical study on the free vibration of smart

- p>circular thin FGM plate based on classical plate theory[J].
- Thin-Walled Structures*
- 46.12 (2008): 1402-1408.
- [23] Eric Reissner. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1945, A69-A77.
- [24] R. D. Mindlin. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1951, 31-38.
- [25] Ferreira António J.M, Castro Luís Manuel S.S and Bertoluzza Silvia. A high order collocation method for the static and vibration analysis of composite plates using a first-order theory[J]. *Composite structures*, 2009, 89(3): 424-432.
- [26] Shi-Rong Li, Feng Zhang and Batra, R. C. Thermoelastic damping in high frequency resonators using higher-order shear deformation theories[J]. *Thin-Walled Structures*, 2023, 188: 110778.
- [27] J. N. Reddy. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *Journal of Applied Mechanics*, Trans ASME, 1984, 51:745–52.
- [28] Vu Tan Van, Khosravifard Amir, Hematiyan M. R and Bui Tinh Quoc. A new refined simple TSDT-based effective meshfree method for analysis of through-thickness FG plates[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2018, 57: 514-534.
- [29] K. P. Soldatos. A transverse shear deformation theory for homogenous monoclinic plates[J]. *Acta Mechanica*, 1992; 94:195-220.
- [30] Touratier Maurice. An efficient standard plate theory[J]. *International Journal of Engineering Science*, 1991, 29:901-16.
- [31] Mantari José Luis, E. M. Bonilla, Guedes Soares C. G. A new tangential-exponential higher order shear deformation theory for advanced composite plates[J]. *Composites Part B: Engineering*, 2014, 60: 319-328.
- [32] Khorshidi, Korosh, and Abolfazl Fallah. Buckling analysis of functionally graded rectangular nano-plate based on nonlocal exponential shear deformation theory[J]. *International Journal of Mechanical Sciences* 2016, 113: 94-104.
- [33] Huu-Tai Thai and Dong-Ho Choi. A refined plate theory for functionally graded plates resting on elastic foundation[J]. *Composites Science and Technology*, 2011, 71(16): 1850-1858.

-
- [34] Seung-Eock Kim, Seung-Eock, Huu-Tai Thai and Jaehong Lee. Buckling analysis of plates using the two variable refined plate theory[J]. *Thin-Walled Structures*, 2009, 47(4): 455-462.
 - [35] Tian Tang Yu, Shuohui Yin, Tinh Quoc Bui and Sohichi Hirose. A simple FSDT-based isogeometric analysis for geometrically nonlinear analysis of functionally graded plates[J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2015, 96: 1-10.
 - [36] Ta Duy Hien, Hyuk-Chun Noh. Stochastic isogeometric analysis of free vibration of functionally graded plates considering material randomness[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2017, 318: 845-863.
 - [37] Jiazhao Huang , Nhon Nguyen-Thanh, Jingwen Gao, Zheng Fan, Kun Zhou. Static, free vibration, and buckling analyses of laminated composite plates via an isogeometric meshfree collocation approach[J]. *Composite Structures*, 2022, 285: 115011.
 - [38] Junli Guo, Zhaohong Qin, Yahui Zhang. Nonlinear aerodynamic analysis of functional graded plates using an HSDT-based isogeometric approach[J]. *Thin-Walled Structures*, 2023, 186: 110658.
 - [39] Shuohui Yin, Tiantang Yu, Tinh Quoc Bui, Xuejun Zheng, Satoyuki Tanaka. In-plane material inhomogeneity of functionally graded plates: A higher-order shear deformation plate isogeometric analysis[J]. *Composites Part B: Engineering*, 2016, 106: 273-284.
 - [40] Qui X. Lieu, Jaehong Lee. Modeling and optimization of functionally graded plates under thermo-mechanical load using isogeometric analysis and adaptive hybrid evolutionary firefly algorithm[J]. *Composite Structures*, 2017, 179: 89-106.
 - [41] Vuong Nguyen Van Do, Chin-Hyung Lee. Free vibration analysis of FGM plates with complex cutouts by using quasi-3D isogeometric approach[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2019, 159: 213-233.
 - [42] Fußeder Daniela, Simeon Bernd, Vuong, Anhvu. Fundamental aspects of shape optimization in the context of isogeometric analysis[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2015, 286: 313-331.
 - [43] Wolfgang A. Wall, Moritz A. Frenzel, Christian Cyron. Isogeometric structural

- p>
shape optimization[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2008, 197(33-40): 2976-2988.
- [44] Ioannis N. Tsiptsis, Lassi Liimatainen, Toni Kotnik, Jarkko Niiranen. Structural optimization employing isogeometric tools in Particle Swarm Optimizer[J]. Journal of Building Engineering, 2019, 24: 100761.
- [45] Peter Nørtoft, Jens Gravesen. Isogeometric shape optimization in fluid mechanics[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2013, 48: 909-925.
- [46] Oliver Weeger, Bharath Narayanan, Martin L. Isogeometric shape optimization of nonlinear, curved 3D beams and beam structures[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2019, 345: 26-51.
- [47] P. Phung-Van, Loc V. Tran, A. J. M. Ferreira, H. Nguyen-Xuan, M. Abdel-Wahab. Nonlinear transient isogeometric analysis of smart piezoelectric functionally graded material plates based on generalized shear deformation theory under thermo-electro-mechanical loads[J]. Nonlinear Dynamics, 2017, 87: 879-894.
- [48] Tao Liu, Yafen Jiang, Shujun Li, Qingyun Liu, Chao Wang. Isogeometric analysis for active control of piezoelectric functionally graded plates in thermal environment[J]. Shock and Vibration, 2021, 2021(1): 5514476.
- [49] Tao Liu, Chaodong Li, Chao Wang, Wenfeng Hu, Tinh Quoc Bui. Geometrically nonlinear isogeometric analysis of smart piezoelectric FG plates considering thermal effects of piezoelectric stress and dielectric constants[J]. Composite Structures, 2021, 266: 113795.
- [50] Hasim, Kazim Ahmet, and Kefal Adnan. A novel isogeometric layerwise element for piezoelectric analysis of laminated plates with straight/curvilinear fibers[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2022, 399: 115440.
- [51] Hasim, Kazim Ahmet, and Kefal, Adnan. Free and forced vibration analysis of piezolaminated plates via an isogeometric layerwise finite element[J]. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 2024, 1-16.
- [52] Yanming Xu, Haozhi Li, Leilei Chen, Juan Zhao and Xin Zhang. Monte Carlo based isogeometric stochastic finite element method for uncertainty quantization in vibration analysis of piezoelectric materials[J]. Mathematics, 2022, 10(11): 1840.

-
- [53] Zhongqiang Ma, Guohua Wu, Ponnuthurai Nagaratnam Suganthan, Aijuan Song, Qizhang Luo. Performance assessment and exhaustive listing of 500+ nature-inspired metaheuristic algorithms[J]. Swarm and Evolutionary Computation, 2023, 77: 101248.
 - [54] Seyedali Mirjalil. Genetic algorithm[J]. Evolutionary Algorithms and Neural Networks: Theory and Applications, 2019: 43-55.
 - [55] Marco Dorigo, Mauro Birattari, Thomas Stutzle. Ant colony optimization[J]. IEEE Computational Intelligence Magazine, 2006, 1(4): 28-39.
 - [56] Dervis Karaboga, Bahriye Akay. A comparative study of artificial bee colony algorithm[J]. Applied Mathematics and Computation, 2009, 214(1): 108-132.
 - [57] J. Kennedy, R. Eberhart. Particle swarm optimization[C]. Proceedings of ICNN'95-International Conference on Neural Networks. IEEE, 1995, 4: 1942-1948.
 - [58] Amir Hossein Gandomi, Xin-She Yang, Amir Hossein Alavi. Mixed variable structural optimization using firefly algorithm[J]. Computers & Structures, 2011, 89(23-24): 2325-2336.
 - [59] Kirkpatrick S, Gelatt Jr C D, Vecchi M P. Optimization by simulated annealing[J]. Science, 1983, 220(4598): 671-680.
 - [60] Robert G Reynolds. An introduction to cultural algorithms. In Proceedings of the Third Annual Conference on Evolutionary Programming, World Scientific Publishing, World Scientific, 1994, 131-139.
 - [61] Zong Woo Geem, Joong Hoon Kim, and Gobichettipalayam Vasudevan Loganathan. A new heuristic optimization algorithm: harmony search. Simulation, 2001, 76(2):60-68.
 - [62] Esmat Rashedi, Hossein Nezamabadi-Pour, and Saeid Saryazdi. GSA: a gravitational search algorithm[J]. Information Sciences, 2009, 179(13):2232-2248.
 - [63] Yang Xin-She Gandomi Amir Hossein and Amir Hossein Alavi. Cuckoo search algorithm: a metaheuristic approach to solve structural optimization problems[J]. Engineering with Computers, 2013, 29:17-35.
 - [64] Gandomi Amir Hossein, Xin-She Yang, Alavi Amir Hossein, and Talatahari Siamak. Bat algorithm for constrained optimization tasks[J]. Neural Computing and

- Applications, 2013, 22:1239-1255.
- [65] Oftadeh R, Mahjoob MJ, and Shariatpanahi M. A novel meta-heuristic optimization algorithm inspired by group hunting of animals: Hunting search[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2010, 60(7):2087-2098.
- [66] Hadi Eskandar, Ali Sadollah, Ardeshir Bahreininejad, and Mohd Hamdi. Water cycle algorithm—a novel metaheuristic optimization method for solving constrained engineering optimization problems. Computers & Structures, 2012, 110:151-166.
- [67] Sasan Harifi, Madjid Khalilian, Javad Mohammadzadeh, and Sadoullah Ebrahimnejad. Emperor penguins colony: a new metaheuristic algorithm for optimization[J]. Evolutionary Intelligence, 2019, 12:211-226.
- [68] Seyedali Mirjalili. Dragonfly algorithm: a new meta-heuristic optimization technique for solving single-objective, discrete, and multi-objective problems[J]. Neural Computing and Applications, 2016, 27:1053-1073.
- [69] Faramarzi Afshin, Heidarinejad Mohammad, Mirjalili Seyedali, and Gandomi Amir H. Marine predators algorithm: A nature-inspired metaheuristic[J]. Expert Systems with Applications, 2020, 152:113377.
- [70] Chao Wang, Liangliang Ma, Lei Ma, Joel Weijia Lai, Jie Zhao, Lu Wang, and Kang Hao Cheong. Identification of influential users with cost minimization via an improved moth flame optimization[J]. Journal of Computational Science, 2023, 67:101955.
- [71] Komalpreet Kaur, Urvinder Singh, and Rohit Salgotra. An enhanced moth flame optimization[J]. Neural Computing and Applications, 2020, 32(7):2315-2349.
- [72] Yueting Xu, Huiling Chen, Jie Luo, Qian Zhang, Shan Jiao, and Xiaoqin Zhang. Enhanced moth-flame optimizer with mutation strategy for global optimization[J]. Information Sciences, 2019, 492:181-203.
- [73] 王秋萍, 郭佳丽, 王晓峰. 基于维数学习和二次插值的混沌飞蛾火焰算法[J]. 系统科学与数学, 2021, 41(05):1233-1244.
- [74] Liwu Xu, Yuanzheng Li, Kaicheng Li, Gooi Hoay Beng, Zhiqiang Jiang, Chao Wang, and Nian Liu. Enhanced moth-flame optimization based on cultural learning and gaussian mutation[J]. Journal of Bionic Engineering, 2018, 15(4):751-763.

-
- [75] Zhiming Li, Yongquan Zhou, Sen Zhang, and Junmin Song. Levy-flight moth-flame algorithm for function optimization and engineering design problems[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2016:1-22.
 - [76] Lei Ma, Chao Wang, Neng-gang Xie, Miao Shi, Ye Ye, and Lu Wang. Moth-flame optimization algorithm based on diversity and mutation strategy[J]. *Applied Intelligence*, 2021, 51:5836-5872.
 - [77] Rashmi Sharma, Anju Saha. Fermat Spiral-Based Moth-Flame Optimization Algorithm for Object-Oriented Testing[C], *Advances in Computing and Intelligent Systems: Proceedings of ICACM 2019*. Springer Singapore, 2020: 19-34.
 - [78] Mahrous A. Taher, Salah Kamel, Francisco Jurado and Mohamed Ebeed. An improved moth-flame optimization algorithm for solving optimal power flow problem[J]. *International Transactions on Electrical Energy Systems*, 2019, 29(3): e2743.
 - [79] Pushpendra Singh, S.K. Bishnoi. Modified Moth-Flame optimization for strategic integration of fuel cell in renewable active distribution network[J]. *Electric Power Systems Research*, 2021, 197: 107323.
 - [80] Hongliang Zhang, Rong Li, Zhennao Cai, Zhiyang Gu, Ali Asghar Heidari Mingjing Wang, Huiling Chen and Mayun Chen. Advanced orthogonal moth flame optimization with Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno algorithm: Framework and real-world problems[J]. *Expert Systems with Applications*, 2020, 159: 113617.
 - [81] Srikanth Reddy K, Lokesh Kumar Panwar, B.K. Panigrahi and Rajesh Kumar. Solution to unit commitment in power system operation planning using binary coded modified moth flame optimization algorithm (BMMFOA): a flame selection based computational technique[J]. *Journal of Computational Science*, 2018, 25: 298-317.
 - [82] Vimal Savsani, Mohamed A. Tawhid. Non-dominated sorting moth flame optimization (NS-MFO) for multi-objective problems[J]. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 2017, 63: 20-32.
 - [83] Saunhita Sapre, Mini S. Emulous mechanism based multi-objective moth–flame optimization algorithm[J]. *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 2021, 150:

15-33.

- [84] Zhendong Zhang, Hui Qin, Liqiang Yao, Yongqi Liu, Zhiqiang Jiang, Zhongkai Feng and Shuo Ouyang. Improved multi-objective moth-flame optimization algorithm based on R-domination for cascade reservoirs operation[J]. Journal of Hydrology, 2020, 581: 124431.
- [85] Mahrous A Taher, Salah Kamel, Francisco Jurado, and Mohamed Ebeed. An improved moth-flame optimization algorithm for solving optimal power flow problem. International Transactions on Electrical Energy Systems, 29:e2743, 2019.
- [86] Lu Wang, Lei Ma, Chao Wang, Neng-gang Xie, Jin Ming Koh, and Kang Hao Cheong. Identifying influential spreaders in social networks through discrete moth-flame optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 25(6):1091-1102, 2021.
- [87] Babar Sattar Khan, Muhammad Asif Zahoor Raja, Affaq Qamar, and Naveed Ishtiaq Chaudhary. Design of moth flame optimization heuristics for integrated power plant system containing stochastic wind[J]. Applied Soft Computing, 2021, 104:107193.
- [88] Moutaz Alazab, Ruba Abu Khurma, Albara Awajan, and David Camacho. A new intrusion detection system based on moth-flame optimizer algorithm[J]. Expert Systems with Applications, 210:118439, 2022.
- [89] Jichao Li, Xiaosong Du, Joaquim R.R.A. Martins. Machine learning in aerodynamic shape optimization[J]. Progress in Aerospace Sciences, 2022, 134: 100849.
- [90] Adriana Ciardiello, Federica Rosso, Jacopo Dell'Olmo, Virgilio Ciancio, Marco Ferrero and Ferdinando Salata. Multi-objective approach to the optimization of shape and envelope in building energy design[J]. Applied energy, 2020, 280: 115984.
- [91] Shaoying Li, Shangqin Yuan, Jihong Zhu, Chuang Wang, Jiang Li and Weihong Zhang. Additive manufacturing-driven design optimization: Building direction and structural topology[J]. Additive Manufacturing, 2020, 36: 101406.
- [92] Mohamed A. Ismail, Caitlin T. Mueller. Minimizing embodied energy of reinforced concrete floor systems in developing countries through shape optimization[J]. Engineering Structures, 2021, 246: 112955.
- [93] Quan Nguyen, Liyong Tong, Yuanxian Gu. Evolutionary piezoelectric actuators

- p>design optimisation for static shape control of smart plates[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2007, 197(1-4): 47-60.
- [94] Quan Nguyen, Liyong Tong. Voltage and evolutionary piezoelectric actuator design optimisation for static shape control of smart plate structures[J]. Materials & Design, 2007, 28(2): 387-399.
- [95] Bin Xu, Jingping Ou, Jiesheng Jiang. Integrated optimization of structural topology and control for piezoelectric smart plate based on genetic algorithm[J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2013, 64: 1-12.
- [96] Liew K M, He X Q, Meguid S A. Optimal shape control of functionally graded smart plates using genetic algorithms[J]. Computational Mechanics, 2004, 33: 245-253.
- [97] Liew K M, He X Q, Ray T. On the use of computational intelligence in the optimal shape control of functionally graded smart plates[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2004, 193(42-44): 4475-4492.
- [98] S Da Mota Silva, R Ribeiro, J Dias Rodrigues, M A P Vaz and J M Monteiro. The application of genetic algorithms for shape control with piezoelectric patches—an experimental comparison[J]. Smart Materials and Structures, 2004, 13(1): 220.
- [99] Khorsand A R, Akbarzadeh-T M R, Moin H. Genetic quantum algorithm for voltage and pattern design of piezoelectric actuator[C]. 2006 IEEE International Conference on Evolutionary Computation. IEEE, 2006: 2593-2600.
- [100] Zhan Kang, Liyong Tong. Topology optimization-based distribution design of actuation voltage in static shape control of plates[J]. Computers & Structures, 2008, 86(19-20): 1885-1893.
- [101] Chao Wang, Tiantang Yu, Guojian Shao and Tinh Quoc Bui. Multi-objective isogeometric integrated optimization for shape control of piezoelectric functionally graded plates[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2021, 377: 113698.
- [102] Luwen Zhang, Zhiguang Song, K.M. Liew. Optimal shape control of CNT reinforced functionally graded composite plates using piezoelectric patches[J]. Composites Part B: Engineering, 2016, 85: 140-149.

-
- [103] Jinqiang Li, Yu Xue, Fengming Li and Yoshihiro Narita. Active vibration control of functionally graded piezoelectric material plate[J]. *Composite Structures*, 2019, 207: 509-518.
 - [104] Chao Wang, Renqian Xu, Lei Ma, Jie Zhao, Lu Wang, Neng-gang Xie and Kang Hao. An efficient salp swarm algorithm based on scale-free informed followers with self-adaption weight[J]. *Applied Intelligence*, 2023, 53(2): 1759-1791.
 - [105] Lei Ma, Chao Wang, Neng-gang Xie, Miao Shi, Ye Ye and Lu Wang. Moth-flame optimization algorithm based on diversity and mutation strategy[J]. *Applied Intelligence*, 2021, 51: 5836-5872.
 - [106] Yueting Xu, Huiling Chen, Ali Asghar Heidari, Jie Luo, Qian Zhang, Xuehua Zhao and Chengye Li. An efficient chaotic mutative moth-flame-inspired optimizer for global optimization tasks[J]. *Expert Systems with Applications*, 2019, 129: 135-155.
 - [107] Heba Abdelhamid, Ahmed Helmi, Ibrahim Ziedan. LCMFO: an improved moth-flame algorithm for combinatorial optimization problems[J]. *International Journal of Engineering and Technology*, 2019, 10: 1793-1800.
 - [108] Eberhart, Yuhui Shi. Particle swarm optimization: developments, applications and resources[C]. *Proceedings of the 2001 Congress on Evolutionary Computation*. IEEE, 2001, 1: 81-86.
 - [109] Qin A K, Huang V L, Suganthan P N. Differential evolution algorithm with strategy adaptation for global numerical optimization[J]. *IEEE transactions on Evolutionary Computation*, 2008, 13(2): 398-417.
 - [110] Seyedali Mirjalili, Seyed Mohammad Mirjalili, and Andrew Lewis. Grey wolf optimizer[J]. *Advances in Engineering Software*, 2014, 69:46-61.
 - [111] Laith Abualigah, Ali Diabat, Seyedali Mirjalili, Mohamed Abd Elaziz, and Amir H Gandomi. The arithmetic optimization algorithm[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2021, 376:113609.
 - [112] Yanhui Che, Xuhe Deng. An enhanced seagull optimization algorithm for solving engineering optimization problems[J]. *Applied Intelligence*, 2022, 52(11): 13043-13081.
 - [113] Ngatchou P, Zarei A, El-Sharkawi A. Pareto multi objective optimization[C].

- Proceedings of the 13th International Conference on Intelligent Systems Application to Power Systems. IEEE, 2005: 84-91.
- [114] Kalyanmoy Deb, Himanshu Jain. An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point-based nondominated sorting approach, part I: solving problems with box constraints[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2013, 18(4): 577-601.
- [115] Indraneel Das, J. E. Dennis. Normal-boundary intersection: A new method for generating the Pareto surface in nonlinear multicriteria optimization problems[J]. SIAM Journal on Optimization, 1998, 8(3): 631-657.
- [116] Mostaghim S, Teich J. Strategies for finding good local guides in multi-objective particle swarm optimization (MOPSO)[C]. Proceedings of the 2003 IEEE Swarm Intelligence Symposium. SIS'03 (Cat. No. 03EX706). IEEE, 2003: 26-33.
- [117] Seyedali Mirjalili, Shahrzad Saremi, Seyed Mohammad Mirjalili and Leandro dos S. Coelho. Multi-objective grey wolf optimizer: a novel algorithm for multi-criterion optimization[J]. Expert Systems with Applications, 2016, 47: 106-119.
- [118] Vikas, Satyasai Jagannath Nanda. Multi-objective moth flame optimization[C], 2016 International Conference on Advances in Computing, Communications and Informatics (ICACCI). IEEE, 2016: 2470-2476.
- [119] Nery Riquelme, Christian Von Lücken, Benjamin Baran. Performance metrics in multi-objective optimization[C], 2015 Latin American Computing Conference (CLEI). IEEE, 2015: 1-11.
- [120] Zitzler E, Thiele L. Multiobjective evolutionary algorithms: a comparative case study and the strength Pareto approach[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 1999, 3(4): 257-271.
- [121] Jason R Schott. Fault tolerant design using single and multicriteria genetic algorithm optimization[D]. Massachusetts Institute of Technology, 1995.
- [122] Tushar Goel, Nielen Stander. A non-dominance-based online stopping criterion for multi-objective evolutionary algorithms[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2010, 84(6): 661-684.
- [123] Hossain M. Amir, Takashi Hasegawa. Nonlinear mixed-discrete structural

- p optimization[J]. Journal of Structural Engineering, 1989, 115(3): 626-646.
- [124] Tapabrata Ray, K.M. Liew. A swarm metaphor for multiobjective design optimization[J]. Engineering Optimization, 2002, 34(2): 141-153.
- [125] Ryoji Tanabe, Hisao Ishibuchi. An easy-to-use real-world multi-objective optimization problem suite[J]. Applied Soft Computing, 2020, 89: 106078.
- [126] Omar S. Hussein, Sameer B. Mulani Mulani S B. Multi-dimensional optimization of functionally graded material composition using polynomial expansion of the volume fraction[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2017, 56: 271-284.
- [127] Qui X. Lieu, Seunghye Lee, Joowon Kang and Jaehong Lee. Bending and free vibration analyses of in-plane bi-directional functionally graded plates with variable thickness using isogeometric analysis[J]. Composite Structures, 2018, 192: 434-451.
- [128] Yaqiang Xue, Guoyong Jin, Hu Ding and Mingfei Chen. Free vibration analysis of in-plane functionally graded plates using a refined plate theory and isogeometric approach[J]. Composite Structures, 2018, 192: 193-205.
- [129] Qui X. Lieu, Jaehong Lee. A reliability-based optimization approach for material and thickness composition of multidirectional functionally graded plates[J]. Composites Part B: Engineering, 2019, 164: 599-611.
- [130] Hassani B, Taheri A H and Moghaddam N Z. An improved isogeometrical analysis approach to functionally graded plane elasticity problems[J]. Applied Mathematical Modelling, 2013, 37(22): 9242-9268.
- [131] Hassani B, Tavakkoli S M, Moghadam N Z. Application of isogeometric analysis in structural shape optimization[J]. Scientia Iranica, 2011, 18(4): 846-852.
- [132] Kaike Yang, Jihong Zhu, Manqiao Wu and Weihong Zhang. Integrated optimization of actuators and structural topology of piezoelectric composite structures for static shape control[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2018, 334: 440-469.
- [133] Chao Wang, Tiantang Yu, Guojian Shao and Tinh Quoc Bui. Multi-objective isogeometric integrated optimization for shape control of piezoelectric functionally graded plates[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2021,

377: 113698.

- [134] Tao Liu, ChaoWang, Qingyun Liu, Wenfeng Hu and Xiaolei Hu. Analysis for dynamic and active vibration control of piezoelectric functionally graded plates based on isogeometric method[J]. *Engineering Mechanics*, 2020, 37(12): 228-242.
- [135] K Nguyen-Quang, H Dang-Trung, V Ho-Huu, H Luong-Van, T Nguyen-Thoi, Analysis and control of FGM plates integrated with piezoelectric sensors and actuators using cell-based smoothed discrete shear gap method (CS-DSG3)[J]. *Composite Structures*. 2017, 165: 115-129.
- [136] Qui X. Lieu, Jaehong Lee. An isogeometric multimesh design approach for size and shape optimization of multidirectional functionally graded plates[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2019, 343: 407-437.
- [137] Gurrola-Ramos J, Hernández-Aguirre A, Dalmau-Cedeño O. COLSHADE for real-world single-objective constrained optimization problems[C]. 2020 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC). IEEE, 2020: 1-8.
- [138] Jie Zhao, Deyu Tang, Zhen Liu, Yongming Cai and Shoubin Dong. Spherical search optimizer: a simple yet efficient meta-heuristic approach[J]. *Neural Computing and Applications*, 2020, 32: 9777-9808.
- [139] Yaqiang Xue, Guoyong Jin, Hu Ding and Mingfei Chen. Free vibration analysis of in-plane functionally graded plates using a refined plate theory and isogeometric approach[J]. *Composite Structures*, 2018, 192: 193-205.
- [140] Reddy Junuthula Narasimha. *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*[M]. Boca Raton: CRC Press, 2003.
- [141] Senthilnathan N R, Lim S P, Lee K H. Buckling of shear-deformable plates[J]. *AIAA Journal*, 1987, 25(9): 1268-1271.
- [142] Vuong Nguyen Van Do, Chin-Hyung Lee. Quasi-3D isogeometric buckling analysis method for advanced composite plates in thermal environments[J]. *Aerospace Science and Technology*, 2019, 92: 34-54.
- [143] Garrod Claude. Hamiltonian path-integral methods[J]. *Reviews of Modern Physics*, 1966, 38(3): 483.
- [144] Chao Wang, Liangliang Ma, Yang Bu, Jie Zhao and Kang Hao Cheong. Multi-patch

- isogeometric material optimization of bi-directional functionally graded plates[J]. *Composite Structures*, 2023, 326: 117584-117600.
- [145] Farsangi M A, Saidi A R. Levy type solution for free vibration analysis of functionally graded rectangular plates with piezoelectric layers[J]. *Smart Materials and Structures*, 2012, 21(9): 094017.
- [146] Shuohui Yin, Jack S. Hale, Tiantang Yu, Tinh Quoc Bui and Stéphane P.A. Bordas. Isogeometric locking-free plate element: a simple first order shear deformation theory for functionally graded plates[J]. *Composite Structures*, 2014, 118: 121-138.
- [147] Olgierd C. Zienkiewicz, Zhongnian Xu, Ling Fu Zeng, Alf Samuelsson and Nils-Erik Wiberg. Linked interpolation for Reissner-Mindlin plate elements: Part I—A simple quadrilateral[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1993, 36(18): 3043-3056.
- [148] Xiao Qiao He, Tengyong Ng, Sivashanker Sathiamoorthy and Liew Kim Meow. Active control of FGM plates with integrated piezoelectric sensors and actuators[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2001, 38(9): 1641-1655.

硕士研究生期间取得的工作成果

已发表论文:

1. **Liangliang Ma**, Chao Wang, Yun Chong, Wenfeng Hu, Lei Zeng. Isogeometric material optimization for shape control of bi-directional functionally graded plates with piezoelectric layers[J]. Thin-Walled Structures, 2024: 112067.
2. **Liangliang Ma**, Yun Chong, Wenfeng Hu, Yongyu Yang, Chao Wang. A four-unknown quasi-3D isogeometric approach for free vibration and bending analysis of piezoelectric 2D-FGPs[J]. Structures, 2024, 70: 107883.
3. Chao Wang, **Liangliang Ma**, Yang Bu, Jie Zhao, Kang Hao Cheong. Multi-patch isogeometric material optimization of bi-directional functionally graded plates[J]. Composite Structures, 2023, 326: 117584.
4. Chao Wang, **Liangliang Ma**, Lei Ma, Joel Weijia Lai, Jie Zhao, Lu Wang, Kang Hao Cheong. Identification of influential users with cost minimization via an improved moth flame optimization[J]. Journal of Computational Science, 2023, 67: 101955.

致谢

鲜衣怒马少年时，不负韶华且知行。行文至此，落笔为终。

衷心感谢我的导师汪超老师。您严谨的治学态度和精益求精的科研精神，始终激励着我不断进取，是我学术道路上的楷模。在您的悉心指导下，从文献研读到代码编写，从论文撰写到成果凝练，我的科研能力得到显著提升。三载春秋，您不仅在学术上倾囊相授，更在生活中给予温暖关怀。学生资质有限，未能完全达到您的期许，但您的信任与鼓励始终是我前进的动力。

感谢卜洋老师、廖斌老师、苏伟刚老师、杨海伟老师和林欣老师给予的无私帮助，感谢骆骥师兄的耐心指导，感谢师妹崇云和师弟初晨旭在关键时候的鼎力相助。感谢帅气的室友。实验室的同舟共济、室友营造的温馨氛围，都为这段旅程增添了独特光彩。

感谢父母二十多年来不求回报地付出与给予。焉得援草，言树之背，养育之恩，无以为报。唯有继续不断突破自己，努力成为他们的骄傲。祝愿我的父母身体健康，平安顺遂。

感谢姐姐、姐夫，在我遇到挫折时给我鼓励，在我迷茫时指点方向。愿外甥女小北健康、快乐、平安成长。

特别感谢女友陈虹提供陪伴无条件支持，以欢喜之心，慢慢且漫漫，世间应有两全法，不负生活不负卿。

最后，谨向所有参加论文评阅和答辩委员会的各位专家、老师，致以最诚挚的谢意，并敬请批评指正！

马亮亮

二零二五年于芜湖