
分类号: O231.5
密 级: 公开

单位代码: 10363
学 号: 2221030104

题 目 带有私人观念和执拗个体的观念动力学模型
研究

英文并列

题 目 A Study for Opinion Dynamics with Private
Opinion and Stubborn Individuals

学生姓名: 袁飞
指导教师: 何广 教授
专 业: 系统科学
研究方向: 随机控制理论及应用

论文答辩日期: 2025 年 5 月 14 日

安徽工程大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：我恪守学术道德，崇尚严谨学风。所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已明确注明和引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品及成果的内容。论文为本人亲自撰写，我对所写的内容负责，并完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

学位论文作者签名：袁飞

日期：2025 年 5 月 14 日

安徽工程大学学位论文版权使用授权书

学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅或借阅。本人授权可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保密 ☐，在 ____ 年解密后适用本版权书。

本学位论文属于

不保密 ☒。

学位论文作者签名：袁飞

日期：2025 年 5 月 14 日

指导教师签名：193

日期：2025 年 5 月 14 日

带有私人观念和执拗个体的观念动力学模型研究

摘 要

在科技飞速发展和互联网广泛普及的今天，如今，以小红书、抖音为代表的社交平台逐渐成为大众了解资讯、表达看法的主要途径。这种变革不仅改变了信息的传播方式，也深刻影响了人们的社交互动和信息消费模式。然而，这种便利性也带来了新的挑战，尤其是在个体的表达观念与内心真实观念存在差异时，群体压力可能导致个体在公开场合表达与内心不一致的观点，这种现象在社交媒体上尤为突出。本文旨在探讨在合作竞争机制和社交媒体环境的下的私人观念与表达观念之间的差异，并分析群体压力和个体执拗程度是如何影响并产生这种差异的。为理解社交媒体环境下的信息传播和观念形成提供新的视角。

首先，本文提出了一种新颖的观念动力学模型。同时考虑了私人观念，竞争关系以及个体的执拗特性，与其他文献不相同的是，本模型中个体的执拗特性会同时影响个体的私人观念和表达观念。在这个模型中，私人观念的更新受个体执拗特性和邻居表达观念以及个体自身私人观念的影响，而表达观念的更新受个体执拗特性，群体压力和邻居表达观念和个体自身私人观念的影响。利用图论和矩阵分析的方法，对所建模型的动力学进行了详细的分析，得到了模型收敛的若干条件。研究表明，当系统不具有健忘个体时，无论网络拓扑是否是结构平衡，私人观念和表达观念总是可以以指数级地速度快速收敛到稳

定状态，同时稳定状态依赖于最初的私人观念，并且表达观念在演化的过程中被遗忘。之后利用数值仿真对所得结果进行了验证。

其次，本文研究了系统具有健忘个体的情况，研究发现如果系统存在健忘个体，则模型的收敛性取决于所有健忘个体的观念是否能够收敛到稳定状态，稳定的观念是否取决于初始表达观念，与健忘个体组成的子网络的结构平衡有关，最后利用数值仿真验证了所得结论的有效性。

最后，本文对研究内容进行了总结与归纳，并对观念动力学的未来研究趋势进行了展望。研究成果不仅为观念动力学的深入探索提供了参考，还拓展了个人信念系统的研究范畴，同时对揭示观念形成、传播与聚合的内在规律具有重要价值

关键词：执拗，群体压力，竞争，观念动力学，私人和表达观念，收敛性

A Study for Opinion Dynamics with Private Opinion and Stubborn Individuals

ABSTRACT

In today's era of rapid technological advancement and widespread internet adoption, social media platforms such as Xiaohongshu and TikTok have become important channels for people to access information and share opinions. This transformation has not only changed the way information is disseminated but has also profoundly influenced social interactions and information consumption patterns. However, this convenience also brings new challenges, particularly in the discrepancy between individuals' expressed opinions and their true private opinions. Social pressure may lead individuals to express views in public that are inconsistent with their private thoughts, a phenomenon that is especially prominent on social media. This paper aims to explore the differences between individuals' private and expressed opinions in the context of social media, and to analyze how these differences are influenced by group pressure and individual stubbornness. Additionally, the paper will investigate the role of competitive mechanisms and the lower bound of divergence in the opinion evolution, with the goal of providing new insights into information dissemination and opinion formation in the social media environment.

Firstly, this paper proposes a novel opinion dynamics model. The model simultaneously considers private opinions, competitive relationships, and stubborn individuals. Taking into account that the stubbornness of individuals affects both their private and expressed opinions, a class of opinion dynamics models incorporating stubborn individuals and social pressure is introduced. In this model, the update of private opinions is influenced by the individual's stubbornness, the expressed opinions of neighbors, and the individual's own private opinions. Meanwhile, the update of expressed opinions is influenced by the individual's stubbornness, group pressure, the expressed opinions of neighbors, and the individual's own private opinions. Using methods from graph theory and matrix analysis, the dynamics of the proposed model are thoroughly analyzed, and several conditions for model convergence are derived. The research shows that when the system does not include oblivious individuals, regardless of whether the network topology is structurally balanced, both private and expressed opinions can converge exponentially fast to a stable state. Furthermore, the stable state depends on the initial private opinions, and the expressed opinions are forgotten during the evolution process. Finally, numerical simulations are conducted to validate the obtained results.

Secondly, this paper investigates the scenario where the system includes oblivious individuals. The study reveals that if the system contains

oblivious individuals, the convergence of the model depends on whether the opinions of all oblivious individuals can converge to a stable state. Whether the stable opinion depends on the initial expressed opinions is related to the structural balance of the sub-network composed of oblivious individuals. Finally, numerical simulations are conducted to validate the effectiveness of the conclusions drawn.

Finally, we summarize and conclude this paper, and look forward to the future research direction of opinion dynamics. The research results of this paper are of great significance for further developing opinion dynamics, expanding the connotation of individual belief systems, and revealing the evolution of opinion generation, propagation and aggregation.

Yuan Fei (Mathematics)

Supervised by He Guang

KEY WORDS: Opinion Dynamics, Private Opinions, Expressed Opinions, Stubborn Individuals, Convergence

目录

摘 要	I
ABSTRACT	III
第 1 章 绪论	1
1.1 研究背景和意义	1
1.2 国内外研究现状	2
1.3 主要研究内容和论文结构	4
第 2 章 预备知识	6
2.1 符号	6
2.2 图论	6
2.3 DeGroot 模型简介	7
2.4 F-J 模型简介	8
第 3 章 不具有健忘个体的观念动力学模型的动力学分析	10
3.1 模型描述	10
3.2 备注及引理	13
3.3 主要结论	14
3.4 数值模拟	18
3.5 本章小节	20
第 4 章 具有健忘个体的观念动力学模型的动力学分析	21
4.1 模型描述	21
4.2 主要结论	22
4.3 数值模拟	26
4.4 本章小结	29
第 5 章 总结与展望	30
参考文献	32
硕士期间发表的论文	36
致谢	37

第 1 章 绪论

1.1 研究背景和意义

近年来，社会网络研究逐渐成为社会科学与行为科学领域的热点研究方向^[1-6]。与传统的“群体”概念不同，社会网络以“网络”为核心，强调节点间的相互关联，而非明确的边界或层级结构。随着工业化、城市化进程的推进以及通信技术的快速发展，社会结构逐渐呈现出网络化的特征。作为社会网络研究的重要方向之一，观念动力学聚焦于网络中观念的产生、扩散与聚合过程^[7-10]。观念动力学通过研究观念演变的规律，不仅有助于揭示人类社会与动物群体发展的内在机制，同时也为科学知识的进步与工程技术的创新提供了重要支撑^[11-16]。

随着科技的进步和时代的变迁，人们获取信息的方式发生了显著变化。从传统的电视、广播、报纸等单向传播媒介，到微博、微信、抖音等移动互联网平台，信息获取变得更加多样化、便捷化，信息内容也更加及时、自由且海量。然而，这种变化也带来了新的社会现象：个体在表达观念时，可能会与内心真实的想法产生差异，导致私人观念与表达观念不一致。这种不一致可能引发信息级联效应，进而对社会产生广泛影响。例如，以刑事审判为例，超过 30% 的陪审员会私下反对集体裁决的结果，这种私人观念与公开表达观念之间的巨大差异，可能引发社会紧张和不满，甚至带来严重后果。无论是在陪审团、公司董事会，还是在公众讨论敏感政治问题时，私人观念与表达观念之间的长期分歧都可能对社会产生深远影响。因此，探讨私人观念与表达观念的形成、传播和聚合过程，具有重要的现实意义。

在社会网络中，竞争是一种普遍存在的现象，它体现为个人或群体为了超越他人或取得更优异的成就而产生的心理需求和行为。参与者为了最大化自身利益或实现具有吸引力的目标，往往会毫不犹豫地牺牲他人的利益。尽管竞争可能带来一定的负面影响，但其积极作用也不容忽视：它能够激发人们的斗志，推动社会进步，并提高劳动生产率。在社会生活中，竞争通常以竞赛的形式呈现，例如篮球赛、数学建模比赛、舞蹈比赛、绘画比赛等。因此，竞争在社会网络中无处不在，考虑竞争因素对于我们研究的课题具有重要意义。

1.2 国内外研究现状

在过去的几十年中，观念动力学逐渐成为系统和控制工程领域的重要研究方向，吸引了广泛的学术关注。观念动力学的核心目标是研究社会网络中个体如何通过互动和观念交换来影响彼此，并探索个体观念随时间演变的规律。在这一过程中，个体的观念并非一成不变，而是可能通过学习邻居的观念或受到社会网络的影响而不断调整。这种动态变化不仅反映了社会网络中信息传播的复杂性，也为理解群体行为和社会共识的形成提供了理论基础。

在观念动力学的研究中，基于个体的模型占据了重要地位。其中，最具代表性的模型之一是 1956 年由 French Jr 提出的 DeGroot 模型^[17]。该模型假设个体的观念会随时间推移而发生变化，并通过加权平均的方式将自己的观念与邻居的观念相结合，从而捕捉社会影响的作用机制。研究表明，当网络满足一定的连通性条件时，所有个体的观念最终会趋于一致，即达到所谓的“观念共识”^[18-22]。然而，DeGroot 模型的一个局限性在于，它假设所有个体具有同质的认知能力，这与现实社会中个体认知的复杂性和多样性并不完全吻合。将 DeGroot 模型推广到竞争环境和时变拓扑上，是观念动力学研究的重要扩展方向。这些推广不仅丰富了 DeGroot 模型的理论框架，还为理解现实社会中复杂观念传播和演化提供了更强大的工具。在竞争环境中，多个观念或意见在社会网络中同时传播和竞争。这种推广使得模型更贴近现实，例如政治立场、品牌偏好或意识形态的竞争。与 DeGroot 模型的加权平均不同，竞争性观念模型可能引入非线性更新规则。例如，个体可能倾向于选择与自身观念最接近的邻居观念，或者对某些观念表现出更强的偏好。研究表明，当网络是强连通的且观念更新规则满足一定的连续性条件，系统可能收敛到均衡状态，如果网络中存在多个隔离的群体，系统可能收敛到极化状态，与 DeGroot 模型的单一共识不同，竞争性观念模型可能收敛到多个极限点，每个极限点对应一个观念或观念组合。在现实社会中，网络结构并非静态，而是随时间变化。将 DeGroot 模型推广到时变拓扑上，可以更好地捕捉动态网络中的观念传播和演化，研究表明，如果时变网络在时间上满足一定的连通性条件（例如联合连通性），系统可能收敛到共识，与静态网络不同，时变网络中的观念演化可能表现出更复杂的动态行为，例如周期性波动或混沌现象

为了更贴近实际社会情境，Friedkin 和 Johnsen 提出了 Friedkin-Johnsen (F-J) 模型^[23-24]。这一模型引入了“执拗个体”的概念，假设不同个体在坚持自身原有观念的程度存在差异。执拗个体不会完全放弃自己的初始观念，而是会在外部影响与自身认知之间寻求平衡。因此，F-J 模型通常难以实现完全的观念一致，而是更倾向于描述观念的分化与多样性。文献[25-28]对 F-J 模型稳定性的充分条件进行了描述，为理解观念演变的边界提供了理论支持。

将 F-J 模型扩展到多观念竞争环境中，结果发现高执拗个体可能导致观念极化，因为其观念不易被邻居影响，低执拗个体可能促进观念共存，因为其观念更容易被邻居影响。F-J 模型在时变拓扑中的推广，发现在时变网络中，高执拗个体可能延缓共识的形成，甚至导致观念分化，如果网络结构随时间变化较快，执拗参数的影响可能被削弱。

此外，考虑到个体在社会互动中更倾向于与观点相似的人交流，而忽略与自己观点差异较大的人，Hegselmann-Krause (H-K) 模型^[29]应运而生。在 H-K 模型中，每个个体都有一个置信区间，只有落在该区间内的观念才会被接受，而区间外的观念则被忽略。这种机制使得网络拓扑结构随时间动态变化，模型也因此被称为“时变模型”。研究表明，H-K 模型在任意初始观念条件下，最终都会收敛到一种稳定状态，但这种稳定状态通常表现为多个观念群体的并存，而非完全一致^[30-31]。将 Friedkin 的社会权利理论与 DeGroot 模型相结合，提出了 DeGroot-Friedkin(D-F)模型^[32]。在 D-F 模型中，虽然个体之间的影响力保持恒定，但个体在影响网络中的自我认知权重是由其在社会中的权力所决定的。D-F 模型不仅关注观念的演变，也关注社会权利的演变。文献[33]研究了社会权利向量在问题序列上的演变，解释了社会网络中的分层现象。关于 D-F 模型的进一步研究，请参考文献[34-35]。

尽管大多数观念动力学研究集中于个体之间的合作模式，但竞争作为一种普遍存在的社会现象，同样对观念演变产生重要影响。无论是在体育竞赛、学术竞争，还是在政治选举中，竞争都扮演着不可忽视的角色。近年来，学者们开始关注竞争机制在观念动力学中的作用，并提出了包含竞争因素的观念动力学模型。这些模型不仅丰富了观念动力学的理论框架，也为解释现实社会中观念分化与冲突提供了新的视角。

然而，现有研究大多聚焦于个体的表达观念，而忽略了私人观念与表达观念之间可能存在的差异。在许多现实场景中，例如陪审团审议或公司董事会讨论敏感议题时，个体的公开表达可能与内心真实想法不一致。研究表明，在刑事审判中，超过三分之一的陪审员会私下反对陪审团的最终决定。这种私人观念与表达观念之间的巨大差异可能引发不满和紧张情绪，甚至导致严重的后果。因此，在研究观念动力学时，考虑私人观念与表达观念的分歧，对于全面理解社会互动和观念演变具有重要意义。

综上所述，观念动力学的研究不仅需要关注个体之间的合作与竞争机制，还应深入探讨私人观念与表达观念之间的差异。通过结合理论模型与实证研究，我们可以更好地理解社会网络中观念的形成、传播与演变，从而为应对现实社会中的观念冲突与共识构建提供科学依据。

1.3 主要研究内容和论文结构

本文的主要研究内容如下：首先，我们拓展了经典的 DeGroot 模型和 F-J 模型，提出了一种新颖的观念动力学模型。在这个模型中个体的私人观念，表达观念，竞争以及执拗程度同时被考虑，个体的执拗特性会同时影响个体的私人观念和表达观念，个体私人观念的演化依赖于个体执拗特性和个体的私人观念和邻居个体的表达观念，而个体的表达观念是受个体执拗特性和邻居个体的平均表达观念的压力下形成的。其次，利用图论和矩阵理论，我们发现当不存在健忘个体时，不管社会网络是结构平衡还是结构不平衡的，个体的私人观念和表达观念总是快速收敛到稳定的状态，同时稳定的观念依赖于初始的私人观念，而个体的表达观念在演化的过程中被遗忘。接着，我们还分析了在一些特殊的条件下，可以通过表达观念的分歧程度来估计私人观念的分歧程度。如果存在健忘个体，模型的稳定性依赖于所有健忘个体的观念是否可以收敛到稳定观念，稳定观念取决于最初的表达观念和健忘个体组成的子网络是否是结构平衡的。最后我们利用数值仿真对所得结果进行了验证。

本文结构安排如下：

第一章：绪论。本章节主要围绕研究的背景，意义，国内外的研究现状进行了深入解读，并明确了本次研究的核心内容和论文架构。

第二章：预备知识。本章节重点探讨了本文所需要的数学符号和相关的专业名词，同时还详细介绍了常用的两个模型 DeGroot 模型和 F-J 模型。

第三章：在本章节中，我们构建了一个新颖的观念动力学模型，该模型同时考虑个体的私人观念，群体压力，竞争和执拗程度。我们对该模型不具有健忘个体的情况下进行了深入分析，得到了模型能够收敛的必要条件，并且对最终的私人观念和表达观念的分歧程度进行分析，得到了一种利用表达观念的差异性评估私人观念的差异程度的方法，并通过数值模拟证实了我们的观点和结论。

第四章：在这一章节中，我们基于上述模型，考虑了该模型具有健忘个体的情况下，模型的收敛条件，并通过数值仿真验证了我们所得的结论是有效的。

第五章：总结与展望。

第 2 章 预备知识

2.1 符号

在本文中, $\mathbb{R}^n$ 表示 n 维实向量空间, $\mathbb{R}^{m \times n}$ 表示 $m \times n$ 维实矩阵空间。符号 $\mathbf{1}_n$ ($\mathbf{0}_n$) 表示一个 n 维列向量, 其中所有元素都是 1 (0)。 I_n 表示一个 n 阶单位矩阵, 它的主对角线上的元素都是 1, 其余元素都是 0。矩阵 A 的第 i 行第 j 列元素用 a_{ij} 表示。若矩阵 A 中所有元素非负, 则记 $A \geq 0$ 。也就是对于所有的 i, j , 都有 $a_{ij} \geq 0$ 。 $|A|$ 表示矩阵 A 的每个元素 a_{ij} 都取其绝对值, 即将矩阵 A 中的每个元素 a_{ij} 都替换为其绝对值 $|a_{ij}|$ 。 $\rho(A)$ 表示矩阵 A 的谱半径。对于方阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\text{diag}(A) = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ 表示其主对角矩阵, 其中对角项为 $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ 。如果存在 $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1, \forall i$, 那么非负矩阵 A 被称为是行随机的。

2.2 图论

在本段中, 我们简洁地介绍和图论相关的一些定义。通常一个网络图可以被描述为 $G(V, E)$, 其中 $V = (v_1, v_2, \dots, v_N)$ 是节点集, $E \subseteq V \times V$ 是边集。如果 $V_1 \in V, E_1 \in E$, 则称图 $G(V_1, E_1)$ 是图 $G(V, E)$ 的子图。 $e_{ij} \in E((v_i, v_j) \in E)$ 表示从节点 i 到节点 j 存在一条边, 此时节点 i 称为节点 j 的邻居, $N_i = \{v_j : (v_j, v_i) \in E\}$ 称为 v_i 的邻居集。特别地, $e_{ii} \in E$ 表示在节点 v_i 中存在一个自环。对于一个非负矩阵 A , 如果 $a_{ij} > 0$ 当且仅当 $e_{ji} \in E$, 则称 A 为图 $G(V, E)$ 的加权邻接矩阵, 这时候也用 $G(A)$ 来表示图 $G(V, E)$ 。从 v_i 到 v_{i+k} 的有向路径 $(v_i, v_{i+1}), \dots, (v_{i+k-1}, v_{i+k})$ 被称为边序列, 其中序列中的每个节点都是唯一的 (除了开始节点和结束节点外, 其他节点都不允许重复)。如果存在一个节点 i , 使得从节点 i 到 $G(V, E)$ 中的其他节点有一条路径, 那么我们说图 $G(V, E)$ 包含一棵生成树, 节点 i 是根节点。在

图 $G(A)$ 中, 如果每个节点都是根节点, 这等价于 A 不可约, 则称图 $G(A)$ 是强连通的。结构平衡图是指符号图 $G(A)$ 是结构平衡的, 当且仅当这里存在一个规范变换矩阵 $\Gamma = \text{diag}[\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n]$, 使得 $\Gamma A \Gamma \geq 0$, 其中 $\tau_i \in \{-1, 1\}$, 那么我们称图 $G(A)$ (矩阵 A) 是结构平衡的。结构不平衡图是指符号图 $G(A)$ 是结构不平衡的, 当且仅当 $G(A)$ 中至少存在一个负权重的无向环。

2.3 DeGroot 模型简介

作为观点动力学研究的奠基性理论, Degroot 于 1974 年提出了这一经典模型^[17]。该理论框架主要探讨了社会网络结构中, 群体成员围绕特定议题进行观点交互的动态过程, 其核心在于刻画个体通过持续的社会互动所引发的观点演化机制, 从而使观念达成一致的过程。该模型揭示了群体观点趋于共识的内在机制。具体而言, 模型中每个参与者的观点状态取决于其自身及其邻居在前一时刻观点的线性组合, 这种加权平均的计算方式构成了观点收敛的基础, 在由 n 个个体组成的社会网络 $G(W) = (V, E)$ 中, $x_i(t)$ 表示个体 i 在时刻 t 的观念, 其中 $t \in \mathbb{N}$, 具体表示为

$$x_i(t+1) = \sum_{j=1}^n w_{ij} x_j(t), \quad (2.1)$$

其中社会网络对应的邻接矩阵 W 中的元素为 w_{ij} , 它表示个体的耦合关系, 如果 $w_{ij} > 0$, 则在每一次的迭代过程中, 个体 i 可以影响到个体 j , w_{ij} 越大, 个体 j 对个体 i 的影响越大。令 $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T \in \mathbb{R}^n$ 表示在时刻 t 时, n 个个体在某一特定话题上的观念。我们将系统(2.1)写成更加紧凑的形式:

$$x(t+1) = Wx(t), \quad (2.2)$$

其中, W 是一个行随机矩阵, 即行和为 1 的非负矩阵, 体现个体间的相互影响关系。 w_{ij} 表示个体 j 对个体 i 的影响权重, 在 DeGroot 模型框架下, 对于系统(2.2)的收敛性和一致性, 可以得到以下相关结果:

定义 2.3.1 (收敛性): 在 DeGroot 模型中, 若对于任意的初始观念 $x(0)$, 存在一个实数向量 $x^* \in \mathbb{R}^n$, 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = x^*$, 则称系统(2.2)是收敛的。

定义 2.3.2 (一致性): 若对于任意的初始观念 $x(0)$, 存在实数 α 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \alpha 1_n$, 则称系统(2.2)达成一致。

很明显, 一致性是收敛的一种特殊情况, 也就是说, 只有 x^* 的 n 个分量都收敛于相同的值 α 时才能达成一致。由系统(2.1)和(2.2)可知, 社会影响网络 G 上的观念演变过程为离散时间齐次 Markov 链(discrete-time homogeneous Markov chain), 随机矩阵 W 是状态转移矩阵。在文献[43]中, 作者给出了 DeGroot 模型达到一致的充分必要条件。

2.4 F-J 模型简介

在 DeGroot 模型中, 每个个体根据自己和邻居当前观点的加权平均值来更新自己的观点, 也就是说, 个体对于社会网络来说是开放的。但是, 在现实世界中, 经过广泛的谈论, 也经常出现持续的分歧。为了解释这种持续的分歧, 1999 年, Friedkin 和 Johnsen 提出了 F-J 模型^[24], 引入了执拗个体的概念。F-J 模型考虑了执拗个体的存在, 他们会在一定程度上坚持自己最初的观点。由于执拗个体的存在, F-J 模型中每个个体的观念演变如下:

$$x_i(k+1) = \xi_i \sum_{j=1}^n w_{ij} x_j(k) + (1-\xi_i) x_i(0), \quad (2.3)$$

其中 $x_i(k) \in \mathbb{R}$, $\xi_i \in [0, 1]$, 在这里 $x_i(k)$ 表示个体 i 的观念, ξ_i 表示个体 i 对人际影响的敏感度。自然地, $1-\xi_i$ 代表个体 i 对其初始观念的执拗程度。当 $0 < \xi_i < 1$

时，个体 i 属于执拗个体，会在一定程度上受到他人观念的影响，同时也保留部分对自身初始观念的坚持。当 $\xi_i = 0$ 时，个体 i 属于完全执拗个体，坚持自己的初始观念，不受他人的影响。当 $\xi_i = 1$ 时，个体 i 称为非执拗个体，很容易被别人影响。进一步地，将上述系统(2.3)以更紧凑的矩阵形式表示为：

$$x(k+1) = \Xi W x(k) + (I - \Xi)x(0), \quad (2.4)$$

其中 $\Xi = \text{diag}(\xi)$ ， $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T \in \mathbb{R}^n$ ， W 是描述人际影响网络结构的行随机矩阵。在 DeGroot 模型中，每个个体都完全接受社会影响，这很有可能会使观念达成一致，但是，在 F-J 模型中，在每次观念迭代的时候，固执个体总是会考虑自己的初始意见。因此，F-J 模型很难达成共识。近几十年来，随着多智能体系统和观念动力学模型的研究深入，F-J 模型也得到了进一步的发展，下述是 F-J 模型收敛性的相关结论：

定理 2.4.1: 若 $G(W)$ 的每一个独立强分支都不完全由非执拗节点组成的，那么模型(2.3)收敛，并且观念最终收敛的值为 $x^* = (I - \Xi W)^{-1}(I - \Xi)x(0)$ 。

在模型(2.3)中，当 $\xi = 1_n$ 时，F-J 模型则恢复为经典的 DeGroot 模型，因此 DeGroot 模型被看成是 F-J 模型的一种特殊情况。由上述结论我们可以观察到，相较于经典的 DeGroot 模型，F-J 模型很难实现观念的一致，因为矩阵 $(I - \Xi W)^{-1}(I - W)$ 的秩很难等于 1，因此需要对网络中边的权重作很严格的限制。对于难以实现观念的一致这一现象，一个合理的解释是执拗个体的存在阻碍了网络中的观念进行充分的聚合。

第3章 不具有健忘个体的观念动力学模型的动力学分析

考虑到在社会网络中的某个特定的话题上,个体的私人观念和表达观念之间存在差异,本章研究了社会网络中带有私人观念和表达观念以及执拗个体的观念动力学模型。当系统中不具有健忘个体时,无论社会网络是结构平衡的还是结构不平衡的,私人观念和表达观念总是以指数级的速度快速收敛到一个稳定的状态,同时,这个稳定的观念依赖于初始的私人观念,最初的表达观念则在演化过程中被遗忘。接着分析了稳定状态下观念之间的分歧程度,得到了一种估计私人观念分歧程度下限的方法。最后,通过数值仿真验证了所得结果的有效性。

3.1 模型描述

观念动力学 (Opinion Dynamics) 是研究个体观念如何在社会互动中演化的一个重要领域。现有的文献大多聚焦于个体的表达观念 (即个体在公共场合或群体中表达的观点), 而忽视了私人观念 (即个体内心真实持有的观点)。然而, 在许多现实场景中, 个体的私人观念和表达观念之间往往存在显著的差异。这种差异不仅影响个体的行为决策, 还可能对社会整体产生深远的影响。实际上, 对于一些敏感的政治问题, 由于受群体社会压力的影响, 个体的表达观念和私人观念的分歧始终存在, 这种持续的分歧所带来的潜在社会后果是显而易见的^[42]。因此, 文献[41]提出了一类具有表达观念和私人观念的观念动力学模型用来研究私人观念和表达观念产生差异的原因。然而应该指出的是, 一方面, 在文献[41]中, 假设所有个体都是执拗个体, 而忽略了健忘个体的存在; 另一方面, 在文献[41]中, 仅仅假设个体在更新私人观念时才展现其执拗特性, 而未考虑到个体在表达观念更新时, 仍可能在一定程度上保持其执拗特性, 为了解决文献[41]中存在的这两个问题, 本文提出了一类具有执拗个体的观念动力学模型, 在个体的执拗特性同时影响私人观念和表达观念的情况下, 研究表达观念和私人观念是如何联合共演的, 从而对文献[41]的结果进行有效的拓广。

本章节, 我们考虑一种带有私人观念和表达观念的观念动力学模型。在一个由 n 个个体组成的社会网络中, 在时间 $t = \{1, 2, 3, \dots\}$ 时, 个体 i 对某一特定话题的私人观念和表达观念分别用 $y_i(t)$ 和 $\hat{y}_i(t)$ 来表示, 私人观念 $y_i(t)$ 和表达观念

$\hat{y}_i(t)$ 一般不同, 我们认为 $y_i(t)$ 是个体的真实观念, 个体在社交互动中往往存在观点表达受限的现象, 这种自我审查行为主要源于多重社会因素的制约。具体而言, 当涉及敏感性政治议题或面临群体压力时, 人们倾向于调整其公开表达的观点, 这种策略性表达行为导致其真实想法与外在表述产生偏差。在我们的模型中, 个体要遵循群体压力而表达自己的表达观点, 他们通过 $G(M)$ 描述的网络讨论他们的表达意见, 他们通过 $G(W)$ 描述的网络更新他们的私人观念。所以私人观念和表达观念是共演的, 个体 i 的私人观念 $y_i(t)$ 演化如下:

$$y_i(t+1) = \lambda_i w_{ii} y_i(t) + \lambda_i \sum_{j \neq i}^n w_{ij} \hat{y}_j(t) + (1-\lambda_i) y_i(0), \quad (3.1)$$

个体 i 的表达观念 $\hat{y}_i(t)$ 的演化如下:

$$\hat{y}_i(t) = \bar{\lambda}_i \phi_i y_i(t) + \bar{\lambda}_i (1-\phi_i) \hat{y}_{i,avg}(t-1) + (1-\bar{\lambda}_i) \hat{y}_i(0), \quad (3.2)$$

在这里常数 $\lambda_i \in [0,1]$ 代表着私人观念中个体 i 对人际影响的敏感度, $1-\lambda_i$ 代表着私人观念中个体 i 对初始观念的执拗程度, 常数 $\bar{\lambda}_i \in [0,1]$ 代表着表达观念中个体 i 对人际影响的敏感度, 所以通常 $1-\bar{\lambda}_i$ 代表着表达观念中个体 i 对初始观念的执拗程度, 群体中的社交压力会导致个体在表达观念时保持一致, 以减少冲突或避免社会压力。当个体感受到来自他人的压力时, 即使内心有所犹豫, 也可能选择继续表达群体普遍接受的观点, 以免被孤立或批评, 不会完全的在表达观念中执拗的坚持自己的观念, 所以本文假设 $\lambda_i \leq \bar{\lambda}_i$, 即在进行私人观念更新时, 个体的执拗程度是要大于表达观念更新时个体的执拗程度的, 极端的情况可能会出现私人观念更新时个体是执拗的, 而当表达观念更新时, 迫于社会压力, 个体会完全抛弃这种对初始观念的坚持。只要个体在更新私人观念时展现执拗的特性($\lambda_i < 1$), 就称个体是执拗的。否则, 称个体 i 是非执拗的。当 $\lambda_i = 0$, 我们称个体 i 是完全执拗个体, 这意味着个体 i 拒绝和其他个体沟通, 或者忽视其他的个体观念, 完全执拗个体的观念始终不会发生改变。如果个体 i , 在更新私人观念时, 既不是执拗个体, 也不能被执拗个体影响(存在一条从执拗个体开始, 到个体 i 结束的路径), 就称个体 i 是健忘个体。

在等式(3.1)中, w_{ij} 表示个体 j 对个体 i 的影响程度, $w_{ij} > 0$ 表示个体 i 信任个体 j , $w_{ij} < 0$ 表示个体 i 不信任个体 j , 当然 $w_{ij} = 0$ 时表示个体 i 和个体 j 之间没有关系。在我们的模型中, 我们同时考虑了个体的合作和竞争。本文假设 $|W|$ 和 $|M|$ 是行随机的矩阵, 考虑到个体 i 更新私人观念和表达观念, 个体 i 和个体 j 之间的关系不会发生改变, 但在信任程度(对抗)上可能存在一些差异, 也就是说 w_{ij} 和 m_{ij} 具有相同的符号, 但允许存在大小差异。所以我们假设 $w_{ij} > 0 \Leftrightarrow m_{ij} > 0$ 和 $w_{ij} < 0 \Leftrightarrow m_{ij} < 0$ 。在这种情况下, 矩阵 W 和 M (图形 $G(W)$ 和图像 $G(M)$) 被认为是齐次的, 用符号表示为 $W \sim M$ 或 $G(W) \sim G(M)$ 。在公式(3.2)中, $\sum_{j=1}^n m_{ij} \hat{y}_j(t-1)$ 表示个体 i 在时间 $t-1$ 时所看到的群体标准或规范, 被称为个体 i 在 $t-1$ 时刻所感知到的当地表达观念。一个自然选择是对于所有 $j \in N_i$, $|m_{ij}| = |N_i|^{-1}$, 对于所有的 $j \notin N_i$, $m_{ij} = 0$, 其中 m_{ij} 的符号与 w_{ij} 的符号一致, 当然, 可以有一个合理的替代方案 $m_{ij} = w_{ij}$, $\forall i, j \in N$ 。

常数 $\phi_i \in (0,1)$ 编码了个体 i 对遵守群体标准压力的弹性以符合当地公众舆论。如果我们设置初始表达观念 $\hat{y}_i(0) = y_i(0)$, 那么系统(3.1)表明当 $t=1$ 时, $y_i(1)$ 依赖于 $y_i(0)$ 。该结果表明, 最终观念值将取决于 $y_i(0)$, 但独立于 $\hat{y}_i(0)$ 。当然, 我们也可以选择其他的初始值 $\hat{y}_i(0)$, 最终的结果将表明, 在温和的假设下, 尽管瞬态会有所改变但最终观念将保持不变。

社会学文献表明, 顺应表达观念的压力导致个体表达观念倾向于感知的群体标准^[35]。在我们的模型中, 这种感知的群体标准由 $\sum_{j=1}^n m_{ij} \hat{y}_j(t)$ 表示。从众的压力可能源于不言而喻的传统、恐惧或与众不同, 或在金钱激励、地位或奖励等驱动下加入团队的愿望^[35]。因此, 系统(3.2)旨在捕捉个体 i 的表达观念, 该观念等于由于规范压力(与 $1-\phi_i$ 成比例)而被修改或更改的个人观念, 以更接近个体 i

所感知的表达观念，从而施加了一个力 $(1-\phi_i)\sum_{j=1}^n m_{ij}\hat{y}_j(t-1)$ 。 ϕ_i 捕捉到这样一个事实，即某些个体在表达自己的观念时往往受到比其他人更少的限制。

3.2 备注及引理

备注 3.2.1: 与文献[41]比较，本文考虑了执拗特性对表达观念的影响，而在文献[41]中这种影响则被忽略。同时，在文献[41]中假设社会网络是强连通的，而本文则不需要这一建设，这使得本文的相关结果也适用于文献[41]。另一方面，通过同时考虑私人观念和表达观念，本文所提出的模型是对经典的 DeGroot 模型和 Friedkin-Johnsen 模型的拓广。当 $\bar{\lambda}_i = 1, \phi_i = 1$ 时，模型就变成了标准的 Friedkin-Johnsen 模型；当 $\phi_i = \lambda_i = 1$ 时，模型回归到经典的 Degroot 模型，因此，本文的模型是对 DeGroot 模型和 Friedkin-Johnsen 模型有效拓广，无疑具有更广泛的应用范围。

备注 3.2.2: 在本文中， M 用于描述当地舆论 $\sum_{j=1}^n m_{ij}\hat{y}_j(t-1)$ 。通常，我们需要 $W \sim M$ 。通过随后的分析，我们发现，我们可以添加一些边，只要这些添加的边不改变个体之间的关系，我们就允许图 $G(M)$ 比图 $G(W)$ 有更多的边。换句话说，如果 $G(W) \sim G(M)$ 且，我们可以通过将节点 j 的边添加到节点 i 来获得矩阵 M_1 （ m_{ij} 的符号由个体之间的关系决定）。如果我们用 M_1 代替 M ，观念的一致性不会因此受到影响，但这将影响最终私人观念和表达观念之间的差异。如果需要更好地分析这种差异，则取一些特殊的 M ，例如， $M = [\text{sign}(w_{ij})\frac{1}{N_i}]$ 或 $M = \Gamma 1_{n \times n} \Gamma$ ，其中 Γ 满足 $\Gamma W \Gamma \geq 0$ ， $\text{sign}(\cdot)$ 是符号函数。

为了获得我们的结果，我们还需要以下引理。

引理 3.2.1^[44]: 对于任意 $A \in R_{n \times n}$ ， $\rho(A) \leq \rho(|A|)$ ；对于任意非负矩阵 $A, B \in R_{n \times n}$ ，如果 $(B-A) \geq 0$ ，则 $\rho(A) \leq \rho(B)$ 。

引理 3.2.2^[22]: 设矩阵 A 是一个行随机矩阵, 如果 $G(A)$ 包含支撑树, 并且所有的根节点组成的强连通子图是非周期的, 那么 1 是 A 的唯一的最大的模特征值, 其代数重数为 1。

引理 3.2.3^[45]: 假设 $|A|$ 是一个随机矩阵, $a_{ii} > 0$ 。如果 $G(A)$ 是强连通和结构不平衡的, 或者由 $G(A)$ 的根节点组成的子图是结构不平衡的, 则 $\rho(A) < 1$ 。

引理 3.2.4^[46]: 假设 $A, B, C, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 如果 $A, D, (A - BD^{-1}C)$ 是非奇异的, $(D - CA^{-1}B)$ 也是非奇异的, 则

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & -A^{-1}BD \\ -D^{-1}CA & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix},$$

其中 $\mathbf{A} = (A - BD^{-1}C)^{-1}$, $\mathbf{D} = (D - CA^{-1}B)^{-1}$ 。

3.3 主要结论

为了更好的研究系统(3.1)和(3.2), 我们将把系统(3.1)和(3.2)改写成更加紧凑的形式。让 $y(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)]^T$ 和 $\hat{y}(t) = [\hat{y}_1(t), \hat{y}_2(t), \dots, \hat{y}_n(t)]^T$ 表示影响网络中 n 个个体的私人观念和表达观念的列向量, 让 $W = W_+ + W_-$, 其中 $W = \text{diag}[w_{11}, w_{22}, \dots, w_{nn}]$, 定义 $\Lambda = \text{diag}(\lambda_i)$ 和 $\Phi = \text{diag}(\phi_i)$, 将等式(3.2)带入等式(3.1), 根据 $\hat{y}_{i, \text{avg}}(t) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} m_{ij} \hat{y}_j(t)$, 我们可以得到

$$\begin{aligned} y_i(t+1) &= \lambda_i w_{ii} y_i(t) + \lambda_i \bar{\lambda}_i \sum_{j \neq i}^n w_{ij} \phi_j y_j(t) + (1 - \lambda_i) y_i(0) + \\ &\quad \lambda_i \bar{\lambda}_i \sum_{j \neq i}^n w_{ij} (1 - \phi_j) \sum_{k \in \mathcal{N}_j} m_{jk} \hat{y}_k(t-1) + (1 - \bar{\lambda}_i) \lambda_i \hat{y}_i(0) \sum_{j \neq i}^n w_{ij} \end{aligned} \quad (3.3)$$

根据等式(3.2)和等式(3.3), 我们可以得到:

$$\begin{bmatrix} y(t+1) \\ \hat{y}(t) \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} y(t) \\ \hat{y}(t-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (I_n - \Lambda)y(0) \\ (I_n - \bar{\Lambda})\hat{y}(0) \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

P 的表示如下:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda(\tilde{W} + \bar{\Lambda}\hat{W}\Phi) & \Lambda\bar{\Lambda}\hat{W}(I_n - \Phi)M \\ \bar{\Lambda}\Phi & \bar{\Lambda}(I_n - \Phi)M \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

对于 W 和 P ，我们得到以下结果。

引理 3.3.1: 图 $G(W)$ 是结构平衡的当且仅当图 $G(P)$ 是结构平衡的。

证明: 当 $G(W)$ 结构平衡时，存在一个规范变换矩阵 Γ ，使得 $\Gamma W \Gamma \geq 0$ 。注意到 Λ ， I_n ， Φ ， Γ 是对角矩阵， $W \sim M$ ，我们有 $\Gamma P_{11} \Gamma = \Gamma \Lambda (W + \bar{\Lambda} W \Phi) \Gamma = \Lambda (\Gamma W \Gamma + \Gamma \bar{\Lambda} W \Gamma \Phi) \geq 0$ ， $\Gamma P_{12} \Gamma = \Gamma \Lambda \bar{\Lambda} W (I_n - \Phi) M \Gamma = \Lambda \Gamma \bar{\Lambda} W \Gamma (I_n - \Phi) \Gamma M \Gamma \geq 0$ ， $\Gamma P_{21} \Gamma = \Gamma \bar{\Lambda} \Phi \Gamma \geq 0$ ， $\Gamma P_{22} \Gamma = \bar{\Lambda} (I_n - \Phi) \Gamma M \Gamma \geq 0$ ，这意味着 $\text{diag}[\Gamma, \Gamma] P \text{diag}[\Gamma, \Gamma] \geq 0$ 。

反之，如果 $G(P)$ 是结构平衡的，则存在规范变换矩阵 $\Gamma = \text{diag}[\Gamma_1, \Gamma_2]$ ，使得 $\Gamma P \Gamma \geq 0$ 。这意味着 $\Gamma_2 P_{22} \Gamma_2 = \Gamma_2 \bar{\Lambda} (I_n - \Phi) M \Gamma_2 = \bar{\Lambda} (I_n - \Phi) \Gamma_2 M \Gamma_2 \geq 0$ 。因此 $\Gamma_2 M \Gamma_2 \geq 0$ ， $\Gamma_2 W \Gamma_2 \geq 0$ 。图 $G(W)$ 在结构上是平衡的。

引理 3.3.2: 如果系统中不存在健忘个体，则 $\rho(|P|) < 1$ ， $\rho(P) < 1$ ， $\rho(|P_{11}|) < 1$ ， $\rho(P_{11}) < 1$ 。特别是，如果至少存在一个执拗个体并且 $G(W)$ 是强连通的，结论仍然成立。

证明: 构建矩阵 $F = \begin{bmatrix} 1 & 0_n^T & 0_n^T \\ \alpha & |P_{11}| & |P_{12}| \\ 0_n & |P_{21}| & |P_{22}| \end{bmatrix}$ ，其中 $\alpha = 1_n - [|P_{11}|, |P_{12}|] \mathbb{1}_{2n}$ 。
 $= [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]^T$ ，显然，如果个体 i 是执拗个体，那么 $\alpha_i > 0$ ，否则 $\alpha_i = 0$ 。 $G(F)$ 的顶点标注成 $N_0, N_1, \dots, N_{2n}$ ，子图 $G(|P_{11}|)$ 和 $G(|P_{22}|)$ 的顶点分别为 $N_1, \dots, N_n$ 和 $N_{n+1}, \dots, N_{2n}$ ，跟据 α 的定义，从顶点 N_0 到每个执拗个体都存在一条边，又由于网络中不存在健忘个体，这意味着顶点 N_0 是子图 $G\left(\begin{bmatrix} 1 & 0_n^T \\ \alpha & |P_{11}| \end{bmatrix}\right)$ 唯一的根节点。如果个体 j 在表达观念更新时也具有执拗特性，即 $\bar{\lambda}_j < 1$ ，根据 β 的定义， N_0 到节点 N_{n+j} 有一条边。如果个体 j 不是执拗个体，由 $P_{21} = \bar{\Lambda}\Phi$ 可知，存在从节点 N_j 到节点 N_{n+j} 的边，这意味至少存在一条从 N_0 到 N_{n+j} 路径。综上所述， N_0 是图 $G(F)$

唯一的根节点。通过简单的计算, $F1_{2n+1} = 1_{2n+1}$, 这表明矩阵 F 是一个随机矩阵。

根据引理 3.2.2, 1 是 F 的唯一的最大特征值, 其代数重数为 1。

$$\text{另一方面, } \text{Det}(\lambda I_{2n+1} - F) = \text{Det}\left(\begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0_{2n}^T \\ -\tilde{\alpha} & \lambda I_{2n} - |P| \end{bmatrix}\right) = (\lambda - 1)\text{Det}(\lambda I_{2n} - |P|),$$

这里 $\tilde{\alpha} = [\alpha^T, 0_n^T]^T$, 根据上面的讨论, 我们可以得出 $\rho(|P|) < 1$, 通过引理 3.2.1,

可得 $\rho(P) < 1$ 。让 $\tilde{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0_n^T \\ \beta & |P_{11}| \end{bmatrix}$, 这里 $\beta = 1_n - |P_{11}|1_n$, 与上述结论相似, 可以

得到 $\rho(|P_{11}|) < 1$, $\rho(P_{11}) < 1$ 。显然, 如果存在执拗个体, 并且 $G(W)$ 是强连通的,

则系统中不存在健忘个体。

定理 3.3.1: 如果系统中不存在健忘个体, 则系统(3.1)和(3.2)是收敛的, 且

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y^* = Hy(0) + QR\hat{y}(0), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{y}(t) = \hat{y}^* = SHy(0) + R\hat{y}(0), \quad (3.6)$$

其中 $H = (I_n - P_{11} - P_{12}(I_n - P_{22})^{-1}P_{21})^{-1}(I_n - \Lambda)$, $S = (I_n - P_{22})^{-1}P_{21}$, $Q = (I_n - P_{11})^{-1}P_{12}$

$$R = (I_n - P_{22} - P_{21}(I_n - P_{11})^{-1}P_{12})^{-1}(I_n - \bar{\Lambda}).$$

证明: 根据引理 3.3.1, $\rho(P) < 1$ 。系统 (2.4) 是具有恒定输入 $[((I_n - \Lambda)y(0))^T, 0_n^T]^T$ 的时不变线性系统。利用线性系统理论^[47]的结果, 我们可以得出 $I_{2n} - P$ 是非奇异的, 并且系统(2.4)是以指数级收敛的速度快速收敛于

$$\begin{bmatrix} \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{y}(t) \end{bmatrix} = (I_{2n} - P)^{-1} \begin{bmatrix} (I_n - \Lambda)y(0) \\ (I_n - \bar{\Lambda})\hat{y}(0) \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

接下来, 我们将计算 $I_{2n} - P$ 。因为 $I_{2n} - P, I_n - P_{11}, I_n - P_{22}$ 都是非奇异矩阵

$$\begin{bmatrix} I_n - P_{11} & -P_{12} \\ -P_{21} & I_n - P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times n} \\ (I_n - P_{22})^{-1}P_{21} & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n - P_{11} - P_{12}(I_n - P_{22})^{-1}P_{21} & -P_{12} \\ 0_{n \times n} & I_n - P_{22} \end{bmatrix} \quad \text{也}$$

是非奇异的, 即 $I_n - P_{11} - P_{12}(I_n - P_{22})^{-1}P_{21}$ 是非奇异的, 根据引理 4, 我们可以得到

$$(I_{2n} - P)^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & (I_n - P_{11})^{-1}P_{12}\mathbf{D} \\ (I_n - P_{22})^{-1}P_{21}\mathbf{A} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$$

其中, $\mathbf{A} = (I_n - P_{11} - P_{12}(I_n - P_{22})^{-1}P_{21})^{-1}$, $\mathbf{D} = (I_n - P_{22} - P_{21}(I_n - P_{11})^{-1}P_{12})^{-1}$ 。所以

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \mathbf{A}(I_n - \Lambda)y(0) + (I_n - P_{11})^{-1}P_{12}\mathbf{D}(I_n - \bar{\Lambda})\hat{y}(0) = Hy(0) + QR\hat{y}(0),$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{y}(t) = (I_n - P_{22})^{-1}P_{21}\mathbf{A}(I_n - \Lambda)y(0) + \mathbf{D}(I_n - \bar{\Lambda})\hat{y}(0) = SHy(0) + R\hat{y}(0)。$$

推论 3.3.1: 如果 $G(W)$ 是强连通的, 并且至少存在一个执拗个体或者所有的 $\lambda_i < 1$, 则定理 3.3.1 成立。

证明: 显然, $G(W)$ 是强连通的或者 $\lambda_i < 1$, 这意味着社会网络中不存在健忘性个体, 因此定理 3.3.1 依然成立。

推论 3.3.2: 如果社会网络中不存在健忘个体, 且 $\bar{\Lambda} = I_n$, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y^* = Hy(0)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{y}(t) = \hat{y}^* = SHy(0)$, 其中 $H = (I_n - P_{11} - P_{12}(I_n - P_{22})^{-1}P_{21})^{-1}(I_n - \Lambda)$, $S = (I_n - P_{22})^{-1}P_{21}$ 都是非负的行随机矩阵。

证明: 当 $\bar{\Lambda} = I_n$ 我们可以得到系统(4)以指数收敛的速度快速收敛 $\begin{bmatrix} \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & (I_n - P_{11})^{-1}P_{12}\mathbf{D} \\ (I_n - P_{22})^{-1}P_{21}\mathbf{A} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (I_n - \Lambda)y(0) \\ 0_n \end{bmatrix}$, 所以 $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \mathbf{A}(I_n - \Lambda)y(0) = Hy(0)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{y}(t) = (I_n - P_{22})^{-1}P_{21}\mathbf{A}(I_n - \Lambda)y(0) = SHy(0)$ 。接下来我们将证明 R, S 是非负的行随机矩阵。因为 $(I_{2n} - P)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} P^k \geq 0$, $(I_n - P_{22})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{22}^k \geq 0$, 所以 $\mathbf{A} \geq 0$, $S \geq 0$, 进而 $R \geq 0$ 。即 S 和 R 都是非负矩阵。又 $S^{-1} = ((I_n - P_{22})^{-1}P_{21})^{-1} = P_{21}^{-1}(I_n - P_{22}) = \Phi^{-1}(I_n - P_{22})$, $S^{-1}\mathbf{1}_n = \Phi^{-1}(I_n - P_{22})\mathbf{1}_n = \mathbf{1}_n$, 因此 S 是行随机矩阵。另一方面, $\mathbf{A}^{-1} = I_n - P_{11}(I_n - P_{22})^{-1}P_{21} = I_n - P_{11} - P_{12}S$, $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{1}_n = (I_n - P_{11} - P_{12}S)\mathbf{1}_n = I_n\mathbf{1}_n - P_{11}\mathbf{1}_n - P_{12}\mathbf{1}_n = I_n\mathbf{1}_n - (P_{11} + P_{12})\mathbf{1}_n = (I_n - \Lambda)\mathbf{1}_n$, 又因为 $R\mathbf{1}_n = \mathbf{A}(I_n - \Lambda)\mathbf{1}_n = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{1}_n = \mathbf{1}_n$, 因此 R 是行随机的。这样我就完成了推论的证明。

备注 3.3.1: 推理 3.3.2 表明, 如果社会网络中不存在健忘个体, 且 $\bar{\Lambda} = I_n$, 最终的私人观念和表达观念仅依赖于初始的私人观念, 而与初始的表达观念无关,

这一结论与文献[9]定理 1 完全一致，因此，本文的结论是对文献[9]结论的进一步推广。

3.4 数值模拟

在本节中，我们将给出一个例子来观察系统的状态演化以验证我们获得的结论。在这个例子中，考虑一个由 12 个个体组成的社会网络。图 3-1 显示了其拓扑结构和执拗特征，其中红色个体为执拗个体，红色箭头代表竞争关系，绿色箭头代表合作关系。从图 3-1 可以看出，这个社会网络不存在健忘个体。随机生成 $\phi_i \in (0,1)$ ，根据定理 3.3.1，私人观念和表达观念都收敛到一个稳定状态，观念的演化如图 3-2 所示。根据图 3-2 的仿真结果，系统呈现出快速收敛的特征，观点在有限时间内快速达到稳定平衡。值得注意的是，在稳定状态下，个体的私人观念与表达观念之间始终保持着一定的差异性，这种差距并未随着系统的收敛而消失。这个例子进一步验证了定理 3.3.1 的正确性。

我们可以观察到，这个社会网络是结构平衡的，不存在开放的个体。随机生成 $\phi_i \in (0,1)$ 。根据定理 3.3.1，所有个体的私人观念和表达观念将以指数速度收敛。图 3-2 显示了意见的演化轨迹。

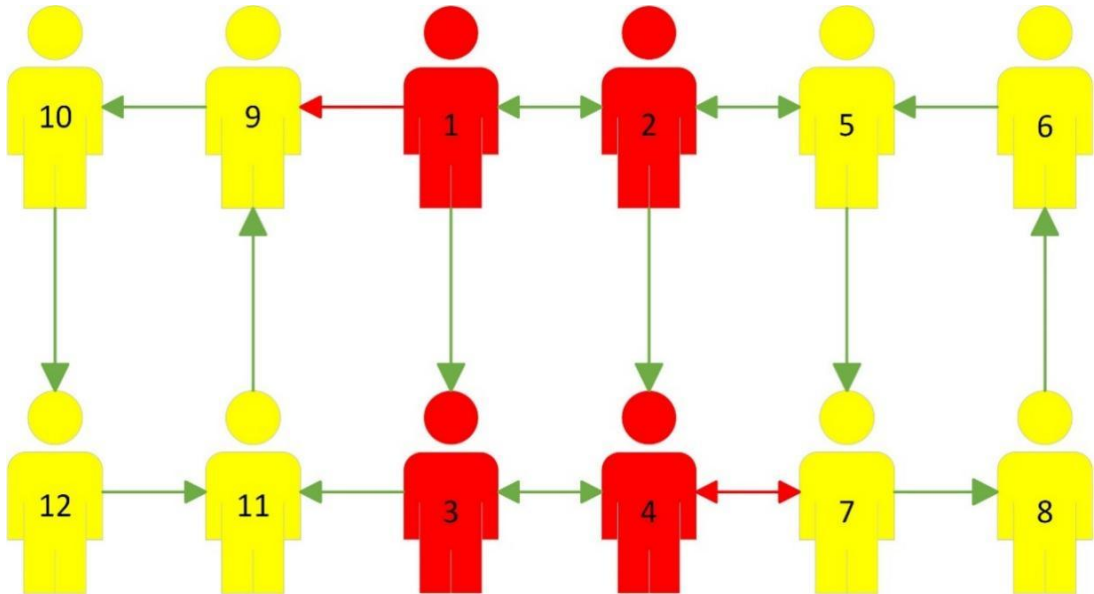


图 3.1 示例中包含 12 个个体的社交网络

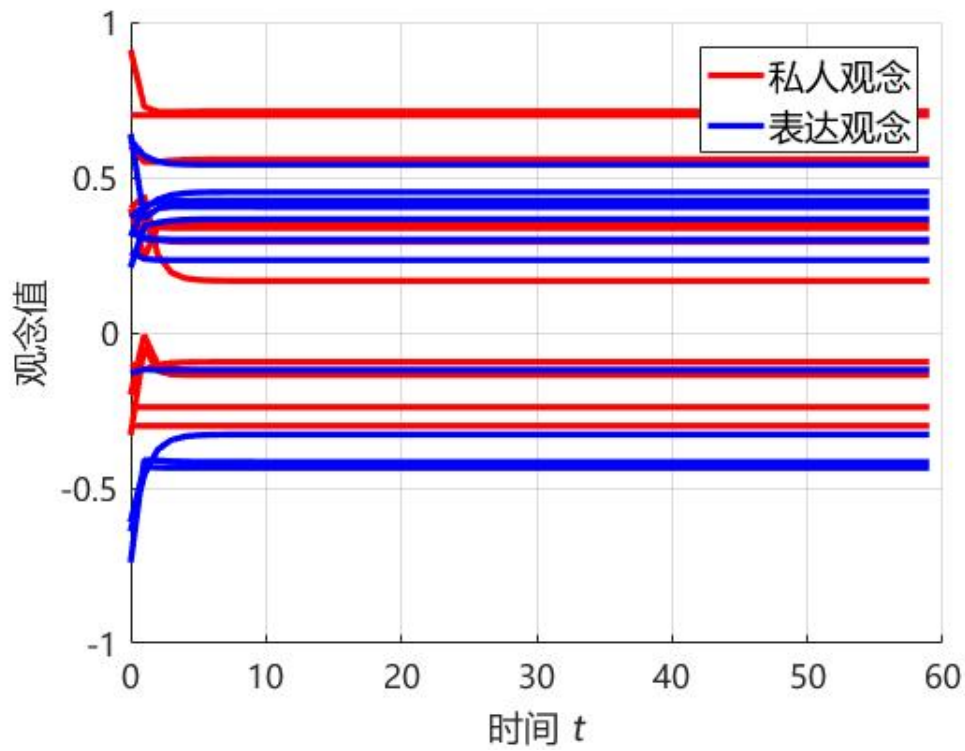


图 3-2 当 W 是结构平衡时，个体的表达观念和私人观念的演化轨迹。

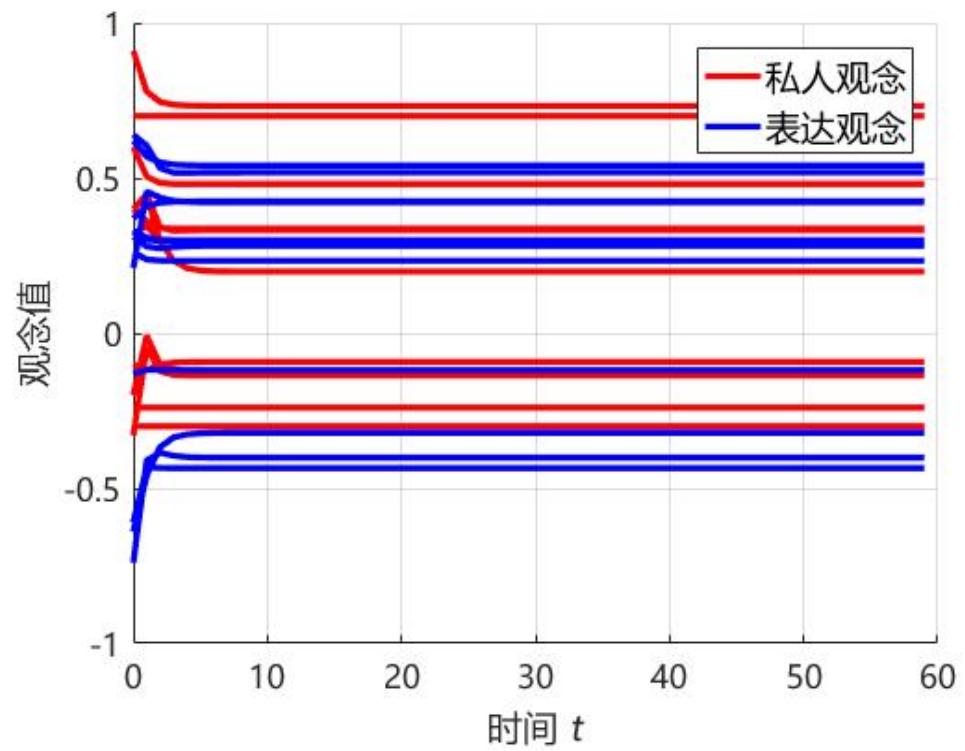


图 3-3 当 W 是结构不平衡时，个体的表达观念和私人观念的演化轨迹。

如果将从个体 11 指向个体 3 的红色箭头改为绿色箭头，并且保持其他个体的关系不变，则整个网络在结构上变得不平衡，但仍然没有开放个体，因此个体观念仍然收敛。观念的演化轨迹如图 3-3 所示

因此，我们发现当不存在开放个体时，个体之间的合作和竞争关系不会影响观念的收敛。私人观念和表达观念之间的差异始终存在。

3.5 本章小节

在这一章节中，我们提出了一种基于个体的人际影响网络的观念动力学模型，在这个模型中，我们不仅有表达观念和私人观念，同时还有执拗个体，分析了当系统中存在健忘个体时，无论网络拓扑是否是结构平衡，我们的模型总是可以以指数收敛的速度快速收敛到稳定状态。

第 4 章 具有健忘个体的观念动力学模型的动力学分析

在本章中，我们对第三章提出的模型进行进一步的分析，我们探索了当系统中存在健忘个体时，观念的演变情况。在不失一般性的情况下，对所有个体进行重新分类，前 r 个个体为非健忘个体，其余个体为健忘个体，本研究通过对比分析结构平衡与不平衡两种网络拓扑下的观点演化特征，探讨了个体在社交网络中的观点动态变化规律。研究表明，在不同网络结构下，群体观点的收敛过程呈现出显著差异，并据此推导出了若干保证观点收敛的充分条件。最后，我们通过数值模拟技术来验证我们理论分析得出的结论。

4.1 模型描述

现实社会中，个体的观念更新行为是多样化的。有些人倾向于坚持自己的初始观念（执拗个体），而另一些人则容易受到外界影响而改变观念（健忘个体）。文献[9]仅考虑执拗个体，忽略了健忘个体的存在，导致模型无法全面反映现实社会的复杂性，健忘个体的存在使得观念演化过程更加动态和复杂。例如，健忘个体可能在某些情况下快速改变观念，从而影响群体整体的观念分布。健忘个体可能在不同群体之间起到“桥梁”作用，促进观念和信息的跨群体传播。例如，在社会网络中，健忘个体可能将某一群体的观念传播到另一群体，从而促进观念的融合或冲突。

在本节中，我们的系统允许开放性个体的存在。在不失一般性的情况下，我们假设个体 1 到 r 是非开放性个体，个体 $r+1$ 到 n 是开放个体。在这种情况下， Λ ， W ， $\bar{W}$ ， M 可以被重写为以下分块矩阵：

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \mathbf{0}_{r \times (n-r)} \\ \mathbf{0}_{(n-r) \times r} & I_{n-r} \end{bmatrix}, \quad \bar{\Lambda} = \begin{bmatrix} \bar{\Lambda}_{11} & \mathbf{0}_{r \times (n-r)} \\ \mathbf{0}_{(n-r) \times r} & I_{n-r} \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} W_{11} & \mathbf{0}_{r \times (n-r)} \\ \mathbf{0}_{(n-r) \times r} & W_{22} \end{bmatrix},$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \mathbf{0}_{r \times (n-r)} \\ \mathbf{0}_{(n-r) \times r} & \Phi_{22} \end{bmatrix}, \quad \hat{W} = \begin{bmatrix} \hat{W}_{11} & \hat{W}_{12} \\ \mathbf{0}_{(n-r) \times r} & \hat{W}_{22} \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ \mathbf{0}_{(n-r) \times r} & M_{22} \end{bmatrix}。 让$$

$$\mathbf{Y}_1(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_r(t)]^T, \quad \mathbf{Y}_2(t) = [y_{r+1}(t), y_{r+2}(t), \dots, y_n(t)]^T,$$

$\hat{\mathbf{Y}}_1(t) = [\hat{y}_1(t), \hat{y}_2(t), \dots, \hat{y}_r(t)]^T$, $\hat{\mathbf{Y}}_2(t) = [\hat{y}_{r+1}(t), \hat{y}_{r+2}(t), \dots, \hat{y}_n(t)]^T$ 。通过公式(2.4), 我们可以得到

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_1(t+1) = & \Lambda_{11}(\tilde{W}_{11} + \bar{\Lambda}_{11}\hat{W}_{11}\Phi_{11})\mathbf{Y}_1(t) + \Lambda_{11}\bar{\Lambda}_{11}\hat{W}_{12}\Phi_{22}\mathbf{Y}_2(t) \\ & + \Lambda_{11}\bar{\Lambda}_{11}\hat{W}_{11}(I_r - \Phi_{11})M_{11}\hat{\mathbf{Y}}_1(t-1) \\ & + \Lambda_{11}\bar{\Lambda}_{11}\hat{W}_{11}(I_r - \Phi_{11})M_{12}\hat{\mathbf{Y}}_2(t-1) \\ & + \Lambda_{11}\bar{\Lambda}_{11}\hat{W}_{12}(I_{n-r} - \Phi_{22})M_{22}\hat{\mathbf{Y}}_2(t-1) \\ & + (I_r - \Lambda_{11})\mathbf{Y}_1(0), \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{Y}_2(t+1) = (\tilde{W}_{22} + \hat{W}_{22}\Phi_{22})\mathbf{Y}_2(t) + \hat{W}_{22}(I_{n-r} - \Phi_{22})M_{22}\hat{\mathbf{Y}}_2(t-1), \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{Y}}_1(t) = & \bar{\Lambda}_{11}\Phi_{11}\mathbf{Y}_1(t) + \bar{\Lambda}_{11}(I_r - \Phi_{11})M_{11}\hat{\mathbf{Y}}_1(t-1) \\ & + \bar{\Lambda}_{11}(I_r - \Phi_{11})M_{12}\hat{\mathbf{Y}}_2(t-1) + (I_r - \bar{\Lambda}_{11})\hat{\mathbf{Y}}_1(0), \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\hat{\mathbf{Y}}_2(t) = \Phi_{22}\mathbf{Y}_2(t) + (I_{n-r} - \Phi_{22})M_{22}\hat{\mathbf{Y}}_2(t-1). \quad (4.4)$$

让 $z_1(t) = [\mathbf{Y}_1^T(t), \hat{\mathbf{Y}}_1^T(t-1)]^T$, $z_2(t) = [\mathbf{Y}_2^T(t), \hat{\mathbf{Y}}_2^T(t-1)]^T$, 很明显, $z_1(t)$ 表示非健忘个体的私人观念和表达观念, $z_2(t)$ 表示健忘个体的私人观念和表达观念。我们

令 $\Psi_{11} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \Phi_{11} & \alpha_{22} \end{bmatrix}$, $\Psi_{12} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ 0 & \beta_{22} \end{bmatrix}$, $\Psi_{22} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \Phi_{22} & \gamma_{22} \end{bmatrix}$ 。这里 $\alpha_{11} = \Lambda_{11}(W_{11} + \bar{\Lambda}_{11}W_{11}\Phi_{11})$, $\alpha_{12} = \Lambda_{11}\bar{\Lambda}_{11}W_{11}(I_r - \Phi_{11})M_{11}$, $\alpha_{21} = \bar{\Lambda}_{11}\Phi_{11}$, $\alpha_{22} = \bar{\Lambda}_{11}(I_r - \Phi_{11})M_{11}$, $\beta_{11} = \bar{\Lambda}_{11}\Lambda_{11}W_{12}\Phi_{22}$, $\beta_{12} = \Lambda_{11}[W_{11}(I_r - \Phi_{11})M_{12} + W_{12}(I_{n-r} - \Phi_{22})M_{22}]$, $\beta_{22} = \bar{\Lambda}_{11}(I_r - \Phi_{11})M_{12}$, $\gamma_{11} = W_{22} + W_{22}\Phi_{22}$, $\gamma_{12} = W_{22}(I_{n-r} - \Phi_{22})M_{22}$, $\gamma_{22} = (I_{n-r} - \Phi_{22})M_{22}$ 。通过公式(4.2)到(4.5), 系统(3.1)可以被重写为以下形式:

$$z_1(t+1) = \Psi_{11}z_1(t) + \Psi_{12}z_2(t) + z_1(0), \quad (4.5)$$

$$z_2(t+1) = \Psi_{22}z_2(t), \quad (4.6)$$

这里 $z_1(0) = [((I_r - \Lambda_{11})\mathbf{x}_1(0))^T, ((I_r - \bar{\Lambda}_{11})\hat{\mathbf{x}}_1(0))^T]^T$ 。

4.2 主要结论

在这个小节, 我们将对系统(4.5)和(4.6)的收敛性进行分析。

定理 4.2.1: 如果 $z_2(t)$ 收敛, 那么 $z_1(t)$ 也收敛。此外, 当 $\lim_{t \rightarrow \infty} z_2(t) = z_2^*$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z_1(t) = (I_{2r} - \Psi_{11})^{-1}(\Psi_{12}z_2^* + z_1(0))。$$

(1): 如果由开放性个体组成的图 $G(W_{22} + W_{22})$ 是结构平衡, 强连通, 非周期的, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} z_2(t) = \varpi \text{diag}[\Gamma_1, \Gamma_2] \mathbf{1}_{2(n-r)}$, 这里 $\varpi = \partial[\mathbf{x}_2^T(1), \hat{\mathbf{x}}_2^T(0)]^T$ 。 $\partial = [\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_{2(n-r)}]$ 是矩阵 Ψ_{22} 的特征值为 1 的所对应的左特征向量, 并且满足 $\partial_i \neq 0$, $\sum_{i=1}^n |\partial_i| = 1$, $\mathbf{x}_2(1) = W_{22}\mathbf{x}_2(0) + W_{22}\hat{\mathbf{x}}_2(0)$, 规范变换矩阵 Γ_1 满足 $\Gamma_1 W_{22} \Gamma_1 \geq 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} z_1(t) = (I_{2r} - \Psi_{11})^{-1}(\varpi \Psi_{12} \Gamma_1 \mathbf{1}_{2(n-r)} + z_1(0))。$

(2): 如果 $i = r+1, \dots, n$ 的 $w_{ii} > 0$, 并且图 $G(W_{22} + W_{22})$ 是结构不平衡, 强连通的, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} z_2(t) = \mathbf{0}_{n-r}$, $\lim_{t \rightarrow \infty} z_1(t) = (I_{2r} - \Psi_{11})^{-1} z_1(0)。$

证明: 根据线性系统理论^[47], 当 $\rho(\Psi_{11}) < 1$, 只要 $z_2(t)$ 是收敛的, 那么 $z_1(t)$ 也是收敛的。类似于引理 3.2.1 的证明, 可以得到 $\rho(\Psi_{11}) < 1$, 所以当 $z_2(t)$ 收敛时, 那么 $z_1(t)$ 也收敛。同时取方程 (4.6) 两侧的极限, 注意到矩阵 $I_{2r} - \Psi_{11}$ 是可逆的, 你可以得到当 $\lim_{t \rightarrow \infty} z_2(t) = z_2^*$, 极限 $\lim_{t \rightarrow \infty} z_1(t) = (I_{2r} - \Psi_{11})^{-1}(\Psi_{12}z_2^* + z_1(0))。$

(1): 首先, 当 $\Gamma_1 W_{22} \Gamma_1 \geq 0$, 类似于引理 3.3.1 的证明, 我们有 $\text{diag}[\Gamma, \Gamma] \Psi_{22} \text{diag}[\Gamma, \Gamma] = \Psi_{22} \geq 0$, 也就是 Ψ_{22} 也是结构平衡的。接下来, 我们将证明图 $G(|\Psi_{22}|)$ 是强连通非周期的, 并且矩阵 $|\Psi_{22}|$ 是行随机的。由于对于所有的 $i \in N$, $W \sim M$, 所以当图 $G(W_{22} + W_{22})$ 是强连通非周期的, 图 $G(|\Psi_{22}|)$ 的两个子图 $G(\gamma_{11})$ 和 $G(\gamma_{22})$ 也是强连通非周期的。注意到 $|\gamma_{12}| = \Gamma_1 W_{22} (I_{n-r} - \Phi_{22}) M_{22} \Gamma_1 = \Gamma_1 W_{22} \Gamma_1 (I_{n-r} - \Phi_{22}) \Gamma_1 M_{22} \Gamma_1 = |W_{22}| (I_{n-r} - \Phi_{22}) |M_{22}|$ 和 $G(|W_{22}|)$ 是强连通的, 所以 $|\gamma_{12}| \neq \mathbf{0}_{(n \times r) \times (n \times r)}$, 明显可以得到 $|\gamma_{21}| = \Phi_{22} \neq \mathbf{0}_{(n \times r) \times (n \times r)}$, 因此, 从子图 $G(|\gamma_{11}|)$ 到子图 $G(|\gamma_{22}|)$ 至少存在一条边, 反之亦然, 所以, 图 $G(|\Psi_{22}|)$ 是强连通的。考虑到在图 $G(|\Psi_{22}|)$ 中存在非周期子图 $G(|\gamma_{11}|)$ 和 $G(|\gamma_{22}|)$, 所以 $G(|\Psi_{22}|)$ 也是非周

期的。通过简单的计算,可以得到 $|\Psi_{22}|1_{2(n-r)}=1_{2(n-r)}$,这表明矩阵 $|\Psi_{22}|$ 是行随机的。所以系统(4.7)是经典的 DeGroot 模型。将 $G(|\Psi_{22}|)$ 的连通性和非周期性与文献[22]和文献[45]中的经典的 DeGroot 模型相结合,我们得到了 $\lim_{t \rightarrow \infty} z_2(t) = \varpi \text{diag}[\Gamma_1, \Gamma_2]1_{2(n-r)}$,也就是 $\lim_{t \rightarrow \infty} Y_2(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{Y}_2(t) = \varpi \Gamma_1 1_{n-r}$ 。

(2): 根据上述的论证,如果 $\gamma_{12} \neq 0_{(n \times r) \times (n \times r)}$,则 $G(|\Psi_{22}|)$ 是强连通的。如果 $\gamma_{12} = 0_{(n \times r) \times (n \times r)}$,则由 $G(|\Psi_{22}|)$ 的所有根节点组成的子图 $G(\gamma_{11})$ 是强连通并且是结构不平衡的。我们构造一个矩阵 Ψ ,并且该矩阵满足 $\Psi \sim \Psi_{22}$, $|\Psi_{22}| \leq |\Psi|$, $|\Psi|1_n = 1_n$,显然 $|\Psi|$ 是一个具有正对角项的随机矩阵, $G(\Psi_{22})$ 是强连通结构不平衡的,或者是由其所有的根节点组成的子图是结构不平衡的。通过引理 3.2.1 和引理 3.2.3 我们可以得出 $\rho(\Psi_{22}) \leq \rho(|\Psi_{22}|) \leq \rho(|\Psi|) < 1$,所以系统(4.7)是稳定的,即 $\lim_{t \rightarrow \infty} Y_2(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{Y}_2(t) = 0_{n-r}$ 和 $\lim_{t \rightarrow \infty} z_1(t) = (I_{2r} - \Psi_{11})^{-1} z_1(0)$ 。这就完成了定理 4.2.1 的证明。

通过定理 4.2.1,当执拗个体和健忘个体同时存在时,整个系统是否完全收敛取决于健忘个体。当所有健忘个体的观念收敛时,整个系统是收敛的;否则,这个系统是发散的。如果不考虑私人观念和表达观念之间的差异,则系统(2.1)可以转化为经典的 F-J 模型。众所周知,对于经典的 F-J 模型^{[13],[23],[24]},整个系统的收敛完全取决于健忘个体的观念收敛,尽管我们的模型扩展到经典的 F-J 模型,但这一结论仍然得到了很好的保留。

当由健忘个体组成的网络是结构不平衡时,在强连通的条件下,所有健忘个体的最终观念都会收敛到 0,无论他们的初始观念取什么值。在这一点上,非健忘个体的最终观念取决于他们最初的私人观念,并且独立于他们最初的表达观念。总之,当健忘个体组成的网络是结构不平衡且强连通时,所有个体最终的观点将独立于他们最初的表达观念。这一结论与定理 3.3.1 的一些结果是一致的。

另一方面,当由健忘个体组成的网络是结构平衡时,定理 4.2.1 表明,在一

定条件下（健忘个体组成的网络是强连通的、非周期的。当然，根据符号 DeGroot 模型的相关结果，这里的强连通条件仍然可以变弱），健忘个体的最终观念（私人观念和表达观念）将达到模一致，并且他们的最终观念同时取决于他们对所有 $\sigma_i \neq 0$ 的初始私人观念和表达观念。对于相同的健忘个体来说，最终的私人观念和最终的表达观念没有区别。对于不同的健忘个体来说，他们最终的私人观念和最终的表达观念可能会有不同。显然，基于 $z_1(t)$ 的极限，我们还可以观察到，非健忘个体的最终观念也取决于最初的私人观念和表达观念。定理 3.3.1 表明，当不存在健忘个体时，最终的观点只取决于最初的私人观念。然而，健忘个体可能会破坏这一结果。它们使最初的私人观念和表达观念对最终的观点产生影响。毫无疑问，随着健忘个体数量的增加，会有更多个体的初始表达观念会对最终的私人观念和表达观念产生影响。当所有人都是健忘个体时，这种影响达到其最大值。对于这种情况，我们有以下推论 4.2.1。

推论 4.2.1: 假设对于所有的 $i \in N, \lambda_i = 1$ ，如果 $G(W)$ 是结构平衡，强连通，非周期的，那么系统将会收敛到 $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{y}(t) = \alpha \Gamma 1_n$ ，其中 $\alpha \in \mathbb{R}, \Gamma W \Gamma \geq 0$ 。如果 $G(W)$ 是结构不平衡，强连通的，并且 W 的所有对角项都大于 0，那么 $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{y}(t) = \mathbf{0}_n$ 。

证明: $\lambda_i = 1$ 意味着所有的个体都是健忘个体，因此系统(3.1)和系统(3.2)转化为系统(4.6)，通过引理 4.2.1 的证明，可以很容易地证明推论 4.2.1。

推论 4.2.1 表明，如果不存在执拗个体，那么在强连通的情况下，最终的私人观念和表达观念之间的差异最终会消失。定理 3.3.1 表明，如果存在执拗个体，即使网络是强连通的，这种差异也会持续存在。因此，我们可以得出结论，执拗个体的存在是造成这种差异的主要因素。众所周知，如果不考虑私人观念，执拗个体会导致所表达的观念不一致^[13]。由此可见，执拗个体所带来的影响往往是负面的，这将不利于整个社会群体的和谐。

4.3 数值模拟

接下来我们将通过例子来验证我们结论的正确性。

我们考虑一个具有健忘个体的社交网络作为我们的示例 2，可以观察到，具有健忘个体组成的子网络在结构上是平衡的，并且在图 4-1 中是强连通的。观念的演变如图 4-2 所示，从图 4-2 我们可以看出，最终的私人观念和表达观念是一样的。当由健忘个体组成的子网络是结构不平衡，强连通时，观念的演变如图 4-3 所示。从图 4-3 我们可以看出健忘个体的最终私人观念和表达观念收敛到 0，非健忘个体的最终私人观念和表达观念之间仍然存在差异。当系统中没有执拗个体时，观念的演变如图 4-4（结构平衡）和图 4-5（结构不平衡）所示。我们可以观察到，如果所有个体都是健忘个体，那么最终的私人观念和表达观念实现了模一致，并且它们之间的差异完全消失。这进一步表明，执拗个人是最终私人观念和表达观念之间差异的主要因素。对抗或竞争关系可能会导致观念分歧（私人观念或表达观念）。

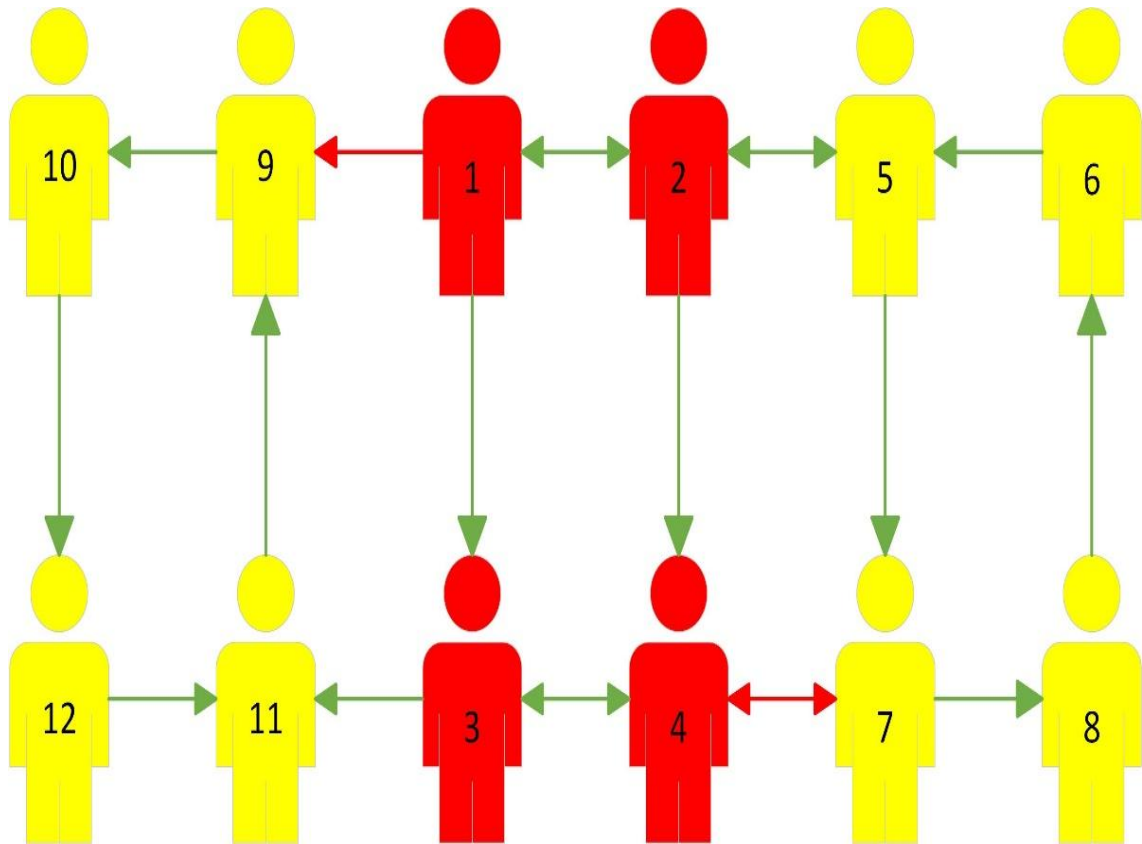


图 4-1 示例 2 中包含 12 个个体的社交网络

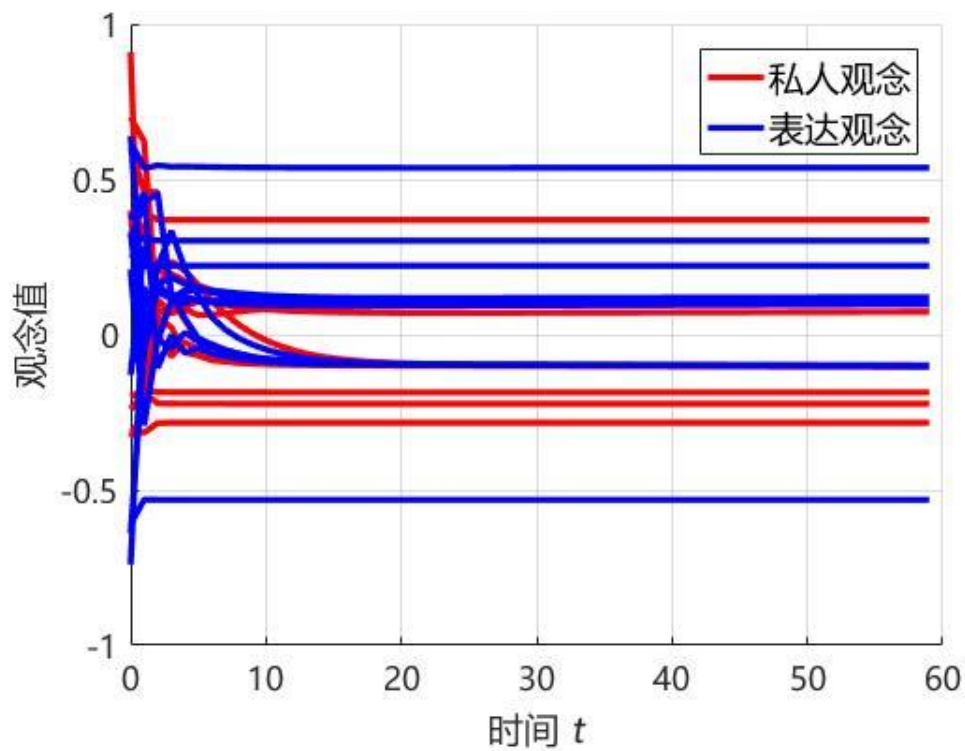


图 4-2 当健忘个体组成的子网络是结构平衡时，个体的表达观念和私人观念的演化轨迹。

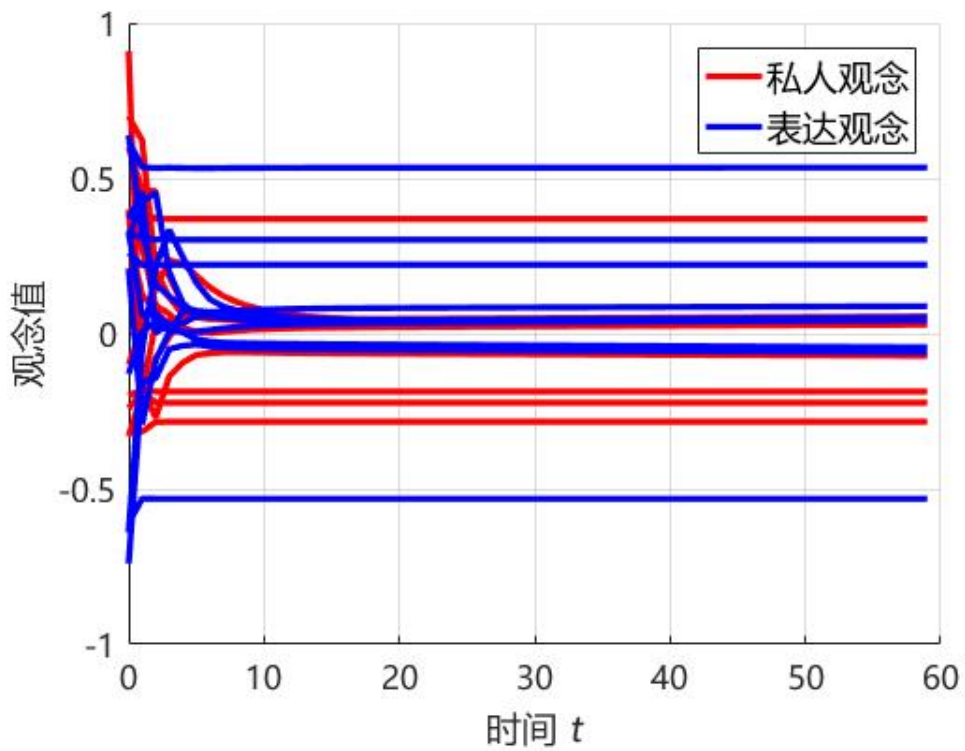


图 4-3 当健忘个体组成的子网络是结构不平衡时，个体的表达观念和私人观念的演化轨迹。

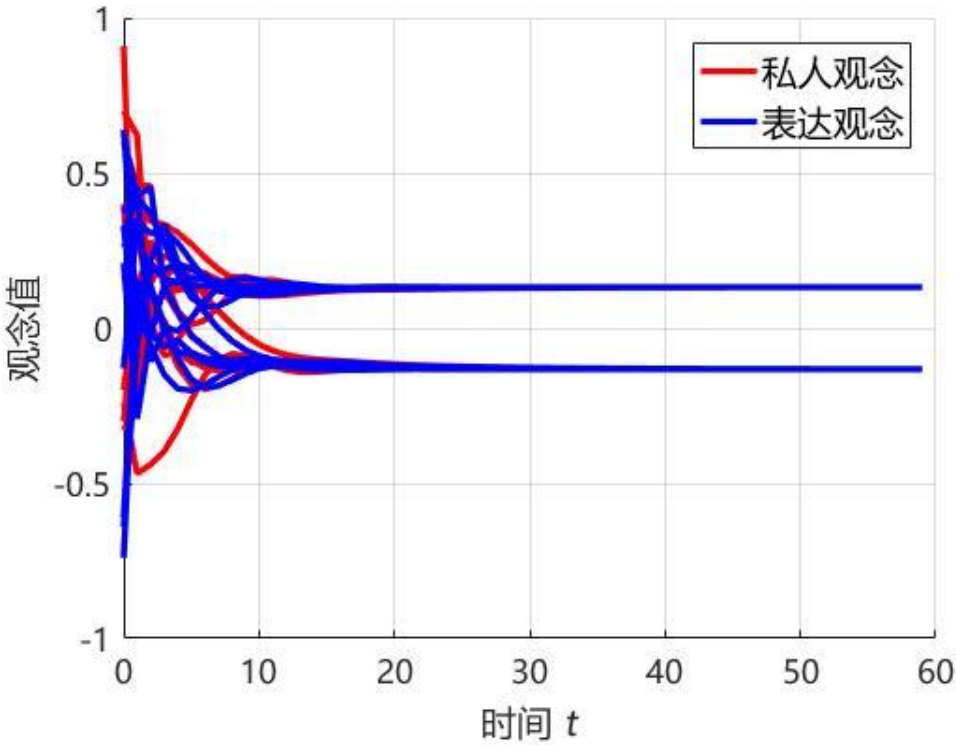


图 4-4 当所有个体都是健忘个体并且网络是结构平衡时，
个体的表达观念和私人观念的演化轨迹。

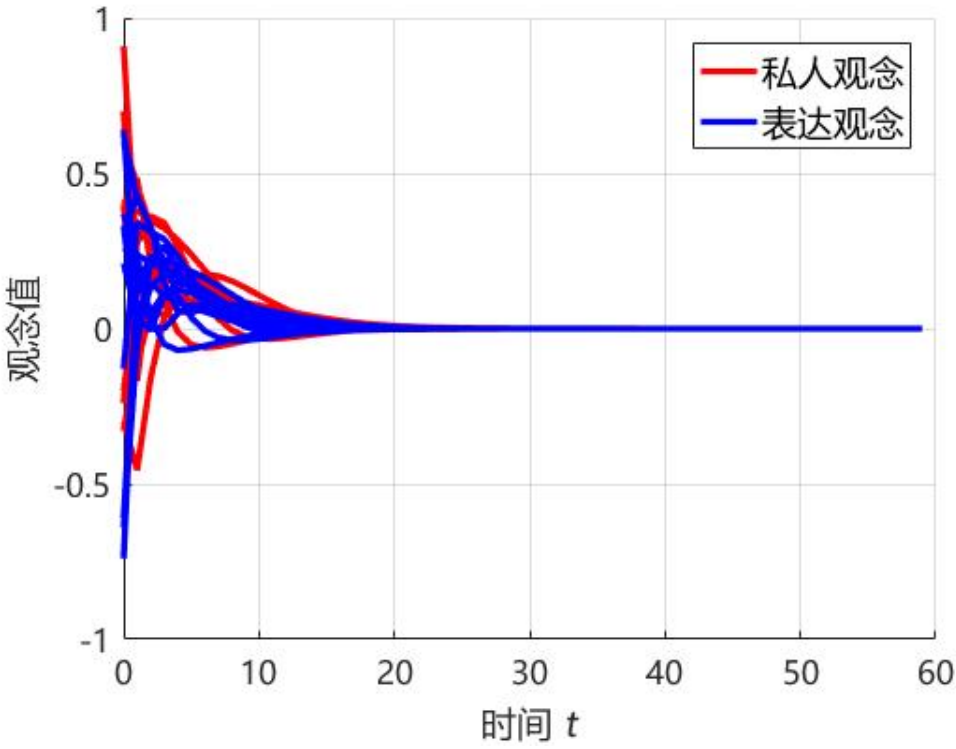


图 4-5 当所有个体都是健忘个体并且网络是结构不平衡时，
个体的表达观念和私人观念的演化轨迹。

4.4 本章小结

在这一章节中,我们研究了带有健忘个体的观念动力学模型,为了方便研究,我们将所有的个体进行重新分类,我们发现重新分类后的网络拓扑的收敛性和健忘个体有关。当执拗个体和健忘个体同时存在时,整个系统是否完全收敛取决于健忘个体。当所有健忘个体的观念是收敛时,整个系统是收敛的;否则,这个系统是发散的。当由健忘个体组成的网络是结构平衡时,健忘个体组成的网络是强连通的、非周期的,健忘个体的最终观念将达到模一致,并且他们的最终观念同时取决于他们对所有 $\sigma_i \neq 0$ 的初始私人观念和表达观念。另一方面,当由健忘个体组成的网络是结构不平衡时,在强连通的条件下,所有健忘个体的最终观念都会收敛到 0,无论他们的初始观念取什么值。也就是非健忘个体的最终观念取决于他们最初的私人观念,并且独立于他们最初表达的观念。

第5章 总结与展望

在数字化时代背景下, 信息技术的快速迭代与网络基础设施的广泛覆盖深刻改变了人类社会的沟通模式。这种变革不仅体现在信息交互方式的革新上, 更显著地反映在信息扩散效率的几何级数提升以及传播范围的指数级扩展。在此环境下, 观念动力学作为研究社会网络中个体观念演变的重要理论, 逐渐成为学术界关注的焦点。本文基于这一背景, 提出了一种特殊的观念动力学模型, 假设每个个体在观念演化过程中同时存在私人观念和表达观念。这种双重观念的设定更贴近现实, 因为个体在社交互动中往往会根据周围环境调整自己的表达方式, 而内心真实想法可能与公开表达存在差异。此外, 本文还引入了执拗个体的概念, 这些个体在观念演变过程中表现出较强的坚持性, 不易受外界影响而改变观念。执拗个体的存在使得观念演变过程更加复杂和多样化。同时, 本文还考虑了竞争机制和分歧程度对观念演变的影响, 进一步丰富了模型的实际意义。

本文的主要研究工作包括以下两个方面:

一、我们在传统 F-J 模型的基础上, 提出了一个不具有健忘个体的观念动力学模型。该模型同时考虑了私人观念、表达观念、竞争关系以及执拗个体的影响。研究发现, 无论社会网络是否结构平衡, 私人观念和表达观念总能以指数级速度快速收敛到一个稳定状态。值得注意的是, 这一稳定状态仅依赖于初始的私人观念, 而初始的表达观念在演化过程中逐渐被遗忘。为了验证理论结果的正确性, 我们通过数值仿真对模型进行了模拟, 实验结果与理论分析高度一致, 进一步证明了模型的合理性和有效性

二、我们提出了一个具有健忘个体的观念动力学模型。我们发现, 当执拗个体和健忘个体同时存在时, 整个系统是否收敛完全取决于健忘个体。当所有健忘个体的观念趋于一致时, 整个系统趋于一致; 否则, 系统是发散的。最后, 通过数值仿真对所得结果进行了数值模拟, 验证了我们的结论是正确的。

观念动力学作为一门研究公众舆论和情绪演变的学科，不仅为政府、企业和个人提供了理解社会舆论趋势的理论工具，还为其应对舆论危机提供了科学依据。尽管目前关于观念动力学的研究已取得丰硕成果，但仍有许多问题值得深入探讨和改进：

(1) 现有研究大多假设个体采用凸决策方式进行观念更新，这种方式虽然简化了模型，但在一定程度上忽略了现实社会中个体决策的复杂性。实际上，个体的决策方式往往更加多元化和非线性。此外，当前研究通常假设个体仅基于前一刻的信息进行决策，而忽略了记忆在决策中的作用。未来的研究可以探索带有记忆的决策方式，以更真实地反映个体的行为模式。

(2) 在本文中，我们仅将逻辑矩阵引入到 DeGroot 模型和 F-J 模型这两个经典观念动力学模型中。未来，我们计划将逻辑矩阵扩展到其他具有实际应用价值的观念动力学模型中，以进一步提升模型的解释力和适用性。

参考文献

- [1] Dong Y, Zhan M, Kou G, and Ding Z. A survey on the fusion process in opinion dynamics[J]. *Information Fusion*, 2018, 43: 57-65.
- [2] Chen G, Duan X, Friedkin N E, and Bullo F. Social power dynamics over switching and stochastic influence networks[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, 64(2): 582-597.
- [3] Tang Y, Qian F, Gao H, and Kurths J. Synchronization in complex networks and its application—a survey of recent advances and challenges[J]. *Annual Reviews in Control*, 2014, 38(2): 184-198.
- [4] 马振, 贾保先. 基于观点动力学的社交网络观点共识达成研究[J]. *中国传媒大学学报:自然科学版*, 2023, 30(2): 56-67.
- [5] Frasca P, Tarbouriech S, Zaccarian L. Hybrid models of opinion dynamics with opinion-dependent connectivity[J]. *Automatica*, 2019, 100: 153-161.
- [6] 刁苏蒙. 社交网络中个体交互行为和观点演化模式研究[D]. 北京交通大学, 2016.
- [7] Friedkin N E, Johnsen E C. Social influence network theory: A sociological examination of small group dynamics[M]. Cambridge University Press, 2011.
- [8] Zhang W, Han Q L, Tang Y, and Liu Y. Sampled-data control for a class of linear time-varying systems[J]. *Automatica*, 2019, 103: 126-134.
- [9] 邓舒予. 突发事件微博舆情意见领袖对网民情感倾向影响研究[D]. 哈尔滨理工大学, 2024.
- [10] 杨燚. 基于多 Agent 的社会网络社区发现方法[D]. 吉林大学, 2015.
- [11] He G, Ruan H, Wu Y, and Liu J. Opinion dynamics with competitive relationship and switching topologies[J]. *IEEE Access*, 2020, 9: 3016-3025.
- [12] 王龙, 田野, 杜金铭. 社会网络上的观念动力学[J]. *中国科学:信息科学*, 2018, 48(01): 3-23.
- [13] Wang X, Jiang B, Li B. Opinion dynamics on social networks[J]. *Acta Mathematica Scientia*, 2022, 42(6): 2459-2477.
- [14] Dong Y, Zha Q, Zhang H, Kou G, Fujita H, Chiclana F, and Herrera-Viedma E.

- Consensus reaching in social network group decision making: Research paradigms and challenges[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2018, 162: 3-13.
- [15] Wu X, Tang Y, Cao J, and Mao X. Stability analysis for continuous-time switched systems with stochastic switching signals[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 63(9): 3083-3090.
- [16] Zhang W, Han Q L, Tang Y, and Liu Y. Sampled-data control for a class of linear time-varying systems[J]. *Automatica*, 2019, 103: 126-134.
- [17] DeGroot M H. Reaching a consensus[J]. *Journal of the American Statistical association*, 1974, 69(345): 118-121.
- [18] Bauso D, Cannon M. Consensus in opinion dynamics as a repeated game[J]. *Automatica*, 2018, 90: 204-211.
- [19] Zou Y. Bipartite consensus of opinion dynamics through delivering credible information[J]. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2020, 8(2): 781-790.
- [20] Wu H, Zeng Y, Ma J, Yang L, Huang Q, and Liu Z. On the control of opinion dynamics in social networks[J]. *Physica A. Statistical Mechanics and its Applications*, 2014, 409: 183-198.
- [21] Shao J, Zheng W X, Shi L, and Cheng Y. Bipartite tracking consensus of generic linear agents with discrete-time dynamics over cooperation–competition networks[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, 51(11): 5225-5235.
- [22] Ren W, Beard R W. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies[J]. *IEEE Transactions on automatic control*, 2005, 50(5): 655-661.
- [23] Friedkin N E, Johnsen E C. Social influence and opinions[J]. *Journal of mathematical sociology*, 1990, 15(3-4): 193-206.
- [24] Friedkin N E, Johnsen E C. Social Influence Networks and Opinion Change[J]. *Advances in Group Processes*, 1999, 16(1) : 1-29.
- [25] Bindel D, Kleinberg J, Oren S. How bad is forming your own opinion?[J]. *Games and Economic Behavior*, 2015, 92: 248-265.
- [26] Ghaderi J, Srikant R. Opinion dynamics in social networks with stubborn agents:

- Equilibrium and convergence rate[J]. Automatica, 2014, 50(12): 3209-3215.
- [27] Ravazzi C, Frasca P, Tempo R, and Ishii H. Ergodic randomized algorithms and dynamics over networks[J]. IEEE transactions on control of network systems, 2014, 2(1): 78-87.
- [28] Jia P, Mirtabatabaei A, Friedkin N E, and Bullo F. Opinion dynamics and the evolution of social power in Influence networks[J]. SIAM Rev, 2015, 57: 367-397.
- [29] Rainer H, Krause U. Opinion dynamics and bounded confidence: models, analysis and simulation[J]. 2002: 1-33.
- [30] Dittmer J C. Consensus formation under bounded confidence[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2001, 47(7): 4615-4621.
- [31] Blondel V D, Hendrickx J M, Tsitsiklis J N. On the 2R conjecture for multi-agent systems[C]//2007 European Control Conference (ECC). IEEE, 2007: 874-881.
- [32] Jia P, Mirtabatabaei A, Friedkin N E, and Bullo F. Opinion dynamics and the evolution of social power in influence networks[J]. SIAM review, 2015, 57(3): 367-397.
- [33] Xu Z, Liu J, Başar T. On a modified DeGroot-Friedkin model of opinion dynamics[C]//2015 American Control Conference (ACC). IEEE, 2015: 1047-1052.
- [34] Xia W, Liu J, Johansson K H, and Basar T. Convergence rate of the modified DeGroot-Friedkin model with doubly stochastic relative interaction matrices[C]//2016 American Control Conference (ACC). IEEE, 2016: 1054-1059.
- [35] Chen X, Liu J, Xu Z, and Baar T. Distributed evaluation and convergence of self-appraisals in social networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2016, 62(1): 291-304.
- [36] Zhu Y, Li S, Ma J, and Zheng Y. Bipartite consensus in networks of agents with antagonistic interactions and quantization[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2018, 65(12): 2012-2016.
- [37] Altafini C. Consensus problems on networks with antagonistic interactions[J]. IEEE transactions on automatic control, 2012, 58(4): 935-946.
- [38] Xue D, Hirche S, Cao M. Evolution of social power over influence networks

- containing antagonistic interactions[J]. *Information Sciences*, 2020, 540: 449- 468.
- [39] Meng Z, Shi G, Johansson K H, Cao M, and Hong Y. Behaviors of networks with antagonistic interactions and switching topologies[J]. *Automatica*, 2016, 73: 110-116.
- [40] Lin X, Jiao Q, Wang L. Competitive diffusion in signed social networks: A game-theoretic perspective[J]. *Automatica*, 2020, 112: 108656.
- [41] Ye M, Qin Y, Govaert A. An influence network model to study discrepancies in expressed and private opinions[J]. *Automatica*, 2019, 107: 371-381.
- [42] Waters N L, Hans V P. A jury of one: Opinion formation, conformity, and dissent on juries[J]. *Journal of Empirical Legal Studies*, 2009, 6(3): 513-540.
- [43] Karlin S. *A first course in stochastic processes*[M]. Academic press, 2014.
- [44] Horn R A, Johnson C R. *Matrix analysis*[M]. Cambridge university press, 2012.
- [45] Liu J, Chen X, Başar T, and Belabbas M A. Exponential convergence of the discrete-and continuous-time Altafini models[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(12): 6168-6182.
- [46] Sain M K. *Matrix Mathematics: Theory, Facts, and Formulas with Application to Linear Systems Theory* [Book review; DS Bernstein][J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(8): 1539-1540.
- [47] Rugh W J. *Linear system theory*[M]. Prentice-Hall, Inc., 1996.
- [48] Seneta E. *Non-negative matrices and Markov chains*[M]. Springer Science & Business Media, 2006.

硕士期间发表的论文

- [1] 袁飞, 丁汝葭, 张雪康, 何广. 具有执拗个体和群体压力的观念动力学模型 [J]. 安徽工程大学学报, 2025. (已录用)

致谢

三年一瞬，聚散有时，我的研究生生涯迎来了尾声。回顾安工程的这三年，思绪良多，在这三年，我学会了很多，成长了很多，认识了很多朋友，受到了许许多多人的帮助，在此，我将向他们表达最真挚的感谢。

“令公桃李满天下，何用堂前更种花。”首先，我要将最诚挚的谢意献给我的导师何广教授。何老师不仅为人风趣端庄、学识渊博，而且还在我的学业生活中给予我莫大的鼓励与帮助。从论文选题的反复推敲，到论文内容的精心设计，再到论文撰写的每一个公式每一段话，何老师始终对我倾注着极大的热情和耐心。而每当我取得一点进步时，何老师又会及时给予肯定，激励我继续前行。在这三年的相处过程中，何老师的每一句教诲，每一次行动都将在我的人生中熠熠生辉使我受益终身。

在此我更郑重地感谢朱一新、章冉以及张婧菲等实验室的师兄师姐们，是他们在初入实验室时给予我无私的帮助和指导，让我能够快速融入师门并学习到专业的知识。我也要感谢我的同门杨露和丁汝葭，在研究生三年的学习生涯中，我们共同度过了难忘的三年时光。同时我也要感谢我的室友王博、申亚港，是他们让我在安徽工程大学找到了家的温暖与关怀。最后，感谢实验室的李中原、张心怡、汪伟桀等，三年时光，有你们相伴实乃我之荣幸。

在此我也要特别感谢我的父母，你们始终如一地支持我、鼓励我，是我最坚强的后盾。你们让我能够心无旁骛地投入到学习和科研中，也让我在面对挫折时能够勇敢前行。

“路漫漫其修远兮，吾将上下而求索。”最后，我要感谢所有参与我论文评审和答辩的专家教授，感谢你们在百忙之中抽出时间审阅我的论文，并提出宝贵的意见和建议。

此时此刻，千言万语汇成一句：感谢研究生期间所有的老师与同学，感谢你们在我的研究生生涯中的陪伴！

2025 年 4 月 30 日