

分类号：F840.67
密 级：公开

单位代码：10363
学 号：2211010116

题 目 部分信息与损失厌恶下 DC 型养老金最优
投资策略

英文并列

题 目 Optimal Investment Strategy of DC Pension
Plan under Partial Information and Loss
Aversion

论 文 作 者	<u>韩雪伟</u>
校 内 导 师	<u>夏登峰 教授</u>
校 外 导 师	<u>季学俊</u>
专 业 学 位 类 别	<u>金融</u>
研 究 方 向 (领 域)	<u>金融风险管理</u>

论文答辩日期：2024 年 5 月 29 日

安徽工程大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：我恪守学术道德，崇尚严谨学风。所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已明确注明和引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品及成果的内容。论文为本人亲自撰写，我对所写的内容负责，并完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

学位论文作者签名：韩雪伟
日期：2024年5月31日

安徽工程大学学位论文版权使用授权书

学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅或借阅。本人授权安徽工程大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保密 ☐，在 _____ 年解密后适用本版权书。

本学位论文属于

不保密 ☒。

学位论文作者签名：韩雪伟

指导教师签名：



日期：2024 年 5 月 31 日

日期：2024 年 5 月 31 日

部分信息与损失厌恶下 DC 型养老金最优投资策略

摘 要

养老保险基金是社会保障的重要组成部分,可以保障养老金计划参与者退休之后的基本生活.在 DC 养老金计划中,参与者的缴费是确定的,一般为工资的固定比例,管理机构承担的风险极小,所以大多数国家一般采用 DC 养老金计划.随着人口老龄化和生育率下降,养老金管理机构面临较大的支付压力.养老金的投资管理,影响着养老金参与者退休之后的生活水平,因此养老金的投资问题成为业界及学术界关注的热点课题.本文主要研究 DC 养老金的最优资产配置问题.

首先,本文研究部分信息和损失厌恶下的 DC 养老金的最优投资问题.假定基金经理把资金投资于无风险资产、通胀指数债券和股票,目标是在 S 型效用函数下实现终端财富效用最大化,其中股票预期收益率是随机的,服从均值回复过程.由于金融市场是不完备的,本文通过滤波技术将其转化为可观测的完备市场,最后应用鞅方法求解,得到最优投资策略,并通过数值算例考察不同目标值对最优投资策略的影响.结果表明,当目标值较高时,基金经理投资较高比例的资金于风险资产,投资较少比例的资金于无风险资产.

其次,本文在部分信息和遗产动机约束下对 DC 养老金期望效用最大化的投资策略进行研究.假设基金经理将资金投资于无风险资产、风险资产和通胀指数债券,目标是在二次效用函数下实现终端财富效用最大化.在实际投资过程中,由于基金经理并不能提前观测股票的预期收益率,本文假设股票预期收益率是随机的,并通过滤波技

术将其转化为可根据已知历史信息进行估计的估计值. 最后, 通过蒙特卡洛方法模拟最优投资策略的样本路径, 分析遗产动机约束对最优投资策略的影响, 结果表明, 较低的遗产约束使得基金经理对财富的风险厌恶程度较低, 基金经理把大量资金配置在股票上, 而随着遗产要求的增加, 基金经理配置在股票和通胀指数债券的资金比例逐渐下降, 反映了基金经理的风险偏好在逐渐下降, 说明遗产约束限制了基金经理的风险偏好.

关键词: 部分信息, 损失厌恶, 遗产动机, 鞅方法, 拉格朗日对偶理论

OPTIMAL INVESTMENT STRATEGY OF DC PENSION PLAN UNDER PARTIAL INFORMATION AND LOSS AVERSION

ABSTRACT

Pension funds are an important part of social security and provide for the basic needs of pension plan participants after retirement. In DC pension plan, participants' contributions are determined, usually as a fixed percentage of their salaries, and the risk undertaken by the administrators is minimal, which is why DC pension plans are generally used in most countries. As the population ages and the fertility rate declines, pension administrators face greater pressure to make payments. The investment management of pension affects the living standard of pensioners after retirement, so the investment of pension has become a hot topic in the industry and academia. This paper focuses on the optimal asset allocation of DC pension.

Firstly, this paper investigates the optimal investment of DC pension under partial information and loss aversion. It is assumed that the fund manager invests the funds in risk-free assets, inflation-indexed bonds and equities, with the objective of maximising the terminal wealth utility under an S-shaped utility function, in which the expected return on equities is stochastic and obeys a mean-reverting process. Since the financial market is incomplete, this paper transforms it into an observable complete market by filtering technique, and finally applies the harness method to solve the problem to obtain the optimal investment strategy, and examines the effect

of different objective values on the optimal investment strategy by numerical examples. The results show that when the objective value is higher, the fund manager invests a higher proportion of funds in risky assets and a smaller proportion of funds in risk-free assets.

Secondly, this paper investigates the investment strategy for maximising the expected utility of DC pension under partial information and bequest motivation constraints. It is assumed that the fund manager invests funds in risk-free assets, risky assets and inflation-indexed bonds with the objective of maximising the utility of terminal wealth under a quadratic utility function. In the actual investment process, since the fund manager is not able to observe the expected stock returns in advance, this paper assumes that the expected stock returns are stochastic and transforms them into estimates that can be estimated based on the known historical information through filtering techniques. Finally, the Monte Carlo method is used to simulate the sample path of the optimal investment strategy and analyses the impact of the bequest motivation constraints on the optimal investment strategy. The results show that lower bequest constraints make fund manager less risk averse to wealth and fund manager allocate a large amount of funds to stocks, while the proportion of funds allocated to stocks and inflation-indexed bonds gradually decreases as the bequest requirement increases, reflecting that as the bequest requirement increases, the proportion of funds allocated to equities and inflation-indexed bonds declines, reflecting a gradual decline in the manager's risk appetite, suggesting that the bequest constraint limits the manager's risk appetite.

Han Xuewei (Finance)

Supervised by Xia Dengfeng

KEY WORDS: partial information, loss aversion, bequest motivation, martingale method, lagrange duality theory

目录

第 1 章 绪论	1
1.1 研究背景与研究意义.....	1
1.2 国内外研究现状.....	2
1.3 创新点.....	4
第 2 章 预备知识	6
2.1 利率模型.....	6
2.2 风险资产模型.....	6
2.3 效用函数.....	7
第 3 章 部分信息与损失厌恶下 DC 养老金最优投资问题研究	9
3.1 优化问题.....	9
3.2 求解优化问题.....	11
3.3 数值算例.....	20
3.4 本章小结.....	22
第 4 章 部分信息和遗产动机约束下 DC 养老金最优投资问题研究	23
4.1 模型构建.....	23
4.2 模型求解.....	27
4.3 数值算例.....	35
4.4 本章小结.....	37
第 5 章 总结与展望	38
5.1 结论.....	38
5.2 展望.....	38
参考文献	39
附录	42
硕士期间发表的论文	45
致谢	46

第 1 章 绪论

1.1 研究背景与研究意义

国家统计局数据显示,截至 2023 年底,我国 60 岁及以上人口 29697 万人,占全国人口的 21.1%,比 2022 年底提高了 1.3%;我国 65 岁及以上人口 21676 万人,占全国人口的 15.4%,比 2022 年底提高了 0.5%。按照国际社会对人口结构的划分,我国已进入人口老龄化社会,老年人养老问题逐渐成为社会和谐稳定的重要影响因素。作为社会保障体系的重要组成部分,养老保险基金可以保障养老金计划参与者退休之后的基本生活。然而,人口老龄化速度加快和生育率下降使得养老金管理机构面临较大的支付压力。如何实现养老保险基金的保值增值,成为制约养老保险基金发挥社会保障作用的关键。

目前收益确定型养老金(DB 养老金)和缴费确定型养老金(DC 养老金)是养老保险基金的主要形式。在 DB 养老金计划中,参与者退休后的收益是确定的,管理机构承担极大的风险。在 DC 养老金计划中,参与者的缴费是确定的,一般为工资的固定比例,管理机构承担的风险较小。DC 养老金计划之所以变得流行,是因为在养老金累积阶段主要是养老金计划参与者承担风险,它有利于养老金管理机构专注于养老金账户的保值增值,这也符合目前人口老龄化加快的趋势。DC 养老金的最优投资问题,影响着养老金参与者退休之后的生活水平,因此研究不同投资环境下 DC 养老金的最优资产配置问题具有重要的应用价值。

在实际投资过程中,由于基金经理不能提前观测股票的预期收益率,假设股票预期收益率不可观测更符合现实情况,即在部分信息背景下研究股票的价格过程,部分信息的引入使得 DC 养老金的投资背景变得更贴近现实。基金经理在做投资决策时会受到目标值的影响,这个目标值会因不同的人而不同,他们把终端财富高于目标值视为收益,把终端财富低于目标值视为损失。基金经理的经济行为因收益或损失而不同,而 S 型效用函数恰好能刻画基金经理的损失厌恶行为。因此,在部分信息与损失厌恶背景下研究 DC 养老金的最优资产配置问题具有重

要的理论意义和现实意义.

1.2 国内外研究现状

由于 DC 养老金的投资期限较长,在 DC 养老金模型中除了要考虑金融资产的波动风险外,还要考虑其他因素带来的风险,比如利率风险与通胀风险.目前在 DC 养老金模型中考虑利率风险与通胀风险的研究成果十分丰富. Boulier 等^[1]在 DC 养老金模型中引入了最低保障约束,并假设最低保障取决于养老金计划参与者退休时的随机利率水平,由 Vasicek 利率模型来刻画. Deelstra 等^[2]在 Boulier 等^[1]的基础上,将 Vasicek 利率模型模型拓展为更复杂的仿射利率模型,并考虑了初始财富和随机缴费对终端财富效用最大化的影响. Gao 等^[3]假设利率服从几何布朗运动,运用随机动态规划方法得到了对数效用最大化的 DC 养老金投资策略.后来, Gao 等^[4]又进一步研究了幂效用和指数效用下最优投资策略,并假设风险资产的价格过程满足 CEV 模型. Guan 等^[5]同时考虑了利率风险和股票波动率风险,假设利率服从仿射利率模型,股票价格过程服从 Heston 模型,并在最低保障约束下得到了最大化终端财富的 CRRA 效用的显式解.后来 Guan 等^[6]在 Guan 等^[5]的基础上假设股票价格过程服从 OU 过程,股票预期收益率服从不同的均值回复过程,运用随机动态规划方法得到了均值方差准则下的有效前沿和均衡投资策略. Han 等^[7]研究了通胀风险与最低保障约束下 DC 养老金的最优资产配置问题,假设名义利率服从 CIR 利率模型,并用随机动态规划方法得到了 CRRA 效用下的最优投资策略.常浩等^[8]假设利率服从随机仿射利率模型,风险资产价格服从 Heston 随机波动率模型,利用随机动态规划方法研究了利率风险和股票波动率风险对 DC 养老金最优资产配置问题的影响.

也有不少学者研究了其他因素对 DC 养老金最优投资决策的影响.史爱玲等^[9]研究了不同经济环境下遗产水平对最优投资策略的影响,给定遗产水平,当经济环境恶化时,投资于风险资产的比例逐渐增加.付渴等^[10]假设风险资产服从跳扩散模型,在均值方差准则下研究了随机工资和死亡力对 DC 养老金最优投资决策的影响.蔡晶晶等^[11]研究了 VaR 约束对最优终端财富的影响,数值模拟显示, VaR 约束可以限制经济环境恶化状态下的损失,进而保护养老金账户的终端财富值.王远野等^[12]考虑了养老金计划参与者意外死亡时的权益保护,在 DC 养老金

模型中引入了考虑死亡率的保费返还条款.

DC 养老金计划的优化目标主要有两种,一种是在均值方差准则下实现终端财富的期望收益最大、波动性最小,另一种是实现终端财富的期望效用最大化.目前在 DC 养老金模型中以均值方差准则为优化目标的研究成果比较丰富. He 等^[13]在均值方差准则下研究了保费返还条款,利用变分不等式将均值方差随机最优控制问题转化为马尔可夫时间不一致随机控制问题,并对比了有无保费返还条款条件下的最优投资策略. Yao 等^[14]在均值方差框架下了死亡率风险和随机工资对 DC 养老金最优投资策略的影响. 后来有一些学者进一步研究了均值方差准则下时间一致策略. Wu 等^[15]在广义均值方差准则下研究了考虑死亡率风险的时间一致的均衡投资策略. Sun 等^[16]假设风险资产的价格过程服从跳扩散模型,并引入了保费返还条款,在博弈论框架下研究了 DC 养老金的预先承诺策略和均衡投资策略. Li 等^[17]在博弈论框架下研究了具有违约风险和保费返还条款的 DC 养老金时间一致的均衡投资策略. Zhang 等^[18]在随机利率和随机波动率环境下研究了均值方差准则下 DC 养老金的时间一致最优投资问题. 李方超等^[19]在博弈论框架下,利用随机动态规划方法研究了同时考虑随机工资、通胀风险和保费返还条款的 DC 养老金最优时间一致策略. 王佩等^[20]在 DC 养老金模型中考虑了衍生品投资对最优投资策略的影响,在均值-方差准则下得到了有衍生品投资和无衍生品投资情形下的均衡投资策略,结果表明,有衍生品投资的模型总是优于无衍生品投资的模型.

DC 养老金的研究一般关注终端财富的期望效用最大化,所以基金经理被假定为对终端财富是严格风险厌恶的,特别是在临近退休时,养老金计划是非常厌恶风险的,而有些基金经理可能是风险偏好者,因此配置了更多的资金在股票市场. 考虑到不同基金经理对风险持有不同的风险厌恶程度,基于预期理论的 S 型效用函数为具有不同风险厌恶程度的基金经理优化投资策略提供了解决方案. Berkelaar 等^[21]在连续情形和损失厌恶背景下考虑两个效用函数的最优投资策略,并用鞅方法求出了显式解. Blake 等^[22]率先研究了损失厌恶系数的变化对 DC 养老金管理的影响,发现当累积财富高于目标值时基金经理会减少股票投资,当累积财富低于目标值时会增加股票投资. 而 Guan 等^[23]首先研究了在 S 型效用函数下考虑不同风险因素的 DC 养老金最优投资问题. 此后,有很多文献在 Guan 等^[19]的基础上做了更深入的研究. Chen 等^[24]在 Guan 等^[23]的基础上考虑了通货膨胀

风险和最低保障,该模型假设退休时的终端财富能够保障退休后的个人生活;王传玉等^[25]在 Guan 等^[23]的基础上研究了通货膨胀背景下的 DC 养老金最优投资问题,通过把名义财富转化为实际财富,剔除了通胀风险的影响;Dong 等^[26]则在 Guan 等^[23]的基础上研究了组合保险与卖空约束对最优资产投资策略的影响;Dong 等^[27]后来又从交易约束和 VaR 约束的角度做了进一步的研究.吕文欣等^[28]研究了在不同薪酬机制、VaR 约束和损失厌恶下 DC 养老金的最优投资问题.

除了损失厌恶,部分信息也逐渐成为组合选择中的重要主题.在上述 DC 养老金的最优投资问题研究中,通常假设模型参数为常数,这样的假设意味着基金经理在做投资决策时已经知道关于股票的完整信息,然而这是不现实的.在实际的金融市场中,基金经理只能掌握股票价格的历史信息,对股票未来的价格走势知之甚少. Calisto 等^[29]研究了在部分信息背景下考虑通胀风险和死亡率风险的 DC 养老金最优投资策略.王佩等^[30]假设股票的预期收益率由一个服从均值回复过程的预测因子预测,通过滤波技术和动态规划原理得到了不完全信息和模糊厌恶下 DC 养老金在相对风险厌恶(CRRA)效用函数下的最优投资策略的解析式.此后,王佩等^[31]在上述框架的基础上进一步研究了基于死亡率的保费返还条款,并利用随机控制方法得到了均衡投资策略.

通过上述文献,可以发现关于 DC 养老金最优投资策略的研究是目前学术研究的热点之一,通胀风险、利率风险、波动率风险、部分信息、损失厌恶、遗产约束等因素都对 DC 养老金的最优投资问题有重要影响,本文将基于以上因素,以损失厌恶 S 型效用函数和二次效用函数为优化目标,研究 DC 养老金模型的资产配置问题.

1.3 创新点

在 DC 养老金模型中,一般选择股票代替风险资产,大多数研究假设股票预期收益率是可观测的,然而在实际投资中,基金经理并不能提前知道股票预期收益率.本文假设股票预期收益率是不可观测的,即在部分信息背景下研究股票的价格过程.

(1) 同时考虑部分信息和损失厌恶约束下 DC 养老金的最优投资问题.由于基金经理对高于目标值的收益和低于目标值的损失有不同的风险偏好,因而损

失厌恶下的最优投资问题不再是标准的凹优化问题,需要用鞅方法求解最优投资策略.与完备信息下的 DC 养老金模型相比,部分信息的引入使得 DC 养老金的投资背景变得更贴近现实,相应的求解难度也随之增加.

(2) 同时在部分信息与遗产动机约束下实现 DC 养老金最优资产配置.在风险资产模型中假设股票预期收益率不可观测,同时考虑通胀的影响,在工资的价格过程中考虑通胀风险和风险资产波动率的影响,同时引入遗产动机约束,使得 DC 养老金模型更贴合实际.

第 2 章 预备知识

本章介绍 DC 养老金模型中常用的资产价格过程和效用函数.

2.1 利率模型

在 DC 养老金累积阶段, 利率风险是影响养老金收益的主要影响因素, 常见的利率模型有如下三种.

(1) Vasicek 利率模型

设 $W(t)$, $t \geq 0$ 是布朗运动, 利率过程 $R(t)$ 满足如下随机微分方程:

$$dR(t) = (\alpha - \beta R(t))dt + \sigma dW(t),$$

其中, α , β 和 σ 是正数, α 表示利率的均值回复水平, β 表示利率的均值回复速率.

(2) CIR 利率模型

设 $W(t)$, $t \geq 0$ 是一维标准布朗运动, 利率过程 $R(t)$ 满足如下随机微分方程:

$$dR(t) = (\alpha - \beta R(t))dt + \sigma \sqrt{R(t)} dW(t),$$

其中, α , β 和 σ 是正数, 满足 $2\alpha \geq \sigma^2$. 条件 $2\alpha \geq \sigma^2$ 表示对任意的 $t \in [0, T]$, $R(t) \geq 0$.

(3) 仿射利率模型

$$dR(t) = (\alpha - \beta R(t))dt + \sqrt{k_1 R(t) + k_2} dW(t),$$

其中, α , β , k_1 和 k_2 是正数, $\sqrt{k_1 R(t) + k_2}$ 表示利率的波动率. 当 $k_1 = 0$ 时, 仿射利率模型退化为 Vasicek 利率模型; 当 $k_2 = 0$ 时, 仿射利率模型退化为 CIR 利率模型.

2.2 风险资产模型

股票是 DC 养老金模型中最常见的风险资产, 目前有多种模型来刻画股票的价格过程, 本节主要介绍三种常用的股票模型.

(1) 几何布朗运动模型

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu_s dt + \sigma_s dW(t),$$

其中, μ_s 表示股票价格的平均收益率, σ_s 表示股票价格的波动率.

(2) CEV 模型

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + kS^\beta(t)dW(t),$$

其中, 波动率 $kS^{\beta-1}(t)$ 是股价的递减函数. 当 $\beta=0$ 时, CEV 模型退化为几何布朗运动模型.

(3) Heston 模型

假设在风险中性测度下, 股价过程服从如下随机微分方程:

$$\begin{cases} dS(t) = \mu_s S(t)dt + \sqrt{L(t)}S(t)dW_s(t), \\ dL(t) = (a - bL(t))dt + \sigma\sqrt{L(t)}dW_L(t), \end{cases}$$

其中, μ_s 是常数, a , b 和 σ 是正数, 满足 $2a \geq \sigma^2$, $W_s(t)$ 和 $W_L(t)$ 是风险中性测度下相关的一维标准布朗运动, 满足 $Cov(W_s(t), W_L(t)) = \rho t$. 条件 $2a \geq \sigma^2$ 表示对任意的 $t \in [0, T]$, $L(t) \geq 0$.

2.3 效用函数

本节主要介绍常见的六种效用函数.

(1) 幂效用函数

$$u(x) = \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma},$$

其中, $\gamma > 0$, $\gamma \neq 1$.

(2) 指数效用函数

$$u(x) = -\frac{1}{q}e^{-qx},$$

其中, $q > 0$ 表示常数绝对风险规避系数.

(3) 对数效用函数

$$u(x) = \beta \log x,$$

其中, $x > 0$, $\beta > 0$.

(4) S 型效用函数

$$u(x) = \begin{cases} -A(\theta - x)^{\gamma_1}, & x \leq \theta, \\ B(x - \theta)^{\gamma_2}, & x > \theta, \end{cases}$$

其中, A 和 B 是正常数, $0 < \gamma_1 \leq 1$, $0 < \gamma_2 \leq 1$.

当财富低于目标值 θ 时, 效用函数是凸的, 当财富高于目标值 θ 时效用函数是凹的. 当目标值 θ 非常高时, 基金经理看到账户损失, 会成为一个风险偏好投资者.

(5) 二次效用函数

$$u(x) = x - \beta x^2,$$

其中, $x < \frac{1}{2\beta}$, $\beta > 0$. 二次效用函数类似均值方差准则, 能同时兼顾期望收益率和风险之间的关系.

(6) HARA 效用函数

$$u(x) = \frac{1-\gamma}{\gamma} \left(\frac{ax}{1-\gamma} + b \right)^{\gamma},$$

其中, $b > 0$, $\frac{ax}{1-\gamma} + b > 0$.

第3章 部分信息与损失厌恶下 DC 养老金最优投资问题研究

本章是在部分信息背景下考虑损失厌恶的 DC 养老金的最优投资问题. 假定基金经理把资金投资于无风险资产、通胀指数债券和股票, 目标是在 S 型效用函数下终端财富效用最大化, 其中股票预期收益率是随机的, 服从均值回复过程. 由于金融市场是不完备的, 我们通过滤波技术将其转化为可观测的完备市场, 最后应用鞅方法求解, 得到最优投资策略, 并对最优投资策略进行敏感性分析.

3.1 优化问题

假设 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}, P)$ 是完备概率空间, T 表示固定的投资周期, $(W_I(t), W_S(t), W_\mu(t))$ 是定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}, P)$ 上的标准布朗运动, $\{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}$ 是由 $(W_I(t), W_S(t), W_\mu(t))$ 产生的信息流. 假设基金经理在时间 $[0, T]$ 的经济行为是连续的, 没有交易成本和税收, 允许无风险借贷和卖空.

假设金融市场由无风险资产和风险资产组成. 无风险资产可投资在储蓄和通胀指数债券, 储蓄满足如下微分方程:

$$\frac{dS_0(t)}{S_0(t)} = Rdt, \quad (3.1)$$

其中, R 表示存款利率.

考虑到养老金的存续期较长, 我们引入通胀指数债券对冲通胀风险. 假设用商品价格指数衡量通胀水平, 其价格过程服从如下随机微分方程:

$$\frac{dI(t)}{I(t)} = \mu_I dt + \sigma_I dW_I(t),$$

其中, 常数 μ_I 表示商品价格指数的平均增长率, $\sigma_I > 0$ 为商品价格指数的波动率.

假设通胀指数债券的价格过程服从如下随机微分方程:

$$\frac{dB(t)}{B(t)} = rdt + \frac{dI(t)}{I(t)} = (r + \mu_I)dt + \sigma_I dW_I(t), \quad (3.2)$$

其中， r 表示实际利率，通胀指数债券的波动率与商品价格指数的波动率一致。

实际上，养老金计划参与者是将工资的固定比例缴纳到养老金账户，然而参与者的工资可能会因为职位晋升或经济环境的变化而发生变动，所以假设参与者的缴费是随机的，服从几何布朗运动：

$$\frac{dC(t)}{C(t)} = \mu_C dt + \sigma_C dW_I(t),$$

其中， μ_C 为工资的预期增长率， σ_C 为工资的波动率。

股票价格过程服从如下随机微分方程：

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu(t)dt + \sigma_S dW_S(t), \quad (3.3)$$

其中， $\mu(t)$ 是股票预期收益率， σ_S 为正常数， $W_S(t)$ 独立于 $W_I(t)$ 。因为股票预期收益率是不确定的，我们假设 $\mu(t)$ 是随机的，并服从如下随机微分方程：

$$d\mu(t) = k(\bar{\mu} - \mu(t))dt + \sigma_\mu dW_\mu(t),$$

其中， k 、 $\bar{\mu}$ 和 σ_μ 都是正常数， $\mu(t)$ 趋向于长期平均值 $\bar{\mu}$ ，且 $\text{Cov}(W_S(t), W_\mu(t)) = \rho t$ ， $W_\mu(t)$ 与 $W_I(t)$ 独立。

在实际投资中，基金经理在时刻 t 能获得的信息为可观测的商品价格指数和股票价格过程产生的信息域流 $\mathcal{G} = \{\mathcal{G}_t, 0 \leq t \leq T\}$ ，其中 $\mathcal{G}_t = \sigma\{W_I(u), W_S(u) : u \in [0, t]\}$ ， $\mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t$ 。

假设养老金账户在时刻 t 投资于通胀指数债券的资金为 $\pi_B(t)$ ，投资于股票的资金为 $\pi_S(t)$ ，而投资于无风险资产的资金为 $\pi_0(t)$ 。养老金的财富过程满足如下随机微分方程：

$$dX(t) = \pi_0(t) \frac{dS_0(t)}{S_0(t)} + \pi_B(t) \frac{dB(t)}{B(t)} + \pi_S(t) \frac{dS(t)}{S(t)} + C(t)dt. \quad (3.4)$$

将方程(3.1)，(3.2)和(3.3)代入方程(3.4)，结合 $X(t) = \pi_0(t) + \pi_B(t) + \pi_S(t)$ ，可以得到财富的明确表达式

$$\begin{aligned} dX(t) = & X(t)Rdt + \pi_B(t)[(r + \mu_I - R)dt + \sigma_I dW_I(t)] \\ & + \pi_S(t)[(\mu(t) - R)dt + \sigma_S dW_S(t)] + C(t)dt. \end{aligned} \quad (3.5)$$

基金经理在做投资决定时会受到目标值的影响，这个目标值会因不同的人而不同。他们把终端财富高于目标值视为收益，把终端财富低于目标值视为损失。

基金经理的经济行为因收益或损失而不同,然而基金经理对损失比对收益更敏感. 为了刻画基金经理对收益与损失持有不同的风险偏好,我们利用 Kahneman 等^[32]提出的 S 型效用函数来研究效用最大化问题, S 型效用函数如下:

$$U(X(T)) = \begin{cases} -A(\theta - X(T))^{\gamma_1}, & X(T) \leq \theta, \\ B(X(T) - \theta)^{\gamma_2}, & X(T) > \theta, \end{cases} \quad (3.6)$$

其中, A, B 为正常数, $0 < \gamma_1 \leq 1, 0 < \gamma_2 \leq 1$.

目标值 θ 是提前确定的基金经理对收益持风险厌恶态度,而对损失持风险偏好态度. 当终端财富 $X(T)$ 小于目标值 θ 时, $U(X(T))$ 是凸函数;当终端财富 $X(T)$ 大于目标值 θ 时, $U(X(T))$ 是凹函数.

3.2 求解优化问题

令 $\pi(t) = (\pi_B(t), \pi_S(t))$, 如果方程 (3.5) 存在唯一解, 且 $\pi(t)$ 是 $\mathcal{G}_t$ -渐近可测的, 则称 $\pi(t)$ 是一个容许策略. 基金经理的目标是在最大化原则下寻找在时间 $[0, T]$ 内满足式 (3.7) 的最优投资策略 $\pi^*(t)$, 即

$$\begin{cases} \max_{u(\cdot)} E[U(X(T))], \\ \text{s.t. } (X(t), \pi(t)) \text{ 满足式(3.6)}. \end{cases} \quad (3.7)$$

记 $\hat{\mu}(t) = E[\mu(t) | \mathcal{G}_t]$, $m(t) = E[(\mu(t) - \hat{\mu}(t))^2 | \mathcal{G}_t]$, $\hat{\mu}(t)$ 为观测信息 $\mathcal{G}_t$ 下 $\mu(t)$ 的条件期望, $m(t)$ 为 $\mu(t)$ 的条件方差. 利用文献[33]的滤波技术可得如下结果.

命题 3.1 概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上存在 $\mathcal{G}_t$ -适应的新息过程 $Z(t) = \{(Z_I(t), Z_S(t)), 0 \leq t \leq T\}$, 使商品价格指数、股票价格、股票预期收益率、通胀指数债券价格和缴费服从如下随机微分方程

$$\begin{aligned} \frac{dI(t)}{I(t)} &= \mu_I dt + \sigma_I dZ_I(t), \\ \frac{dB(t)}{B(t)} &= (r + \mu_I) dt + \sigma_I dZ_I(t), \\ \frac{dS(t)}{S(t)} &= \hat{\mu}(t) dt + \sigma_S dZ_S(t), \\ d\hat{\mu}(t) &= k(\bar{\mu} - \hat{\mu}(t)) dt + (\sigma_\mu \rho + \frac{m(t)}{\sigma_S}) dZ_S(t), \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\frac{dC(t)}{C(t)} = \mu_c dt + \sigma_c dZ_I(t), \quad (3.9)$$

其中，新息过程 $Z(t) = \{(Z_I(t), Z_S(t)), 0 \leq t \leq T\}$ 定义为

$$\begin{bmatrix} dZ_I(t) \\ dZ_S(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_I} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_S} \end{bmatrix} \times \left\{ \begin{bmatrix} \frac{dI(t)}{I(t)} \\ \frac{dS(t)}{S(t)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_I \\ \hat{\mu}(t) \end{bmatrix} dt \right\},$$

$Z_I(t)$ ， $Z_S(t)$ 是概率空间 $\mathcal{G}_t$ 上的标准布朗运动，并相互独立。令

$\Sigma(t) = \sigma_\mu \rho + \frac{m(t)}{\sigma_S}$ ，则 $\hat{\mu}(t)$ 的估计风险 $m(t)$ 服从

$$\frac{dm(t)}{dt} = -2km(t) + \sigma_\mu^2 - \Sigma^2(t).$$

于是，方程 (3.5) 可改写成以下形式：

$$\begin{aligned} dX(t) = & X(t)Rdt + \pi_B(t)[(r + \mu_I - R)dt + \sigma_I dZ_I(t)] \\ & + \pi_S(t)[(\hat{\mu}(t) - R)dt + \sigma_S dZ_S(t)] + C(t)dt. \end{aligned} \quad (3.10)$$

为了求解问题 (3.7)，我们先介绍完备市场中的定价核函数。由于金融市场是完备的，存在唯一的定价核函数 $H(t)$ 满足如下随机微分方程：

$$\frac{dH(t)}{H(t)} = -Rdt - \frac{r + \mu_I - R}{\sigma_I} dZ_I(t) - \frac{\hat{\mu}(t) - R}{\sigma_S} dZ_S(t). \quad (3.11)$$

在完备市场上可以利用鞅方法求解最优投资策略，问题 (3.7) 等价于如下带约束的优化问题，即

$$\begin{aligned} & \max_{X(T)} E[U(X(T))] \\ \text{s.t.} & \begin{cases} E[H(T)X(T) - \int_0^T H(s)C(s)ds] \leq X(0), \\ X(T) \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.12)$$

预算约束可以通过方程 (3.10) 得出，由于金融市场是完备的，所以预算约束等价于方程 (3.10)。

命题 3.2 损失厌恶效用下的最优终端财富为

$$X^{*, \lambda^*}(T) = \begin{cases} \theta + \left(\frac{\lambda^* H(T)}{B\gamma_2} \right)^{\frac{1}{\gamma_2-1}}, & H(T) < \bar{H}, \\ 0, & H(T) \geq \bar{H}, \end{cases}$$

其中, $\bar{H}$ 满足 $f(\bar{H})=0$, $f(x)=B(1-\gamma_2)(\frac{B\gamma_2}{\lambda^*x})^{\frac{\gamma_2}{1-\gamma_2}}+A\theta^{\gamma_1}-\lambda^*\theta x$, $\lambda^*>0$ 是一个关于

于预算约束的拉格朗日乘子, 并且满足 $E[H(T)X^{*,\lambda^*}(T)]-\int_0^T H(s)C(s)ds=X(0)$.

证明: 利用拉格朗日对偶理论, 可得

$$L(X(T), \lambda) = E[U(X(T))] - \lambda E[H(T)X(T)] + \lambda X(0) + \lambda E[\int_0^T H(s)C(s)ds].$$

那么, 问题 (3.12) 等价于

$$\begin{cases} \inf_{\lambda \geq 0} \sup_{X(T)} L(X(T), \lambda), \\ X(T) \geq 0. \end{cases}$$

对于固定的拉格朗日乘子 $\lambda \geq 0$, 即求解如下问题:

$$\begin{cases} \sup_{X(T)} L(X(T), \lambda), \\ X(T) \geq 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

问题 (3.13) 变成了关于 $X(T)$ 的函数问题, 可以求出 $X(T)$ 显式表达式. 求出最优解 $X^{*,\lambda}(T)$ 后, 再通过如下互补松弛条件求出 λ^* :

$$\inf_{\lambda \geq 0} L(X^{*,\lambda^*}(T), \lambda).$$

考虑如下优化问题:

$$\begin{cases} \max_{X(T)} \{E[U(X(T))] - \lambda E[H(T)X(T)]\}, \\ X(T) \geq 0. \end{cases} \quad (3.14)$$

令 $U_1(x) = -A(\theta - x)^{\gamma_1}$, $U_2(x) = B(x - \theta)^{\gamma_2}$.

当 $U(x) = U_2(x)$ 时, 问题 (3.14) 是一个凹的最优化问题, 其解为

$$X_2^{*,\lambda}(T) = \theta + \left(\frac{\lambda H(T)}{B\gamma_2} \right)^{\frac{1}{\gamma_2-1}}.$$

当 $U(x) = U_1(x)$ 时, 问题 (3.14) 是一个凸的最优化问题, 其解 $X_1^{*,\lambda}(T)$ 为 0 或 θ .

现在来比较 $X_2^{*,\lambda}(T)$ 与 $X_1^{*,\lambda}(T)$, 从而确定全局最优值. 令

$$f(H(T)) = U(X_2^{*,\lambda}(T)) - \lambda H(T)X_2^{*,\lambda}(T) - [U(X_1^{*,\lambda}(T)) - \lambda H(T)X_1^{*,\lambda}(T)] > 0,$$

那么 $X_2^{*,\lambda}(T)$ 就是最优解.

当 $X_1^{*,\lambda}(T) = \theta$ 时, $f(H(T)) = B(1-\gamma_2) \left(\frac{B\gamma_2}{\lambda H(T)} \right)^{\frac{\gamma_2}{1-\gamma_2}} > 0$ 恒成立. 因此

$X_1^{*,\lambda}(T) = \theta$ 不可能是最优解.

当 $X_1^{*,\lambda}(T) = 0$ 时,

$$f(H(T)) = B(1-\gamma_2) \left(\frac{B\gamma_2}{\lambda H(T)} \right)^{\frac{\gamma_2}{1-\gamma_2}} + A\theta^{\gamma_1} - \lambda\theta H(T).$$

显然 $H(T) < \frac{A}{\lambda}\theta^{\gamma_1-1}$ 时, $f(H(T)) > 0$.

另外, $\lim_{H(T) \rightarrow +\infty} f(H(T)) = -\infty$, $f'(H(T)) < 0$, 所以 $f(H(T)) = 0$ 在 $(\frac{A}{\lambda}\theta^{\gamma_1-1}, +\infty)$

内存在唯一解 $\bar{H}$, 当 $H(T) \geq \bar{H}$ 时, $f(H(T)) \leq 0$; 当 $H(T) < \bar{H}$ 时, $f(H(T)) > 0$.

所以问题 (3.14) 的最优解为

$$X^{*,\lambda^*}(T) = \begin{cases} \theta + \left(\frac{\lambda^* H(T)}{B\gamma_2} \right)^{\frac{1}{\gamma_2-1}}, & H(T) < \bar{H}, \\ 0, & H(T) \geq \bar{H}. \end{cases} \quad (3.15)$$

相应地, $X^{*,\lambda^*}(T)$ 也是问题 (3.13) 的解.

λ^* 的求解. 最优解 $(X^{*,\lambda^*}(T), \lambda^*)$ 满足拉格朗日对偶理论中的互补松弛条件:

$$\lambda^* E \left[\left[\theta + \left(\frac{\lambda^* H(T)}{B\gamma_2} \right)^{\frac{1}{\gamma_2-1}} \right] H(T) I_{\{H(T) < \bar{H}\}} - \int_0^T H(s) C(s) ds \right] = \lambda^* X(0).$$

当 $\lambda^* = 0$ 时, 上式恒成立. 由于 $0 < \gamma_2 < 1$, 由 (3.15) 可得, $X^{*,\lambda^*}(T) = +\infty$, $\bar{H} = +\infty$, 这种情况没有意义.

当 $\lambda^* > 0$ 时, 最优解 $(X^{*,\lambda^*}(T), \lambda^*)$ 满足如下条件:

$$E \left[\left[\theta + \left(\frac{\lambda^* H(T)}{B\gamma_2} \right)^{\frac{1}{\gamma_2-1}} \right] H(T) I_{\{H(T) < \bar{H}\}} - \int_0^T H(s) C(s) ds \right] = X(0). \quad (3.16)$$

求解式 (3.16) 即可得最优拉格朗日乘子. 综上, 最优解 $X^{*,\lambda^*}(T)$ 就是问题 (3.12) 的解.

命题 3.2 证毕.

在得到 T 时刻的最优终端财富后，我们可以得到在时间 $[0, T]$ 之间任意时刻的最优财富和投资策略.

命题 3.3 损失厌恶下基金经理在时间 $t(0 \leq t < T)$ 的最优财富为

$$\begin{aligned} X^{*, \lambda^*}(t) &= \frac{1}{H(t)} E[H(T)X^{*, \lambda^*}(T) | \mathcal{F}_t] - \int_0^T E\left[\frac{H(s)}{H(t)} C(s) | \mathcal{F}_t\right] ds \\ &= \theta \exp\left\{E\{N(t)\} + \frac{1}{2} \text{Var}\{N(t)\}\right\} \Phi(d_1(\bar{H})) \\ &\quad + \left(\frac{\lambda^* H(t)}{B\gamma_2}\right)^{\frac{1}{\gamma_2-1}} \exp\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_2-1} E\{N(t)\} + \frac{\gamma_2^2}{2(\gamma_2-1)^2} \text{Var}\{N(t)\}\right) \Phi(d_2(\bar{H})) \\ &\quad - \int_t^T C(s) \exp\left\{\left[M - \frac{\Sigma^2(s)}{4k\sigma_s^2}\right](s-t)\right\} \exp\left[E\{Q(t, s)\} + \frac{1}{2} \text{Var}\{Q(t, s)\}\right] ds, \end{aligned}$$

其中， $\Phi(\cdot)$ 表示标准正态变量的累积分布函数.

证明：财富过程（3.10）在 t 时刻的解为

$$X^{*, \lambda^*}(t) = \frac{1}{H(t)} E[H(T)X^{*, \lambda^*}(T) | \mathcal{F}_t] - \int_t^T E\left[\frac{H(s)}{H(t)} C(s) | \mathcal{F}_t\right] ds. \quad (3.17)$$

式（3.17）中第一部分是最佳终端财富 $X^{*, \lambda^*}(T)$ 在 t 时刻的折现值，第二部分表示养老金参与者在时间区间 $[t, T]$ 内缴费的折现值.

$$\frac{1}{H(t)} E[H(T)X^{*, \lambda^*}(T) | \mathcal{F}_t] = \frac{1}{H(t)} E\left[\left[H(T)\theta I_{\{H(T) < \bar{H}\}} + H(T)\left(\frac{\lambda^* H(T)}{B\gamma_2}\right)^{\frac{1}{\gamma_2-1}} I_{\{H(T) < \bar{H}\}}\right] | \mathcal{F}_t\right].$$

由定价核 $H(t)$ 的微分方程（3.11）可得， $H(T) = H(t)e^{N(t)}$,

$$\begin{aligned} N(t) &= -\left[R + \frac{1}{2}\left(\frac{r + \mu_I - R}{\sigma_I}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{R - \bar{\mu}}{\sigma_S}\right)^2\right](T-t) + \frac{R - \bar{\mu}}{\sigma_S^2}[\hat{\mu}(t) - \bar{\mu}]A_1(t, T) \\ &\quad - \frac{[\hat{\mu}(t) - \bar{\mu}]^2}{2\sigma_S^2}A_2(t, T) - \frac{1}{2\sigma_S^2} \int_t^T \Sigma^2(u)A_2(u, T)du - \frac{r + \mu_I - R}{\sigma_I}[Z_I(T) - Z_I(t)] \\ &\quad + \frac{R}{\sigma_S}[Z_S(T) - Z_S(t)] - \frac{1}{\sigma_S} \int_t^T \hat{\mu}(u)dZ_S(u) + \frac{R - \bar{\mu}}{\sigma_S^2} \int_t^T \Sigma(u)A_1(u, T)dZ_S(u) \\ &\quad - \frac{\hat{\mu}(t) - \bar{\mu}}{\sigma_S^2} e^{kt} \int_t^T \Sigma(u)e^{-ku}A_2(u, T)dZ_S(u), \end{aligned}$$

$$\text{其中, } A_1(t, T) = \frac{1 - e^{-k(T-t)}}{k}, \quad A_2(t, T) = \frac{1 - e^{-2k(T-t)}}{2k}.$$

所以 $N(t)$ 是一个正态分布随机变量，且

$$\begin{aligned}
 E\{N(t)\} &= -\left[R + \frac{1}{2} \left(\frac{r + \mu_I - R}{\sigma_I} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{R - \bar{\mu}}{\sigma_S} \right)^2 \right] (T - t) + \frac{R - \bar{\mu}}{\sigma_S^2} [\hat{\mu}(t) - \bar{\mu}] A_1(t, T) \\
 &\quad - \frac{[\hat{\mu}(t) - \bar{\mu}]^2}{2\sigma_S^2} A_2(t, T) - \frac{1}{2\sigma_S^2} \int_t^T \Sigma^2(u) A_2(u, T) du, \\
 \text{Var}\{N(t)\} &= \left[\left(\frac{r + \mu_I - R}{\sigma_I} \right)^2 + \left(\frac{R - \bar{\mu}}{\sigma_S} \right)^2 \right] (T - t) - \frac{2(R - \bar{\mu})}{\sigma_S^2} [\hat{\mu}(t) - \bar{\mu}] A_1(t, T) \\
 &\quad + \frac{[\hat{\mu}(t) - \bar{\mu}]^2}{\sigma_S^2} A_2(t, T) + \frac{1}{\sigma_S^2} A(t, T) + \frac{2(R - \bar{\mu})^2}{\sigma_S^3} B(t, T) + \frac{(R - \bar{\mu})^2}{\sigma_S^4} C(t, T) \\
 &\quad + \frac{[\hat{\mu}(t) - \bar{\mu}]^2}{\sigma_S^4} e^{2kt} E(t, T) + \frac{2[\hat{\mu}(t) - \bar{\mu}]^2}{\sigma_S^3} e^{2kt} N(t, T) - \frac{2(R - \bar{\mu})}{\sigma_S^3} [\hat{\mu}(t) - \bar{\mu}] e^{kt} G(t, T) \\
 &\quad - \frac{2(R - \bar{\mu})}{\sigma_S^4} [\hat{\mu}(t) - \bar{\mu}] e^{kt} H(t, T),
 \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned}
 A(t, T) &= \int_t^T \Sigma^2(u) A_2(u, T) du, \\
 B(t, T) &= \int_t^T \Sigma(u) A_1(u, T) du, \\
 C(t, T) &= \int_t^T \Sigma^2(u) A_1^2(u, T) du, \\
 E(t, T) &= \int_t^T e^{-2ku} \Sigma^2(u) A_2^2(u, T) du, \\
 G(t, T) &= \int_t^T e^{-ku} \Sigma(u) [A_1(u, T) + A_2(u, T)] du, \\
 H(t, T) &= \int_t^T e^{-ku} \Sigma^2(u) A_1(u, T) A_2(u, T) du, \\
 N(t, T) &= \int_t^T e^{-2ku} \Sigma(u) A_2(u, T) du.
 \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{H(t)} E[H(T) \theta I_{\{H(T) < \bar{H}\}} | \mathcal{F}_t] \\
 &= \theta E \left[\exp\{N(t)\} I_{\{N(t) < \ln(\bar{H}/H(t))\}} | \mathcal{F}_t \right] \\
 &= \theta \int_{-\infty}^{\ln(\frac{\bar{H}}{H(t)})} e^x \frac{1}{\sqrt{2\pi \text{Var}\{N(t)\}}} \exp \left\{ -\frac{(x - E\{N(t)\})^2}{2\text{Var}\{N(t)\}} \right\} dx \\
 &= \theta \exp \left\{ E\{N(t)\} + \frac{1}{2} \text{Var}\{N(t)\} \right\} \Phi(d_1(\bar{H})),
 \end{aligned}$$

$$\text{其中, } d_1(\bar{H}) = \frac{\ln\left(\frac{\bar{H}}{H(t)}\right) - E\{N(t)\} - \text{Var}\{N(t)\}}{\sqrt{\text{Var}\{N(t)\}}}.$$

同理, 可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{H(t)} E \left[H(T) \left(\frac{\lambda^* H(T)}{B\gamma_2} \right)^{\frac{1}{\gamma_2-1}} I_{\{H(T) < \bar{H}\}} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= E \left[e^{N(t)} \left(\frac{\lambda^* H(t) e^{N(t)}}{B\gamma_2} \right)^{\frac{1}{\gamma_2-1}} I_{\{N(t) < \ln(\bar{H}/H(t))\}} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \left(\frac{\lambda^* H(t)}{B\gamma_2} \right)^{\frac{1}{\gamma_2-1}} \exp \left\{ \frac{\gamma_2}{\gamma_2-1} E\{N(t)\} + \frac{\gamma_2^2}{2(\gamma_2-1)^2} \text{Var}\{N(t)\} \right\} \Phi(d_2(\bar{H})), \end{aligned}$$

$$\text{其中, } d_2(\bar{H}) = \frac{\ln\left(\frac{\bar{H}}{H(t)}\right) - E\{N(t)\} - \frac{\gamma_2}{\gamma_2-1} \text{Var}\{N(t)\}}{\sqrt{\text{Var}\{N(t)\}}}.$$

由方程 (3.9) 可得

$$\begin{aligned} C(s) &= C(t) \exp \left\{ \left(\mu_L - \frac{1}{2} \sigma_L^2 \right) (s-t) + \sigma_L [Z_I(s) - Z_I(t)] \right\}, \\ E \left[\frac{H(s)}{H(t)} C(s) \mid \mathcal{F}_t \right] &= C(t) \exp \left\{ \left[M - \frac{\Sigma^2(t)}{4k\sigma_s^2} \right] (s-t) \right\} \cdot \exp \left\{ E\{Q(t,s)\} + \frac{1}{2} \text{Var}\{Q(t,s)\} \right\}, \end{aligned}$$

$$\text{其中, } M = \mu_C - \frac{1}{2} \sigma_C^2 - R - \frac{(r + \mu_I - R)^2}{2\sigma_I^2} - \frac{(R - \bar{\mu})^2}{2\sigma_s^2},$$

$$\begin{aligned} Q(t,s) &= \frac{R - \bar{\mu}}{\sigma_s^2} [\hat{\mu}(t) - \bar{\mu}] A_1(t,s) - \frac{[\hat{\mu}(t) - \bar{\mu}]^2}{2\sigma_s^2} A_2(t,s) - \frac{1}{2\sigma_s^2} \int_t^s \Sigma^2(u) A_2(u,s) du \\ &\quad + \left(\sigma_C - \frac{r + \mu_I - R}{\sigma_I} \right) [Z_I(s) - Z_I(t)] + \frac{R}{\sigma_s} [Z_s(s) - Z_s(t)] - \frac{1}{\sigma_s} \int_t^s \hat{\mu}(u) dZ_s(u) \\ &\quad + \frac{R - \bar{\mu}}{\sigma_s^2} \int_t^s \Sigma(u) A_1(u,s) dZ_s(u) - \frac{\hat{\mu}(t) - \bar{\mu}}{\sigma_s^2} e^{kt} \int_t^s \Sigma(u) e^{-ku} A_2(u,s) dZ_s(u). \end{aligned}$$

$Q(t,s)$ 也是一个正态分布随机变量, 且

$$E\{Q(t,s)\} = \frac{R - \bar{\mu}}{\sigma_s^2} [\hat{\mu}(t) - \bar{\mu}] A_1(t,s) - \frac{[\hat{\mu}(t) - \bar{\mu}]^2}{2\sigma_s^2} A_2(t,s) - \frac{1}{2\sigma_s^2} A(t,s),$$

$$\begin{aligned} \text{Var}\{Q(t, s)\} = & \left[\left(\sigma_c - \frac{r + \mu_I - R}{\sigma_I} \right)^2 + \left(\frac{R - \bar{\mu}}{\sigma_s} \right)^2 \right] (s - t) - \frac{2(R - \bar{\mu})}{\sigma_s^2} [\hat{\mu}(t) - \bar{\mu}] A_1(t, s) \\ & + \frac{[\hat{\mu}(t) - \bar{\mu}]^2}{\sigma_s^2} A_2(t, s) + \frac{1}{\sigma_s^2} A(t, s) + \frac{2(R - \bar{\mu})^2}{\sigma_s^3} B(t, s) + \frac{(R - \bar{\mu})^2}{\sigma_s^4} C(t, s) \\ & + \frac{[\hat{\mu}(t) - \bar{\mu}]^2}{\sigma_s^4} e^{2kt} E(t, s) + \frac{2[\hat{\mu}(t) - \bar{\mu}]^2}{\sigma_s^3} e^{2kt} N(t, s) - \frac{2(R - \bar{\mu})}{\sigma_s^3} [\hat{\mu}(t) - \bar{\mu}] e^{kt} G(t, s) \\ & - \frac{2(R - \bar{\mu})}{\sigma_s^4} [\hat{\mu}(t) - \bar{\mu}] e^{kt} H(t, s). \end{aligned}$$

令 $D(t, s) = E \left[\frac{H(s)}{H(t)} C(s) \mid \mathcal{F}_t \right]$, 那么 $D(t, s)$ 满足下面的倒向随机微分方程:

$$\begin{cases} dD(t, s) = \frac{\partial D(t, s)}{\partial t} dt + \mu_c \frac{\partial D(t, s)}{\partial C(t)} dt + k \frac{\partial D(t, s)}{\partial \hat{\mu}(t)} [\bar{\mu} - \hat{\mu}(t)] dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 D(t, s)}{\partial \hat{\mu}^2(t)} \Sigma^2(t) dt \\ \quad + \sigma_c \frac{\partial D(t, s)}{\partial C(t)} dZ_I(t) + \frac{\partial D(t, s)}{\partial \hat{\mu}(t)} \Sigma(t) dZ_s(t), \\ D(s, s) = C(s), \quad s \geq t. \end{cases}$$

令 $F(t, T) = \int_t^T D(t, s) ds$, $F(t, T)$ 也满足如下倒向随机微分方程:

$$\begin{cases} dF(t, T) = -C(t) dt + \int_t^T \frac{\partial D(t, s)}{\partial t} ds dt + \mu_c \int_t^T \frac{\partial D(t, s)}{\partial C(t)} ds dt \\ \quad + k \int_t^T \frac{\partial D(t, s)}{\partial \hat{\mu}(t)} [\bar{\mu} - \hat{\mu}(t)] ds dt + \frac{1}{2} \int_t^T \frac{\partial^2 D(t, s)}{\partial \hat{\mu}^2(t)} \Sigma^2(t) ds dt \\ \quad + \sigma_c \int_t^T \frac{\partial D(t, s)}{\partial C(t)} ds dZ_I(t) + \int_t^T \frac{\partial D(t, s)}{\partial \hat{\mu}(t)} \Sigma(t) ds dZ_s(t), \\ F(T, T) = 0. \end{cases} \quad (3.18)$$

命题 3.3 证毕.

命题 3.4 在时间 $t(0 \leq t < T)$ 投资于债券和股票的最优资金分别为

$$\pi_B^*(t) = -\frac{r + \mu_I - R}{\sigma_I^2} \frac{\partial G(t, \hat{\mu}(t), H(t))}{\partial H(t)} H(t) - \frac{\sigma_c}{\sigma_I} \int_t^T \frac{\partial D(t, s)}{\partial C(t)} ds, \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \pi_s^*(t) = & -\frac{\hat{\mu}(t) - R}{\sigma_s^2} \frac{\partial G(t, \hat{\mu}(t), H(t))}{\partial H(t)} H(t) - \frac{\Sigma(t)}{\sigma_s} \frac{\partial G(t, \hat{\mu}(t), H(t))}{\partial \hat{\mu}(t)} \\ & - \frac{\Sigma(t)}{\sigma_s} \int_t^T \frac{\partial D(t, s)}{\partial \hat{\mu}(t)} ds, \end{aligned} \quad (3.20)$$

其中,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial G(t, \hat{\mu}(t), H(t))}{\partial H(t)} &= \theta \exp \left\{ E\{N(t)\} + \frac{1}{2} \text{Var}\{N(t)\} \right\} \varphi(d_1(\bar{H})) \frac{\partial d_1(\bar{H})}{\partial H(t)} \\
 &+ \left(\frac{\lambda^* H(t)}{B\gamma_2} \right)^{\frac{1}{\gamma_2-1}} \frac{1}{H(t)} \exp \left\{ \frac{\gamma_2}{\gamma_2-1} E\{N(t)\} + \frac{\gamma_2^2}{2(\gamma_2-1)^2} \text{Var}\{N(t)\} \right\} \Phi(d_2(\bar{H})) \\
 &+ \left(\frac{\lambda^* H(t)}{B\gamma_2} \right)^{\frac{1}{\gamma_2-1}} \exp \left\{ \frac{\gamma_2}{\gamma_2-1} E\{N(t)\} + \frac{\gamma_2^2}{2(\gamma_2-1)^2} \text{Var}\{N(t)\} \right\} \varphi(d_2(\bar{H})) \frac{\partial d_2(\bar{H})}{\partial H(t)}, \\
 \frac{\partial G(t, \hat{\mu}(t), H(t))}{\partial \hat{\mu}(t)} &= G(t, \hat{\mu}(t), H(t)) \left[\frac{\partial E\{N(t)\}}{\partial \hat{\mu}(t)} + \frac{\partial \text{Var}\{N(t)\}}{\partial \hat{\mu}(t)} \right] \\
 &+ \theta \exp \left\{ E\{N(t)\} + \frac{1}{2} \text{Var}\{N(t)\} \right\} \varphi(d_1(\bar{H})) \frac{\partial d_1(\bar{H})}{\partial \hat{\mu}(t)} \\
 &+ \left(\frac{\lambda^* H(t)}{B\gamma_2} \right)^{\frac{1}{\gamma_2-1}} \exp \left\{ \frac{\gamma_2}{\gamma_2-1} E\{N(t)\} + \frac{\gamma_2^2}{2(\gamma_2-1)^2} \text{Var}\{N(t)\} \right\} \varphi(d_2(\bar{H})) \frac{\partial d_2(\bar{H})}{\partial \hat{\mu}(t)}, \\
 \frac{\partial D(t, s)}{\partial C(t)} &= \frac{D(t, s)}{C(t)},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial D(t, s)}{\partial \hat{\mu}(t)} &= D(t, s) \left\{ \frac{1}{\sigma_s^4} [\hat{\mu}(t) - \bar{\mu}] e^{2kt} E(t, s) + \frac{2[\hat{\mu}(t) - \bar{\mu}]}{\sigma_s^3} e^{2kt} N(t, s) - \frac{(R - \bar{\mu})}{\sigma_s^3} e^{kt} G(t, s) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{(R - \bar{\mu})}{\sigma_s^4} e^{kt} H(t, s) \right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H(t) &= \exp \left\{ - \left[R + \frac{1}{2} \left(\frac{r + \mu_I - R}{\sigma_I} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{R - \bar{\mu}}{\sigma_s} \right)^2 \right] t - \frac{r + \mu_I - R}{\sigma_I} Z_I(t) + \frac{R}{\sigma_s} Z_s(t) \right. \\
 &\quad + \frac{R - \bar{\mu}}{\sigma_s^2} [\hat{\mu}(0) - \bar{\mu}] A_1(0, t) - \frac{[\hat{\mu}(0) - \bar{\mu}]^2}{2\sigma_s^2} A_2(0, t) - \frac{1}{2\sigma_s^2} \int_0^t \Sigma^2(u) A_2(u, t) du \\
 &\quad - \frac{1}{\sigma_s} \int_0^t \hat{\mu}(u) dZ_s(u) + \frac{R - \bar{\mu}}{\sigma_s^2} \int_0^t \Sigma(u) A_1(u, t) dZ_s(u) \\
 &\quad \left. - \frac{\hat{\mu}(0) - \bar{\mu}}{\sigma_s^2} \int_0^t \Sigma(u) e^{-ku} A_2(u, t) dZ_s(u) \right\},
 \end{aligned}$$

$$\hat{\mu}(t) = \bar{\mu} + (\hat{\mu}(0) - \bar{\mu}) e^{-kt} + e^{-kt} \int_0^t e^{ku} \Sigma(u) dZ_s(u),$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

证明:

令 $G(t, \hat{\mu}(t), H(t)) = \frac{1}{H(t)} E[H(T) X^{*, \lambda^*}(T) | \mathcal{F}_t]$, 根据方程(3.8), (3.11), (3.18),

$dX^{*, \lambda^*}(t)$ 的显式形式为

$$\begin{aligned}
dX^{*,\lambda^*}(t) = & \Delta dt - \frac{\partial G(t, \hat{\mu}(t), H(t))}{\partial H(t)} \frac{r + \mu_I - R}{\sigma_I} H(t) dZ_I(t) \\
& - \sigma_C \int_t^T \frac{\partial D(t, s)}{\partial C(t)} ds dZ_I(t) - \frac{\partial G(t, \hat{\mu}(t), H(t))}{\partial H(t)} \frac{\hat{\mu}(t) - R}{\sigma_S} H(t) dZ_S(t) \quad (3.21) \\
& + \frac{\partial G(t, \hat{\mu}(t), H(t))}{\partial \hat{\mu}(t)} \Sigma(t) dZ_S(t) - \int_t^T \frac{\partial D(t, s)}{\partial \hat{\mu}(t)} \Sigma(t) ds dZ_S(t),
\end{aligned}$$

其中, Δ 表示与最优投资策略无关的函数, 比较式 (3.10) 和方程 (3.21) 扩散项的系数, 即可得式 (3.19) 和 (3.20)。

命题 3.4 证毕.

3.3 数值算例

本节应用蒙特卡洛方法寻找不同损失厌恶水平下的最优投资策略, 参考文献 [31] 的假定, 假设股票的预期收益率 $\mu(t)$ 及其估计 $\hat{\mu}(t)$ 都等于其长期均值 $\bar{\mu}$, 模型中使用的参数设置如下.

表 3-1 参数表

参数	R	r	k	$\bar{\mu}$	μ_I	μ_C	μ_S	σ_I	σ_S
取值	0.05	0.03	0.3	0.3	0.02	0.02	0.03	0.3	0.3
参数	σ_C	ρ	A	B	T	μ_0	C_0	x_0	H_0
取值	0.2	0.5	2.25	1	40	0.02	0.15	1	1

假设损失厌恶参数 $\gamma_1 = 0.2$ 和 $\gamma_2 = 0.2$ 为损失和收益的曲率参数. 图 1、图 2 和图 3 揭示了当目标值 θ 的变化对最优投资策略的影响.

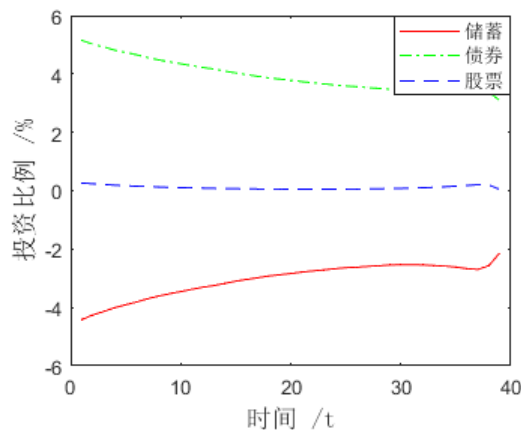


图 3-1 $\theta=1$ 时的最优投资策略

图 1 展示了目标值 $\theta=1$ 时的最优投资策略的变化趋势, 在初始时刻基金经理拥有初始财富 1, 并且收到连续的缴费, 养老金账户的财富必然高于 1. 由于目标值 $\theta=1$, 因此基金经理在积累期是风险厌恶的, 并表现为一般意义上最大化 CRRA 效用的基金经理, 基金经理有极大的动力实现财富的保值增值. 因此, 基金经理在期初通过借入大量资金, 投资在了通胀指数债券上, 只配置了大约 20% 的资金在股票上, 并随着退休日的临近逐渐降低股票的资金比例, 并减持了大约一半的通胀指数债券偿还借入的资金. 与文献[23]中掌握完全信息的基金经理相比, 只掌握部分信息的基金经理投资了更多的资金在债券上, 投资了较少的资金在股票上, 反映了部分信息背景下的基金经理在目标值 θ 较低时有更高的风险厌恶程度.

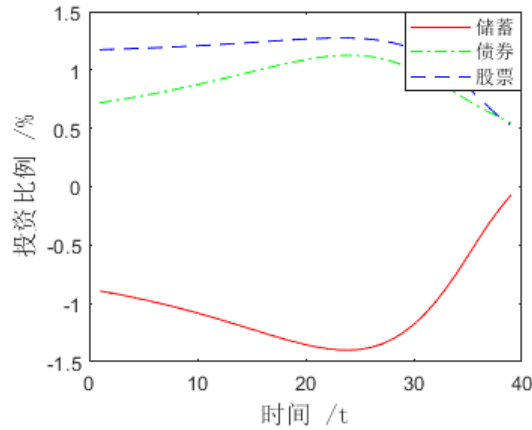


图 3-2 $\theta=10$ 时的最优投资策略

图 2 展示了目标值 $\theta=10$ 时的最优投资策略的变化趋势. 因为目标值并不是很高, 加上收到连续的缴费, 基金经理有能力实现终端财富高于 $\theta=10$, 而且风险厌恶系数 $\gamma_2=0.2$ 是比较小的, 基金经理对财富的风险厌恶程度较低, 不过投资过程中表现出了复杂的投资行为. 在前 25 年, 基金经理配置了较多的资金在股票和通胀指数债券上, 并借入更多的资金投资股票和通胀指数债券, 且投资比例逐渐增加, 而在此后的 15 年里不断卖出股票和通胀指数债券, 并偿还先前借入的资金, 随着退休日的临近投资在股票和通胀指数债券的资金比例降低至 50% 左右.

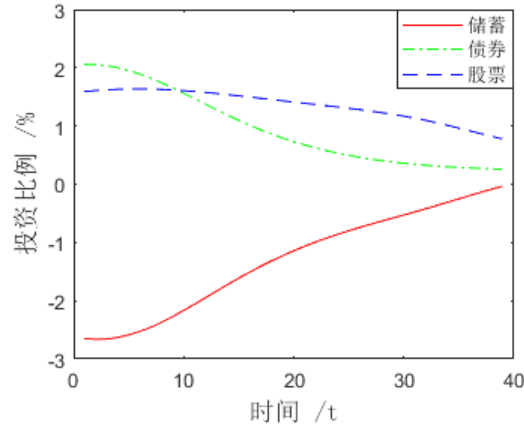
图 3-3 $\theta=100$ 时的最优投资策略

图 3 展示了一个风险厌恶的基金经理的最优投资策略. 目标值 $\theta=100$ 是基金经理几乎不可能实现的, 为了实现财富的保值增值, 基金经理在期初时刻借入了较多资金投资通胀指数债券和股票, 所以基金经理是风险偏好的. 在之后的时间里基金经理逐渐降低了通胀指数债券和股票的投资比例, 但股票的投资比例下降较慢, 在第 10 年时股票的投资比例首次超过了通胀指数债券, 并维持在较高的水平上, 在临近退休日时还持有 70%左右的股票. 当目标值 θ 较高时, 相较于文献[23]中掌握完全信息的基金经理, 掌握部分信息的基金经理较难实现高于目标值的收益. 为了最大化终端财富, 基金经理有动机提高风险偏好, 将更多资金投资于风险资产.

3.4 本章小结

本文在部分信息背景下研究了基于 S 型效用函数的 DC 养老金的最优投资问题. 首先把养老基金投资于无风险资产、通胀指数债券和股票, 利用滤波技术把部分信息转化为完全信息, 然后利用鞅方法与拉格朗日对偶理论求解最优投资策略. 最后通过数值算例分析, 发现模型参数的设置能够刻画基金经理的投资行为, 具有一定的研究价值. 由于鞅的性质决定了模型不能太复杂, 本文的模型设定相对简单, 接下来可以考虑李娟等^[34]在半鞅理论框架下的研究方法, 考虑更贴近现实背景的模型设定, 以扩充现有研究成果.

第4章 部分信息和遗产动机约束下 DC 养老金最优投资问题研究

与以往 DC 养老金研究不同的是,本章是在部分信息和遗产动机约束研究 DC 养老金最优资产配置. 假设金融市场由储蓄、通胀指数债券和股票组成,目标是在二次效用函数下实现终端财富效用最大化,其中股票预期收益率是随机的,服从均值回复过程. 由于金融市场是不完备的,我们通过滤波技术将其转化为可观测的完备市场,最后应用鞅方法求解,得到最优投资策略,并对最优投资策略进行敏感性分析,并给出经济学意义下的解释.

4.1 模型构建

假设 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}, P)$ 是一个带流的完备概率空间, $\mathcal{F}_t$ 表示在时间 t 之前可获得的信息流,养老金计划在时刻 0 开始,退休时刻是时刻 T , $(W_I(t), W_S(t), W_\mu(t))$ 是定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}, P)$ 上的标准布朗运动. 假设基金经理在时间 $[0, T]$ 的经济行为是连续的.

假设金融市场由储蓄、通胀指数债券和股票组成. 无风险资产(即储蓄)满足如下方程:

$$\frac{dS_0(t)}{S_0(t)} = Rdt, \quad (4.1)$$

其中, R 是常数,代表名义收益率.

由于养老金计划时间较长,我们考虑随机通货膨胀,并用商品价格指数 $I(t)$ 的价格过程表示通胀水平, $I(t)$ 满足如下方程:

$$\frac{dI(t)}{I(t)} = \mu_I dt + \sigma_I dW_I(t), \quad (4.2)$$

其中,常数 μ_I 表示商品价格指数的平均增长率, $\sigma_I > 0$ 为商品价格指数的波动率.

假设通胀指数债券的价格过程服从如下随机微分方程:

$$\frac{dB(t)}{B(t)} = rdt + \frac{dI(t)}{I(t)} = (r + \mu_I)dt + \sigma_I dW_I(t), \quad (4.3)$$

其中, $r > 0$ 表示实际利率.

假设金融市场中的股票服从如下随机微分方程:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu(t)dt + \sigma_S [\rho_{IS} dW_I(t) + \overline{\rho_{IS}} dW_S(t)], \quad (4.4)$$

其中, $\mu(t)$ 是股票预期收益率, $\sigma_S > 0$ 为常数, 股票价格受通胀风险、股票预期收益率和股票波动率的影响, $\rho_{IS} \in [-1, 1]$ 表示通胀指数债券和股票的相关系数, 满足 $\overline{\rho_{IS}} = \sqrt{1 - \rho_{IS}^2}$.

在部分信息环境下, 股票预期收益率 $\mu(t)$ 是不确定的, 假设 $\mu(t)$ 服从如下均值回复过程

$$d\mu(t) = k(\bar{\mu} - \mu(t))dt + \sigma_\mu dW_\mu(t),$$

其中, k 、 $\bar{\mu}$ 和 σ_μ 是正常数, $\bar{\mu}$ 是股票收益率的平均值, σ_μ 是股票收益率的波动率, 且 $Cov(W_S(t), W_\mu(t)) = \rho t$, $W_\mu(t)$ 与 $W_I(t)$ 独立.

养老金参与者定期向养老金计划缴纳收入的一部分, 这部分增加了养老金账户的财富, 所以基金经理在设计策略时, 应该考虑来自养老金参与者的缴费情况, 我们假设养老金参与者的工资满足如下随机微分方程

$$\frac{dL(t)}{L(t)} = \mu_L dt + \sigma_L [\rho_{IL} dW_I(t) + \overline{\rho_{IL}} dW_S(t)], \quad L(0) = l_0, \quad (4.5)$$

其中, μ_L 和 σ_L 是正常数, 工资受通胀风险和股票波动的影响, $\rho_{IL} \in [-1, 1]$ 表示工资与通胀指数债券的相关系数, 满足 $\overline{\rho_{IL}} = \sqrt{1 - \rho_{IL}^2}$.

在实际投资过程中, 基金经理只能依靠进行历史信息产生的信息域流 $\mathcal{G} = \{\mathcal{G}_t, 0 \leq t \leq T\}$ 决策, 其中

$$\mathcal{G}_t = \sigma\{W_I(u), W_S(u) : u \in [0, t]\}, \quad \mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t.$$

令

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 \\ \sigma_S \rho_{IS} & \sigma_S \overline{\rho_{IS}} \end{bmatrix},$$

$$\eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r + \mu_I - R}{\sigma_I} \\ \frac{1}{\rho_{IS}} \left(\frac{\mu(t) - R}{\sigma_S} - \frac{\rho_{IS}(r + \mu_I - R)}{\sigma_I} \right) \end{bmatrix},$$

$$\|\eta\|^2 = \frac{(r + \mu_I - R)^2}{\sigma_I^2} + \frac{1}{\rho_{IS}^2} \left(\frac{\mu(t) - R}{\sigma_S} - \frac{\rho_{IS}(r + \mu_I - R)}{\sigma_I} \right)^2.$$

假定 $\|\eta\| > 0$ ，其中 $\|\cdot\|$ 在本文中表示向量的模。

假设养老金参与者的缴费率为固定值 c ，投资在通胀指数债券、股票和储蓄的比例分别为 $\pi_B(t)$ 、 $\pi_S(t)$ 和 $1 - \pi_B(t) - \pi_S(t)$ ，则养老金的财富过程 $X^\pi(t)$ 满足如下随机微分方程

$$\begin{cases} dX(t) = X(t) \{ Rdt + \pi^T(t) \sigma [\eta dt + dW(t)] \} + cL(t)dt, \\ X(0) = x_0, \end{cases} \quad (4.6)$$

其中， $\pi(t) = [\pi_B(t), \pi_S(t)]^T$ ， $W(t) = [W_I(t), W_S(t)]^T$ 。

在现实生活中，大部分养老金参与者有一定的遗产要求，用 θ 表示，为了便于建模，假设 θ 为养老金计划参与者在死亡时的遗产折现到在退休时的现值， θ 满足如下条件：

$$X^\pi(T) \geq \theta. \quad (4.7)$$

定义 4.1 若 $\pi = \{\pi(t) : t \in [0, T]\}$ 被称为容许解，如果

- (i) 对任意的 $t \in [0, T]$ ， $\pi(t)$ 关于 $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ 可测；
- (ii) $\int_0^T [(X^\pi(t)\pi_B(t))^2 + (X^\pi(t)\pi_S(t))^2] dt < +\infty$ ；
- (iii) $X^\pi(t)$ 满足

$$X^\pi(t) + cE_t \left[\int_t^T L(s) \frac{H(s)}{H(t)} ds \right] \geq 0, \quad (4.8)$$

其中， $E_t[\cdot] = E[\cdot | \mathcal{F}_t]$ 是给定 $\mathcal{F}_t$ 在 P 下的条件期望。 $A = \{\pi(t) \in [0, \infty], 0 \leq t \leq T\}$ 是可容许策略集。

本章优化的目标是在二次效用函数下实现终端财富的期望效用最大，即

$$\begin{cases} \max_{\pi(t) \in A} E[U(Y^\pi(T))], \\ \text{s.t. } \pi \text{ 满足 (4.6)(4.7)}, \end{cases} \quad (4.9)$$

其中，效用函数采用二次效用，即 $U(x) = x - \gamma x^2$ ， $x < \frac{1}{2\gamma}$ ， $\gamma > 0$ 。

在实际投资过程中，基金经理并不能提前知道股票预期收益率 $\mu(t)$ 。基金经理只能依靠进行历史信息产生的信息域流 $\mathcal{G} = \{\mathcal{G}_t, 0 \leq t \leq T\}$ 估计 $\mu(t)$ 的值，然后利用估计值 $\hat{\mu}(t)$ 来选择最优投资策略。记 $\hat{\mu}(t) = E[\mu(t) | \mathcal{G}_t]$ 为观测信息 $\mathcal{G}_t$ 下 $\mu(t)$ 的条件期望， $m(t) = E[(\mu(t) - \hat{\mu}(t))^2 | \mathcal{G}_t]$ 为 $\mu(t)$ 的条件方差。结合 Liptser 等^[33]的滤波技术可得如下结果。

命题 4.1 概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上存在 $\mathcal{G}_t$ -适应的新息过程 $Z(t) = \{(Z_I(t), Z_S(t)), 0 \leq t \leq T\}$ ，使商品价格指数、股票价格、股票预期收益率、通胀指数债券价格和缴费服从如下随机微分方程

$$\frac{dI(t)}{I(t)} = \mu_I dt + \sigma_I dZ_I(t), \quad (4.10)$$

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \hat{\mu}(t) dt + \sigma_S dZ_S(t), \quad (4.11)$$

$$d\hat{\mu}(t) = k(\bar{\mu} - \hat{\mu}(t))dt + \left(\sigma_\mu \rho + \frac{m(t)}{\sigma_S \bar{\rho}_{IS}}\right) dZ_S(t), \quad (4.12)$$

$$\frac{dB(t)}{B(t)} = (r + \mu_I)dt + \sigma_I dZ_I(t), \quad (4.13)$$

$$\frac{dL(t)}{L(t)} = \mu_L dt + \sigma_L [\rho_{IL} dZ_I(t) + \overline{\rho_{IL}} dZ_S(t)], \quad (4.14)$$

其中，新息过程 $Z(t) = \{(Z_I(t), Z_S(t)), 0 \leq t \leq T\}$ 定义为

$$\begin{bmatrix} dZ_I(t) \\ dZ_S(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_I} & 0 \\ -\frac{\rho_{IS}}{\sigma_I \bar{\rho}_{IS}} & \frac{1}{\sigma_S \bar{\rho}_{IS}} \end{bmatrix} \times \left\{ \begin{bmatrix} \frac{dI(t)}{I(t)} \\ \frac{dS(t)}{S(t)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_I(t) \\ \hat{\mu}(t) \end{bmatrix} dt \right\},$$

$Z_I(t)$ ， $Z_S(t)$ 是概率空间 $\mathcal{G}_t$ 上的标准布朗运动，并相互独立，则 $\hat{\mu}(t)$ 的估计风险 $m(t)$ 服从

$$\frac{dm(t)}{dt} = \sigma_\mu^2 (1 - \rho^2) - 2 \left(k + \frac{\sigma_\mu \rho}{\sigma_S \bar{\rho}_{IS}} \right) m(t) - \frac{m^2(t)}{\sigma_S^2 \bar{\rho}_{IS}^2}. \quad (4.15)$$

命题 4.1 的证明与命题 3.1 的证明类似.

将方程 (4.1)、(4.10) - (4.14) 代入方程 (4.6), 可得完全信息下的财富过程

$$\begin{cases} dX(t) = X(t)\{Rdt + \pi^T(t)\sigma[\xi dt + dZ(t)]\} + cL(t)dt, \\ X(0) = x_0, \end{cases} \quad (4.16)$$

其中,

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r + \mu_I - R}{\sigma_I} \\ \frac{1}{\rho_{IS}} \left(\frac{\hat{\mu}(t) - R}{\sigma_S} - \frac{\rho_{IS}(r + \mu_I - R)}{\sigma_I} \right) \end{bmatrix}, \quad Z(t) = \begin{bmatrix} Z_I(t) \\ Z_S(t) \end{bmatrix}.$$

4.2 模型求解

引入求解问题 (4.16), 我们引入完备市场中的定价核函数 $H(t)$, $H(t)$ 满足如下随机微分方程

$$\frac{dH(t)}{H(t)} = -Rdt - \xi_1 dZ_I(t) - \xi_2 dZ_S(t). \quad (4.17)$$

在 t 时刻, 设缴费过程的现值为 $M(t)$, 则

$$M(t) = cE_t \left[\int_t^T L(s) \frac{H(s)}{H(t)} ds \right], t \in [0, T]. \quad (4.18)$$

令 $Y^\pi(t) = X^\pi(t) + M(t)$, 显然 $Y^\pi(T) = X^\pi(T)$.

引理 4.1 (i) 在 t 时刻, 缴费过程的现值满足

$$M(t) = \frac{1}{\beta} [e^{\beta(T-t)} - 1] cL(t), \quad (4.19)$$

其中, $\beta = \mu_L - R - \sigma_L \rho_{LL} \xi_1 - \sigma_L \sqrt{1 - \rho_{LL}^2} \xi_2$.

(ii) 盈余过程 $Y^\pi(t)$ 是完备的, 满足

$$dY^\pi(t) = Y^\pi(t)Rdt + [X^\pi(t)\pi^T(t)\sigma + M(t)\sigma_M^T](\xi dt + dZ(t)), \quad (4.20)$$

其中, $\sigma_M = [\sigma_L \rho_{LL} \quad \sigma_L \sqrt{1 - \rho_{LL}^2}]^T$, 并且 $H(t)Y^\pi(t)$ 是鞅.

(iii) 定义 4.1 中的约束 (8) 等价于

$$Y^\pi(T) \geq \theta. \quad (4.21)$$

证明:

$$\begin{aligned} L(s) \frac{H(s)}{H(t)} &= L(t) \exp\left\{(\mu_L - \frac{1}{2}\sigma_L^2)(s-t) + \sigma_L \rho_{IL} [Z_I(s) - Z_I(t)] + \sigma_L \overline{\rho_{IL}} [Z_S(s) - Z_S(t)]\right\} \\ &\quad \exp\left\{-(R + \frac{1}{2}\|\xi\|^2)(s-t) - \xi_1 [Z_I(s) - Z_I(t)] - \xi_2 [Z_S(s) - Z_S(t)]\right\} \\ &= L(t) \exp\left\{(\mu_L - R - \frac{1}{2}\sigma_L^2 - \frac{1}{2}\|\xi\|^2)(s-t) \right. \\ &\quad \left. + (\sigma_L \rho_{IL} - \xi_1) [Z_I(s) - Z_I(t)] + (\sigma_L \overline{\rho_{IL}} - \xi_2) [Z_S(s) - Z_S(t)]\right\} \\ &= L(t) \exp\left\{(\mu_L - R - \frac{1}{2}\sigma_L^2 - \frac{1}{2}\|\xi\|^2)(s-t) + Q_1(t, s)\right\}, \end{aligned}$$

其中,

$$Q_1(t, s) = (\sigma_L \rho_{IL} - \xi_1) [Z_I(s) - Z_I(t)] + (\sigma_L \overline{\rho_{IL}} - \xi_2) [Z_S(s) - Z_S(t)].$$

由于

$$E\{Q_1(t, s)\} = 0,$$

$$\text{Var}\{Q_1(t, s)\} = [(\sigma_L \rho_{IL} - \xi_1)^2 + (\sigma_L \overline{\rho_{IL}} - \xi_2)^2](s-t),$$

所以,

$$\begin{aligned} E\left[L(s) \frac{H(s)}{H(t)} \mid \mathcal{F}_t\right] &= E\left[L(t) \exp\left\{(\mu_L - R - \frac{1}{2}\sigma_L^2 - \frac{1}{2}\|\xi\|^2)(s-t)\right\} \exp\{Q_1(t, s)\}\right] \\ &= L(t) \exp\{(\mu_L - R - \sigma_L \rho_{IL} \xi_1 - \sigma_L \overline{\rho_{IL}} \xi_2)(s-t)\} \\ &= L(t) e^{\beta(s-t)}, \end{aligned}$$

$$M(t) = cE_t\left[\int_t^T L(s) \frac{H(s)}{H(t)} ds\right] = c\int_t^T E\left[L(s) \frac{H(s)}{H(t)} \mid \mathcal{F}_t\right] ds = cL(t) \frac{1}{\beta} [e^{\beta(T-t)} - 1],$$

其中, $\beta = \mu_L - R - \sigma_L \rho_{IL} \xi_1 - \sigma_L \overline{\rho_{IL}} \xi_2$.

对 $M(t)$ 求微分, 可得

$$\begin{aligned}
 dM(t) &= -e^{\beta(T-t)} cL(t)dt + \frac{1}{\beta} [e^{\beta(T-t)} - 1] cL(t) \\
 &= -e^{\beta(T-t)} cL(t)dt + \frac{1}{\beta} [e^{\beta(T-t)} - 1] cL(t) [\mu_L dt + \sigma_L \rho_{IL} dZ_I(t) + \sigma_L \overline{\rho_{IL}} dZ_S(t)] \\
 &= -[e^{\beta(T-t)} - 1] cL(t)dt - cL(t)dt + M(t) [\mu_L dt + \sigma_L \rho_{IL} dZ_I(t) + \sigma_L \overline{\rho_{IL}} dZ_S(t)] \\
 &= -\beta M(t)dt - cL(t)dt + M(t) [\mu_L dt + \sigma_L \rho_{IL} dZ_I(t) + \sigma_L \overline{\rho_{IL}} dZ_S(t)] \\
 &= M(t) [(\mu_L - \beta)dt + \sigma_L \rho_{IL} dZ_I(t) + \sigma_L \overline{\rho_{IL}} dZ_S(t)] - cL(t)dt \\
 &= M(t) [(R + \sigma_L \rho_{IL} \xi_1 + \sigma_L \sqrt{1 - \rho_{IL}^2} \xi_2)dt + \sigma_L \rho_{IL} dZ_I(t) + \sigma_L \overline{\rho_{IL}} dZ_S(t)] - cL(t)dt \\
 &= M(t) [(R + \sigma_L \rho_{IL} \xi_1 + \sigma_L \sqrt{1 - \rho_{IL}^2} \xi_2)dt + \sigma_M^T dZ(t)] - cL(t)dt.
 \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
 dY^\pi(t) &= dX^\pi(t) + dM(t) \\
 &= Y^\pi(t)Rdt + X^\pi(t) \{ \pi^T(t) \sigma [\xi dt + dZ(t)] \} \\
 &\quad + M(t) [(\sigma_L \rho_{IL} \xi_1 + \sigma_L \sqrt{1 - \rho_{IL}^2} \xi_2)dt + \sigma_M^T dZ(t)] \\
 &= Y^\pi(t)Rdt + X^\pi(t) \pi^T(t) \sigma [\xi dt + dZ(t)] + M(t) \sigma_M^T [\xi dt + dZ(t)] \\
 &= Y^\pi(t)Rdt + [X^\pi(t) \pi^T(t) \sigma + M(t) \sigma_M^T] [\xi dt + dZ(t)].
 \end{aligned}$$

进而

$$\begin{aligned}
 d[H(t)Y^\pi(t)] &= H(t)dY^\pi(t) + Y^\pi(t)dH(t) + dH(t)dY^\pi(t) \\
 &= H(t) \left\{ [X^\pi(t) \pi^T(t) \sigma + M(t) \sigma_M^T] [\xi dt + dZ(t)] \right\} - Y^\pi(t)H(t)\xi^T dZ(t) \\
 &\quad - H(t)\xi^T dZ(t) \left\{ [X^\pi(t) \pi^T(t) \sigma + M(t) \sigma_M^T] dZ(t) \right\} \\
 &= H(t) \left\{ [X^\pi(t) \pi^T(t) \sigma + M(t) \sigma_M^T] [\xi dt + dZ(t)] \right\} - Y^\pi(t)H(t)\xi^T dZ(t) \\
 &\quad - H(t) [X^\pi(t) \pi^T(t) \sigma + M(t) \sigma_M^T] \xi dt \\
 &= H(t) [X^\pi(t) \pi^T(t) \sigma + M(t) \sigma_M^T - Y^\pi(t)\xi^T] dZ(t),
 \end{aligned}$$

所以 $H(t)Y^\pi(t)$ 是鞅.

引理 4.1 证毕.

根据引理 4.1, 原问题 (4.9) 转化为如下的等价问题:

$$\begin{cases} \max_{\pi \in A} E[U(Y^\pi(T))], \\ s.t. \pi \text{ 满足 (6)(20)(21)(22)}. \end{cases} \quad (4.22)$$

令 $m_0 \equiv M(0)$, $x_0 \equiv X(0)$, 则问题 (4.22) 可以表示为

$$\begin{cases} \max_{Y^\pi(T)} E[U(Y^\pi(T))], \\ \text{s.t. } E[H(T)Y^\pi(T)] \leq y_0, \\ Y^\pi(T) \geq \theta, \end{cases} \quad (4.23)$$

其中, y_0 表示零时刻的盈余, $y_0 = x_0 + m_0$.

问题 (4.23) 可以通过拉格朗日乘数法求解

$$\max_{Y \geq \theta} L(Y; \lambda) = \max_{Y \geq \theta} \{E[U(Y)] - \lambda[H(T)Y - y_0]\}, \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial L(Y, \lambda)}{\partial Y} = E[U'(Y)] - \lambda H(T) = 0, \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial L(Y, \lambda)}{\partial \lambda} = y_0 - E[H(T)Y] = 0, \quad (4.26)$$

由式 (4.25) 可得

$$Y = \frac{1 - \lambda H(T)}{2\gamma}, \quad (4.27)$$

将式 (4.27) 代入到式 (4.26) 中, 可得

$$\lambda = \frac{EH(T) - 2\gamma y_0}{EH^2(T)}, \quad (4.28)$$

将式 (4.28) 代入到式 (4.27) 中, 可得:

$$Y^* = \frac{1 - \lambda H(T)}{2\gamma} = \frac{1}{2\gamma} - \frac{EH(T) - 2\gamma y_0}{2\gamma \cdot EH^2(T)} \cdot H(T), \quad (4.29)$$

记 $Y^* = \alpha - \beta H(T)$, 其中 $\alpha = \frac{1}{2\gamma}$, $\beta = \frac{EH(T) - 2\gamma y_0}{2\gamma \cdot EH^2(T)}$.

为了求解式 (4.17), 两边同时对式 (4.17) 积分, 可得

$$\int_t^T \frac{dH(s)}{H(s)} = -R(T-t) - \xi_1[Z_I(T) - Z_I(t)] - \xi_2[Z_S(T) - Z_S(t)]. \quad (4.30)$$

对 $\ln H(s)$ 应用伊藤公式

$$\begin{aligned} d \ln H(s) &= \frac{dH(s)}{H(s)} - \frac{1}{2H(s)^2} dH(s)dH(s) \\ &= \frac{dH(s)}{H(s)} - \frac{1}{2H(s)^2} H(s)^2 [-Rdt - \xi_1 dZ_I(t) - \xi_2 dZ_S(t)]^2 \\ &= \frac{dH(s)}{H(s)} - \frac{1}{2} \|\xi\|^2 ds, \end{aligned}$$

对上式两边同时积分，有 $\int_t^T d \ln H(s) = \int_t^T \frac{dH(s)}{H(s)} - \frac{1}{2} \|\xi\|^2 (T-t)$ ，将式 (4.30)

代入，可得

$$\begin{aligned} \ln \frac{H(T)}{H(t)} &= -R(T-t) - \xi_1[Z_I(T) - Z_I(t)] - \xi_2[Z_S(T) - Z_S(t)] - \frac{1}{2} \|\xi\|^2 (T-t) \\ &= -(R + \frac{1}{2} \|\xi\|^2)(T-t) - \xi_1[Z_I(T) - Z_I(t)] - \xi_2[Z_S(T) - Z_S(t)] \\ &= -(R + \frac{1}{2} \|\xi\|^2)(T-t) - \xi^T[Z(T) - Z(t)]. \end{aligned}$$

所以 $\ln \frac{H(T)}{H(t)}$ 是服从均值为 $-(R + \frac{1}{2} \|\xi\|^2)(T-t)$ ，方差为 $\|\xi\|^2 (T-t)$ 的正态分布。

相应地，可得

$$H(t) = \exp\{-(R + \frac{1}{2} \|\xi\|^2)t - \xi^T Z(t)\}. \quad (4.31)$$

引入指数鞅

$$\begin{aligned} Y_1(t) &= \exp\left\{-\frac{1}{2} \|\xi\|^2 t - \xi^T Z(t)\right\}, \\ Y_2(t) &= \exp\left\{-2 \|\xi\|^2 t - 2 \xi^T Z(t)\right\}, \end{aligned}$$

对比式 (4.31)，有

$$\begin{aligned} H(t) &= Y_1(t) e^{-Rt}, \\ H^2(t) &= Y_2(t) e^{-2Rt + \|\xi\|^2 t}. \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} EH(t) &= e^{-Rt}, \\ EH^2(t) &= e^{-2Rt + \|\xi\|^2 t}, \end{aligned}$$

所以，

$$\lambda = \frac{e^{-Rt} - 2\gamma y_0}{e^{-2Rt + \|\xi\|^2 t}}.$$

问题 (4.24) 的最优解由下面的定理给出。

定理 4.1 设 $Y^*(T)$ 为问题 (4.24) 的最优解，则

$$Y^*(T) = \begin{cases} \frac{1-2\lambda H(T)}{2\gamma}, & H \leq H_\theta, \\ \theta, & H > H_\theta. \end{cases}$$

证明：为了方便计算，用 Y 代替 $Y(T)$ ，用 H 代替 $H(T)$ ，并忽略与 Y 无关的项. 问题 (4.24) 等价于如下问题

$$\max_{Y \geq \theta} L(Y; \lambda) = \max_{Y \geq \theta} [U(Y) - \lambda H Y].$$

为了方便起见，记 $U'(x) = 1 - 2\gamma x$ 的反函数为 $I(x)$ ，即 $I(x) = \frac{1-x}{2\gamma}$.

对于固定的 $\lambda > 0$ ，作辅助函数

$$F_\lambda(x, y) = U(I(\lambda x)) - \lambda x I(\lambda x) + \lambda x y, \quad x > 0, y > 0.$$

同时对于任意的 y ，定义 $H_y = \frac{U'(y)}{\lambda}$ ，则 $F_\lambda(x, y)$ 有如下性质.

引理 A.1 设 $\lambda > 0, y > 0$ ，则函数 $F_\lambda(x, y)$

(i) 在区间 $(0, H_y)$ 关于 x 单调递减，在区间 (H_y, ∞) 关于 x 单调递增；

(ii) 在点 H_y 处取得最小值 $U(y)$ ，即 $F_\lambda(H_y, y) = U(y)$.

注意到问题 (4.24) 对应的拉格朗日函数为 $L(Y; \lambda) = U(Y) - \lambda H Y$. 给定 $\lambda > 0$ ， $L(Y; \lambda)$ 在区间 $(0, I(\lambda H))$ 上单调递增，在区间 $(I(\lambda H), +\infty)$ 上单调递减，在 $I(\lambda H)$ 处取得最大值.

下面通过比较局部最优解 $I(\lambda H)$ 和 θ 确定问题 (4.24) 的全局最优解. 以下分 $I(\lambda H) \geq \theta$ 和 $I(\lambda H) < \theta$ 两种情况讨论.

当 $I(\lambda H) \geq \theta$ 时，即 $H \leq \frac{U'(\theta)}{\lambda} = H_\theta$ ， $U(I(\lambda H)) - \lambda H I(\lambda H) \geq U(\theta) - \lambda H \theta$.

所以，当 $H \leq H_\theta$ 时， $Z^* = I(\lambda H)$ 为全局最优解.

当 $I(\lambda H) < \theta$ 时，即 $H > H_\theta$ ， $U(I(\lambda H)) - \lambda H I(\lambda H) < U(\theta) - \lambda H \theta$.

所以，当 $H > H_\theta$ 时， $Z^* = \theta$ 为全局最优解.

$$Y^*(T) = \begin{cases} \frac{1 - \lambda H(T)}{2\gamma}, & H \leq H_\theta, \\ \theta, & H > H_\theta. \end{cases}$$

定理 4.1 证毕.

根据定理 4.1, 利用鞅方法可求得任意时刻的盈余.

定理 4.2 时刻 $t \in [0, T)$ 的盈余为

$$\begin{aligned} Y^*(t) &= E_t \left[\frac{H(T)}{H(t)} \frac{1 - \lambda H(T)}{2\gamma} I_{\{H \leq H_\theta\}} \right] + E_t \left[\frac{H(T)}{H(t)} \theta I_{\{H > H_\theta\}} \right] \\ &= \frac{Q(t, 1)}{2\gamma} \Phi(d(t, 1, H_\theta, H(t))) - \frac{\lambda H(t) Q(t, 2)}{2\gamma} \Phi(d(t, 2, H_\theta, H(t))) \\ &\quad + \theta [1 - Q(t, 1) \Phi(d(t, 1, H_\theta, H(t)))], \end{aligned}$$

其中, $I_{\{\cdot\}}$ 表示示性函数, $\Phi(\cdot)$ 表示一个标准正态变量的累积分布函数.

证明: 由引理 4.1 知 $H(t)Y(t)$ 是鞅, 故对任意的 $t < T$, 有

$$Y^*(t) = E_t \left[\frac{H(T)}{H(t)} Y^*(T) \right].$$

由于 $\ln \frac{H(T)}{H(t)} = -(r + \frac{1}{2} \|\xi\|^2)(T-t) - \xi^T [W(T) - W(t)]$ 服从正态分布, 均值为 $-(r + \frac{1}{2} \|\xi\|^2)(T-t)$, 方差为 $\|\xi\|^2 (T-t)$, 则对任意 α, β , 有

$$E_t \left[\left(\frac{H(T)}{H(t)} \right)^\alpha I_{\{H(T) \leq \beta\}} \right] = Q(t, \alpha) \Phi(d(t, \alpha, \beta, H(t))), \quad (4.32)$$

其中,

$$\begin{aligned} Q(t, \alpha) &= e^{-\alpha(r + \frac{1}{2} \|\lambda\|^2)(T-t) + \frac{\alpha^2}{2} \|\lambda\|^2 (T-t)}, \\ d(t, \alpha, \beta, H(t)) &= \frac{\log \frac{\beta}{H(t)} + (r + \frac{1}{2} \|\xi\|^2)(T-t)}{\|\xi\| \sqrt{T-t}} - \alpha \|\xi\| \sqrt{T-t}. \end{aligned}$$

利用 (4.32), 可得到

$$\begin{aligned}
 & E_t \left[\frac{H(T)}{H(t)} \frac{1 - \lambda H(T)}{2\gamma} I_{\{H \leq H_\theta\}} \right] \\
 &= \frac{1}{2\gamma} E_t \left[\frac{H(T)}{H(t)} I_{\{H \leq H_\theta\}} \right] - \frac{\lambda H(t)}{2\gamma} E_t \left[\left(\frac{H(T)}{H(t)} \right)^2 I_{\{H \leq H_\theta\}} \right] \quad (4.33)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\gamma} Q(t, 1) \Phi(d(t, 1, H_\theta, H(t))) - \frac{\lambda H(t)}{2\gamma} Q(t, 2) \Phi(d(t, 2, H_\theta, H(t))),$$

$$E_t \left[\frac{H(T)}{H(t)} \theta I_{\{H > H_\theta\}} \right] = \theta Q(t, 1) [1 - \Phi(d(t, 1, H_\theta, H(t)))]. \quad (4.34)$$

由式 (4.33)、(4.34)，可得

$$\begin{aligned}
 Y^*(t) &= \frac{1}{2\gamma} Q(t, 1) \Phi(d(t, 1, H_\theta, H(t))) - \frac{\lambda H(t)}{2\gamma} Q(t, 2) \Phi(d(t, 2, H_\theta, H(t))) \\
 &\quad + \theta Q(t, 1) [1 - \Phi(d(t, 1, H_\theta, H(t)))].
 \end{aligned}$$

定理 4.2 证毕.

对 $Y^*(t)$ 应用伊藤公式求微分，经过简单计算，可得到时刻 t 的最优投资策略，见下面的定理.

定理 4.3 时刻 $t \in [0, T]$ 的最优投资策略为

$$\begin{aligned}
 \pi_1(t) &= \frac{(\sigma_I^{-1} \overline{\rho_{IS}} \xi_1 - \sigma_S^{-1} \rho_{IS} \xi_2)}{\rho_{IS}} \left(\frac{1 - \lambda H_\theta}{2\gamma} - \theta \right) \frac{Q(t, 1) \varphi(d(t, 1, H_\theta, H(t)))}{\|\xi\| \sqrt{T-t} X^{\pi^*}(t)} \\
 &\quad - M(t) \sigma_L \frac{\sigma_I^{-1} \overline{\rho_{IS}} \rho_{IL} - \sigma_S^{-1} \rho_{IS} \sqrt{1 - \rho_{IL}^2}}{X^{\pi^*}(t) \rho_{IS}^2}, \quad (4.35)
 \end{aligned}$$

$$\pi_2(t) = \left(\frac{1 - \lambda H_\theta}{2\gamma} - \theta \right) \frac{Q(t, 1) \varphi(d(t, 1, H_\theta, H(t)))}{\|\xi\| \sqrt{T-t} X^{\pi^*}(t)} \frac{\sigma_S^{-1} \xi_2}{\rho_{IS}} - \frac{M(t) \sigma_S^{-1} \sigma_L \sqrt{1 - \rho_{IL}^2}}{X^{\pi^*}(t) \rho_{IS}^2}. \quad (4.36)$$

证明：由于

$$\begin{aligned}
 & \lambda H(t) Q(t, 2) \Phi(d(t, 2, H_\theta, H(t))) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ \ln(\lambda H_\theta) - r(T-t) - \frac{1}{2} \left(\frac{\ln \frac{H_\theta}{H(t)} + (r + \frac{1}{2} \|\xi\|^2)(T-t)}{\|\xi\| \sqrt{T-t}} - \|\xi\| \sqrt{T-t} \right)^2 \right\} \\
 &= \lambda H_\theta Q(t, 1) \Phi(d(t, 1, H_\theta, H(t))),
 \end{aligned}$$

则

$$Y^*(t) = \left(\frac{1 - \lambda H_\theta}{2\gamma} - \theta \right) Q(t, 1) \Phi(d(t, 1, H_\theta, H(t))) + \theta Q(t, 1).$$

对 $Y^*(t)$ 进行微分, 有

$$\begin{aligned} dY^*(t) &= \left(\frac{1 - \lambda H_\theta}{2\gamma} - \theta \right) d[Q(t, 1) \Phi(d(t, 1, H_\theta, H(t)))] + \theta d[Q(t, 1)] \\ &= \Delta dt + \left(\frac{1 - \lambda H_\theta}{2\gamma} - \theta \right) Q(t, 1) \varphi(d(t, 1, H_\theta, H(t))) \frac{\xi^T}{\|\xi\| \sqrt{T-t}} dZ(t) \end{aligned} \quad (4.37)$$

其中, Δ 表示与扩散项无关的函数.

通过比较式 (4.37) 和式 (4.20) 的扩散项, 可得最优投资策略式 (4.35) 和式 (4.36).

定理 4.3 证毕.

4.3 数值算例

本节通过敏感性分析去探讨最优投资策略的经济行为, 因为最优投资策略是随机的, 我们通过蒙特卡洛方法模拟最优投资策略的样本路径, 分析部分信息与完全信息下最优投资策略的变化, 以及遗产动机约束对最优投资策略的影响. 为了简化数值模拟算法, 我们令 $m(t)$ 等于长期均值 m . 具体参数取值如下.

表 4-1 参数表

参数	R	r	μ_I	σ_I	γ	T	μ_S	σ_S	ρ_{IS}	k
取值	0.02	0.03	0.033	0.2	0.4	40	0.065	0.4	0.5	0.3
参数	$\bar{\mu}$	σ_μ	ρ	μ_L	σ_L	ρ_{IL}	L_0	x_0	m_0	c
取值	0.3	0.4	0.5	0.1	0.36	0.6	1	1	1	0.08

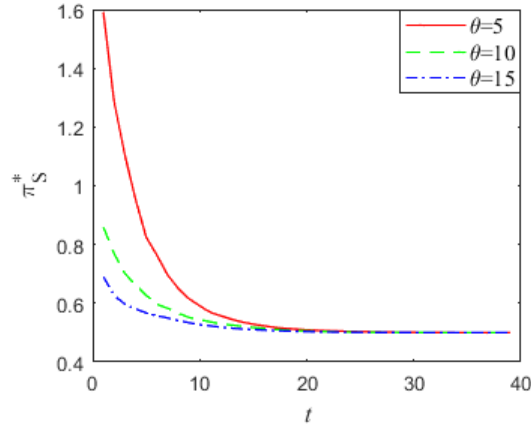
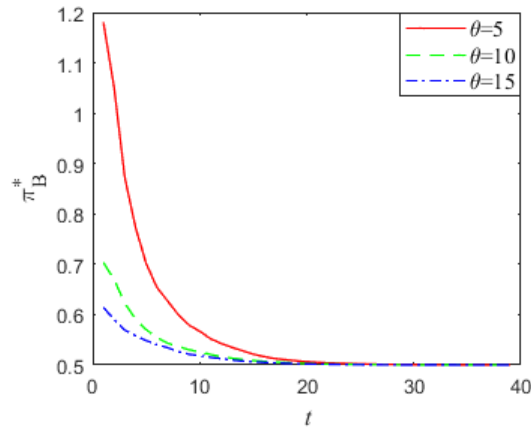
图 4-1 θ 对最优投资策略 $\pi_s^*(t)$ 的影响图 4-2 θ 对最优投资策略 $\pi_B^*(t)$ 的影响

图 1 和图 2 展现了不同的遗产要求对股票和通胀指数债券的最优投资比例的影响。因为基金经理收到连续的缴费，养老金账户必然能实现高于 5 的财富积累，因此，较低的遗产要求使得基金经理对财富的风险厌恶程度较低，基金经理把大量资金配置在股票和通胀指数债券上。正如图 1 和图 2 所展现的，较高的遗产要求使得基金经理降低了风险资产的配置比例，在初始时刻，当遗产要求从 5 增加至 15 时，基金经理配置在股票上的资金比例从 160%降低至 70%，在通胀指数债券的资金比例从 120%降低至 60%。而随退休时刻的临近，三种遗产要求下的股票和通胀指数债券的资金配置比例逐渐降低至 50%附近。

正如图 1 和图 2 所展现的，投资在股票和通胀指数债券的资金比例是逐渐下降的。在某些情况下，遗产要求并不是很高，基金经理有能力实现，为了实现目标，基金经理会做出激进的投资决策。在初始时刻，基金经理配置在股票上的资金比例较高，然后随着养老金账户中资金的增加，投资在股票上的资金比例逐渐

下降. 临近退休时, 配置在股票和通胀指数债券的资金比例稳定在 50%左右.

为了最大化终端财富, 基金经理在股票和通胀指数债券的资金配置比例之和大于 1, 基金经理总是要借入一定比例的现金, 从初始时刻的-250%减少至退休时刻的 0.

4.4 本章小结

本章是在部分信息与遗产动机约束背景下考虑 DC 养老金在二次效用函数下的风险管理. 基金经理可以把资金配置在储蓄、通胀指数债券和股票上实现财富的保值增值. 模型中的利率、股票预期收益率和缴费是随机的, 所以基金经理的目标是实现金融资产的最优配置.

基于鞅方法, 求得了各个时刻的最优资金比例, 通过敏感性分析发现, 随着遗产要求的增加, 基金经理配置在股票和通胀指数债券的资金比例逐渐下降, 反映了基金经理的风险偏好在逐渐下降, 说明遗产约束限制了基金经理跌幅的风险偏好.

第5章 总结与展望

5.1 结论

首先, 本文研究了部分信息与遗产约束对 DC 养老金最优投资问题的影响. 通过对 S 型效用函数的目标值进行敏感性分析发现, 基金经理对超过目标值的收益持风险厌恶态度, 对低于目标值的损失持风险偏好态度. 当基金经理的目标值增加时, 基金经理实现目标值的可能性是逐步下降的, 为了实现目标, 基金经理会提高风险偏好, 配置更多的资金在股票和通胀指数债券上. 遗产约束限制了基金经理的投资策略, 当养老金参与者的遗产要求较低时, 基金经理的风险偏好较高, 在养老金计划的初始阶段, 基金经理配置了较高比例的资金在股票上. 而随着遗产要求的增加, 基金经理逐步降低了股票和通胀指数债券的资金配置比例.

其次, 本文在模型中引入了部分信息, 由于股票预期收益率是不观测的, 基金经理在做投资决定时并不知道未来股票的收益率, 需要用可观测的历史数据来预测未来的股票收益率, 相应地需要运用卡尔曼滤波技术估计. 通过对比部分信息与完全信息下的最优投资策略, 可以发现部分信息背景下的基金经理在风险资产上的投资比例明显低于完全信息下的投资比例, 说明信息损失带来的不确定性提高了基金经理的风险厌恶程度.

5.2 展望

在模型方面, 部分信息的引入使得 DC 养老金的资产配置问题更贴近现实, 部分信息可以用卡尔曼滤波技术来处理, 然而卡尔曼滤波技术要求模型不能太复杂, 使得更贴近现实的利率模型和股票模型不能引入, 在未来的工作中可以在解法上做一些创新, 摆脱卡尔曼滤波的约束. 针对部分信息的处理, 还可以考虑用降维的方法将部分信息转化为完全信息, 参考常浩等^[35].

在优化目标方面, 本文考虑的是终端财富的期望效用最大化, 由于 S 型效用函数是非凹的, 动态规划方法在求解时遇到难题, 需要用鞅方法求解, 然而鞅方法要求在完备市场下使用, 鞅的性质决定了模型不能太复杂, 今后可考虑在其他效用函数下使用动态规划方法求解.

参考文献

- [1] Boulier J, Huang S, Taillard G. Optimal management under stochastic interest rates: the case of a protected defined contribution pension fund [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2001, 28(2): 173-189.
- [2] Deelstra G, Grasselli M, Koehl P. Optimal investment strategies in the presence of a minimum guarantee [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2003, 33(1): 189-207.
- [3] Gao J. Stochastic optimal control of DC pension funds [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2008, 42(3): 1159-1164.
- [4] Gao J. Optimal investment strategy for annuity contracts under the constant elasticity of variance (CEV) model [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2009, 45(1): 9-18.
- [5] Guan G, Liang Z. Optimal management of DC pension plan in a stochastic interest rate and stochastic volatility framework [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2014, 57: 58-66.
- [6] Guan G, Liang Z. Mean-variance efficiency of DC pension plan under stochastic interest rate and mean-reverting returns [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2015, 61: 99-109.
- [7] Han N, Hung M. Optimal asset allocation for DC pension plans under inflation [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2012, 51(1): 172-181.
- [8] 常浩, 王春峰, 房振明. 随机利率与随机波动率环境下的 DC 型养老金计划 [J]. 控制与决策, 2019, 34(3): 581-590.
- [9] 史爱玲, 李仲飞. 带遗产动机和最低业绩约束的 DC 型养老金的优化投资问题 [J]. 系统科学与数学, 2021, 41(7): 1905-1926.
- [10] 付渴, 曹静. 基于跳-扩散模型的 DC 型养老金时间一致最优投资策略的研究 [J]. 经济数学, 2020, 37(2): 24-36.
- [11] 蔡晶晶, 董迎辉, 吕文欣, 等. VaR 约束下带最低保障的 DC 型养老金的优化投资 [J]. 系统工程理论与实践, 2021, 41(5): 1252-1262.
- [12] 王远野, 樊顺厚, 常浩. 通胀风险与波动率风险环境下带有保费返还条款的 DC 型养老金计划 [J]. 系统科学与数学, 2018, 38(4): 423-437.
- [13] He L, Liang Z. Optimal investment strategy for the DC plan with the return

of premiums clauses in a mean–variance framework [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2013, 53(3): 643-649.

[14] Yao H, Lai Y, Ma Q, etc. Asset allocation for a DC pension fund with stochastic income and mortality risk: A multi-period mean-variance framework [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2014, 54: 84-92.

[15] Wu H, Zeng Y. Equilibrium investment strategy for defined-contribution pension schemes with generalized mean-variance criterion and mortality risk [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2015, 64: 396-408.

[16] Sun J, Li Z, Zeng Y. Precommitment and equilibrium investment strategies for defined contribution pension plans under a jump-diffusion model [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2016, 67: 158-172.

[17] Li D, Rong X, Zhao H, etc. Equilibrium investment strategy for DC pension plan with default risk and return of premiums clauses under CEV model [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2017, 72: 6-20.

[18] Zhang L, Li D, Lai Y. Equilibrium investment strategy for a defined contribution pension plan under stochastic and stochastic volatility [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2020, 368: 1-36.

[19] 李方超, 张成科, 朱怀念. Heston 模型下考虑工资风险和保费返还条款的 DC 型养老金时间一致性投资策略 [J]. 系统管理学报, 2020, 29(4): 617-628.

[20] 王佩, 陈铮, 张玲. 基于衍生品投资的 DC 型养老金计划均衡投资策略 [J]. 中山大学学报(自然科学版), 2021, 60(3): 147-158.

[21] Berkelaar A, Kouwenberg R, Post T. Optimal portfolio choice under loss aversion [J]. The Review of Economics and Statistics, 2004, 86(4): 973-987.

[22] Blake D, Wright D, Zhang Y. Target-derived investing: optimal investment strategies in defined contribution pension plans under loss aversion [J]. Journal of Economic and Control, 2013, 37: 195-209.

[23] Guan G, Liang Z. Optimal management of DC pension plan under loss aversion and value-at-risk constraints [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2016, 69: 224-237.

[24] Chen Z, Li Z, Zeng Y, etc. Asset allocation under loss aversion and minimum performance constraint in a DC pension plan with inflation risk [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2017, 75: 137-150.

[25] 王传玉, 付春艳, 盛国祥. 基于通货膨胀和损失厌恶的 DC 养老金最优

投资 [J]. 中国科学技术大学学报, 2018, 48(5): 420-430.

[26] Dong Y, Zheng H. Optimal investment of DC pension plan under short-selling constraints and portfolio insurance [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2019, 85: 47-59.

[27] Dong Y, Zheng H. Optimal investment with S-shaped utility and trading and Value at Risk constraints: An application to defined contribution pension plan [J]. European Journal of Operational Research, 2020, 281(2): 341-356.

[28] 吕文欣, 董迎辉, 魏思媛. 激励机制和 VaR 约束下 DC 养老金计划的最优投资 [J]. 运筹与管理, 2022, 31(3): 157-162.

[29] Calisto G, Rodwell K, Gusti V, etc. Optimal asset allocation for a DC plan with partial information under inflation and mortality risks [J]. Communications in Statistics-Theory and Methods, 2021, 50(9): 2048-2061.

[30] 王佩, 李仲飞, 张玲. 不完全信息和模糊厌恶下 DC 型养老金最优投资策略 [J]. 运筹与管理, 2022, 31(6): 125-132.

[31] 王佩, 张玲, 阮坚. 不完全信息环境下具有随机工资和保费返还条款的 DC 养老金均衡策略 [J]. 系统科学与数学, 2023, 43(1): 129-150.

[32] Kahneman D, Tversky A. Prospect theory: an analysis of decision under risk [J]. Econometrica, 1979, 47(2): 263-292.

[33] Liptser R, Shiryaeva A. Statistics of random processes II [M]. Berlin: Springer Verlag, 2010.

[34] 李娟, 夏登峰, 费为银. 随机通胀风险下基于半鞅理论的最优投资策略 [J]. 运筹与管理, 2021, 30(5): 188-192.

[35] 常浩, 荣喜民, 赵慧. 不完全金融市场下基于二次效用函数的动态资产配置 [J]. 系统工程理论与实践, 2011, 31(2): 205-213.

附录

命题 3.1 的证明

以矩阵形式表示价格指数 $I(t)$ 、股票价格 $S(t)$ 和股票预期收益率 $\mu(t)$ 的随机微分方程:

$$\begin{bmatrix} \frac{dI(t)}{I(t)} \\ \frac{dS(t)}{S(t)} \\ d\mu(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_I \\ \mu(t) \\ k(\bar{\mu} - \mu(t)) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_S & 0 \\ 0 & \sigma_\mu \rho & \sigma_\mu \sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dW_I(t) \\ dW_S(t) \\ dW_\mu(t) \end{bmatrix}, \quad (\text{A1})$$

其中, $[dW_I(t) \ dW_S(t) \ dW_\mu(t)]^T$ 可分解为

$$\begin{bmatrix} dW_I(t) \\ dW_S(t) \\ dW_\mu(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dZ_I(t) \\ dZ_S(t) \\ dZ_\mu(t) \end{bmatrix}, \quad (\text{A2})$$

$Z_I(t)$, $Z_S(t)$, $Z_\mu(t)$ 是标准布朗运动, 且彼此相互独立, 则 (A1) 式变为

$$\begin{bmatrix} \frac{dI(t)}{I(t)} \\ \frac{dS(t)}{S(t)} \\ d\mu(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_I \\ \mu(t) \\ k(\bar{\mu} - \mu(t)) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_S & 0 \\ 0 & \sigma_\mu \rho & \sigma_\mu \sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dZ_I(t) \\ dZ_S(t) \\ dZ_\mu(t) \end{bmatrix}. \quad (\text{A3})$$

我们采用文献[33]中的非线性滤波技术, 将价格指数 $I(t)$ 、股票价格 $S(t)$ 和股票预期收益率 $\mu(t)$ 满足的动态过程分开重写. 因此, 基金经理可观测的过程为

$$\begin{bmatrix} \frac{dI(t)}{I(t)} \\ \frac{dS(t)}{S(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \mu_I \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mu(t) \\ A_0 \quad A_1 \end{bmatrix} dt + \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_I & 0 \\ 0 & \sigma_S \end{bmatrix}}_{B_1} \begin{bmatrix} dZ_I(t) \\ dZ_S(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_2} dZ_\mu(t), \quad (\text{A4})$$

不可观测过程为

$$d\mu(t) = \begin{bmatrix} k\bar{\mu} + (-k)\mu(t) \\ a_0 \quad a_1 \end{bmatrix} dt + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \sigma_\mu \rho \end{bmatrix}}_{b_1} \begin{bmatrix} dZ_I(t) \\ dZ_S(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\sigma_\mu \sqrt{1-\rho^2}}_{b_2} dZ_\mu(t), \quad (\text{A5})$$

注意 $B = (B_1, B_2)$, 因此 $BB = B_1 B_1^T + B_2 B_2^T$. 进一步得到 $BB = B_1 B_1^T$ 和

$(BB)^{-1} = (B_1 B_1^T)^{-1} = (B_1^{-1})^T B_1^{-1}$ ，其中，

$$B_1^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_I} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_S} \end{bmatrix} \quad (\text{A6})$$

由于 B_1^{-1} 中的元素是一致有界的，那么 $(BB)^{-1}$ 中的元素也是一致有界的。

根据文献[33]的定理 12.7，可知股票预期收益率的估计 $\hat{\mu}(t) = E[\mu(t) | \mathcal{G}_t]$ 及其方差 $m(t) = E[(\mu(t) - \hat{\mu}(t))^2 | \mathcal{G}_t]$ 满足

$$\begin{aligned} d\hat{\mu}(t) = & \begin{bmatrix} k\bar{\mu} + (-k)\hat{\mu}(t) \\ a_0 & a_1 \end{bmatrix} dt + \left\{ b_1 B_1^T + m(t) \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}_{A_1^T} \right\} \times \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_I} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_I} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_S} \end{bmatrix}}_{(BB)^{-1}} \\ & \times \left\{ \begin{bmatrix} \frac{dI(t)}{I(t)} \\ \frac{dS(t)}{S(t)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \mu_I \\ 0 \end{pmatrix}_{A_0} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{A_1} \mu(t) \end{bmatrix} dt \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

另外，将向量

$$B_1^{-1} \times \left\{ \begin{bmatrix} \frac{dI(t)}{I(t)} \\ \frac{dS(t)}{S(t)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \mu_I \\ 0 \end{pmatrix}_{A_0} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{A_1} \mu(t) \end{bmatrix} dt \right\} \quad (\text{A8})$$

表示为 $[dZ_I(t) \ dZ_S(t)]^T$ ，其中 $[dZ_I(t) \ dZ_S(t)]^T$ 是二维标准布朗运动，且 $Z_I(t)$ ， $Z_S(t)$ 相互独立。那么可以得到如下动态方程

$$\begin{bmatrix} \frac{dI(t)}{I(t)} \\ \frac{dS(t)}{S(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_I \\ \hat{\mu}(t) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 \\ 0 & \sigma_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dZ_I(t) \\ dZ_S(t) \end{bmatrix}, \quad (\text{A9})$$

同时，还可得到

$$\{b_1 B_1^T + m(t) \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_I} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_\mu \rho + \frac{m(t)}{\sigma_s} \end{bmatrix}. \quad (\text{A10})$$

因此, $\hat{\mu}(t)$ 的动态方程可写为

$$d\hat{\mu}(t) = k(\bar{\mu} - \hat{\mu}(t))dt + \Sigma(t)dZ_s(t), \quad (\text{A11})$$

根据文献[33]的定理 12.7, $m(t)$ 满足

$$\frac{dm(t)}{dt} = \sigma_\mu^2(1 - \rho^2) - 2\left(k + \frac{\sigma_\mu \rho}{\sigma_s}\right)m(t) - \frac{m^2(t)}{\sigma_s^2}. \quad (\text{A12})$$

硕士期间发表的论文

- [1] 韩雪伟, 夏登峰, 杨铭, 徐文静. 部分信息与损失厌恶下 DC 养老金最优投资问题研究[J]. 安庆师范大学学报. (已录用)
- [2] 杨铭, 夏登峰, 徐文静, 韩雪伟. HARA 效用下考虑 DC 养老金带有死亡和伤残返还条款的最优投资问题[J]. 安徽师范大学学报(自然科学版), 2024, 47(2): 112-117.
- [3] 徐文静, 夏登峰, 杨铭, 韩雪伟. 变利率下基于 CEV 模型的最优再保险与投资策略[J]. 安徽工程大学学报. (已录用)

致谢

目之所及，皆是回忆，心之所向，皆是过往。转眼间，三年的研究生生涯已接近尾声，至今犹记得开学报道时大家的青涩模样，如今大家已褪去了几分青涩，增添了几分成熟，刚刚熟悉的我们又要奔向远方。

感谢我的导师夏登峰教授，从毕业论文的选题、写作再到最后修改、定稿，夏老师总是亲力亲为、耐心指导，夏老师严谨的学术态度以及对细节的执著追求让我更加重视论文写作，也提高了我做人做事的认真态度。

感谢授课的诸位老师，姜培华老师、梁勇老师、潘海峰老师、张玥老师、张伟老师、沈明轩老师、王斌老师、李志民老师、朱以睿老师、方永胜老师，是你们的辛苦付出给我打下了坚实的专业基础，让我能顺利完成学业。

感谢在安工程相知相遇的各位同学，不管是在学习中还是在生活中，遇到问题时总能在与大家的沟通交流中找到满意的解决方案，你们的帮助给予了我极大的前进动力，你们的陪伴让枯燥的研究生生涯增添了几分乐趣。

感谢我的父母，无论身处何地，你们总是关心我的一切，你们永远是最坚强的后盾与力量，是你们的鼓励和支持让我走到明天。

回望过往，有过迷茫，有过彷徨，有过失落，但也有收获，在一次次感到绝望的时候总能找到人生新的的方向。一切才刚开始，过往皆是序章，江湖再见，我的同学们！愿我们历尽千帆，归来仍是少年！