

分类号: F830.48
密 级: 公开

单位代码: 10363
学号: 2211010103

题 目 随机收入和前景理论下 DC 养老金默
认投资政策效果比较

英文并列

题 目 Comparison of the Effectiveness of Default
Investment Policies for DC Based Pension
Under Stochastic Income and Prospect Theory

学生姓名: 王梦旋

指导教师: 王传玉 教授

专 业: 金 融

研究方向: 金融风险管理

论文答辩日期: 2024 年 5 月 29 日

安徽工程大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：我恪守学术道德，崇尚严谨学风。所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已明确注明和引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品及成果的内容。论文为本人亲自撰写，我对所写的内容负责，并完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

学位论文作者签名：王梦璇

日期：2024 年 5 月 29 日

安徽工程大学学位论文版权使用授权书

学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅或借阅。本人授权安徽工程大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保密 ☐，在 ____ 年解密后适用本版权书。

本学位论文属于

不保密 ☒。

学位论文作者签名：

王梦璇

教师签名指导：

张

日期：2024 年 5 月 29 日

日期：2024 年 5 月 29 日

随机收入和前景理论下 DC 养老金默认投资政策效果比较

摘 要

随着我国人口老龄化进程不断加快,我国已经成为老龄化程度较高的国家之一,养老金给付面临巨大压力,为了保障参与者退休之后的基本生活,如何投资保证养老基金保值增值成为重中之重。因此,研究 DC 型养老金最优投资策略对于减轻养老金给付压力和保障参与者退休之后基本生活具有重要意义。由于 DC 型养老金投资是一个长时间持续的过程,在这个过程中参与者的收入面临随机因素的影响,具有随机性。其次,大多数参与者不仅是风险厌恶者,而是损失厌恶者,其面对等额的收益和损失,投资者产生的心理效果不同。再次,默认投资政策是基于生命周期理论,为一些不积极做出投资决策的参与者提供的简单可行的养老金投资策略,由于个人倾向于简单选择的决策习惯以及部分参与者金融知识的缺乏,为部分参与者提供默认投资政策是有必要的。在 DC 型养老金中,养老金投资风险由参与者承担,风险发生在退休阶段,参与者所面临的风险可以通过“收入提取选项”来降低:即允许参与者在退休后的一段时间内将最终资本转换为养老金进行再投资,分散风险,增加收益。因此本文基于以上因素,在随机收入和前景理论下,研究两种类型的 DC 型养老金默认投资政策效果,以及研究采取两种类型默认投资政策的 DC 型养老金最优再保险问题,并比较采用两种类型默认投资政策的效果以及最优再保险

策略的差异。

首先,假定 DC 型养老金参与者将资金投资于风险资产和无风险资产,考虑随机收入,采用秩依赖期望效用(RDEU, Rank-dependent expected utility),分别采取智利型和美国型默认投资政策,在风险价值(VaR, Value-at-risk)和最低保障(PI, Portfolio insurance)的约束下,研究 DC 型养老金终端财富最大值问题。首先,建立 DC 型养老金账户资金的动态随机微分方程。其次,应用分位数公式将概率扭曲函数从目标函数中去除,使用松弛方法求出 DC 型养老金退休时刻财富最大化的解。最后,进行数值模拟,比较智利型和美国型默认投资政策的效果。结果表明,两种类型的默认投资政策在任意市场环境下都可以取得不错的收益,不过由于智利型投资策略的保守会在市场环境较好时,损失一部分收益,而美国型默认投资政策在市场环境较好时会取得更多收益,不过由于投资政策更加激进,在市场环境较差时,收益不如智利型默认投资政策。

其次,假定参与者分别采取两种不同类型的默认投资政策,研究在随机通胀和随机死亡率下,分别采取两种不同类型默认投资政策的 DC 型养老金最优再保险策略问题。首先,建立 DC 型养老金账户资金的动态随机微分方程,然后考虑通胀环境下终端财富风险最小化问题,使用动态规划方法推导出 DC 型养老金再保险最优投资策略的显示解,最后进行数值模拟分析模型参数,对分别采取智利型和美国型默认投资政策的 DC 型养老金再保险比例的影响,结果显示,再引入再保险之后,由于智利型默认投资政策倾向于较保守的策略,对于市

场变化反应不足,再保险在不同市场状态下投资于风险资产比例的差别不大,而美国型默认投资政策倾向于较激进的投资策略,在市场环境较好时,再保险会投资更高比例的资金于风险资产,追求更高收益,而在市场环境较差时,会投资更低比例的资金于风险资产。

最后,对本文的研究成果进行总结,并提出未来展望。

关键词: DC 养老金, 默认投资政策, 随机收入, 前景理论, 秩依赖期望效用, 再保险

Comparison of the Effectiveness of Default Investment Policies for DC-Based Pension Plan under Stochastic Income and Prospect Theory

ABSTRACT

With the accelerating pace of population aging, china has become one of the countries with a high degree of aging, and pension payment is under great pressure. In order to satisfy the basic life of participants after retirement, how to invest to ensure that the value of the pension fund to maintain and increase has become a top priority. Therefore, it is important to study the optimal investment strategy of DC-based pension to reduce the pressure of pension payment and protect the basic life of participants after retirement. Since DC-based pension investment is a long lasting process in which participants' income is exposed to random factors, it is stochastic in nature. Second, most participants are not only risk averse but also loss averse, and faced with equal gains and losses, investors generate different psychological effects. Again, the default investment policy is a simple and feasible pension investment strategy based on life cycle theory for some participants who are not active in making investment decisions, which is necessary for some participants due to the decision-making habits of individuals who tend to make simple choices and the lack of financial literacy of some participants. In DC-based pension, the risk of

investing in the pension is borne by the participant, the risk occurs during the retirement phase, and the risk faced by the participant can be reduced through the Income Withdrawal Option. In other words, participants are allowed to reinvest their final capital by converting it into a pension for a period of time after retirement to diversify risk and increase returns. Therefore, considering the above factors, this paper will study the effect of DC-based pension default investment policy under stochastic income and prospect theory, as well as the optimal reinsurance problem of DC pension with default investment policy, and compare the effect of adopting different modes of default investment policy as well as the difference of optimal reinsurance strategy.

First, assuming that DC based pension participants invest their funds in risky and risk-free assets, consider stochastic income, using rank-dependent expected utility, adopting Chilean-type and United States-type default investment policies, respectively. Investigating the DC based pension terminal wealth maximization problem under value-at-risk and portfolio insurance constraints. First, the dynamic stochastic differential equations for DC-Based pension account funding are established. Second, the quantile formula is applied to remove the probability distortion function from the objective function, and solve for wealth maximization at the moment of retirement for DC-based pensions using relaxation methods. Finally, numerical simulations are performed to

compare the effects of Chilean-type and US-type default investment policies. The results show that the two different types of default investment policies can achieve good returns in any market environment. Due to the conservatism of the Chilean type of investment policy will lose some of the gains when the market environment is better, while the US type of default investment policy will achieve more gains when the market environment is better. Due to the more aggressive investment policy, the gains are not as good as the Chilean type of default policy when the market environment is worse.

Secondly, assuming that participants adopt different types of default investment policies respectively, we study the problem of optimal reinsurance strategies for DC-based pensions with different default investment policies in an inflationary environment and stochastic mortality. First, the dynamic stochastic differential equations for the funding of DC-type pension accounts are established, then the problem of minimizing the terminal wealth risk in an inflationary environment is considered, and the display solution for the optimal reinsurance of DC-type pensions is derived using a dynamic programming approach. Finally, numerical simulations are conducted to analyze the effects of model parameters on the reinsurance ratio of different types of default policies.

The results show that after the reintroduction of reinsurance, there is

little difference in the proportion of money invested in risky assets across market states, as the Chilean-type default policy tends to favor a more conservative strategy and is less responsive to market changes. On the other hand, the U.S.-type default policy tends to be more aggressive, investing a higher proportion of funds in risky assets to seek higher returns in better market conditions, and investing a lower proportion of funds in risky assets in poorer market conditions.

Finally, the findings of this paper are summarized and future perspectives are presented.

Mengxuan Wang(Finance)

Supervised by Chuanyu Wang

KEY WORDS: DC-based pensions, Default investment policy, Stochastic income, Prospect theory, Rank-dependent expected utility, Reinsurance

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 研究背景	1
1.2 研究意义	2
1.3 国内外研究现状	3
1.3.1 DC 养老金投资策略研究	3
1.3.2 DC 养老金默认投资政策相关研究	3
1.3.3 DC 养老金投资模型中的效用函数	4
1.3.4 DC 养老金再保险相关研究	5
1.4 论文的创新点与不足	6
1.5 主要研究内容与论文结构	6
第 2 章 预备知识	8
2.1 随机收入模型	8
2.2 秩依赖效用函数	8
2.3 随机死亡率	8
2.4 完备概率空间	9
2.5 随机通胀	9
第 3 章 RDEU 和 VaR-PI 约束下 DC 养老金默认投资政策效果比较	10
3.1 模型假设	10
3.2 DC 养老金默认投资政策终端财富最大化求解	12
3.2.1 一般情况下的解	13
3.2.2 特殊情况下的解	15
3.3 特殊情况下数值模拟	33
3.3.1 基准水平的影响	33
3.3.2 置信水平的影响	35
3.3.3 VaR-PI 下默认投资政策效果	36
3.4 本章小结	37
第 4 章 基于默认投资政策的 DC 养老金最优再保险策略问题	39

4.1 模型建立	39
4.2 DC 养老金最优再保险策略问题	41
4.2.1 一般情况下无默认投资政策 DC 养老金最优再保险问题	41
4.2.2 采取默认投资政策的 DC 养老金最优保险问题	45
4.3 数值模拟	48
4.4 本章小结	52
第 5 章 总结和展望	53
参考文献	55
硕士期间发表的论文	58
致谢	59

第 1 章 绪论

1.1 研究背景

养老保险是当前社会保障体系中至关重要的一部分，它关系着国民退休后的基本生活水平和质量。我国是世界上人口最多的国家之一，养老金规模庞大，近年来我国社会老龄化进程不断加速，老年人口总数及所占比率逐年升高，根据 2023 年统计局公布的数据显示，我国 60 岁及以上人口 296997 万人，占全国人口的 21.1%，已经成为世界上老龄化程度较高的国家之一，养老基金管理者面对给付压力持续增加，为了弥补养老金缺口，解决养老基金可持续性不足，保证养老基金长期平稳高效运作，需要将养老金进行投资，因此研究养老基金最优投资策略具有重要意义。

养老保险是社会保障的支柱之一，是社会体系的重要组成部分。随着社会老龄化问题不断加剧，养老金的管理日益成为社会的关注点。养老金主要可以分为以下两类：分别是确定给付（Defined-benefit，DB）和确定缴费（Defined-contribution，DC）型。近年来，兼具确定给付和确定缴费型特点的混合养老金开始规模出现。在 DB 型养老金中，参与者在退休时所领取的金额是事先确定的，与缴费的金额，学历年龄等因素无关，DB 型养老金风险主要是养老基金管理者承担，这也为养老金的管理和增值带来诸多的不便。相应的，DC 型养老金所具有的优势开始逐渐显现，越来越多的企业开始倾向于 DC 型养老金。首先，DC 型养老金规则约束较少，这使得其可以灵活调整适应不同的市场环境，第二，DC 型养老金规则透明，监管措施完善，可以有效防范操作风险。最后，在 DC 型养老金中，养老基金管理者将参与者缴纳的资金投资于金融市场，以实现资金的累积和增值，用以满足养老金给付需求，养老金的缴费率是固定的，养老金的支付水平由退休前积累期的资金以及资金投资所得决定。相对于 DB 型养老金而言，有利于分散风险。2023 年，我国多个省份养老金财政出现赤字，延迟退休成为在不增加税收的前提下改善养老金财政赤字的方式。DC 型养老金的支付水平由退休前积累期的资金以及资金投资所得决定，因此 DC 型养老金参与者希望找到适当的投资策略，以保证其退休之后的基本生活，所以研究 DC 型养

老金的最优投资策略具有理论和现实双重意义。

1.2 研究意义

鉴于部分 DC 型养老金参与者金融知识的匮乏和不积极地做出投资决策, 针对不积极做出投资决策的部分参与者, 为其提供简单可行的默认投资政策是有必要的。默认投资政策符合个人倾向于简单选择的决策习惯, 越来越多的国家开始为参与者提供默认投资政策供其选择。不同国家的默认投资政策侧重点存在差异, 智利型以年龄为基础的生命周期基金, 澳大利亚型主要以降低养老基金运行成本为目标, 而美国型旨在提供简单可行策略, 以提高养老金计划的参与率。已有研究指出, 默认投资政策可以提高养老金替代率的实现概率, 减轻政府财政的负担, 因此本文研究智利型和美国型两种默认投资政策效果, 并对两种类型默认投资政策在不同市场环境下效果进行比较。

传统经济学认为投资者是理性的, 即投资者对于风险持厌恶态度, 在刻画投资者的风险偏好时, 一般采用传统期望效用函数。实际上, 一些投资者其不愿意增加风险获取更多的收益, 而当其投资者遭受损失时, 其愿意承担更多的风险来获得更多收益以减少目前的损失, 因此面对等额的收益和损失, 投资者的心理变化是不同的, 而常见的效用函数一般只满足风险厌恶的要求。因此, 本文将在秩依赖效用函数下研究 DC 型养老金默认投资政策的效果。

默认投资政策符合个人倾向于简单选择的决策习惯, 越来越多的国家开始为参与者提供默认投资政策供其选择。在 DC 型养老金中, 养老金投资风险由参与者承担, 风险发生在退休阶段, 可以通过再保险的方式将风险分散给再保险公司, 以降低风险。这就意味着参与者不仅在资金积累阶段面临投资策略的选择, 在退休之后也面临再保险策略的选择。在经济下行和通货膨胀加剧的大环境下, 进行再保险不仅可以分散风险, 还可以增加参与者退休后的投资收益, 对于保障参与者退休后的生活水平有重要作用, 因此对采取默认投资政策的 DC 型养老金再保险策略的研究尤为重要。

1.3 国内外研究现状

1.3.1 DC 养老金投资策略研究

Vigna 和 Haberman^[1]首次在离散模型下研究 DC 型养老金终端财富最大化问题,假设将资金投资于股票和债券两种不同风险的资产,应用随机动态规划方法推导出 DC 型养老金的终端财富最大化的显示解。BouLier 等^[2]首次在连续时间模型框架下,考虑参与者采取 CRRA 效用函数,研究 DC 型养老金的最优资产配置问题。Xue 等^[3]考虑养老金参与者的遗赠动机、退休前的随机工资收入以及退休前工资的替代率,在 S 型效用下,研究 DC 型养老金的最优投资策略。余鑫等^[4]引入管理激励措施,研究在激励措施下的 DC 型养老金的最优投资策略。Zhang 等^[5]基于随机控制方法和通货膨胀风险,在考虑积累期内随机工资率以及工资变化与金融市场波动的相关性的基础上,研究目标福利养老金的最优投资策略。周豪和彭幸春^[6]研究带有保费返还条款的 DC 型养老金计划的最优投资策略问题,通过求解 HJB 方程,得到最优投资策略的显示解。殷艳红等^[7]假设将保费投资于带有误定价的风险资产情况下,研究 DC 型养老金最优投资策略问题。邵艳宇等^[8]针对养老金增值保值问题,研究具有利率风险和波动风险的 DC 型养老金最优投资策略。蔡晶晶等^[9]在 VaR 和 PI 约束下,假设 DC 型养老金管理者采取政府共享利润计划,研究 DC 型养老金计划参与者期望效用最大化问题,使用鞅方法和凹化理论求得最优投资策略的显示解。

1.3.2 DC 养老金默认投资政策相关研究

养老金的默认投资政策在不同的国家和地区有不同的称呼,刘昊^[9]对此进行了总结,主要有拉美模式以智利为例:按照参与者的性别和年龄进行初始资产配置,遵循生命周期理论对资产进行转移配置。提供五个基金,按照收益和风险的高低排列,选择中间的两个,后随着时间推移,将资产从高风险,高收益的基金向低风险,低收益的基金转移。美国的默认投资选择标准(QDIA, qualified default investment alternative):发起者制定一个默认基金组作为默认投资替代,受托人审核是否可以作为合格的默认投资替代,帮助投资者克服人性惰性,引导参与者

将养老资金投资于适合的、长期的退休储蓄产品。马齐旖旎等^[11]认为在 QDIA 条款中,养老金的默认选择可归为三类,即目标日期基金,目标风险基金和由外部专业人士进行投资,由于目标日期基金具备能够有效规避市场动荡、确保养老金安全等优势,其逐渐成为养老金投资默认选择的主流。DC 型养老金的核心是如何投资,以达到参与者的目标, Daniel 和 David^[12]认为鉴于部分养老金参与者金融知识的匮乏,为参与者提供默认投资是合理的,并利用来自智利系统的数据在固定缴费率的投资模型下,研究了现有的默认投资政策效果之后,并在其基础上引入闭环政策,并将其结果进行了比较,证明智利的默认投资政策效果良好,可以提高退休目标的实现概率,减少退休时的预期缺口。陈峥和李仲飞^[13]基于生命周期理论,研究了在养老金投资策略中采取目标日期基金投资模式的合理性和可行性。谢世清和张梦鸽^[14]建立了一个基于目标替代率的生命周期模型,并基于此模型设计了符合中国国情的目标日期基金产品。邓辛^[15]从大生命周期理论和下滑轨道设计出发,以退休基金的效用最大化为目标函数为中心,基于 CRRA 效用函数,提出更优化的下滑轨道,不仅是机械化地降低风险资产的投资比例,而是双向滑动。本文第 3 章在上述文章基础上考虑 VaR 和 PI 约束,研究智利型和美国型默认投资政策效果,并比较两种默认投资政策在不同市场状态下的效果。

1.3.3 DC 养老金投资模型中的效用函数

一般使用效用函数来描述养老金参与者的投资偏好,近年来在养老金最优投资策略研究中经常使用的效用函数主要有:传统期望效用函数,S 型效用函数。Tversky 和 Kahneman^[16](1979)提出前景理论,认为大多数投资者不仅是风险厌恶者,也是损失厌恶者。当投资者获取收益时,其不愿意增加风险获取更多的收益,而当其投资者遭受损失时,其愿意承担更多的风险来获得更高的收益来减少目前的损失,面对等额的收益和损失,投资者产生的心理变化是不同的,据此构造了 S 型函数。Berkelaar 等^[17]首次在连续情况下用鞅方法,推导出两种不同效用函数下 DC 型养老金最优投资策略。王传玉等^[18]在考虑通货膨胀和损失厌恶的约束下研究 DC 型养老金终端财富最大化问题,应用鞅方法推导出最优投资策略的显示解。温利民等^[19]在线性损失厌恶函数的基础上,建立混合指数型损失厌恶组合模型,并对股市进行实证分析,认为混合指数型损失厌恶投资组合模型优

于均值方差模型。董迎辉等^[20]在损失厌恶和有限期望损失约束下,利用凹化方法得到 DC 型养老金最优财富过程的解析式,并进一步分析损失厌恶约束对最优投资行为的影响。CPT 模型引出了一个在参考点上非凸、不光滑的 S 形效用函数,以及反 S 形的概率加权函数,这些特点使得 CPT 条件下的决策问题难以解决。大部分文献通过实施特定的假设解决上述问题,Barberis 和 Huang^[21]提出正态假设分布, Van 和 Laeven^[22]提出完全市场假设解决上述问题。Quggin^[23] (1982) 的秩相关期望效用理论,考虑到心理偏好对于决策的影响,引入了概率扭曲函数,用反 S 型函数描述人类的行为,使其更接近现实。不过由于经典的随机控制理论不能应用于 RDEU 投资者的优化问题, Jin 和 Zhou^[24]提出了一个新的方法首先将问题转化为分位数公式,即将决策变量从随机变量转换为分位数函数,然后求解分位数优化问题。Xu^[25]在连续时间的投资模型下,用变量变化和松弛的方法解决分位数优化问题,证明了 RDEU 下组合投资问题的可行性。Chen 等^[26]研究了在 VaR 和 PI 联合约束下的期望最大化问题。董迎辉等^[27]从参与者和基金经理的双重角度出发,在加权效用的约束下,研究 DC 型养老金的最优资产配置。Mi 和 Xu^[28]在研究了在 VaR 和 PI 约束下研究了具有秩相关期望效用投资者的风险投资问题,并使用分位数技术推导出显示解。

1.3.4 DC 养老金再保险相关研究

Borch^[29]首先提出最优再保险问题,并以财富效用最大化为目标函数,研究最优再保险问题。随着再保险问题不断深化,杨志伟和张强^[30]研究了 VaR 动态约束下保险人最优投资和再保险策略问题,运用随机控制理论建立具有 VaR 约束的随机控制问题,采取动态规划推导出问题的 HJB 方程,并利用拉格朗日函数法推导出最优投资和再保险策略。Liang^[30]研究了具有稀薄依赖结构的风险模型下最优再保险投资问题,通过求解扩展 HJB 时延系统,推导出期望价值溢价原则下的显式最优再保险投资策略。再保险最优策略研究也推广到寿险上。何学强等^[32]研究了随机利率和死亡率条件下 PBGC 为基于遇险终止风险的 DB 养老金提供担保的保费估值问题,结果表明随机利率和死亡率的引入会增加发起人的负担,同时也将降低了风险。Gerrard 等^[33]使用二次损失函数,研究了 DC 型养老金退休后的最优投资策略。王业舜英等^[34]研究了连续时间框架下损失厌恶者的均

衡再保险策略问题,假定保险人的盈余过程服从带扰动的 CL 模型,以带惩罚的均值方差最大化为目标函数,运用 HJB 方程得到最优均衡再保险策略。Zhang^[35]认为 DC 型养老金中,风险可以通过再保险分散给再保险公司,即在退休后所面临的风险可以通过“收入提取选项”来降低,允许参与者在退休时间内将最终资本转换为养老金继续投资,在对人口统计模型进行假设后,使用 HJB 方程求得最优的再保险策略解的显示形式。本文第 4 章在上述文章基础上,考虑随机通胀和随机死亡率,研究采取智利型和美国型默认投资政策的 DC 型养老金最优再保险策略问题,并比较采取两种默认投资政策的 DC 型养老金最优再保险策略的差异。

1.4 论文的创新点与不足

本文的创新点主要为以下两个方面:(1)引入两种默认投资政策,考虑参与者收入随机性,采取秩依赖期望效用,在 VaR 和 PI 约束下,研究 DC 型养老金终端财富最大化问题,并比较两种不同默认投资政策的投资效果;(2)在考虑随机通胀和随机死亡率的基础上,研究采取默认投资政策的 DC 型养老金最优再保险策略问题,并比较采取两种默认投资政策的 DC 型养老金最优再保险策略的差异。

同时,本文研究也存在以下不足:(1)本文在构建金融市场时,无风险资产仅考虑了债券,资产种类单一,具有一定的局限性;(2)除了本文中研究的市场波动率,随机死亡率,随机收入等因素之外,影响养老金默认投资政策效果的因素还有很多。

1.5 主要研究内容与论文结构

本文的主要研究内容是随机收入和前景理论下 DC 型养老金默认投资政策效果比较以及采取默认投资政策的 DC 型养老金最优再保险策略问题,比较两种类型的 DC 型养老金默认投资政策的效果,以及比较采取两种类型默认投资政策的 DC 型养老金最优再保险策略的差异。

本文共分为五章:

第 1 章,绪论。本章主要介绍本文的研究背景和意义、国内外研究现状及本

文主要研究内容与论文框架：

第 2 章，预备知识。本章主要介绍研究随机收入和前景理论下 DC 型养老金默认投资政策效果比较时所需要基本理论知识；

第 3 章，本章主要研究随机收入和前景下 DC 型养老金默认投资政策效果比较；

第 4 章，本章主要研究采取默认投资政策的 DC 型养老金的最优再保险策略问题；

第 5 章，总结与展望。

第 2 章 预备知识

2.1 随机收入模型

定义 2.1^[36] 随机收入满足如下随机微分方程

$$dY(t) = Y(t)(\mu dt + \sigma_{ys} dW_Y(t)), Y(0) > 0. \quad (2.1)$$

其中, $Y(t)$ 是 t 时刻的收入, μ 是工资的预期增长率, σ_{ys} 是工资的随机波动率, μ 和 σ_{ys} 是常数。

2.2 秩依赖效用函数

定义 2.2^[25] $V^{rdeu}(X_T)$ 表示一个投资者对于财富 X_T 的偏好值, 满足下式

$$V^{rdeu}(X_T) = \int_{\mathbb{R}^+} u(x) d[-T(1 - F_{X(T)}(x))]. \quad (2.2)$$

其中, $F_X(\cdot)$ 是 X 的累积分布函数, 如果 T 是恒等函数, RDEU 会退化为期望效用。当效用函数是线性函数, 即 $u(x) = x, x \in R$, 则 RDEU 函数简化为 Yarri 的对偶效用函数。

RDEU 有两部分组成, 一部分是凹的效用函数 $u: R^+ \rightarrow R^+$, 另一部分是反 S 形的概率扭曲函数 $T(\cdot): [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $T(0) = 0$, $T(1) = 1$ 。

2.3 随机死亡率

定义 2.3^[35] 随机死亡率满足如下随机微分方程

$$dl(t) = \theta(t)dt + v(t)dW_l(t). \quad (2.3)$$

其中, $\theta(t)$ 和 $v(t)$ 分别描述了漂移和波动率, $l(t)$ 为 t 时刻的生命数, $dl(t)$ 解释了该时间间隔内的死亡数 $[t, t + \Delta t]$ 。

2.4 完备概率空间

定义 2.4^[36] 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}, P)$ 是一个带域流的完备概率空间。其中, Ω 是样本空间, $\mathcal{F}$ 是 Ω 的一些子集构成的集合, $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ 是包含时刻 t 之前所得信息的域流, P 是概率。

假设本章中所有随机过程均适应于该概率空间。

2.5 随机通胀

定义 2.5^[18] 随机通胀满足以下随机微分方程

$$d\psi(t) = \psi(t)(\mu_\psi dt + \sigma_\psi dW(t)), \quad \psi(0) = \psi_0. \quad (2.4)$$

其中, μ_ψ 表示通货膨胀率, σ_ψ 表示物价受通货膨胀影响的波动率。

第3章 RDEU 和 VaR-PI 约束下 DC 养老金默认投资政策效果比较

本章在秩依赖期望效用下，考虑 DC 型养老金参与者的随机收入、投资过程中的风险价值以及退休生活的最低保障，研究 DC 型养老金默认投资政策退休时刻终端财富最大值问题，并比较两种类型的默认投资政策效果。假设 DC 型养老金投资于两种资产（无风险资产，风险资产），建立 DC 型养老金账户的动态随机微分方程；考虑到参与者采用秩依赖期望效用，分别采取两种类型默认投资政策；在 VaR 约束下，应用分位数公式将概率扭曲函数从目标函数中去除，使用松弛方法求出 DC 型养老金终端财富目标值最大化的显示解。最后，进行数值模拟，比较两种默认投资政策在不同市场环境下的效果。

3.1 模型假设

假设 DC 型养老金投资市场上有两类资产（风险资产和无风险资产）可供参与者选择，在 t 时刻无风险资产价格满足如下微分方程

$$dB(t) = rB(t)dt.$$

风险资产价格过程满足如下随机微分方程

$$dS(t) = S(t)((r + \sigma_s \lambda_s)dt + \sigma_s dW_s(t)). \quad (3.1)$$

其中， r 是无风险利率， λ_s 是风险资产的风险价格， σ_s 是风险资产的风险波动率，假设它们均为常数。

假设 DC 型养老金参与者从 0 时刻参与工作，在 T 时刻退休，在工作的期间，参与者将获得收入。在 DC 型养老金积累期，参与者的收入受到诸多因素的影响难以确定，收入过程是随机的，满足以下随机微分方程

$$dY(t) = Y(t)(\mu dt + \sigma_{ys} dW_y(t)), Y(0) > 0. \quad (3.2)$$

其中， μ 是收入的预期增长率， σ_{ys} 是收入的随机性受股票影响的波动率， μ

和 σ_{ys} 是常数。

假设 DC 型养老金参与者在养老金积累期间按照固定的比例缴费，DC 型养老金积累期限为 $[0, T]$ ， T 为退休时刻，在 T 时刻前 DC 型养老金参与者不会停止向 DC 型养老金账户缴费，则此时的 DC 型养老金账户价值的过程写成

$$dX(t) = p_s(t)dS(t) + (1 - p_s(t))dB(t) + cY(t)dt. \quad (3.3)$$

其中， $p_s(t)$ 表示投资于风险资产的比例， $1 - p_s(t)$ 表示投资于无风险资产的比例。

将式 (3.1)，式 (3.2)，代入式 (3.3)，并用 $p_s(t)$ 表示在 t 时刻投资风险资产的比例， $X(t)$ 可以写成

$$dX(t) = X(t)[(r + p_s(t)\sigma_s\lambda_s)dt + \sigma_s\lambda_sdW_s(t)] + cY(t)dt.$$

假设 3.1 $\rho(t)$ 称为市场的定价核，同时满足 $E[\rho] < \infty$.

定价核 $\rho(t)$ 是无原子的，它的分布函数 F_ρ 是连续的、严格单调递增函数。

假设 3.2 $\rho(t)$ 是完备市场中唯一的定价核函数， $\theta(\cdot)$ 是风险市场价格过程， $\rho(t)$ 满足

$$\rho(t) = e^{-\int_0^t [r(s) + \frac{1}{2}\theta^2(s)]ds - \int_0^t \theta(s)dW(s)}, \quad t \in [0, T], \quad (3.4)$$

等价于如下随机微分方程

$$\frac{d\rho(t)}{\rho(t)} = -r dt - \theta(t)dW(t). \quad (3.5)$$

定义 3.1 对于 $X \in \mathcal{L}$ ，存在一个合理的过程 $X(\cdot)$ ，使得 $X(T) = X$ ，则 $\mathcal{L}$ 是一个在 $\mathcal{F}_T$ 可测的随机变量 X 的集合。

3.2 DC 养老金默认投资政策终端财富最大化求解

智利型养老金默认投资政策在积累阶段的初始时刻，DC 型养老金参与者个人账户的资金全部投资于风险资产，之后每年按照一定的比例向无风险资产转移，最终在退休时刻 T ，所有资产均以无风险资产持有，风险资产会以每年固定的比例 α 向无风险资产转移，风险资产的投资比例是一个与年限相关的线性函数，且 $p_s(t=1)=1$ ， $p_s(t=T)=0$ ， $p_s(t)$ 定义为

$$p_s(t) = 1 - \alpha(t-1).$$

美国型默认投资选择标准以富达自由基金为例，通常在距离退休日期 20 年以上时，风险资产占比维持在 90% 的高位，而后每年按照一定比例 b 将资金从风险资产转移到无风险资产，在退休时刻，风险资产占比仅约 20%，投资于风险资产的比例 $p_s(t)$ 定义为

$$p_s(t) = \begin{cases} 0.9 & 0 < t \leq T-20, \\ 0.9 - b(t - (T-20)) & T-20 < t < T, \\ 0.2 & t = T. \end{cases}$$

$V^{rdeu}(X_T)$ 表示一个投资者对于财富 X_T 的偏好值，由两部分组成，一部分是凹的效用函数 $u(x)$ ，另一部分是反 S 型概率扭曲函数 $T(x)$ 。

$$V^{rdeu}(X_T) = \int_{\mathbb{R}^+} u(x) T'(1 - F_{X(T)}(x)) dF_{X(T)}(x). \quad (3.6)$$

其中，效用函数 $u(\cdot): \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ 满足以下的条件严格单调递增且二阶可微， $u''(\cdot) < 0$ 且 $\lim_{x \downarrow 0} u'(x) = +\infty$ ， $\lim_{x \uparrow \infty} u'(x) = 0$ 。

反 S 形概率扭曲函数 $T(\cdot): [0,1] \rightarrow [0,1]$ 是可微的，同时 $0 < T'(\cdot) < \infty$ ， $T(\cdot)$ 在 $[0,1]$ ，满足 $T(0)=0$ ， $T(1)=1$ 。

给定一个初始财富 $X(0) > 0$ ，希望在 T 时刻终端财富 $X(T)$ 目标值最大化， $X(t)$ 是财富过程，在后续求解中变量为 X ，默认投资政策体现在财富过程 $X(t)$ ，不会在最优解 X^* 中体现。同时为了控制风险，需要满足对于风险价值的约束，

具有 RDEU 的参与者需要满足如下 DC 型养老金投资问题

$$\begin{aligned} & \sup_{p_s(t)} \int_0^1 u(x) d[1 - T(1 - F_{X_T}(x))] \\ \text{s.t. } & dX(t) = X(t)((r + p_s(t)\sigma_s\lambda_s)dt + \sigma_s\lambda_s dW_s(t)) + cY(t)dt, t \in [0, T], \\ & X(0) = 0, X(t) \geq 0, t \in [0, T] \quad P(X(T) \geq A) \geq a. \end{aligned} \quad (3.7)$$

其中, VaR 水平用 $A > 0$ 表示, 置信水平用 $0 < a \leq 1$ 表示。

为了解决上述问题, 借鉴 Mi 和 Xu^[28], 使用鞅理论, 借助定义 3.1 和假设 3.2 可以把动态问题 (3.7) 简化为静态问题:

$$\begin{aligned} & \sup_X \int_0^1 u(x) d[1 - T(1 - F_X(x))] \\ \text{s.t. } & E[\rho X] \leq x_0, X \geq 0, \quad P(X \geq A) \geq a. \end{aligned} \quad (3.8)$$

其中, X 是一个可测的随机变量, 表示在投资策略 $p_s(t)$ 下 DC 型养老金账户的金额。式 (3.8) 中的目标函数和 VaR 约束对于决策变量 X 都不是凹的, 如果直接解决式 (3.8), 需做出额外的单调假设, 而 ρ 反映的是市场环境, $T(\cdot)$ 是主观的, 对于不同的参与者有所不同, 期望它们具有单调性是不现实的。式 (3.8) 不是凹的, 通过分位数方法将式 (3.8) 转成凹的优化问题。

3.2.1 一般情况下的解

式 (3.8) 的目标函数只依赖于 X 的分布, 因此可以使用分位数公式。将随机变量 X 的分位数函数定义为其累积分布函数的右连续逆函数, 式 (3.8) 可以转化为其分位数函数优化问题 (3.9)。由 Jin 和 Zhou^[24]可知, 这两个问题是等价的, 即它们的最优解, 最优随机变量和最优分位数函数之间存在一个确定的关系。Xu^[25]提出了松弛的方法来解决分位数优化问题, 这种方法消除了对于单调性假设的要求, 参考他的方法去解决本章问题。

借鉴 Jin 和 Zhou^[24], 给出了式 (3.8) 的分位数问题。 $G(z) = F_X^{-1}$ 是 X 的分位数函数, 通过将决策变量由随机变量 X 转化为分位数函数 $G(z)$, 式 (3.8) 变为凹的优化问题, 即

$$\begin{aligned} & \sup_{G \in \mathcal{M}} \int_0^1 u(G(z)) d(1 - T(1 - z)) \\ \text{s.t. } & \int_0^1 F_\rho^{-1}(1 - z) G(z) dz \leq x_0, \quad G(1 - a) \geq A. \end{aligned} \quad (3.9)$$

其中, $\mathcal{M}_{x_0} = \{G(\cdot) \in \mathcal{M} : \int_0^1 G(x) F_\rho^{-1}(1 - x) dx = x_0\}$, $\mathcal{M} = \{G(\cdot) : (0, 1) \rightarrow [0, +\infty)\}$

是非负的分位数函数集合, 有左极限, 递增并且右连续。

由 Xu^[25]知, 式 (3.8) 和式 (3.9) 的最优解的关系是, 如果 G^* 是分位数优化问题 (3.9) 的最优解, 那么 $X^* = G^*(1 - F_\rho(\rho))$ 是随机变量优化问题 (3.8) 的最优解。

在解决分位数优化问题 (3.9) 之前, 需要研究它的可行性问题, 即约束条件的可行集不能为空。由于 G 是非负递增的, 得到:

$$\begin{aligned} x_0 & \geq \int_0^1 F_\rho^{-1}(1 - z) G(z) dz \\ & \geq \int_{1-a}^1 F_\rho^{-1}(1 - z) G(z) dz \\ & = A \int_0^a F_\rho^{-1}(z) dz. \end{aligned}$$

因此

$$A \int_0^a F_\rho^{-1}(z) dz \leq x_0. \quad (3.10)$$

如果式 (3.10) 不成立, 因为不存在 $G(\cdot) \in \mathcal{M}$ 满足其约束, 那么式 (3.9) 无解的。在这种情况下, 式 (3.8) 中的 $E[\rho X] \leq x_0$, $X \geq 0$ 和 $P(X \geq A) \geq a$ 约束也不能同时得到满足。

当式 (3.10) 成立时, 唯一成立 $G \in \mathcal{M}$ 被定义为:

$$G(z) = \begin{cases} 0, & z < 1 - a, \\ A, & 1 - a \leq z < 1. \end{cases}$$

因此, 可以得到分位数优化问题 (3.8) 的一般情况下的最优解 $X^* = A I_{\rho \leq F_\rho^{-1}(a)}$.

3.2.2 特殊情况下的解

下面讨论式 (3.8) 特殊的情况下的解，即：

$$A \int_0^a F_\rho^{-1}(z) dz < x_0.$$

在解决式 (3.9) 时，首先需要进行一个变量的替换，从目标函数中去除概率扭曲函数，同时由 Xu^[25] 引入两个重要的函数 $\varphi(\cdot)$ 和 $\delta(\cdot)$ ， $\delta(\cdot)$ 是 $\varphi(\cdot)$ 的最小凹包络函数，满足： $\varphi(0) = \delta(0)$ ， $\varphi(1) = \delta(1)$ ， $x \in [0, 1]$.

定义： $(\delta')^{-1}(x) = \inf\{z \in R : \delta'(z) < x\}$ ， $x > 0$.

引理 3.1 对于 $z \in R$ ， $x > 0$ 有：

$$\delta'((\delta')^{-1}(z)) = z, \varphi'((\delta')^{-1}(x)) = x, (\delta')^{-1}(\delta'(z)) \geq z. \quad (3.11)$$

$$\delta'(z) < x \text{ 当且仅当 } (\delta')^{-1}(x) < z. \quad (3.12)$$

$$\delta'(z) > x \text{ 表示 } (\delta')^{-1}(x) > z. \quad (3.13)$$

$$\text{定义：} \lambda_{\min} := \frac{u'(A)}{\delta'(1-T(a))}, \text{ 则} \quad (3.14)$$

$$\text{引理 3.2 } \lambda_{\min} = \max\{\lambda > 0 : \int_0^1 1_{(u')(\lambda\delta'(1-T(a))) \geq A} dz \geq a\}.$$

$$\text{证明：由 } \int_0^1 1_{(u')(\lambda\delta'(1-T(a))) \geq A} dz = a, \text{ 可知 } \lambda := \frac{u'(A)}{\delta'(1-T(a))},$$

$$P(X \geq A) \geq a = \int_0^1 1_{G(z) \geq A} dz \geq a = \int_0^1 1_{(u')(\lambda\delta'(1-T(a))) \geq A} dz \geq a, \text{ 根据 } u'(\cdot), \delta'(\cdot),$$

$T(\cdot)$ 的单调性可知，如果 $\lambda > \lambda_{\min}$ ，存在 ε ，使得

$$\lambda\delta'(1-T(a-\varepsilon)) > u'(A),$$

那么

$$(u')^{-1}(\lambda\delta'(1-T(a-\varepsilon))) < A,$$

所以

$$\begin{aligned} \int_0^1 1_{(u')(\lambda\delta'(1-T(a))) \geq A} dz &= \int_0^{a-\varepsilon} 1_{(u')(\lambda\delta'(1-T(a))) \geq A} dz + \int_{a-\varepsilon}^1 1_{(u')(\lambda\delta'(1-T(a))) \geq A} dz \\ &= \int_0^{a-\varepsilon} 1_{(u')(\lambda\delta'(1-T(a))) \geq A} dz < a. \end{aligned}$$

可知, $\lambda_{\min} = \max\{\lambda > 0: \int_0^1 1_{(u')(\lambda\delta'(1-T(a))) \geq A} dz \geq a\}$.

定理 3.1 若式 (3.9), 式 (3.10) 成立, 则下面问题

$$\begin{aligned} \sup_X \int_0^1 u(x) d(1-T(1-F_X(x))) \\ s.t. \quad E[\rho X] \leq x_0, X \geq 0 \end{aligned}$$

的最优解是

$$\bar{X} = (u')^{-1}(\bar{\lambda}\delta'(1-T(F_\rho(\rho)))). \quad (3.15)$$

依据 Xia 和 Zhou^[37], $\bar{\lambda}$ 是由 $E[\rho\bar{X}] = x_0$ 决定的。如果 $P(\bar{X} \geq A) \geq a$, 则 $\bar{X}$ 满足随机变量优化问题 (3.8) 的约束, 它是最优的。

首先, 证明 $P(\bar{X} \geq A) \geq a$ 成立

证明: $x_0 = E[\rho\bar{X}]$

$$\begin{aligned} &= E[F_\rho^{-1}(F_\rho(\rho))(u')^{-1}(\bar{\lambda}\delta'(F_\rho(\rho)))], \\ &= \int_0^1 F_\rho^{-1}(F_\rho(\rho))(u')^{-1}(\bar{\lambda}\delta'(F_\rho(\rho))) dz. \end{aligned}$$

因为 $(u')^{-1}$ 是严格递减的, 所以 $\int_0^1 F_\rho^{-1}(z)(u')^{-1}(\lambda_{\min}\delta'(1-T(z))) dz \leq x_0$ 成立的条件是当且仅当 $\bar{\lambda} \leq \lambda_{\min}$.

如果 $\bar{X}$ 是随机变量优化问题 (3.8) 的最优解, 需要满足式 (3.8) 的约束,

$$P(\bar{X} \geq A) \geq a = P((u')^{-1}(\bar{\lambda}\delta'(1-T(a))) \geq A)$$

$$= \int_0^1 1_{(u')^{-1}(\bar{\lambda}\delta'(1-T(a))) \geq A} dz.$$

因为 $\int_0^1 F_\rho^{-1}(z)(u')^{-1}(\lambda_{\min}\delta'(1-T(z)))dz \leq x_0$ 成立, $\bar{\lambda} \leq \lambda_{\min}$, 通过 $(u')^{-1}$ 的单调性,

可知

$$\begin{aligned} P(\bar{X} \geq A) &\geq a \\ &= \int_0^1 1_{(u')^{-1}(\bar{\lambda}\delta'(1-T(a))) \geq A} dz \\ &\geq \int_0^1 1_{(u')^{-1}(\lambda_{\min}\delta'(1-T(a))) \geq A} dz \geq a. \end{aligned}$$

综上所述 $\bar{X}$ 满足随机变量优化问题 (3.8) 的约束条件, 是最优解。

推论 3.1 $\bar{X}$ 是随机变量优化问题 (3.8) 的最优解当且仅当

$$\int_0^1 F_\rho^{-1}(z)(u')^{-1}(\lambda_{\min}\delta'(1-T(z)))dz \leq x_0. \quad (3.16)$$

下面关注最后未解决的情况

$$\int_0^1 F_\rho^{-1}(z)(u')^{-1}(\lambda_{\min}\delta'(1-T(z)))dz > x_0. \quad (3.17)$$

为了解决随机变量优化问题 (3.8) 的最后未解决情况, 假设式 (3.10), 式 (3.11) 都成立, 则下式成立,

$$\int_0^1 F_\rho^{-1}(z)(u')^{-1}(\lambda_{\min}\delta'(1-T(z)))dz > x_0 > A \int_0^a F_\rho^{-1}(z)dz. \quad (3.18)$$

依据 Xu^[25] 思想, 分位数优化问题 (3.9) 的目标函数不应包含概率扭曲函数, 需要借助上文中定义的函数 v , 通过变量替换的方法去除概率扭曲函数, 做出如下定义。

定义: $v(\cdot)$ 在 $[0,1] \rightarrow [0,1]$ 是 $x \rightarrow 1-T^{-1}(1-x)$ 的反函数, 得到

$$v(\cdot) = 1 - T^{-1}(1-x), \quad x \in [0,1].$$

$\varphi(x)$ 是一个可微，严格单调递增的函数， $\varphi(0) = -E[\rho]$ ， $\varphi(1) = 0$.

定义：

$$\varphi(x) = - \int_0^{T^{-1}(1-x)} F_{\rho}^{-1}(y) dy.$$

接下来重写分位数优化问题 (3.9)

$$\begin{aligned} & \int_0^1 u(G(z)) d(1-T(1-z)) \\ &= \int_0^1 u(G(z)) d(v^{-1}(z)) = \int_0^1 u(G(v(z))) dz = \int_0^1 u(Q(z)) dz. \end{aligned}$$

其中， $Q(z) = G(v(z))$ ， $z \in (0,1)$.

同时，重写分位数优化问题 (3.9) 的两个约束条件，第一个如下

$$\begin{aligned} x_0 &\geq \int_0^1 F_{\rho}^{-1}(1-z) G(z) dz \\ &= \int_0^1 F_{\rho}^{-1}(1-v(z)) G(v(z)) dv(z) \\ &= \int_0^1 \varphi'(z) Q(z) dz. \end{aligned}$$

上式的依据是

$$\varphi(x) = - \int_0^{T^{-1}(1-x)} F_{\rho}^{-1}(y) dy = - \int_0^{1-v(x)} F_{\rho}^{-1}(y) dy.$$

由于 $G(1-a) = Q(v^{-1}(1-a)) = Q(1-T(a))$ ，问题 (3.9) 转化为

$$\begin{aligned} & \sup_Q \int_0^1 u(Q(z)) dz \\ & s.t. \int_0^1 \varphi'(z) Q(z) dz \leq x_0, \quad Q(1-T(a)) \geq A. \end{aligned} \quad (3.19)$$

因为式 (3.19) 第二个约束条件并不是积分形式，不能用拉格朗日方法消除，可利用单调性，将其写成积分形式。

1. $Q(x) \geq A$ ，根据其单调性，可知，

$$\int_0^1 1_{Q(z) < A} dz \leq \int_0^1 1_{Q(z) < Q(x)} dz = \int_0^x 1_{Q(z) < Q(x)} dz = x.$$

2. 当 $Q(x) < A$, $Q(x + \varepsilon) < A$ 根据其单调性, 可知

$$\int_0^1 1_{Q(z) < A} dz \geq \int_0^{x+\varepsilon} 1_{Q(z) < A} dz = x + \varepsilon.$$

综上所述, $Q(x) \geq A$ 当且仅当 $\int_0^1 1_{Q(z) < A} dz \leq x$, (3.19) 写成

$$\begin{aligned} & \sup_Q \int_0^1 u(Q(z)) dz \\ \text{s.t. } & \int_0^1 \varphi'(z) Q(z) dz \leq x_0, \quad \int_0^1 1_{Q(z) < A} dz \leq 1 - T(a). \end{aligned} \quad (3.20)$$

因为效用函数 u 对于决策变量 Q 是严格凹的, 并且 Q 的约束集也是凹的, 所以解决重写后的分位数优化问题 (3.20) 只存在一个最优解。由于式 (3.20) 只允许有一个最优解, 如果 Q^* 是式 (3.20) 的最优解, 那么

$$G^*(z) = Q^*(1 - T(1 - z)), z \in (0, 1) \quad (3.21)$$

是分位数优化问题 (3.9) 的最优解。

参照 Basak 和 Shapiro^[38] 采用无约束的拉格朗日对偶法解决式 (3.20), 即

$$\sup_Q \int_0^1 [u(Q(z)) - \lambda \delta' Q(z) - \mu(\lambda) 1_{Q(z) < A}] dz. \quad (3.22)$$

当 $\lambda > 0$, 为了解决式 (3.20), 接下来最大化拉格朗日量, 得到一个点态解

$$Q_\lambda^*(z) = \arg\{y : u(y) - \lambda y \delta'(x)\} = (u')^{-1}(\lambda \delta'(z)). \quad (3.23)$$

接下来, 研究式 (3.20) 在不同区间的分位数优化问题最优解。

引理 3.3 当 $\lambda > \lambda_{\min}$, 式 (3.20) 的最优解是

$$Q_{\lambda}^*(z) = \begin{cases} (u')^{-1}(\lambda \delta'(z)) & 0 < z < z_{\min}; \\ A & z_{\min} \leq z < z_{\max}(\lambda); \\ (u')^{-1}(\lambda \delta'(z)) & z_{\max}(\lambda) \leq z < 1. \end{cases} \quad (3.24)$$

其中, $z_{\min} = 1 - T(a)$, $z_{\max}(\lambda) = (\delta')^{-1}(\frac{u'(A)}{\lambda})$.

证明: 当 $\lambda > \lambda_{\min}$

由 $\lambda_{\min} := \frac{u'(A)}{\delta'(1-T(a))}$, 可知 $\delta'(1-T(a)) > \frac{u'(A)}{\lambda}$, 再由 (3.13) 推出,

$$z_{\min} < z_{\max}(\lambda),$$

此外, 当 $0 \leq z \leq z_{\min}$, $\delta'(z) \geq \delta'(1-T(a)) \geq \frac{u'(A)}{\lambda}$, 得到

$$(u')^{-1}(\lambda \delta'(z)) < A, \quad 0 < z < z_{\min}, \quad (3.25)$$

因为

$$\delta'((\delta')^{-1}(z)) = z, \quad \delta'(z_{\max}(\lambda)) = \frac{u'(A)}{\lambda},$$

所以

$$(u')^{-1}(\lambda \delta'(z_{\max}(\lambda))) = A.$$

根据 $(u')^{-1}$ 的单调性, 可知

$$(u')^{-1}(\lambda \delta'(z)) \leq A, \quad 0 < z < z_{\max}(\lambda), \quad (3.26)$$

$$(u')^{-1}(\lambda \delta'(z)) \geq A, \quad z_{\max}(\lambda) \leq z < 1. \quad (3.27)$$

若 $Q_{\lambda}^*(\cdot)$ 是式 (3.20) 的最优解, 则 $z \in [0, 1]$, $Q_{\lambda}^*(z)$ 是下面问题的最优解

$$\sup_{x > 0} [u(x) - \lambda \delta'(z)x - \mu(\lambda)1_{x < A}], \quad (3.28)$$

式 (3.28) 可以写成

$$\max \{S_{1, \max}, S_{2, \max}\} \quad (3.29)$$

$$S_{1,\max} = \sup_{x \geq A} S_{1,\max}, \quad S_1(x) = u(x) - \lambda \delta'(z)x;$$

$$S_{2,\max} = \sup_{x \leq A} S_{2,\max}, \quad S_2(x) = u(x) - \lambda \delta'(z)x - \mu(\lambda).$$

由于 $\mu(\lambda) > 0$ ，我们对所有 $x > 0$ 都有 $S_1(x) \geq S_2(x)$ ，由 u 的凹性质，得到

$$\begin{cases} S_{1,\max} = S_1(\max\{(u')^{-1}(\lambda \delta'(z)), A\}), \\ S_{2,\max} = S_2(\min\{(u')^{-1}(\lambda \delta'(z)), A\}). \end{cases} \quad (3.30)$$

1. 当 $(u')^{-1}(\lambda \delta'(z)) \geq A$ ， $z_{\max}(\lambda) \leq z < 1$ ，由式 (3.28) 可知

$$S_1(Q_{\lambda}^*(z)) = S_1((u')^{-1}(\lambda \delta'(z))) = S_{1,\max} = \sup_{x \geq A} S_{1,\max} \geq S_1(A) \geq S_2(A) = S_{2,\max},$$

所以 $Q_{\lambda}^*(z)$ 是式 (3.26) 的最优解。

2. 当 $(u')^{-1}(\lambda \delta'(z)) \leq A$ ，由 (3.28) 可知

$$\begin{aligned} S_{1,\max} - S_{2,\max} &= S_1(A) - S_2((u')^{-1}(\lambda \delta'(z))) \\ &= S_1(A) - S_1((u')^{-1}(\lambda \delta'(z))) + \mu(\lambda), \end{aligned} \quad (3.31)$$

根据 u 的凹性，得到

$$u(x) - u(A) = u'(x)(x - A), \quad x = (u')^{-1}(\lambda \delta'(1 - T(a))),$$

由 $\mu(\lambda) \geq 0$ ，可知

$$\begin{aligned} \mu(\lambda) &= u((u')^{-1}(\lambda \delta'(1 - T(a)))) - u(A) - \lambda \delta'(1 - T(a)) \\ &\quad [(u')^{-1}(\lambda \delta'(1 - T(a))) - A], \end{aligned} \quad (3.32)$$

将式 (3.32) 代入式 (3.31)，得到

$$S_{1,\max} - S_{2,\max} = f((u')^{-1}(\lambda \delta'(z_{\min}))) - f((u')^{-1}(\lambda \delta'(z))),$$

这里

$$f(x) = u(x) - u'(x) + Au'(x),$$

由 $f'(x) = u''(x)(x - A)$ 可知, $f(\cdot)$ 在 $x \leq A$ 递减。

当 $0 < z < z_{\min}$, 由 $(u')^{-1}(\lambda \delta'(z)) \leq A$, $0 < z < z_{\max}(\lambda)$,

可知

$$(u')^{-1}(\lambda \delta'(z)) \leq (u')^{-1}(\lambda \delta'(z_{\min})) \leq A,$$

所以

$$S_{1,\max} - S_{2,\max} = f((u')^{-1}(\lambda \delta'(z_{\min}))) - f((u')^{-1}(\lambda \delta'(z))) \leq 0,$$

$$S_2(Q_{\lambda}^*(z)) = S_2((u')^{-1}(\lambda \delta'(z))) = S_{2,\max}.$$

所以, $Q_{\lambda}^*(z)$ 是式 (3.26) 的最优解。

3. 当 $z_{\max}(\lambda) \leq z < 1$, 根据 $(u')^{-1}(\lambda \delta'(z)) \leq A$, $0 < z < z_{\max}(\lambda)$,

可知

$$(u')^{-1}(\lambda \delta'(z_{\min})) \leq (u')^{-1}(\lambda \delta'(z)) \leq A,$$

所以

$$S_{1,\max} - S_{2,\max} = f((u')^{-1}(\lambda \delta'(z_{\min}))) - f((u')^{-1}(\lambda \delta'(z))) \geq 0,$$

$$S_1(Q_{\lambda}^*(z)) = S_1(A) = S_{1,\max}.$$

所以, $Q_{\lambda}^*(z)$ 是式 (3.26) 的最优解。

推论 3.2 $\lambda > \lambda_{\min}$, $Q_{\lambda}^*(z)$ 是下列问题的最优解

$$\sup_Q \int_0^1 [u(Q(z)) - \lambda \phi'(z)Q(z) - \mu(\lambda)1_{Q(z) < A}] dz. \quad (3.33)$$

证明: 因为 δ 是 ϕ 在 $[0,1]$ 的凹包络函数, 可知

$$\phi(0) = \delta(0) = -E[\rho], \quad \phi(1) = \delta(1), \quad \text{以及 } \delta(z) \geq \phi(z), \quad z \in [0,1].$$

使用 Fubini's 定理, 对于任意的 $Q \in \mathcal{M}$, 可知

$$\int_0^1 (u')^{-1}(\lambda \delta'(z))(\phi'(z) - \delta'(z)) dz = \int_0^1 (\delta(z) - \phi(z)) d(u')^{-1}(\lambda \delta'(z)) \geq 0.$$

因此

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 [u(Q(z)) - \lambda \varphi'(z)Q(z) - \mu(\lambda)1_{Q(z) < A}] dz \\
 & \leq \int_0^1 [u(Q(z)) - \lambda \delta'(z)Q(z) - \mu(\lambda)1_{Q(z) < A}] dz \\
 & \leq \int_0^1 [u(Q_\lambda^*(z)) - \lambda \delta'(z)Q_\lambda^*(z) - \mu(\lambda)1_{Q_\lambda^*(z) < A}] dz.
 \end{aligned}$$

使用 Fubini's 理论和上文中结论，得到

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 (\varphi'(z) - \delta'(z)) dQ_\lambda^*(z) dz = \int_0^1 (\delta(z) - \varphi(z)) dQ_\lambda^*(z) dz \\
 & = \int_{(0, z_{\min}] \cup [z_{\max}(\lambda), 1)} (\delta(z) - \varphi(z)) d(u')^{-1}(\lambda \delta'(z)) \\
 & + \int_{(z_{\min}, z_{\max}(\lambda))} (\delta(z) - \varphi(z)) dA = 0,
 \end{aligned}$$

可知

$$\int_0^1 \varphi'(z) Q_\lambda^*(z) dz = \int_0^1 \delta'(z) Q_\lambda^*(z) dz,$$

因此

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 [u(Q_\lambda^*(z)) - \lambda \varphi'(z)Q_\lambda^*(z) - \mu(\lambda)1_{Q_\lambda^*(z) < A}] dz \\
 & = \int_0^1 [u(Q_\lambda^*(z)) - \lambda \delta'(z)Q_\lambda^*(z) - \mu(\lambda)1_{Q_\lambda^*(z) < A}] dz.
 \end{aligned}$$

所以， $Q_\lambda^*(z)$ 是式 (3.33) 的最优解。

引理 3.4 依据 Mi^[28] 设 $\int_0^1 F_\rho^{-1}(z)(u')^{-1}(\lambda_{\min} \delta'(1-T(z))) dz > x_0 > A \int_0^a F_\rho^{-1}(z) dz$,

$Q_\lambda^*(z)$ 由式 (3.28) 得出，则存在一个唯一的常数 $\lambda^* > \lambda$ ，使得

$$\int_0^1 \varphi'(z) Q_{\lambda^*}^*(z) dz = x_0,$$

可知， $Q_{\lambda^*}^*(z)$ 是式 (3.20) 唯一的最优解。

证明：令

$$M(\lambda) = \int_0^1 \varphi'(z) Q_\lambda^*(z) dz.$$

由式 (3.25), 式 (3.26), 式 (3.27) 可知

$$M(\lambda) = \int_0^{z_{\min}} \varphi'(z)(u')^{-1}(\lambda\delta'(z))dz + \int_{z_{\min}}^1 \varphi'(z) \max\{(u')^{-1}(\lambda\delta'(z)), A\}dz,$$

结合式 (3.25), 式 (3.26), 式 (3.27) 可知 $M(\lambda)$ 在 $(\lambda_{\min}, \infty)$ 是严格单调递减, 得到

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \downarrow \lambda_{\min}} M(\lambda) &= \int_0^{z_{\min}} \varphi'(z)(u')^{-1}(\lambda\delta'(z))dz + \int_{z_{\min}}^1 \varphi'(z) \max\{(u')^{-1}(\lambda\delta'(z)), A\}dz \\ &\geq \int_0^1 \varphi'(z)(u')^{-1}(\lambda_{\min}\delta'(z))dz \\ &= \int_0^1 F_{\rho}^{-1}(z)(u')^{-1}(\lambda_{\min}\delta'(z))dz > x_0. \end{aligned}$$

同时

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \downarrow \lambda_{\min}} M(\lambda) &= \int_0^{z_{\min}} \varphi'(z)(u')^{-1}(\lambda\delta'(z))dz + \int_{z_{\min}}^1 \varphi'(z) \max\{(u')^{-1}(\lambda\delta'(z)), A\}dz \\ &= \int_{z_{\min}}^1 \varphi'(z)Adz = A \int_0^a F_{\rho}^{-1}(z)dz < x_0. \end{aligned}$$

因此, 存在唯一的常数 $\lambda^* > \lambda_{\min}$, 使得 $\int_0^1 \varphi'(z)Q_{\lambda^*}^*(z)dz = x_0$,

$Q_{\lambda^*}^*(z)$ 满足式 (3.20) 的第一个约束条件。

接下来说明当 $\lambda > \lambda_{\min}$, $Q_{\lambda^*}^*(z)$ 满足问题 (3.20) 的第二个约束条件,

由式 (3.25) 可知

$$\int_0^1 1_{\{Q_{\lambda^*}^*(z) < A\}} dz = \int_0^{z_{\min}} 1_{\{Q_{\lambda^*}^*(z) < A\}} dz = z_{\min} = 1 - T(a).$$

$Q_{\lambda^*}^*(z)$ 满足式 (3.20) 的第二个约束条件。

接下来说明 $Q_{\lambda^*}^*(z)$ 是式 (3.20) 的解中最优的, 假设 Q 是式 (3.20) 的解,

可知

$$\int_0^1 \varphi'(z)Q(z)dz \leq x_0 = \int_0^1 \varphi'(z)Q_{\lambda^*}^*(z)dz$$

$$\int_0^1 1_{\{Q(z) < A\}} dz \leq 1 - T(a) = \int_0^1 1_{\{Q_{\lambda^*}^*(z) < A\}} dz,$$

因此

$$\begin{aligned} & \int_0^1 u(Q_{\lambda^*}^*(z)) dz - \int_0^1 u(Q(z)) dz \\ &= \int_0^1 [u(Q_{\lambda^*}^*(z)) - \lambda \phi'(z) Q_{\lambda^*}^*(z) - \mu(\lambda) 1_{Q_{\lambda^*}^*(z) < A}] dz \\ & - \int_0^1 [u(Q(z)) - \lambda \phi'(z) Q(z) - \mu(\lambda) 1_{Q(z) < A}] dz \geq 0. \end{aligned}$$

因为效用函数 u 对于决策变量 Q 是严格凹的，并且 Q 的约束集也是凹的，所以 $Q_{\lambda^*}^*(z)$ 是式 (3.20) 唯一的最优解。

(3.8) 具有决策变量 X ，可将 (3.8) 由随机变量优化问题转化为分位数函数优化问题 (3.9)，得到最优解 $Q_{\lambda^*}^*(z)$ 。(3.8) 与 (3.9) 是等价的，(3.20) 是由 (3.9) 改写的。(3.8) 的唯一最优解 X^* 和 (3.20) 的唯一最优解 $Q_{\lambda^*}^*(z)$ 存在确定的关系，依据两者之间的关系，得到随机变量优化问题的唯一最优解 X^* 。

养老金市场投资环境变化不定，定价核 ρ 的大小可以反映市场状态的好坏。由 $Q_{\lambda^*}^*(z)$ 与 X^* 之间的关系，使问题由分位数优化问题 (3.20) 回到随机变量优化问题 (3.8)，得到 X^* 与定价核 ρ 之间的关系，通过定价核 ρ 的变化，反映 X^* 在不同市场状态下的效果。

定理 3.2 假设 $\int_0^1 F_{\rho}^{-1}(z)(u')^{-1}(\lambda_{\min} \delta'(1-T(z))) dz > x_0 > A \int_0^a F_{\rho}^{-1}(z) dz$ ，则最优终端财富

$$X^* = \begin{cases} (u')^{-1}(\lambda^* T(1 - F_{\rho}(\rho))) & \rho \leq \frac{u'(A)}{\lambda^*} T'(T^{-1}(1 - (\delta')^{-1}(\frac{u'(A)}{\lambda^*}))); \\ A & \frac{u'(A)}{\lambda^*} T'(T^{-1}(1 - (\delta')^{-1}(\frac{u'(A)}{\lambda^*}))) < \rho \leq F_{\rho}^{-1}(a); \\ (u')^{-1}(\lambda^* T(1 - F_{\rho}(\rho))) & \rho > F_{\rho}^{-1}(a), \end{cases} \quad (3.34)$$

是分位数优化问题 (3.8) 的唯一最优解。

其中, $\lambda^* > \lambda_{\min}$ 是唯一的常数被 $E[\rho X^*] = x_0$ 确定。

证明: $\varphi'(x) = \frac{F_\rho^{-1}(T^{-1}(1-x))}{T'(T^{-1}(1-x))}$, 由式 (3.11) 可以得到

$$\begin{aligned} F_\rho^{-1}(T^{-1}(1-(\delta')^{-1}(x))) &= \varphi'((\delta')^{-1}(x))T'(T^{-1}(1-(\delta')^{-1}(x))) \\ &= xT'(T^{-1}(1-(\delta')^{-1}(x))), \end{aligned}$$

结合 $X^* = G^*(1-F_\rho(\rho))$, $G^*(z) = Q^*(1-T(1-z))$, $z \in (0,1)$.

再由引理 3.3, 得到式 (3.34)。

由 Jin 和 Zhou^[24]知, φ 是一个凹函数, 或者是 S 型函数。

推论 3.3 1. 如果 φ 是一个凹函数

1.1 φ 的包络函数 δ 是一个凹函数, $T(\cdot)$ 不是一个恒等函数, 且 φ 和 δ 两个函数等价, 则 (3.8) 的唯一最优解为

$$X^* = \begin{cases} (u')^{-1}\left(\frac{\lambda^*}{T'(F_\rho(\rho))}\right) & \rho \leq \frac{u'(A)}{\lambda^*}T'(T^{-1}(1-(\varphi')^{-1}(\frac{u'(A)}{\lambda^*}))); \\ A & \frac{u'(A)}{\lambda^*}T'(T^{-1}(1-(\varphi')^{-1}(\frac{u'(A)}{\lambda^*}))) < \rho \leq F_\rho^{-1}(a); \\ (u')^{-1}\left(\frac{\lambda^*}{T'(F_\rho(\rho))}\right) & \rho > F_\rho^{-1}(a). \end{cases}$$

1.2 $T(\cdot)$ 是一个恒等函数, $T(x) = x$, $x \in [0,1]$, 则分位数优化问题 (3.8) 的唯一最优解为

$$X^* = \begin{cases} (u')^{-1}(\lambda^* \rho) & \rho \leq \frac{u'(A)}{\lambda^*}; \\ A & \frac{u'(A)}{\lambda^*} \leq \rho \leq F_\rho^{-1}(a); \\ (u')^{-1}(\lambda^* \rho) & \rho \geq F_\rho^{-1}(a). \end{cases}$$

2. 如果 φ 是 S 型函数

定义 $c = \inf\{z > 0: \varphi(z) = \delta(z)\}$, 因为 φ 是 S 型函数, 得到

$$\varphi(c) - \varphi(0) - \varphi'(c)c = 0, \delta'(z) = \begin{cases} \varphi'(c), & z < c; \\ \varphi'(z), & z \geq c. \end{cases}$$

2.1 如果 $c < z_{\min}$ ，则

$$Q_{\lambda}^*(z) = \begin{cases} (u')^{-1}(\lambda\varphi'(c)), & 0 < z < c; \\ (u')^{-1}(\lambda\varphi'(z)), & c \leq z < z_{\min}; \\ A & z_{\min} \leq z < z_{\max}(\lambda); \\ (u')^{-1}(\lambda\varphi'(z)), & z_{\max}(\lambda) \leq z < 1. \end{cases}$$

最优终端财富

$$X^* = \begin{cases} (u')^{-1}\left(\frac{\lambda^*}{T'(F_{\rho}(\rho))}\right) & \rho \leq \frac{u'(A)}{\lambda^*}T'(T^{-1}(1 - (\varphi')^{-1}(\frac{u'(A)}{\lambda^*}))); \\ A & \frac{u'(A)}{\lambda^*}T'(T^{-1}(1 - (\varphi')^{-1}(\frac{u'(A)}{\lambda^*}))) < \rho \leq F_{\rho}^{-1}(a); \\ (u')^{-1}\left(\frac{\lambda^*}{T'(F_{\rho}(\rho))}\right) & F_{\rho}^{-1}(a) < \rho \leq F_{\rho}^{-1}(T^{-1}(1 - c)); \\ (u')^{-1}\left(\frac{\lambda^*T^{-1}(1 - c)}{T'(T^{-1}(1 - c))}\right) & \rho > F_{\rho}^{-1}(T^{-1}(1 - c)). \end{cases}$$

是分位数优化问题 (3.8) 的唯一最优解。

2.2 如果 $z_{\min} \leq c < z_{\max}(\lambda)$ ，则

$$Q_{\lambda}^*(z) = \begin{cases} (u')^{-1}(\lambda\varphi'(c)), & 0 < z < z_{\min}; \\ A & z_{\min} \leq z < z_{\max}(\lambda); \\ (u')^{-1}(\lambda\varphi'(z)), & z_{\max}(\lambda) \leq z < 1. \end{cases}$$

最优终端财富

$$X^* = \begin{cases} (u')^{-1}\left(\frac{\lambda^*}{T'(F_{\rho}(\rho))}\right) & \rho \leq \frac{u'(A)}{\lambda^*}T'(T^{-1}(1 - (\varphi')^{-1}(\frac{u'(A)}{\lambda^*}))), \\ A & \frac{u'(A)}{\lambda^*}T'(T^{-1}(1 - (\varphi')^{-1}(\frac{u'(A)}{\lambda^*}))) < \rho \leq F_{\rho}^{-1}(a), \\ (u')^{-1}\left(\frac{\lambda^*T^{-1}(1 - c)}{T'(T^{-1}(1 - c))}\right) & \rho > F_{\rho}^{-1}(a). \end{cases}$$

是分位数优化问题 (3.8) 的唯一最优解。

接下来考虑 VaR 无法捕捉尾部的风险，而 DC 养老金参与者需要确保自己

的终端财富高于一定的值，以保障退休之后的基本生活。假设在 T 时刻， B 为 DC 型养老金的最低保障水平，式 (3.8) 可以重新写成

$$\begin{aligned} & \sup_X \int_0^\infty u(x) d(1 - T(1 - F_X(x))) \\ & \text{s.t. } E[\rho X] \leq x_0, X \geq 0, \\ & P(X \geq A) \geq a, X \geq B. \end{aligned} \quad (3.35)$$

在式 (3.35) 中，无论在什么样的市场环境下，参与者的收入都是大于 B ，从而保证参与者退休之后的基本生活，式 (3.35) 等价于

$$\begin{aligned} & \sup_X \int_0^\infty u(x) d(1 - T(1 - F_X(x))) \\ & \text{s.t. } E[\rho X] \leq x_0, X \geq \max\{0, B\}, \\ & P(X \geq A) \geq a, X \geq B. \end{aligned} \quad (3.36)$$

假设 $Y = X - \max\{0, B\}$ ， $\bar{A} = A - \max\{0, B\} > 0$ ，(3.36) 可以写成

$$\begin{aligned} & \sup_Y \int_0^\infty \bar{u}(x) d(1 - T(1 - F_Y(x))) \\ & E[\rho Y] \leq x_0, Y \geq 0, \\ & P(Y \geq \bar{A}) \geq a, \end{aligned} \quad (3.37)$$

其中， $\bar{u}(x) = u(x + \max\{0, a\})$ ， $\bar{x}_0 = x_0 - \max\{0, a\}E[\rho]$ 。

由上文发现式 (3.8) 与式 (3.37) 只有参数不同，式 (3.8) 的结论对于式 (3.37) 同样适用，根据上述结论和定理 3.2，得到定理 3.3。

定理 3.3 假设 $\int_0^1 F_\rho^{-1}(z)(u')^{-1}(\lambda_{\min} \delta'(1 - T(z))) dz > x_0 > A \int_0^a F_\rho^{-1}(z) dz$,

分位数优化问题 (3.37) 唯一的最优解为：

当 $1 - (\delta')^{-1}(\frac{u'(B)}{\lambda^*}) < 1 - T(a)$ ，则最优终端财富

$$X^* = \begin{cases} (u')^{-1}(\lambda^* \delta'(1-T(F_\rho(\rho)))) & \rho \leq \frac{u'(A)}{\lambda^*} T'(T^{-1}(1-(\delta')^{-1}(\frac{u'(A)}{\lambda^*}))), \\ A & \frac{u'(A)}{\lambda^*} T'(T^{-1}(1-(\delta')^{-1}(\frac{u'(A)}{\lambda^*}))) < \rho \leq F_\rho^{-1}(a), \\ (u')^{-1}(\lambda^* \delta'(1-T(F_\rho(\rho)))) & F_\rho^{-1}(a) < \rho < \frac{u'(B)}{\lambda^*} T'(T^{-1}(1-(\delta')^{-1}(\frac{u'(B)}{\lambda^*}))), \\ B & \rho > \frac{u'(B)}{\lambda^*} T'(T^{-1}(1-(\delta')^{-1}(\frac{u'(B)}{\lambda^*}))). \end{cases}$$

是分位数优化问题 (3.37) 的唯一最优解。

当 $(\delta')^{-1}(\frac{u'(B)}{\lambda^*}) \geq 1-T(a)$ ，则最优终端财富

$$X^* = \begin{cases} (u')^{-1}(\lambda^* \delta'(1-T(F_\rho(\rho)))) & \rho \leq \frac{u'(A)}{\lambda^*} T'(T^{-1}(1-(\delta')^{-1}(\frac{u'(A)}{\lambda^*}))), \\ A & \frac{u'(A)}{\lambda^*} T'(T^{-1}(1-(\delta')^{-1}(\frac{u'(A)}{\lambda^*}))) < \rho \leq F_\rho^{-1}(a), \\ B & \rho > F_\rho^{-1}(a). \end{cases}$$

由上文可知 $\varphi'(x) = \frac{F_\rho^{-1}(T^{-1}(1-x))}{T'(T^{-1}(1-x))}$ ，根据 F_ρ^{-1} 和 $T(\cdot)'$ 的单调性，结合 Jin 和

Zhou^[24]， φ 是一个凹函数，或者是 S 型函数。

推论 3.4 如果 φ 是一个凹函数

1.1 φ 的包络函数 δ 是一个凹函数。

$T(\cdot)$ 不是一个恒等函数，并且 φ 和 δ 两个函数等价，则分位数优化问题 (3.37)

的唯一最优解为

当 $1-(\delta')^{-1}(\frac{u'(B)}{\lambda^*}) < 1-T(a)$ ，则最优终端财富

$$X^* = \begin{cases} A & \begin{cases} (u')^{-1}(\lambda^* \delta'(\frac{\lambda^*}{T'(F_\rho(\rho))})) & \rho \leq \frac{u'(A)}{\lambda^*} T'(T^{-1}(1 - (\varphi')^{-1}(\frac{u'(A)}{\lambda^*}))), \\ \frac{u'(A)}{\lambda^*} T'(T^{-1}(1 - (\varphi')^{-1}(\frac{u'(A)}{\lambda^*}))) < \rho \leq F_\rho^{-1}(a), \\ (u')^{-1}(\lambda^* \delta'(\frac{\lambda^*}{T'(F_\rho(\rho))})) & F_\rho^{-1}(a) < \rho < \frac{u'(B)}{\lambda^*} T'(T^{-1}(1 - (\varphi')^{-1}(\frac{u'(B)}{\lambda^*}))), \\ B & \rho > \frac{u'(B)}{\lambda^*} T'(T^{-1}(1 - (\varphi')^{-1}(\frac{u'(B)}{\lambda^*}))). \end{cases} \end{cases}$$

当 $(\delta')^{-1}(\frac{u'(B)}{\lambda^*}) \geq 1 - T(a)$, 则最优终端财富

$$X^* = \begin{cases} A & \begin{cases} (u')^{-1}(\lambda^* \delta'(\frac{\lambda^*}{T'(F_\rho(\rho))})) & \rho \leq \frac{u'(A)}{\lambda^*} T'(T^{-1}(1 - (\varphi')^{-1}(\frac{u'(A)}{\lambda^*}))), \\ \frac{u'(A)}{\lambda^*} T'(T^{-1}(1 - (\varphi')^{-1}(\frac{u'(A)}{\lambda^*}))) < \rho \leq F_\rho^{-1}(a), \\ B & \rho > F_\rho^{-1}(a). \end{cases} \end{cases}$$

1.2 当 $T(\cdot)$ 是一个恒等函数, 则分位数优化问题 (3.37) 唯一的最优解为

当 $(\delta')^{-1}(\frac{u'(B)}{\lambda^*}) < 1 - T(a)$, 则最优终端财富

$$X^* = \begin{cases} A & \begin{cases} (u')^{-1}(\lambda^* \delta'(\lambda^* \rho)) & \rho \leq \frac{u'(A)}{\lambda^*}, \\ \frac{u'(A)}{\lambda^*} < \rho \leq F_\rho^{-1}(a), \\ (u')^{-1}(\lambda^* \delta'(\lambda^* \rho)) & F_\rho^{-1}(a) < \rho \leq \frac{u'(B)}{\lambda^*}, \\ B & \rho > \frac{u'(B)}{\lambda^*}. \end{cases} \end{cases}$$

当 $(\delta')^{-1}(\frac{u'(B)}{\lambda^*}) \geq 1 - T(a)$, 则最优终端财富

$$X^* = \begin{cases} (u')^{-1}(\lambda^* \delta'(\lambda^* \rho)) & \rho \leq \frac{u'(A)}{\lambda^*}, \\ A & \frac{u'(A)}{\lambda^*} < \rho \leq F_\rho^{-1}(a), \\ B & \rho > F_\rho^{-1}(a). \end{cases}$$

2. 如果 φ 是 S 型函数

定义 $c = \inf\{z > 0 : \varphi(z) = \delta(z)\}$, 因为 φ 是 S 型函数, 得到

$$\varphi(c) - \varphi(0) - \varphi'(c)c = 0, \delta'(z) = \begin{cases} \varphi'(c), & z < c; \\ \varphi'(z), & z \geq c. \end{cases}$$

2.1 如果 $c < 1 - T(a)$, $(\delta')^{-1}(\frac{u'(B)}{\lambda^*}) < c$, 则最优终端财富

$$X^* = \begin{cases} (u')^{-1}(\lambda^* \delta'(\frac{\lambda^*}{T'(F_\rho(\rho))})) & \rho \leq \frac{u'(A)}{\lambda^*} T'(T^{-1}(1 - (\varphi')^{-1}(\frac{u'(A)}{\lambda^*}))), \\ A & \frac{u'(A)}{\lambda^*} T'(T^{-1}(1 - (\varphi')^{-1}(\frac{u'(A)}{\lambda^*}))) < \rho \leq F_\rho^{-1}(a), \\ (u')^{-1}(\lambda^* \delta'(\frac{\lambda^*}{T'(F_\rho(\rho))})) & F_\rho^{-1}(a) < \rho \leq F_\rho^{-1}(T^{-1}(1 - c)), \\ (u')^{-1}(\frac{\lambda^* T^{-1}(1 - c)}{T'(T^{-1}(1 - c))}) & F_\rho^{-1}(T^{-1}(1 - c)) < \rho \leq \frac{u'(B)}{\lambda^*} T'(T^{-1}(1 - (\varphi')^{-1}(\frac{u'(B)}{\lambda^*}))), \\ B & \rho > \frac{u'(B)}{\lambda^*} T'(T^{-1}(1 - (\varphi')^{-1}(\frac{u'(B)}{\lambda^*}))). \end{cases}$$

是分位数优化问题 (3.37) 的唯一最优解。

2.2 当 $c \leq (\delta')^{-1}(\frac{u'(B)}{\lambda^*}) < 1 - T(a)$, 则最优终端财富

$$X^* = \begin{cases} (u')^{-1}(\lambda^* \delta'(\frac{\lambda^*}{T'(F_\rho(\rho))})) & \rho \leq \frac{u'(A)}{\lambda^*} T'(T^{-1}(1 - (\varphi')^{-1}(\frac{u'(A)}{\lambda^*}))), \\ A & \frac{u'(A)}{\lambda^*} T'(T^{-1}(1 - (\varphi')^{-1}(\frac{u'(A)}{\lambda^*}))) < \rho \leq F_\rho^{-1}(a), \\ (u')^{-1}(\lambda^* \delta'(\frac{\lambda^*}{T'(F_\rho(\rho))})) & F_\rho^{-1}(a) < \rho < \frac{u'(B)}{\lambda^*} T'(T^{-1}(1 - (\varphi')^{-1}(\frac{u'(B)}{\lambda^*}))), \\ B & \rho > \frac{u'(B)}{\lambda^*} T'(T^{-1}(1 - (\varphi')^{-1}(\frac{u'(B)}{\lambda^*}))). \end{cases}$$

是分位数优化问题 (3.37) 的唯一最优解。

2.3 当 $c > 1 - T(a)$, $1 - T(a) < (\delta')^{-1}(\frac{u'(B)}{\lambda^*}) < c$, 则最优终端财富

$$X^* = \begin{cases} (u')^{-1}(\lambda^* \delta'(\frac{\lambda^*}{T'(F_\rho(\rho))})) & \rho \leq \frac{u'(A)}{\lambda^*} T'(T^{-1}(1 - (\varphi')^{-1}(\frac{u'(A)}{\lambda^*}))), \\ A & \frac{u'(A)}{\lambda^*} T'(T^{-1}(1 - (\varphi')^{-1}(\frac{u'(A)}{\lambda^*}))) < \rho \leq F_\rho^{-1}(a), \\ (u')^{-1}(\frac{\lambda^* T^{-1}(1-c)}{T'(T^{-1}(1-c))}) & F_\rho^{-1}(a) < \rho \leq \frac{u'(B)}{\lambda^*} T'(T^{-1}(1 - (\varphi')^{-1}(\frac{u'(B)}{\lambda^*}))), \\ B & \rho > \frac{u'(B)}{\lambda^*} T'(T^{-1}(1 - (\varphi')^{-1}(\frac{u'(B)}{\lambda^*}))). \end{cases}$$

是分位数优化问题 (3.37) 的唯一最优解。

2.4 当 $(\delta')^{-1}(\frac{u'(B)}{\lambda^*}) > c > 1 - T(a)$, 则最优终端财富

$$X^* = \begin{cases} (u')^{-1}(\lambda^* \delta'(\frac{\lambda^*}{T'(F_\rho(\rho))})) & \rho \leq \frac{u'(A)}{\lambda^*} T'(T^{-1}(1 - (\varphi')^{-1}(\frac{u'(A)}{\lambda^*}))), \\ A & \frac{u'(A)}{\lambda^*} T'(T^{-1}(1 - (\varphi')^{-1}(\frac{u'(A)}{\lambda^*}))) < \rho \leq F_\rho^{-1}(a), \\ B & \rho > F_\rho^{-1}(a). \end{cases}$$

是分位数优化问题 (3.37) 的唯一最优解。

3.3 特殊情况下数值模拟

在本章中，效用函数统一使用 RDEU，将研究在特殊情况下（一般情况下的解未考虑 VaR 和 PI 约束，现实参考意义不足，在此不做模拟）一些模型参数对两种类型的 DC 型养老金默认投资政策效果的影响，并进行数值模拟。

效用函数 RDEU 是幂效用函数和概率扭曲函数两部分组成，其中，幂效用函数 $u(x) = \frac{x^{1-\eta} - 1}{1-\eta}$ ， $0 < \eta \neq 1$ ，概率扭曲函数 $T(x) = \Phi(\Phi^{-1}(x) + \beta)$ ， $\beta > 0$ 且是常数， $\Phi(\cdot)$ 是标准正态分布函数，由 $T'(\Phi(x)) = e^{-\beta(x+0.5\beta)}$ ，单调递减， $T(x)$ 是凹的。

假设无风险资产的回报率以及风险资产的波动率都是常数，因此，定价核 ρ 遵循对数正态分布： $\ln \rho \sim N(-(r + \frac{\theta^2}{2})T, \theta^2 T)$ 。

3.3.1 基准水平的影响

利用式（3.34）来分析基准 A 对采取智利型和美国型默认投资政策的 DC 型养老金最优终端财富 X^* 的影响，使用的参数设定参考文献[28, 41]。

$$r = 0.05, \theta = 0.4, x_0 = 1, \eta = 1.5, \beta = 0.1, a = 0.5, \pi = 0.16, \mu = 0.05, \alpha = 2.5\%.$$

$$\sigma = 0.2, \lambda_s = 0.1.$$

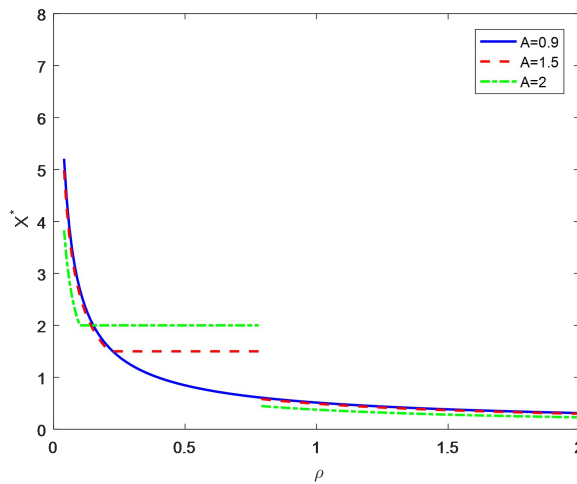
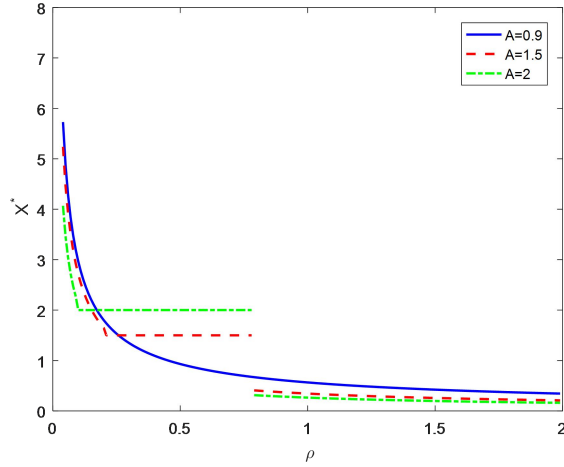


图 3-1 基准 A 对智利型默认投资政策最优终端财富 X^* 的影响


 图 3-2 基准 A 对美国型默认投资政策最优终端财富 X^* 的影响

最优终端财富 X^* ，作为定价内核 ρ 的函数，分为三个区间，分别称之为较好的市场状态（第一个区间 ρ 较小），中等市场状态（第二个区间 ρ 中等），较差的市场状态（第三个区间 ρ 较大）。下面将介绍基准 A 如何影响默认投资政策效果。

从图 1，2 中可以看出，如果 A 上升，中间市场状态所占的比例会变大，终端财富会上升，而较好市场和较差市场状态的终端财富都会下降。给定两个特定的基准 $A_1 < A_2$ ，由前文结论可知拉格朗日乘子 $\lambda_1 < \lambda_2$ ，可以得到如下

$$\frac{(u')^{-1}\left(\frac{\lambda_2}{T'(F_\rho(\rho))}\right)}{(u')^{-1}\left(\frac{\lambda_1}{T'(F_\rho(\rho))}\right)} = \frac{\left(\frac{\lambda_2}{T'(F_\rho(\rho))}\right)^{-\frac{1}{\eta}}}{\left(\frac{\lambda_1}{T'(F_\rho(\rho))}\right)^{-\frac{1}{\eta}}} = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{1}{\eta}} < 1.$$

当 $A = 0.9$ 时，基准较低，以致 VaR 约束自动保持，因此最优财富 X^* 等价于没有约束的财富。当 A 上升时， X^* 作为 ρ 的函数存在分段，为了满足 VaR 的限制，函数会出现跳跃。同时，具有 $A = 2$ 的中间状态比具有 $A = 1.5$ 的中间状态占总的状态的比例更大。除中间状态外， $A = 2$ 在其他市场状态下，它的终端财富都低于 $A = 1.5$ ，这意味着，为了获得较多的有保障收入，养老金参与者需要在较好的环境下和较差的市场环境下放弃一些回报。对比两种默认投资政策发现，因为美国型默认投资政策策略更加激进，处于较好的市场状态时，可以取得比智利型默认投资政策更好的投资效果，而处于较差的市场状态时，投资效果不如智利

型默认投资政策。

3.3.2 置信水平的影响

利用式 (3.34) 来分析置信水平 a 对智利型和美国型默认投资政策的 DC 型养老金最优终端财富 X^* 的影响, 使用的参数设定参考文献[28, 41]。

$$r = 0.05, \theta = 0.4, x_0 = 1, \eta = 1.5, \beta = 0.1, a = 0.5, \pi = 0.16, \mu = 0.05, \alpha = 2.5\%.$$

$$\sigma = 0.2, \lambda_s = 0.1.$$

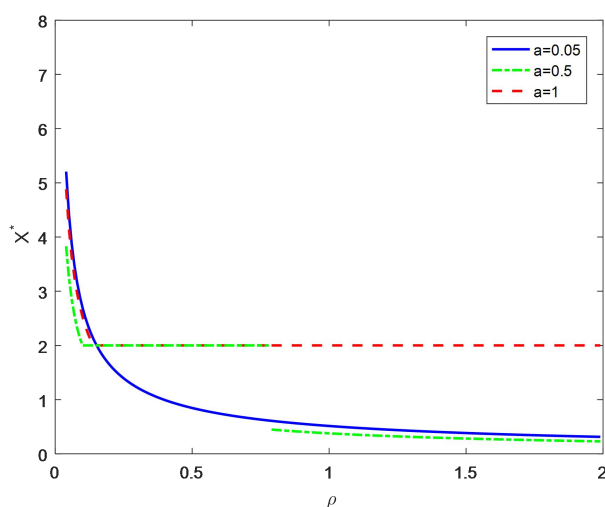


图 3-3 置信水平 a 对美国型默认投资政策最优终端财富 X^* 的影响

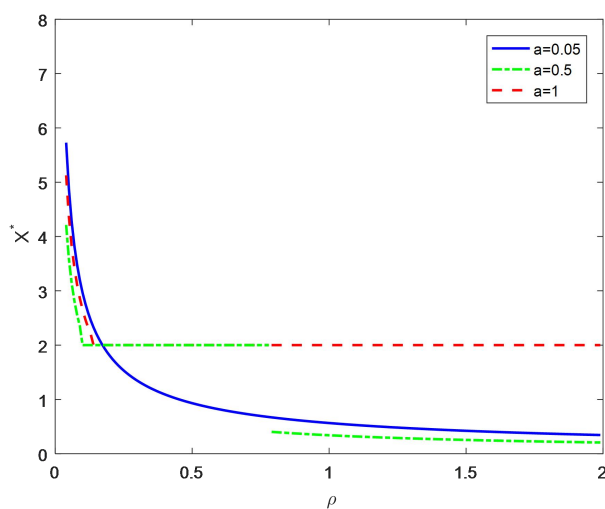


图 3-4 置信水平 a 对美国型默认投资政策最优终端财富 X^* 的影响

当 a 为 0.05 时, 置信水平太低, 随着 a 的增加, DC 型养老金参与者实现终

端财富目标的概率在上升,所以养老金参与者必须在无论好坏的市场环境下接受较低的终端财富。由于养老金参与者在退休之后希望尽可能地维持退休前的生活水平,参与者希望他的终端财富不少于 2,这就可能会出现因为较保守(默认的投资策略是事先选定的,而不能根据市场变化进行调整),而在较好的市场环境下损失一部分收益,但可以确保其终端财富不会少于 2,养老金参与者通过放弃在良好市场状态下的一些收益,保证收益无论在什么市场环境下不低于 2。而对比两种默认投资政策,由于美国型默认投资政策比较激进,获得高收益的可能性更高,在置信水平要求较低时,整体表现优于智利型默认投资政策,而当置信水平要求较高时,其在较好市场状态下的收益优于智利型默认投资政策,在较差市场状态下收益不如智利型默认投资政策。

3.3.3 VaR-PI 下默认投资政策效果

比较两种默认投资政策在不同模型下的效果:分别是 VaR 模型, VaR-PI 模型, PI 模型。

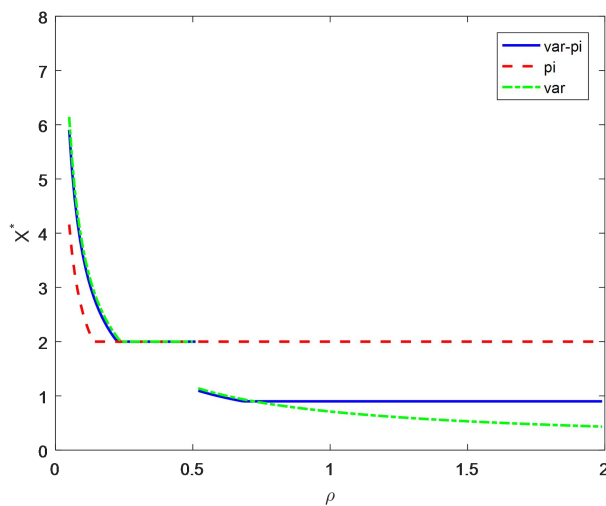
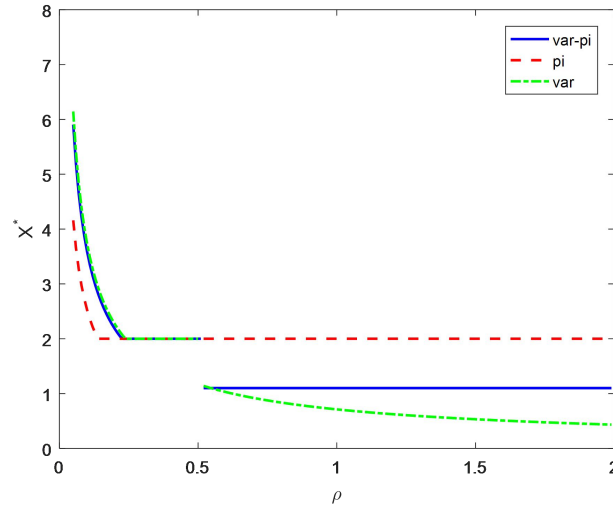


图 3-5 不同模型下美国型默认投资政策最优终端财富 X^*

VaR-PI 与 VaR-PI 相比, VaR-PI 在较好的市场投资环境下牺牲了部分收益,但保证了在较差的市场投资环境下的最低财富水平,而 VaR-PI 在较差的市场状态下可能有极低的结果。

VaR-PI 与 PI 相比, VaR-PI 在较好的市场投资条件下取得更好的结果,在较差的市场投资状态下取得可接受的结果。

图 3-6 不同模型下智利型默认投资政策最优终端财富 X^*

对比两种类型的默认投资政策，智利型默认投资政策投资策略相对保守，较好的市场投资环境下收益会降低，较差的市场投资环境下收益会提高，VaR-PI 从四段变成三段，第二段的比例上升。

再考虑 VaR-PI 约束，两种类型的默认投资政策无论是在较好的市场环境下还是较差的市场环境下，都能取得可接受的投资效果。虽然智利型默认投资政策会让参与者在较好的市场投资环境下损失一部分的收益，而美国型默认投资政策在市场环境较差时收益也不甚理想。考虑到参与者金融知识的匮乏以及不积极地进行投资决策，以及随着退休的临近对于风险的厌恶，默认投资政策可推广性，默认投资政策在降低风险的同时，可以使参与者退休后的基本生活得到较好的保障，这样的投资政策是可接受的。

3.4 本章小结

本章研究了基于随机收入和前景理论下 DC 型养老金默认投资政策效果问题，考虑了 VaR-PI 约束，以降低风险，通过分位数公式以及松弛等方法得到了最优终端财富的显示解。随后进行数值分析，基准水平，置信水平等一系列参数，分析 VaR, PI 等对于最优终端财富的影响，并比较了智利型和美国型两种默认投资政策在不同市场环境下的表现。经过数值分析得出，在 VaR-PI 约束下 DC 型养老金默认投资政策无论市场环境的好坏都可以取得可接受的投资效果，以保障参与者退休之后的基本生活，同时由于默认投资政策的简洁，适合金融知识匮乏

乏而不积极做出投资选择的参与者采用。而对比两种默认投资政策，智利型默认投资政策策略相对保守，较好的市场投资环境下收益会降低，较差的市场投资环境下收益会提高，美国型默认投资政策则较激进，在较好的市场环境下，可以取得更好的投资效果。

根据上述研究结果可以得出以下结论：首先对于部分金融知识匮乏的养老金参与者来说，默认投资政策是可行的投资策略。其次，养老金参与者可以根据自身对于风险的偏好选择不同的默认投资政策。同时还需要继续优化和推出默认投资政策，满足更多参与者需求。

第4章 基于默认投资政策的DC养老金最优再保险策略问题

本章鉴于个人倾向于简单选择的决策习惯以及部分参与者金融知识的缺乏，为部分参与者提供默认投资政策是有必要的，同时在退休之后，参与者的风险可以通过再保险分散给再保险公司，增加投资收益。本章假定参与者采取不同类型的默认投资政策，研究在随机通胀和随机死亡下采取不同类型的默认投资政策DC型养老金最优再保险策略问题。首先，建立DC型养老金账户资金的动态随机微分方程；然后考虑通胀环境下期望收益风险最小化问题，使用动态规划方法推导出DC型养老金最优再保险策略的显示解，最后进行数值模拟分析模型参数对于不同类型默认投资政策的再保险比例的影响。结果表明，美国型默认投资政策对于市场变化的反应更加敏感，在市场环境好转时投资于风险资产比例增幅对于智利型，在市场环境转差时投资于风险资产比例减幅也多于智利型。

4.1 模型建立

假设无风险资产在 t 时刻的价格满足如下随机微分方程

$$dS_0(t) = rS_0(t)dt, \quad S_0(0) = S_0. \quad (4.1)$$

其中， r 是无风险利率， $r > 0$ 。

假设风险资产的价格过程满足如下随机微分方程

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma_s S(t)(\lambda_s + dW_s(t)), \quad S(0) = S_1. \quad (4.2)$$

其中， $W(t)$ 是标准布朗运动， λ_s 表示风险资产的价格， σ_s 是风险资产波动率。

通常使用物价指数来度量通货膨胀水平， $\psi(t)$ 是 t 时刻的物价指数， $\psi(t)$ 满足如下随机微分方程

$$d\psi(t) = \psi(t)(\mu_\psi dt + \sigma_\psi dW(t)), \quad \psi(0) = \psi_0. \quad (4.3)$$

其中， μ_ψ 表示通货膨胀率， σ_ψ 表示物价受通胀影响的波动率。

假设 DC 型养老金账户的初始资金是 X_0 ，参与者在积累期内持续向 DC 型养老金账户缴费，缴费率 $C(t)$ 满足如下随机微分方程

$$dC(t) = c\psi(t)dt. \quad (4.4)$$

其中， c 是大于 0 的常数。

假设在 t 时刻 DC 型养老金初始财富为 $X(t)$ ， $p(t)$ 和 $1-p(t)$ 分别为投资于风险资产，无风险资产的比例。工资单位水平 1，单位时间投资于风险资产的分红为 δ ，名义上的 DC 型养老金账户财富过程满足如下随机微分方程

$$\begin{aligned} dX(t) &= X(t)((r + (\sigma_s \lambda_s + \delta)p(t)dt) + \sigma_s p(t)dW(t)) + c\psi(t)dt, \\ X(0) &= X_0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

在考虑通胀风险后，假设 DC 型养老金账户真实财富过程为 $Y(t)$ ， $Y(t)$ 可以用 $Y(t) = \frac{X(t)}{\psi(t)}$ 表示，使用伊藤引理，得到下式

$$\begin{aligned} dY(t) &= Y(t)(r + \sigma_s \lambda_s p(t) + \delta p(t) + \sigma_\psi^2 - \mu_\psi - \sigma_s \sigma_\psi p(t))dt \\ &\quad + cdt + Y(t)(\sigma_s p(t) - \sigma_\psi)dW(t), \\ Y(0) &= \frac{X_0}{\psi_0} = Y_0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

智利型养老金默认投资政策在积累阶段的初始时刻，DC 型养老金参与者个人账户的资金全部投资于风险资产，之后每年按照一定的比例向无风险资产转移，最终在退休时刻 T ，所有资产均以无风险资产持有，风险资产会以每年固定的比例 α 向无风险资产转移，风险资产的投资比例是一个与年限相关的线性函数，且 $p_s(t=1)=1$ ， $p_s(t=T)=0$ ， $p_s(t)$ 定义为

$$p(t) = 1 - \alpha(t-1). \quad (4.7)$$

美国型默认投资选择标准以富达自由基金为例，通常在距离退休日期 20 年以上时，风险资产占比维持在 90% 的高位，而后每年按照一定比例 b 将资金从风险资产转移到无风险资产，在退休时刻，风险资产占比仅约 20%，则

$$p_{s1}(t) = \begin{cases} 0.9 & 0 < t \leq T-20; \\ 0.9 - b(t - (T-20)), & T-20 < t < T; \\ 0.2 & t = T. \end{cases}$$

假设死亡人数将遵循一个带有漂移的布朗运动,

$$dl(t) = \theta(t)dt + v(t)dW_l(t). \quad (4.8)$$

其中, $\theta(t)$ 和 $v(t)$ 分别描述了漂移和波动率, $l(t)$ 为 t 时刻的生命数, $dl(t)$ 解释了该时间间隔内的死亡数 $[t, t + \Delta t]$, $W_l(t)$ 是另一个标准的布朗运动, 它独立于 $W_s(t)$.

4.2 DC 养老金最优再保险策略问题

4.2.1 一般情况下无默认投资政策 DC 养老金最优再保险问题

在上述模型中, 仅考虑从退休时间到固定时间 T , 依据上述假设, 得到养老金账户变化的方程

$$\begin{aligned} dY(t) = & Y(t)(r + \sigma_s \lambda_s p(t) + \delta p(t) + \sigma_\psi^2 - \mu_\psi - \sigma_s \sigma_\psi p(t))dt + cdt \\ & + Y(t)(\sigma_s p(t) - \sigma_\psi)dW(t) - A(-dl(t)). \end{aligned} \quad (4.9)$$

其中, $Y(0) = Y_0$, DC 型养老金参与者的目标是在期望收益风险最小化, 因此 DC 型养老金参与者的目标函数如下

$$\min_{\{p(t), \pi(t)\}} E(Y - A_{s+T})^2. \quad (4.10)$$

其中, $Y = Y(T)$, A_{s+T} 是计划参与者希望实现的目标。

DC 型养老金计划中, 退休后养老金参与者所面临的风险可以通过“收入提取选项”来降低: 允许计划参与者在退休后选择何时将最终资本转换为养老金, 养老金管理者可以购买再保险, 设 $\pi(t)$ 在 t 时刻基金管理者的自留比例, $1 - \pi(t)$ 是由再保险公司支付索赔的比例, 并限制 $\pi(t) \leq 1$, 养老金参与者的养老金账户过程变成如下式

$$\begin{aligned}
 dY(t) = & Y(t)(r + \sigma_s \lambda_s p(t) + \delta p(t) + \sigma_\psi^2 - \mu_\psi - \sigma_s \sigma_\psi p(t))dt \\
 & + cdt + Y(t)(\sigma_s p(t) - \sigma_\psi) dW(t) - (1 - \pi(t))A(-dl(t)) \\
 & + (1 + \lambda)E(\pi(t)(-dl(t))).
 \end{aligned} \quad (4.11)$$

其中, $\lambda > 0$ 是再保险公司的安全负荷。

定理 4.1 DC 型养老金投资和再保险的最优比例是

$$\begin{aligned}
 p(t)^* &= -\frac{(\sigma_s \lambda_s + \delta - \sigma_s \sigma_\psi)}{Y(\sigma_s - 2\sigma_\psi)\sigma_s} \frac{V_Y}{V_{YY}} \\
 &= -\frac{(\sigma_s \lambda_s + \delta - \sigma_s \sigma_\psi)}{Y(\sigma_s - 2\sigma_\psi)\sigma_s} \left\{ (Y - A_{s+T}) + \frac{Q(t)}{2M(t)} \right\}, \\
 \pi(t)^* &= -\frac{\lambda \theta}{Av^2} \frac{V_Y}{V_{YY}} + 1 \\
 &= -\frac{\lambda \theta}{Av^2} \left\{ (Y - A_{s+T}) + \frac{Q(t)}{2M(t)} \right\} + 1.
 \end{aligned}$$

证明: 由于鞅性^[41], 计划参与者的养老金账户过程变成如下式

$$\begin{aligned}
 dY(t) = & Y(t)(r + \sigma_s \lambda_s p(t) + \delta p(t) + \sigma_\psi^2 - \mu_\psi - \sigma_s \sigma_\psi p(t))dt + cdt + Y(t) \\
 & (\sigma_s p(t) - \sigma_\psi) dW(t) + (\pi(t) - 1)A\{\theta(t)dt + v(t)dW_l(t)\} - (1 + \lambda)A\pi(t)\theta(t)dt \\
 = & \{(r + \sigma_s \lambda_s p(t) + \delta p(t) + \sigma_\psi^2 - \mu_\psi - \sigma_s \sigma_\psi p(t))Y(t) - (\lambda\pi(t) + 1)A\theta(t) + c\}dt \\
 & + Y(t)(\sigma_s p(t) - \sigma_\psi)dW(t) + (\pi(t) - 1)Av(t)dW_l(t).
 \end{aligned}$$

利用动态规划方法推导了上述最优问题的 HJB 方程

$$\begin{aligned}
 0 = & \min\{V_t + (r + \sigma_s \lambda_s p(t) + \delta p(t) + \sigma_\psi^2 - \mu_\psi - \sigma_s \sigma_\psi p(t))Y \\
 & - (\lambda\pi(t) + 1)A\theta(t) + c)V_Y + \frac{1}{2}(Y^2(\sigma_s p(t) - \sigma_\psi)^2 \\
 & + (\pi(t) - 1)^2 A^2 v^2)V_{YY}\}.
 \end{aligned} \quad (4.12)$$

其中, V_t, V_Y, V_{YY} 表示值函数的一阶、二阶偏导数。

通过取一阶条件, 可以得到 $p(t)$, $\pi(t)$ 的最优值,

$$\begin{aligned}
 p^*(t) &= -\frac{(\sigma_s \lambda_s + \delta - \sigma_s \sigma_\psi)}{Y(\sigma_s - 2\sigma_\psi)\sigma_s} \frac{V_Y}{V_{YY}}, \\
 \pi^*(t) &= -\frac{\lambda \theta}{Av^2} \frac{V_Y}{V_{YY}} + 1.
 \end{aligned} \quad (4.13)$$

将最优解 $p^*(t)$, $\pi^*(t)$ 代入上式 (4.12), 得到

$$0 = V_t + \{(r + \sigma_\psi^2 - \mu_\psi)Y - (1 + \lambda)A\theta + c\}V_Y + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda^2}{v^2} + \frac{(\sigma_s\lambda_s + \delta - \sigma_s\sigma_\psi)^2}{((\sigma_s - 2\sigma_\psi)\sigma_s)^2}\right)\frac{V_Y^2}{V_{YY}}. \quad (4.14)$$

定义如下所示的价值函数

$$V(T, Y) = (Y - A_{s+T})^2,$$

为了求偏微分方程 (4.12) 的解, 假设一个如下形式的二次值函数

$$V(t, Y) = M(t)(Y - A_{s+T})^2 + Q(t)(Y - A_{s+T}) + R(t), \quad (4.15)$$

其中, $M(t)$, $Q(t)$ 和 $R(t)$ 是时间 t 的函数, 得到

$$\begin{cases} V_Y = 2M(t)(Y - A_{s+T}) + Q(t), \\ V_{YY} = 2P(t), \\ V_t = P(t)(Y - A_{s+T})^2 + Q(t)(Y - A_{s+T}) + R(t)'. \end{cases} \quad (4.16)$$

将 (4.16) 代入 (4.14), 并按 $Y - A_{s+T}$ 的降幂排列, 可以得到如下结果

$$\begin{aligned} 0 = & \{M(t)' + 2(r + \sigma_\psi^2 - \mu_\psi)M(t) - \left(\frac{\lambda^2}{v^2} + \frac{(\sigma_s\lambda_s + \delta - \sigma_s\sigma_\psi)^2}{((\sigma_s - 2\sigma_\psi)\sigma_s)^2}\right) \\ & M(t)\}(Y - A_{s+T})^2 + \{Q(t)' + (r + \sigma_\psi^2 - \mu_\psi)Q(t) \\ & - \left(\frac{\lambda^2}{v^2} + \frac{(\sigma_s\lambda_s + \delta - \sigma_s\sigma_\psi)^2}{((\sigma_s - 2\sigma_\psi)\sigma_s)^2}\right)Q(t) + 2[(r + \sigma_\psi^2 - \mu_\psi)A_{s+T} \\ & - (1 + \lambda)A\theta + c]M(t)\}(Y - A_{s+T}) + R(t)' + [(r + \sigma_\psi^2 - \mu_\psi) \\ & A_{s+T} - (1 + \lambda)A\theta + c]Q(t) - \frac{1}{4}\left(\frac{\lambda^2}{v^2} + \frac{(\sigma_s\lambda_s + \delta - \sigma_s\sigma_\psi)^2}{((\sigma_s - 2\sigma_\psi)\sigma_s)^2}\right)\frac{M(t)^2}{P(t)}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

由 (4.17) 适用 $Y - A_{s+T}$ 的任意值, 得到

$$\begin{cases} M(t)' = \left(\frac{\lambda^2}{v^2} + \frac{(\sigma_s\lambda_s + \delta - \sigma_s\sigma_\psi)^2}{((\sigma_s - 2\sigma_\psi)\sigma_s)^2}\right) - 2(r + \sigma_\psi^2 - \mu_\psi))M(t), \\ M(T) = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q(t)' = \left(\frac{\lambda^2}{v^2} + \frac{(\sigma_s \lambda_s + \delta - \sigma_s \sigma_\psi)^2}{((\sigma_s - 2\sigma_\psi)\sigma_s)^2} \right) Q(t) - 2((r + \sigma_\psi^2 - \mu_\psi)A_{s+T} \\ \quad - (1 + \lambda)A\theta + c)Q(t), \\ Q(T) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} R(t)' = \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda^2}{v^2} + \frac{(\sigma_s \lambda_s + \delta - \sigma_s \sigma_\psi)^2}{((\sigma_s - 2\sigma_\psi)\sigma_s)^2} \right) \frac{M(t)^2}{P(t)} - [(r + \sigma_\psi^2 - \mu_\psi)A_{s+T} \\ \quad - (1 + \lambda)A\theta + c]Q(t), \\ R(T) = 0. \end{cases}$$

最后，得到

$$M(t) = \exp \left\{ - \int_t^T \left(\frac{\lambda^2}{v^2} + \frac{(\sigma_s \lambda_s + \delta - \sigma_s \sigma_\psi)^2}{((\sigma_s - 2\sigma_\psi)\sigma_s)^2} \right) - 2(r + \sigma_\psi^2 - \mu_\psi) ds \right\},$$

$$Q(t) = \left\{ \exp \left[- \int_0^s \frac{\lambda^2}{v^2} + \frac{(\sigma_s \lambda_s + \delta - \sigma_s \sigma_\psi)^2}{((\sigma_s - 2\sigma_\psi)\sigma_s)^2} - (r + \sigma_\psi^2 - \mu_\psi) dp \right] \right.$$

$$2[(r + \sigma_\psi^2 - \mu_\psi)A_{s+T} - (1 + \lambda)A\theta + c]M(s)ds \times$$

$$\left. \exp \left\{ \int_0^t \left(\frac{(\sigma_s \lambda_s + \delta - \sigma_s \sigma_\psi)^2}{((\sigma_s - 2\sigma_\psi)\sigma_s)^2} - (r + \sigma_\psi^2 - \mu_\psi) \right) ds \right\} \right\}.$$

可知，DC 型养老金投资和再保险的最优比例是

$$p(t)^* = - \frac{(\sigma_s \lambda_s + \delta - \sigma_s \sigma_\psi)}{Y(\sigma_s - 2\sigma_\psi)\sigma_s} \frac{V_Y}{V_{YY}}$$

$$= - \frac{(\sigma_s \lambda_s + \delta - \sigma_s \sigma_\psi)}{Y(\sigma_s - 2\sigma_\psi)\sigma_s} \left\{ (Y - A_{s+T}) + \frac{Q(t)}{2M(t)} \right\},$$

$$\pi(t)^* = - \frac{\lambda\theta}{Av^2} \frac{V_Y}{V_{YY}} + 1$$

$$= - \frac{\lambda\theta}{Av^2} \left\{ (Y - A_{s+T}) + \frac{Q(t)}{2M(t)} \right\} + 1.$$

注： $(Y - A_{s+T}) + \frac{Q(t)}{2M(t)} \geq 0$ 等价于

$$\theta \leq \left\{ (r + \sigma_\psi^2 - \mu_\psi)A_{s+T} - \frac{(A_{s+T} - Y)}{1 - e^{-(r + \sigma_\psi^2 - \mu_\psi)(T-t)}} \right\} \left(\frac{1}{(1 + \lambda)A + c} \right).$$

推论 4.1 当 $M(t)$ ， $Q(t)$ 中所有参数都是常数，得到

$$\begin{aligned}
 Q(t) = & 2[(r + \sigma_\psi^2 - \mu_\psi)A_{s+T} - (1 + \lambda)A\theta] \exp\left(\left(\frac{\lambda^2}{v^2} + \frac{(\sigma_s \lambda_s + \delta - \sigma_s \sigma_\psi)^2}{((\sigma_s - 2\sigma_\psi)\sigma_s)^2}\right.\right. \\
 & \left.\left. - (\sigma_s \lambda_s + \delta - \sigma_s \sigma_\psi)t\right) \times \exp\left[\left(\frac{\lambda^2}{v^2} + \frac{(\sigma_s \lambda_s + \delta - \sigma_s \sigma_\psi)^2}{((\sigma_s - 2\sigma_\psi)\sigma_s)^2}\right.\right. \\
 & \left.\left. - 2(\sigma_s \lambda_s + \delta - \sigma_s \sigma_\psi)T\right)\right] \times \frac{1}{(r + \sigma_\psi^2 - \mu_\psi)} (e^{-(r + \sigma_\psi^2 - \mu_\psi)t} - e^{(r + \sigma_\psi^2 - \mu_\psi)T}), \\
 M(t) = & \exp\left\{\left(\frac{\lambda^2}{v^2} + \frac{(\sigma_s \lambda_s + \delta - \sigma_s \sigma_\psi)^2}{((\sigma_s - 2\sigma_\psi)\sigma_s)^2} - 2(r + \sigma_\psi^2 - \mu_\psi)\right)(T - t)\right\}.
 \end{aligned}$$

得到

$$\frac{Q(t)}{2M(t)} = \frac{1}{(r + \sigma_\psi^2 - \mu_\psi)} ((r + \sigma_\psi^2 - \mu_\psi)A_{s+T} - (1 + \lambda)A\theta + c)(1 - e^{-(r + \sigma_\psi^2 - \mu_\psi)(T-t)}).$$

4.2.2 采取默认投资政策的 DC 养老金最优保险问题

在上述模型中，仅考虑从退休时间到固定时间 T ，根据上文中假设，得到 DC 型养老金账户变化的方程

$$\begin{aligned}
 dY(t) = & Y(t)(r + \sigma_s \lambda_s p(t) + \delta p(t) + \sigma_\psi^2 - \mu_\psi - \sigma_s \sigma_\psi p(t))dt + cdt \\
 & + Y(t)(\sigma_s p(t) - \sigma_\psi)dW(t) - A(-dl(t)).
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

当 DC 型养老金参与者采取智利型默认投资政策，最优投资策略 $p(t)$ 是一个与 t 相关的、确定的线性函数，所以参与者的目标函数发生改变

$$\min_{\pi(t)} E(Y - A_{s+T})^2.$$

其中， $Y = Y(T)$ ， A_{s+T} 是参与者希望实现的目标。

DC 型养老金计划中，退休后养老金参与者所面临的风险可以通过“收入提取选项”来降低：允许计划参与者在退休后选择何时将最终资本转换为养老金，DC 型养老金管理者可以购买再保险，设 $\pi(t)$ 在 t 时刻 DC 型基金管理者的自留比例， $1 - \pi(t)$ 是由再保险公司支付索赔的比例，并限制 $\pi(t) \leq 1$ ，DC 型养老金参与者的养老金账户过程变成如下式

$$\begin{aligned}
 dY(t) = & Y(t)(r + \sigma_s \lambda_s (1 - \alpha(t-1)) + \delta(1 - \alpha(t-1)) + \sigma_\psi^2 - \mu_\psi \\
 & - \sigma_s \sigma_\psi p(t))dt + cdt + Y(t)(\sigma_s p(t) - \sigma_\psi) dW(t) - (1 - \pi(t)) \\
 & A(-dl(t)) + (1 + \lambda)E(\pi(t)(-dl(t))).
 \end{aligned}$$

由于鞅性^[42], DC 型养老金账户过程变为

$$\begin{aligned}
 dY(t) = & \{(r + \sigma_s \lambda_s (1 - \alpha(t-1)) + \delta(1 - \alpha(t-1)) + \sigma_\psi^2 - \mu_\psi - \sigma_s \sigma_\psi \\
 & (1 - \alpha(t-1)))Y(t) - (\lambda\pi(t) + 1)A\theta(t) + c\}dt + Y(t) \\
 & (\sigma_s(1 - \alpha(t-1)) - \sigma_\psi)dW(t) + (\pi(t) - 1)Av(t)dW_l(t).
 \end{aligned} \quad (4.19)$$

与上文相同, 采取动态规划方法推导出上述最优问题 (4.19) 的 HJB 方程

$$\begin{aligned}
 0 = \min\{ & V_t + (r + \sigma_s \lambda_s (1 - \alpha(t-1)) + \delta(1 - \alpha(t-1)) + \sigma_\psi^2 - \mu_\psi - \sigma_s \sigma_\psi \\
 & (1 - \alpha(t-1)))Y - (\lambda\pi(t) + 1)A\theta(t) + c\}V_Y + \frac{1}{2}(\pi(t) - 1)^2 A^2 v^2 V_{YY}\}.
 \end{aligned} \quad (4.20)$$

其中, V_t, V_Y, V_{YY} 表示值函数的一阶、二阶偏导数。

对上式求一阶导得到

$$\pi^*(t) = -\frac{\lambda\theta}{Av^2} \frac{V_Y}{V_{YY}} + 1. \quad (4.21)$$

将最优解 $\pi^*(t)$ 代入 HJB 方程, 得到

$$\begin{aligned}
 0 = & \{V_t + (r + \sigma_s \lambda_s (1 - \alpha(t-1)) + \delta(1 - \alpha(t-1)) + \sigma_\psi^2 - \mu_\psi - \sigma_s \sigma_\psi \\
 & (1 - \alpha(t-1)))Y - 2A\theta + c\}V_Y + \frac{1}{2} \frac{\lambda^2 \theta^2}{v^2} \frac{V_Y^2}{V_{YY}}\}.
 \end{aligned}$$

为了求偏微分方程的解, 假设一个如下形式的二次值函数

$$V(t, Y) = M(t)(Y - A_{s+T})^2 + Q(t)(Y - A_{s+T}) + R(t), \quad (4.22)$$

$M(t)$, $Q(t)$ 和 $R(t)$ 是时间 t 的微分, 可以得到

$$\begin{cases} V_Y = 2M(t)(Y - A_{s+T}) + Q(t), \\ V_{YY} = 2P(t), \\ V_t = P(t)(Y - A_{s+T})^2 + Q(t)(Y - A_{s+T}) + R(t)'. \end{cases}$$

将上式代入其 HJB 方程, 并按 $Y - \bar{A}_{s+T}$ 的降幂排列, 可以得到如下式

$$\begin{aligned}
 0 = & \{M(t)' + 2(r + \sigma_s \lambda_s(1 - \alpha(t-1)) + \delta(1 - \alpha(t-1)) + \sigma_\psi^2 - \mu_\psi \\
 & - \sigma_s \sigma_\psi(1 - \alpha(t-1)))M(t) - \frac{\lambda^2 \theta^2}{v^2} M(t)\} (Y - A_{s+T})^2 + \{Q(t)' + \\
 & 2(r + \sigma_s \lambda_s(1 - \alpha(t-1)) + \delta(1 - \alpha(t-1)) + \sigma_\psi^2 - \mu_\psi - \sigma_s \sigma_\psi(1 - \alpha(t-1))) \\
 & Q(t) - \frac{\lambda^2 \theta^2}{v^2} Q(t)\} + 2[(r + \sigma_s \lambda_s(1 - \alpha(t-1)) + \delta(1 - \alpha(t-1)) + \sigma_\psi^2 - \mu_\psi \\
 & - \sigma_s \sigma_\psi(1 - \alpha(t-1)))A_{s+T} - (1 + \lambda)A\theta + c]M(t)\} (Y - A_{s+T}) + R(t)' + \\
 & [(r + \sigma_s \lambda_s(1 - \alpha(t-1)) + \delta(1 - \alpha(t-1)) + \sigma_\psi^2 - \mu_\psi - \sigma_s \sigma_\psi(1 - \alpha(t-1))) \\
 & A_{s+T} - (1 + \lambda)A\theta + c]Q(t) - \frac{1}{4} \frac{\lambda^2 \theta^2}{v^2} \frac{M(t)^2}{P(t)}.
 \end{aligned}$$

由上式的可行性得

$$\begin{cases}
 M(t)' = \left(\frac{\lambda^2 \theta^2}{v^2} - 2(r + \sigma_s \lambda_s(1 - \alpha(t-1)) + \delta(1 - \alpha(t-1))) \right) M(t), \\
 M(T) = 1.
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 Q(t)' = \frac{\lambda^2 \theta^2}{v^2} Q(t) - 2((r + \sigma_s \lambda_s(1 - \alpha(t-1)) + \delta(1 - \alpha(t-1)))A_{s+T} \\
 \quad - (1 + \lambda)A\theta + c)Q(t), \\
 Q(T) = 0.
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 R(t)' = \frac{1}{4} \frac{\lambda^2 \theta^2}{v^2} \frac{M(t)^2}{P(t)} - [(r + \sigma_s \lambda_s(1 - \alpha(t-1)) + \delta(1 - \alpha(t-1)))A_{s+T} \\
 \quad - (1 + \lambda)A\theta + c]Q(t), \\
 R(T) = 0.
 \end{cases}$$

最终得到

$$\begin{aligned}
 M(t) = & \exp - \left\{ \int_t^T \frac{\lambda^2 \theta^2}{v^2} - 2(r + \sigma_s \lambda_s(1 - \alpha(t-1)) + \delta(1 - \alpha(t-1))) ds \right\}, \\
 Q(t) = & \exp - \left[\int_0^s \frac{\lambda^2 \theta^2}{v^2} - (r + \sigma_s \lambda_s(1 - \alpha(t-1)) + \delta(1 - \alpha(t-1))) ds \right] \\
 & 2[(r + \sigma_s \lambda_s(1 - \alpha(T-1)) + \delta(1 - \alpha(T-1)))\bar{A}_{s+T} - (1 + \lambda)A\theta + c]M(s)ds \\
 & \times \exp \int_0^t \left(\frac{\lambda^2 \theta^2}{v^2} - (r + \sigma_s \lambda_s(1 - \alpha(T-1)) + \delta(1 - \alpha(T-1))) ds \right).
 \end{aligned}$$

定理 4.2 采取智利型默认投资政策的 DC 型养老金最优再保险比例是

$$\begin{aligned}\pi(t)^* &= -\frac{\lambda\theta}{Av^2} \frac{V_Y}{V_{YY}} + 1 \\ &= -\frac{\lambda\theta}{Av^2} \left\{ (Y - A_{s+T}) + \frac{Q(t)}{2M(t)} \right\} + 1.\end{aligned}$$

同理可知有

定理 4.3 采取美国型默认投资政策的 DC 型养老金最优再保险比例

$$\begin{aligned}\pi(t)^* &= -\frac{\lambda\theta}{Av^2} \frac{V_Y}{V_{YY}} + 1 \\ &= -\frac{\lambda\theta}{Av^2} \left\{ (Y - A_{s+T}) + \frac{Q(t)}{2M(t)} \right\} + 1.\end{aligned}$$

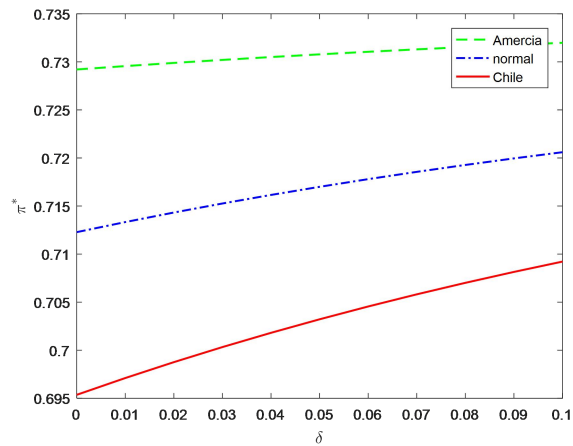
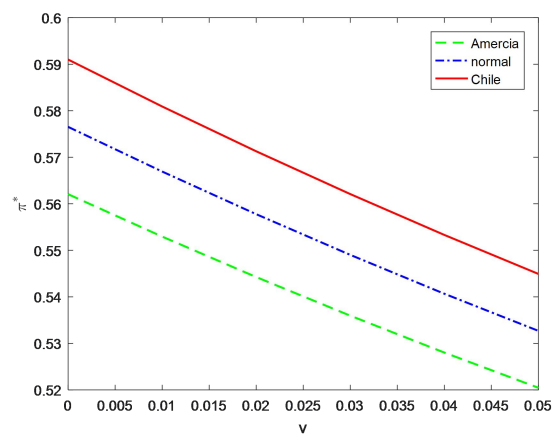
其中,

$$\begin{aligned}M(t) &= \exp\left[-\int_{T-20}^T \frac{\lambda^2\theta^2}{v^2} - 2(r + \sigma_s\lambda_s(0.9 - b(t - (T - 20)))) + \delta(0.9 - b(t - (T - 20)))ds\right], \\ Q(t) &= \exp\left[-\int_{T-20}^T \frac{\lambda^2\theta^2}{v^2} - (r + \sigma_s\lambda_s(0.9 - b(t - (T - 20)))) + \delta(0.9 - b(t - (T - 20)))ds\right] \\ &\quad 2[(r + \sigma_s\lambda_s(0.9 - b(t - (T - 20)))) + \delta(1 - \alpha(T - 1))A_{s+T} - (1 + \lambda)A\theta + c]M(s)ds \\ &\quad \times \exp\int_0^t \left(\frac{\lambda^2\theta^2}{v^2} - (r + \sigma_s\lambda_s(0.9 - b(t - (T - 20)))) + \delta(0.9 - b(t - (T - 20)))\right)ds.\end{aligned}$$

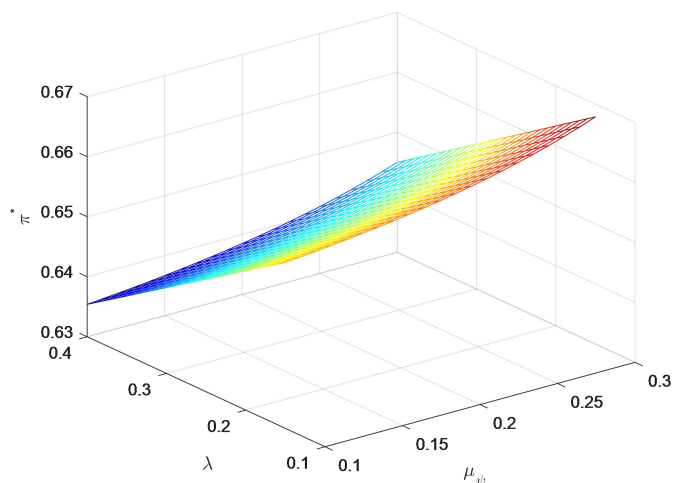
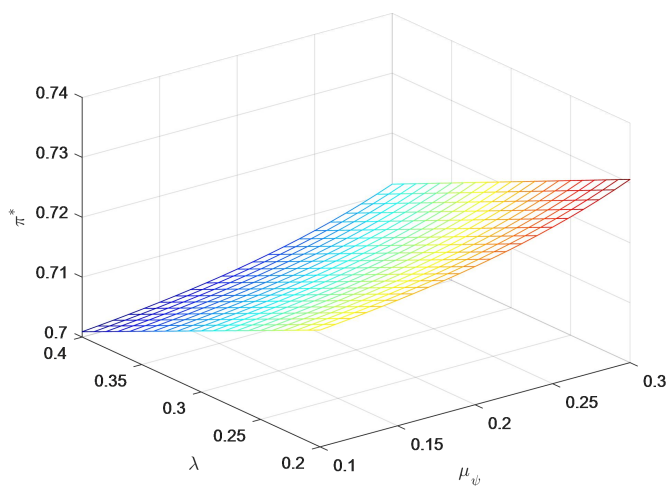
4.3 数值模拟

本节将使用数值模拟方法, 采取智利型和美国型默认投资政策的 DC 型养老金最优再保险比例, 与模型中参数之间的关系, 并比较两种默认投资政策最优再保险比例的差异, 模型中使用的参数为^[39]

$$r = 0.05, c = 0.15, \lambda_s = 0.15, \sigma_s = 0.2, \psi_0 = 1, \mu_\psi = 0.03, \delta = 0.05, \sigma_s = 0.3, \lambda = 0.1.$$

图 4-1 参数 δ 与最优再保险比例 π^* 的关系图 4-2 参数 ν 与最优再保险比例 π^* 的关系

由图 4-1, 图 4-2 可知, 最优再保比例 π^* 关于参数 δ 递增。当单位投资分红 δ 增加时, 市场环境较好, 风险资产的投资收益增加, 参与者投资信心增强, 投资策略会趋于激进, 两种默认投资政策投资于风险资产的比例会增加, 美国型默认投资政策投资于风险资产的比例会更高。最优再保比例 π^* 关于参数 ν 递减, 当波动率 ν 增加时, 不确定性随之提高, 退休之后的参与者投资的首要目标是保障其退休之后的基本生活, 当市场环境中的不确定因素增加时, 投资策略也会趋于保守, 两种默认投资政策投资于风险资产的比例会减少, 由于美国型默认投资政策对于市场变化反应更加敏感, 因市场波动加剧, 投资于风险资产的比例低于智利型默认投资政策。

图 4-3 参数 λ 和 μ_ψ 与智利型默认投资政策最优再保险比例 π^* 的关系图 4-4 参数 λ 和 μ_ψ 与美国型默认投资政策最优再保险比例 π^* 的关系

由图 4-3, 图 4-4 可知, 最优再保比例 π^* 关于参数 μ_ψ 递增。当通货膨胀率 μ_ψ 增加, 市场一般处于上升阶段, 投资机会增加, 同时为了保证参与者真实生活水平不会随着通货膨胀率升高而降低, 投资策略会趋于激进, 两种默认投资政策投资于风险资产的比例会增加, 而美国型默认投资政策对于市场变化更加敏感, 在预计投资机会增多时, 投资策略会比智利型默认投资政策更加激进。而当安全负荷 λ 增加, 追求更高的安全性, 投资策略会变得保守, 投资到风险资产的比例会减少。

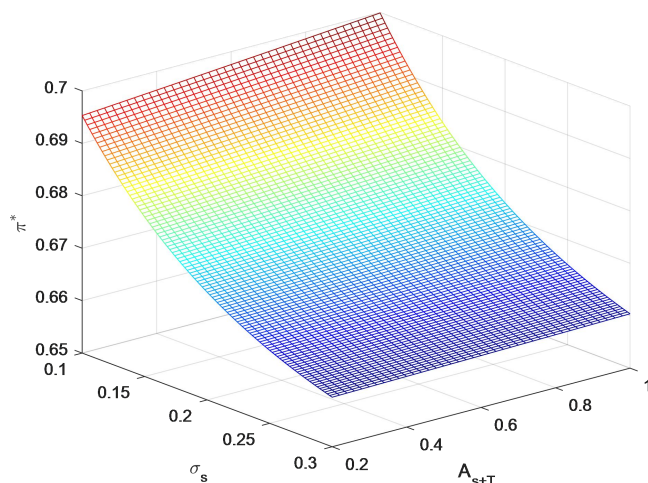


图 4-5 参数 σ_s 和 A_{s+T} 与智利型默认投资政策最优再保险比例 π^* 的关系

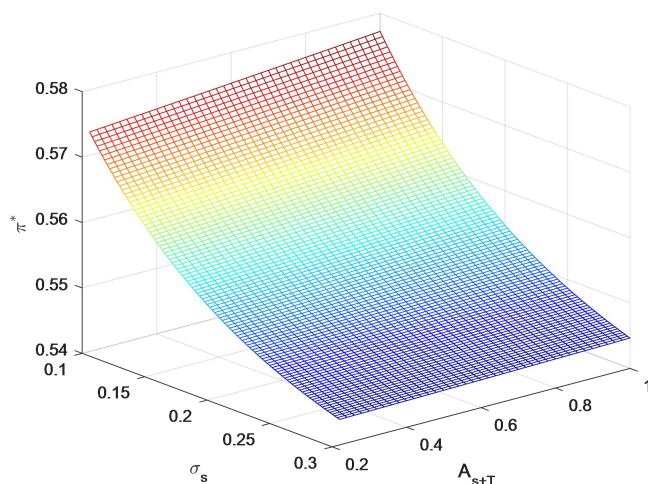


图 4-6 参数 σ_s 和 A_{s+T} 与美国型默认投资政策最优再保险比例 π^* 的关系

由图 4-5, 图 4-6 可知, 两种默认投资政策最优再保比例 π^* 关于参数 A_{s+T} 递增。当 A_{s+T} 增加, 希望实现的目标变大, 目标实现的难度增加, 为了实现目标, 投资策略会变得激进, 投资到风险资产的比例会增加, 智利型默认投资政策相对保守, 投资到风险资产的比例不足美国型。最优再保比例 π^* 关于参数 σ_s 递减, 当参数 σ_s 增加时, 市场的不确定性也随之增加, 投资策略也会趋于保守, 两种默认投资政策投资于风险资产的比例会减少, 由于美国型默认投资政策对于市场变化反应更加敏感, 因市场波动加剧, 投资于风险资产的比例低于智利型默认投资政策。

4.4 本章小结

本章考虑了随机通胀和默认投资政策,研究了分别采取两种默认投资政策的 DC 型养老金最优再保险策略。充分考虑了通胀和人口死亡率等因素,运用随机控制理论,构建并求解 DC 型养老金最优再保策略满足的 HJB 方程,求解出 DC 型养老金最优再保的显示解,然后对比智利型和美国型默认投资政策最优再保险策略的差异。结果显示,分红的增加会参与者投资策略趋于激进,增加风险资产的投资,而安全负荷和死亡波动率的增加则会使参与者的投资策略趋于保守,增加无风险资产的投资。而对比两种默认投资政策最优再保策略的差异发现,由于美国型默认投资政策对于市场变化反应较为敏感,在市场环境向好时,投资于风险资产的比例会增加,增加的部分会多于智利型默认投资政策,而当市场环境转差时,投资于风险资产比例会减少,同时减少会多于智利型默认投资政策。

第 5 章 总结和展望

本文考虑随机收入和前景理论,对 DC 型养老金默认投资政策效果以及采取默认投资政策的 DC 型养老金最优再保问题进行研究。首先,假设 DC 型养老金参与者将资金投资到无风险资产和风险资产,考虑随机收入,采用秩依赖期望效用。首先,建立采取的默认投资政策的 DC 型养老金账户资金的动态随机微分方程,在 VaR 和 PI 的约束下,应用分位数公式将概率扭曲函数从目标函数中去除,使用松弛方法求出 DC 型养老金终端财富目标值最大化的解。最后,进行数值模拟,比较不同类型默认投资政策的效果。本文模型的主要贡献是,将默认投资政策和随机死亡率引入到需要求解的问题中,并用鞅方法求解采取默认投资政策的 DC 型养老金最优再保问题策略的显示解。

第 3 章假设 DC 型养老金参与者分别采取智利型和美国型默认投资政策,将资产投资于风险资产和无风险资产,并且考虑随机收入,参与者采取秩依赖期望效用,本章创新性地将默认投资政策和秩依赖效用函数相结合,使用分位数技术和松弛方法得到 DC 型养老金默认投资政策退休时刻最优终端财富的解,并分析不同基准水平和置信水平下智利型和美国型默认投资政策的效果,并比较两种默认投资政策在不同市场环境下的表现。

第 4 章假设 DC 型养老金参与者分别采取智利型和美国型默认投资政策,将资产投资于风险资产和无风险资产,使用随机通胀和期望风险最小化为目标建立模型,并使用鞅方法和 HJB 方程推导出,采取默认投资政策的 DC 型养老金最优再保问题的显示解。并比较智利型和美国型默认投资政策在最优再保险策略上差异。结果表明,智利型默认投资政策由于政策相对的保守型,对于市场的变化的反应不够敏感,在市场环境好转和市场波动变大时,投资于风险资产的比例波动不大,而美国型默认投资政策对于市场反应更加敏感,投资于风险资产的比例会随着市场环境变化出现较大的波动。

在 DC 型养老金持续数十年的投资过程中,有很多因素会对 DC 型养老金默认投资政策的效果产生影响,本文的研究存在以下不足:

1. 本文在构建金融市场时,风险资产仅考虑了股票,资产种类单一,具有一定的局限性,后续研究中可以考虑引入复杂的风险资产,如指数债券,期权等

等；

2. 除了本文中研究的市场波动率，随机死亡率，随机收入等因素之外，影响养老金默认投资政策效果的因素还有很多，例如随着社会经济发展和人均医疗水平的提高，我国人均寿命不断提高，长寿风险在养老金投资过程中日益凸显出来，因此可以在接下来的研究中引入长寿因素；

3. 此外，还可以从参与者和基金管理者双边角度出发，在考虑双方的代理问题基础上，研究 DC 型养老金最优投资策略。

参考文献

- [1] Vigna E, Haberman S. Optimal investment strategy for defined contribution pension scheme[J]. Insurance: Mathematic and Economics, 2001, 28(2): 233-262.
- [2] Boulier J, Huang S, Taillard G. Optimal management under stochastic interest rates: the case of a protected pension fund[J]. Insurance: Mathematics and Economic, 2001, 20(28): 173-189.
- [3] Xue J, Wang C Y, Wang L. Optimal investment strategy of defined contribution pension based on bequest motivation and loss aversion[J]. Wuhan University Journal of Natural Sciences, 2022, 27(2): 321-330.
- [4] 余鑫, 王传玉, 何学强. 通胀风险和激励方案下 DC 型养老金的最优投资[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版), 2022, 39(2): 107-112.
- [5] Zhang J, Wang C Y, W u J J. Optimal investment strategy of target benefit pension plan based on random inflation and intergenerational Risk[J]. Wuhan University Journal of Natural Sciences, 2021, 26(5): 383-393.
- [6] 周豪, 彭幸春. 部分信息下带有保费返还条款的 DC 养老金时间一致性投资策略[J].应用概率统计, 2023, 39(3):363-382.
- [7] 殷艳红, 夏登峰, 郭宇超. 跳-扩散市场环境下基于股票误定价的 DC 型养老金最优投资策略[J].安徽工程大学学报, 2022, 37(2): 77-84.
- [8] 邵艳宇, 夏登峰, 费为银等. 混合随机波动模型下带随机工资的 DC 型养老金最优策略[J]. 东华大学学报(自然科学版), 2024, 50(1):145-151.
- [9] 蔡晶晶, 董迎辉, 吕文欣等. VaR 约束下带最低保障的 DC 型养老金的最优投资[J]. 系统工程理论与实践. 2021, 41(5): 1252-1262.
- [10]刘昊. 个人养老金中默认基金的设立,运行及管理研究[D]. 成都: 西南财经大学管理学院, 2013.
- [11]马齐旖旎, 朱海扬, 祁世超等. 养老目标基金默认选择策略研究[J]. 价格理论与实践, 2021(5): 28-33.
- [12]Daniel D, David D. How good are default investment policies in defined contribution pension plans[J]. Social Science Electronic Publishing, 2020, 5(1): 1-21.
- [13]陈峥, 李仲飞. 目标日期基金应对养老金投资的有效性及其最优策略选择[J]. 系统工程理论与实践, 2022, 42(12): 3231-3246.
- [14]谢世清, 张梦鸽. 目标日期基金产品的设计研究[J]. 保险研究, 2021(2): 64-75.

- [15] 邓辛. 基于双向滑动路径的目标日期养老 FOF 基金策略设计[D]. 上海:上海财经大学金融学院, 2021.
- [16] Tversky A, Kahneman D. Advances in prospect theory [J]. *Journal of Risk & Uncertainty*, 1992, 5(4): 297-323.
- [17] Berkelaar A B, Kouwenberg R, POST T. Optimal portfolio choice under loss aversion[J]. *Review of Economics and Statistics*, 2004, 86(4): 973-987.
- [18] 王传玉, 付春艳, 盛国祥. 基于通货膨胀和损失厌恶的 DC 养老金最优投资[J]. *中国科学技术大学学报*, 2018, 48(5): 420-430.
- [19] 温利民, 冯会珍, 李俊雪. 基于混合指数型损失厌恶函数的投资组合模型[J]. *江西师范大学学报: 自然科学版*, 2023, 47(1): 1-7.
- [20] 董迎辉, 魏思媛, 吕文欣等. 基于损失厌恶和 LEL 约束下的 DC 养老金计划的最优投资[J]. *应用数学学报*, 2023, 46(2): 292-312.
- [21] Barberis N, Huang M. Stocks as lotteries: The implications of probability weighting for security prices[J]. *American Economic Review*, 2008, 98(5): 2066-2100.
- [22] Van B S, Laeven R J. Dynamic consumption and portfolio choice under prospect theory[J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2020 91: 224-237.
- [23] Quiggin J. A theory of anticipated utility[J]. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 1982, 3(4): 323-343.
- [24] Jin H, Zhou X Y. Behavioral Portfolio Selection in Continuous Time[J]. *Mathematical Finance*, 2010, 18(3): 385-426.
- [25] Xu Z Q. A note on the quantile formulation[J]. *Mathematical Finance*, 2016(3): 589-601.
- [26] Chen, A, Nguyen, T, Stadje, M. Optimal investment under var-regulation and minimum insurance[J]. *Insurance. Mathematics & Economics*, 2018, 79: 194-209.
- [27] 董迎辉, 魏思媛, 殷子涵. 基于加权效用和 VaR-PI 约束下 DC 型养老金计划的最优资产配置[J]. *运筹学学报*, 2023, 27(1): 70-86.
- [28] Mi H, Xu Z Q. Optimal portfolio selection with VaR and Portfolio insurance constraints under Rank-Dependent Expected Utility Theory[J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2023, 110: 82-105.
- [29] Borch K. Reciprocal Reinsurance Treaties[J]. *Astin Bulletin*, 1960, 1(4): 170-191.
- [30] 杨志伟, 张强. VaR 约束下最优比例再保险和投资策略问题[J]. *数学的实践与认识*, 2024, 54(1): 56-70.
- [31] Liang Z B. Optimal time-consistent reinsurance strategies for mean-variance

- insurers under thinning dependence structure[J]. *Stochastic Analysis and Applications*, 2021, 39(2):195-223.
- [32]何学强, 王传玉, 余鑫. 随机通胀下基于终止风险的 DB 养老金计划的保费估值[J]. *安徽工程大学学报*, 2021,36(2): 84-94.
- [33]Gerrard R, Haberman S, Vigna E. Optimal investment choices post-retirement in a defined contribution pension scheme[J]. *Insurance:Mathematics and Economics*, 2004, 35: 321-342.
- [34]王业舜英, 孟慧, 廖朴. 模糊厌恶保险人的稳健最优再保险策略[J]. *应用概率统计*, 2023. 39(6), 859-878.
- [35]Zhang X Y. Optimal management of defined contribution pension plan with investment and reinsurance[J]. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Nankaiensis*, 2018, 10(5): 66-71.
- [36]卞世博, 刘海龙. 背景风险下 DC 型养老基金的最优投资策略--基于 Legendre 转换对偶解法[J]. *管理工程学报*, 2013, 27(3): 145-149.
- [37]Xia J, Zhou X Y. Arrow-Debreu equilibria for rank-dependent utilities[J]. *Mathematical Finance*, 2016, 26(3): 558-588.
- [38]Basak S, Shapiro A. Value-at-risk based risk management: optimal policies and asset prices[J]. *The Review of Financial Studies* 2001, 14 (2): 371-405.
- [39]孙惠玲, 王传玉. 考虑红利支付和随机波动的确定缴费型养老金最优投资策略[J]. *盐城工学院学报(自然科学版)*, 2017, 30(2): 71-74.
- [40]Xu Z Q. A note on the quantile formulation [J]. *Mathematical Finance*, 2016, 3: 589-601.
- [41]王传玉, 付春艳, 盛国祥. 基于通货膨胀和最低保障的 DC 养老金最优投资[J]. *运筹与管理*, 2018, 27(2): 193-199.
- [42]Schmidli H. *Stochastic control in insurance*[M]. Springer Science & Business Media, 2007.

硕士期间发表的论文

[1]王梦旋,王传玉,谈倩倩. 基于默认政策的 DC 型养老金计划最优再保问题研究[J]. 安徽工程大学学报(已录用)

致谢

光阴似箭，岁月如梭，三年的求学生活不知不觉就要结束了！回首三年的研究生生活，自己受益良多，其间所取得的每一点进步都离不开老师的谆谆教诲，同学、朋友的热心帮助和家人的默默支持，本文是在导师王传玉教授精心指导下完成的，在论文的选题、试验方案的确定、理论分析、数据处理直至论文的撰写和定稿，王老师给予我悉心的教诲和无私的帮助，论文完成的整个过程中渗透着他的心血和汗水。

在此论文完成之际，在此向王老师表示深深的谢意！难题往往在同门的讨论中烟消云散，灵感常常在协作中涌上心头，在此向我的同门谈倩倩，沈贝贝，汪梦琪表示感谢。同时，向我的室友陈晓东，丁沈杰，杨磊表示感谢，没有你们的关心、帮助，研究生三年的生活会缺少很多色彩，还要向跟我一起踢球的队友李凡，刘克张，李亮以及陪我一起成长的朋友陌生人表达感谢，感谢你们在有意无意之间的帮助，让我成长。最后向我的对象表达感谢，感谢你在自己最好的时间选择与我相伴，还有我的父母，二十多年来毫无怨言、默默地奉献和着意地培养，才使我走到今天。其实这点点滴滴的成绩都是你们心血与汗水的凝结，无论走到哪里，您的教诲将永远铭刻在我心。