

分类号: (F840.67)

单位代码: 10363

密 级: 公开

学 号: 2211010112

题 目 混合分数跳-扩散运动下两类奇异期权的定价

英文并列

题 目 Pricing of two types of Exotic Options under
Mixed Fractional Jump-diffusion Motion

学生姓名: 龚 雪

指导教师: 沈明轩 副教授

专 业: 金 融

研究方向: 金融风险管理

论文答辩日期: 2024 年 5 月 29 日

安徽工程大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：我恪守学术道德，崇尚严谨学风。所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已明确注明和引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品及成果的内容。论文为本人亲自撰写，我对所写的内容负责，并完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

学位论文作者签名：蔡雪

日期：2024 年 6 月 4 日

安徽工程大学学位论文版权使用授权书

学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅或借阅。本人授权可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保密 ☐，在 _____ 年解密后适用本版权书。

本学位论文属于

不保密 ☒。

学位论文作者签名： 龚雪

指导教师签名： 沈明轩

日期： 2024 年 6 月 4 日

日期： 2024 年 6 月 4 日

混合分数跳-扩散运动下两类奇异期权的定价

摘要

21 世纪以来，金融行业蓬勃发展，经济蒸蒸日上的同时，伴随而来的各种风险也频频发生。期权作为金融衍生工具之一，为交易市场中的投资者们提供了套利的机会和风险管理的工具。在我国，金融市场起步较晚，尤其是在新型的期权期货等衍生品交易市场方面。国内期权市场需要不断创新发展，加强对期权定价与应用的研究对金融发展具有重要的现实意义。

首先，本文阐述了研究内容相关的理论基础知识。从分数布朗运动、次分数布朗运动、泊松跳的定义，到如何构成相应的混合模型，以及后续推导过程所需的引理公式。接着介绍了金融资产价格模型理论，分别介绍了期权定价的两种主流定价方法，以及在两种方法下欧式期权定价公式。

然后通过改进布朗运动，研究混合分数布朗跳-扩散模型下数字交换期权的定价问题。假设市场包含两种股票，价格过程满足混合分数布朗跳-扩散模型。接着定义数字交换期权，给出数字交换期权的定价公式，利用拟条件期望求解出定价公式，并通过市场数据进行模拟分析，发现不论那种情况下，期权的价格都随着跳跃强度的增加而增加。

在此基础上，我们进一步改进，将分数布朗运动进行延申，研究混合次分数布朗跳-扩散下的亚式幂型期权的定价问题。假设市场包含一种股票，价格过程满足次分数布朗跳-扩散模型，之后利用保险精算的方法推导出具有固定执行价格的几何平均亚式幂型期权的定价公式，并给出了一些特殊情况下的亚式期权的定价公式。最后进行数据分析得出相关参数对期权价格的影响。

关键词：期权定价，混合分数布朗运动，跳扩散，混合次分数布朗运动，数字交换期权，亚式幂型期权

Pricing of two types of Exotic Options under Mixed Fractional Jump-diffusion Motion

ABSTRACT

Since the 21st century, the financial industry has developed vigorously. As the economy booms, so do the risks that come with it. As one of the financial derivatives, options are derived from the changes in the price of basic products, providing investors in the trading market arbitrage and risk management opportunities. In our country, the financial market starts late, especially in the new option futures and other derivatives trading market. The domestic option market needs continuous innovation and development. Therefore, it is very important to strengthen the research on option pricing and application to perfect the capital market business, which is of great practical significance to the financial development.

First of all, this paper expounds the basic theoretical knowledge related to the research content. From the definition of Fractional Brownian motion, sub-fractional Brownian motion, Poisson jump, to how to constitute the corresponding hybrid model, and the lemma formulas required for the subsequent derivation process. Then, the paper introduces the theory of financial asset price model, introduces the two mainstream pricing methods of option pricing, and the European option pricing formula under the two methods.

Then, the first research content of this paper begins. This paper studies

the pricing of digital exchange options under mixed fractional Brownian jump-diffusion model by improving Brownian motion. Suppose that the market contains two stocks and the price process satisfies the mixed fractional Brownian jump-diffusion model. Then we define the digital exchange option, give the pricing formula of the digital exchange option, solve the pricing formula by using the quasi-conditional expectation, and simulate the market data.

On this basis, we further improve it by extending the Fractional Brownian motion, and study the pricing problem of Asian power options under mixed fractional Brownian jump-diffusion. Assuming that the market contains a stock, the price process satisfies the sub-fractional Brownian jump-diffusion model, then the pricing formula of the geometric mean Asian power option with fixed strike price is derived by actuarial method, and the pricing formula of the Asian option in some special cases is given. Finally, the data analysis is carried out to obtain the influence of relevant parameters on the option price.

Gong Xue(Financial)

Supervised by Shen Mingxuan

KEY WORDS: Option pricing, Mixed fractional Brownian motion, Jump diffusion, Mixed sub-fractional Brownian motion, Digital exchange option, Asian power option

目录

摘 要.....	I
ABSTRACT.....	III
第 1 章 绪论.....	1
1.1 研究背景和意义.....	1
1.2 国内外研究现状.....	4
1.3 研究内容及主要创新点.....	7
第 2 章 基本知识介绍.....	9
2.1 混合分数布朗运动.....	9
2.2 混合次分数布朗运动.....	12
2.3 跳扩散模型定义.....	13
2.4 金融资产价格模型理论.....	14
第 3 章 混合分数布朗跳-扩散下的数字交换期权定价.....	17
3.1 数字交换期权定义.....	17
3.2 混合分数布朗跳-扩散基本模型框架.....	18
3.3 混合分数布朗跳-扩散下的数字交换期权定价.....	19
3.4 数值模拟分析.....	24
3.5 结束语.....	27
第 4 章 混合次分数布朗跳-扩散模型下亚式幂型期权的定价.....	28
4.1 亚式幂型期权定义.....	28
4.2 混合次分数布朗跳-扩散模型框架.....	29
4.3 混合次分数布朗跳-扩散模型下亚式幂型期权的定价.....	30
4.4 数值模拟分析.....	35
4.5 结束语.....	37
第 5 章 总结与展望.....	39
5.1 研究结论.....	39
5.2 研究展望.....	40
参考文献.....	41
硕士期间发表的论文.....	46
致 谢.....	47

第 1 章 绪论

1.1 研究背景和意义

自从进入 21 世纪以来，世界经济快速发展，金融行业也得到了蓬勃发展。经济蒸蒸日上，伴随而来的各种风险也频频发生。金融衍生工具又称为金融衍生产品，由基础产品价格的变动派生出来的，为交易市场中的投资者们提供了套利和风险管理的机会，从而深受人们的青睐。金融衍生产品主要包括期货，期权，远期合约和互换等，目前在场内交易的主要为期货和期权。

表 1-1：全球场内衍生品成交统计表

场内衍生品	成交量		同比增减
	2022 年	2021 年	
期货	29315455762	29275290068	0.14%
期权	54532241710	33309274895	63.71%
合计	83847697472	62584564963	33.98%

根据 FIA 统计，2022 年全球期货和期权成交量 838.48 亿手，较 2021 年增长 34.0%，创历史最新记录。从产品形式看，如表 1-1 所示，2022 年期权合约成交量为 545.32 亿手，较 2021 年增长 63.7%；期货合约成交量为 293.15 亿手，较 2021 年成交量微增 0.14%，期权成为对冲风险的有效工具之一。

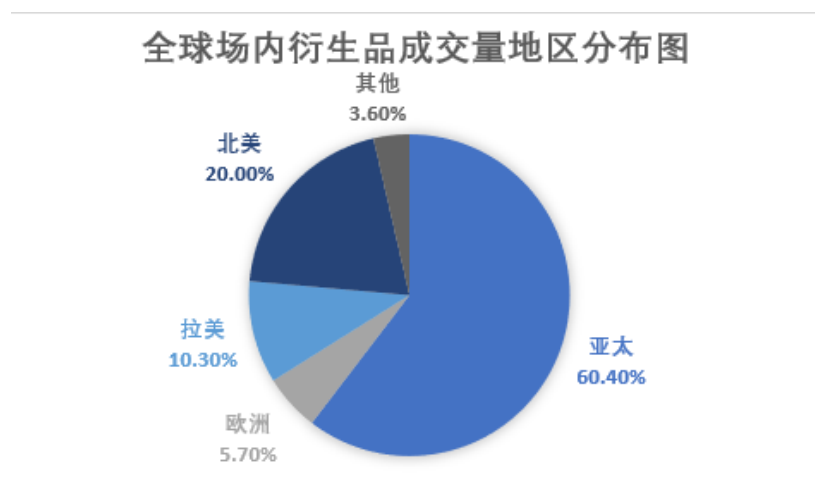


图 1-1 2022 年全球主要场内衍生品成交量地区分布

从交易量的地区分布看，亚太地区期货期权成交量占比为 60.4%，北美地区成交量占比为 20.0%，拉美地区成交量占比为 10.3%，欧洲地区成交量占比 5.7%等(如图 1-1)。

在我国，金融市场起步较晚，尤其是在新型的期权期货等衍生品方面。如图 1-2 所示，最早于 2011 年，我国的银行间市场首次开始参与外汇期权交易，而我国首只场外期权则诞生于 2013 年。之后，黄金实物期权和上证 50ETF 期权相继推出，此时标志着我国期权市场的逐步成型。尤其是上证 50ETF 期权，是国内首只场内期权品种，这意味着我国已拥有全套主流金融衍生品。2017 年豆粕期权、白糖期权分别在大商所、郑商所上市，填补了国内商品期货期权市场的空白。



图 1-2 我国金融市场发展流程图

期权作为金融衍生工具之一，即能够分散风险，又有助于强化金融市场整体抗风险的能力，从而增强金融体系的稳健性。因此国内期权市场需要不断创新发展，加强对期权定价与应用的研究对金融发展具有重要的现实意义。

期权定价的关键在于如何正确合理的构建基础资产(如股票)的价格模型。1973 年，Black 和 Scholes^[2]首次提出股票价格服从几何布朗运动的期权定价模型，给出了在假设无风险利率下的标准欧式看涨期权的定价公式。该期权定价模型的提出具有里程碑式的意义，为以后众多学者研究期权定价提供了厚实的理论基础。与此同时，芝加哥期权交易所成立，使得期权定价在实践方面迈出了坚实的一步，这个时期交易所几乎只交易标准期权。所谓标准期权是指一种合约，赋予期权持有人在到期日可以以事先约定的价格买入或卖出标的资产的权利。之后 10 年，发达国家金融创新加快，投资者加大对风险管理的需求，对

风险管理工具的需求也进一步加大，原先标准期权已不能满足投资者的需求，在此背景下，众多学者对标准期权进行扩展创新，产生出更多各种各样更为复杂的期权，比如奇异期权，与普通期权相比，奇异期权不仅在标的资产，行权时间，收益等方面不同，而且还具有多种期权的混合优点。这些使得奇异期权在风险管理、期权费用等方面更具优势，进而得到更多投资者的青睐。因此进一步研究奇异期权在理论和实际方面都是很有必要的。

经典的 B-S 公式具有许多苛刻的假设，这些假设往往与现实资本市场并不相符。如该期权定价公式假设标的资产的价格变动具有高斯性满足几何布朗运动，然而大量的实证研究结果表明：不连续或跳跃被认为是金融资产价格的一个重要组成部分，即大多数情况金融资产价格并不符合几何布朗运动。Duan^[3](1999)在一文中指出：基于几何布朗运动下的 B-S 模型不能清楚的说明股票市场的两个现象：不对称的尖峰特征和波动率微笑。Fama^[4](1965)在文章中说明基础资产价格过程并不满足几何布朗运动，而是呈现一种“尖峰厚尾”的特性。这与经典的 B-S 公式假设不一致。除此此外，Huang 和 Yang^[5](1995)，Beben 和 Ohowski^[6](2001)等研究不同的视角，都证明了金融资产存在长期相关性，而非独立的。由此可见，金融资产的价格过程并不是随机游走的而是呈现出一定的长期相关性和尖峰厚尾性，这与分数布朗运动的特性有些相似。

1940 年，Kolmogorov^[11]在他的文章中首次提及分数布朗运动，因为其具有长相关和自相似等特性，且当 Hurst 指数超过 1/2 时，能很好地解释股价的“尖峰厚尾”，更加符合对资产价格的描述。之后 Mandelbrot and Ness^[12](1968)在文章中关于分数布朗运动进行了详细叙述。众多学者开始研究分数布朗运动下的期权定价。在 2004 年，Bojdecki^[23]等人提出了另外一种改进方法，称为次分数布朗运动，与分数布朗运动相比，具有其所有性质。并且次分数布朗运动的增量在不相交区间内的相关性更弱，随着区间之间的距离趋于无穷大，其协方差衰减速率更快，这一特点更符合金融市场的建模。

综上所述，本文在此基础上拟研究混合分数布朗运动和混合次分数布朗运动跳扩散下的奇异期权定价并给出期权定价公式。我们的工作丰富了奇异期权的定价理论，为实现奇异期权的交易提供理论基础。期权作为金融衍生工具之

一具有一定的套期保值，对冲风险的功能，进而研究期权定价对风险管理具有一定的现实意义。

1.2 国内外研究现状

1900 年，Louis Bachelier^[1]基于概率论的基础上最先开始了期权定价的研究，首次给出期权定价模型，并且给出了期权的预期价值。之后，1973 年，Black 和 Scholes^[2]在前人的基础上取得了重要突破，解决了股票价格服从几何布朗运动的期权定价模型，给出了在假设无风险利率下的欧式看涨期权的定价公式。有关期权的理论和研究得到大大发展，众多学者在此基础上也得到了众多成果。Garman^[7](1983)提出了外汇公式的相关假设，给出了标准欧式货币期权的定价模型。Carr^[8](1992)则通过将美式看跌期权的价值分解为相应的欧式看跌期权价格和早期行权溢价，然后得出了麦基方程的替代表示并证明结果的一致性。Bakshi^[9](1997) 在允许波动性、利率和跳跃是随机的情况下，推出了一种替代期权并从多个角度研究了替代模型。Andreasen^[10](1998)给出了具有固定、浮动价格的亚式期权和回望期权的定价模型。

然而大量的实证研究结果表明：不连续或跳跃被认为是金融资产价格的一个重要组成部分，即大多数情况金融资产价格并不符合几何布朗运动。而是呈现出一种“尖峰厚尾”的特性，同时股价波动还存在着长相关、自相似等特征，几何布朗运动不能很好地刻画标的股票的这些特性，因此学者们开始对几何布朗运动进行改进，研究标的资产服从分数布朗运动下期权的定价公式。分数布朗运动首次被提及在 1940 年 Kolmogorov^[11]一文中，有着长相关和自相似性等特性，能更好地描述标的资产价格的波动。之后 Mandelbrot and Ness^[12] (1968)在文章中进行了详细叙述。Cheridito^[15](2001)则进一步在混合分数布朗运动框架下讨论了期权的定价模型。在风险中性的测度下，Necula(2008)^[13]通过利用 Girsanov 测度变换和傅里叶变换法，成功推导出分数布朗运动驱动下的欧式期权定价公式。Kalantari^[14](2019)等则通过利用有限差分法，推导出分数布朗运动驱动下美式看跌期权的定价模型。Ghasemalipour^[16](2019)在混合分数布朗运动环境下研究财务预测模型并用来估计欧式看涨期权。国内的学者就分数布朗运动也进行了相

关研究,得到了很多成就。如秦学志^[17](2019)等研究了不确定环境下欧式期权定价模型。贾亦佳^[21](2020)则研究双分数布朗运动环境下的美式期权定价。李雨珊^[20](2021)给出分数布朗运动驱动的具有机制转换的欧式期权定价。王剑君^[19](2022)利用保险精算法给出分数布朗运动跳扩散下的上限型权证和抵付型权证的定价公式。张雅茹^[18](2023)通过 Δ 对冲原理,构造了基于混合双分数布朗运动驱动下永久美式回望期权所满足的偏微分方程并求出结果,给出定价公式。

在 2004 年,Bojdecki^[22]等人提出了另外一种改进布朗运动的方法,被称为次分数布朗运动,它具有除平稳增量之外的分数布朗运动的所有性质。2007 年 Tudor^[23]对次分数布朗运动的性质进行了详细的叙述。之后学者们开始研究在次分数布朗运动驱动下的期权定价。Feng^[26](2017)在次分数布朗运动驱动下研究一般交换期权的定价,Xu^[24](2018)在此基础上研究复合期权的定价,Jingmin^[25](2020)研究带有随机波动率的欧式期权定价。Bian^[27](2021)则研究次分数布朗运动驱动下的欧式期权的模糊模拟。近几年,国内学者基于次分数布朗运动下也做了不少研究工作。如肖炜麟^[29](2014),王永茂^[30](2018),梁喜珠^[32](2020),靳晨萱^[31](2021),肖炜麟^[33](2021)等。2022 年张萌和温鲜^[28]在次分数布朗运动下研究欧式回望期权的定价。余湄^[34](2022)等利用 AR 和 GARCH 模型对该模型下的 Hurst 指数和波动率进行建模,推导出基于混合次分数布朗运动下的期权定价模型。王萌^[35](2023)考虑原生资产连续支付红利情况,给出了基于混合次分数布朗运动环境下的欧式障碍期权的定价公式。

经典 Black-Scholes 公式所需的关键假设是基础资产的价格波动可以用具有连续的随机过程来描述,由于自然灾害,战争等众多特殊情况导致标的资产价格不连续甚至发生剧烈波动,普通的期权定价模型无法衡量价格的剧烈变动。为了更好的刻画资产价格发生的间断性跳跃行为,泊松跳跃过程被学者们引入到期权的定价模型中。1976 年 Merton^[37]在文章中对 Black-Scholes 公式进行修正,通过添加泊松跳跃,推导了标的股票价格满足连续和跳跃混合过程的期权定价公式。Amin^[44](1993)和 Kou^[43](2002)将跳扩散加入到期权定价中。2004 年刘国买^[39]给出了服从多种形式跳过程的期权定价。杨云锋^[38](2006),王献东^[40](2009),南嘉欣^[41](2021),史言^[42](2021)等在跳扩散模型下进行各种期权定价。

2022 年安翔^[36]等人构造了 Crank-Nicolson 格式, 利用 Δ 对冲原理, 推导出混合次分数跳扩散环境下的回望期权的定价。

交换期权是是奇异期权的一种, 是持有人在到期日有权但不必须以一种资产交换另一种资产的合约。1978 年 Margrabe^[45]构造了将一种风险资产换成另一种风险资产的期权价值的等式, 首次给出了交换期权的闭式解, 奠定了交换期权的基础。之后众多学者在此基础上进行修正改进, 逐渐完善交换期权定价模型, 研究在各种限制条件下的交换期权定价模型。2005 年 Blenman^[48]在风险中性下解决了欧式幂型交换期权的价格问题。Kim^[46](2016)研究了具有违约风险的交换期权的定价, 使用克莱因模型对信用风险进行建模给出了具有信用风险的交换期权价格的封闭式定价公式, Jeon^[47](2021)推导出含有信用风险的幂型交换期权的定价公式, 通过使用多维 Girsanov 定理的度量变化技术。Lian^[49](2022)提出了一种跳扩散过程的美式交换期权定价的数值方法。

亚式期权也是奇异期权的一种, 其到期日的收益取决于在执行期内资产价格的某种平均值。亚式期权的波动性低于收益完全基于单一到期价格的期权。幂型期权的收益取决于标的资产价格的 k 次方(k 为自然数)与执行价格的差, 因此幂型期权对资产变化的敏感性更强。亚式幂型期权是亚式期权和幂型期权的结合, 同时具有这两种新型期权的优势, 进而成为许多投资者规避风险选择。1990 年, Vorst^[50]等提出一个新的策略来定价平均价值期权, 即期权的回报取决于在一个固定时期内价格的平均值, 给出了几何亚式期权的定价公式。1998 年 Andreasen^[10]给出了具有固定、浮动价格的亚式期权的定价公式。章珂^[51](2001)在风险中性的测度下, 利用几何平均法计算资产的平均值, 成功推导出了基于布朗运动下的几何亚式期权的定价公式。Mao^[57](2014)等给出了分数布朗运动框架下幂型支付的几何亚式期权的定价公式的封闭解。还有肖文宁^[52](2005), 沈明轩^[56](2013), Kirkby^[53](2020), 胡攀^[54](2021), 杨月^[55](2020)等均给出不同条件下的几何亚式期权的定价在风险中性概率下, 沈明轩^[58](2015)研究了混合分数布朗运动环境下的幂型亚式期权定价。Shokrollahi^[60](2018)在时变混合次分数布朗运动驱动下给出亚式幂性期权的定价公式。同样在风险中性条件下, Wang^[59](2021)等研究了次分数布朗运动驱动的幂型支付几何亚式期权的定价问

题。龚雪^[61](2023)则引入跳扩散,利用保险精算的方法给出了混合次分数跳扩散下亚式幂型期权的定价。

1.3 研究内容及主要创新点

本文一共分为 5 个章节:

第一章是绪论部分,主要阐述期权定价的相关研究背景意义、国内外的研究现状以及本文的主要研究内容。

第二章是基本知识介绍,主要介绍了与本论文相关的理论知识,主要包括分数布朗运动的定义,混合分数布朗运动的定义,泊松跳的定义以及金融资产价格模型理论。

第三章在布朗运动的基础上改进,研究混合分数布朗运动,并加入泊松跳,用来更好的描述真实的资产价格过程。基于此背景下,探讨数字交换期权的定价公式并给数值模拟进行分析。

第四章在混合分数布朗运动的基础上进一步改进,研究混合次分数布朗运动,加入泊松跳,用来模拟真实市场环境。利用保险精算方法给出几何平均亚式幂型期权定价公式,并给出了一些特殊情形下的亚式期权定价公式。

第五章对全文进行总结,并指出今后要研究的方向。

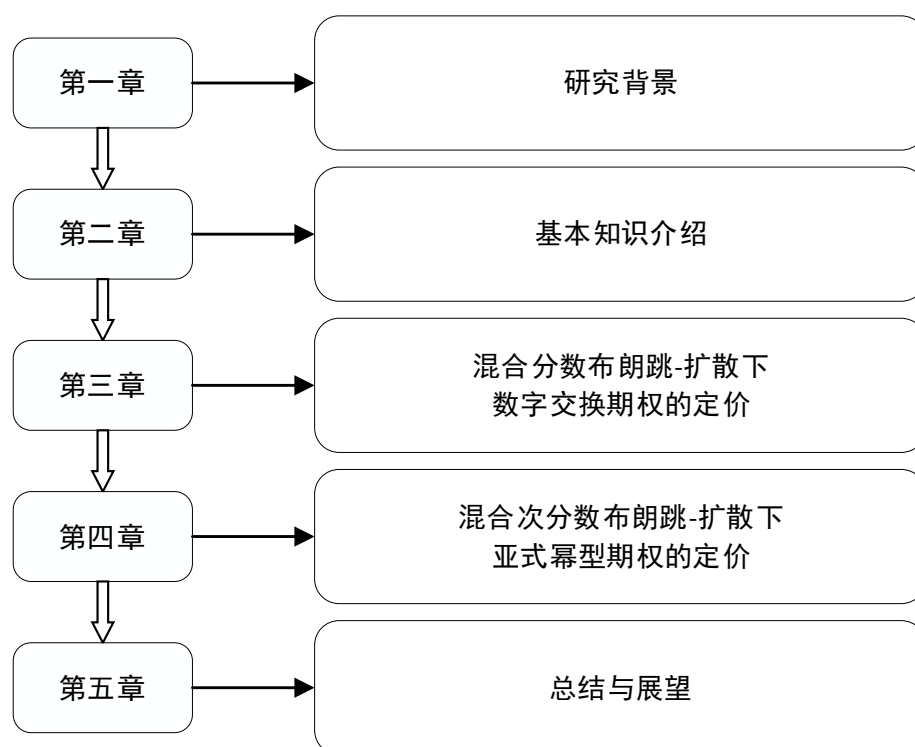
本文的主要创新之处主要体现在以下几点:

(1) 对布朗运动进行改进,研究混合分数布朗运动下的交换期权定价。其次在交换期权的基础上进行创新,将执行价格变成执行价格区间,从而能更好的将收益控制在一定范围内。

(2) 真实市场中由于特殊事件的发生导致标的资产价格发生剧烈波动,因此本文增加了泊松跳过程,能更好的描述资产价格的剧烈变化。

(3) 在分数布朗运动的基础上进一步改进,研究混合次分数布朗运动下的亚式幂型期权定价。其次在亚式期权的基础上加上泊松跳过程,更好的描述真实市场。

本文的逻辑框架如下图：



第 2 章 基本知识介绍

在这章，我们阐述了分数布朗运动，次分数布朗运动，跳扩散模型的相关定义及引理公式和金融资产价格模型理论，方便我们展开之后的研究。

2.1 混合分数布朗运动

首先给出的是分数布朗运动的定义以及相关的积分引理，然后给出混合分数布朗运动模型的构建。

定义 2.1.1^[60] 设概率空间为 (Ω, F, P) ，具有 Hurst 指数 $(0 < H < 1)$ 的分数布朗运动 $B_H = \{B_H(t); t \in \mathbb{R}\}$ 定义为一个满足下列条件的连续高斯过程，

$$(1) B_H(0) = E[B_H(t)] = 0, \forall t \in \mathbb{R};$$

$$(2) E[B_H(t)B_H(s)] = \frac{1}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}), \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

当 $H = \frac{1}{2}$ 时，由上面的式子可以得分数布朗运动的协方差恰好就是标准布朗运动的协方差，分数布朗运动的方差也恰好为标准布朗运动的方差。

由于分数布朗运动不是马氏过程，也不是半鞅，因此使用一般的随机积分处理，会造成市场出现套利机会。为解决这个问题，Duncan^[62]在 2000 年提出一种新的积分，称为 *Wick-Itô* 积分，同时给出证明该积分计算期权价格时，市场不存在套利机会。

定义 2.1.2 (分数 *Wick-Itô* 积分)^[62] 令 $(S)_H^*$ 为分数 Hida 广义泛函空间，设函数 $Y: \mathbb{R} \rightarrow (S)_H^*$ ，使得 $Y(t) \diamond W_H(t)$ 在 $(S)_H^*$ 中可积，则称

$$\int_{\mathbb{R}} Y(t) dB_H(t) = \int_{\mathbb{R}} Y(t) \diamond W_H(t) dt$$

为函数 Y 的分数 *Wick-Itô* 积分。

假定 2.1.1 当 $T > 0$ ，假设 $\xi(t) \in (0 < t < T)$ 是一个连续函数， $L(t)$ 是一个的函数，满足

$$\xi(t) = \int_{\mathbb{R}} L(u) \phi(u, t) du, \quad 0 < t < T,$$

其中 $\phi(u, t) = H(2H-1)|u-t|^{2H-2}$ 。

引理 2.1.1 (分数 $It\hat{o}$ 公式)^[62] 设 $f(t) \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, 且

$$dX(t) = \mu(t, w)dt + \sigma(t, w)dB_H(t),$$

其中 $\mu(t, w)$, $\sigma(t, w)$ 为关于时间的函数, 则有

$$\begin{aligned} f(t, X(t)) - f(0, X(0)) &= \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X(s))ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X(s))\sigma(s)dB_H(s) \\ &+ \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial x}(s, X(s))\mu(s) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X(s))\sigma(s)^2 Hs^{2H-1} \right) ds. \end{aligned}$$

引理 2.1.2^[62] (分数 $Wick-It\hat{o}$ 积分的常用结论)

$$(1) \int_0^t B_H(s)dB_H(s) = \frac{1}{2} B_H^2(t) - \frac{1}{2} t^{2H};$$

(2) 若 $S(t) \in (S)_H^*$ 满足随机微分方程

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB_H(t), S(0) = S_0 > 0,$$

其中 S_0, μ, σ 都是常数, 则该随机微分方程的显示解为

$$S(t) = S_0 \exp\left(\mu t - \frac{1}{2} \sigma^2 t^{2H} + \sigma B_H(t)\right).$$

引理 2.1.3^[62] (分数 Girsanov 定理) 假设 $B_H(t)$ 是概率空间 (Ω, F, P) 上的一维几何分数布朗运动, 其中 F_t 是由分数布朗运动 $B_H(t)$ 所生成的 σ 代数流, 定义一个新的概率测度 $\hat{P}$, 满足下列式子

$$\frac{d\hat{P}}{dP} = \exp\left\{\int_0^t \gamma(u)dB_H(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \gamma(u)^2 du\right\},$$

其中 $\gamma(t)$ 是一个与 F_t 适应的随机过程, 则 $\hat{B}_H(t) = B_H(t) - \int_0^t \gamma(u)du$ 在概率测度 $\hat{P}$ 下仍是分数布朗运动。

定义 2.1.3 设 (Ω, F, P) 是一个完备的概率空间, 混合分数布朗运动 $D(t)$ 是定义在此空间上的布朗运动 $B(t)$ 和分数布朗运动 $B_H(H \in (\frac{3}{4}, 1))$ 的线性组合, 即

$$D(t) = \sigma B(t) + \varepsilon B_H(t), \quad t > 0,$$

其中 $\varepsilon, \sigma \in R$ 不同时为 0, $B(t)$ 和 $B_H(t)$ 相互独立。

引理 2.1.4^[63] 当 $F \in L^2$, 在有界 F_t^H 测度上 $t \in [0, T]$ 的价格可以表示为

$$F(t) = e^{-\int_t^T r(s)ds} E_p[F | F_t^H],$$

其中, $E_p[\cdot]$ 表示在风险中性条件下拟条件期望。

引理 2.1.5^[63] 当 $0 < t < T$ 时, 对于确定函数 $\varepsilon(t)$, $\sigma(t)$ 有

$$\begin{aligned} & E_p[\exp(\int_0^T \varepsilon(s)dB_H(s) + \int_0^T \sigma(s)dB(s))] \\ &= \exp[\int_0^t \varepsilon(s)dB_H(s) + \int_0^t \sigma(s)dB(s) \\ &+ \frac{1}{2} \int_t^T \int_t^T \varepsilon(u)\varepsilon(v)\phi(u,v)dudv + \frac{1}{2} \int_t^T \sigma^2(s)ds]。 \end{aligned}$$

引理 2.1.6^[63] f 是一个函数, 满足 $E_p[f(B_H(T), B(T))] < \infty$, 当 $0 < t < T$ 时,

对于确定函数 $\varepsilon(t)$, $\sigma(t)$ 有

$$\begin{aligned} & E_p[f(\int_0^T \varepsilon(s)dB_H(s) + \int_0^T \sigma(s)dB(s))] \\ &= \int_R \frac{1}{\sqrt{2\pi[\int_t^T \int_t^T \varepsilon(u)\varepsilon(v)\phi(u,v)dudv + \int_t^T \sigma^2(s)ds]}} \\ & \times \exp(-\frac{(x - \int_0^t \varepsilon(s)dB_H(s) - \int_0^t \sigma(s)dB(s))^2}{2[\int_t^T \int_t^T \varepsilon(u)\varepsilon(v)\phi(u,v)dudv + \int_t^T \sigma^2(s)ds]})} f(x)dx。 \end{aligned}$$

令 $f(x) = \mathbf{1}_A(x)$, 然后我们可以很容易得到下列推论。

推论 2.1.7^[63] 当 $0 < t < T$ 时, 对于连续函数 $\varepsilon(t)$, $\sigma(t)$ 有

$$\begin{aligned} & E_p[\mathbf{1}_A(\int_0^T \varepsilon(s)dB_H(s) + \int_0^T \sigma(s)dB(s))] \\ &= \int_R \frac{1}{\sqrt{2\pi[\int_t^T \int_t^T \varepsilon(u)\varepsilon(v)\phi(u,v)dudv + \int_t^T \sigma^2(s)ds]}} \end{aligned}$$

$$\times \exp\left(-\frac{(x - \int_0^t \varepsilon(s)dB_H(s) - \int_0^t \sigma(s)dB(s))^2}{2[\int_t^T \int_t^T \varepsilon(u)\varepsilon(v)\phi(u,v)dudv + \int_t^T \sigma^2(s)ds]}\right) \mathbf{1}_A dx。$$

引理 2.1.8^[63] f 是一个函数, 满 $E_P[f(B_H(T), B(T))] < \infty$, 当 $t < T$ 时, $E_{\hat{P}}[f(\int_0^T \varepsilon(s)dB_H(s) + \int_0^T \sigma(s)dB(s))] = \frac{1}{X(t)} E_P[f(\int_0^T \varepsilon(s)dB_H(s) + \int_0^T \sigma(s)dB(s))]X(T)$, 其中 $E_{\hat{P}}[\cdot]$ 是在概率测度 $\hat{P}$ 下的拟条件期望。

2.2 混合次分数布朗运动

我们介绍了次分数定义及相关的积分理论, 同时给出混合次分数布朗运动模型的构建。

引理 2.2.1^[59] 设 (Ω, F_t, P) 是一个完备的概率空间, 定义在此概率空间上的次分数布朗运动 $(\xi_t^H)_{t \in R_+}$ 具有如下性质:

- (1) 自相似性: 当 $a > 0$, $(\xi_{at}^H)_{t \in R_+} = (a^H \xi_t^H)_{t \in R_+}$;
- (2) 长期依赖性: 令 $\rho(n) = \text{Cov}(\xi_1^H, \xi_{(n+1)}^H - \xi_n^H)$, 当 $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ 时, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \rho(n) = \infty$;
- (3) $\forall t \in R_+, \forall H \in (0, 1)$ 时, $\text{Var}(\xi_t^H) = E(\xi_t^H)^2 = (2 - 2^{(2H-1)})t^{2H}$;
- (4) 对 $\forall t \in R_+$, 当 $H \neq \frac{1}{2}$ 时, $(\xi_t^H)_{t \in R_+}$ 既不是 Markov 过程也不是半鞅;
- (5) $\text{cov}(\xi_t^H, \xi_s^H) = t^{2H} + s^{2H} - \frac{1}{2}((t+s)^{2H} + |t-s|^{2H}), \forall s, t \in R_+。$

引理 2.2.2^[59] 设 $f(t, \xi_H(t))$ 是二阶可微的函数, 则

$$df(t, \xi_H(t)) = \frac{\partial f}{\partial x} d\xi_H(t) + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + H(2 - 2^{2H-1})t^{2H-1} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) dt。$$

设随机过程 $\{S(t), t \geq 0\}$ 满足随机微分方程

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)d\xi_H(t),$$

则该随机微分方程的解为

$$S(t) = S(0) \exp\left\{\mu t - \frac{\sigma^2}{2} (2 - 2^{2H-1}) t^{2H} + \sigma \xi_H(t)\right\}。$$

定义 2.2.1 混合次分数布朗运动 $M(t)$ 是定义在 (Ω, F, P) 上的布朗运动 B_t 与次分数布朗运动 ξ_t^H 的一个线性组合，即

$$M(t) = \varepsilon B_t + \sigma \xi_t^H, \quad \forall t \geq 0,$$

其中 $\varepsilon, \sigma \in R$ 不同时为 0, B_t 和 ξ_t^H 相互独立, $F_t = (\sigma(B_s, \sigma \xi_s^H), t \geq s \geq 0)$, P 为 F_t 上的概率测度。

定义 2.2.2 标的资产价格 S_t 在 $[0, T]$ 时间段内的期望收益率 $\int_0^T \theta(t) dt$ 定义为:

$$\exp\left(\int_0^T \theta(t) dt\right) = \frac{E[S_T]}{S_0},$$

即风险资产期末价格的期望与期初价格的比。

2.3 跳扩散模型定义

大量实证表明：当有重大事件发生时(如自然灾害，金融危机等)，金融市场的基础资产的价格(如股票价格)就会发生剧烈波动，显示不符合 BS 模型所需要的连续扩散假设，因此，当这些事件发生时，用普通的 BS 模型对期权进行定价就会与现实市场不符，从而产生误差。为了更准确的刻画现实市场中基础资产发生的剧烈波动，Merton^[37]在 1976 年提出添加泊松跳跃，对 Black-Scholes 公式进行修正，推导了标的股票价格满足连续和跳跃混合过程的期权定价公式。

定义 2.3.1^[37] 如果用下式描述股票的变化，则称股价遵循跳扩散模型

$$dS_t = (\mu - \lambda k) S_t dt + \sigma S_t dW_t + JS_t dQ_t,$$

其中， Q_t 表示参数为 λ 的 Poisson 过程， J 是描述跳跃幅度的独立同分布随机变量且 $E(J) = k$ 。上述模型的解为：

$$S(t) = S_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda k\right)t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i\right]。$$

2.4 金融资产价格模型理论

与期货的权利义务对等相比，期权(Option)则是一种权利义务不对等的金融合约，它赋予持有人在某特定日期以内以约定的价格买入或卖出某种标的资产的权利。期权则是将这权利和义务进行定价，期权合约中的卖方只能被动履行义务，而买方是可以做出选择决定的权利受让方。

根据买卖方向不同，期权可以分为看涨期权和看跌期权。看涨期权持有者认为未来市场行情好，所需的标的资产价格可能上升，因此提前买入看涨期权，在特定日期内以提前约定好的价格买进标的资产，从而做到价格的保值。看跌期权与看涨期权相反，持有者认为未来市场行情不好，所卖的标的资产未来价格下降，提前买入看跌期权，减少损失。根据执行日期不同，期权可分为欧式期权和美式期权，欧式期权和美式期权合称为标准期权。根据风险特征的不同，期权可以分为标准期权和奇异期权，相比标准期权，奇异期权不仅在标的资产，行权时间，收益等方面不同，而且还具有多种期权的混合优点。

经典的BS模型通过构造一个资产组合，一个风险中性的资产组合。然后用该风险中性的资产组合去复制期权的损益，最后得到欧式期权的定价公式。BS模型的基本假设^[2]为：

- (1) 假设市场是无摩擦的；
- (2) 市场不存在无风险套利；
- (3) 期权在到期日执行；
- (4) 市场交易是持续的；
- (5) 股票价格行为服从对数正态分布；
- (6) 无风险利率和金融资产收益变量是恒定的；
- (7) 投资者能够以无风险利率借贷。

引理 2.4.1^[2] (BS 模型) 设某欧式期权的标的股票价格 $S(t)(t > 0)$ 满足微分方程

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB(t),$$

其中 $B(t)$ 是标准的布朗运动， μ 是标的股票的期望收益率， σ 是股票的波动汇率，则欧式期权的价格 $V(t)$ 满足的随机微分方程为

$$\frac{\partial V(t)}{\partial t} + rS(t) \frac{\partial V(t)}{\partial S(t)} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V(t)}{\partial S^2(t)} = rV(t)。$$

通过求解，得出欧式看涨期权和看跌期权的价格，分别为：

$$C(t) = S(t)\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2)$$

$$P(t) = Ke^{-rT}\Phi(-d_2) - S(t)\Phi(-d_1)，$$

其中 $C(t)$ 表示欧式看涨期权的价格， $\Phi(x)$ 表示标准的正态分布函数， $P(t)$ 表示看跌期权的价格， K 是固定的执行价格， r 为无风险利率， T 为到期日， d_1 和 d_2 分别满足

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S(t)}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = \frac{\ln(\frac{S(t)}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}。$$

期权定价理论的发展最终形成两种主流方法，一种是基于 BS 公式，通过构建无套利随机微分方程求解期权价格，另一种是基于风险中性理论，将标的资产未来现金流的期望值以无风险利率折现到当前时刻，从而得到期权的现期价格，也就是鞅定价。风险中性是指只考虑当前的无风险利率，时间以及标的资产现价等与风险偏好独立的量，而不考虑其他与风险偏好相关的量，因此衍生品的价值相对独立，不受风险偏好的影响，本文主要采用风险中性定价方法。

风险中性定价方法有两个特点：

- (1) 假设所有投资者期望收益率等于无风险收益率，即股票 $\mu = r$ ；
- (2) 对期权期望收益的贴现使用无风险利率。

设 K 是固定的执行价格， r 为无风险利率， T 为到期日，标的资产为 $S(t)$ ，则欧式看涨期权和看跌期权的到期收益分别为：

$$\begin{cases} \max(S_T - K, 0) \\ \max(K - S_T, 0) \end{cases}，$$

根据风险中性定价方法，欧式看涨看跌期权的价格为：

$$C = e^{-rt} E[S_T - K]^+$$

$$P = e^{-rt} E[K - S_T]^+,$$

通过求解可以得出和上文一致的结果。

第 3 章 混合分数布朗跳—扩散下的数字交换期权定价

本章研究了在混合分数布朗跳-扩散环境下的期权定价问题，给出了基于混合分数布朗跳-扩散下的数字交换期权的定价公式。本章在经典的布朗运动的基础上进行改进，研究混合分数布朗运动，分数布朗运动有着长相关和自相似性等特性，能更好地描述金融资产的价格波动。由于市场上标的资产的价格会因一些突发事件而引起的价格间断性跳跃行为，为了描述这种具有间断跳跃的价格过程，我们将泊松跳引入到期权的定价模型中。利用拟条件期望，本章给出基于混合分数布朗跳-扩散下的数字交换期权的定价公式。最后，通过数值模拟进行分析。

3.1 数字交换期权定义

交换期权是一种奇异期权，涉及两种标的资产。期权的持有者拥有可以在到期日选择是否以事先约定的价格将一种基础资产转化为另一个基础资产的权利。因此交换期权在到期日 T 时刻的收益可表示为：

$$(S_1(T) - S_2(T))^+,$$

其中 S_1 是一种基础资产， S_2 是另一种基础资产。

数字交换期权是基于交换期权的基础上，通过在其收益函数上增加一个关于两种标的资产比值范围的示性函数。

定义 3.1 设 $K_i > 0, i = 1, 2$ 是常数，期权在到期日 T 时刻的收益满足

$$\max\{S_1(T) - S_2(T), 0\} I_{\{K_1 \leq \frac{S_1(T)}{S_2(T)} \leq K_2\}},$$

其中， $I\{\cdot\}$ 是一个示性函数， $[K_1, K_2]$ 是执行价格区间，我们将这个期权命名为数字交换期权。

3.2 混合分数布朗跳-扩散基本模型框架

假定无风险资产价格 $P(t)$ 和两个风险资产价格(如股票资产) $S_i(t), i=1,2$ 满足下列式子

$$dP(t) = r(t)P(t)dt, P(0)=1, 0 \leq t \leq T, \quad (3.1)$$

其中 $P(t)$ 是无风险资产在时间 t 时的价格, $r(t)$ 是无风险利率。

$$dS_i(t) = S_i(t)[(\mu(t) - \lambda\mu_{J_i(t)})dt + \varepsilon_i dB_H(t) + \sigma_i dB(t) + (e^{J_i(t)} - 1)dN_i(t)], \quad (3.2)$$

其中 $B_H(t)$ 是 Hurst 指数满足 $H \in (\frac{3}{4}, 1)$ 的分数布朗运动, $B(t)$ 是标准的布朗运动, $\mu(t)$, $\varepsilon_i(t)$, $\sigma_i(t)$ 是确定的函数。 $N_i(t)$ 是具有相似参数 λ 的 *Poisson* 过程, 表示标的资产价格在 $[0, t]$ 内跳跃的次数。 $J_i(t)$ 是一列独立同分布的随机变量, 表示跳的大小, 满足 $(e^{J_i(t)} - 1) \sim (\mu_{J_i(t)}, \sigma_{J_i(t)}^2)$ 。此外, $B(t)$, $B_H(t)$ 和 $N(t)$ 假设相互独立。

在风险中性测度下, 两个标的资产 $S_1(t), S_2(t)$ 的价格过程可以表示为下列方程:

$$\begin{aligned} dS_1(t) &= S_1(t)[(r(t) - \lambda\mu_{J_1(t)})dt + \varepsilon_1 dB_H(t) + \sigma_1 dB(t) + (e^{J_1(t)} - 1)dN_1(t)] \\ dS_2(t) &= S_2(t)[(r(t) - \lambda\mu_{J_2(t)})dt + \varepsilon_2 dB_H(t) + \sigma_2 dB(t) + (e^{J_2(t)} - 1)dN_2(t)]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

定义 3.2 设 $\beta_i \geq 0, i=1,2$, $K_i > 0, i=1,2$ 是常数, 数字交换期权在到期日 T 时刻的收益满足

$$C(T) = \max\{\beta_1 S_1(T) - \beta_2 S_2(T), 0\} I_{\{K_1 \leq \frac{S_1(T)}{S_2(T)} \leq K_2\}}, \quad (3.4)$$

其中, $I\{\cdot\}$ 是一个示性函数, $[K_1, K_2]$ 是执行价格区间。

3.3 混合分数布朗跳-扩散下的数字交换期权定价

在本小节中, 利用风险中性定价方法, 给出基于分数布朗跳-扩散下的数字交换期权的定价公式, 并给出相关的证明过程。

定理 3.1 当 $t \in [0, T]$, 到期日为 T , 数字交换期权在执行价格区间为 $[K_1, K_2]$ 上的价格为:

(1) 当 $\frac{\beta_2}{\beta_1} > K_2$ 时, $C(t, T) = 0$;

(2) 当 $K_1 \leq \frac{\beta_2}{\beta_1} \leq K_2$ 时,

$$\begin{aligned}
 C(t, T) &= E_p[e^{-\int_t^T r(s)ds} C(T) | F_t] = e^{-\int_t^T r(s)ds} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n (T-t)^n}{n!} e^{-\lambda(T-t)} \\
 &\times \left\{ \beta_1 S_1(t) \exp\left[\int_t^T (r(s) - \lambda\mu_{J_1(t)})ds + \sum_{i=1}^n J_1(T_i)\right] [N(d_1) - N(d_3)] \right. \\
 &\quad \left. - \beta_2 S_2(t) \exp\left[\int_t^T (r(s) - \lambda\mu_{J_2(t)})ds + \sum_{i=1}^n J_2(T_i)\right] [N(d_2) - N(d_4)] \right\}, \\
 d_1 &= \frac{\ln \frac{K_2}{\frac{\beta_2}{\beta_1}} + \int_t^T (\lambda\mu_{J_1(t)} - \lambda\mu_{J_2(t)})ds - \sum_{i=1}^n [J_1(T_i) - J_2(T_i)] - \frac{1}{2}b}{\sqrt{b}}, \\
 d_2 &= \frac{\ln \frac{K_2}{\frac{\beta_2}{\beta_1}} + \int_t^T (\lambda\mu_{J_1(t)} - \lambda\mu_{J_2(t)})ds - \sum_{i=1}^n [J_1(T_i) - J_2(T_i)] + \frac{1}{2}b}{\sqrt{b}}, \\
 d_3 &= \frac{\ln \frac{S_1(t)}{S_2(t)} - \ln\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right) - \int_t^T (\lambda\mu_{J_1(t)} - \lambda\mu_{J_2(t)})ds + \sum_{i=1}^n [J_1(T_i) - J_2(T_i)] + \frac{1}{2}b}{\sqrt{b}},
 \end{aligned}$$

$$d_4 = \frac{\ln \frac{S_1(t)}{S_2(t)} - \ln \left(\frac{\beta_2}{\beta_1} \right) - \int_t^T (\lambda \mu_{J_1(t)} - \lambda \mu_{J_2(t)}) ds + \sum_{i=1}^n [J_1(T_i) - J_2(T_i)] - \frac{1}{2} b}{\sqrt{b}},$$

$$b = \int_t^T [\sigma_1(s) - \sigma_2(s)]^2 ds + \int_t^T \int_t^T (\varepsilon_1(u) - \varepsilon_2(u))(\varepsilon_1(v) - \varepsilon_2(v)) \phi(u, v) dudv;$$

(3) 当 $\frac{\beta_2}{\beta_1} \leq K_1$ 时,

$$\begin{aligned} C(t, T) &= E_p[e^{-\int_t^T r(s) ds} C(T) | F_t] = e^{-\int_t^T r(s) ds} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n (T-t)^n}{n!} e^{-\lambda(T-t)} \\ &\times \left\{ \beta_1 S_1(t) \exp\left[\int_t^T (r(s) - \lambda \mu_{J_1(t)}) ds + \sum_{i=1}^n J_1(T_i)\right] [N(d_5) - N(d_7)] \right. \\ &\quad \left. - \beta_2 S_2(t) \exp\left[\int_t^T (r(s) - \lambda \mu_{J_2(t)}) ds + \sum_{i=1}^n J_2(T_i)\right] [N(d_6) - N(d_8)] \right\}, \end{aligned}$$

$$d_5 = d_1, d_6 = d_2,$$

$$d_7 = \frac{\ln \frac{S_1(t)}{S_2(t)} - \int_t^T (\lambda \mu_{J_1(t)} - \lambda \mu_{J_2(t)}) ds + \sum_{i=1}^n [J_1(T_i) - J_2(T_i)] + \frac{1}{2} b}{\sqrt{b}},$$

$$d_8 = \frac{\ln \frac{S_1(t)}{S_2(t)} - \int_t^T (\lambda \mu_{J_1(t)} - \lambda \mu_{J_2(t)}) ds + \sum_{i=1}^n [J_1(T_i) - J_2(T_i)] - \frac{1}{2} b}{\sqrt{b}},$$

$$b = \int_t^T [\sigma_1(s) - \sigma_2(s)]^2 ds + \int_t^T \int_t^T (\varepsilon_1(u) - \varepsilon_2(u))(\varepsilon_1(v) - \varepsilon_2(v)) \phi(u, v) dudv.$$

证明：令 $N(T-t) = n$ ，我们可以得到方程(3.2)的解：

$$\begin{aligned} S_{in}(T) &= S_i(t) \exp\left[\int_t^T r(s) - \lambda \mu_{J_i(t)} ds + \sum_{k=1}^n J_i(t_k) + \int_t^T \varepsilon_i(s) dB_H(s) + \int_t^T \sigma_i(s) dB(s) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \int_t^T \sigma_i^2(s) ds - \frac{1}{2} \int_t^T \int_t^T \varepsilon_i(u) \varepsilon_i(v) \phi(u, v) dudv\right], i = 1, 2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

由引理 2.1.4，我们可以得到

$$C(t, T) = E_p[e^{-\int_t^T r(s)ds} C(T) | F_t] = e^{-\int_t^T r(s)ds} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n (T-t)^n}{n!} e^{-\lambda(T-t)}$$

$$\times \{\beta_1 E_p[S_{2n}(T) \cdot (\frac{S_{1n}(T)}{S_{2n}(T)} - \frac{\beta_2}{\beta_1})^+ I_{\{K_1 \leq \frac{S_{1n}}{S_{2n}} \leq K_2\}} | F_t]\}.$$

此时，考虑一个新的过程

$$\hat{Z}_t = \hat{B}(t) + \hat{B}_H(t) = B(t) + B_H(t) - \int_0^t \sigma(s)ds - \int_0^t \gamma(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T, \quad \gamma(s) = \int_t^T \varepsilon(\tau) \phi(\tau, s) d\tau,$$

由引理 2.1.3，我们定义一个新的概率测度 $\hat{P}$ ，因此， $\hat{Z}_t$ 是一个新的混合分数布朗运动。

$$\frac{d\hat{P}}{dP} = X_T = \exp[\int_t^T \varepsilon_i(s) dB_H(s) + \int_t^T \sigma_i(s) dB(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \int_t^T \varepsilon_i(u) \varepsilon_i(v) \phi(u, v) du dv - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_i^2(s) ds],$$

由引理 2.1.8，可得

$$E_p[S_{2n}(T) \cdot (\frac{S_{1n}(T)}{S_{2n}(T)} - \frac{\beta_2}{\beta_1})^+ I_{\{K_1 \leq \frac{S_{1n}}{S_{2n}} \leq K_2\}} | F_t]$$

$$= E_p[S_2(t) \exp[\int_t^T (r(s) - \lambda \mu_{J_2(t)}) ds + \sum_{i=1}^n J_2(T_i)] \frac{X(T)}{X(t)} (\frac{S_{1n}(T)}{S_{2n}(T)} - \frac{\beta_2}{\beta_1})^+ I_{\{K_1 \leq \frac{S_{1n}}{S_{2n}} \leq K_2\}} | F_t]$$

$$= S_2(t) \exp[\int_t^T (r(s) - \lambda \mu_{J_2(t)}) ds + \sum_{i=1}^n J_2(T_i)] E_{\hat{P}}[(\frac{S_{1n}(T)}{S_{2n}(T)} - \frac{\beta_2}{\beta_1})^+ I_{\{K_1 \leq \frac{S_{1n}}{S_{2n}} \leq K_2\}} | F_t].$$

这时，我们可以得出一些结论：

$$(1) \text{ 当 } \frac{\beta_2}{\beta_1} > K_2 \text{ 时, } E_{\hat{P}}[(\frac{S_{1n}(T)}{S_{2n}(T)} - \frac{\beta_2}{\beta_1})^+ I_{\{K_1 \leq \frac{S_{1n}}{S_{2n}} \leq K_2\}} | F_t] = 0;$$

$$(2) \text{ 当 } K_1 \leq \frac{\beta_2}{\beta_1} \leq K_2 \text{ 时,}$$

$$E_{\hat{P}}[(\frac{S_{1n}(T)}{S_{2n}(T)} - \frac{\beta_2}{\beta_1})^+ I_{\{K_1 \leq \frac{S_{1n}}{S_{2n}} \leq K_2\}} | F_t] = E_{\hat{P}}[(\frac{S_{1n}(T)}{S_{2n}(T)} - \frac{\beta_2}{\beta_1})^+ I_{\{\frac{\beta_2}{\beta_1} \leq \frac{S_{1n}}{S_{2n}} \leq K_2\}} | F_t];$$

$$(3) \text{ 当 } \frac{\beta_2}{\beta_1} \leq K_1 \text{ 时,}$$

$$E_{\hat{P}}[(\frac{S_{1n}(T)}{S_{2n}(T)} - \frac{\beta_2}{\beta_1})^+ I_{\{K_1 \leq \frac{S_{1n}}{S_{2n}} \leq K_2\}} | F_t] = E_{\hat{P}}[(\frac{S_{1n}(T)}{S_{2n}(T)} - \frac{\beta_2}{\beta_1})^+ I_{\{K_1 \leq \frac{S_{1n}}{S_{2n}} \leq K_2\}} | F_t].$$

针对结论(2)的证明:

$$\begin{aligned} & E_{\hat{P}}\left[\left(\frac{S_{1n}(T)}{S_{2n}(T)} - \frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^+ \mathbf{I}_{\left\{\frac{\beta_2}{\beta_1} \leq \frac{S_{1n}}{S_{2n}} \leq K_2\right\}} \mid F_t\right] \\ &= E_{\hat{P}}\left[\left(\frac{S_{1n}(T)}{S_{2n}(T)} - \frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^+ \mathbf{I}_{\left\{\frac{S_{1n}}{S_{2n}} \leq K_2\right\}} \mid F_t\right] - E_{\hat{P}}\left[\left(\frac{S_{1n}(T)}{S_{2n}(T)} - \frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^+ \mathbf{I}_{\left\{\frac{S_{1n}}{S_{2n}} \geq K_1\right\}} \mid F_t\right] = \pi_1 - \pi_2. \end{aligned}$$

$$\text{令 } \int_0^T [\varepsilon_1(s) - \varepsilon_2(s)] d\hat{B}_H(s) + \int_0^T [\sigma_1(s) - \sigma_2(s)] d\hat{B}(s) = x,$$

$$\int_0^t [\varepsilon_1(s) - \varepsilon_2(s)] d\hat{B}_H(s) + \int_0^t [\sigma_1(s) - \sigma_2(s)] d\hat{B}(s) = c,$$

$$\int_t^T [\sigma_1(s) - \sigma_2(s)]^2 d\tau + \int_t^T \int_t^T (\varepsilon_1(u) - \varepsilon_2(u))(\varepsilon_1(v) - \varepsilon_2(v)) \phi(u, v) du dv = b.$$

由引理 2.1.6 可得

$$\begin{aligned} \pi_1 &= E_{\hat{P}}\left[\left(\frac{S_{1n}(T)}{S_{2n}(T)} - \frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^+ \mathbf{I}_{\left\{\frac{S_{1n}}{S_{2n}} \leq K_2\right\}} \mid F_t\right] \\ &= \int_{-\infty}^{d^*} \frac{S_1(t)}{S_2(t)} \exp\left\{-\int_t^T (\lambda\mu_{J_1(t)} - \lambda\mu_{J_2(t)}) ds + \sum_{i=1}^n [J_1(T_i) - J_2(T_i)] + x - c - \frac{1}{2}b\right\} \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \exp^{-\frac{(x-c)^2}{2b}} dx - \frac{\beta_2}{\beta_1} \int_{-\infty}^{d^*} \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \exp^{-\frac{(x-c)^2}{2b}} dx \\ &= \frac{S_1(t)}{S_2(t)} \exp\left[-\int_t^T (\lambda\mu_{J_1(t)} - \lambda\mu_{J_2(t)}) ds + \sum_{i=1}^n [J_1(T_i) - J_2(T_i)] N(d_1) - \frac{\beta_2}{\beta_1} N(d_2)\right], \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} d^* &= \ln \frac{K_2}{\frac{S_1(t)}{S_2(t)}} + \int_t^T (\lambda\mu_{J_1(t)} - \lambda\mu_{J_2(t)}) ds - \sum_{i=1}^n [J_1(T_i) - J_2(T_i)] + c + \frac{1}{2}b, \\ d_1 &= \frac{d^* - c - b}{\sqrt{b}} = \frac{\ln \frac{K_2}{\frac{S_1(t)}{S_2(t)}} + \int_t^T (\lambda\mu_{J_1(t)} - \lambda\mu_{J_2(t)}) ds - \sum_{i=1}^n [J_1(T_i) - J_2(T_i)] - \frac{1}{2}b}{\sqrt{b}}, \\ d_2 &= \frac{d^* - c}{\sqrt{b}} = \frac{\ln \frac{K_2}{\frac{S_1(t)}{S_2(t)}} + \int_t^T (\lambda\mu_{J_1(t)} - \lambda\mu_{J_2(t)}) ds - \sum_{i=1}^n [J_1(T_i) - J_2(T_i)] + \frac{1}{2}b}{\sqrt{b}}. \end{aligned}$$

同理可得,

$$\begin{aligned}
 \pi_2 &= E_{\hat{P}}[(\frac{S_{1n}(T)}{S_{2n}(T)} - \frac{\beta_2}{\beta_1})^+ \mathbf{I}_{\{\frac{S_{1n}}{S_{2n}} \geq \frac{\beta_2}{\beta_1}\}} | F_t] \\
 &= \frac{S_1(t)}{S_2(t)} \exp[-\int_t^T (\lambda\mu_{J_1(t)} - \lambda\mu_{J_2(t)})ds + \sum_{i=1}^n [J_1(T_i) - J_2(T_i)]N(d_3) - \frac{\beta_2}{\beta_1} N(d_4)], \\
 d_3 &= \frac{\ln \frac{S_1(t)}{S_2(t)} - \ln(\frac{\beta_2}{\beta_1}) - \int_t^T (\lambda\mu_{J_1(t)} - \lambda\mu_{J_2(t)})ds + \sum_{i=1}^n [J_1(T_i) - J_2(T_i)] + \frac{1}{2}b}{\sqrt{b}}, \\
 d_4 &= \frac{\ln \frac{S_1(t)}{S_2(t)} - \ln(\frac{\beta_2}{\beta_1}) - \int_t^T (\lambda\mu_{J_1(t)} - \lambda\mu_{J_2(t)})ds + \sum_{i=1}^n [J_1(T_i) - J_2(T_i)] - \frac{1}{2}b}{\sqrt{b}},
 \end{aligned}$$

证毕。

针对结论(3)的证明:

$$\begin{aligned}
 &E_{\hat{P}}[(\frac{S_{1n}(T)}{S_{2n}(T)} - \frac{\beta_2}{\beta_1})^+ \mathbf{I}_{\{K_1 \leq \frac{S_{1n}}{S_{2n}} \leq K_2\}} | F_t] \\
 &= E_{\hat{P}}[(\frac{S_{1n}(T)}{S_{2n}(T)} - \frac{\beta_2}{\beta_1})^+ \mathbf{I}_{\{\frac{S_{1n}}{S_{2n}} \leq K_2\}} | F_t] - E_{\hat{P}}[(\frac{S_{1n}(T)}{S_{2n}(T)} - \frac{\beta_2}{\beta_1})^+ \mathbf{I}_{\{\frac{S_{1n}}{S_{2n}} \geq K_1\}} | F_t] = \Pi_1 - \Pi_2.
 \end{aligned}$$

$$\text{令 } \int_0^T [\varepsilon_1(s) - \varepsilon_2(s)]d\hat{B}_H(s) + \int_0^T [\sigma_1(s) - \sigma_2(s)]d\hat{B}(s) = x,$$

$$\int_0^t [\varepsilon_1(s) - \varepsilon_2(s)]d\hat{B}_H(s) + \int_0^t [\sigma_1(s) - \sigma_2(s)]d\hat{B}(s) = c,$$

$$\int_t^T [\sigma_1(s) - \sigma_2(s)]^2 ds + \int_t^T \int_t^T (\varepsilon_1(u) - \varepsilon_2(u))(\varepsilon_1(v) - \varepsilon_2(v))\phi(u, v)dudv = b,$$

$$\begin{aligned}
 \Pi_1 &= E_{\hat{P}}[(\frac{S_{1n}(T)}{S_{2n}(T)} - \frac{\beta_2}{\beta_1})^+ \mathbf{I}_{\{\frac{S_{1n}}{S_{2n}} \leq K_2\}} | F_t] \\
 &= \int_{-\infty}^{d^*} \frac{S_1(t)}{S_2(t)} \exp\left\{-\int_t^T (\lambda\mu_{J_1(t)} - \lambda\mu_{J_2(t)})ds + \sum_{i=1}^n [J_1(T_i) - J_2(T_i)] + x - c - \frac{1}{2}b\right\} \\
 &\quad \times \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \exp^{-\frac{(x-c)^2}{2b}} dx - \frac{\beta_2}{\beta_1} \int_{-\infty}^{d^*} \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \exp^{-\frac{(x-c)^2}{2b}} dx
 \end{aligned}$$

$$= \frac{S_1(t)}{S_2(t)} \exp[-\int_t^T (\lambda\mu_{J_1(t)} - \lambda\mu_{J_2(t)})ds + \sum_{i=1}^n [J_1(T_i) - J_2(T_i)]N(d_5) - \frac{\beta_2}{\beta_1} N(d_6)],$$

其中

$$d^* = \ln \frac{\frac{K_2}{S_1(t)} + \int_t^T (\lambda\mu_{J_1(t)} - \lambda\mu_{J_2(t)})ds - \sum_{i=1}^n [J_1(T_i) - J_2(T_i)] + c + \frac{1}{2}b}{S_2(t)}$$

$$d_5 = d_1 = \frac{\ln \frac{K_2}{S_1(t)} + \int_t^T (\lambda\mu_{J_1(t)} - \lambda\mu_{J_2(t)})ds - \sum_{i=1}^n [J_1(T_i) - J_2(T_i)] - \frac{1}{2}b}{\sqrt{b}},$$

$$d_6 = d_2 = \frac{\ln \frac{K_2}{S_1(t)} + \int_t^T (\lambda\mu_{J_1(t)} - \lambda\mu_{J_2(t)})ds - \sum_{i=1}^n [J_1(T_i) - J_2(T_i)] + \frac{1}{2}b}{\sqrt{b}}.$$

同理可得,

$$\Pi_2 = E_{\hat{P}}[(\frac{S_{1n}(T)}{S_{2n}(T)} - \frac{\beta_2}{\beta_1})^+ \mathbf{I}_{\{\frac{S_{1n}}{S_{2n}} \geq \frac{\beta_2}{\beta_1}\}} | F_t]$$

$$= \frac{S_1(t)}{S_2(t)} \exp[-\int_t^T (\lambda\mu_{J_1(t)} - \lambda\mu_{J_2(t)})ds + \sum_{i=1}^n [J_1(T_i) - J_2(T_i)]N(d_7) - \frac{\beta_2}{\beta_1} N(d_8)],$$

$$d_7 = \frac{\ln \frac{\frac{S_1(t)}{S_2(t)}}{K_1} - \int_t^T (\lambda\mu_{J_1(t)} - \lambda\mu_{J_2(t)})ds + \sum_{i=1}^n [J_1(T_i) - J_2(T_i)] + \frac{1}{2}b}{\sqrt{b}},$$

$$d_8 = \frac{\ln \frac{\frac{S_1(t)}{S_2(t)}}{K_1} - \int_t^T (\lambda\mu_{J_1(t)} - \lambda\mu_{J_2(t)})ds + \sum_{i=1}^n [J_1(T_i) - J_2(T_i)] - \frac{1}{2}b}{\sqrt{b}},$$

证毕。

综上所述, 我们得到定理 3.1 的证明。

3.4 数值模拟分析

在本小节中, 为了更好地说明定理 3.1 中的定价公式, 我们使用真实的市场数据进行模拟。我们选择了来自不同行业的两只股票, 使用宁德时代 $S_1(t)$ 和沪

州老窖 $S_2(t)$ 这两只股票的收盘价数据，用来模拟定理 3.1。不考虑其他情况，我们假设来自不同行业的股票价格过程是独立的。

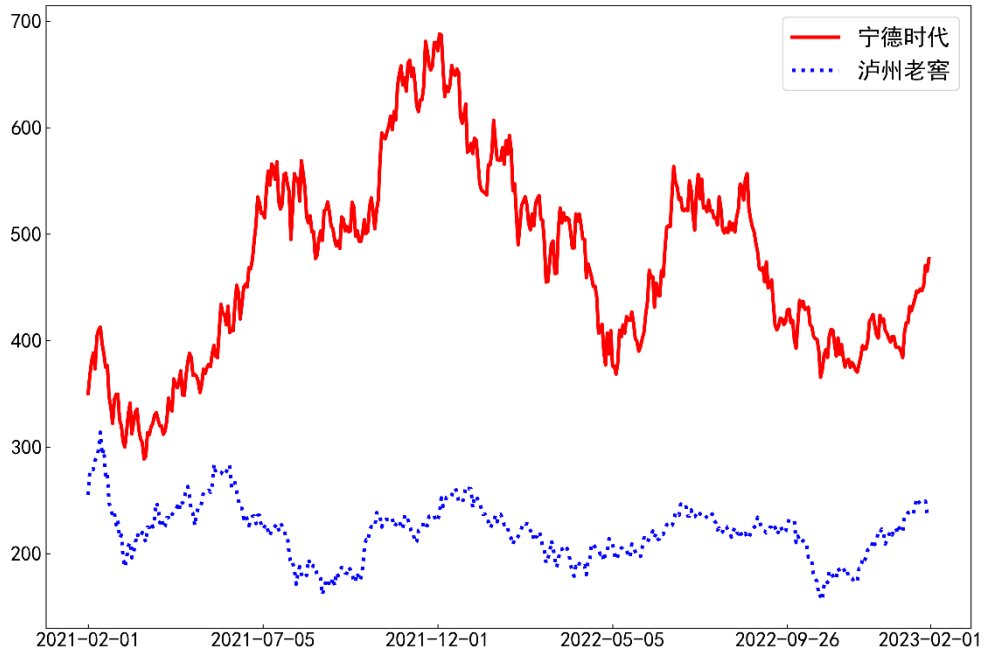


图 3-1：两种股票价格趋势图

事实上，市场上有许多基础资产的价格符合模拟要求。在这里，我们随机选择两只股票：宁德时代 $S_1(t)$ 和泸州老窖 $S_2(t)$ 从 2021 年 2 月 1 日起到 2023 年 2 月 1 日共 482 条历史数据。如图 3-1 所示，这两只股票从 2021 年 2 月到 2023 年 2 月 1 日的价格趋势明显不同。其中宁德时代股价变化较为剧烈，泸州老窖股价相对稳定。因此，我们用这两只股票来说明定理 3.1 的公式。

选取 2021 年 2 月 1 日起至 2022 年 1 月 31 日整年共有 242 个交易日，如表 3-1 所示。通过计算得到两只股票的年化收益波动率数据： $\sigma_1(t) = 0.4489$ ， $\sigma_2(t) = 0.4314$ 。设 2021 年 2 月 1 日为初始时间 $t = 0$ ，然后从银行间同业拆借中心得到一年期国债利率 $r(t) = 0.0254$ 。

表 3-1:2021-2022 年交易数据表

	日期	宁德时代	泸州老窖
0	2021-02-01	350.33	255.25
1	2021-02-02	367.80	279.18

2	2021-02-03	380.98	279.00
...	...	...	...
240	2022-01-27	574.99	224.50
241	2022-01-28	592.60	216.31

第一，设 $H=0.8$ ， $\beta_2=2$ ， $\beta_1=1$ ， $K_1=1$ ， $K_2=3$ ，此时满足定理 3.1 中的第二种情况，即 $K_1 \leq \frac{\beta_2}{\beta_1} \leq K_2$ 时，此时取 $\mu_{J_1(t)}=0.05$ ， $\sigma_{J_1(t)}^2=0.15$ ， $\mu_{J_2(t)}=0.05$ ， $\sigma_{J_2(t)}^2=0.15$ ，然后我们得到到期时间为 T 时跳跃强度 λ 和数字交换期权价格之间的关系如图 3-2 所示。

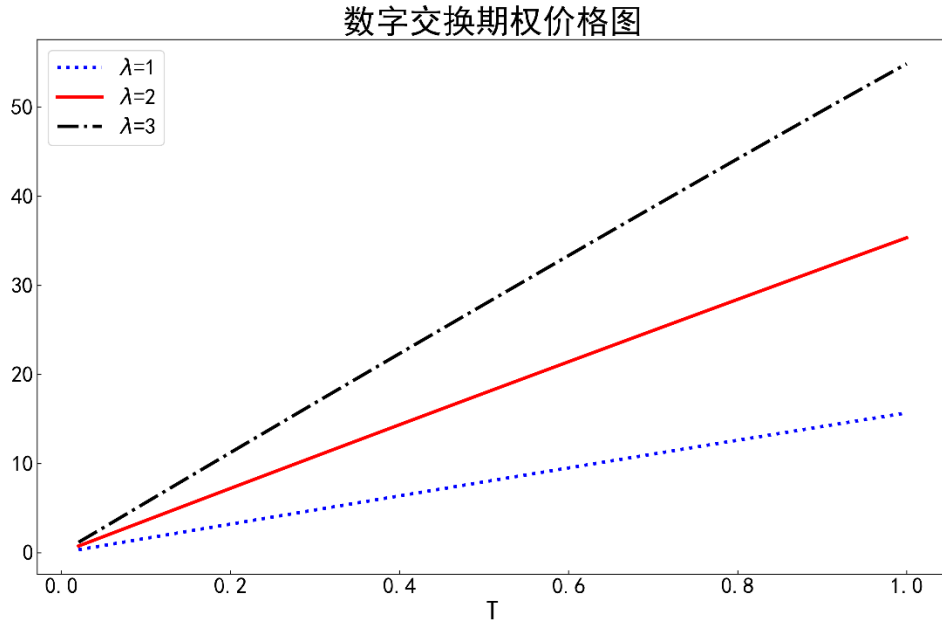
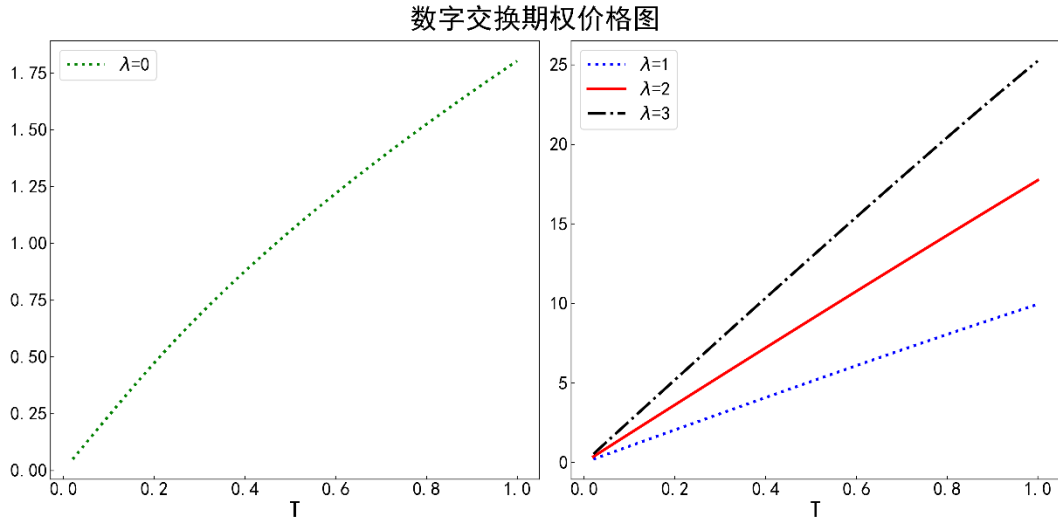


图 3-2: λ 与数字交换期权价格关系图

从图中我们可以看出期权的价格相对较高，随着跳跃强度 λ 的变化，期权的价格变化也较大，即价格波动越剧烈，相应的期权价格也越高。

第二，设 $H=0.8$ ， $\beta_1=\beta_2=1$ ， $K_1=1.4$ ， $K_2=3$ ，此时满足定理 3.1 中的第三种情况，即 $\frac{\beta_2}{\beta_1} \leq K_1$ 时，此时取 $\mu_{J_1(t)}=0.05$ ， $\sigma_{J_1(t)}^2=0.15$ ， $\mu_{J_2(t)}=0.05$ ， $\sigma_{J_2(t)}^2=0.15$ ，然后我们得到到期时间为 T 时跳跃强度 λ 和数字交换期权价格之间的关系如图 3-3 所示。

图 3-3: λ 与数字交换期权价格关系图

从图 3-3 的左图，我们可以清楚地看到数字交易所的价格变化，当 $\lambda=0$ 时，即当不存在跳跃时，期权的价格随到期时间 T 的增加而增加，期权价格相比右图也较低。从图 3-3 的右图，我们可以明显的看出随着跳跃的发生，跳跃强度 λ 的变化，期权的价格也发生了变化，相比左图，右侧发生跳跃后期权价格随之上升，同时，随着跳跃强度的增大，期权价格也增大，即价格波动越剧烈，相应的期权价格也越高。与第二种情况相比，第三种情况下期权的价格相对较低。

3.5 结束语

本章在前人的研究基础上进行改进，研究在混合分数布朗跳-扩散环境下的期权定价问题。定义了一个名字为数字交换期权的新期权，并利用拟条件期望给出了基于混合分数布朗跳-扩散下的新期权的定价公式。最后通过 python 给出具有真实市场数据下的数值模拟，发现不论在第二种情况还是在第三种情况下，期权的价格与跳跃强度成正比，随着跳跃强度的增加，期权价格也随之上升。

第4章 混合次分数布朗跳—扩散下亚式幂型期权的定价

本章研究了混合次分数布朗跳-扩散环境下的亚式幂型期权问题，给出了标的资产在混合次分数布朗跳-扩散下的亚式幂型期权的定价公式。与分数布朗运动相比，次分数布朗运动的增量在不相交区间内的相关性更弱，并且随着区间之间的距离趋于无穷大，其协方差衰减速率更快，这使得混合次分数模型能更好的刻画金融时间序列。由于市场上标的资产的价格会因一些突发事件而引起的价格间断性跳跃行为，和上章一致，我们将泊松跳引入到期权的定价模型中，利用保险精算方法给出了具有固定执行价格的几何平均亚式幂型期权定价公式，并给出了一些特殊情形下的亚式期权定价公式。最后，给出了一个数值仿真例子说明定理的结论。

4.1 亚式幂型期权定义

亚式期权指价值取决于期权存续期内的标的资产价格平均值的期权，一种强路径有关期权，其波动性低于收益完全基于单一到期价格的期权。这里的平均有两种含义，一种是算术平均，一种是几何平均。假设 A_T 是一变量，表示从开始时刻到时刻 T 的平均值，在连续情况下，算术平均指： $A_T = \frac{1}{T} \int_0^T S_t dt$ ，而几何平均指指 $A_T = \exp(\frac{1}{T} \int_0^T \ln S_t dt)$ 。因此亚式期权有两种，算术平均亚式期权和几何平均亚式期权。根据执行价格的不同，亚式期权又可以分为固定执行价格的亚式期权和浮动执行价格的亚式期权。固定执行价格下的收益函数为 $(A_T - K)^+$ ，即用基础资产价格的平均值取代基础资产的实际价格；浮动执行价格下的收益函数为 $(S_T - A_T)^+$ ，即用基础资产价格的平均值取代合约当中的执行价格。本章节研究在连续情况下具有固定执行价格的几何平均亚式期权的定价问题。幂型期权的回报取决于标的资产价格的 k 次方(k 为自然数)与执行价格的差，即 $[(\exp\{A_T\})^k - K]^+$ 。因此幂型期权对资产变化的敏感性更强。亚式幂型期权是亚式期权和幂型期权的结合，同时具有这两种新型期权的优势，进而成为

许多投资者规避风险选择。

4.2 混合次分数布朗跳-扩散模型框架

假定任意时刻 t 的无风险资产 $\{P_t, 0 < t < T\}$ 价格满足

$$dP_t = rP_t dt, P_0 = 1, 0 < t < T, \quad (4.1)$$

任意风险资产 $\{S_t, t > 0\}$ (如股票) 的价格满足

$$dS_t = S_t(\mu - \rho\lambda)dt + \varepsilon S_t dB_t + \sigma S_t d\xi_t^H + S_t(e^{J_t} - 1)dN_t, \quad (4.2)$$

其中 $\varepsilon B_t + \sigma \xi_t^H$ 是混合次分数布朗运动, 且 $\xi_t^H \sim N(0, (2 - 2^{2H-1})t^{2H})$, Hurst 指数 $H \in (\frac{3}{4}, 1)$, μ 是风险资产的期望回报率, N_t 是服从参数为 λ 的 Poisson 过程, 表示标的资产价格在 $[0, t]$ 内跳跃的次数。 $e^{J_t} - 1$ 是一次跳的大小, 满足 $E[e^{J_t} - 1] = \rho$, J_t 是一列独立同分布的随机变量, 满足 $J_t \sim N(\mu_J, \sigma_J^2)$ 。本文恒假设 B_t 、 ξ_t^H 与 N_t 相互独立。

利用 Wick-Itô 公式, 上述随机微分方程的解为:

$$S_t = S_0 \exp[(\mu - \rho\lambda - \frac{1}{2}\varepsilon^2)t - \frac{\sigma^2}{2}(2 - 2^{2H-1})t^{2H} + \varepsilon B_t + \sigma \xi_t^H + \sum_{i=1}^{N_t} J_i]. \quad (4.3)$$

定义 4.2 令 $A_T = \frac{1}{T} \int_0^T \ln S_t dt$, $G_T^k = (\exp\{A_T\})^k$, 则执行价格为 K 的几何平均亚式幂型期权看涨期权、看跌期权在到期 T 时刻的保险精算价格定义为:

$$\begin{aligned} C_k(S_T, K) &= E[(e^{-\int_0^T \theta(t) dt} G_T^k - Ke^{-rT}) I_{B^+} | F_t] \\ P_k(S_T, K) &= E[(Ke^{-rT} - e^{-\int_0^T \theta(t) dt} G_T^k) I_{B^-} | F_t], \end{aligned} \quad (4.4)$$

其中 $B = \{e^{-\mu T} G_T^k > Ke^{-rT}\}$, $B' = \{Ke^{-rT} > e^{-\mu T} G_T^k\}$ 。 $E(\cdot | F_t)$ 表示在概率测度 P 下的拟条件期望。

4.3 混合次分数布朗跳-扩散模型下亚式幂型期权的定价

本小节中，利用保险精算的方法，给出了混合次分数布朗跳-扩散下亚式幂型期权看涨期权、看跌期权的价格公式并给出相关证明过程。

引理 4.1 风险资产在 $[0, T]$ 内的期望收益率满足 $\int_0^T \theta(t) dt = \mu T$ ，即

$$E(S_T) = S_0 e^{\mu T}。$$

证明： 由(4.2)可知：

$$E(S_T) = S_0 E[e^{(\mu - \rho\lambda - \frac{1}{2}\varepsilon^2)T + \varepsilon B_T + \sigma \xi_T^H - \frac{\sigma^2}{2}(2-2^{2H-1})T^{2H}}] E[\prod_{i=1}^{N_T} e^{J_i}] = S_0 e^{(\mu - \rho\lambda)T} E[\prod_{i=1}^{N_T} e^{J_i}]。$$

由于

$$\begin{aligned} E[\prod_{i=1}^{N_T} e^{J_i}] &= \sum_{n=0}^{\infty} E[\prod_{i=1}^n e^{J_i}] P(N_T = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} E[\prod_{i=1}^n e^{J_i}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} (\rho + 1)^n \\ &= e^{\lambda \rho T} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((\rho + 1)\lambda T)^n e^{-(\rho + 1)\lambda T}}{n!} = e^{\lambda \rho T}, \end{aligned}$$

从而

$$E(S_T) = S_0 e^{\mu T}。$$

由定义 2.2.2 中标的资产在 $[0, T]$ 之间的期望收益率定义可得：

$$\exp(\int_0^T \theta(t) dt) = \frac{E[S_T]}{S_0} = e^{\mu T}。$$

定理 4.1 混合次分数跳扩散环境下，具有固定执行价格为 K 的几何平均亚式幂型期权看涨期权定价公式为：

$$C_k(S_T, K) = e^{k\hat{\mu}_n - \mu T + \frac{1}{2}k^2\hat{\sigma}_n^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} \Phi(d_1) - Ke^{-rT} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} \Phi(d_2),$$

其中

$$d_1 = d_2 + k\hat{\sigma}_n, \quad d_2 = \frac{\hat{\mu}_n - \frac{\ln K + (\mu - r)T}{k}}{\hat{\sigma}_n}, \quad \rho = E[e^{J_i} - 1] = e^{\mu_J + \frac{1}{2}\sigma_J^2} - 1,$$

$$\hat{\mu}_n = \ln S_0 + \frac{1}{2}\mu T - \frac{1}{2}\rho\lambda T - \frac{1}{4}\varepsilon^2 T - \frac{2 - 2^{2H-1}}{2(2H+1)}\sigma^2 T^{2H} + n\mu_J,$$

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{3}\varepsilon^2 T + \frac{2H+3-2^{2H}}{(2H+1)(2H+2)}\sigma^2 T^{2H} + n\sigma_J^2.$$

证明:

由 J_i 独立同分布可知, 当 $N_T = n$ 时, 有 $\sum_{i=1}^n J_i \sim N(n\mu_J, n\sigma_J^2)$, 令

$\sum_{i=1}^n J_i = n\mu_J + \sqrt{n}\sigma_J Z$, 其中 $Z \sim N(0,1)$, 由(4.3)式可得:

$$S_{t,n} = S_0 \exp[(\mu - \rho\lambda)t + \varepsilon B_t + \sigma \xi_t^H - \frac{1}{2}\varepsilon^2 t - \frac{\sigma^2}{2}(2 - 2^{2H-1})t^{2H} + n\mu_J + \sqrt{n}\sigma_J Z], \quad (4.5)$$

令 $A_{T,n} = \frac{1}{T} \int_0^T \ln S_{t,n} dt$, $G_{T,n}^k = (\exp\{A_{T,n}\})^k$ 。当 $N_T = n$ 时, 由(4.5)式可得:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_n &= E\left[\frac{1}{T} \int_0^T \ln S_{t,n} dt \mid F_t\right] \\ &= \ln S_0 + \frac{1}{2}\mu T - \frac{1}{2}\rho\lambda T - \frac{1}{4}\varepsilon^2 T - \frac{2 - 2^{2H-1}}{2(2H+1)}\sigma^2 T^{2H} + n\mu_J, \\ \hat{\sigma}_n^2 &= \text{var}(A_{T,n} \mid F_t) = E\left[\left(\frac{\varepsilon}{T} \int_0^T B_t dt + \frac{\sigma}{T} \int_0^T \xi_t^H dt + \frac{\sqrt{n}\sigma_J}{T} \int_0^T Z dt\right)^2\right] \\ &= \frac{\varepsilon^2}{T^2} \int_0^T \int_0^T E[B_t B_s] ds dt + \frac{\sigma^2}{T^2} \int_0^T \int_0^T E[\xi_t^H \xi_s^H] ds dt + n\sigma_J^2 \\ &= \frac{\varepsilon^2}{T^2} \int_0^T \int_0^T \min(s, t) ds dt + \frac{\sigma^2}{T^2} \int_0^T \int_0^T [t^{2H} + s^{2H} - \frac{1}{2}((t+s)^{2H} + |t-s|^{2H})] ds dt + n\sigma_J^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} \varepsilon^2 T + \frac{2H+3-2^{2H}}{(2H+1)(2H+2)} \sigma^2 T^{2H} + n \sigma_J^2。$$

所以执行价格为 K 的亚式幂型看涨期权定价公式为：

$$\begin{aligned} C_k(S_T, K) &= E[(e^{-\int_0^T \theta(t) dt} G_T^k - K e^{-rT}) I_B | F_t] \\ &= E[(e^{-\mu T} G_T^k - K e^{-rT}) I_B | F_t] \\ &= e^{-\mu T} E[G_T^k I_B | F_t] - K e^{-rT} E[I_B | F_t] \\ &= e^{-\mu T} \Pi_1 - K e^{-rT} \Pi_2, \end{aligned}$$

其中 $\Pi_1 = E[G_T^k I_B | F_t]$, $\Pi_2 = E[I_B | F_t]$, $B = \{e^{-\mu T} G_T^k > K e^{-rT}\}$ 。

$$\begin{aligned} \text{因为 } \Pi_2 &= E[I_B | F_t] = \sum_{n=0}^{\infty} P(e^{-\mu T} G_{T,n}^k > K e^{-rT}) P(N_T = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} P(e^{-\mu T} G_{T,n}^k > K e^{-rT}), \end{aligned}$$

对 $e^{-\mu T} G_{T,n}^k > K e^{-rT}$ 两边取对数可得： $k(\hat{\mu}_n + \hat{\sigma}_n X) > \ln K + (\mu - r)T$ ，其中

$X \sim N(0,1)$ 。从而

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} P(k(\hat{\mu}_n + \hat{\sigma}_n X) > \ln K + (\mu - r)T) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} P(X > \frac{\frac{\ln K + (\mu - r)T}{k} - \hat{\mu}_n}{\hat{\sigma}_n}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} \int_{-d_2}^{\infty} \Phi(y) dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} \Phi(d_2), \end{aligned}$$

$$\text{其中 } d_2 = \frac{\hat{\mu}_n - \frac{\ln K + (\mu - r)T}{k}}{\hat{\sigma}_n}。$$

同理，

$$\Pi_1 = E[G_T^k I_B | F_t] = \sum_{n=0}^{\infty} E[G_{T,n}^k I_B] P(N_T = n)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} \int_{-d_2}^{\infty} e^{k\hat{\mu}_n + \frac{1}{2}k^2\hat{\sigma}_n^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X-k\hat{\sigma}_n)^2}{2}} dX \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} \int_{-d_2-k\hat{\sigma}_n}^{\infty} e^{k\hat{\mu}_n + \frac{1}{2}k^2\hat{\sigma}_n^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Y^2}{2}} dY \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} e^{k\hat{\mu}_n + \frac{1}{2}k^2\hat{\sigma}_n^2} \Phi(d_1) 。
 \end{aligned}$$

所以综上所述可得：

$$C_k(S_T, K) = e^{-\mu T} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} e^{k\hat{\mu}_n + \frac{1}{2}k^2\hat{\sigma}_n^2} \Phi(d_1) - Ke^{-rT} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} \Phi(d_2) ,$$

其中 $d_1 = d_2 + k\hat{\sigma}_n$ ，证毕。

推论 4.1 混合次分数跳扩散环境下，具有固定执行价格为 K 的几何平均亚式幂型看跌期权定价公式为：

$$P_k(S_T, K) = Ke^{-rT} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} \Phi(-d_2) - e^{-\mu T} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} e^{k\hat{\mu}_n + \frac{1}{2}k^2\hat{\sigma}_n^2} \Phi(-d_1) ,$$

其中 d_1, d_2 与定理 4.1 中定义相同。

注 1. 当 $k=1$ 时，我们可以得到混合次分数布朗运动跳扩散环境下亚式期权的定价公式。

$$C(S_T, K) = e^{\hat{\mu}_n - \mu T + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_n^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} \Phi(d_1) - Ke^{-rT} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} \Phi(d_2) ,$$

$$d_1 = d_2 + \hat{\sigma}_n, \quad d_2 = \frac{\hat{\mu}_n - \frac{\ln K + (\mu - r)T}{k}}{\hat{\sigma}_n}, \quad \rho = E[e^{J_i} - 1] = e^{\mu_J + \frac{1}{2}\sigma_J^2} - 1 ,$$

$$\hat{\mu}_n = \ln S_0 + \frac{1}{2}\mu T - \frac{1}{2}\rho\lambda T - \frac{1}{4}\varepsilon^2 T - \frac{2-2^{2H-1}}{2(2H+1)}\sigma^2 T^{2H} + n\mu_J ,$$

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{3}\varepsilon^2 T + \frac{2H+3-2^{2H}}{(2H+1)(2H+2)}\sigma^2 T^{2H} + n\sigma_J^2 .$$

2. 当 $\varepsilon=0$ 时，我们可以得到次分数布朗运动跳扩散下亚式幂型期权的定价公式。

$$C(S_T, K) = e^{k\hat{\mu}_n - \mu T + \frac{1}{2}k^2\hat{\sigma}_n^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} \Phi(d_1) - Ke^{-rT} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} \Phi(d_2),$$

$$d_1 = d_2 + k\hat{\sigma}_n, \quad d_2 = \frac{\hat{\mu}_n - \frac{\ln K + (\mu - r)T}{k}}{\hat{\sigma}_n}, \quad \rho = E[e^{J_i} - 1] = e^{\mu_J + \frac{1}{2}\sigma_J^2} - 1,$$

$$\hat{\mu}_n = \ln S_0 + \frac{1}{2}\mu T - \frac{1}{2}\rho\lambda T - \frac{2 - 2^{2H-1}}{2(2H+1)}\sigma^2 T^{2H} + n\mu_J,$$

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{2H+3-2^{2H}}{(2H+1)(2H+2)}\sigma^2 T^{2H} + n\sigma_J^2.$$

3. 当 $\sigma=0$ 时, 我们可以得到布朗运动跳扩散下亚式幂型期权的定价公式。

$$C(S_T, K) = e^{k\hat{\mu}_n - \mu T + \frac{1}{2}k^2\hat{\sigma}_n^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} \Phi(d_1) - Ke^{-rT} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} \Phi(d_2),$$

$$d_1 = d_2 + \hat{\sigma}_n, \quad d_2 = \frac{\hat{\mu}_n - \frac{\ln K + (\mu - r)T}{k}}{\hat{\sigma}_n}, \quad \rho = E[e^{J_i} - 1] = e^{\mu_J + \frac{1}{2}\sigma_J^2} - 1,$$

$$\hat{\mu}_n = \ln S_0 + \frac{1}{2}\mu T - \frac{1}{2}\rho\lambda T - \frac{1}{4}\varepsilon^2 T + n\mu_J, \quad \hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{3}\varepsilon^2 T + n\sigma_J^2.$$

4. 当 $\lambda=0$ 时, 即不存在跳时, 我们可以得到基于混合次分数布朗运动下亚式幂型期权的定价公式。

$$C(S_T, K) = e^{k\hat{\mu}_n - \mu T + \frac{1}{2}k^2\hat{\sigma}_n^2} \Phi(d_1) - Ke^{-rT} \Phi(d_2),$$

$$d_1 = d_2 + \hat{\sigma}_n, \quad d_2 = \frac{\hat{\mu}_n - \frac{\ln K + (\mu - r)T}{k}}{\hat{\sigma}_n},$$

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{3}\varepsilon^2 T + \frac{2H+3-2^{2H}}{(2H+1)(2H+2)}\sigma^2 T^{2H},$$

$$\hat{\mu}_n = \ln S_0 + \frac{1}{2}\mu T - \frac{1}{4}\varepsilon^2 T - \frac{2 - 2^{2H-1}}{2(2H+1)}\sigma^2 T^{2H}.$$

5. 当 $H = \frac{1}{2}$ 时, 可以得到布朗运动跳扩散环境下的亚式幂型期权的定价公式。

$$C(S_T, K) = e^{k\hat{\mu}_n - \mu T + \frac{1}{2}k^2\hat{\sigma}_n^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} \Phi(d_1) - Ke^{-rT} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} \Phi(d_2),$$

$$d_1 = d_2 + \hat{\sigma}_n, \quad d_2 = \frac{\hat{\mu}_n - \frac{\ln K + (\mu - r)T}{k}}{\hat{\sigma}_n}, \quad \rho = E[e^{J_i} - 1] = e^{\mu_J + \frac{1}{2}\sigma_J^2} - 1,$$

$$\hat{\mu}_n = \ln S_0 + \frac{1}{2}\mu T - \frac{1}{2}\rho\lambda T - \frac{1}{4}\varepsilon^2 T - \frac{1}{4}\sigma^2 T + n\mu_J,$$

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{3}\varepsilon^2 T + \frac{1}{3}\sigma^2 T + n\sigma_J^2.$$

4.4 数值模拟分析

在本节中，利用 python 对定理 4.1 中的混合次分数布朗跳-扩散下亚式幂型期权定价公式进行数值模拟，讨论定价公式中各参数的变化对期权价格的影响情况。

第一，设置模型中对应的基础参数设置如下： $S_0 = 10, r = 0.05, \mu = 0.05, K = 105, \varepsilon = 0.2, \sigma = 0.2, \mu_J = 0.03, \sigma_J = 0.06, k = 2$ 。当跳跃强度 $\lambda = 0$ ，即不存在跳跃，Hurst 指数时，收敛项数 $n = 9$ 时，随着到期时间 T 的变化，混合次分数布朗跳-扩散下亚式幂型看涨期权和看跌期权的价格如下图 4-1 所示：

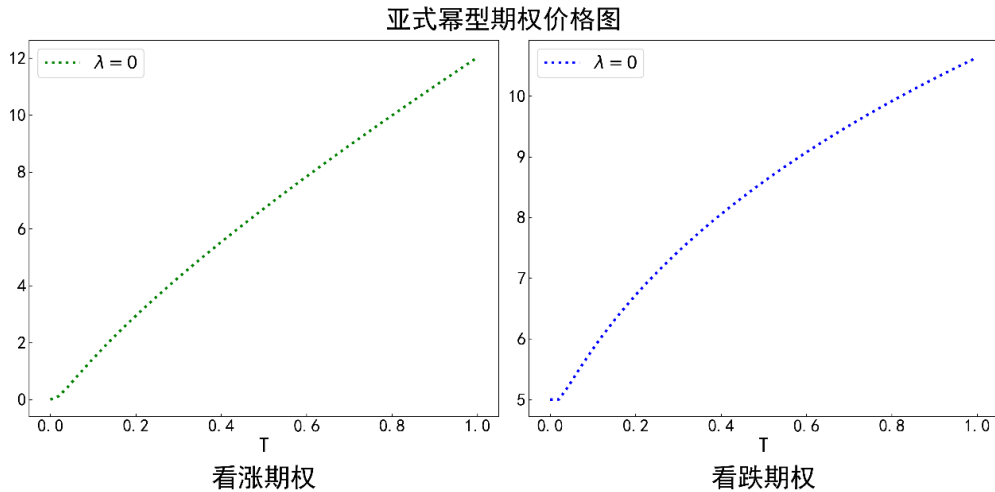


图 4-1：无跳扩散下亚式幂型看涨期权和看跌期权随时间变化价格图

从图 4-1 中我们可以看出，在不存在价格跳跃的情况下，随着时间 T 的变化，亚式幂型看涨期权和看跌期权的价格均增加，即期权价格与时间成正比。

第二，设置模型中对应的基础参数设置如下： $S_0=10$ ， $r=0.05$ ， $\mu=0.05$
 $K=105$ ， $\varepsilon=0.2$ ， $\sigma=0.2$ ， $\mu_J=0.03$ ， $\sigma_J=0.06$ ， $k=2$ 。当跳跃强度 $\lambda=0$ ，即不存在跳跃， H 的取值发生变化时，收敛项数 $n=9$ 时，随着到期时间 T 的变化，混合次分数布朗跳-扩散下亚式幂型看涨期权和看跌期权的价格如下图 4-2 所示：

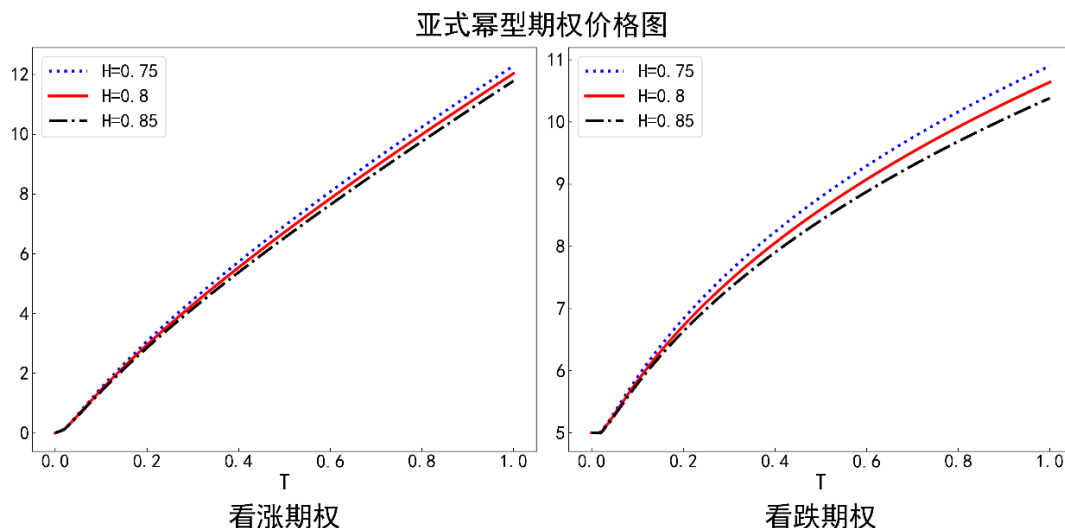


图 4-2：无跳扩散下亚式幂型看涨期权和看跌期权随 H 变化价格图

从上图 4-2 可以看出，在其他参数给定，无跳跃情况发生时，随着 Hurst 指数 H 的增加，亚式幂型看涨期权和看跌期权的价格均减小，即 Hurst 指数 H 与亚式幂型期权的价格成反比。

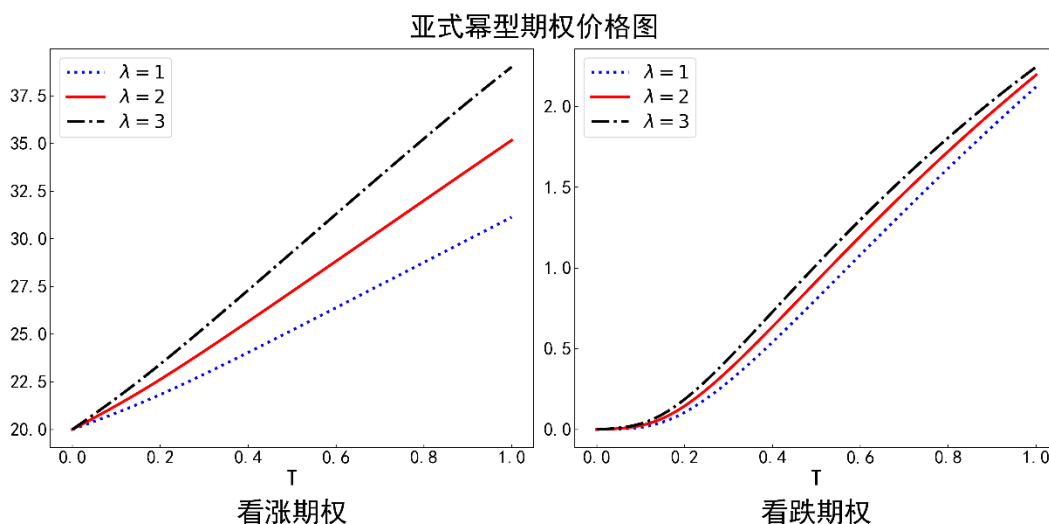


图 4-3：跳扩散下亚式幂型看涨期权和看跌期权随跳跃强度 λ 变化价格图

第三，设置模型中的对应的基本参数为 $S_0=10$ ， $r=0.05$ ， $K=80$ ，

$\mu = 0.05$, $\varepsilon = 0.2$, $\sigma = 0.2$, $\mu_J = 0.03$, $\sigma_J = 0.06$, $k = 2$, $H = 0.8$ 。当 λ 的取值发生变化, 收敛项数 $n = 9$ 时, 随着到期时间 T 的变化, 混合次分数布朗跳—扩散下亚式幂型看涨期权和看跌期权的价格如下图 4-3 所示:

从图 4-3 中我们可以看出, 在存在价格跳跃的情况下, 随着跳跃强度 λ 的变化, 亚式幂型看涨期权和看跌期权的价格均增加, 即期权价格与跳跃强度成正比。

第四, 设置模型中的对应的基本参数为 $S_0 = 10$, $K = 105$, $r = 0.05$, $\mu = 0.05$, $\varepsilon = 0.2$, $\sigma = 0.2$, $\mu_J = 0.03$, $\sigma_J = 0.06$, $k = 2$, $\lambda = 2$ 。当 H 的取值发生变化, 收敛项数 $n = 9$ 时, 随着到期时间 T 的变化, 混合次分数布朗跳—扩散下亚式幂型看涨期权和看跌期权的价格如下图所示:

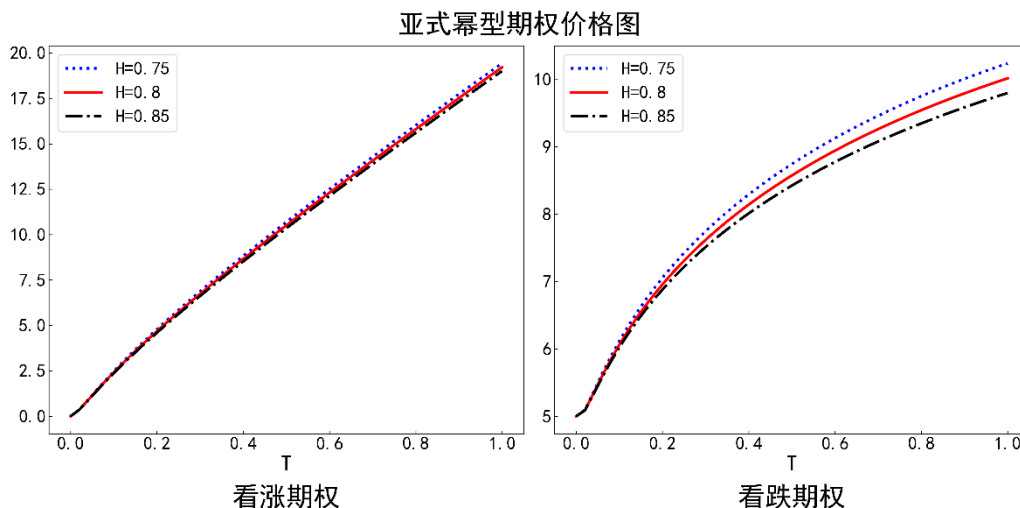


图 4-4: 跳扩散下亚式幂型看涨期权和看跌期权随 H 变化价格图

从上图 4-4 可以看出, 在其他参数给定, 跳跃强度 λ 不变的情况下, 随着 Hurst 指数 H 的增加, 亚式幂型看涨期权和看跌期权的价格均减小, 与无跳越发生情况相比, 看涨期权跳跃发生后的期权价格更高, 而看跌期权跳跃发生后的期权价格降低。

4.5 结束语

本章在假设股票价格满足混合次分数布朗运动下引入泊松跳过程, 利用保险精算的方法推导出亚式幂期权的定价公式。然后利用 python 对定理 4.1 中的

混合次分数布朗跳-扩散下亚式幂型期权定价公式进行数值模拟，发现在不存在价格跳跃的情况下，随着时间 T 的变化，亚式幂型看涨期权和看跌期权的价格与时间成正比；在存在价格跳跃的情况下，随着跳跃强度的变化，亚式幂型看涨期权和看跌期权的价格与跳跃强度成正比。在其他参数给定，跳跃强度 λ 不变的情况下，随着 Hurst 指数 H 的增加，亚式幂型看涨期权和看跌期权的价格与 Hurst 指数 H 成反比。

第 5 章 总结与展望

5.1 研究结论

本文的研究内容是在布朗运动的基础上进行改进，研究混合分数布朗运动下的奇异期权定价，分数布朗运动有着长相关和自相似性等特性，能更好地描述金融资产的价格波动。相比普通的欧式期权，奇异期权在标的资产，行权时间，收益等方面不同，具有多种期权的混合优点。由于现实市场上基础资产易受到突发状况的影响从而造成基础资产的价格发生剧烈波动，所以本文在混合布朗运动的基础上加上泊松跳，利用风险中性的定价方法得出了两种不同情况下的数字交换期权(奇异期权的一种)的定价公式。通过市场真实的数据进行仿真模拟，发现在第一种情况下期权的价格相对较高，随着跳跃强度 λ 的变化，期权的价格变化也较大，即价格波动越剧烈，相应的期权价格也越高；在第二种情况下，不存在跳跃时，期权价格相对较低，且随着到期时间的增加而增加。当存在跳跃时，随着跳跃强度的增大，期权价格也增大，即价格波动越剧烈，相应的期权价格也越高。

本文的另一个研究内容是在上个研究内容的基础上进行改进，研究混合次分数布朗运动下的奇异期权定价。次分数布朗运动的增量在不相交区间内的相关性更弱，并且随着区间之间的距离趋于无穷大，其协方差衰减速率更快，更适合对金融时间序列的刻画。泊松跳依旧被加上用来描述资产价格发生的波动，然后利用保险精算的方法推导出亚式幂型期权(奇异期权的一种)的定价公式。特别地，当 $k=1$ 时，可以得到混合次分数布朗运动泊松跳环境下亚式期权的定价公式；当 $\varepsilon=0$ 时可以得到次分数布朗运动泊松跳环境下的亚式幂型期权的定价公式，当 $\sigma=0$ 时，可以得到最简单的基于布朗运动泊松跳环境下的亚式幂型期权的定价公式。最后通过数值模拟发现在无跳越发生时，亚式幂型看涨期权和看跌期权价格随着到期时间的增加而增加，随着 Hurst 指数 H 的增加而减小。在存在跳跃时，亚式幂型看涨期权和看跌期权价格随着跳跃强度的增加而增加，依然随着 Hurst 指数 H 的增加而减小，但是看涨期权的价格要高于不存在跳跃

时的价格，而看跌期权的价格低于不存在跳跃时的价格。

5.2 研究展望

本文研究了混合分数布朗运动和混合次分数布朗运动下的期权定价问题，虽然取得了一些成果，但由于现阶段的知识水平有限，研究还存在需要改进的地方，在未来的研究中，可以从其他几个方面深入扩展：

(1) 本文仅考虑跳扩散情况下的奇异期权定价问题，在实际市场中，会存在交易费用的问题，因此，可以进一步研究含期权费率问题的期权定价。

(2) 对交换期权的研究近年来已取得了很多成果，已从分数布朗运动改进为次分数布朗运动。本文目前仅研究混合分数布朗运动下的交换期权，可以在未来进行改进研究次分数布朗运动下的交换期权定价问题。

(3) 奇异期权的种类很多，本文仅研究了两种。在未来的研究中，可以进一步研究其他的奇异期权定价问题。

参考文献

- [1] Bachelier L. Théorie de la spéculation[C]. Annales scientifiques de l'École normale supérieure. 1900, 17: 21-86.
- [2] Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. Journal of political economy, 1973, 81(3): 637-654.
- [3] Duan J C. Pricing foreign currency and cross-currency options under GARCH[J]. The Journal of Derivatives, 1999, 7(1): 51-63.
- [4] Fama E F. The behavior of stock-market prices[J]. The journal of Business, 1965, 38(1): 34-105.
- [5] Huang B N, Yang C W. The fractal structure in multinational stock returns[J]. Applied Economics Letters, 1995, 2(3): 67-71.
- [6] Beben M, Orłowski A. Correlations in financial time series: established versus emerging markets[J]. The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems, 2001, 20(4): 527-530.
- [7] Garman M B, Kohlhagen S W. Foreign currency option values[J]. Journal of international Money and Finance, 1983, 2(3): 231-237.
- [8] Carr P, Jarrow R, Myneni R. Alternative characterizations of American put options[J]. Mathematical Finance, 1992, 2(2): 87-106.
- [9] Bakshi G, Cao C, Chen Z. Empirical performance of alternative option pricing models[J]. The Journal of finance, 1997, 52(5): 2003-2049.
- [10] Andreasen J. The pricing of discretely sampled Asian and lookback options: a change of numeraire approach[J]. Journal of computational Finance, 1998, 2(1): 5-30.
- [11] Kolmogorov A N. Wiener'sche spiralen und einige andere interessante kurven in hilbertschen raum, cr (doklady)[J]. Acad. Sci. URSS (NS), 1940, 26: 115-118.
- [12] Mandelbrot B B, Van Ness J W. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications[J]. SIAM review, 1968, 10(4): 422-437.

-
- [13] Necula C. Option Pricing in a fractional Brownian motion environment[J]. Advances in Economic and Financial Research, 2008, 2(3):259-273.
 - [14] Kalantari R, Shahmorad S. A stable and convergent finite difference method for fractional Black-Scholes model of American put option pricing[J]. Computational Economics, 2019, 53: 191-205.
 - [15] Cheridito P. Mixed fractional Brownian motion[J]. Bernoulli, 2001, 7(6):913-934.
 - [16] Ghasemalipour S, Fathi-Vajargah B. Fuzzy simulation of European option pricing using mixed fractional Brownian motion[J]. Soft Computing, 2019, 23(24): 13205-13213.
 - [17] 秦学志, 林先伟, 王文华. 基于长记忆性特征的欧式期权模糊定价研究[J]. 系统工程理论与实践, 2019, 39(12):3073-3083.
 - [18] 张亚茹, 夏莉, 张典秋. 混合双分数布朗运动下的永久美式回望期权定价[J]. 山东大学学报(理学版), 2024, 59(04):98-107.
 - [19] 王剑君, 廖芳芳. 分数布朗运动环境中带有 Poisson 跳的股票价格模型的 2 种奇异期权定价[J]. 湖南工程学院学报(自然科学版), 2010, 20(03):37-40.
 - [20] 李雨珊, 薛红. 分数布朗运动下具有机制转换的欧式期权定价[J]. 纺织高校基础科学学报, 2021, 34(3):95-101.
 - [21] 贾亦佳, 薛红, 呼苗. 双分数布朗运动环境下的美式期权定价[J]. 纺织高校基础科学学报, 2020, 33(4):129-138.
 - [22] Bojdecki T, Gorostiza L, Talarczyk A. Sub-fractional Brownian motion and its relation to occupation times[J]. Statistics & Probability Letters, 2004, 69: 405-419.
 - [23] Tudor C. Some properties of the sub-fractional Brownian motion[J]. Stochastics An International Journal of Probability and Stochastic Processes, 2007, 79(5): 431-448.
 - [24] Xu F, Li R. The pricing formulas of compound option based on the sub-fractional Brownian motion model[C]. Journal of Physics: Conference Series. IOP Publishing, 2018, 1053(1): 012027.
 - [25] Jingmin W U, Hong X U E, Yijia J I A. European option pricing with stochastic

- p>volatility in sub-fractional Brownian motion environment[J]. Basic Sciences Journal of Textile Universities, 2020, 33(3): 86-93.
- [26] Feng X. General Exchange Option Pricing in Sub-fractional Brownian Motion Environments[J]. Mathematical Theory and Applications, 2017, 37(2): 18-23.
- [27] Bian L, Li Z. Fuzzy simulation of European option pricing using sub-fractional Brownian motion[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2021, 153: 111442.
- [28] 张萌,温鲜,霍海峰.基于次分数布朗运动的欧式回望期权定价[J]. 桂林航天工业学院学报, 2022,27(01):110-115.
- [29] 肖炜麟, 张卫国, 徐维军. 次分数布朗运动下带交易费用的备兑权证定价[J]. 中国管理科学, 2014, 22(5): 1-7.
- [30] 王永茂, 常竞文. 次分数布朗运动环境下含违约风险的交换期权定价[J]. 西北师范大学学报: 自然科学版, 2018, 54(6): 9-16.
- [31] 靳晨萱,霍海峰,温鲜等.基于次分数 Black-Scholes 模型的欧式期权定价[J]. 南宁师范大学学报(自然科学版),2021,38(03):31-36.
- [32] 梁喜珠, 薛红, 王瑞. 次分数布朗运动环境下最值期权定价[J]. 安徽师范大学学报: 自然科学版, 2020, 43(2): 123-128.
- [33] 肖炜麟, 周清, 吴卫星. 次分数 Black-Scholes 模型的套利机会[J]. 中国科学:数学, 2021, 51(11):1877-1894.
- [34] 余湄,程志勇,邓军,汪寿阳.一个新的期权定价方法:基于混合次分数布朗运动的新视角[J]. 系统工程理论与实践,2021,41(11):2761-2776.
- [35] 王萌,宋瑞丽.基于混合次分数布朗运动环境下的欧式障碍期权定价[J]. 数学的实践与认识,2023,53(12):100-113.
- [36] 安翔,郭精军.混合次分数跳扩散模型下回望期权的定价及模拟[J]. 山东大学学报(理学版):2022,57(4): 100-110.
- [37] Merton R C. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous[J]. Journal of financial economics, 1976, 3(1-2): 125-144.
- [38] 杨云锋, 金浩, 刘新平. 跳扩散模型的期权定价[J]. 宝鸡文理学院学报: 自然科学版, 2006, 26(1): 10-14.

-
- [39] 刘国买, 邹捷中, 陈超. 服从多种形式跳过程的期权定价模型[J]. 数量经济技术经济研究, 2004 (4): 110-114.
 - [40] 王献东, 杜雪樵. 跳扩散模型下的复合期权定价[J]. 数学的实践与认识, 2009 (14): 5-11.
 - [41] [1]南嘉欣,王利.双 Lévy 跳扩散模型下的欧式期权定价[J].北京化工大学学报(自然科学版),2021,48(06):118-122.
 - [42] 史言.随机利率混合指数跳扩散模型下的期权定价[J]. 数学的实践与认识,2021,51(8):87-97.
 - [43] Kou S G. A jump-diffusion model for option pricing[J]. Management science, 2002, 48(8): 1086-1101.
 - [44] Amin K I. Jump diffusion option valuation in discrete time[J]. The journal of finance, 1993, 48(5): 1833-1863.
 - [45] Margrabe W. The value of an option to exchange one asset for another[J]. The journal of finance, 1978, 33(1): 177-186.
 - [46] Kim G, Koo E. Closed-form pricing formula for exchange option with credit risk[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2016, 91: 221-227.
 - [47] Jeon J, Kim G. Power Exchange Option with a Hybrid Credit Risk under Jump-Diffusion Model[J]. Mathematics, 2021, 10(1): 53.
 - [48] Blenman L P, Clark S P. Power exchange options[J]. Finance Research Letters, 2005, 2(2): 97-106.
 - [49] Lian G, Elliott R J, Kaley P, et al. Approximate pricing of American exchange options with jumps[J]. Journal of Futures Markets, 2022, 42(6): 983-1001.
 - [50] Vorst T, Kemna A, Vorst A. A Pricing Method for options based on average asset values[J]. Journal of Banking & Finance, 1990, 14(1):113-129.
 - [51] 章珂,周文彪,沈荣芳.几何平均亚式期权的定价方法[J]. 同济大学学报(自然科学版),2001(8):924-927.
 - [52] 肖文宁,王杨,张寄洲.几何平均亚式期权定价方法的探析[J]. 应用数学,2005,18(2):253-259.

-
- [53] Kirkby J L, Nguyen D. Efficient Asian option pricing under regime switching jump diffusions and stochastic volatility models[J]. *Annals of Finance*, 2020,16:307-351.
 - [54] 胡攀.次分数跳扩散过程下亚式期权的保险精算定价[J]. *宁夏大学学报(自然科学版)*,2021,42(3):241-247.
 - [55] 杨月,王永茂.带跳次分数布朗运动下亚式期权定价[J]. *数学的实践与认识*,2020,50(13): 131-140.
 - [56] 沈明轩, 何朝林. 分数布朗运动环境中几何平均亚式期权的定价[J]. *山东大学学报(理学版)*,2013,48(3):48-52.
 - [57] Mao Z, Liang Z. Evaluation of geometric Asian power options under fractional Brownian motion[J]. *Journal of Mathematical Finance*, 2014, 4:1-9.
 - [58] 沈明轩. 混合分数布朗运动环境下的幂型亚式期权定价[J]. *东北师大学报:自然科学版*, 2015,47(2): 40-44.
 - [59] Wang W, Cai G, Tao X. Pricing geometric asian power options in the sub-fractional Brownian motion environment[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2021, 145:110754.
 - [60] Shokrollahi F. The evaluation of geometric Asian power options under time changed mixed fractional Brownian motion[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2018, 344: 716-724.
 - [61] 龚雪,沈明轩.混合次分数布朗跳-扩散模型下亚式幂型期权的定价[J]. *安徽工程大学学报*,2023,38(03):80-85.
 - [62] Duncan T E, Hu Y, Pasik-Duncan B. Stochastic calculus for fractional Brownian motion I. Theory[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2000, 38(2): 582-612.
 - [63] Kim K H, Yun S, Kim N U, et al. Pricing formula for European currency option and exchange option in a generalized jump mixed fractional Brownian motion with time-varying coefficients[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2019, 522: 215-231.

硕士期间发表的论文

- [1] 龚雪,沈明轩.混合次分数布朗跳-扩散模型下亚式幂型期权的定价[J]. 安徽工程大学学报,2023,38(03):80-85.
- [2] Digital Exchange Options Pricing under Mixed Fractional Jump Diffusion Environment 三审中.

致 谢

行文至此，又过三年，回想起上一次的致谢，已是三年前。十九年的求学之路到此落下帷幕，即将奔赴新的旅程。这一路上遇到了很多风景，还遇到了一群可爱的人，一起并肩走过风风雨雨。

在这里，我首先非常感谢我的导师沈明轩老师。依稀记得第一次见到沈老师是在大一的金融工程课上。老师介绍自己说由于费老师很忙，你们这门课我来带。室友私下里说这个老师长得很像王迅，之后这个老师的名字没记得，就记住了像王迅。研究生入学后，在其他老师的推荐下联系了沈老师，惊讶的发现原来是那个像王迅的老师。沈老师治学严谨，学识渊博，认真负责，我一有不懂的公式推导就会去问老师，老师孜孜不倦给我答疑解惑。每当我偷懒时，老师会敲打我，告诉我读研的时间很短，不要松懈。在老师不断的敲打下，我按时完成毕业要求，度过了比较轻松的研究生生活，当然这一切归功于沈老师的细心审查，耐心指导。我想，这正是所谓的师者，传道授业解惑也。承蒙教诲，心存感激。

其次要感谢的是我们学院的其他老师。教高等数学的项立群老师，是位很有魅力的老教师，每天穿着正装给我们上课，精神饱满，声音激昂。虽然知识枯燥，但老师上课的激情感染着我们。教数值模拟的张伟老师，也是本科教我们的老师，是位很幽默的老师，有不懂的代码问题都会向张老师请教，沈老师说有不懂的代码就去问张老师，张老师一定给你解决。其次，还有潘海峰老师，魏晴晴老师等等，感谢老师们三年的栽培，祝所有老师平安健康，工作顺利。

然后要感谢我们朋友们，住在一起的室友，高中的同桌，一起努力，一起进步。是你们在我有困难时给予帮助，给我鼓励和勇气，让我拥有前进的动力，一路有你们，我真的知足又幸福。

再然后要感谢我的父母，是他们给了我生命。他们很平凡，什么都给不了我，却又什么都给了我。他们不能像别人的父母一样提前给我规划好人生，上什么样的大学，学什么样的专业，可能听到最多的是，我们也不懂，你自己看着弄。他们虽然没有太高的文化水平，却一直支持让我努力往上走，去看更多

的风景，增长更多见识。

最后感谢坚持了这么久的自己，向过去平凡且努力的自己说声谢谢。最近很喜欢的一句话送给即将奔赴新的旅程的自己：追风赶月莫停留，平芜尽处是春山。