

分类号: (F830.91)

密 级: 公开

单位代码: 10363

学 号: 2211010113

题 目 通胀环境中股利率在提取和棘轮约束下
的最优股利分配

英文并列

题 目 Optimal Dividend Distribution Under
Drawdown and Ratcheting Constraints on
Dividend Rates in Inflation Uncertainty

学生姓名: 王康

指导教师: 梁勇 副教授

专 业: 金融

研究方向: 金融随机分析

论文答辩日期: 2024 年 5 月 29 日

安徽工程大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：我恪守学术道德，崇尚严谨学风。所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已明确注明和引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品及成果的内容。论文为本人亲自撰写，我对所写的内容负责，并完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

学位论文作者签名：

王康

日期：2024 年 5 月 29 日

安徽工程大学学位论文版权使用授权书

学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅或借阅。本人授权安徽工程大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保密 ☐，在 _____ 年解密后适用本版权书。

本学位论文属于

不保密 ☒。

学位论文作者签名：

王康

指导教师签名：

梁勇

日期： 2024 年 5 月

通胀环境中股利率在提取和棘轮约束下的最优股利分配

摘要

股东持有公司的股份，希望公司的经营业绩能够保持稳定增长，并且能够不断的回馈股东，最终实现股东财富总价值的增长。这种价值的增长可以通过选择股利政策来实现这一目的，即公司要支付多少盈余或者说公司应当留存多少盈余。合理的股利分配政策不仅能为公司稳定股市行情，还能为公司找到低价的资金来源。不同的股利分配政策具有不同的利弊特征，在选择股利政策时，公司应当分析其利弊。支付更多的股利会增加公司在股东眼中的价值，即著名的股利政策理论“两鸟在林不如一鸟在手”。同时巨额股利也会严重影响公司的现金流，对于公司的偿债能力以及公司未来业务扩张的资金需求都会有所影响，从而影响公司未来的发展。当股利支付率降低时，股东和分析师难免会对公司未来的发展产生悲观情绪，并做出负面反应甚至反应过度。在此基础上，考虑了股东对减少股利支付的厌恶就显得尤为重要。因此，公司在选择股利分配政策时要一切从实际出发，依据公司的实际发展状况来进行选择。

本文研究的是在通货膨胀环境中，股东希望股利不低于历史最高值的一个确定比例的公司最优股利分配问题，目标是公司破产前最大化支付股利的期望贴现效用。首先，给出资产价格模型并采用对数效用函数，建立相应的随机模型以及最优股利分配模型，得出相应的 HJB 变分不等式作为一个非线性自由边界问题，并通过勒让德变换进行求解，最终求出最优策略的解。其次，考虑了通货膨胀可能对股利分配的影响，利用通胀对公司的财富过程折现，同时由于公司对待风险的态度不同，因此我们采用 CRRA 效用函数，利用动态规划原理得到最优解。最后，使用 Matlab 进行数值模拟，分析不同的通货膨胀及提取约束比例对最优股利政策的影响，并给出相应经济学解释。最终得出两个结论：(1) 企业的财富价值与通货膨胀存在密切关系，即通货膨胀与企业财富价值呈负相关关系，而公

司提高最低股利支付率及将股利支付提高到历史最高值所要求的门槛则与通货膨胀呈现正相关性。(2) 提取约束与企业财富价值呈现负相关性, 即当公司以较低的提取约束要求公司股利分配时, 公司的财富价值将更高。这是因为对于一个持续盈利的公司而言, 较高的提取约束限制了公司的现金流, 使得企业发展受限。

最后, 对本文的研究进行总结, 给出了论文的研究不足之处并提出未来展望。

关键词: 最优股利分配, 通货膨胀, 提取约束, HJB 方程, 勒让德变换

OPTIMAL DIVIDEND DISTRIBUTION UNDER DRAWDOWN AND RATCHETING CONSTRAINTS ON DIVIDEND RATES IN INFLATION UNCERTAINTY

ABSTRACT

Shareholders hold shares of the company, hoping that the company's business performance can maintain stable growth, and can constantly reward shareholders, ultimately achieve the growth of the total value of shareholders' wealth. This growth of value can be achieved by choosing the dividend policy, that is, how much surplus the company should pay or how much surplus the company should retain. A reasonable dividend distribution policy not only stabilize the stock market for the company, but also find a low-cost source of funds for the company. Different dividend distribution policies have different advantages and disadvantages. When choosing a dividend policy, the company should analyze its trade-offs. Paying more dividends will increase the value of the company in the eyes of shareholders, namely the famous dividend policy theory "a bird in the hand is worth two in the bush". At the same time, huge dividends will also seriously affect the company's cash flow, and will have an impact on the company's debt paying ability and the company's capital demand for future business expansion, thus affecting the company's future development. When the dividend payment rate is reduced, shareholders and analysts will inevitably be pessimistic about the company's future development and react negatively or even overreact. On this basis, it is particularly important to consider shareholders' aversion to reducing dividend payments. Therefore, companies should

choose dividend distribution policies based on the actual development of the company.

This paper studies the problem of optimal dividend distribution in an inflation environment for a company wishing the dividend to be no lower than the historical maximum, the goal is to maximizing the expected discounted utility of the dividend stream until bankruptcy. Firstly, we propose an asset price model and establish a stochastic model and optimal dividend distribution model using logarithmic utility functions, thus obtaining the corresponding Hamilton-Jacobi-Bellman variational inequality as a nonlinear, free-boundary problem and solve it through the Legendre transform. Finally, the solution of the optimal strategy is obtained. Secondly, we consider the possible impact of inflation on dividend distribution and discount the company's wealth process to reflect the impact of inflation. At the same time, given the differences in companies' attitudes towards risk, we adopt CRRA utility functions and use dynamic programming principles to obtain the solution of the optimal strategy. we use Matlab for numerical simulation to analyze the impact of different inflation and drawdown constraintson, and provide corresponding economic explanations. Two conclusions were ultimately drawn: (1) There is a close relationship between the wealth value of a company and inflation, that is, inflation is negatively correlated with the wealth value of the company, while inflation is positively correlated with the threshold required for the company to increase the minimum dividend payout rate and raise dividend payouts to historical highs; (2) There is a negative correlation between drawdown constraintson and the value of corporate wealth, that is, when a company requires dividend distribution with lower drawdown constraintson, the value of corporate wealth will be higher. This is because for a continuously profitable company, higher drawdown constraintson limit the company's cash flow and limit its development.

Finally, the paper summarizes the research of this paper, gives the shortcomings of the research and proposing future prospects.

Wang Kang (Financial)

Supervised by Liang Yong

KEY WORDS: Optimal dividend distribution, Inflation, Drawdown constraintson, HJB equation, Legendre transform

目录

摘要	I
ABSTRACT	III
第 1 章 绪论	1
1.1 研究背景与意义	1
1.2 国内外研究现状	2
1.3 论文内容及安排	5
1.4 研究方法	7
1.5 创新之处	7
第 2 章 理论基础	8
2.1 布朗运动	8
2.2 通货膨胀	8
2.3 效用函数	9
2.4 伊藤公式	9
2.5 提取约束	10
第 3 章 股利率在提取约束下的最优股利分配	11
3.1 假设与基本模型	11
3.2 最优股利策略	12
3.3 数值模拟	18
3.4 本章小结	20
第 4 章 通胀不确定下股利率在提取和棘轮约束下的最优股利分配	21
4.1 构建模型	21
4.2 模型求解	23
4.3 数值分析	30
4.4 本章小结	32
第 5 章 总结与展望	33
参考文献	35
硕士期间科研成果	41
致 谢	42

第 1 章 绪论

1.1 研究背景与意义

管理者的基本目标之一是在面临各种风险挑战时，保证公司运营的稳定性，稳定的股利分配同样可以视为公司稳定的表现。股利是股息和红利的总称，是企业向股东分配的公司盈余。股利分配作为企业财务决策的重要环节之一，是股东获得投资回报的重要形式。一家能持续、稳定地回馈投资者的公司，能够展现较高的投资价值。

近年来，股利分配政策在股份公司的财务决策中扮演着至关重要的角色，也越来越受到各利益相关方的持续关注。中国证监会一直在提出新的股利分配政策规定，旨在促进企业进行派发股利。得益于监管部门的引导，这些举措取得了令人满意的成果，近五年资料显示，我国境内沪深上市公司分红金额逐年增长，累计分红 8.4 万亿元。2023 年，我国境内市场共有 3361 家沪深上市公司进行了现金分红，占 2023 年末上市公司总数的 65.9%；全年现金分红总额 2.13 万亿元。虽然已经取得不错效果，但和国外主要成熟市场相比较，国内上市公司采取的股利发放策略还有继续优化的空间。在我国特殊的经济制度背景下，在股利分配方面上市公司仍存在着以下的问题：(1) 不分配现金股利情况比较多；(2) 现金股利的分配具有很大的随意性；(3) 公司频发异常高派现和低派现的情况。这都表现了部分上市公司没能根据自身实际进行有计划的股利分配，从而也忽略了股东的投资体验。

2023 年 10 月 20 日，证监会就现金股利相关条款进行修订，此次修订对不派发股利和少派发股利的“铁公鸡”将进行重点关注。此外，对异常高比例派发股利的企业也进行了约束，引导企业进行合理分配股利，避免高比例分配股利对企业生产经营、偿债能力产生不利影响。另一方面，也需要考虑股东对股利分配稳定性的态度。“一毛不拔”不可取，但“忽高忽低”的股利分配政策也难免让投资者和分析师做出负面评价，甚至是反应过度。

公司如果想要争取到潜在的投资者、树立良好的公司形象和信用，就应当采取合理的股利分配政策，全面分析影响股利分配政策的因素。同时要敢于创新，

通过制定稳定的股利分配政策来提高公司资金的使用效率,完善公司治理水平.与此同时,公司还应通过完善对股利分配政策制度的制定以及对股利分配的监督管理来确保股东的权益,使股东能够早享受企业成长带来的福利,也使得公司达到科学管理以及上市公司市场规范化的目标.从长远的眼光来看,合理的股利分配策略对各主体都是一个双赢局面.最后,在“活跃资本市场、提振投资者信心”的背景下,研究最优股利分配策略具有重要理论和现实意义,本文则是对最优股利分配理论的重要补充.

1.2 国内外研究现状

问题可以追溯到 1957 年 Bruno de Finetti^[1] 提交给纽约国际精算师大会的一篇论文.在涉及风险业务的股份公司中,最优股利策略是什么,即最大化股东对贴现股利(直到可能破产)的期望的策略是什么? De Finetti 发现最优策略必须是障碍策略,文章展示了如何确定障碍的最优水平,并为后来日益流行的“股利策略研究”主题奠定了基础.自德费内蒂的开创性研究以来,一直有一个活跃的研究领域致力于在各种标准下寻找最佳的股利支付.

Avanzi^[2] 旨在对 De Finetti 原始论文之后 50 年的精算研究进行分类综合,根据对最优股利研究结果表明,要使破产前的预期股利最大化,根据波段及其特殊情况下的障碍策略支付股利是最优的.此外,还可参见 Loeffen^[3].

Asmussen 等^[4] 讨论了阈值策略,其主要贡献是在数学上更先进的受控扩散模型框架内制定和解决问题. Asmussen 等通过用维纳过程对公司的收入过程进行建模并施加有界股息率的条件来考虑保险公司的最优股息策略,其盈余过程遵循带漂移的布朗运动,为了最大化从现在到破产期间支付的贴现股息的预期,考虑了两种情况.在第一种情况下,他们将股息率限制在区间 $[0, C_0]$. 如果 C_0 小于或等于临界值 C^* ,那么最优策略是以最大股利支付率 C_0 支付股利是最优的. 当 $C_0 > C^*$ 时,如果盈余低于某个值 X^* ,则以 0 的利率支付股息最优;如果盈余高于 X^* ,则以 C_0 的利率支付股息最优. 在第二种情况下,没有限制股利支付率,则最优策略是奇异控制类型的,即通过障碍策略支付股利是最优的,在该策略下,所有超过障碍 b 的盈余都作为股利支付,低于障碍 b 则不支付股利.在此基础上,不断有学者对其进行深入研究.其中, Gerber 等^[5] 进行了明确计算. Asmussen 等^[6] 则对其进行了扩展,作者允许保险公司通过超额损失再保

险的风险控制方法控制其盈余, 根据该计划, 保险公司将其部分保费转移给另一家公司, 以换取承担超过一定水平的每笔索赔金额的义务. Liang^[7] 在 Taksar^[4] 的模型基础上, 增加了破产的惩罚.

Cai^[8] 考虑了公司在有借贷利率时的最优股利模型, 也就是说, 只要有利可图, 企业在破产后仍能继续经营. 当盈余为负数时, 则用较高的债务利率. Albrecher 等^[9] 引入了多层策略, 即具有多个阈值的策略, 其结果由 Badescu^[10] 通过使用样本路径分析程序进行了推广. 关于多层策略的进一步研究, 请见 Landriault^[11]、Zhang^[12]. 此外, Albrecher 等^[13] 允许股息率一次性增加, 文章中预先规定了两个股息率, 并确定了盈余的最佳水平, 超过该水平, 公司将以更高的利率支付. 在 Bandini 等^[14] 人的模型中, 公司以不受限制的比率向股东支付股息. 此外, Bandini 等假设股利在随机利率下以指数形式折现, 其目标是最大化总的预期贴现股利, 直到破产.

在考虑超额损失再保策略下的保险公司最优障碍分红的研究方面, Yan 等^[15] 在对称风险信息下考虑带交易成本、残值及注资的最优障碍分红和超额损失再保问题; Cheng 等^[16] 在再保保费非便宜的假设下, 讨论扩散模型下的相同问题. 但以上研究均未考虑保险盈余已经普遍投资于资本市场的现实, 虽然已有考虑带风险资本投资的最优再保-障碍分红问题的相关报道^[17-21].

常数边界策略的一种推广是脉冲分红策略. 在现实中, 分红往往是逐次支付, 而且每次支付会伴随成本的发生. 假设每次分红支付都会产生一个固定成本, Harrison^[22] 在漂移 Brown 运动模型下证明了最优分红策略为双边界策略. 应用此分红策略, 当公司盈余达到一个上边界水平时, 公司就会支出一笔分红, 使得公司盈余回落到一个下边界的水平. 对脉冲分红问题的更多研究, 纯扩散模型下可参见文献^[23-30], 含跳跃模型下可参见文献^[31-33].

在金融和经济学文献中, 主要关注的是扩散模型, 延伸的内容往往涉及非恒定利率, 漂移和扩散系数. 事实上, 外部的宏观经济条件及其对盈利能力的影响对股利政策有很大影响. 如 Hackbarth 等^[34] 的研究表明, 这种宏观经济效应已经以各种形式被研究. 特别是 Anderson 等^[35] 以及 Barth 等^[36] 对连续变化的随机参数进行了数值研究, 然而 Akyildirim 等^[37] 考虑了遵循马尔科夫链的随机利率, Jiang 等^[38] 考虑了模型系数和利率均受马尔科夫链的约束. Bolton 等^[39] 同样研究了宏观经济对金融和投资机会的影响. 与受宏观经济因素影响的系数不同,

Radner 等^[40] 已经在 1996 年建立了公司的模型, 在不同的经营策略之间交替进行, 从而有效的控制了模型系数. 其他扩展包括股息支付的交易成本或股权发行的可能性, 可参见^{[37][38][41]}. 最后, Avanzi 等^[42] 以及 Albrecher 等^[43] 分别提出了现金储备中按比例分配和仿射的股利分配过程, 以此来捕捉实践中看到的更稳定的股利流.

另一方面, 当公司减少股利的支付时, 股东及分析师会对公司做出负面反应, 且大都会反应过度, 从而影响外界对公司的评级, 甚至会限制公司的未来发展. 目前现有的关于最优股利政策的文献, 主要是忽略了股东对股利支付减少的反对, 而限制股利率的下降对风险环境中运营公司的稳定性也是至关重要的. 关于对股利率的约束, 首先参考最优消费投资问题中对消费率进行限制的文献. Dybvig^[44] 对消费率施加了棘轮约束, 也就是说, 消费被限制为要么保持不变, 要么根据需要增加, 如果消费下降, 则效用定义为负无穷. 在文章中, 破产是不可能的, 风险偏好表现出恒定的相对风险规避, 最终为那些寻求消费贴现效用最大化的投资者找到了最佳投资和消费政策. Grossman 等^[45] 通过假设一个提取约束来建立风险投资的棘轮模型, 该约束阻止财富在没有中间消费提取的模型中下降到先前最大值的某个比例以下, 在这种情况下考虑了最终财富预期效用的长期增长率最大化的问题. Arun^[46] 在默顿问题的框架下进行研究, 但对消费过程施加了提取约束, 即允许消费率下降, 但不低于其最大消费率的一个比例, 拓展了 Dybvig 的研究.

通货膨胀是一种复杂的经济现象, 直接或间接的影响着企业的投资生产活动, 因此, 通货膨胀也是企业管理者在发放股利时不可忽视的问题. 目前, 很少有文献考虑通货膨胀对股利分配的影响, 但有许多学者研究通胀对投资消费的影响, 这些研究对这篇文章有很大启发. 丁传明等^[47] 在考虑通货膨胀的情况下, 利用动态规划方法和鞅方法为投资者找到了最优投资策略. Bensoussan 等^[48] 人在消费篮子价格可观察到和观察受到干扰时, 研究了通胀因素对最优投资与消费的影响. Lim^[49] 证明了通胀对代理人的经济活动有重要的影响. 通胀会带来物价的上涨, 导致代理人可以购买的消费品减少, 消费效用降低. 因此, 代理人需通过减少消费、增加投资来应对通胀. Munk^[50] 考察了通胀环境下, 一个可投资于现金、名义债券和股票的幂效用投资者的最优资产配置. 姚海祥^[51] 基于连

续时间均值-方差框架,探究了通胀影响下投资终止时间不确定的最优投资组合选择题.

费为银等^[52]研究了在通胀和 Knight 不确定条件下,投资者最优消费和投资决策,并分析了含糊和通胀等因素对最优投资消费问题的影响.此外,费为银等^[53]还研究了通胀服从均值回复过程的最优投资和消费问题.费为银等^[54]分析了在跳扩散环境下,通胀因素和跳对投资者资产配置的影响.费为银等^[55]运用了随机分析、动态规划原理和鲁棒控制方法,研究了在通胀和模型不确定下投资者的最优消费和投资组合问题.梁勇等^[56]利用伊藤公式推导考虑通胀的消费篮子价格动力学方程,研究了奈特不确定下带有通胀的固定供款型养老基金的最优投资问题.

1.3 论文内容及安排

本文的主要内容是当股东不希望股利率低于历史上最高值的某一比例,在公司破产前为了最大化支付股利的期望贴现效用而确定的最优股利分配策略.

全文主要分为以下五个部分进行阐述:

第一部分为背景及国内外研究现状,阐述当前国内外论文研究的趋势,并在前人的基础上进一步开展创新研究.

第二部分为基本知识和基本理论,介绍此论文相关的一些基本概念,包括通货膨胀,效用函数,随机控制理论等相关知识.

第三部分为在对数效用函数下,考虑提取和棘轮约束因素下的最优股利分配情况,给出了求解最优股利和投资策略,提取约束以及值函数的半显式解的理论方法,并分析提取约束对公司价值的影响.

第四部分考虑了通货膨胀,并在 CRRA 效用函数下的最优策略的半显示解,并且由具体的数值给出数值模拟,并给出相应的经济学上的解释.

第五部分为总结与展望.

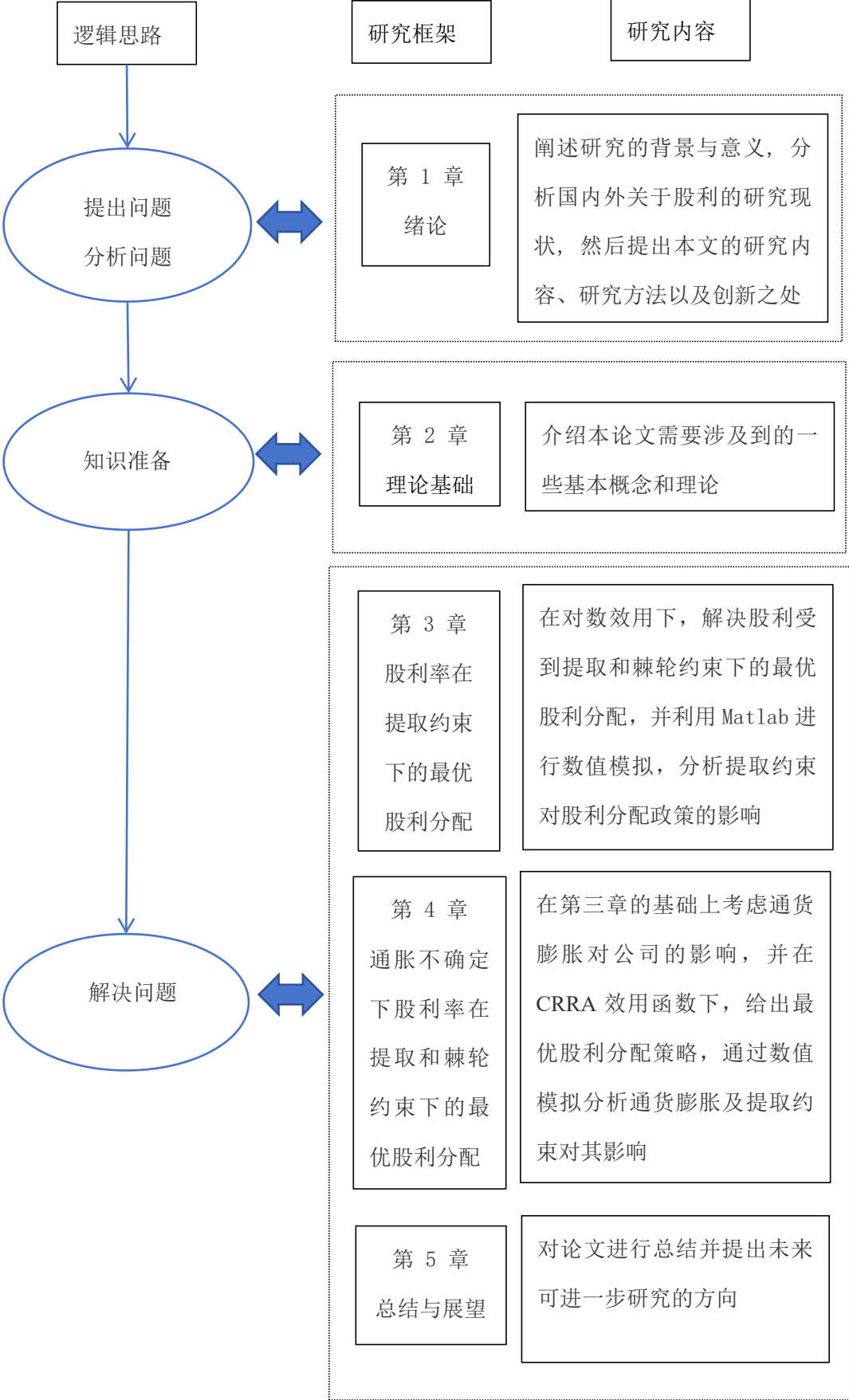


图 1-1 研究思路

1.4 研究方法

(1) 文献研究法. 文献研究法是根据一定的研究目的或课题, 通过调查文献来获得资料, 从而全面地、正确地了解掌握所要研究问题的一种方法. 文献研究法的基本过程为: 提出课题或假设—研究设计—搜集文献—整理文献—进行文献综述。

(2) 数值模拟. 数值模拟包含以下几个步骤: 首先要建立反映最优股利问题本质的数学模型, 具体说就是要建立反映最优股利问题各个变量之间的微分方程及相应的定解条件. 数学模型建立之后, 需要解决的问题是寻求高效率、高准确度的计算方法. 在确定了计算方法后, 就可以开始编制程序和进行计算. 在计算工作完成后, 大量数据就能通过图像形象地显示出来.

1.5 创新之处

(1) 对股利率施加提取和棘轮约束. 前人的研究股利政策大都集中在障碍策略和阈值策略上, 而本文从股东对股利下降的厌恶入手, 对股利率施加提取和棘轮约束, 符合股利策略理论“两鸟在林不如一鸟在手”, 也符合股东的心理.

(2) 引入通货膨胀因素. 将公司的净盈余过程通过通货膨胀进行折现, 得到真实净盈余过程, 从而建立新的资产模型, 并在动态规划原理及随机控制的理论下建立相应的 HJB 方程.

(3) 采用对数效用函数及 CRRA 效用函数建立值函数. 由于每个公司对风险的厌恶程度不同, 需要考虑不同的公司所适用的效应函数, 通过不同的效用函数来建立不同的值函数, 使得论文成果能适用不同的公司.

第 2 章 理论基础

2.1 布朗运动

1928 年, 苏格兰植物学家布朗观察到谷物类花粉悬浮在液体中表现出不规则的运动, 按照爱因斯坦的解释, 这一运动是由于花粉受到水分子的撞击引起的, 这种现象被称为布朗运动. 维纳则是第一个把布朗运动建立在坚实的数学基础之上的人, 因此布朗运动有时也被称为维纳过程.

定义 2.1: 令 $X = (X_t, t \in T)$ 是一个随机过程, $T \subset \mathbb{R}^n$ 是一个区间. 如果对所有的 $t, s \in T$ 以及使得 $t+h, s+h \in T$ 的 h 有

$$X_t - X_s \stackrel{d}{=} X_{t+h} - X_{s+h},$$

则称 X 是具有平稳增量的.

如果对任意的 $t_i \in T$ 且 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n, n \geq 1$, 有

$$X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

是相互独立的随机变量, 则称 X 是有独立增量的.

定义 2.2: 如果随机过程 $W = (W_t, t \in [0, +\infty))$ 满足下列条件:

- (1) 它从零点出发: $W_0 = 0$;
- (2) 它有平稳独立的增量, 满足定义 2.1;
- (3) 对每个固定的 $t > 0, W_t$ 是一个服从正态分布 $N(0, t)$ 的随机变量;
- (4) 它有连续的样本轨道, 即“没有跳跃点”,

则称 W 为 (标准) 布朗运动或者 Wiener 过程.

2.2 通货膨胀

通货膨胀是相对于某一基年而言, 一般物价水平的持续上涨. 如果只有一两种产品的价格上涨, 则不能称为通货膨胀, 只有大多数产品的价格相对于该基年的价格而言, 都呈现出上升的趋势时, 才能称得上是通货膨胀.

定义 2.3: 假设通货膨胀是一个随机过程, 其价格水平 $P(t)$ 服从如下的随机微分方程:

$$dP(t) = P(t)(\mu_p dt + \sigma_p dW_t),$$

其中, μ_p 为 t 时刻的预期通货膨胀率, σ_p 为 t 时刻的波动率, W_t 是风险中度测度下的一维标准布朗运动.

2.3 效用函数

效用, 用一个词来表示, 就是满足. 更准确地说, 效用是指一个人从消费一种物品或劳务中得到的主观上的享受或者有用性.

定义 2.4: 如果函数 $U: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 满足如下条件:

- (1) $U \in C^1$, 且 U 是严格凹函数;
- (2) $U'(0) := \lim_{x \rightarrow 0} U'(x) = +\infty, U'(\infty) := \lim_{x \rightarrow \infty} U'(x) = 0$,

则称 U 是一个效用函数.

下面介绍几种常见的效用函数:

- (1) 相对风险规避效用函数 (CRRA):

$$U(x) = \frac{x^{1-\beta}}{1-\beta}, \quad 0 < \beta < 1.$$

- (2) 绝对风险规避效用函数 (CARA):

$$U(x) = -\frac{1}{\beta} e^{-\beta x}, \quad \beta > 0.$$

- (3) 对数效用函数:

$$U(x) = \beta \ln x, \quad x > 0.$$

- (4) 二次效用函数:

$$U(x) = x - \beta x^2, \quad \beta > 0.$$

2.4 伊藤公式

定义 2.5: $W = (W^1, \dots, W^d)$ 是一个在带流概率空间上的一个 d 维的布朗运动. 如果定义 $\mathbb{R}^n$ 在上的过程 $X = (X^1, \dots, X^d)$ 满足

$$X_t = X_0 + \int_0^t u_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s, t \in [0, T];$$

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t u_s^i ds + \sum_{j=1}^d \int_0^t \sigma_s^{ij} dW_s^j, t \in [0, T], 1 \leq i \leq n.$$

其中, X_0 是 $\mathcal{F}_0$ 可测的 $u = (u^1, \dots, u^d) \in \mathbb{R}^n$ 和 $\sigma = (\sigma^1, \dots, \sigma^d) \in \mathbb{R}^{n \times d}$ 是循序可测的. 那么, 称 X 为一个伊藤过程.

定义 2.6: 设 X_t 是一个如下的 Itô 过程:

$$dX_t = udt + v dW_t,$$

$g(t, X_t)$ 也是一个 Itô 过程, 且满足:

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t) dX_t \cdot (dX_t)^2,$$

这里, $dt \cdot dt = dt \cdot dW_t = dW_t \cdot dt = 0$, $dW_t \cdot dW_t = dt$.

2.5 提取约束

定义 2.7: 超额股利率不能低于历史最大值的一个比例 $\alpha \in (0, 1)$, 即所谓的超额股利的提取约束, 即

$$y(t) \geq \alpha h_t,$$

其中, h_t 满足 $h_t = \max\{h, \sup_{0 \leq s < t} y(s)\}$.

第 3 章 股利率在提取约束下的最优股利分配

本章在对数效用函数下,考虑股东不希望股利支付率低于历史上低于历史上迄今为止最大的股利率的一个固定比例,即股利受到提取约束下的最优股利分配问题.假设公司在制定股利策略时需要考虑两点,第一点是股东希望获得风险溢价,也就是说股息支付率至少要高于利率;第二点则是股东希望超额股利率不低于历史最高值的一个确定比例.其目标是公司破产前最大化支付股利的期望贴现效用,采用对数效用函数,建立相应的随机模型以及最优股利分配模型,得出相应的 Hamilton-Jacobi-Bellman 变分不等式作为一个非线性自由边界问题,并通过勒让德变换进行求解.最后,得到最优股利政策并利用 Matlab 对结果进行数值模拟,分析提取约束对股利政策的影响.

3.1 假设与基本模型

3.1.1 金融市场

本文假设在一完备的金融市场上,公司决定其投资和股利政策.用 π_t 来表示公司在 t 时刻的投资决策,假设公司的股票数量固定,投资政策取决于公司发行或回购多少债券,债券利率以固定利率 $r \geq 0$ 发行.

用 $S(t)$ 表示公司总资产的内在价值.假设在 $[0, t]$ 期间不发放股利且 $S(t)$ 遵循几何布朗运动,则 $S(t)$ 满足以下随机微分方程:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = (\mu_s + r)dt + \sigma_s dW_t,$$

其中, $\mu_s > 0$ 表示恒定的风险溢价, $\sigma_s > 0$ 表示波动率, W 为给定概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ 上的标准布朗运动.

关于股利政策,用 $Y(t)$ 表示公司在 t 时刻支付的股利,用 $y(t)$ 表示公司在 t 时刻支付的超额股利.在制定股利政策时,需要考虑两点,首先,公司股东希望能获得风险溢价,即当 $t > 0$ 时, $Y(t) \geq rX(t)$, $X(t)$ 为公司在 t 时刻的盈余.因此有

$$y(t) = Y(t) - rX(t), t \geq 0.$$

其次, 假定超额股利率不能低于历史最大值的一个比例 $\alpha \in (0,1)$, 即所谓的超额股利的提取约束, 即

$$y(t) \geq \alpha h_t,$$

其中, h_t 满足 $h_t = \max\{h, \sup_{0 \leq s < t} y(s)\}$, 则有 $y(t) \geq \alpha h_t \geq \alpha h > 0$. 又

$$Y(t) = y(t) + rX(t),$$

则 $Y(t) > rX(t)$.

3.1.2 盈余过程

有了投资政策和超额股利政策, 则净盈余过程为:

$$\begin{aligned} dX(t) &= \pi(t) \frac{dS(t)}{S(t)} + [r(X(t) - \pi(t)) - Y(t)]dt \\ &= (\mu_s \pi(t) - y)dt + \sigma_s \pi(t) dW_t. \end{aligned} \quad (3.1)$$

其中, $X(t)$ 为净盈余价值, $X_0 = X > 0$.

对于投资和股利政策 $(\pi_t, y_t)_{t \geq 0}$ 需要满足以下条件:

(1) π_t 适应于 $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, $\pi_t \geq 0$, $\int_0^\infty \pi_t^2 dt < \infty$;

(2) y_t 适应于 $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, $\int_0^\infty y_t^2 dt < \infty$;

(3) y_t 是非负的, 且右连左极;

(4) y_t 满足提取约束, 即 $y(t) \geq \alpha h_t$.

若 π_t, y_t 满足上述条件及净盈余过程, 则称对应的控制过程 (α, h) 对 X_t 是容许的, 用 $\mathbb{S}$ 来表示, 称为容许控制集 $\mathbb{S}(\alpha, h)$.

3.2 最优股利策略

3.2.1 随机控制问题的值函数及 HJB 方程

假设公司在破产前的目标是最大化支付股利贴现效用的期望值^[57]. τ 表示破产的时间, 即 $\tau = \inf\{t \geq 0: X_t \leq 0\}$, 破产时间 τ 取决于净盈余过程中用于控制 X 的容许控制集 $\mathbb{S}(\alpha, h)$. 因此, 公司的目标可表示如下:

$$\sup_{(\pi_t, y_t)} \mathbb{E} \left[\int_0^\tau e^{-\delta t} i \log y_t dt \right],$$

其中, δ 为贴现因子, $i \log y_t$ 为代理人的效用函数, 采用的是对数效用函数.

对应于公司的目标的随机控制问题的值函数为

$$\tilde{V}(x, h) = \sup_{(\pi_t, y_t) \in \mathbb{S}(\alpha, h)} \mathbb{E}^x \left[\int_0^\tau e^{-\delta t} i \log y_t dt \right], \quad (3.2)$$

其中, $(x, h) \in \mathbb{R}_+^2$, $\mathbb{E}^x$ 表示 $X_0 = x$ 为条件的期望. 此外, 假设 V 是关于 x 递增的凹函数.

定义一个比例系数:

$$\theta = \frac{x}{h} > 0. \quad (3.3)$$

假设当 X_t 达到新的最大值时, 公司都会面临是否将超额股息率提高到历史最大值之上. 即当 $X_t > \theta^* h_t$ 时, 此时说明公司的盈利能力非常强, 有足够的的能力发放股利. 此时, 公司会将超额股息率提高到 $y_t = X_t / \theta^*$; 当 $0 < X_t \leq \theta^* h_t$ 时, 公司只会增加超额股利率. 此外, 还定义另外两个重要的比例系数, θ_α, θ_1 , 使得 $0 < \theta_\alpha < \theta_1 < \theta^*$. 基于这些临界值, 假设股利的发放具有以下的策略:

(1) 当 $X_t < \theta_\alpha h_t$ 时, 则 $y_t = \alpha h_t$. 即如果盈利水平“非常低”, 则公司应当以提取约束允许的最低水平支付股利.

(2) 当 $\theta_\alpha h_t < X_t < \theta_1 h_t$ 时, 则 $y_t = y^*(X_t, h_t)$, $y^*(X_t, h_t)$ 为某一函数, 其取值范围为 $(\alpha h_t, h_t)$. 也就是说, 当公司的盈利水平处于“不高不低”状态时, 公司以高于最低股利率, 但低于历史峰值股利率支付股利.

(3) 当 $\theta_1 h_t < X_t < \theta^* h_t$, 则 $y_t = h_t$. 在这种情况下, 盈利足够大, 因此可以以历史峰值股利率支付股利, 但不足以将股利率提高到该值之上.

此外, 在 $X_t > \theta^* h_t$ 处, 可以通过奇异控制来提高股利率, 使得 X_t 能始终保持在 $\theta^* h_t$ 以内.

对于随机控制问题的值函数, 利用动态规划原理, 可得

$$\varphi_t = e^{-\delta t} \tilde{V}(x, y) + \int_0^t e^{-\delta s} i \log y_s ds.$$

根据伊藤公式, 可得:

$$\begin{aligned} d\varphi_t = e^{-\delta t} & \left\{ -\delta \tilde{V}(x, y) + \tilde{V}_x(\mu_s \pi_t - y_t) + \frac{1}{2} \tilde{V}_{xx}(\sigma_s \pi_t)^2 + i \log y_t \right\} dt \\ & + e^{-\delta t} \left[\sigma_s \pi_t \tilde{V}_x dW_t + \tilde{V}_h(x, y) dh \right], \end{aligned}$$

其中, $\tilde{V}_x, \tilde{V}_{xx}, \tilde{V}_h$ 分别表示 $\tilde{V}$ 对 x 的一阶导数, $\tilde{V}$ 对 x 的二阶导数, $\tilde{V}$ 对 h 的一阶导数.

如果 $V(x, h)$ 是 $\mathbb{C} = \{(x, h) \in \mathbb{R}_+^2 : x \leq \theta^* h, h > 0\}$ 上的一个凹函数, 且满足 (3.3) 的 HJB 方程, 则 $V(x, h) = \tilde{V}(x, h)$. 且 $y^*(x, h)$, $\pi^*(x, h)$ 也满足此方程, 即为最优股利策略.

因此得到 HJB 方程:

$$\begin{cases} 0 = \max_{y \geq \alpha h, \pi} \left[-\delta V + (\mu_s \pi_t - y_t) V_x + \frac{1}{2} (\sigma_s \pi_t)^2 V_{xx} + i \log y_t \right], \\ V(0, h) = 0, \\ V_h(\theta^* h, h) = 0, \\ V_{xh}(\theta^* h, h) = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

其中, $V_h(\theta^* h, h) = 0$ 为平滑粘贴条件, 可参见 Dixit^[58] 和 Dumas^[59]. $V_{xh}(\theta^* h, h) = 0$ 为超接触条件, 该条件保证了 θ^* 的最优性.

通过上述描述及推导, 下面需要对未知参数最优股利策略 $y^*(x, h)$, 最优投资策略 $\pi^*(x, h)$ 以及比例系数 $\theta_\alpha, \theta_1, \theta^*$ 进行详细推导.

3.2.2 最优股利模型求解

首先, 通过使用放缩来减少问题的维度. $V(x, h)$ 满足

$$V(\xi x, \xi h) = V(x, h) + \frac{i \log \xi}{\delta}, \quad \xi > 0.$$

因此, 定义 v : $v(\theta) = V(\theta, 1), \theta > 0$.

通过变换, 可以得到以下关系式:

$$\begin{cases} V(x, h) = v(\theta) + \frac{i \log h}{\delta}, \\ V_x(x, h) = h^{-1} v_\theta(\theta), \\ V_{xx}(x, h) = h^{-2} v_{\theta\theta}(\theta), \\ V_h = \frac{1}{h} \left(\frac{i}{\delta} - \theta v_\theta(\theta) \right), \end{cases} \quad (x, h) \in \mathbb{R}_+^2.$$

而 $y(x, h)$, $\pi(x, h)$ 均是关于 h 的一次方, 有 $\begin{cases} y(x, h) = h \tilde{y}(\theta), \\ \pi(x, h) = h \tilde{\pi}(\theta). \end{cases}$

那么, (3.3) 式的 HJB 方程可改写为

$$\begin{cases} 0 = \max_{(\tilde{\pi}, \tilde{y}) \in \mathbb{R}_+^2} \left[-\delta v + (\mu_s \tilde{\pi} - \tilde{y}_t) v_\theta + \frac{1}{2} (\sigma_s \tilde{\pi})^2 v_{\theta\theta} + i \log \tilde{y} \right], \\ v(0) = -\frac{i \log h}{\delta}, \\ \frac{i}{\delta} = \theta^* v_\theta(\theta^*), \\ v_\theta(\theta^*) + \theta^* v_{\theta\theta}(\theta^*) = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

由 HJB 方程的一阶条件可得 (3.5)、(3.6) 式:

$$\tilde{\pi} = -\frac{\mu_s v_\theta}{\sigma_s^2 v_{\theta\theta}}, \quad (3.5)$$

$$\tilde{y} = \frac{i}{v_\theta}. \quad (3.6)$$

将 (3.5) 代入 HJB 方程得

$$\frac{\mu_s^2 v_\theta^2}{2\sigma_s^2 v_{\theta\theta}} + \delta v = i \log \tilde{y} - \tilde{y} v_\theta, \quad (3.7)$$

定义 $k = \frac{2\sigma_s^2}{\mu_s^2}$, (3.7) 就化简为

$$\frac{v_\theta^2}{k v_{\theta\theta}} + \delta v = i \log \tilde{y} - \tilde{y} v_\theta. \quad (3.8)$$

其中 k 为常数. 此外, 我们假设股利的支付满足 (3.9) 式, 即

$$\tilde{y}(\theta) = \begin{cases} \alpha, & 0 \leq \theta \leq \theta_\alpha, \\ \frac{i}{v_\theta}, & \theta_\alpha \leq \theta \leq \theta_1, \\ 1, & \theta_1 \leq \theta \leq \theta^*. \end{cases} \quad (3.9)$$

将 (3.9) 代入 (3.8), 重写 HJB 方程, 得

$$\frac{v_\theta^2}{k v_{\theta\theta}} + \delta v = \begin{cases} i \log \alpha - \alpha v_\theta, & 0 \leq \theta \leq \theta_\alpha, \\ i \left(\log \frac{i}{v_\theta} - 1 \right), & \theta_\alpha \leq \theta \leq \theta_1, \\ -v_\theta, & \theta_1 \leq \theta \leq \theta^*. \end{cases} \quad (3.10)$$

接下来使用勒让德变换, 即令 $m = v_\theta, u(m) = v(\theta) - \theta m$, 对 θ 微分可得 $\theta = -u_m(m)$, 再对其进行微分可得 $v_{\theta\theta} = -\frac{1}{u_{mm}(m)}$. 此外, 在 0 和 θ^* 处, 可得 $v_\theta(0) = m_0, v_\theta(\theta^*) = m^*$.

然后将其代入 (3.10), HJB 方程就变为欧拉方程形式:

$$\begin{cases} m^2 u_{mm} + k\delta m u_m - k\delta u = \begin{cases} k\alpha m - ki \log \alpha, & i/\alpha \leq m \leq m_0, \\ ki \left(1 - \log \frac{i}{m}\right), & i \leq m \leq i/\alpha, \\ km, & m^* \leq m \leq i. \end{cases} \\ u(m_0) = -\frac{i \log h}{\delta}, \\ u_m(m_0) = 0, \\ i/\delta = -m^* u_m(m^*), \\ m^* u_{mm}(m^*) + u_m(m^*) = 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

接下来就是对微分方程 (3.13) 求通解, 再通过 $u(m)$ 在边界点上有二阶导数连续, 换句话说, 一阶导数在分段点处连续, 来求特解, 可得 $u(m)$ 的表达式, 其表达式由下式给出:

$$u(m) = \begin{cases} C_1 m + C_2 m^{-k\delta} + \frac{k\alpha}{1+k\delta} m \log m + \frac{i \log \alpha}{\delta}, & i/\alpha \leq m \leq m_0, \\ C_3 m + C_4 m^{-k\delta} + \frac{i}{\delta} \left(\log \frac{i}{m} - 2 \right) + \frac{i}{k\delta^2}, & i \leq m \leq i/\alpha, \\ C_5 m + C_6 m^{-k\delta} + \frac{k}{1+k\delta} m \log m, & m^* \leq m \leq i. \end{cases} \quad (3.14)$$

其中,

$$C_1 = \frac{k\delta}{1+k\delta} \left(\frac{k\delta}{1+k\delta} - \frac{i \log ah}{\delta m_0} - \log m_0 - 1 \right),$$

$$C_2 = \frac{1}{(1+k\delta) m_0^{-k\delta}} \left(\frac{k\alpha m_0}{1+k\delta} - \frac{i \log \alpha h}{\delta} \right),$$

$$C_3 = C_1 + \frac{k\alpha}{1+k\delta} \left(\log \frac{i}{\alpha} + 2 + \frac{1}{1+k\delta} \right),$$

$$C_4 = C_2 + \frac{\alpha^{-k\delta}}{\delta i^{-k\delta-1}} \left(\frac{1}{(1+k\delta)^2} + \frac{1}{1+k\delta} - \frac{1}{k\delta} \right),$$

$$C_5 = C_1 + \frac{k(\alpha-1)}{1+k\delta} \left(\log i + 2 + \frac{1}{1+k\delta} \right) - \frac{k\alpha}{1+k\delta} \log \alpha, \quad (3.15)$$

$$C_6 = C_2 + \frac{(\alpha^{-k\delta} - 1)}{\delta i^{-k\delta-1}} \left(\frac{1}{(1+k\delta)^2} + \frac{1}{1+k\delta} - \frac{1}{k\delta} \right). \quad (3.16)$$

在 $m = m^*$ 处, 有满足 $i/\delta = -m^* u_m(m^*)$ 与 $m^* u_{mm}(m^*) + u_m(m^*) = 0$ 这两个边界条件, 因此可得到用 m^* 表示的 C_5 和 C_6 ,

$$C_5 = \frac{-k}{1+k\delta} \left(\frac{i}{m^*} + \frac{1}{1+k\delta} + 1 + \log m^* \right), \quad (3.17)$$

$$C_6 = \frac{1}{k\delta(1+k\delta)(m^*)^{-k\delta}} \left(\frac{i}{\delta} - \frac{km^*}{1+k\delta} \right). \quad (3.18)$$

以上求解出来的是利用勒让德变换后的自由边界问题的 $u(m)$, 现在通过反转勒让德变换来获得 $v(\theta)$. 具体来说, 即令 $v(\theta) = u(m) - mu_m(m)$, $\theta = -u_m(m)$, 可得

$$\begin{cases} \theta_\alpha = -u_m\left(\frac{i}{\alpha}\right) = -C_1 + k\delta C_2 \left(\frac{i}{\alpha}\right)^{-k\delta-1} - \frac{k\alpha}{1+k\delta} \log \frac{i}{\alpha} - \frac{k\alpha}{1+k\delta}, \\ \theta_1 = -u_m(i) = -C_3 + k\delta C_4 i^{-k\delta-1} + \frac{1}{\delta}, \\ \theta^* = -u_m(m^*) = -C_5 + k\delta C_6 (m^*)^{-k\delta-1} - \frac{k}{1+k\delta} \log m^* - \frac{k}{1+k\delta}. \end{cases} \quad (3.18)$$

如果 $(x, h) \in \mathbb{C}$, 即 $0 \leq x \leq \theta^* h$, 则 (3.2) 中的值函数、 $\pi^*(x, h)$, $y^*(x, h)$ 分别由就 (3.19)、(3.20)、(3.21) 给出,

$$\tilde{V}(x, h) = \begin{cases} (1+k\delta)C_2 m^{-k\delta} - \frac{k\alpha m}{1+k\delta} + \frac{i \log \alpha h}{\delta}, & 0 \leq y \leq \theta_\alpha \\ (1+k\delta)C_4 m^{-k\delta} + \frac{i}{\delta} \left(\log \frac{m}{ih} - 1 \right) + \frac{i}{k\delta^2}, & \theta_\alpha < y < \theta_1 \\ (1+k\delta)C_6 m^{-k\delta} + \frac{i \log h}{\delta} - \frac{km}{1+k\delta}, & \theta_1 \leq y \leq \theta^*. \end{cases} \quad (3.19)$$

其中, $m \in [m^*, m_0]$ 是 $-u_m(m) = \frac{x}{h}$ 的唯一解.

$$\pi^*(x, h) = \frac{\mu_s h m(u_{mm}(m))}{\sigma_s^2}. \quad (3.20)$$

$$y^*(x, h) = \begin{cases} \alpha h, & 0 \leq x \leq \theta_\alpha h, \\ \frac{ih}{m}, & \theta_\alpha h \leq x \leq \theta_1 h, \\ h, & \theta_1 h \leq x \leq \theta^* h. \end{cases} \quad (3.21)$$

在 $x = \theta^* h$ 处, 公司通过奇异控制增加超额股利率, 以保持 $(x_t^*, h_t^*) \in \mathbb{C}$, 即保持 $X_t^* \leq \theta^* h_t^*$, “*” 代表最优策略.

如果 $x > \theta^* h$, 公司将其投资策略设定

$$\pi^*(x, h) = \frac{\mu_s h m^* (u_{mm}(m^*))}{\sigma_s^2}.$$

此时, 公司立即增加超额股利率到 $y^*(x, h) = \frac{x}{\theta^*}$ 对应的值函数为

$$\tilde{V}(x, h) = (1 + k\delta) C_6 (m^*)^{-k\delta} + \frac{i \log \frac{x}{\theta^*}}{\delta}.$$

此后, 当 $x > \theta^* h$ 时公司才增加超额股利率以始终保持 $X_t^* \leq \theta^* h_t^*$.

3.3 数值模拟

在模拟中, 分别将提取约束系数 α 设定为 0.1, 0.5, 0.7, 其他参数设定如下: $\mu_s = 0.12, \sigma_s = 0.2, \delta = 0.2, i = 1$, 在其他参数不变的情况下, 研究提取约束系数的变化对股利政策的影响.

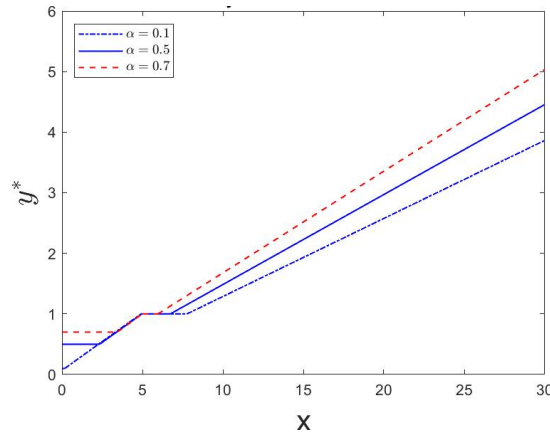


图 3-1 不同提取约束下的股利支付图

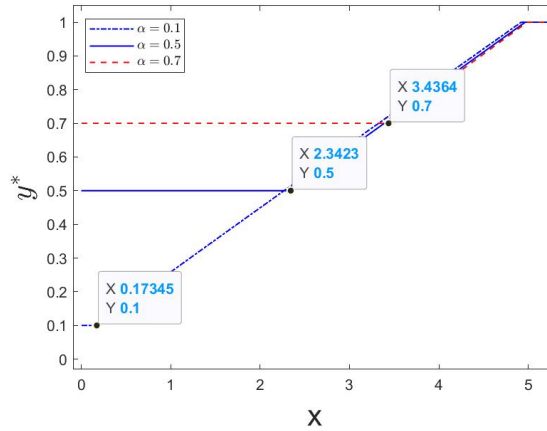


图 3-2 不同提取约束下的股利支付图

从图 3-1、3-2 可以看出, 随着 x 的增大, 较小的 α 得到的 y^* 经历了先小于、后大于, 最终又小于较大的 α 得到的 y^* 的过程, 即当 x 较小时, 净盈余的大小不足以分配较多的股利, 只能以提取约束要求的最低门槛发放股利, 此时, 较大的提取约束将获得更高的股利; 随着净盈余逐渐增大, 较小的提取约束发放的股利反倒大于较大的 α ; 当净盈余再次增大时, 较大提取约束的历史峰值股利率将发生改变, 也就是说, 历史峰值股利率将在此刻变大. 而历史峰值股利率发生变化会因为提取约束减小而滞后, 就好像对于一个持续盈利的公司来说, 较小的提取约束增加了公司资金的利用率, 而随着 α 的增加, 股利率的下限也会增加, 所以公司不太愿意增加其历史峰值. 同时随着盈余的增加而更积极地投资, 盈余也将进一步增加.

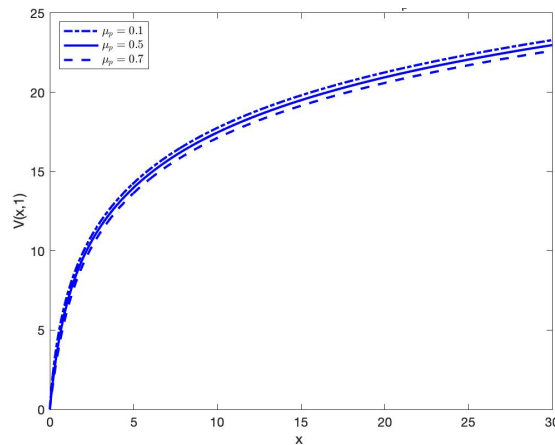


图 3-3 不同提取约束下的值函数图

图 3-3 表示, 当 x 较小时, α 对 $V(x,1)$ 的影响也较小, 也就是说, 当公司的净盈余较少时, 提取约束对公司的价值影响较小. 随着 x 增大时, α 对 $V(x,1)$ 及 y^* 的影响也都逐渐增大. 这也是图 3-1 表示的当提取约束较小时, 所

要求的股利率的下限也降低了,公司能够将资金用于未来的投资,从而来再次增加公司的价值.

3.4 本章小结

本章在对数效用函数下,公司考虑投资决策和股利分配政策,一方面股东不希望公司的股利率低于历史最高值的一个确定比例来约束股利的支付,另一方面公司的目标是为了支付股利的期望贴现效用最大化,从而建立起随机控制问题.运用动态规划原理、勒让德变换等求出了投资决策、股利分配政策以及值函数的显示解.然后利用 Matlab 进行数值模拟,通过给出合理的参数,分析提取约束对股利的分配及公司价值的影响,从而为股份公司找到了最优股利分配的方案.

上述研究结果可以得出的结论是:

- (1) 当 $0 < X_t < \theta_\alpha h_t$ 时,公司以提取约束允许的最低水平 αh_t 支付股利.
- (2) 当 $\theta_\alpha h_t < X_t < \theta_1 h_t$ 时,则 $y_t = \frac{ih_t}{m}$,即公司的盈利能力不高不低,应当以中间水平的股利率来支付股利.
- (3) 当 $\theta_1 h_t < X_t < \theta^* h_t$,此时公司的盈利能力已经处于历史较高水平,因此公司应当以历史峰值股利率 h_t 来支付股利.
- (4) 当 $x > \theta^* h$ 处,这时的公司盈利水平已经超越了以前所有的盈利水平,因此公司相应的也需要考虑将股利率提高到历史最高水平之上,此时的股利支付率为 $\frac{x}{\theta^*}$.

第4章 通胀不确定下股利率在提取和棘轮约束下的最优股利分配

本章在上一章的基础上考虑了通货膨胀对公司价值的影响,并在 CRRA 效用函数下,考虑股利受到提取约束下的最优股利分配问题,其目标是公司破产前最大化支付股利的期望贴现效用. 利用通胀对公司的财富过程进行折现,并采用常相对风险厌恶效用函数,建立相应的随机模型以及最优股利分配模型,得出相应的 HJB 变分不等式作为一个非线性自由边界问题,并通过勒让德变换进行求解. 最后,得到最优股利政策以及投资策略. 利用 Matlab 对结果进行数值模拟,并分析通货膨胀以及提取约束对股利政策的影响.

4.1 构建模型

假设在一个完备的金融市场上,用 π_t 来表示公司在 t 时刻的投资决策,投资政策取决于公司对外界发行或者回购多少债券,债券利率以固定利率 $r \geq 0$ 发行,在这样的市场上,公司需要决定其投资和股利政策.

4.1.1 通货膨胀

假设通货膨胀是一个随机过程,其消费品的价格水平 $P(t)$ 服从如下的随机微分方程:

$$\frac{dP(t)}{P(t)} = \mu_p dt + \sigma_p dW_t,$$

其中, μ_p 为通货膨胀率, σ_p 为波动率.

4.1.2 资产模型

用 $S_N(t)$ 表示公司总资产的名义价值, $S(t)$ 表示公司总资产的真实价值. $S_N(t)$ 遵循几何布朗运动设且在 $[0, t]$ 期间不发放股利,则 $S_N(t)$ 满足以下随机微分方程:

$$\frac{dS_N(t)}{S_N(t)} = (\mu_s + r) dt + \sigma_s dW_t,$$

其中, $\mu_s > 0$ 表示恒定的风险溢价, $\sigma_s > 0$ 表示波动率, W 为给定概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ 上的标准布朗运动.

对于股利政策, 要求当 $t > 0$ 时, $Y(t) \geq rX(t)$, 则 $y(t) = Y(t) - rX(t), t \geq 0$. 且假定超额股利率满足提取约束, 即 $y(t) \geq \alpha h_t$.

4.1.3 净盈余过程

给定投资政策和超额股利政策, 因此净盈余的名义价值满足下式:

$$\begin{aligned} dX_N(t) &= \pi_N(t) \frac{dS_N(t)}{S_N(t)} + [r(X_N(t) - \pi_N(t)) - Y_N(t)]dt \\ &= (\mu_s \pi_N(t) - y_N(t))dt + \sigma_s \pi_N(t) dW_t, \end{aligned} \quad (4.1)$$

其中, $X_N(t)$ 为净盈余的名义价值, 则净盈余的真实价值 $X(t) = \frac{X_N(t)}{P(t)}$, 类似

地, $\pi(t) = \frac{\pi_N(t)}{P(t)}$, $Y(t) = \frac{Y_N(t)}{P(t)}$, $y(t) = \frac{y_N(t)}{P(t)}$ 有着同样的关系.

根据伊藤公式, 有

$$dX(t) = \frac{dX_N(t)}{P(t)} + X_N(t) d\left(\frac{1}{P(t)}\right) + dX_N(t) d\left(\frac{1}{P(t)}\right), \quad (4.2)$$

其中, $d\left(\frac{1}{P(t)}\right) = \frac{\sigma_p^2 dt - \mu_p dt - \sigma_p dW_t}{P(t)}$, 将式 (4.1) 代入 (4.2) 可得

$$\begin{aligned} dX(t) &= [(\mu_s - \sigma_s \sigma_p) \pi(t) - y(t) + (\sigma_p^2 - \mu_p) X(t)]dt \\ &\quad + (\sigma_s \pi(t) - \sigma_p X(t)) dW_t, \end{aligned} \quad (4.3)$$

其中, $X_0 = X > 0$. 对于 $(\pi_t, y_t)_{t \geq 0}$ 需要满足以下条件:

(1) π_t 适应于 $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, $\pi_t \geq 0$, $\int_0^\infty \pi_t^2 dt < \infty$;

(2) y_t 适应于 $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, $\int_0^\infty y_t^2 dt < \infty$;

(3) y_t 是非负的, 且右连左极;

(4) y_t 满足提取约束, 即 $y(t) \geq \alpha h_t$.

当 π_t, y_t 满足以上条件时, 对应的控制过程 (α, h) 对 X_t 是容许的, 可以用 $\mathbb{S}$ 表示, 称为容许控制集 $\mathbb{S}(\alpha, h)$.

4.2 模型求解

4.2.1 优化问题

公司的目标是最大化股利贴现效用的期望值. 破产的时间用 τ 表示, 则 $\tau = \inf \{t \geq 0: X_t \leq 0\}$, 净盈余过程中用于控制 X 的容许控制集 $\mathbb{S}(\alpha, h)$ 可以决定破产时间 τ , 那么公司的目标可以用下式表示:

$$\sup_{(\pi_t, y_t)} \mathbb{E} \left[\int_0^\tau e^{-\delta t} \frac{y_t^{1-\beta}}{1-\beta} dt \right], \quad (4.4)$$

其中, δ 为贴现因子, $\frac{y_t^{1-\beta}}{1-\beta}$ 为代理人的效用函数, 采用的是 CRRA 效用函数,

β 为常数, 表示相对风险厌恶系数不变. 假设 $\frac{1}{1+k\delta} < \beta < 1$, 其中 k 定义为

$k = \frac{2\sigma_s^2}{(\mu_s - \sigma_s \sigma_p)^2}$. β 的可行性约束 $\frac{1}{1+k\delta} < \beta$ 可追溯到 Merton^[60]. 此外, 如果

$\beta > 1$, 则 (4.4) 中的 $\frac{y_t^{1-\beta}}{1-\beta}$ 为负, 且随着 y 的增加而增加, 此时 (4.4) 倾向于

较大的 y 和较小的 τ . 换言之, 公司应当立即破产清算才是最佳选择.

对应于随机控制问题 (4.4) 的值函数为

$$\tilde{V}(x, h) = \sup_{(\pi_t, y_t) \in \mathbb{S}(\alpha, h)} \mathbb{E}^x \left[\int_0^\tau e^{-\delta t} \frac{y_t^{1-\beta}}{1-\beta} dt \right], \quad (4.5)$$

其中, $(x, h) \in \mathbb{R}_+^2$, $\mathbb{E}^x$ 表示 $X_0 = x$ 为条件的期望. 此外, 假设股利的发放具有以下的策略: (1) 当 $X_t < \theta_\alpha h_t$ 时, 则 $y_t = \alpha h_t$. (2) 当 $\theta_\alpha h_t < X_t < \theta_1 h_t$ 时, 则 $y_t = y^*(X_t, h_t)$, $y^*(X_t, h_t)$ 为某一函数. (4) 当 $\theta_1 h_t < X_t < \theta^* h_t$, 则 $y_t = h_t$. (4) 在 $X_t \geq \theta^* h_t$ 处, 可以通过奇异控制来提高股利率, 使得 X_t 能始终保持在 $\theta^* h_t$ 以内.

利用动态规划原理, 可以得

$$\varphi_t = e^{-\delta t} \tilde{V}(x, y) + \int_0^t e^{-\delta s} \frac{y_s^{1-\beta}}{1-\beta} ds,$$

再根据伊藤公式及费曼—卡茨定理, 可得:

$$d\varphi_t = e^{-\delta t} \left\{ -\delta \tilde{V}(x, y) + \tilde{V}_x \left[(\mu_s \pi_t - \sigma_s \sigma_p \pi_t - y_t) + (\sigma_p^2 - \mu_p) x \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \tilde{V}_{xx} (\sigma_s \pi_t - \sigma_p x)^2 + \frac{y_t^{1-\beta}}{1-\beta} \right\} dt + e^{-\delta t} \left\{ (\sigma_s \pi_t - \sigma_p x) \tilde{V}_x dW_t + \tilde{V}_h(x, y) dh \right\}.$$

如果 $V(x, h)$ 是 $\mathbb{C} = \{(x, h) \in \mathbb{R}_+^2 : x \leq \theta^* h, h > 0\}$ 上的一个凹函数, 且满足 (4.6) 的 HJB 方程, 则 $V(x, h) = \tilde{V}(x, h)$. 且 $y^*(x, h) \pi^*(x, h)$ 也满足此方程, 即为最优股利策略.

因此得到 HJB 方程:

$$\begin{cases} 0 = \max_{y \geq \alpha h, \pi} \left\{ -\delta V + \left[(\mu_s - \sigma_s \sigma_p) \pi_t - y_t + (\sigma_p^2 - \mu_p) x \right] V_x \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{2} (\sigma_s \pi_t - \sigma_p x)^2 V_{xx} + \frac{y_t^{1-\beta}}{1-\beta} \right\}, \\ V(0, h) = 0, \\ V_h(\theta^* h, h) = 0, \\ V_{xh}(\theta^* h, h) = 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

4.2.2 减少问题维度并应用勒让德转换

本节则是对未知参数最优股利策略 $y^*(x, h)$, 最优投资策略 $\pi^*(x, h)$ 以及比例系数 $\theta_\alpha, \theta_1, \theta^*$ 的详细推导.

现在, 通过使用放缩来减少问题的维度. 值函数 (4.5) 中的 x 和 h 均是 $1-\beta$ 次方, 有 $V(\xi x, \xi h) = \xi^{1-\beta} V(x, h), \xi > 0$. 因此, 定义 v : $v(\theta) = V(\theta, 1), \theta > 0$.

可以得到以下关系式:

$$\begin{cases} V(x, h) = h^{1-\beta} v(\theta), \\ V_x(x, h) = h^{-\beta} v_\theta(\theta), \\ V_{xx}(x, h) = h^{-\beta-1} v_{\theta\theta}(\theta), \end{cases} \quad (x, h) \in \mathbb{R}_+^2.$$

而 $y(x, h), \pi(x, h)$ 都是关于 h 的一次方, 同理有 $y(x, h) = h\tilde{y}(\theta), \pi(x, h) = h\tilde{\pi}(\theta)$.

那么, (4.6) 式的 HJB 方程可改写为

$$\begin{cases} 0 = \max_{(\tilde{\pi}, \tilde{y}) \in \mathbb{R}_+^2} \left\{ -\delta v + \left[(\mu_s - \sigma_s \sigma_p) \tilde{\pi} - \tilde{y}_t + (\sigma_p^2 - \mu_p) \theta \right] v_\theta \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{2} (\sigma_s \tilde{\pi} - \sigma_p \theta)^2 v_{\theta\theta} + \frac{(\tilde{y})^{1-\beta}}{1-\beta} \right\}, \\ v(0) = 0, \\ (1-\beta)v(\theta^*) = \theta^* v_\theta(\theta^*), \\ \beta v_\theta(\theta^*) + \theta^* v_{\theta\theta}(\theta^*) = 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

由 HJB 方程的一阶条件可得：

$$\tilde{\pi} = -\frac{(\mu_s - \sigma_s \sigma_p) v_\theta}{\sigma_s^2 v_{\theta\theta}} + \frac{\sigma_p \theta}{\sigma_s},$$

$$\tilde{y} = (v_\theta)^{-\frac{1}{\beta}}.$$

定义常数 $j = \mu_p - \frac{\mu_s \sigma_p}{\sigma_s}$. 此外, 股利的支付满足下式

$$\tilde{y}(\theta) = \begin{cases} \alpha, & 0 \leq \theta \leq \theta_\alpha, \\ v_\theta^{-\frac{1}{\beta}}, & \theta_\alpha \leq \theta \leq \theta_1, \\ 1, & \theta_1 \leq \theta \leq \theta^*. \end{cases}$$

将 $\tilde{\pi}$ 、 $\tilde{y}$ 、 j 、 $\tilde{y}(\theta)$ 代入 (4.7) 式, HJB 方程重写为 (4.8) 式

$$\frac{v_\theta^2}{kv_{\theta\theta}} + j\theta v_\theta + \delta v = \begin{cases} \frac{\alpha^{1-\beta}}{1-\beta} - \alpha v_\theta, & 0 \leq \theta \leq \theta_\alpha, \\ \frac{\beta}{1-\beta} (v_\theta)^{-\frac{1-\beta}{\beta}}, & \theta_\alpha \leq \theta \leq \theta_1, \\ \frac{1}{1-\beta} - v_\theta, & \theta_1 \leq \theta \leq \theta^*. \end{cases} \quad (4.8)$$

接下来使用勒让德变换, 即令 $m = v_\theta, u(m) = v(\theta) - \theta m$. 对 θ 微分可得

$\theta = -u_m(m)$, 再对其进行微分可得 $v_{\theta\theta} = -\frac{1}{u_{mm}(m)}$. 此外, 在 0 和 θ^* 处, 可得

$v_\theta(0) = m_0, v_\theta(\theta^*) = m^*$. 然后将其代入 (4.8), HJB 方程就变为欧拉方程形式:

$$m^2 u_{mm} + (kj + k\delta) m u_m - k\delta u = \begin{cases} k\alpha m - \frac{k\alpha^{1-\beta}}{1-\beta}, & \alpha^{-\beta} \leq m \leq m_0, \\ -\frac{k\beta}{1-\beta} m^{\frac{1-\beta}{\beta}}, & 1 \leq m \leq \alpha^{-\beta}, \\ km - \frac{k}{1-\beta}, & m^* \leq m \leq 1. \end{cases} \quad (4.9)$$

而 (4.7) 中的边界条件 $v(0) = 0$ ，就有变成了自由边界条件

$$u(m_0) = 0,$$

$$u_m(m_0) = 0.$$

同时，平滑粘贴条件和超接触条件则分别有以下变换

$$(1-\beta)u(m^*) + \beta m^* u_m(m^*) = 0, \quad (4.10)$$

$$\beta m^* u_{mm}(m^*) + u_m(m^*) = 0. \quad (4.11)$$

利用二阶微分方程求解方法对 (4.9) 求通解，通过边界条件 $u(m_0) = 0$ ， $u_m(m_0) = 0$ ，可解得 C_1 和 C_2 ，由于 $u(m)$ 在边界点上有二阶导数连续，即原方程及其一阶导数在分段点 $\alpha^{-\beta}$ 和 1 处连续，因此可求 C_3 、 C_4 、 C_5 和 C_6 。且满足 $1/1 + k\delta < \beta < 1$ ，则可解得 $u(m)$ 的表达式，其表达式由下式给出：

$$u(m) = \begin{cases} C_1 m^{\lambda_1} + C_2 m^{\lambda_2} + \frac{\alpha}{j} m + \frac{\alpha^{1-\beta}}{(1-\beta)\delta}, & \alpha^{-\beta} \leq m \leq m_0, \\ C_3 m^{\lambda_1} + C_4 m^{\lambda_2} + \frac{k\beta^3}{(1-\beta)[(kj\beta-1)(1-\beta)+k\delta\beta]} m^{\frac{1-\beta}{\beta}}, & 1 \leq m \leq \alpha^{-\beta}, \\ C_5 m^{\lambda_1} + C_6 m^{\lambda_2} + \frac{1}{j} m + \frac{1}{(1-\beta)\delta}, & m^* \leq m \leq 1. \end{cases} \quad (4.12)$$

其中，

$$\lambda_1 = \frac{-(kj + k\delta - 1) + \sqrt{(kj + k\delta - 1)^2 + 4k\delta}}{2},$$

$$\lambda_2 = \frac{-(kj + k\delta - 1) - \sqrt{(kj + k\delta - 1)^2 + 4k\delta}}{2},$$

$$C_1 = \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)m_0^{\lambda_1}} \left(\frac{(\lambda_2 - 1)\alpha m_0}{j} + \frac{\lambda_2 \alpha^{1-\beta}}{\delta(1-\beta)} \right),$$

$$C_2 = \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)m_0^{\lambda_2}} \left(\frac{(\lambda_1 - 1)\alpha m_0}{j} + \frac{\lambda_1 \alpha^{1-\beta}}{\delta(1-\beta)} \right),$$

$$\begin{aligned}
 C_3 &= C_1 + \frac{\alpha^{(\lambda_1-1)\beta+1}}{(\lambda_2-\lambda_1)} \left(\frac{\lambda_2-1}{j} + \frac{\lambda_2}{(1-\beta)\delta} - \frac{k\beta^2(\lambda_2\beta+1-\beta)}{(1-\beta)((1-\beta)(kj\beta-1)+k\delta\beta)} \right), \\
 C_4 &= C_2 + \frac{\alpha^{(\lambda_2-1)\beta+1}}{(\lambda_2-\lambda_1)} \left(-\frac{\lambda_1-1}{j} - \frac{\lambda_1}{(1-\beta)\delta} - \frac{k\beta^2(\lambda_1\beta+1-\beta)}{(1-\beta)((1-\beta)(kj\beta-1)+k\delta\beta)} \right), \\
 C_5 &= C_1 + \frac{\alpha^{(\lambda_1-1)\beta+1}-1}{(\lambda_2-\lambda_1)} \left(\frac{\lambda_2-1}{j} + \frac{\lambda_2}{(1-\beta)\delta} - \frac{k\beta^2(\lambda_2\beta+1-\beta)}{(1-\beta)((1-\beta)(kj\beta-1)+k\delta\beta)} \right), \\
 C_6 &= C_2 + \frac{\alpha^{(\lambda_2-1)\beta+1}-1}{(\lambda_2-\lambda_1)} \left(-\frac{\lambda_1-1}{j} - \frac{\lambda_1}{(1-\beta)\delta} - \frac{k\beta^2(\lambda_1\beta+1-\beta)}{(1-\beta)((1-\beta)(kj\beta-1)+k\delta\beta)} \right).
 \end{aligned}$$

在 $m = m^*$ 处, 有 (4.10) 与 (4.11) 这个边界条件, 因此可得到下面两个等式:

$$\begin{aligned}
 C_5 &= \frac{(1-\lambda_2)\delta m^* - \lambda_2 j}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\beta(\lambda_1 - 1) + 1)j\delta(m^*)^{\lambda_1}}, \\
 C_6 &= \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\beta(\lambda_2 - 1) + 1)(m^*)^{\lambda_2-1}} \left(\frac{\lambda_1}{\delta m^*} - \frac{1-\lambda_1}{j} \right).
 \end{aligned}$$

图 4-1、4-2、4-3 是由式 (4.12) 给出的针对特定参数代入到 $u(m)$ 、 $u_m(m)$ 及 $u_{mm}(m)$ 的表示图, 从图上看到 $u(m)$ 是光滑的. 假设参数的选定值分别为 $\mu_s = 0.08$, $\mu_p = 0.01$, $\sigma_s = 0.2$, $\sigma_p = 0.2$, $\delta = 0.2$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.8$. 需要注意的是, 这里有由 m_0 和 m^* 分别求得两个 C_5 和两个 C_6 , 在数值模拟时, 需要令其相等, 以此来解出 m_0 和 m^* . 图中, 垂直虚线分别为 $m = m_0 = 0.5820$, $m = m^* = 9.9598$.

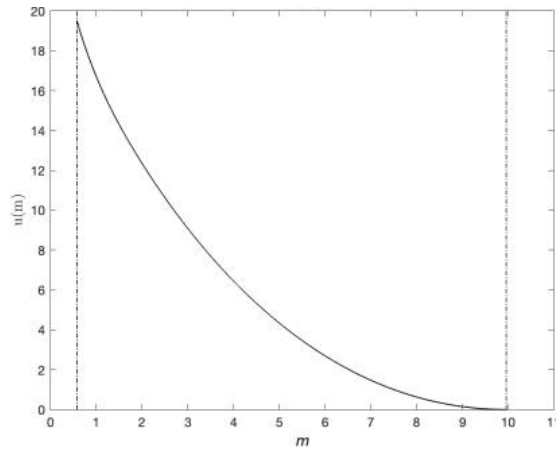
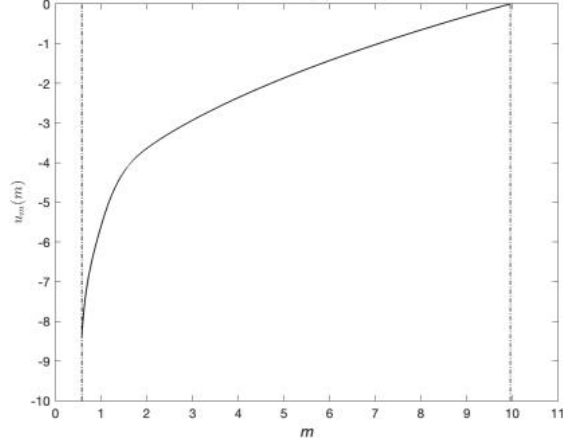
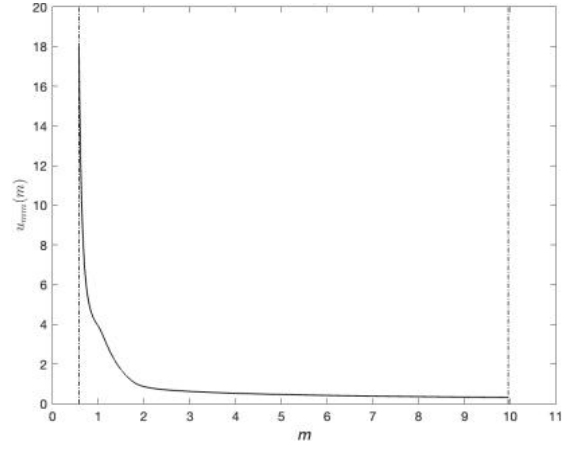


图 4-1 $u(m)$ 关于 m 的表示图


 图 4-2 $u_m(m)$ 关于 m 的表示图

 图 4-3 $u_{mm}(m)$ 关于 m 的表示图

4.2.3 反转勒让德并得到最优股利策略

以上求解出来的是利用勒让德变换后的自由边界问题的 $u(m)$ ，现在通过反转勒让德变换来获得 $v(\theta)$ 。具体来说，即令

$$v(\theta) = u(m) - u_m(m)m,$$

$$\theta = -u_m(m),$$

可得

$$\begin{cases} \theta_\alpha = -u_m(\alpha^{-\beta}) = -C_1\lambda_1\alpha^{-\beta(\lambda_1-1)} - C_2\lambda_2\alpha^{-\beta(\lambda_2-1)} - \frac{\alpha}{j}, \\ \theta_1 = -u_m(1) = -C_5\lambda_1 - C_6\lambda_2 - \frac{1}{j}, \\ \theta^* = -u_m(m^*) = -C_5\lambda_1(m^*)^{\lambda_1-1} - C_6\lambda_2(m^*)^{\lambda_2-1} - \frac{1}{j}. \end{cases} \quad (4.13)$$

如果 $(x, h) \in \mathbb{C}$, 即 $0 \leq x \leq \theta^* h$, 则 (4.5) 中的值函数、 $\pi^*(x, h)$, $y^*(x, h)$ 分别由 (4.14)、(4.15)、(4.16) 给出,

$$\tilde{V}(x, h) = \begin{cases} h^{1-\beta} \left[(1-\lambda_1)C_1 m^{\lambda_1} + (1-\lambda_2)C_2 m^{\lambda_2} + \frac{\alpha^{1-\beta}}{(1-\beta)\delta} \right], & 0 \leq y \leq \theta_d h, \\ \frac{h^{1-\beta} [(1-\lambda_1)C_3 m^{\lambda_1} + (1-\lambda_2)C_4 m^{\lambda_2} + k\beta^2(2\beta-1)]}{(1-\beta)[(kj\beta-1)(1-\beta) + k\delta\beta]} m^{\frac{\beta-1}{\beta}}, & \theta_d h < y < \theta_l h, \\ h^{1-\beta} \left[(1-\lambda_1)C_5 m^{\lambda_1} + (1-\lambda_2)C_6 m^{\lambda_2} + \frac{1}{(1-\beta)\delta} \right], & \theta_l h \leq y \leq \theta^* h. \end{cases} \quad (4.14)$$

其中, $m \in [m^*, m_0]$ 是 $-u_m(m) = \frac{x}{h}$ 的唯一解.

$$\begin{aligned} \pi^*(x, h) &= -h \frac{(\mu_s - \sigma_s \sigma_p) v_\theta(\theta)}{\sigma_s^2 v_{\theta\theta}(\theta)} + h \frac{\sigma_p \theta}{\sigma_s} \\ &= \frac{(\mu_s - \sigma_s \sigma_p)}{\sigma_s^2} h m(u_{mm}(m)) - h \frac{\sigma_p u_m(m)}{\sigma_s}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$y^*(x, h) = \begin{cases} \alpha h, & 0 \leq x \leq \theta_\alpha h, \\ m^{\frac{1}{\beta}} h, & \theta_\alpha h \leq x \leq \theta_l h, \\ h, & \theta_l h \leq x \leq \theta^* h. \end{cases} \quad (4.16)$$

在 $x = \theta^* h$ 处, 公司通过奇异控制增加超额股利率, 以保持 $(x_t^*, h_t^*) \in \mathbb{C}$, 即保持 $X_t^* \leq \theta^* h_t^*$. 如果 $x > \theta^* h$, 公司将其投资策略设定

$$\pi^*(x, h) = \frac{(\mu_s - \sigma_s \sigma_p)}{\sigma_s^2} h m^*(u_{mm}(m^*)) - h \frac{\sigma_p u_m(m^*)}{\sigma_s}.$$

此时, 公司立即增加超额股利率到 $y^*(x, h) = x/\theta^*$. 对应的值函数为

$$\tilde{V}(x, h) = \left(\frac{x}{\theta^*} \right)^{1-\beta} \left[(1-\lambda_1)C_5 (m^*)^{\lambda_1} + (1-\lambda_2)C_6 (m^*)^{\lambda_2} + \frac{1}{(1-\beta)\delta} \right].$$

此后, 当 $x > \theta^* h$ 时公司才增加超额股利率以始终保持 $X_t^* \leq \theta^* h_t^*$.

4.3 数值分析

为更好地分析通货膨胀因素和提取约束因素对公司股利政策的影响, 本文利用 Matlab 进行了数值模拟, 从而验证了结论的有效性.

4.3.1 通货膨胀因素对股利政策的影响

在模拟中, 分别将通货膨胀率 μ_p 设定为 -0.04, 0.01, 0.036, 其他参数设定如下: $\mu_s = 0.08, \sigma_s = 0.2, \sigma_p = 0.2, \delta = 0.2, \alpha = 0.5, \beta = 0.8$, 在其他参数不变的情况下, 研究通货膨胀率的变化对股利政策的影响如图 4-4 和图 4-5 所示.

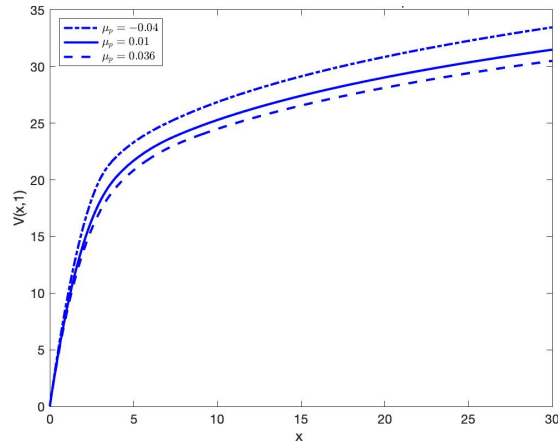


图 4-4 值函数随通货膨胀率的变化图

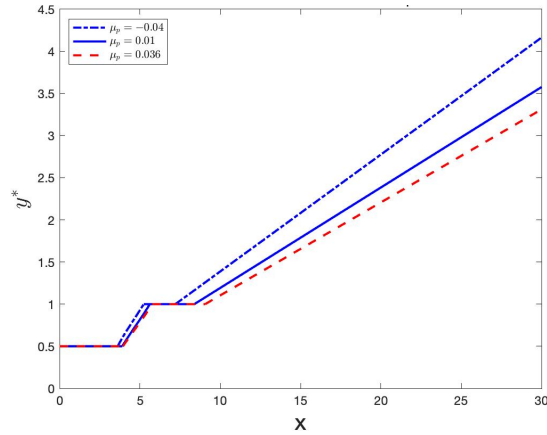


图 4-5 股利随通货膨胀率的变化图

由图 4-4 可知, 通货膨胀越大, 值函数越小, 即通货膨胀率越大, 会使股东财富价值变小. 随着公司盈余的增加, 不同通货膨胀系数对应的值函数之间的差值也逐渐变大, 这就涉及到图 4-5 的内容. 当公司盈余很小时, 即当 $X_t < \theta_a h_t$ 时, 公司以最低的股利支付率支付股利, 此时通货膨胀对值函数的影响也因发放较少的股利而差别很小. 当公司盈余逐渐增加时, 公司发放的股利逐渐增加, 此

时的值函数之间的差别也逐渐变大. 当公司盈余很大时, 即当 $x > \theta^* h$ 时, 值函数之间的差别因股利发放之间差额的逐渐增大而增大.

另外值得关注的是, 由于通货膨胀系数的存在, 公司提高最低股利支付率及将股利支付提高到历史最高值所要求的 x 的门槛也变化了. 从图 4-4 可知, 通货膨胀系数越大, 所要求的公司盈余也越大.

4.3.2 提取因素因素对股利政策的影响

在模拟中, 分别将提取约束系数 α 设定为 0.2, 0.5, 0.63, 其他参数设定如下: $\mu_s = 0.08, \mu_p = 0.01, \sigma_s = 0.2, \sigma_p = 0.2, \delta = 0.2, \beta = 0.8$, 在其他参数不变的情况下, 研究提取约束系数的变化对股利政策的影响如图 4-6 和图 4-7 所示.

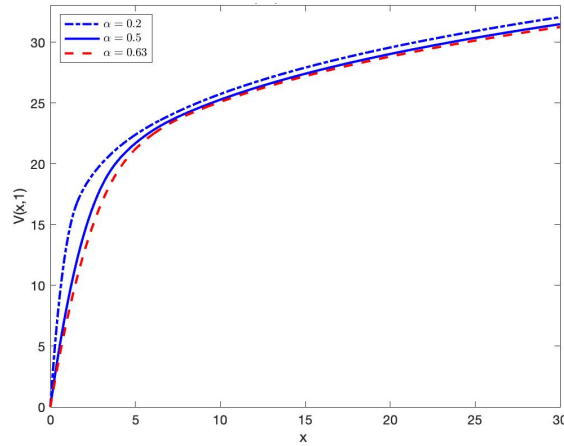


图 4-6 值函数随提取约束的变化图

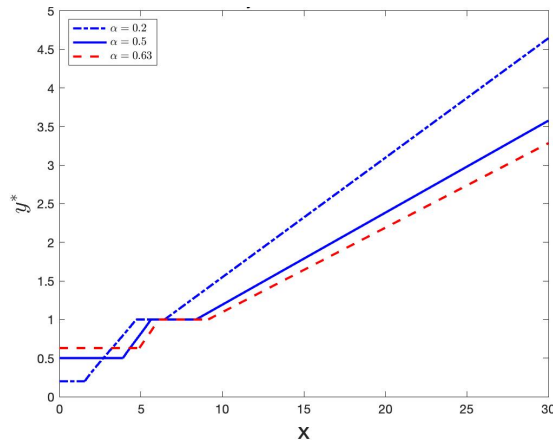


图 4-7 股利随提取约束的变化图

由图 4-6 和图 4-7 可知, 当提取约束较小时, 虽然公司可能会以较低的股利支付率来支付股利, 但是却有更高的值函数及股利支付率. 这是因为对于一个持续盈利的公司而言, 倘若公司的盈余很低, 更低的提取约束系数允许公司以更低的股利支付率来支付股利, 这就使得公司能保留更多的资金在未来发展, 而较高的提

取约束系数使得公司支付更高的股利,影响了公司的现金流,限制了公司未来的发展.此外,由图 4-6 还看出,较低的提取约束在提高股利支付时有更大的优势,它要求的公司盈余的门槛也较低.

4.4 本章小结

本章基于通货膨胀不确定的环境下和防止股利率低于历史最高值的某个确定比例的约束下,研究了最优股利政策,得出的结论为,股利的发放应具有以下的策略:

(1) 当 $X_t < \theta_\alpha h_t$ 时,则 $y_t = \alpha h_t$. 即此时净盈余比较小,则公司以提取约束允许的最低水平支付股利。

(2) 当 $\theta_\alpha h_t < X_t < \theta_1 h_t$ 时,则 $y_t = m^{-\frac{1}{\beta}} h_t$, 其取值范围为 $(\alpha h_t, h_t)$. 即公司的净盈余的水平处于不高不低状态,公司应当以高于最低股利率,但低于历史峰值股利率支付股利.

(3) 当 $\theta_1 h_t < X_t \leq \theta^* h_t$, 则 $y_t = h_t$. 即公司的净盈余非常大,公司应当以历史峰值股利率支付股利,但不可将股利率提高到历史峰值之上.

此外,在 $x > \theta^* h$ 处,可以通过奇异控制来提高股利率,使得 X_t 能始终保持在 $\theta^* h_t$ 以内.

最后,在实际应用过程中,不能忽视通货膨胀所带来的影响.当公司处于通货膨胀环境中,股东又希望股利的支付不能低于历史最高股利的某个比例的情况下,本文则给出了相应的股利分配政策,以此来实现股东财富总价值的增长.

第5章 总结与展望

股利分配政策近年来备受监管机构、投资者以及分析师的关注,一方面能考验公司的财务管理能力,另一方面对于公司的内部管理和价值提升也有重要的影响. 本文首先考虑的是投资者和分析师对公司的期望,即对股利支付率施加提取和棘轮约束下如何分配公司盈余;其次,在不希望股利率下降到某一确定比例的情况下还考虑了通货膨胀这一不确定性因素对最优股利分配政策的影响. 主要工作和相关结论如下:

(1) 首先构建金融模型,公司需要对投资决策和股利分配政策进行抉择,当股利支付率降低时,股东和分析师难免会对公司未来的发展产生悲观情绪,并做出负面反应甚至反应过度. 在此基础上,考虑了股东对减少股利支付的厌恶就显得尤为重要,由此对股利率施加一个提取和棘轮约束. 目标是在公司破产前将已支付股利的期望贴现效用最大化,在对公司的风险厌恶表示上采用对数效用函数,建立相应的随机模型以及最优股利分配模型,最后,得到最优股利政策并利用 Matlab 对结果进行数值模拟,分析提取约束对股利政策的影响.

(2) 考虑了通货膨胀因素对公司资产模型的影响,通过折现、伊藤引理得到公司的真实资产价值,同时也对股利率施加提取约束,以此建立公司的金融模型. 另一方面,由于每个公司对风险的厌恶程度不同,也需要考虑不同的公司所适用的效应函数,所以采用 CRRA 效用函数来建立最优股利分配模型,得出 HJB 变分不等式,然后通过降维及勒让德变换进行求解,得到最优股利政策和投资政策,并利用 Matlab 对结果进行数值模拟,分析通货膨胀和提取约束对股利政策的影响.

在公司进行股利分配方案中,有许多因素都会对最优股利分配决策产生影响,由于自身的水平的局限,研究内容还存在诸多不足,在未来可以在以下三个方面进一步深入研究:

(1) 本文在构建模型时,将公司的债券利率以固定利率发行,但在金融市场上,影响债券利率的因素有很多,例如货币政策、市场流动性、信用评级等. 在构建公司资产模型时,可以将公司的债券利率视为随机波动,从而进行更深入研究.

(2) 在金融市场上,有众多公司在内外部经营环境会发生重大变化生产经营

过程中会发生变化. 这包括公司的重大投资行为和重大的购置财产的决定, 公司在生产经营过程中由于扩建或者自然灾害发生停工停产对公司盈余发生重大影响等. 因此在构建金融模型时可以增加“跳”来考略这一重大变化, 从而使模型更具有现实意义.

(3) 除了本文所用的对数效用函数以及 CRRA 效用函数以外, 其他效用函数同样也具有研究价值. 如二次效用函数下考虑重大变化的最优股利分配问题.

参考文献

- [1] De Finetti B. Su un ' impostazione alternativa della teoria collettiva del rischio[C].Transactions of the XVth international congress of Actuaries. 1957, 2(1): 433-443.
- [2] Avanzi B. Strategies for dividend distribution: A review[J]. North American Actuarial Journal, 2009, 13(2): 217-251.
- [3] Loeffen R L . On optimality of the barrier strategy in de Finetti ' s dividend problem for spectrally negative Lévy processes[J]. Annals of Applied Probability, 2008, 18(5):1669-1680.
- [4] Asmussen S, Taksar M. Controlled diffusion models for optimal dividend pay-out[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 1997, 20(1): 1-15.
- [5] Gerber H U, Shiu E S W. On optimal dividends: From reflection to refraction[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2006, 186(1): 4-22.
- [6] Asmussen S, Højgaard B, Taksar M. Optimal risk control and dividend distribution policies. Example of excess-of loss reinsurance for an insurance corporation[J]. Finance and Stochastics, 2000, 4(3): 299-324.
- [7] Liang Z, Young V R. Dividends and reinsurance under a penalty for ruin[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2012, 50(3): 437-445.
- [8] Cai J, Gerber H U, Yang H. Optimal dividends in an Ornstein-Uhlenbeck type model with credit and debit interest[J]. North American Actuarial Journal, 2006, 10(2): 94-108.
- [9] Albrecher H, Hartinger J, Thonhauser S. On exact solutions for dividend strategies of threshold and linear barrier type in a Sparre Andersen model[J]. ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA, 2007, 37(2): 203-233.
- [10] Badescu A , Landriault D . Recursive Calculation of the Dividend Moments in a Multi-threshold Risk Model[J]. North American Actuarial Journal, 2008, 12(1): 74-88.
- [11] Landriault D. Randomized dividends in the compound binomial model with a general premium rate[J]. Scandinavian Actuarial Journal, 2008(1): 1-15.
- [12] Zhang Z, Yang H. The compound Poisson risk model with dependence under a

- multi-layer dividend strategy[J]. *Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities*, 2011, 26(1): 1-13.
- [13] Albrecher H, Bäuerle N, Bladt M. Dividends: From refracting to ratcheting[J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2018, 83: 47-58.
- [14] Bandini E, De Angelis T, Ferrari G, etc. Optimal dividend payout under stochastic discounting[J]. *Mathematical Finance*, 2022, 32(2): 627-677.
- [15] Yan Q, Yang L, Baležentis T, etc. Optimal dividend and capital injection problem with transaction cost and salvage value: The case of Excess-of-Loss reinsurance based on the symmetry of risk information[J]. *Symmetry*, 2018, 10(7): 276.
- [16] Cheng G, Wang R, Yao D. Optimal dividend and capital injection strategy with excess-of-loss reinsurance and transaction costs[J]. *Journal of Industrial & Management Optimization*, 2018, 14(1): 371.
- [17] 孙宗岐, 陈志平. 复合 Poisson-Geometric 风险下保险公司的最优投资-再保-混合分红策略[J]. *工程数学学报*, 2016, 33(5): 463-479.
- [18] 孙宗岐, 刘宣会, 陈思源, 等. 基于注资-有界分红的随机微分投资-再保博弈[J]. *深圳大学学报: 理工版*, 2017 (4): 364-371.
- [19] Zhao Q, Jin Z, Wei J. Optimal investment and dividend payment strategies with debt management and reinsurance[J]. *Journal of Industrial & Management Optimization*, 2018, 14(4): 1323.
- [20] Guo M, Shu H. Optimal proportion reinsurance and investment strategy under constant boundary dividend strategy[J]. 2019 (8.4): 708-715.
- [21] Jin Z, Yang H, Yin G. A hybrid deep learning method for optimal insurance strategies: Algorithms and convergence analysis[J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2021, 96: 262-275.
- [22] Harrison J M, Sellke T M, Taylor A J. Impulse control of Brownian motion[J]. *Mathematics of Operations Research*, 1983, 8(3): 454-466.
- [23] Cadenillas A, Choulli T, Taksar M, et al. Classical and impulse stochastic control for the optimization of the dividend and risk policies of an insurance firm[J]. *Mathematical Finance: An International Journal of Mathematics, Statistics and Financial Economics*, 2006, 16(1): 181-202.

- [24] Cadenillas A, Sarkar S, Zapatero F. Optimal dividend policy with mean - reverting cash reservoir[J]. *Mathematical Finance*, 2007, 17(1): 81-109.
- [25] Paulsen J. Optimal dividend payments until ruin of diffusion processes when payments are subject to both fixed and proportional costs[J]. *Advances in Applied Probability*, 2007, 39(3): 669-689.
- [26] Bai L, Paulsen J. Optimal dividend policies with transaction costs for a class of diffusion processes[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2010, 48(8): 4987-5008.
- [27] Meng H, Siu T K. Optimal mixed impulse-equity insurance control problem with reinsurance[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2011, 49(1): 254-279.
- [28] Bai L, Paulsen J. On non-trivial barrier solutions of the dividend problem for a diffusion under constant and proportional transaction costs[J]. *Stochastic Processes and Their Applications*, 2012, 122(12): 4005-4027.
- [29] Hui M. Optimal impulse control with variance premium principle[J]. *Scientia Sinica Mathematica*, 2013, 43(9): 925-939.
- [30] Shreve S E, Lehoczky J P, Gaver D P. Optimal consumption for general diffusions with absorbing and reflecting barriers[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1984, 22(1): 55-75.
- [31] Loeffen R L. An optimal dividends problem with transaction costs for spectrally negative Lévy processes[J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2009, 45(1): 41-48.
- [32] Bai L, Guo J. Optimal dividend payments in the classical risk model when payments are subject to both transaction costs and taxes[J]. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2010, 2010(1): 36-55.
- [33] Zhou M, Yiu K F C. Optimal dividend strategy with transaction costs for an upward jump model[J]. *Quantitative Finance*, 2014, 14(6): 1097-1106.
- [34] Hackbarth D, Miao J, Morellec E. Capital structure, credit risk, and macroeconomic conditions[J]. *Journal of financial economics*, 2006, 82(3): 519-550.

- [35] Anderson R W, Carverhill A. Corporate liquidity and capital structure[J]. The Review of Financial Studies, 2012, 25(3): 797-837.
- [36] Barth A, Moreno - Bromberg S, Reichmann O. A non-stationary model of dividend distribution in a stochastic interest-rate setting[J]. Computational Economics, 2016, 47(3): 447-472.
- [37] Akyildirim E, Güney I E, Rochet J C, etc. Optimal dividend policy with random interest rates[J]. Journal of Mathematical Economics, 2014, 51: 93-101.
- [38] Jiang Z, Pistorius M. Optimal dividend distribution under Markov regime switching[J]. Finance and Stochastics, 2012, 16(3): 449-476.
- [39] Bolton P, Chen H, Wang N. Market timing, investment, and risk management[J]. Journal of Financial Economics, 2013, 109(1): 40-62.
- [40] Radner R, Shepp L. Risk vs. profit potential: A model for corporate strategy[J]. Journal of economic dynamics and Control, 1996, 20(8): 1373-1393.
- [41] Décamps J P, Mariotti T, Rochet J C, etc. Free cash flow, issuance costs, and stock prices[J]. The Journal of Finance, 2011, 66(5): 1501-1544.
- [42] Avanzi B, Wong B. On a mean reverting dividend strategy with Brownian motion[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2012, 51(2): 229-238.
- [43] Albrecher H, Cani A. Risk theory with affine dividend payment strategies[M]. Number theory – diophantine problems, uniform distribution and applications. Springer, Cham, 2017: 25-60.
- [44] Dybvig P H. Dusenberry's ratcheting of consumption: optimal dynamic consumption and investment given intolerance for any decline in standard of living[J]. The Review of Economic Studies, 1995, 62(2): 287-313.
- [45] Grossman S J, Zhou Z. Optimal investment strategies for controlling drawdowns[J]. Mathematical finance, 1993, 3(3): 241-276.
- [46] Arun T. The Merton problem with a drawdown constraint on consumption[J]. arXiv preprint arXiv: 1210. 5205, 2012.
- [47] 丁传明, 邹捷中. 考虑通货膨胀影响的最优消费投资模型[J]. 中南大学学报 (自然科学版), 2004(01): 167-170.
- [48] Bensoussan A, Keppo J, Sethi S P. Optimal consumption and portfolio decisions

- with partially observed real prices[J]. *Mathematical Finance: An International Journal of Mathematics, Statistics and Financial Economics*, 2009, 19(2): 215-236.
- [49] Lim B H. The effect of inflation risk and subsistence constraints on portfolio choice[J]. *Journal of the Korean Society for Industrial and Applied Mathematics*, 2013, 17(2): 115-128.
- [50] Munk C, Sørensen C, Vinther T N. Dynamic asset allocation under mean-reverting returns, stochastic interest rates, and inflation uncertainty: are popular recommendations consistent with rational behavior?[J]. *International Review of Economics & Finance*, 2004, 13(2): 141-166.
- [51] 姚海祥, 伍慧玲, 曾燕. 不确定终止时间和通货膨胀影响下风险资产的最优投资策略[J]. *系统工程理论与实践*, 2014, 34(5): 1089-1099.
- [52] 费为银, 李淑娟. Knight 不确定下带通胀的最优消费和投资模型研究[J]. *工程数学学报*, 2012, 29(06): 799-806.
- [53] 费为银, 吕会影, 余敏秀. 通胀服从均值回复过程的最优消费和投资决策[J]. *系统工程学报*, 2014, 29(6): 791-798.
- [54] 费为银, 蔡振球, 夏登峰. 跳扩散环境下带通胀的最优动态资产配置[J]. *管理科学学报*, 2015, 18(8): 83-94.
- [55] 费为银, 费晨, 夏登峰, 等. 模型不确定下带通胀的最优消费和投资组合问题研究[J]. *管理工程学报*, 2017 (2): 177-184.
- [56] 梁勇, 费为银, 姚远浩, 等. 通胀和奈特不确定下的养老金最优投资研究[J]. *工程数学学报*, 2015, 32(3): 337-347.
- [57] Angoshtari B, Bayraktar E, Young V R. Optimal Dividend Distribution Under Drawdown and Ratcheting Constraints on Dividend Rates[J]. *Journal on Financial Mathematics*, 2019, 10(2): 547-577.
- [58] Dixit A. A simplified treatment of the theory of optimal regulation of Brownian Motion[J]. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 1991, 15(4): 657-673.
- [59] Dumas B. Super contact and related optimality conditions[J]. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 1991, 15(4): 675-685.
- [60] Merton R C. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time

model[J]. Journal of Economic Theory, 1971, 3(4): 373-413.

硕士期间科研成果

论文:

- [1] 王康, 梁勇. 通胀不确定下带有提取约束的最优股利分配[J]. 合肥学院学报(综合版), 2024, 41 (2), 37-45.
- [2] Yong L, Kang W. Optimal dividend distribution under drawdown and ratcheting constraints on dividend rates in inflation uncertainty.(Submitted)

项目:

- [1] 安徽省高端装备智能控制国际联合研究中心开放基金“G-布朗运动驱动的随机神经网络指数稳定性研究”(IRICHE-05)(参与)

致 谢

三年沉淀，汇聚于此。2024年夏，学业生涯即将告一段落。回首二十年的求学之旅，所有的相遇，皆是感恩。

首先，我要特别感谢我的导师梁勇副教授，在论文的选题、研究和撰写过程中，梁勇老师都会在繁忙的教学工作中，挤出宝贵的时间来审查和修改我的论文，给予了我无私的帮助和指。他严谨细致的治学态度深深感染了我，让我在这三年的硕士学习中进步很多，在此，衷心的感谢梁勇老师。其次，感谢学校和学院的潘海峰老师、李志民老师、姜培华老师、张伟老师、张玥老师、王斌老师、方永胜老师等的授业解惑，为我撰写论文打下坚实的基础。祝愿老师们工作顺利，平安幸福。

还要感谢我的舍友以及数学班的一些同学，他们在我学习生活中给予了关心和帮助，让我的学习和生活变得更加丰富多彩。祝同学们前程似锦。

特别感谢我的父母姐姐和一直关心我的亲人，感谢你们对我不求回报的付出，尊重着我的每一个决定，为我营造和谐轻松的家庭氛围，让我内心充满着能量。愿你们平安健康。

最后，当然也要感谢在黑暗泥泞中始终保持乐观，不断奔跑的自己。

向百忙之中抽出时间参加论文评阅和答辩的诸位专家教授致以诚挚的谢意。

王康

2024年5月